Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен **Доп. Вопрос № 11**

На могиле Карла Фридриха Гаусса высечен правильный семнадцатиугольник. В одной из соседних могил обитает зомби с феноменальной памятью, хладнокровный последователь Леонарда Эйлера. Каждую ночь он подходит к могиле Гаусса, рисует на семнадцатиугольнике четырнадцать непересекающихся диагоналей, издевательски хохочет и стирает рисунок. Рисунки никогда не повторяются. На сколько ночей хватит зомби этого развлечения?

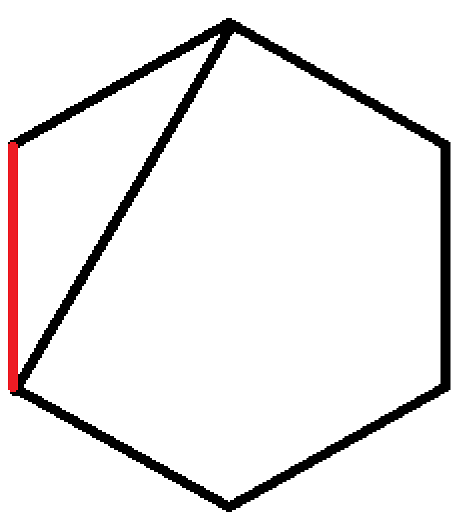
Решение

Проводим первую диагональ. Кол-во диагоналей в 17-угольнике:

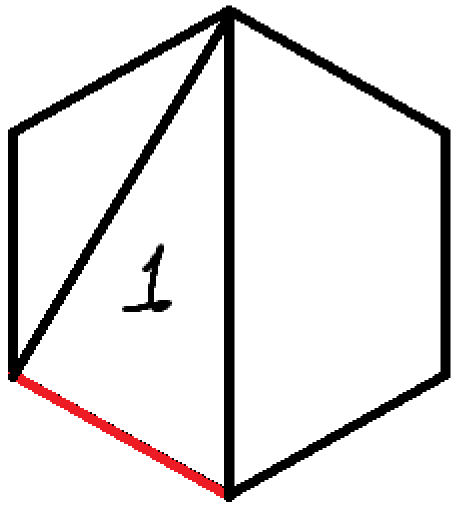
$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = 17 \cdot 7 = 119$$

Заметим, что у нас 17 вершин и 14 диагоналей (то есть n вершин и $n-3$ диагоналей). А это значит, что у нас при любых диагоналях, которые подходят под условия, 17-угольник делится на треугольники. Задача сводится к задаче:

- Найти кол-во уникальных разбиений 17-угольника на треугольники.
  Будем считать кол-во уникальных разбиений фигуры на треугольники. Положим, что $F(2) = 1$. При $n = 3$ у нас будет также $F(3) = 1$.
  Далее фиксируем одну из граней и строим для неё единственный треугольник.
  Разберем на примере 6-угольника:
- Зафиксировали грань



- Смотрим сколько граней у фигуры слева от треугольника и справа (Здесь 2-угольная и 5-угольная)
- Записываем в формулу $F(6) = F(2)F(5)$ (т.е. мы считаем, сколько различных разбиений будет при условии присутствия данной диагонали)
- Далее выбираем другую



- Слева видим $F(3)$, а справа $F(4)$. Теперь получается $F(6) = F(2)F(5) + F(3)F(4)$
- Продолжая этот процесс можно вывести формулу:

$$F(n) = F(2)F(n-1) + \cdots + F(n-1)F(2)$$

Эта рекуррентная формула совпадает с рекуррентной формулой чисел Каталана с отступлением аргумента на 2 назад. В итоге кол-во разбиений будет:

$$N = C_{17-2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{16}\binom{30}{15} = \frac{30!}{16 \cdot 15! \cdot 15!} = 9694845$$

Ответ

$$9694845 \text{ ночей}$$