Chapter 1

Transformation de laplace

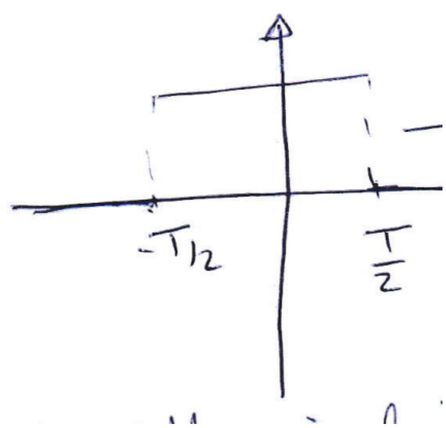
1.1 Definition

La transformation de laplace est une technique mathematique utilise pour transferer une fonction $f(t)$ du domain temporel au domain frequenciel complex $F(s)$
$f(t) \implies F(s)$,t en seconds (s) , s en radiant par second (rd/s) , $s = a + ib$

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

1.2 Fonction unite $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



<u>propriete</u>

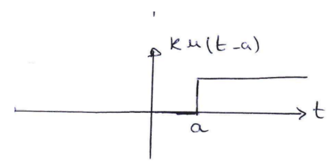
- pour une fonction $f(t)$ soit transformer en domain complex elle va etre une multiple de $u(t)$

$$f(t)u(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- si $u(t)$ est multiplie par une constante $k \implies ku(t) \begin{cases} k & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

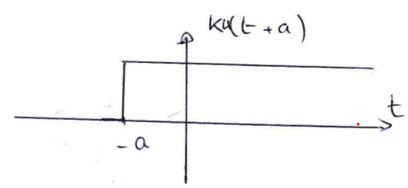
- Decalage en temp
  - decalage vers la droite

$$ku(t-a) = \begin{cases} k, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$



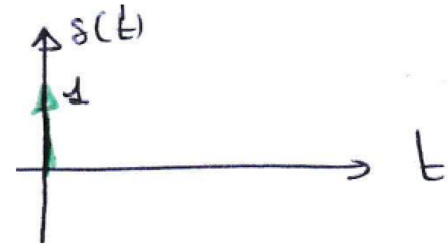
  - decalage vers la gauche

$$ku(t+a) = \begin{cases} k, & t \geq -a \\ 0, & t < -a \end{cases}$$



1.3 fonction implusion (delta de dirac) $\delta(t)$

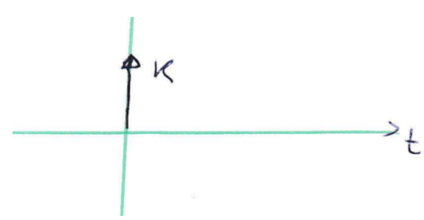
$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$



<u>propriete</u>

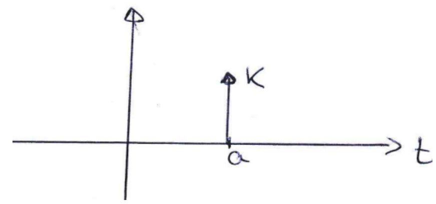
- multiplication par une constante k

$$\begin{cases} k\delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t) dt = k, & t = 0 \end{cases}$$



- decalage

$$\begin{cases} k\delta(t-a) = 0, & t \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t-a)dt = k, & t = a \end{cases}$$



- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(t-a) = f(a)$ car $f(t)\delta(t-a)$ pour tout $t \neq a$ est 0
- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$
- $\delta(t) = \delta(-t)$ (fonction pair)
- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

1.4 Propriete de la transformation de lapalce

- Leniarite $af(t) + bf(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} aF(s) + bG(s)$
- Decalage dans le domain frequenciel $e^{-at}f(t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} F(s+a)$
- Decalage dans le domain temps $f(t-a)u(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} e^{-as}F(s)$
- Differentielle
  $\mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = sF(s) - f(0)$
  $\mathcal{L}\{f^{''}(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f^{'}(0)$
  $\mathcal{L}\{f^{n}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{'}(0)\ldots sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$
- Integration $\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\} = \frac{F(s)}{s}$
- Multiplication par t $f(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} F(s) \implies \mathcal{L}\{tf(t)\} = \frac{-dF(s)}{ds}$
- Theorem de valeur initiale $f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
- theorem de valeur finale $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{x\to 0} sF(s)$
- Transformation temporelle $f(at-b)u(at-b) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} \frac{e^{-s\frac{b}{a}}}{a}F(\frac{s}{a})$
- Theoreme de convolution
  la convolution de 2 fonction $x(t)$ et $h(t)$ est
  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\varphi)h(t-\varphi)d\varphi$
  $Y(s) = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s).H(s)$

1.5 Transformation de laplace inverse

1.5.1 Methode de decomposition

on a : $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

- chaque valeur de (p) qui anule le numerateur est apple un pole

- chaque valeur de (p) qui anulle le denominateur est apple un pole

Cas 1 : tout les poles sont des racine simple (distinctes)

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\dots(p-p_k)\dots(p-p_n)}$$

avec $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_k \dots \neq p_n$
dans ce cas la forme decompose de $F(p)$ sera :

$$F(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \frac{A_3}{(p-p_3)} + \dots + \frac{A_k}{(p-p_k)} + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)}$$

avec $A_k = \lim_{p \to p_k}(p-p_k)F(p)$
Cas 2 : il existe un pole p_k qui une racine de multiplicite m

$$F(p) = \frac{N(p)}{\dots(p-p_k)^m\dots}$$

dans ce cas la forme decompose de $F(p)$ sera

$$F(p) = \dots + \frac{A_1}{(p-p_k)} + \frac{A_2}{(p-p_k)^2} + \dots + \frac{A_i}{(p-p_k)^i} + \dots \frac{A_m}{(p-p_k)^m} + \dots$$

avec $A_i = \frac{1}{(m-i)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{m-i}}{dp^{m-i}} [(p-p_k)^m F(p)]$
Note dans le cas ou la degre de $N(p) >$ degre de $D(p)$ en peut ecrire $F(p)$ sous la form $\underbrace{X(p)}_{entier} + \frac{N'(p)}{D(p)}$ ou $N'(p) < D(p)$

1.6 Tableau de transformation

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
$t^n_{n=1,2,\ldots}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a_{a>0}$	$\frac{T(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

1.7 Application

1.7.1 Equation differentiell ordinair avec condition initial

Equation 1

$$\frac{2dy}{dt} + 5y = e^{-2t}u(t)\ ,\ y(0) = 2$$

$\mathcal{L}\{\frac{2dy}{dt} + 5y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$
$\implies \mathcal{L}\{\frac{2dy}{dt}\} + \mathcal{L}\{5y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$ (lineairite)
$2[sY - y(0)] + 5Y = \frac{1}{s+2} \implies Y = \frac{4s+9}{(s+2)(2s+5)} = \frac{2s+\frac{9}{2}}{(s+2)(s+\frac{5}{2})}$
en peut decomposer Y sous la form $Y = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{s+\frac{5}{2}}$
avec

- $A = \lim_{s\to-2}(s+2)Y = \frac{-4+\frac{9}{2}}{-2+\frac{5}{2}} = 1$

- $B = \lim_{s\to\frac{-5}{2}}(s+\frac{5}{2})Y = \frac{-5+\frac{9}{2}}{\frac{-5}{2}+2} = 1$

$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+\frac{5}{2}} \implies \boxed{y = (e^{-2t} + e^{-\frac{5}{2}t})u(t)}$

Equation 2

$$y^{''}(t) + 3y^{'} + 2y(t) = e^{-t}u(t)\ ,\ y(0) = y^{'}(0) = 0$$

appliquee laplace $\implies s^2Y + sy(0) - y^{'} + 3y(0) + 2Y = \frac{1}{s+1}$
$\implies Y - \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+3)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$
en peut decompose Y sous la form : $Y = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}$

- $A = \lim_{s\to-2}(s+2)Y = \frac{1}{(s+2+1)^2} = 1$
- $B = \lim_{s\to-1}(s+1)Y = 1$
- $V = \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}(s+1)^2Y = \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\frac{1}{s+2} = \lim_{s\to-1}\frac{-1}{(s+2)^2} = -1$

$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} \implies y = (e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t})u(t)$

1.7.2 Mecanique (oscillateur harmonique simple)

Une mass (m) conecte a un ressort de constant (k) ,x est la distance que le ressort est tire de sa position d'equilibre
L equation de mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Dans le cas d amortissement , une force de frottement $\vec{f} = -b\vec{v}$ avec b est la coefficient d amortisment , lequation de mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$b = 2\delta\sqrt{mk}\ ,\ \delta \text{ est le rapport d amortissement}$$

Dans le cas ou loscillateu harmonique est soumis a une force exterieur $F(t)$ l equation devient

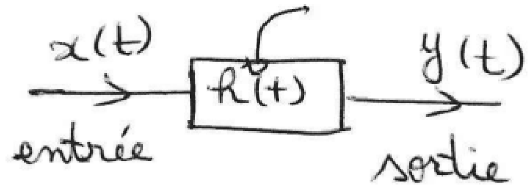
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta w_0\frac{dx}{dt} + w_0^2x = \frac{F(t)}{m}$$

avec $w_0^2 = \frac{k}{m}$

1.7.3 Systeme lineaire invariant avex le temp (LTI)

Considerons un systeme (LTI) caracterise par :

- $x(t)$: fonction d entre
- $h(t)$: impulsion reponse
- $y(t)$: fonction de sortie



Lineaire $\Longrightarrow$ $ax_1(t) + bx_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} ay_1(t) + by_2(t)$

Invariant avex le temp $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x(t) \Longrightarrow y(t) \\ x(t-t_0) \Longrightarrow y(t-t_0) \end{cases}$

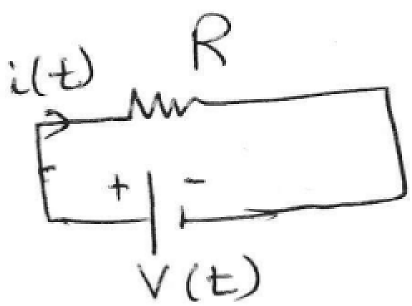
Relation :

- $y(t) = h(t) * x(t)$
- $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ (fonction de transfert)

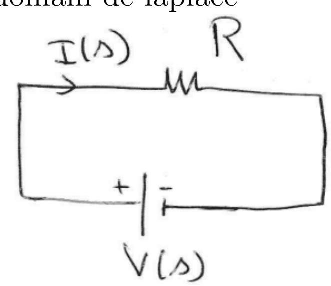
1.7.4 Circuits electriques

Resistance :

domain de temp



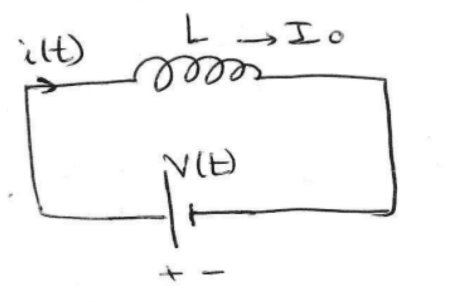
domain de laplace



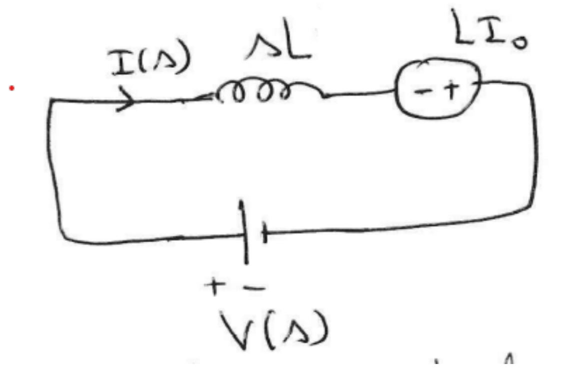
$$v(t) = Ri(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} V(s) = RI(s)$$

Bobine :

domain de temp



domain de laplace

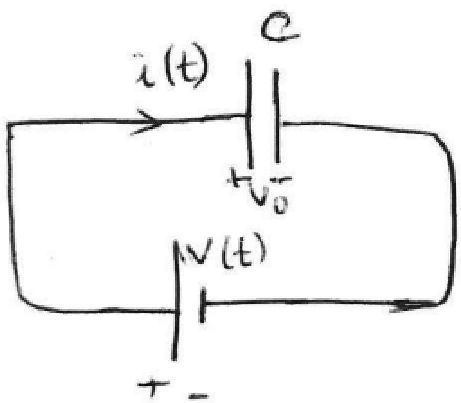


$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} V(s) = L[sI(s) - I_0]$$

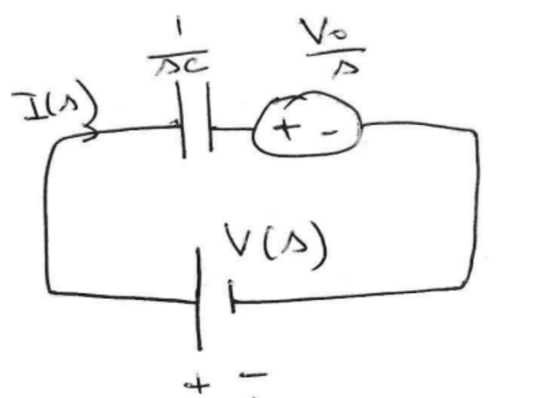
avec I_0 est lenergie initiale emagazine

Condensateur :

domain de temp



domain de laplace



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} I(s) = C[sV(s)] - CV_0$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$$

Chapter 2

Series et transformation de fourier

Fonctoin periodique

Soit $f(t)$ est dite periodique si elle est definie pour toutes les valeur de t et si elle possede une nombre positif T avex $f(t) = f(t+T)$,Tperiode de $f(t)$ si T est la plus petit periode , elle est nomme la periode fondamentale de $f(t)$

propriete

- si T periode fondamental de $f(t) \implies f(t) = f(t+nT)$, n: entier
- si $f(t)$ et $g(t)$ ont une periode T ,et $h(t) = af(t) + bg(t)$ avec a et b sont des cte ,alors $h(t)$ a la meme periode
- fonction paires : on appelle une fonction f pair si $f(t) = f(-t)$
- fonction impaires : on apelle un fonction f impaire si $-f(t) = f(-t)$

2.1 Serie trigonometrique de Fourier

Une fonctoin periodique $f(t)$ avec une periode fondamentale T , develope en serie trigonometrique comme suit : $\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nt))}$

a_0, a_net b_n sont nommes les coefficient de fourier

- En General
  - $a_0 = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$
  - $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$
  - $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$

- si $f(t)$ est pair
  - $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$
  - $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$
  - $b_n = 0$
  - $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nt))$
- si $f(t)$ est inpair
  - $a_0 = 0$
  - $a_n = 0$
  - $b_n = \frac{t}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$
  - $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nt))$

Note :si T est periode fondamental de $f(T)$

- $f = \frac{1}{T}$ est frequence fondamental en (Hz) hertz
- $w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ est vitesse angulair en $(\frac{rd}{s})$ radiant par second

2.1.1 Serie de Fourier sous form complexe

- $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|\cos(nw_0t + \theta_n)$
- $C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt$
- $C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-inw_0t}dt$

Relation avec la serie reel : $C_0 = a_0$ et $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

2.2 Integral de Fourier

Une fonction peut etre represente par un integral appelle integral de fourier

$$\boxed{f(t) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos(wt) + B(w)\sin(wt)]dw}$$

- General
  - $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(wt)dt$
  - $B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(wt)dt$
- si $f(t)$ est pair

  - $A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(wt)dt$
  - $B(w) = 0$
  - $f(t) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos(wt)]dw$

- si $f(t)$ est impair
  - $A(w) = 0$
  - $B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(wt)dt$
  - $f(t) = \int_0^{\infty}[B(w)\sin(wt)]dw$

2.3 Transformees de Fourier

2.3.1 Transforme cosinus de fourier

Transforme cosinus de fourier de la fonction pair $f(t)$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$$

Transforme Inverse de cosinus de fourier

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(w)\cos(wt)dw$$

2.3.2 Transforme sinus de fourier

Transforme sinus de fourier de la fonction pair $f(t)$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin(wt)dt$$

Transforme Inverse de sinus de fourier

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(w)\sin(wt)dw$$

2.3.3 Propriete de transforme cosinus et sinus de Fourier

- <u>Linearite</u> : $F_{c/s}(af(t) + bg(t)) = aF_{c/s}(w) + bG_{c/s}$
- <u>derive</u> :
  - $F_c\{f^{'}(t)\} = wF_s(w) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$

- $F_c\{f^{''}(t)\} = -w^2F_s(w) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f^{'}(0)$
- $F_s\{f^{'}(t)\} = wF_c(w)$
- $F_s\{f^{''}(t)\} = -w^2F_s(w) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf^{'}(0)$

2.3.4 Transformee de Fourier

la transformee de fourier est une technique mathematique utilisee pour transformer une fonction du domain temps (t, s) au domai frequence angulair $(w, rd/s)$ ou de domain position (x, m)au domain frequence spatiale $(\beta, rd/m)$

la transformation : $\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt}$

la transformation inverse : $\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{iwt}dw}$

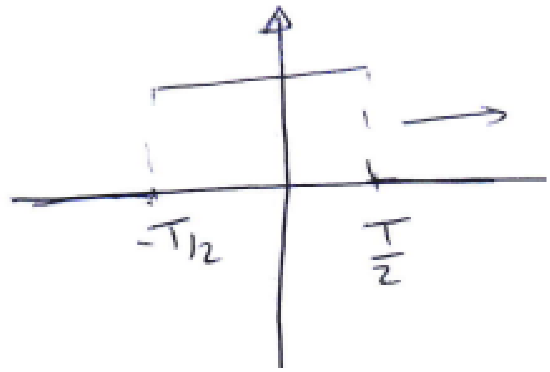
2.3.5 Propriete de Transfome de Fourier

- <u>Linearite</u> $\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(w) + bF_2(w)$
- <u>Echelle de temp</u> $f(at) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$
- <u>Decalage</u> $f(t + t_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} F(w_0)e^{iwt_0}$
- <u>Transformation de temp</u> $f(at - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})e^{it_0\frac{w}{a}}$
- <u>dualite</u> $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} F(w) \implies F(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} 2\pi f(-w)$
- <u>Convolution</u> $\begin{cases} y(t) = x(t) * h(t) \implies Y(w) = X(w).H(w) \\ \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}F_1(w) * F_2(w) \end{cases}$
- <u>decalage de frequence</u> $f(t)e^{\pm iw_0t} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} F(w \pm w_0)$
- <u>derive</u> $\frac{d^nf}{dt^n} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} (iw)^nF(w)$, $-itf(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \frac{dF(w)}{dw}$
- <u>integral</u> $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\varphi)d\varphi \implies G(w) = \frac{F(w)}{iw} + \pi F(0)\delta(w)$ avec $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

2.3.6 fonction rectengulair

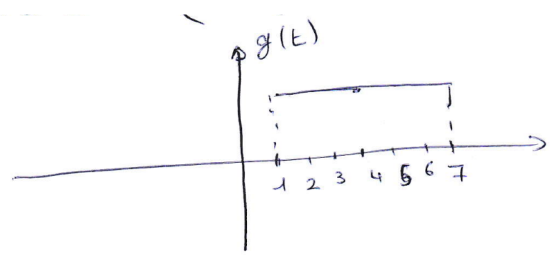
consideron l implusion rectangulaire rect$\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\begin{cases} 1 & \frac{-T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$



Decalage :

$g(t) = rect(\frac{t-4}{6}) \implies T = 6$ et le centre d implusion a $t = 4$



Transforme de fourier de fonction rectangulair

$\boxed{Arect(\dfrac{t}{T}) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} AT\sin_c(\dfrac{wt}{2})}$ avec $\sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$(sinus cardinal)

2.4 Theorem de Parseval

Chapter 3

Les polyonme orthogonaux classique

3.1 Introduction

Dans des nombreux problemes physique , on arrive a l'equation differentiell de second ordre , de type hypergeometrique :

$$\boxed{\sigma(z)y^{''} + \varphi(z)y^{'} + \lambda y(z) = 0} \ (1)$$

avec

- $\sigma(z)$: polynome de degre ≤ 2
- $\varphi(z)$: polynome de degre ≤ 1
- $\lambda(z)$: cte

3.2 Solution polynomial de l'equation hypergeometrique

Soit $Y(z)$ est une solution de l equation hypergeometrique , la derive d'ordre (n) de $Y(z)$ est aussi une solution de la meme equation
<u>Preuve:</u>
Ona : $\sigma(z)y^{''}(z) + \varphi(z)y^{'}(z) + \lambda y(z) = 0$
$\Longrightarrow$ la Derive : $\sigma^{'}y^{''} + \sigma y^{'''} + \varphi^{'}y^{'} + \varphi y^{''} + \lambda y^{'} = 0$ $(y^{'} = v_1)$
$\Longrightarrow$ $\sigma v_1^{''} + \varphi_1 v_1^{'} + \mu_1 v_1 = 0$ (aussi une equation hypergeometrique)
avec φ_1 une polynome de premier degre ou moin et d'equation $\varphi_1 = \sigma^{'} + \varphi$
et μ_1 est un constant et d'equation $\mu_1 = \lambda + \varphi^{'}$
$\Longrightarrow$ la Derive second : $\sigma v_2^{''} + \varphi_2 v_2^{'} + \mu_2 v_2 = 0$ $(y^{''} = v_2)$
avec φ_2 une polynome de premier degre ou moin et d'equation $\varphi_2 = \sigma^{'} + \varphi_1 = \varphi + 2\sigma^{'}$
et μ_2 est un constant et d'equation $\mu_2 = \lambda_1 + \varphi_1^{'} = \lambda + 2\varphi^{'} + \sigma^{''}$

$\Longrightarrow$ La Deriver d'ordre (n): $\boxed{\sigma v_n^{''} + \varphi_n v_n^{'} + \mu_n v_n = 0}$ (2)
avec

- $v_n(z) = y^{(n)}(z)$
- $\varphi_n = \varphi + n\sigma^{'}$
- $\mu_n = \lambda + n\varphi^{'} + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^{''}$

Solution particuliere de l'equation hypergeometrique pour $\mu_n = 0$
$\mu_n = 0 \implies \sigma v_n^{''} + \varphi_n v_n^{'} = 0$ admet une solution particuliere $v_n(z) = cte \neq 0$
$\Longrightarrow \lambda = \lambda_n = -n\varphi^{'} - \frac{n(n-1)}{2}\sigma^{''}$

3.3 Formule de Rodrigues

L'equation de rodrigues est une solution de lequation hypergeometrique , elle contien $\rho_n(z)$ une fonction caractersiant de l'equation hypergeometrique
$\left[\sigma(z)y^{''} + \varphi(z)y^{'} + \lambda y(z) = 0\right] \times \rho \implies \sigma(z)y^{''}\rho + \varphi(z)y^{'}\rho + \lambda y(z)\rho = 0$ en peut ecrire cette equation sous la from $(\rho\sigma y^{'})^{'} + \lambda\rho y = 0 \implies \boxed{(\rho\sigma)^{'} = \rho\varphi}$ (3)

L equation de rodrigues : $\boxed{y_n(z) = \dfrac{B_n}{\rho(z)}\dfrac{d^n}{dz^n}\left[\rho(z)\sigma^n(z)\right]}$
avec B_n : le constant de normalisation

3.4 Polynomes orthogonaux classiques

Formule de Rodrigues de polynomes de Jacobi ,Legendre , Laguerre , Hermite .
Ces polynomes sont des solution d'equation hypergeometrique

Polynome de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$

Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = 1 - z^2$
- $\varphi = -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha$ avec α et β sont des constant

Dans ce cas ρ est d'equation :$\rho(z) = (1 - z)^{\alpha}(1 + z)^{\beta}$
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = B_n(1 - z)^{-\alpha}(1 + z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1 - z)^{\alpha+n}(1 + z)^{\beta+n}\right]$
avec $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi^{'} - \frac{n(n-1)}{2}\sigma^{''} \\ \varphi = -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha \end{cases} \implies \lambda_n = n(\alpha + \beta + n + 1)$

Polynome de legendre $P_n(z)$

Le Polynome de legendre est un cas particuliere de polynome de Jacobi avec $\alpha = \beta = 0$
Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = 1 - z^2$
- $\varphi = -2z$

Dans ce cas ρ est constant
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = P_n(z) = \frac{B_n}{\rho} \frac{d^n}{dz^n} [\rho\sigma^n(z)]$
avec $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$
Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \\ \varphi = -2z \end{cases} \implies \lambda_n = n(n+1)$

Polynome de laguerre $L_n^{(a)}(z)$

Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = z$
- $\varphi = -z + \alpha + 1$ avec $\alpha > 0$

Dans ce cas ρ est d'equation $\rho = z^\alpha e^{-z}$
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = L_n(z) = B_n e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^z} (z^{\alpha+n} e^{-z})$
avec $B_n = \frac{1}{n!}$
Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \\ \varphi = -z + \alpha + 1 \end{cases} \implies \lambda_n = n$

Polynome d'Hermite $H_n(z)$

Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = 1$
- $\varphi = -2z$

Dans ce cas ρ est d'equation $\rho = e^{-z^2}$
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = H_n(z) = \frac{B_n}{e^{-z^2}} \frac{d^n}{dz^n} \left[e^{-z^2} \right]$
avec $B_n = (-1)^n$
Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \\ \varphi = -2z \end{cases} \implies \lambda_n = 2n$

3.5 Orthogonalite des polynomes de type hypergeometrique

ρ verfie la condition $\sigma(z)\rho(z)z^n|_{z=a,b} = 0 \implies$ Les polynome de type hypergeometrique seront orthogonaux sur l'intervval (a,b) par rapport a ρ , ces polynome correspondent aux different valeur de λ_n
$\implies \int_a^b y_n(z)y_m(z)\rho(z)dz = 0$ Si $\lambda_n \neq \lambda_m$

Polynome de Jacobi

$(1-z)^{\alpha+1}(1+z)^{\beta+1}z^k|_a^b = 0$ Cette equation est verifier pour $a = -1$ et $b = 1$
Alors le domain est $(a, b) = [-1, 1]$

Polynome de Legendre

meme que polyne de jacobi, le domain est $(a, b) = [-1, 1]$

Polynome de Laguerre

$z.z^{\alpha}e^{-z}z^k|_a^b = z^(\alpha + k + 1)e^{-z} = 0$
Le domain $(a, b) = [0, +\infty[$

Polynome d'Hermite

$e^{-z^2}z^k|_a^b = 0$
Le domain $(a, b) =]-\infty, +\infty[$