مصطفی لطیفیان-40122193

تکلیف شماره پنج کنترل خطی

سوال 1) حل دستی

۱-

$$G(s) = k\frac{e^{-sT}}{s} \Rightarrow G(j\omega) = k\frac{e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

برای یافتن Gm باید فرکانس گذر فاز را بیابیم:

$$\angle G(j\omega) = -T\omega - 90 = -180$$

$$\Rightarrow -T\omega = -90 \Rightarrow \omega = 90/T = \frac{\pi}{2T}$$

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{k}{\omega}\right| \xrightarrow[\omega=\frac{\pi}{2T}]{if} \left|G\left(j\frac{\pi}{2T}\right)\right| = \left|\frac{k}{\pi}\times 2T\right| = \frac{2kT}{\pi}$$

$$\Rightarrow G_m = 20\log_{10}\frac{1}{|G(j\omega_p)|} = -20\log_{10}\frac{2kT}{\pi}$$

برای یافتن Pm باید فرکانس گذر بهره را بیابیم:

$$|G(j\omega)| = 1 = 0\,dB \Rightarrow \frac{k}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega = k$$

$$P_m = \angle G(j\omega_g) - 180 \Rightarrow P_m = -kT + 90^\circ \Rightarrow P_m = -kT + \pi/2$$

برای پایداری سیستم:

$$G_m > 0 \Rightarrow -20\log\frac{2kT}{\pi} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{2kT}{\pi} < 1 \Rightarrow 0 < k < \frac{\pi}{2T} \quad (1)$$

$$P_m > 0 \Rightarrow -kT + \pi/2 > 0 \Rightarrow k < \frac{\pi}{2T} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 0 < k < \frac{\pi}{2T}$$

2) حل دستی

-۲

$$G(s)=\frac{k(s+2)}{s^2} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{k(j\omega+2)}{j^2\omega^2}=\frac{k(j\omega+2)}{-\omega^2}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{k\sqrt{\omega^2+4}}{\omega^2} \quad , \quad |G(j\omega)|=1 \Rightarrow k\sqrt{\omega^2+4}=1\times\omega^2$$

$$P_M=\angle G(j\omega_c)-180 \Rightarrow tg^{-1}(\omega/2)-0-180=45^\circ$$

$$\Rightarrow tg^{-1}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)=225$$

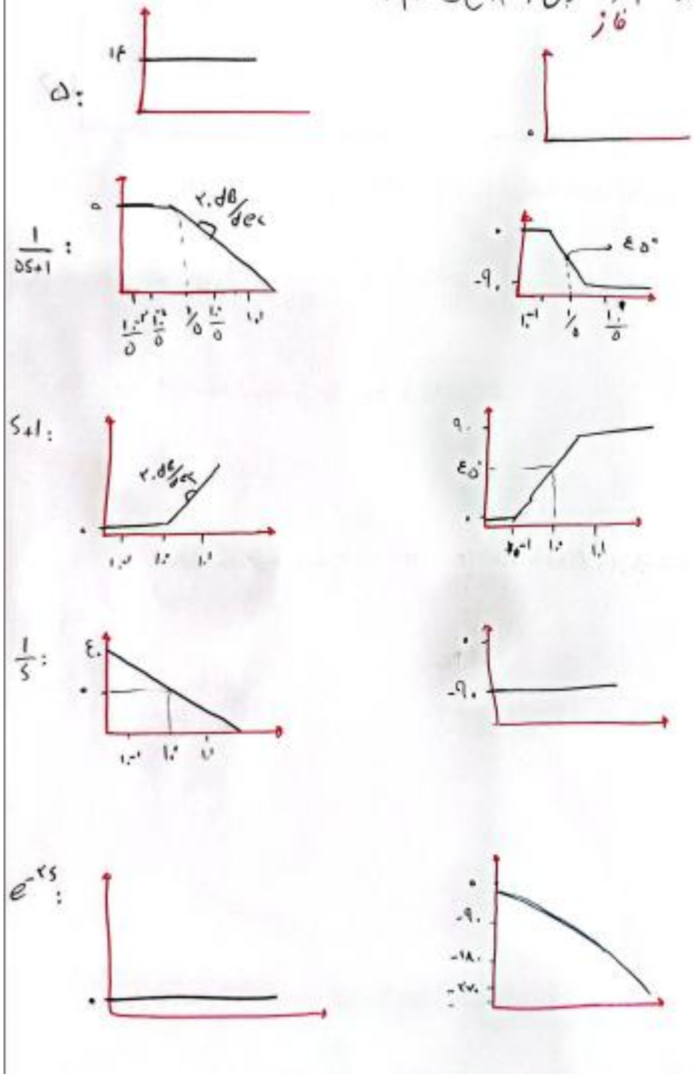
$$\Rightarrow \omega_c=2$$

$$\Rightarrow k\times\sqrt{4+4}=4 \Rightarrow k\sqrt{8}=4 \Rightarrow k=\frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{2}$$

3) حل دستی

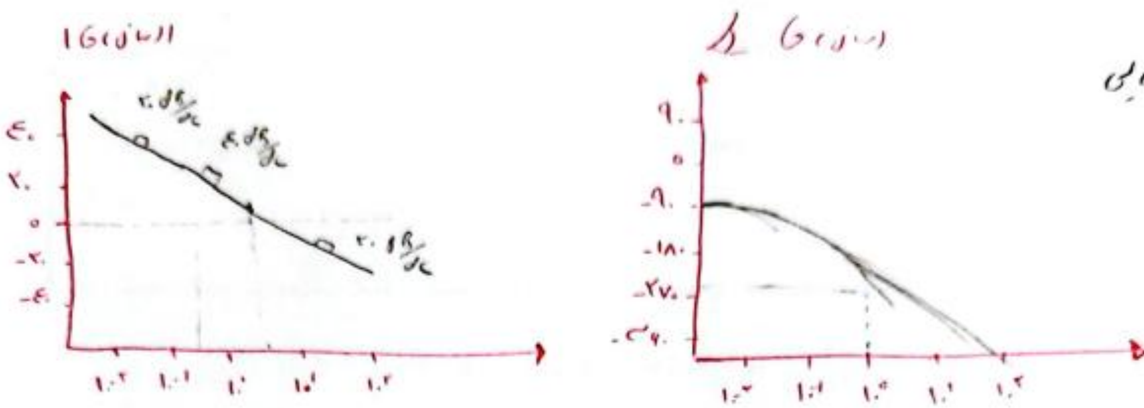
نمودار بود تک تک عبارات را رسم کرده و سپس باهم جمع می کنیم :



۳-

$$G(s) = \frac{5}{5s+1} \times e^{-2s} \times \frac{s+1}{s}$$

نمودار بود نهایی



$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)} = \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega - 5\omega^2}$$

$$\angle G(j\omega) = tg^{-1}(\omega) - 2\omega - (90 + tg^{-1}(5\omega)) = -180$$

$$\Rightarrow tg^{-1}(\omega) - tg^{-1}(5\omega) - 2\omega = \overset{1.57\ rad}{-90}$$

با استفاده از حدس و خطا $w_p = 0.62$

$$|G(j\omega_p)| = \left| \frac{5\times(0.62j+1)e^{-0.84j}}{j\times 0.62(3.1j+1)} \right|$$

$$= \frac{5\times\sqrt{1+0.62^2}}{0.62\sqrt{1+3.1^2}} = 5.55 \;,\; G_M = -20\log 5.55 = -14.88\ dB < 0$$

$$|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow \frac{5\sqrt{\omega^2+1}}{\omega\sqrt{25\omega^2+1}} = 1 \Rightarrow \omega_c = 1.24$$

$$P_M = \angle G(j\omega_c) - 180 \Rightarrow tg^{-1}(\omega) - tg^{-1}(5\omega) - 2\omega - 90 - 180 = P_M$$

$$\Rightarrow tg^{-1}(1.24) - tg^{-1}(6.2) - 2\times 1.24 \times \frac{180}{\pi} - 90 - 180 = P_M$$

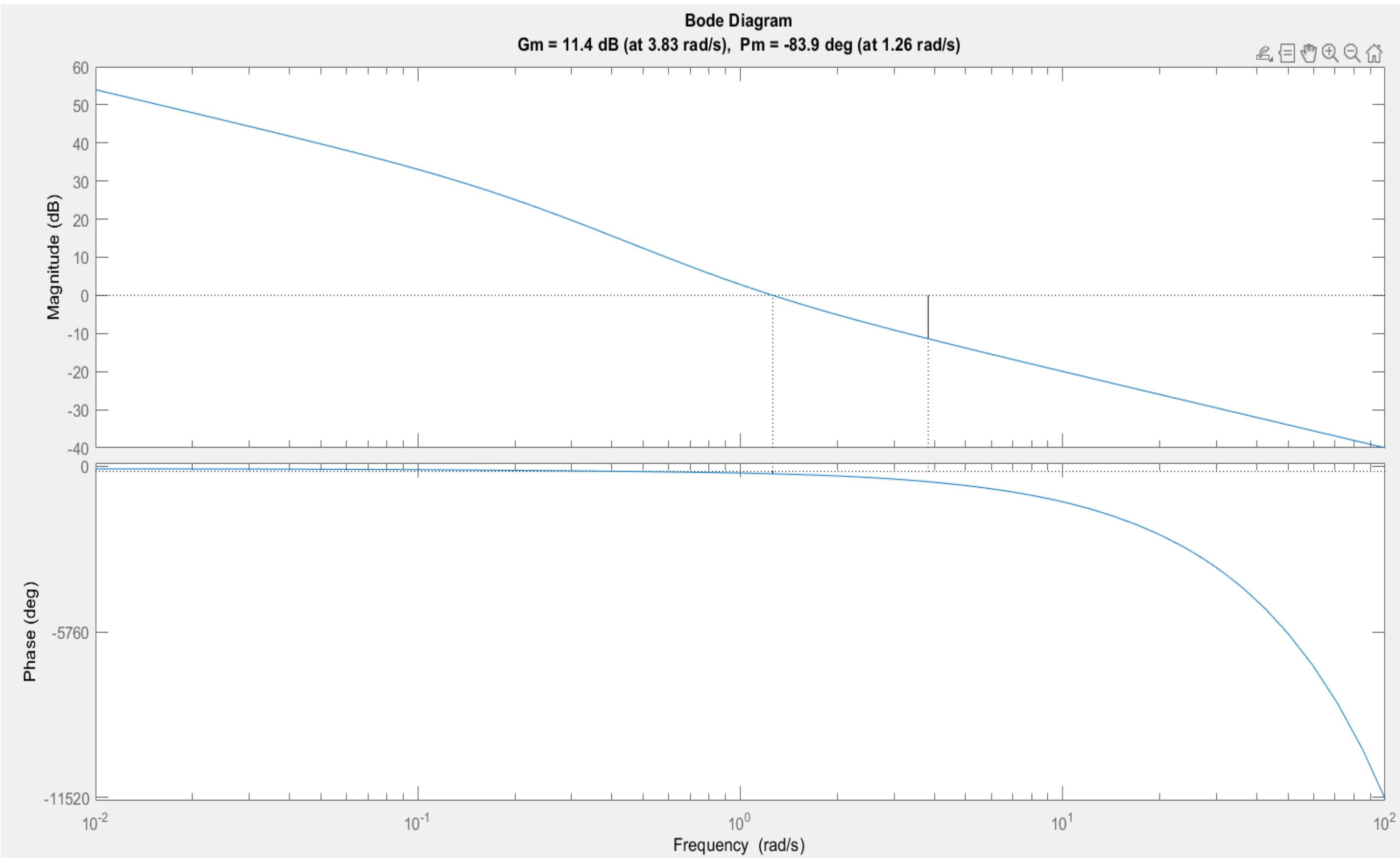
$$\Rightarrow -442.80 = P_M$$

$$\xrightarrow{+360} -82.8^\circ = P_M$$

چون هم $P_M<0$ و هم $G_M<0$ سیستم ناپایدار است.

3) کد متلب

```
clc; clear; close all;
 s = tf('s');
 g1 = (5*(s+1)*exp(-2*s)) / (s*(5*s+1));
 figure(1)
 margin(g1)
```



4) حل دستی

۴ـ

$$G(j\omega) = \frac{4a^2}{(j\omega + a)^2} = \frac{4a^2}{(a^2-\omega^2) + 2j\omega a}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{4a^2}{\sqrt{(a^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 a^2}} = \frac{4a^2}{\omega^2 + a^2}$$

$$|G(j\omega)| = 1 \Longrightarrow 4a^2 = \omega^2 + a^2 \Longrightarrow \omega^2 = 3a^2 \Longrightarrow \omega = \sqrt{3}\,a$$

$$PM = 0 - 2\,tg^{-1}(\omega/a) - 180 = -300 \xrightarrow{+360} PM = 60^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{4a^2}{(j\omega + a)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = 0 - 2\,tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = -180 \Longrightarrow tg^{-1}(\omega/a) = 90$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega}{a} = \infty$$

سیستم حد بهره یا Gm ندارد

$\Longleftarrow$ سیستم ناپایدار است.