مصطفی لطیفیان-40122193

تکلیف شماره یک کنترل خطی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

1) حل دستی

مصطفی لطیفیان ـ ٤٠١٢٢١٩٣

-۱

$$\%MP = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\Longrightarrow 44.2\% = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\Longrightarrow 0.442 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \xrightarrow{L_n} 0.814 = \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\Longrightarrow 0.259 = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 0.0671 = \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$\Longrightarrow 0.0671 = 1.0671\,\zeta^2$$

$$\Longrightarrow \zeta^2 = 0.0629$$

$$\Longrightarrow \zeta = 0.2508$$

← مقدار منفی هم دارد که غیرقابل قبول است زیرا $1>\zeta$ که باید باشد

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} L_n\left(\frac{100}{a\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \xrightarrow{a=2\%} 1.41 = \frac{1}{0.25\,\omega_n} L_n\left(\frac{100}{2\sqrt{1-0.25^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow 0.35 = \frac{3.944}{\omega_n} \Longrightarrow \omega_n = 11.268$$

← راه دیگر: در معیار ۲٪ داریم: $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad L(s) \to \text{بهره حلقه باز} \Rightarrow \frac{k\omega_n^2}{s^2+2s\zeta\omega_n+\omega_n^2} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$L(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2+2s\zeta\omega_n^2+\omega_n^2-k\omega_n^2}$$

$$\Rightarrow L(s) = \frac{126.78\,k}{s^2+5.65\,s+126.78(1-k)}$$

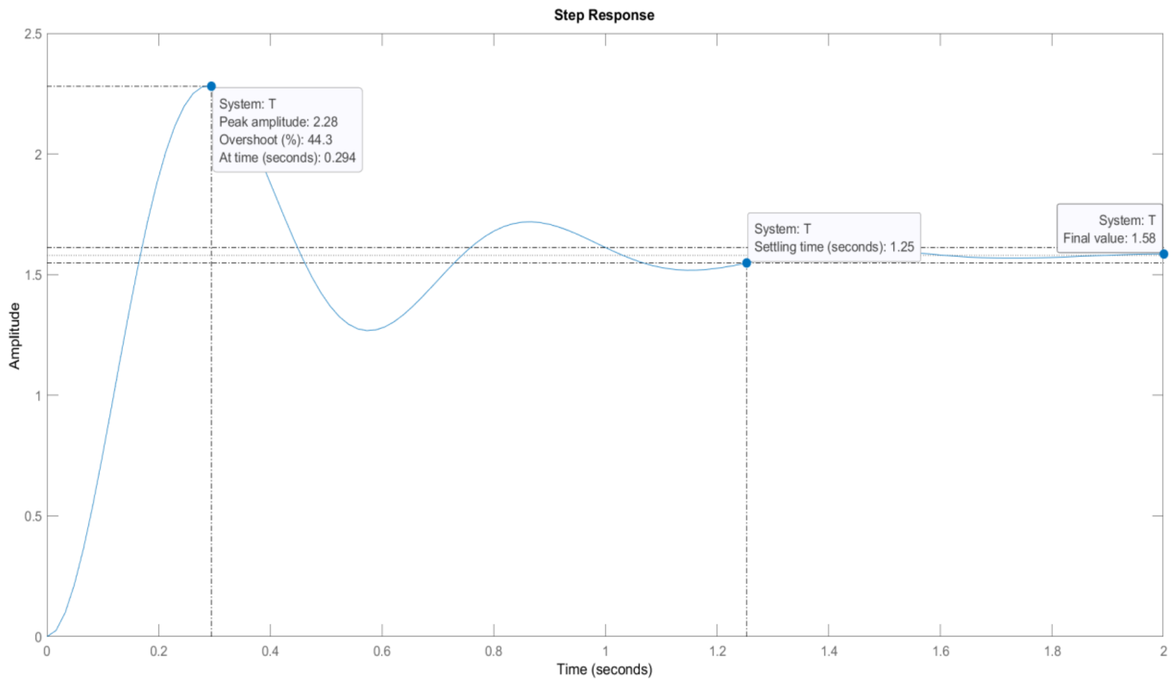
یافتن k $\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} y_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y_{ss}(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot T(s) = 1.58$

$$\frac{k\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1.58 \to k = 1.58$$

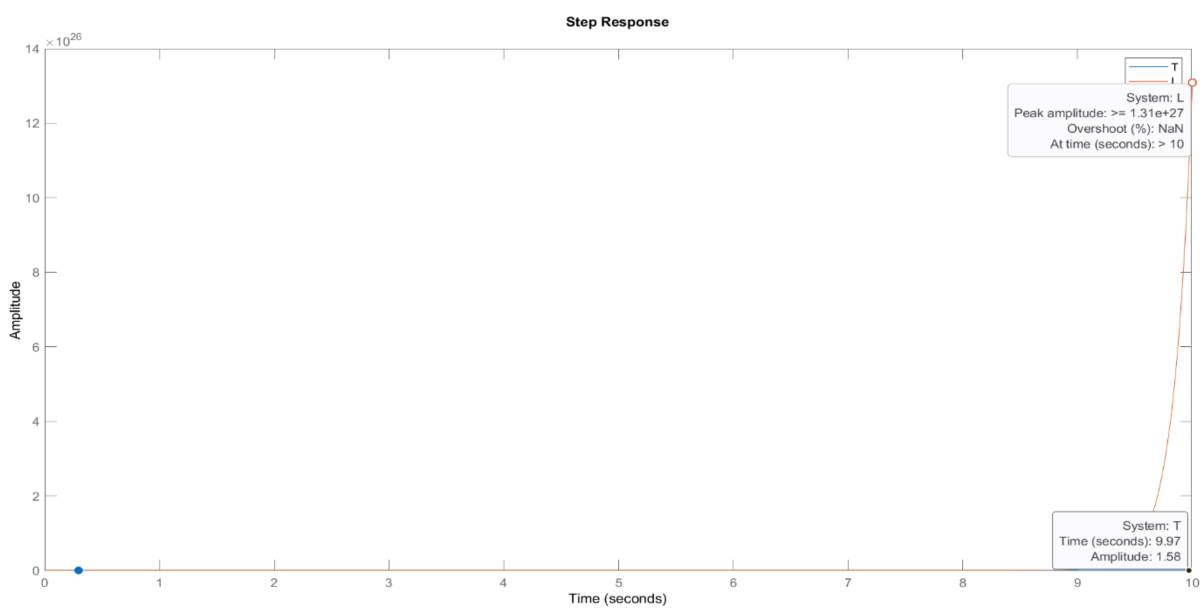
حل با متلب

```
clc; clear; close all;
s = tf('s');
T = (200.60) / (s^2 + 5.63*s + 126.96)
L = 200.18 / (s^2 + 5.63*s - 73.08 )
step(T)
hold on
step(L)
legend('T','L')
```

پاسخ سیستم حلقه بسته:

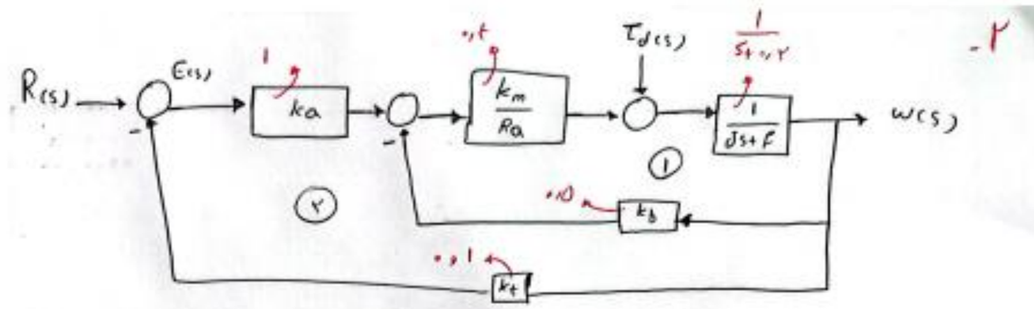


مقایسه پاسخ به سیستم حلقه باز و حلقه بسته:



همانطور که از شکل مشخص است پاسخ پله سیستم حلقه باز ناپایدار و پاسخ سیستم حلقه بسته پایدار است.

2) الف حل دستی



الف)

$T_d = 0 \rightarrow \frac{W(s)}{R(s)} = T(s)$

حلقه اول $\Rightarrow T_1(s) = \dfrac{\frac{0.4}{s+0.2}}{1+\frac{0.4}{s+0.2}\times 0.5} = \dfrac{0.4}{s+0.4}$

حلقه دوم $\Rightarrow T_2(s) = \dfrac{\frac{0.4}{s+0.4}}{s+\frac{0.4}{s+0.4}} = \dfrac{0.4}{s+0.8} \Longrightarrow T(s) = \dfrac{0.4}{s+0.8}$

حلقه باز $\Longrightarrow L(s) = \dfrac{0.4}{s+0.4}$

ب حل دستی

ب) همانطور که قابل حدس بود تمام موارد ذکر شده در سیستم حلقه باز نقض این موارد در سیستم حلقه بسته هستند.

$k_s = \lim_{s \to 0} L(s) = \frac{0.4}{0.4} = 1$ ⇐ سیستم نوع صفر ← خطای ماندگار

$e_{ss} = \frac{R(s)}{1+k_s} = \frac{1}{1+1} = 0.5$

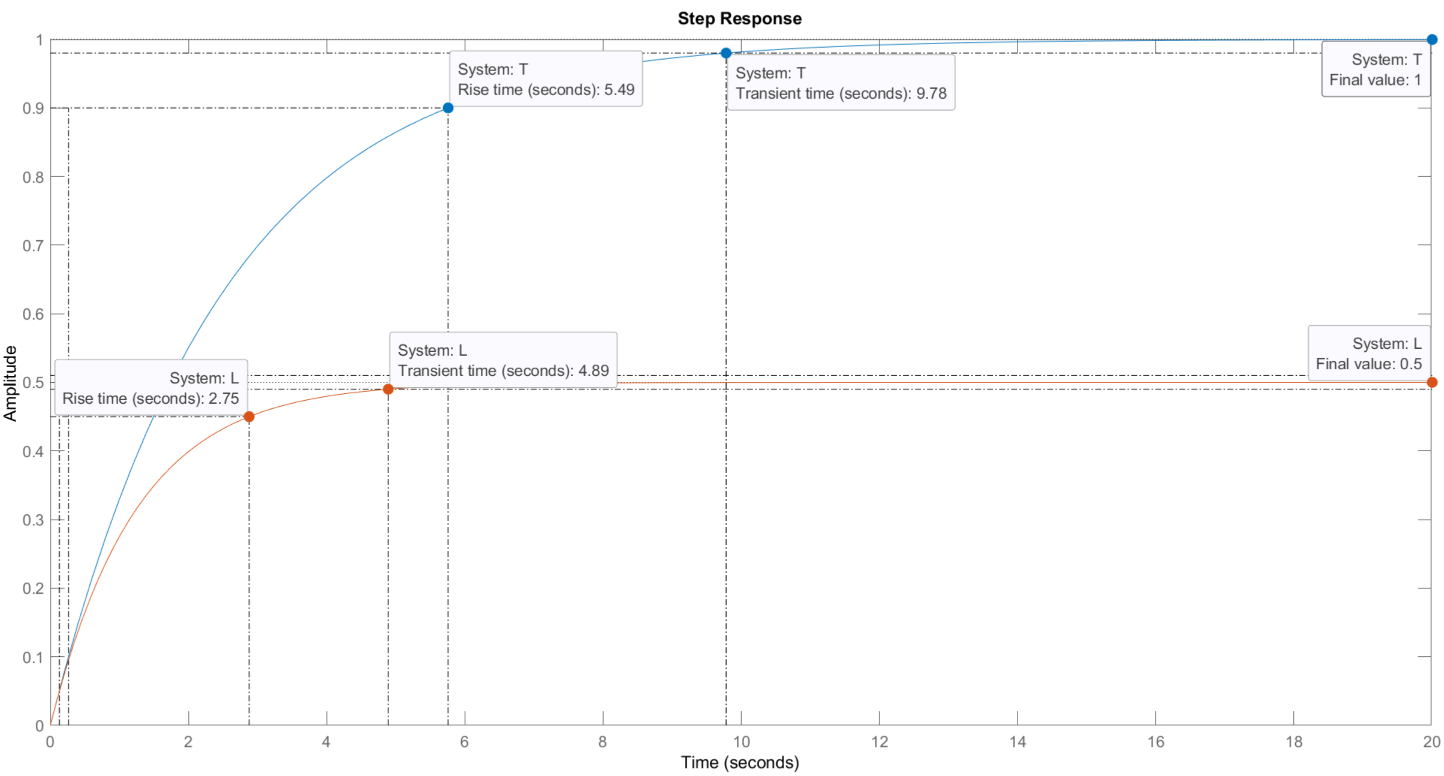
حل با متلب

```
clc; clear; close all;
s = tf('s');
% تعریف تابع تبدیل سیستم حلقه بسته
T = 0.4 / (s+0.8);
% تعریف تابع تبدیل سیستم حلقه باز
L = 0.4 / (s+0.4);
%% رسم پاسخ پله
step(L,20)
hold on
step(T,20)
legend('T','L')
%% اندازه گیری خطای حالت ماندگار سیستم
Kp = dcgain(L);
ess = 1 / (1 + Kp)
```

```
Ans =

ess=


          0.5000
```



طبق انتظار تمام موارد ذکر شده در سیستم حلقه باز نصف سیستم حلقه بسته است.

3) الف

۳ـ الف)

$$\text{if } k=16 \Rightarrow L(s)=\frac{16}{s^2+4s}$$

$$\Rightarrow T(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{16}{s^2+4s+16} \longrightarrow \omega_n=4 \,,\ \zeta=0.5$$

- خطای حالت ماندگار: به علت اینکه سیستم نوع یک است خطای حالت ماندگار به ورودی پله برابر صفر است.

- max فراجهش:

$$c(t_p)=1+e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=1+e^{\frac{-1.570}{0.866}}=1.1631$$

$$\%MP=16.31\%$$

- زمان نشست:

$$0<\zeta<0.69 \rightarrow t_s=\frac{3.2}{\zeta\omega_n}=\frac{3.2}{2}=1.6s$$

ب)

ب)

$$\%MP=5\% \longrightarrow \zeta=0.707$$

$$T(s)=\frac{k}{s^2+4s+k} \,,\quad \omega_n^2=k$$

$$4=2\zeta\omega_n \Rightarrow \omega_n=2.8288$$

$$\Rightarrow k=8.0024$$

ج) خواسته مسئله با **k=8.004** برآورده شده است، اما درصد فراجهش برابر **4.3**٪ است که این مقدار به دلیل تقریب های استفاده شده است و این موضوع با **k=8.4** برطرف می‌شود.

د) به علت زتا یک پاسخ میرای مرزی می‌شود.

د)

$$\text{if } k=4 \Rightarrow T(s)=\frac{4}{s^2+4s+4} \longrightarrow \begin{matrix}\omega_n=2\\ \zeta=1\end{matrix}$$

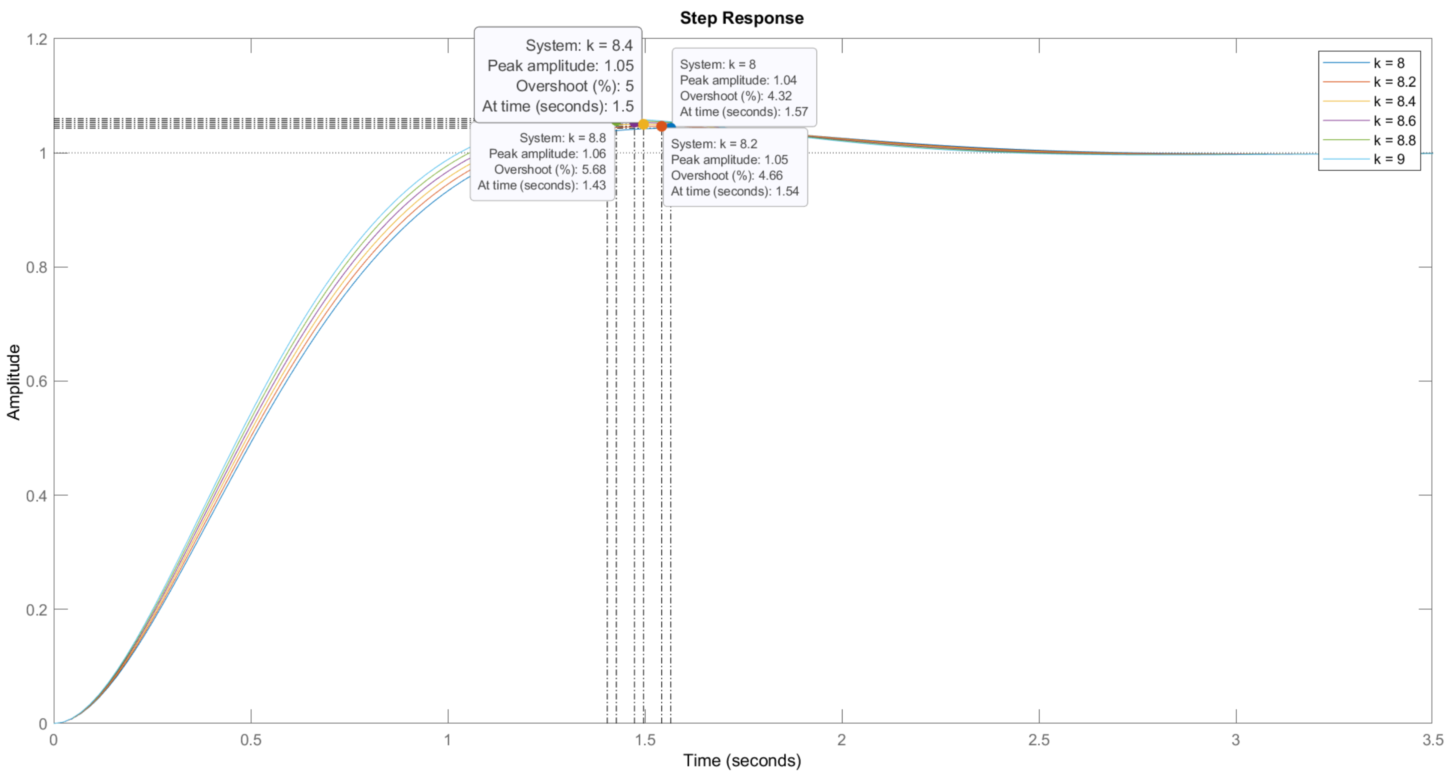
$$\Rightarrow D(s)=s^2+4s+4 \Rightarrow s=-2 \,,$$

ریشه تکرار در منفی ۲

با توجه به اینکه $\zeta=1$ پاسخ میرای بحرانی یا میرای مرزی می‌باشد بنابراین هیچگونه فراجهش یا نوسانی ندارد.

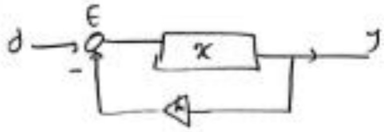
حل قسمت د با متلب

```
clc; clear; close all;
s = tf('s');
%% تعریف  k  های متفاوت برای دستیابی به فراجهش پنج درصد
for k= 8 : 0.2 : 9
    g = k / (s^2 +4*s +k)
    step(g)
    hold on
end
legend('k = 8' , 'k = 8.2' , 'k = 8.4' , 'k = 8.6' , 'k = 8.8' , 'k = 9')
```



(4

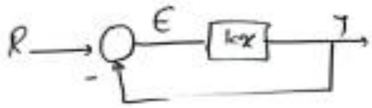
-أ



$$, x = \frac{num(s)}{den(s)}$$

$$\begin{aligned} d - ky &= E \\ Ex &= y \end{aligned} \Rightarrow E = \frac{1}{1+kx}$$

$$\frac{1}{1+kx} = -B \Rightarrow -B - Bkx = 1 \Rightarrow kx = -\frac{1+B}{B}$$



$$\begin{aligned} R - y &= E \\ Ekx &= y \end{aligned} \Rightarrow E = \frac{R}{1+kx}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{1+kx} = -B$$

$$\Rightarrow E = -B$$

ب- برای d داریم:

$$\frac{1}{1+kg} = -B \Rightarrow kg = -(1 + 1/B)$$

$$\Rightarrow \lim_{s \to 0} L(s) = -1 - 1/B \Rightarrow L(s) = \frac{1}{s - \frac{B}{B+1}}$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{kL(s)}{1+L(s)} \Rightarrow T(s) = \frac{k}{s - \frac{B}{B+1} + k}$$

$$kp = \lim_{s \to 0} \frac{k}{s - \frac{B}{B+1} + k} = \frac{(B+1)k}{-B}$$

$$\Rightarrow E_{ss} = \frac{1}{1+kp} = \frac{-B}{kB + k - B} = \frac{B}{B - k(B+1)}$$

(5

-ω

$$I=\int_0^{\infty} e(t)\,dt \quad , X(s)=1/s$$

$$T(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{(A_1s+1)(A_2s+1)\cdots(A_ns+1)}{(B_1s+1)(B_2s+1)\cdots(B_ms+1)}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s) \Rightarrow I=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\, s.E(s)=E(0)$$

$$E(s)=X(s)-Y(s)=1/s-Y(s)$$

$$\Rightarrow E(s)=1/s-\frac{\prod_{i=1}^{n}(A_is+1)}{\prod_{j=1}^{m}(B_js+1)}\cdot 1/s$$

$$\Rightarrow E(s)=1/s\left(1-\frac{\prod_{i=1}^{n}(A_is+1)}{\prod_{j=1}^{m}(B_js+1)}\right)$$

$$\Rightarrow E(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(B_js+1)-\prod_{i=1}^{n}(A_is+1)}{s\prod_{i=1}^{m}(B_js+1)}$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(a_is+1)=1+(a_1+a_2)s+(a_1a_2)s^2+\cdots$$

$$\Rightarrow E(s)=\frac{s\left(\prod_{j=1}^{m}B_j-\prod_{i=1}^{n}A_i\right)}{s}=\underbrace{\prod_{j=1}^{m}B_j-\prod_{i=1}^{n}A_i}_{=E(0)}$$