Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен **Доп. Вопрос № 14**

Симметрией плоской геометрической фигуры называется движение плоскости, отображающее фигуру в себя. Изобразить решетку подгрупп группы симметрий квадрата.

Решение

Виды движения плоскости:

- Поворот
- Перенос
- Отражение
- и их суперпозиции

Решетка - ЧУМ, являющийся и верхней, и нижней полурешеткой (т.е. для любой пары элементов существует супремум и инфинум)

Строим группу симметрий квадрата:
Для группы нам надо:

- нейтральный элемент
- обратный элемент
- ассоциативная операция (в данном случае будем применять суперпозицию)

Нейтральный элемент будет движение, которое ничего не делает с квадратом
Обратный элемент - движение, которое возвращает квадрат назад к предыдущему виду

Во-первых, нам нужны перестановки, которые не меняют позиции вершин относительно других вершин. Посчитаем, сколько всего перестановок образуют группу:

$$4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8 \text{ перестановок}$$

Обозначим 4 оси симметрии: 2 диагональных и 2 отражающих по вертикали и горизонтали
Обозначим 1 точку симметрии

Легче всего показать это с помощью перестановок (A, B, C, D - вершины квадрата):

$$e = \binom{ABCD}{ABCD}, \text{ нейтральный элемент}$$

$$a = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix} \text{ (отражение по горизонтали и вертикали)}$$

$$c = \begin{pmatrix} ABCD \\ ACBD \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} ABCD \\ DBCA \end{pmatrix} \text{ (по диагонали)}$$

Там осталось найти ещё 3 перестановки, ими будут повороты на 90, 180, 270 градусов по часовой стрелке соответственно

$$f = \begin{pmatrix} ABCD \\ CABD \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} ABCD \\ BDAC \end{pmatrix}$$

Все перестановки будут образовывать замкнутую группу:

- нейтральный элемент (e)
- обратный элемент (у каждого элемента есть обратный ему)
- ассоциативность суперпозиции

Подгруппа - это подмножество группы, которое само по себе является группой относительно той же операции.

Далее, надо выделить подгруппы:

- Самая большая подгруппа (равно группе)
- $\{e, f, g, h\}$
- $\{e, a, b, g\}$
- $\{e, c, d, g\}$
- $\{e, a\}$
- $\{e, b\}$
- $\{e, c\}$
- $\{e, d\}$
- $\{e, g\}$
- $\{e\}$

Осталось построить решетку