1 R-Module Con

Định nghĩa.

Cho R là vành giao hoán, M là R-module. Tập hợp $N \subseteq M$ gọi là R-module con nếu:

1. $0_M \in N$ (chứa phần tử không)
2. $\forall x, y \in N : x + y \in N$ (đóng dưới phép cộng)
3. $\forall r \in R, x \in N : r \cdot x \in N$ (đóng dưới tác động vô hướng)

1.1 Ví dụ 1: Các bội số nguyên

Ví dụ. Cho $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: $N = n\mathbb{Z}$ là module con.

Chứng minh:

1. $0 = n \cdot 0 \in N$ ✓
2. Với $nk_1, nk_2 \in N$: $nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2) \in N$ ✓
3. Với $m \in \mathbb{Z}, nk \in N$: $m(nk) = n(mk) \in N$ ✓

1.2 Ví dụ 2: Không phải module con

Ví dụ. Cho $R = k[x, y], M = k[x, y]$. Xét N không là module con.

Chứng minh:

Vì $x, y \in M$ nhưng $x + y \notin N$. ✗

1.3 Ví dụ 3: Annihilator

Ví dụ. Cho M là R-module. Định nghĩa:

$\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0, \forall m \in M\}$

Chứng minh: $\mathrm{Ann}(M)$ là R-module con của R.

Chứng minh:

1. $0 \cdot m = 0$ với mọi $m \in M$, nên $0 \in \mathrm{Ann}(M)$ ✓
2. Với $r_1, r_2 \in \mathrm{Ann}(M)$: $(r_1 + r_2) \cdot m = 0$, nên $r_1 + r_2 \in \mathrm{Ann}(M)$ ✓
3. Với $a \in R, r \in \mathrm{Ann}(M)$: $(ar) \cdot m = 0$, nên $ar \in \mathrm{Ann}(M)$ ✓

1.4 Các tính chất cơ bản

Mệnh đề 1. Giao của các R-module con là R-module con.

Chứng minh:

Cho họ các module con của M. Đặt $N = \bigcap_{\{i \in I\}} N_i$.

1. $0_M \in N$ ✓
2. Với $x, y \in N$: $x + y \in N$ ✓
3. Tương tự cho tính đóng dưới tác động của R ✓

Mệnh đề 2. Module con sinh bởi tập $S \subseteq M$ là tập tất cả các tổng hữu hạn $\sum_{\{i=1\}}^{n} r_i s_i$ với $r_i \in R, s_i \in S$.

1.5 Định lý đẳng cấu

Định lý. Cho $\varphi : X \xrightarrow{\varphi} M$ là module đồng cấu với $\ker(\varphi) = A$. Khi đó:

$\frac{X}{A} \cong \operatorname{im}(\varphi)$

Chứng minh:

Bước 1: Xây dựng ánh xạ

Định nghĩa $\overline{\varphi} : \frac{X}{A} \xrightarrow{\overline{\varphi}} M$ bởi $\overline{\varphi}(x + A) = \varphi(x)$.

Bước 2: Được định nghĩa tốt

Nếu $x + A = y + A$ thì $x - y \in A$, nên $\varphi(x) = \varphi(y)$ ✓

Bước 3: Đồng cấu

Tính cộng tính: $\overline{\varphi}((x + A) + (y + A)) = \overline{\varphi}(x + A) + \overline{\varphi}(y + A)$ ✓

Bước 4: Đơn cấu

$\overline{\varphi}(x + A) = 0 \Rightarrow x \in A \Rightarrow x + A = 0_{\{\frac{X}{A}\}}$ ✓

Bước 5: Toàn cấu

Với mọi $m \in \operatorname{im}(\varphi)$, tồn tại x sao cho $\overline{\varphi}(x + A) = m$ ✓

1.6 Dãy khớp

Định nghĩa. Dãy các module đồng cấu

$\ldots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \ldots$

được gọi là **khớp** nếu $\text{im}(f) = \ker(g)$ tại mỗi vị trí.

1.6.1 Dãy khớp ngắn

Định nghĩa. Dãy khớp ngắn là:

$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$

Tính chất: f đơn cấu, g toàn cấu, $\text{im}(f) = \ker(g)$

1.6.2 Dãy khớp cho giao và tổng

Định lý. Cho N, P là các R-module con của M. Tồn tại dãy khớp:

$0 \to N \cap P \xrightarrow{\varphi} N \times P \xrightarrow{\psi} N + P \to 0$

với $\varphi(x) = (x, x)$ và $\psi(y, z) = y - z$.

Kiểm tra khớp:

Tại $N \cap P$: φ đơn cấu vì $\varphi(x) = (0, 0) \Rightarrow x = 0$ ✓

Tại $N \times P$: $\text{im}(\varphi) = \ker(\psi)$ vì $\psi(\varphi(x)) = 0$ ✓

Tại $N + P$: ψ toàn cấu vì với $w = y + z$ có $\psi(y, -z) = w$ ✓

1.7 Tích tenxơ

Định nghĩa. Cho R là vành giao hoán, M, N là R-module. Tích tenxơ $M \otimes_R N$ là module thương với tính phổ dụng.

Ký hiệu: $m \otimes n$ là ảnh của cặp (m, n) trong module thương.

1.7.1 Tính chất cơ bản

Mệnh đề 1. Ánh xạ $\varphi : M \times N \xrightarrow{\varphi} M \otimes_R N$ định bởi $\varphi(m, n) = m \otimes n$ là song tuyến tính:

- $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$
- $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$
- $(r \cdot m) \otimes n = m \otimes (r \cdot n) = r \cdot (m \otimes n)$

Mệnh đề 2 (Tính phổ dụng). Cho $f : M \times N \xrightarrow{f} P$ song tuyến tính. Tồn tại duy nhất đồng cấu $\overline{f} : M \otimes_R N \xrightarrow{\overline{f}} P$ sao cho $\overline{f}(m \otimes n) = f(m, n)$.

1.7.2 Ví dụ

Ví dụ 1: $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

Ví dụ 2: $M \otimes_R R \cong M$

Ví dụ 3: Từ dãy khớp $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$, ta có dãy:

$N \otimes_R Q \xrightarrow{f} M \otimes_R Q \xrightarrow{g} P \otimes_R Q$

(chỉ khớp tại $M \otimes_R Q$ trong trường hợp tổng quát - liên quan đến khái niệm “flatness”)

1.8 Bài tập

1.8.1 Bài 2.1

Bài tập 2.1

Cho dãy khớp ngắn:

$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$

trong đó N, P là các R-môđun hữu hạn sinh. Chứng minh rằng M là R -môđun hữu hạn sinh.

Chứng minh:

Gọi $N = \langle n_1, n_2, ..., n_k \rangle$ và $P = \langle p_1, p_2, ..., p_l \rangle$.

Giả sử $m \in M$, suy ra $g(m) \in P$.

Tồn tại $a_i \in R$ sao cho $g(m) = \sum_{\{i=1\}}^{l} a_i p_i$.

Vì g là toàn cấu nên tồn tại $m_i \in M$ sao cho $p_i = g(m_i)$. Do đó:

$g(m) = \sum_{\{i=1\}}^{l} a_i g(m_i) = g\left(\sum_{\{i=1\}}^{l} a_i m_i\right)$

suy ra $m - \sum_{\{i=1\}}^{l} a_i m_i \in \ker(g) = \operatorname{im}(f)$.

Vì thế tồn tại $n \in N$ sao cho $m - \sum_{\{i=1\}}^{l} a_i m_i = f(n)$.

Do $n \in N$ nên tồn tại $b_j \in R$ sao cho $n = \sum_{\{j=1\}}^{k} b_j n_j$.

Vì vậy: $m = \sum_{\{i=1\}}^{l} a_i m_i + f\left(\sum_{\{j=1\}}^{k} b_j n_j\right) = \sum_{\{i=1\}}^{l} a_i m_i + \sum_{\{j=1\}}^{k} b_j f(n_j)$

Nên $M = \langle m_1, m_2, ..., m_l, f(n_1), f(n_2), ..., f(n_k) \rangle$ ✓

1.8.2 Bài 2.2

Bài tập 2.2

Cho dãy khớp:

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$

Chứng minh rằng các phát biểu sau là tương đương:

(a) f là toàn cấu.

(b) g là đồng cấu không.

(c) h là đơn cấu.

Chứng minh:

Bước 1: $(a) \Rightarrow (b)$

Với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$ (vì f toàn cấu).

Nên $gf(a) = g(b) = 0$ (từ tính khớp tại B: $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$).

Vì b tùy ý, ta có $g = 0$. ✓

Bước 2: $(b) \Rightarrow (c)$

Với mọi $c \in \ker(h)$. Do tính khớp tại C: $\ker(h) = \mathrm{im}(g)$, nên tồn tại $b \in B$ sao cho $c = g(b)$.

Nhưng $g = 0$ (giả thiết (b)), nên $c = 0$.

Vì thế $\ker(h) = \{0\}$, tức là h đơn cấu. ✓

Bước 3: $(c) \Rightarrow (a)$

Với mọi $b \in B$, suy ra $g(b) \in \mathrm{im}(g) = \ker(h)$.

Vì h đơn cấu (giả thiết (c)), nên $\ker(h) = \{0\}$, suy ra $g(b) = 0$.

Do đó $b \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$, nên tồn tại $a \in A$ sao cho $b = f(a)$.

Tức là f toàn cấu. ✓