

R-Module Con

Phương Pháp Chứng Minh R-Module Con

Lý Thuyết Module Giao Hoán

Toán học Đại Số - Học Tập

Định Nghĩa R-Module Con

Cho \mathbf{R} là vành giao hoán, \mathbf{M} là \mathbf{R} -module. Tập hợp $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ được gọi là \mathbf{R} -module con nếu:

1. **Chứa phần tử không:** $0_M \in N$ ✓

v(0.12in)

2. **Đóng dưới phép cộng:** Với $x, y \in N$ thì $x + y \in N$ ✓

v(0.12in)

3. **Đóng dưới tác động của \mathbf{R} :** Với $r \in \mathbf{R}$, $x \in N$ thì $r \cdot x \in N$ ✓

Điều kiện 2, 3 kết hợp: N là nhóm con cộng của M và đóng dưới tác động vô hướng

Phương Pháp Chứng Minh

Để chứng minh $N \subseteq M$ là R -module con, thực hiện 3 bước:

① **Chứa phần tử không** Kiểm tra $0_M \in N$ (điều kiện cơ bản)

② **Đóng dưới phép cộng** Với $x, y \in N$ bất kỳ, chứng minh $x + y \in N$

③ **Đóng dưới tác động của R** Với $r \in R, x \in N$ bất kỳ, chứng minh $r \cdot x \in N$

✓ Nếu cả 3 điều kiện đúng $\rightarrow N$ là R -module con!

Ví Dụ 1: Các Bội Số Nguyên

Cho $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ cố định. Chứng minh: $N = n\mathbb{Z}$ là \mathbb{Z} -module con

Bước ①: $0 = n \cdot 0 \in N$ ✓

v(0.12in)

Bước ②: Với $nk_1, nk_2 \in N$: $nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2) \in N$ ✓

v(0.12in)

Bước ③: Với $m \in \mathbb{Z}$, $nk \in N$: $m(nk) = n(mk) \in N$ ✓

✓ **Kết luận:** $n\mathbb{Z}$ là \mathbb{Z} -module con của \mathbb{Z}

Ví Dụ 2: Annihilator

Cho R là vành giao hoán, M là R -module. Chứng minh: $\text{Ann}(M) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0, \forall m \in M\}$ là R -module con

Bước ①: $0 \cdot m = 0 \forall m \in M \rightarrow 0 \in \text{Ann}(M) \checkmark$

v(0.12in)

Bước ②: Với $r_1, r_2 \in \text{Ann}(M)$: $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m = 0 + 0 = 0 \rightarrow r_1 + r_2 \in \text{Ann}(M) \checkmark$

v(0.12in)

Bước ③: Với $a \in R, r \in \text{Ann}(M)$: $(ar)m = a(rm) = a \cdot 0 = 0 \rightarrow ar \in \text{Ann}(M) \checkmark$

✓ $\text{Ann}(M)$ là R -module con của R

Các Sai Lầm Thường Gặp

Sai Lầm 1: Quên kiểm tra điều kiện Phải kiểm tra tất cả 3 điều kiện, không thể bỏ qua bất kỳ điều kiện nào.

Sai Lầm 2: Chỉ kiểm tra với phần tử cụ thể Phải chứng minh với phần tử **bất kỳ**, không phải chỉ với ví dụ cụ thể.

Sai Lầm 3: Nhầm lẫn phép toán Phải phân biệt rõ phép cộng trong M và phép nhân từ vành R .

Tóm Tắt

Công Thức Chứng Minh R-Module Con

$N \subseteq M$ là R-module con \iff

(1) $0 \in N$

(2) $\forall x, y \in N: x + y \in N$

(3) $\forall r \in R, x \in N: r \cdot x \in N$

Lợi Ích: Kiểm tra 3 điều kiện này là cách nhanh nhất để xác minh module con, tiết kiệm thời gian so với kiểm tra tất cả các tiên đề của module.

Dãy Khớp (Exact Sequences)

Dãy các R-module và R-module đồng cấu:

$$\dots \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \dots$$

được gọi là **khớp** nếu tại mỗi vị trí:

$$\text{Ảnh} = \text{Hạt nhân: } \text{im}(f) = \text{ker}(g)$$

v(0.1in)

(Tức là, phần tử của B đi qua f đều bị g triệt tiêu)

Dãy khớp có ý nghĩa: không mất mát thông tin (đơn cấu) \leftrightarrow không có phần dư (toàn cấu)

Dãy Khớp Ngắn

Dãy khớp ngắn là trường hợp đặc biệt quan trọng:

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

Tính chất:

- **f** là **đơn cấu** (từ 0, “im”(0) = {0})

v(0.08in)

- **g** là **toàn cấu** (vào 0, “ker”(0) = 0)

v(0.08in)

- **im(f) = ker(g)** (dãy khớp tại M)

v(0.08in)

- Có thể viết: $M \simeq N \oplus P / (\text{tương đương})$

Ví Dụ: Dây Khớp

Ví dụ: Dây khớp ngắn về giao và tổng modules

Cho N, P là R -module con của M . Khi đó:

v(0.12in)

$$0 \rightarrow N \cap P \xrightarrow{\varphi} N \times P \xrightarrow{\psi} N + P \rightarrow 0$$

v(0.1in)

là dãy khớp ngắn với: • $\varphi(x) = (x, x)$ cho $x \in N \cap P$ • $\psi(y, z) = y - z$ cho $(y, z) \in N \times P$

Kiểm tra khớp:

- **Khớp tại $N \cap P$:** φ đơn cấu ✓

v(0.08in)

- **Khớp tại $N \times P$:** $\text{im}(\varphi) = \ker(\psi)$ (nếu $(y, z) \in \ker(\psi)$ thì $y = z$) ✓

v(0.08in)

Năm Bổ Đề (Five Lemma)

Công cụ mạnh để chứng minh các tính chất:

Dãy khớp: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

Năm Bổ Đề:

Nếu 4 ánh xạ đầu/cuối có tính chất mạnh (đơn/toàn cấu), thì ánh xạ ở giữa cũng sẽ thừa hưởng tính chất đó.

v(0.08in)

Trường hợp đặc biệt: Nếu cột giữa “bị nén” giữa hai ánh xạ đơn & toàn cấu, thì cột đó phải $= 0$

□ Ứng dụng: Xây dựng dãy khớp \rightarrow suy ra tính chất của các ánh xạ liên quan

Ứng Dụng & Tóm Tắt

Dãy Khớp Dừng Để:

① **Cấu trúc Module** - Mô tả cách một module được “nắn” từ các module khác

② **Tính Bất Biến** - Kiểm tra khi nào tính chất được bảo toàn (flatness, projectivity)

③ **Đồng Đẳng** - Nền tảng cho Homological Algebra (Ext, Tor functors)

Dãy khớp = Mở khóa mối liên hệ giữa các modules!