

Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен

Доп. Вопрос № 15

Найти все натуральные числа N такие, что диаграмма Хассе решетки делителей числа N является плоским графом.

Решение

Диаграмма Хассе - граф ЧУМа, нарисованный используя отношение покрытия

Плоский граф - пара, состоящая из планарного графа и правильного изображения на плоскости

Любое натуральное число можно представить в виде произведения степеней простых чисел.

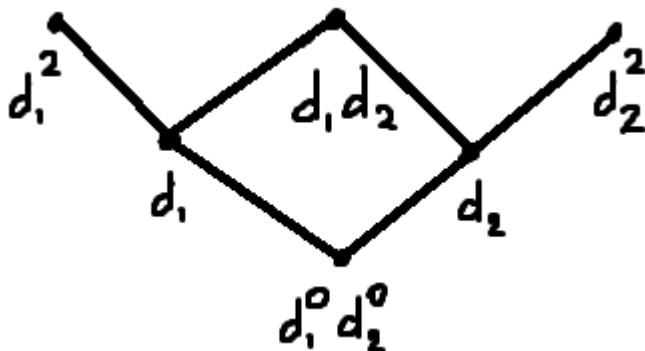
Будем решать задачу относительно них, смотря на кол-во уникальных простых делителей.

Если 1 делитель:

- Тогда у нас будет ЧУМ в виде прямой линии, где вершины будут означать степень простого делителя в числе

Если делителей 2:

- Мы можем представить число в виде произведения $d_1^n \cdot d_2^m$, где m и n - степень делителя
- Тогда можем нарисовать диаграмму Хассе:



Так что, этот граф плоский

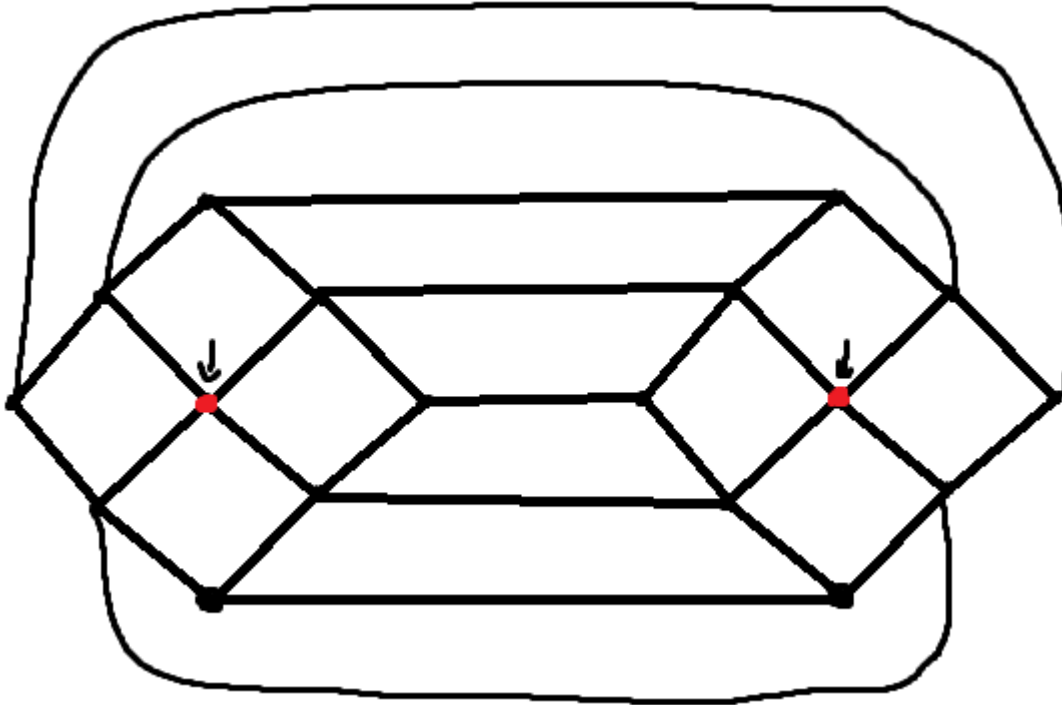
Если делителей 3:

- Тут надо разбить ещё на 2 случая:
 - Когда наша решетка задается произведением $\{d_1^0, d_1, \dots, d_1^n\} \times \{d_2^0, d_2\} \times \{d_3^0, d_3\}$

- Когда во 2 и 3 множестве больше элементов

В первом случае у нас получается граф, похожий на трубу в 3х мерном пространстве. Он спокойно наносится на сферу, а значит и на плоскость.

Во втором случае, у нас получится какой-то такой граф (пример для $3 \times 3 \times 2$ элементных множеств):



Красные вершины оказываются проблемными, и их никак нельзя соединить, чтобы не образовался $K_{3,3}$ при стягивании или в чистом виде.

Если 4 делителя, то даже на $2 \times 2 \times 2 \times 2$ элементных множествах будет проблема

Ответ

Все натуральные числа, имеющие до 3 уникальных простых делителей и числа, имеющие по 2 простых делителя степени 1 и один простой делитель любой степени