

Задача

Дискретная математика, ФИИТ, III семестр, экзамен

Доп. Вопрос № 17

Головоломка “Теночтитланская пирамида” состоит из трех стержней, на первый из которых надето N дисков различного диаметра (нижний — самый большой, далее по убыванию). Требуется переложить диски на третий стержень, при этом запрещено класть больший диск на меньший и перекладывать с первого стержня на третий, а с третьего — на первый. Найти минимальное число ходов, необходимое для решения головоломки.

Решение

Рассчитаем план действий:

1. Переносим $n - 1$ диск на 3-й стержень
2. Переносим последний диск на 2-й стержень
3. Переносим $n - 1$ диск на первую башню
4. Переносим последний диск на 3-й стержень
5. Переносим $n - 1$ диск на 3-ю башню

Этого число минимально, так как:

- n -й диск можно переместить с первого стержня только на второй (из условия) и только тогда, когда все остальные диски лежат на 3м стержне (пункт 1)
- со второго стержня мы можем переместить на третий только когда остальные $n-1$ диск лежат на 1м стержне (пункт 3)
- необходимо вернуть с первого стержня остальные блины на третий стержень

Тогда можно составить рекуррентную формулу:

$$N(n) = N(n - 1) + 1 + N(n - 1) + 1 + N(n - 1) = 3 \cdot N(n - 1) + 2$$

Докажем, что это равно $3^n - 1$:

Б.И.

$$N(0) = 3^0 - 1 = 0$$

Ш.И.

$$N(n + 1) = 3 \cdot N(n) + 2 = 3 \cdot 3^n - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$$

Ответ

$$N(n) = 3^n - 1$$