Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен **До**

Определить, какая из функций $f_1(n) = (n!)!$ и $f_2(n) = ((n-1)!)!(n-1)!^{n!}$ растет быстрее.

Решение

$$(n!)! \quad ? \quad ((n-1)!)!(n-1)!^{n!}$$

$$\frac{(n!)!}{((n-1)!)!(n-1)!^{n!}} \approx \frac{\sqrt{2\pi n!}(\frac{n!}{e})^{n!}}{\sqrt{2\pi(n-1)!}(\frac{(n-1)!}{e})^{(n-1)!}(n-1)!^{n!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n!} \cdot n!^{n!} \cdot e^{(n-1)!}}{e^{n!}\sqrt{2\pi(n-1)!} \cdot (n-1)!^{(n-1)!} \cdot (n-1)!^{n!}} = \frac{\sqrt{n} \cdot n^{n!} \cdot e^{(n-1)!}}{e^{n!} \cdot (n-1)!^{(n-1)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^{n!} \cdot e^{(n-1)!}}{e^{n!} \cdot (\sqrt{2\pi(n-1)}(\frac{n-1}{e})^{(n-1)!})^{(n-1)!}} = \frac{\sqrt{n} \cdot n^{n!} \cdot e^{(n-1)!}}{(e \cdot \sqrt{2\pi(n-1)} \cdot (n-1)^{n-1})^{(n-1)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^{n!}}{(\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot (n-1)^{n-1})^{(n-1)!}} = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n^n}{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot (n-1)^{n-1}}\right)^{(n-1)!} =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n^n \cdot (n-1)}{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot (n-1)^n}\right)^{(n-1)!} = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{(n-1)!}$$

Теперь найдём предел этого выражения:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{(n-1)!} = \infty$$

Так как все функции монотонно возрастают, значит всё выражение уходит в бесконечность

А значит:

$$(n!)! \quad \gg \quad ((n-1)!)!(n-1)!^{n!}$$