Demonstrați că legea permutării premiselor este o tautologie utilizând o metodă semantică de demonstrare.

Legea permutării premiselor:

$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

Metode semantice:

Tabela de adevăr, FNC, (FND), tabela semantică (arborele binar)

Tabela semantică – metodă prin respingere

$\neg((p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$ (1) √

| regula α pt. (1)

$p \to (q \to r)$ (2) √

|

$\neg(q \to (p \to r))$ (3) √

| regula α pt. (3)

q

|

$\neg(p \to r)$ (4) √

| regula α pt. (4)

p

|

$\neg r$

/ \ regula β pt. (4)

$\neg p$ $\quad q \to r$ (5) √

$\otimes$ $\quad$ / \ regula β pt. (5)

$\neg q$ $\quad r$

$\otimes$ $\quad \otimes$

Tabela semantică este închisă $\overset{TCC}{\Rightarrow}$ formula este tautologie.

Rezolvarea nr. 2:

Cu FNC:

$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

Pas 1: Înlocuirea conectivelor $(\to)$

$\equiv (p \to (\neg q \vee r)) \to (q \to (\neg p \vee r))$

$\equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \to (\neg q \vee (\neg p \vee r))$

$\equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg q \vee (\neg p \vee r))$

Pas intermediar (4) asociativitatea $\vee$

$\equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg q \vee \neg p \vee r$

Pas2 Legile lui DeMorgan

$\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg q \vee \neg p \vee r$

Pas3 Distribuvitatea conectivei $\vee$ față de $\wedge$

$\equiv$ $(p \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee r)$ - FNC cu 3 clauze tautologice $\Rightarrow$ formula este tautologie.

4. Modelare raționament

Făt-Frumos, după ce câștigă prietenia lupului, vulpii, știucii și șoimului se îndreaptă spre palatul zmeului pentru a o salva pe Ileana Cosanzeana. Ce nu știe însă Făt frumos este că zmeul, după ce își pierde puterile omenești se transformă în cerb. Dacă le pierde și pe acelea, se transformă în iepure, apoi porumbel, pește, iar la urmă gâză, după care va fi definitiv învins. Are Făt-Frumos suficienți prieteni?

z – zmeul
c – cerb
i –iepure
p - porumbel
s – pește
g – gâză
l – lup
v – vulpe
t – știucă
m – șoim
f – făt-frumos

$f \wedge z \rightarrow c \equiv \neg f \vee \neg z \vee c$
$l \wedge c \rightarrow i \equiv \neg l \vee \neg c \vee i$
$v \wedge i \rightarrow s \equiv \neg v \vee \neg i \vee s$
$t \wedge s \rightarrow p \equiv \neg t \vee \neg s \vee p$
$m \wedge p \rightarrow g \equiv \neg m \vee \neg p \vee g$
l, v, t, m, f
Concluzia: $\neg z$

rezoluția cu strategia eliminării
$\{\neg f \vee \neg z \vee c, \neg l \vee \neg c \vee i, \neg v \vee \neg i \vee s, \neg t \vee \neg s \vee p, \neg m \vee \neg p \vee g, l, v, t, m, f, z\}$
Pasul 1 – nu sunt clauze tautologice
Pasul 2 –

4. Modelare raționament

Făt-Frumos, după ce câștigă prietenia lupului, vulpii, știucii și șoimului se îndreaptă spre palatul zmeului pentru a o salva pe Ileana Cosanzeana. Ce nu știe însă Făt frumos este că zmeul, după ce își pierde puterile omenești se transformă în cerb. Dacă le pierde și pe acelea, se transformă în iepure, apoi porumbel, pește, iar la urmă gâză, după care va fi definitiv învins. Are Făt-Frumos suficienți prieteni?

z – zmeul
c – cerb
i –iepure
p - porumbel
s – pește
g – gâză
l – lup
v – vulpe
t – știucă

m – șoim
f – făt-frumos

$f \land z \to c \equiv \neg f \lor \neg z \lor c$
$l \land c \to i \equiv \neg l \lor \neg c \lor i$
$v \land i \to s \equiv \neg v \lor \neg i \lor s$
$t \land s \to p \equiv \neg t \lor \neg s \lor p$
$m \land p \to g \equiv \neg m \lor \neg p \lor g$
l, v, t, m, f
Concluzia: $\neg z$

rezoluția cu strategia eliminării
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, \neg t \lor \neg s \lor p, \neg m \lor \neg p \lor g, l, v, t, m, f, z\}$
Pasul 1 – nu sunt clauze tautologice
Pasul 2 – nu sunt clauze subsumate ($a \lor b$ și b, $a \lor b$ este subsumată de b, deci se elimină $a \lor b$.
Cu alte cuvinte, se elimină o clauză care include o altă clauză. Dacă e să obținem clauza vidă, o să o obținem din clauza mai mică, nu din cea mai mare.)

Pasul 3 (literali puri) se aplică, în mod repetat
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, \neg t \lor \neg s \lor p, \cancel{\neg m \lor \neg p \lor g}, l, v, t, m, f, z\}$
g este literal pur
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, \neg t \lor \neg s \lor p, l, v, t, m, f, z\}$

$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, \neg t \lor \neg s \lor p, l, v, t, \cancel{m}, f, z\}$
m este literal pur
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, \neg t \lor \neg s \lor p, l, v, t, f, z\}$

$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, \cancel{\neg t \lor \neg s \lor p}, l, v, t, f, z\}$
p este literal pur
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \neg v \lor \neg i \lor s, l, v, t, f, z\}$

$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, \cancel{\neg v \lor \neg i \lor s}, l, v, t, f, z\}$
s este literal pur
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \neg l \lor \neg c \lor i, l, v, t, f, z\}$

$\{\neg f \lor \neg z \lor c, \cancel{\neg l \lor \neg c \lor i}, l, v, t, f, z\}$
i literal pur
$\{\neg f \lor \neg z \lor c, l, v, t, f, z\}$

$\{\cancel{\neg f \lor \neg z \lor c}, l, v, t, f, z\}$
c literal pur
$\{l, v, t, f, z\}$

$\{l, v, t, f, z\}$
l, v, t, f, z literali puri
$\varnothing$ - consistentă, deci zmeul nu a fost învins, deci făt-frumos nu are suficienți prieteni.

Pasul 4 (clauze unitate) nu avem la ce să-l aplicăm sunt clauze subsumate ($a \lor b$ și b, $a \lor b$ este subsumată de b, deci se elimină $a \lor b$.

Cu alte cuvinte, se elimină o clauză care include o altă clauză. Dacă e să obținem clauza vidă, o să o obținem din clauza mai mică, nu din cea mai mare.)

Dragă Maria,

Îți scriu această scrisoare pentru că, de când ai plecat din Londra, viața mea fără tine este jalnică, mai ales acum, iarna, când afară este o furtună.

Motivul e simplu. În timpul unei furtuni, după cum știi, plouă și suflă vântul. Dacă plouă și nu ai umbrelă, te uzi. Dacă plouă și ai umbrelă, dar suflă vântul, tot te uzi. Și doar iarna este frig. Iar când ești ud și e frig, este foarte neplăcut.

Mi-e dor de tine și de ceaiul tău cald.

Te rog să te întorci cât mai repede!

Dragul tău John.

vom nota propozițiile simple (~verbele) cu variabile propoziționale

este jalnic=neplăcut o vom nota cu: n

este iarnă: w

este furtună: f

plouă: p

suflă vântul: v

ai umbrelă: u

ești ud: d

frig: g

ipoteze:

$f \to p \wedge v$

$p \wedge \neg u \to d$

$p \wedge u \wedge v \to d$

$w \to g$

$d \wedge g \to n$

concluzia:

$f \wedge w \to n$

vom rezolva cu metoda tabelelor semantice. se pornește, conform unei teoreme fără denumire din curs, de la conjuncția ipotezelor + negarea concluziei.

(f → p ∧ v) ∧ (p ∧ ¬u → d) ∧ (p ∧ u ∧ v → d) ∧ (w → g) ∧ (d ∧ g → n) ∧ ¬(f ∧ w → n) (1) √
| α (1) generalizat
f → p ∧ v (2) √
|
p ∧ ¬u → d (3) √
|
p ∧ u ∧ v → d (4)
|
w → g (5) √
|
d ∧ g → n (6) √
|
¬(f ∧ w → n) (7) √
| α (7)
f ∧ w (8) √
|
¬ n
| α (8)
f
|
w
/ \ β (2)
¬f p ∧ v (9) √
⊗ | α (9)
p
|
v
/ \ β (5)
¬w g
⊗ / \ β (6)
√ (10) ¬ (d ∧ g) n
β (10) / \ ⊗
¬ d ¬g
β (3) / \ ⊗
√ (11) ¬ (p ∧ ¬u) d
β (11) / \ ⊗
¬ p u
⊗ / \ β (4)
√ (12) ¬ (p ∧ u ∧ v) d
β generalizat (12) / | \ ⊗
¬ p ¬ u ¬ v
⊗ ⊗ ⊗

Indicele unui minterm – se iau valorile variabilelor = puterile lor și nr. format cu respectivele cifre binare se transformă în baza 10.

Ex.: $13 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 1101_{(2)}$

$m_{13} = x_1^{\,1} x_2^{\,1} x_3^{\,0} x_4^{\,1} = x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$

tabela de valori pt. m_{13}

x_1	x_2	x_3	x_4	m_{13}
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Distributivitatea la stânga a conjuncției față de implicație $p \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r))$

Evaluați formula predicativa U= $((\forall x)\, P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ în două interpretări diferite alese astfel încât o interpretare sa aibă domeniul finit, iar ce-a de-a doua domeniul infinit. Câte interpretări posibile are U? Este logica predicatelor decidabilă? Argumentați răspunsul.

Interpretare cu domeniu infinit:
$I_1 = \langle D_1, m_1 \rangle$
$D_1 = \mathbf{R}$
m_1 (P) : $\mathbf{R} \rightarrow \{T,F\}$, m(P)($x$)= „ $x > 0$ ”
m_1 (Q) : $\mathbf{R} \rightarrow \{T,F\}$, m(Q)($x$)= „ $x < 0$ ”
evaluăm formula
$\nu^{I_1}(U) = \nu^{I1}(((\forall x)\, P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)))$
$= \nu^{I1} (((\forall x)\, P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))) \rightarrow \nu^{I1} ((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)))$
$= (\nu^{I1} ((\forall x)\, P(x)) \rightarrow \nu^{I1} ((\forall x)Q(x))) \rightarrow \nu^{I1} ((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)))$
= (“orice număr real este mai mare decât 0” → “orice număr real este mai mic decât 0”) → “orice număr real este mai mare și mai mic decât 0 (în același timp)”
= (F → F) → F = T → F = F
Deci, I_1 este un anti-model al formulei U

Interpretare cu domeniu finit:
$I_2 = \langle D_2, m_2 \rangle$
$D_2 = \{0, 1\}$
m_2 (P) : $\{0, 1\} \rightarrow \{T,F\}$, m(P)($x$)= „ $x > 0$ ”
m_2 (Q) : $\{0, 1\} \rightarrow \{T,F\}$, m(Q)($x$)= „ $x < 0$ ”
evaluăm formula

$v^{I_2}(\mathrm{U}) = v^{I2}(((\forall x)\, \mathrm{P}(x) \to (\forall x)\mathrm{Q}(x)) \to (\forall x)(\, \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x))\,)$

$= v^{I2}\, (((\forall x)\, \mathrm{P}(x) \to (\forall x)\mathrm{Q}(x))\,) \to\, v^{I2}\, (\, (\forall x)(\, \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x))\,)$

$= (\, v^{I2}\, ((\forall x)\, \mathrm{P}(x)) \to\, v^{I2}\, (\, (\forall x)\mathrm{Q}(x)\,)\,) \to\, v^{I2}\, (\, (\forall x)(\, \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x))\,)$

$= (\, m_2(\mathrm{P})(0) \wedge m_2(\mathrm{P})(1) \to m_2(\mathrm{Q})(0) \wedge m_2(\mathrm{Q})(1)\,) \to (\, (m_2(\mathrm{P})(0) \wedge m_2(\mathrm{Q})(0)) \wedge (m_2(\mathrm{P})(1) \wedge m_2(\mathrm{Q})(1))\,)$

$= (\, “0>0” \wedge “1>0” \to “0<0” \wedge “1<0”\,) \to (\, (“0>0” \wedge “0<0”) \wedge (“1>0” \wedge “1<0”)\,)$

$= (\, F \wedge T \to F \wedge F\,) \to (\, (F \wedge F) \wedge (T \wedge F)\,)$

$= (\, F \to F\,) \to (\, F \wedge F\,)$

$= T \to F$

$= F$

Deci, I_2 este un anti-model al formulei U

U are o infinitate de interpretări.
Logica predicatelor este semi- decidabilă
Argumentarea: Teorema lui Church.

Problema validității unei formule în calculul predicatelor de ordinul I este *nedecidabilă*. Mulțimea formulelor valide din acest sistem logic este recursiv numărabilă, adică există o procedură *P* care, având ca intrare o formulă *A* din limbaj, are următorul comportament:

- dacă formula *A* este validă, *P* se termină și furnizează răspunsul corespunzător;
- dacă formula *A* nu este validă, *P* se termină cu răspunsul corespunzător *sau* execuția procedurii nu se încheie niciodată.

FCC și FCD

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\mathrm{FCC}(\, f\,) = (f\,(0,0,0) \vee x^1 \vee y^1 \vee z^1) \wedge (f\,(0,0,1) \vee x^1 \vee y^1 \vee z^0) \wedge (f\,(0,1,0) \vee x^1 \vee y^0 \vee z^1) \wedge$
$(f\,(0,1,1) \vee x^1 \vee y^0 \vee z^0) \wedge (f\,(1,0,0) \vee x^0 \vee y^1 \vee z^1) \wedge (f\,(1,0,1) \vee x^0 \vee y^1 \vee z^0) \wedge$
$(f\,(1,1,0) \vee x^0 \vee y^0 \vee z^1) \wedge (f\,(1,1,1) \vee x^0 \vee y^0 \vee z^0)$

Cel mai general unificator
Sunt unificabili atomii

7. $P(a, x, g(f(y)))$ şi $P(f(y), z, x)$;

$P(x, a, g(b))$ şi $P(f(y), f(y), g(x))$;

$P(h(x, a), f(z), z)$ şi $P(h(y, x), f(x), a)$.

$A_1 = P(a, x, g(f(y)))$
$A_2 = P(f(y), z, x)$
Pas1: au același simbol predicativ? Da, P
Pas2: au aceeași aritate? Da, 3
Pas3: sunt identice?
Nu, primul caracter distinct este *a* față de *f*. *a* este o constantă, *f* este un simbol de funcție, nu se poate substitui o constantă cu o funcție $\Rightarrow$ A_1 și A_2 nu sunt unificabile.

$A_3 = P(x, a, g(b))$
$A_4 = P(f(y), f(y), g(x))$
Pas1: au același simbol predicativ? Da, P
Pas2: au aceeași aritate? Da, 3
Pas3: sunt identice?
Nu, primul caracter distinct este *x* față de *f*.
$\theta_1 = [x \leftarrow f(y)]$
$\theta_1(A_3) = P(f(y), a, g(b))$
$\theta_1(A_4) = P(f(y), f(y), g(f(y)))$
sunt identice?
Nu, primul caracter distinct este *a* față de *f*. *a* este o constantă, *f* este un simbol de funcție, nu se poate substitui o constantă cu o funcție $\Rightarrow$ A_3 și A_4 nu sunt unificabile.

$A_5 = P(h(x, a), f(z), z)$
$A_6 = P(h(y, x), f(x), a)$
Pas1: au același simbol predicativ? Da, P
Pas2: au aceeași aritate? Da, 3
Pas3: sunt identice?
Nu, primul caracter distinct este *x* față de *y*.
$\theta_1 = [x \leftarrow y]$
$\theta_1(A_5) = P(h(y, a), f(z), z)$
$\theta_1(A_6) = P(h(y, y), f(y), a)$
sunt identice?
Nu, primul caracter distinct este *y* față de *a*.
$\theta_2 = [y \leftarrow a]$
$\theta_2(\theta_1(A_5)) = P(h(a, a), f(z), z)$
$\theta_2(\theta_1(A_6)) = P(h(a, a), f(a), a)$

sunt identice?
Nu, primul caracter distinct este z față de a.
$\theta_3 = [z \leftarrow a]$
$\theta_3(\theta_2(\theta_1(A_5))) = P(h(a, a), f(a), a)$
$\theta_3(\theta_2(\theta_1(A_6))) = P(h(a, a), f(a), a)$
Sunt identice? Da $\Rightarrow$ A_5 și A_6 sunt unificabile, și
$mgu(A_5, A_6) = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_3 = [x \leftarrow y] \circ [y \leftarrow a] \circ [z \leftarrow a] = [x \leftarrow a, y \leftarrow a, z \leftarrow a]$

x yz	00	01	**11**	10
0	m_0	m_1		m_2
1		m_5	m_7	m_6

Cazul 3
Prima formă simplificată

x yz	00	01	**11**	10
0	m_0	m_1		m_2
1		m_5	m_7	m_6

$\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,z \vee y\,\bar{z}$

A doua formă simplificată

x yz	00	01	**11**	10
0	m_0	m_1		m_2
1		m_5	m_7	m_6

$\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z \vee x\,y$

$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ este o consecință logică a formulei: $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$.

$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \models (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$

Tabela semantică

$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \wedge \neg((\forall x) A(x) \vee (\forall x)\ B(x))$ (1) √

| regula α pt. (1)

$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ (2)

|

$\neg((\forall x) A(x) \vee (\forall x)\ B(x))$ (3) √

| regula α pt. (3)

$\neg\ (\forall x) A(x)$ (4) √

|

$\neg\ (\forall x) B(x)$ (5) √

| regula δ pt. (4), *a* constantă nouă

$\neg\ A(a)$

| regula δ pt. (5), *b* constantă nouă

$\neg\ B(b)$

| regula γ pt. (2), *a*, *b* constante exitente

$A(a) \wedge B(a)$ (6)

|

$A(b) \wedge B(b)$ (7)

|

$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ copie (2')

| regula α pt. (6)

$A(a)$

|

$B(a)$

⊗ Th.

Tabela semantică este închisă ⇒ are loc relația de consecință logică.

  100101 +
  011100
1000001

Utilizând o metodă sintactică de demonstrare, demonstrați distributivitatea cuantificatorului existențial față de disjuncție.

$U \overset{\text{not.}}{=} (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$

$U_1 \overset{\text{not.}}{=} (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$

not.

$U_2 = (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) \rightarrow (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,)$

$\vdash U \Leftrightarrow \vdash U_1$ și $\vdash U_2$

metodă sintactică = rezoluția (o rezoluție: generală, liniară, a blocării, mulțimii suport, eliminării, saturării pe nivele). Rezoluția pornește de la o mulțime de clauze, și e o metodă prin respingere, astfel că, va trebui să negăm formula și să o trecem prin cei 7 pași.

Vom lua pe rând U_1 , U_2

$\neg U_1$:

$\neg U_1 \equiv \neg\, (\, (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,) \rightarrow (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)\,)$

Pas1: Înlocuim conectivele derivate ($\rightarrow$) cu o formulă echivalentă

$\neg U_1 \equiv \neg\, (\, \neg\, (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,) \vee (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)\,)$

Pas2: Legile lui De Morgan

$\neg U_1 \equiv (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,) \wedge (\forall x)\, \neg P(x) \wedge (\forall x)\, \neg Q(x)$

Pas3: Redenumirea variabilelor legate astfel încât să fie distincte

$\neg U_1 \equiv (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,) \wedge (\forall y)\, \neg P(y) \wedge (\forall z)\, \neg Q(z)$

Pas4: Extragerea cuantificatorilor în fața formulei

$(\neg U_1)^P \equiv (\exists x)\, (\forall y)\, (\forall z)\, (\, (\, P(x) \vee Q(x)\,) \wedge \neg P(y) \wedge \neg Q(z)\,)$

Pas5: Eliminarea cuantificatorilor existențiali

$x \leftarrow a$

$(U_1)^S \equiv (\forall y)\, (\forall z)\, (\, (\, P(a) \vee Q(a)\,) \wedge \neg P(y) \wedge \neg Q(z)\,)$

Pas6: Eliminarea cuantificatorilor universali

$(U_1)^{Sq} \equiv (\, P(a) \vee Q(a)\,) \wedge \neg P(y) \wedge \neg Q(z) \equiv (U_1)^C$

Pas7: Aducerea la forma clauzală – distributivitatea lui sau față de și – nu e cazul

Se obține mulțimea de clauze $S = \{\, P(a) \vee Q(a), \neg P(y)\, , \neg Q(z)\, \}$

$C_1 = P(a) \vee Q(a)$

$C_2 = \neg P(y)$

$C_3 = \neg Q(z)$

$C_4 = \text{Rez}_{P,[y \leftarrow a]}^{Pr}\, (C_1, C_2) = Q(a)$

Raționamentului
prin respingere

$C_5 = \text{Rez}_{Q,[y \leftarrow a]}^{Pr}\, (C_3, C_4) \overset{\text{TCC}}{=} \square \Rightarrow$ S este inconsistentă $\Rightarrow \vdash U_1$ (1)

$\neg U_2$:

$\neg U_2 \equiv \neg\, ((\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) \rightarrow (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,))$

Pas1: Înlocuim conectivele derivate ($\rightarrow$) cu o formulă echivalentă

$\neg U_2 \equiv \neg\, (\neg\, ((\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)) \vee (\exists x)\, (\, P(x) \vee Q(x)\,))$

Pas2: Legile lui De Morgan

$\neg U_2 \equiv\ ((\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)) \wedge (\forall x)\, (\, \neg P(x) \wedge \neg Q(x)\,))$

Pas3: Redenumirea variabilelor legate astfel încât să fie distincte

$\neg U_2 \equiv\ ((\exists x)\, P(x) \vee (\exists y)\, Q(y)) \wedge (\forall z)\, (\, \neg P(z) \wedge \neg Q(z)\,))$

Pas4: Extragerea cuantificatorilor în fața formulei + asociativitatea conjuncției

$(\neg U_2)^P \equiv (\exists x)\, (\exists y)\, (\forall z)\ (\, (P(x) \vee Q(y)) \wedge\ \neg P(z) \wedge \neg Q(z)\,)$

Pas5: Eliminarea cuantificatorilor existențiali

$x \leftarrow a,\ y \leftarrow a$

$(U_2)^S \equiv\ (\forall z)\ (\, (P(a) \vee Q(b)) \wedge\ \neg P(z) \wedge \neg Q(z)\,)$

Pas6: Eliminarea cuantificatorilor universali

$(U_2)^{Sq} \equiv\ (P(a) \vee Q(b)) \wedge\ \neg P(z) \wedge \neg Q(z)\ \ \equiv (U_2)^C$

Pas7: Aducerea la forma clauzală – distributivitatea lui sau față de și – nu e cazul

Se obține mulțimea de clauze $S = \{P(a) \vee Q(b)\,,\ \neg P(z)\,, \neg Q(z)\ \}$

$C_1 = P(a) \vee Q(b)$

$C_2 = \neg P(z)$

$C_3 = \neg Q(z)$

$C_4 = Rez\ _{P,[z \leftarrow a]}{}^{Pr}\, (C_1,C_2) = Q(b)$

Raționamentului prin respingere

$C_5 = Rez\ _{Q,[z \leftarrow b]}{}^{Pr}\, (C_3,C_4) \overset{TCC}{=} \square \Rightarrow$ S este inconsistentă $\Rightarrow \vdash U_2$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \vdash U$

$p \vee \neg p \vee q \equiv T$

. Sistemul axiomatic (formal) al calculului propoziţiilor. Ce este o teoremă? Folosind o metodă sintactică demonstraţi că cea de-a doua axiomă a calculului propoziţional este o teoremă

$P=(\Sigma_P, F_P, A_P, R_P)$

- $\Sigma_P = Var\_propoz \cup Conective \cup \{ (,) \}$
  - $Var\_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \dots \}$
  - $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$
- F_P = mulţimea formulelor propoziţionale corect construite
  - *- baza*: $p_i \in F_P$, i=1,2,…
  - *- inducţia*: dacă $U,V \in F_P$ atunci: $\neg U \in F_P$, $U \wedge V \in F_P$, $U \vee V \in F_P$, $U \rightarrow V \in F_P$, $U \leftrightarrow V \in F_P$
  - *- închiderea*: toate formulele din F_P se obţin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.

$A_P = \{A_1, A_2, A_3\}$ scheme axiomatice

- A_1: $U \rightarrow (V \rightarrow U)$
- A_2: $(U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$
- A_3: $(U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$

$R_P = \{m_P\}$ – o singură regulă de inferenţă „ *modus ponens*”

- $U, U \rightarrow V \vdash V$

„din faptele U şi $U \rightarrow V$ se deduce (inferă) V”

O teoremă este o formula deductibilă dintr-o mulțime vidă de ipoteze
Metodă sintactică – rezoluția – prin respingere, și pornește de la o mulțime de clause
$\neg A_2 \equiv \neg ((U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U\rightarrow V) \rightarrow (U\rightarrow Z)))$
Pas1: se elimină implicațiile și alte connective derivate
$\neg A_2 \equiv \neg (\neg (\neg U \vee (\neg V \vee Z)) \vee (\neg (\neg U\vee V) \vee (\neg U\vee Z)))$
Pas2: De Morgan
$\neg A_2 \equiv (\neg U \vee (\neg V \vee Z)) \wedge ((\neg U\vee V) \wedge (U\wedge\neg Z))$
Pas facultativ: asociativitatea lui și/sau
$\neg A_2 \equiv (\neg U \vee \neg V \vee Z) \wedge (\neg U\vee V) \wedge U\wedge\neg Z$
Pas3: distributivitatea lui sau față de și – nu e cazul
$S=\{\neg U \vee \neg V \vee Z , \neg U\vee V , U, \neg Z \}$
$C_1 = \neg U \vee \neg V \vee Z$
$C_2 = \neg U \vee V$
$C_3 = U$
$C_4 = \neg Z$
$C_5 = Rez_V (C_1,C_2) = \neg U \vee Z$
$C_6 = Rez_U (C_5,C_3) = Z$ Raționamentului prin respingere
$C_7 = Rez_Z (C_4,C_6) = \square \overset{TCC}{\Rightarrow}$ S este inconsistentă $\Rightarrow \vdash A_2$

3. Folosind metoda lui Quine, simplificaţi funcţia booleană:
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$.
Implementaţi circuitul logic asociat unei forme simplificate a funcţiei f.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$

$= x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$

$S_f = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,1),(1,0,0,0),(0,1,1,0)\}$

$S_f = \{(1,1,1,1),$

$(1,1,1,0), (1,1,0,1),$

$(1,0,1,0), (0,1,1,0),$

$(1,0,0,0)\}$

Grupul	$x_1x_2x_3x_4$	
I	1000	m_8√
II	1010 0110	m_{10}√ m_6√
III	1110 1101	m_{14} √ m_{13}√
IV	1111	m_{15}√
Factorizarea simplă V=I+II	10-0	$m_8 \vee m_{10} = max_1 = x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$
VI=II+III	1-10 -110	$m_{10} \vee m_{14} = max_2 = x_1x_3\overline{x}_4$ $m_6 \vee m_{14} = max_3 = x_2x_3\overline{x}_4$
VII=III+IV	111- 11-1	$m_{14} \vee m_{15} = max_4 = x_1x_2x_3$ $m_{13} \vee m_{15} = max_5 = x_1x_2x_4$

Factorizarea dublă
Nu avem

$M(f)=\{ max_1, max_2, max_3, max_4, max_5\}$

Mon.max. / mintermi	max_1	max_2	max_3	max_4	max_5
m_8	*				
m_{10}	*	*			
m_6			*		
m_{14}		*	*	*	
m_{13}					*
m_{15}				*	*

$C(f)=\{ max_1, max_3, max_5\}$

$M(f) \neq C(f)$, $C(f) \neq \varnothing \Rightarrow$ suntem în Cazul II al algoritmului de simplificare

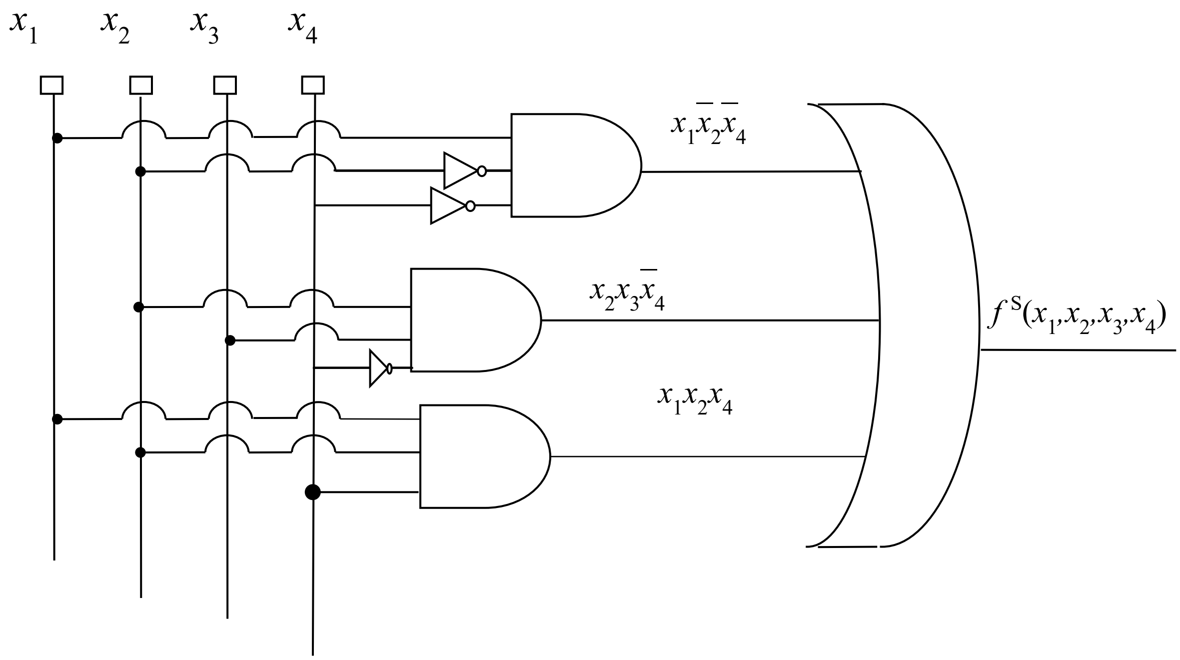
$g(x_1,x_2,x_3,x_4) = max_1 \vee max_3 \vee max_5$

Mon.max. / mintermi	max_1	max_2	max_3	max_4	max_5
m_8	*				
m_{10}	*	*			
m_6			*		
m_{14}		*	*	*	
m_{13}					*
m_{15}				*	*

Mon.max. / mintermi	max_1	max_2	max_3	max_4	max_5
m_8	*				
m_{10}	*	*			
m_6			*		
m_{14}		*	*	*	
m_{13}					*
m_{15}				*	*

Se observă că $S_g = S_f \Rightarrow$ avem o singură formă simplificată a funcției,

$f^s(x_1,x_2,x_3,x_4) = g(x_1,x_2,x_3,x_4) = max_1 \vee max_3 \vee max_5 = max_1 \vee max_3 \vee max_5 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2x_4$



Exemplu teoretic de caz III

Mon.max. mintermi	max₁	max₂	max₃	max₄	max₅	max₆
?	*					*
?	*	*				
?		*	*			
?			*	*		
?				*	*	
?					*	*

Soluția 1:

Mon.max. mintermi	max₁	max₂	max₃	max₄	max₅	max₆
?	*					*
?	*	*				
?		*	*			
?			*	*		
?				*	*	
?					*	*

Soluția 2:

Mon.max. / mintermi	max_1	max_2	max_3	max_4	max_5	max_6
?	*					*
?	*	*				
?		*	*			
?			*	*		
?				*	*	
?					*	*