Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен **Доп. Вопрос № 20**

Нисходящий факториал — это произведение $(n)_m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$. Пусть m — функция от n, такая что $m = o(n^{2/3})$. Доказать, что $(n)_m = n^m e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}(1+o(1))$.

Решение

$$\ln{(n)_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \ln{(n-i)} = \sum_{i=0}^{m-1} \ln{(n-i)} = \sum_{i=0}^{m-1} (\ln n + \ln{(1-\frac{i}{n})}) = m \cdot \ln n + \sum_{i=0}^{m-1} \ln{(1-\frac{i}{n})} =$$

$$= \Big[\text{формула Тейлора}\Big] = m \cdot \ln n + \sum_{i=0}^{m-1} \Big(-\frac{i}{n} - \frac{i^2}{2n^2} + o(n^{-2})\Big) = \Big[m = o(n^{\frac{2}{3}})\Big] =$$

$$= m \cdot \ln n + o(n^{\frac{2}{3}}) \cdot o(n^{-2}) + \sum_{i=0}^{m-1} \Big(-\frac{i}{n} - \frac{i^2}{2n^2}\Big) =$$

$$= m \cdot \ln n + o(n^{\frac{2}{3}}) \cdot o(n^{-2}) - \frac{m(m-1)}{2n} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i^2}{2n^2} =$$

$$= m \cdot \ln n + o(n^{-\frac{4}{3}}) - \frac{m(m-1)}{2n} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i^2}{2n^2}$$

Теперь возведём e в эту степень:

$$(n)_m = n^m \cdot e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \cdot e^{o(n^{-\frac{4}{3}})} \cdot e^{-\sum_{i=0}^{m-1} \frac{i^2}{2n^2}} =$$

$$= n^m \cdot e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \cdot e^{o(n^{-\frac{4}{3}})} \cdot e^{-\frac{m(m-1)(2m-1)}{12n^2}} = n^m \cdot e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \cdot e^{o(n^{-\frac{4}{3}})} \cdot e^{o(1)} =$$

$$= n^m \cdot e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \cdot e^{o(n^{-\frac{4}{3}})+o(1)} = n^m \cdot e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \cdot e^{o(1)} = n^m \cdot e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \cdot (1+o(1)) \text{ по Тейлору}$$