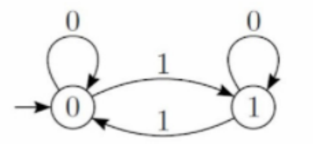
Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен **Доп. Вопрос № 19**

Автомат на рисунке задает последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ по следующему правилу: a_n равно номеру состояния, в которое автомат попадет, прочитав двоичную запись числа n. Сколько существует значений $n \in \{1, \dots, 2^k\}$ таких, что $a_n = a_{n+1}$?



Решение

Данный автомат выводит 0, когда кол-во единиц в двоичной записи чётно и 1, когда нечётно

Для начала рассмотрим несколько первых значений $f(k)$:

$$f(1) = 1, \text{ т.к. в 01 одна единица и в 10 тоже}$$
$$f(2) = 1, \text{ т.к. } f(1) = 1, \text{ а во творой части нет подряд чисел одной чётности}$$
$$f(3) = f(2) + f(2) + 1$$
$$f(4) = f(3) + f(3) - 1$$

Заметим, что при увеличении k у нас становится в 2 раза больше элементов и если число k нечётно, то $2^k - 1$ будет содержать нечётное кол-во единиц и 2^k одну единицу, а если k - чётно, тогда $2^k - 1$ содержит чётное число единиц. Поэтому, когда k - нечётное, мы прибавляем 1 к $2(f(n-1))$. А когда k - чётное, тогда будет $2(f(n-1)) - 1$, потому что во второй части последовательности, числа все те же, что и в первой половине, только в начале будет стоять единица, из-за чего ломается один хороший переход в конце. Поэтому, мы вычитаем 1. И получается такая рекуррентная формула:

$$f(n+1) = 2 \cdot f(n) + (-1)^{n+1}$$

Теперь осталось выразить кол-во для k:

$$\begin{array}{l} \quad f(n) = 2 \cdot f(n-1) + (-1)^{n+1} \\ + \\ \underline{\quad f(n-1) = 2 \cdot f(n-2) + (-1)^{n} \quad} \end{array}$$

$$f(n) + f(n-1) = 2 \cdot f(n-1) + 2 \cdot f(n-2)$$

$$X(x) = f(n) - f(n-1) - 2 \cdot f(n-2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \quad \text{и} \quad x_2 = -1$$
$$f(n) = 2^n C_1 + (-1)^n C_2$$

Теперь найдём коэффициенты C_1 и C_2:

$$\begin{cases} f(1) = 2C_1 - C_2 = 1 \\ f(2) = 2^2 C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Сложим оба уравнения:

$$6C_1 = 2$$
$$C_1 = \tfrac{1}{3}$$
$$\text{тогда } C_2 = 2C_1 - 1 = -\tfrac{1}{3}$$

Итоговое выражение:

$$f(k) = \frac{2^k - (-1)^k}{3}$$