Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен **Доп. Вопрос № 25**

Булевы функции f, g и $h = f \to g$ монотонны. Найти h (указать все возможные варианты).

Решение

Функции f, g - монотонны, значит $\vec{x} \le \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \le f(\vec{y})$
Такие функции удобно представлять в виде ЧУМа. Тогда, монотонность эквивалентна тому, что когда мы поднимаемся по одному из пути ЧУМа вверх с самого низкого элемента, у нас есть переломный элемент с 0 до 1, или весь путь из 0 или 1. Рассмотрим элементы k и m - переломные моменты для функций f и g. Рассмотрим 4 случая:

1. f и g - константы (нет ни k, ни m)
2. f - константа, g - нет (есть m)
3. f - нет, g - константа (есть k)
4. f и g не константы (есть k и m)

1 случай

- $f = 0, g = 0$, тогда $h = f \le g = 1$
- $f = 0, g = 1$, тогда $h = f \le g = g = 1$
- $f = 1, g = 0$, тогда $h = f \le g = g = 0$
- $f = 1, g = 1$, тогда $h = f \le g = g = 1$

2 случай

Есть какое-то m, до которого было 0, а после 1:

- Рассмотрим $f = 0$ и g до элемента m, тогда $h = f \le g = 1$
- Рассмотрим $f = 0$ и g после элемента m, тогда $h = f \le g = 1$
- Рассмотрим $f = 1$ и g до элемента m, тогда $h = f \le g = 0$
- Рассмотрим $f = 1$ и g после элемента m, тогда $h = f \le g = 1$
  На основании последних 2 пунктов можно заметить, что $h = g$
  Т.е. в этом случае, у нас h равен либо 1, либо g

3 случай

Есть какое-то k, до которого было 0, а после 1:

- Рассмотрим $g = 0$ и f до элемента k, тогда $h = f \leq g = 1$
- Рассмотрим $g = 0$ и f после элемента k, тогда $h = f \leq g = 0$
  Значит, что h будет не монотонной, а по условию она должна быть монотонной
- Рассмотрим $g = 1$ и f до элемента k, тогда $h = f \leq g = 1$
- Рассмотрим $g = 1$ и f после элемента k, тогда $h = f \leq g = 1$
  На основании последних 2 пунктов можно заметить, что $h = 1$

4 случай

Есть какое-то k и m, до которых было 0, а после 1:
Рассмотрим, когда $k < m$:

- Рассмотрим f до k, g до m, тогда $h = f \leq g = 1$
- Рассмотрим f после k, g до m, тогда $h = f \leq g = 0$
  Уже на этом моменте понятно, что h не является монотонной, заканчиваем рассматривать этот случай

Рассмотрим, когда $k \geq m$:

- Рассмотрим f до k, g до m, тогда $h = f \leq g = 1$
- Рассмотрим f до k, g после m, тогда $h = f \leq g = 1$
- Рассмотрим f после k, g после m, тогда $h = f \leq g = 1$
  Значит, что $h = 1$

На основании 4 случаев можем понять, что все возможные случаи:

- $h = g$
- $h = 1$