TKeT の計算、Ke は以下の教科書のまま採用している

$$\begin{bmatrix} [k_u] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_v] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k_w] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k_\theta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s\} \\ \{v_s\} \\ \{w\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_w\} \\ \{f_\theta\} \end{Bmatrix}. \tag{90}$$

ここに，$\{f_w\}^T=\{P_i \quad P_j\}$，$\{f_\theta\}^T=\{M_{zi} \quad M_{zj}\}$ で，それぞれ軸方向力，ねじりモーメントの等価節点力である。しかしながら，式(90)の節点変位ベクトルおよび等価節点力ベクトルの順序は，はり要素を一つの構造要素として全体座標系に組み込むときに必要となる座標変換を組織的に行なう場合に不便である。そのため節点変位ベクトルとして，いまつぎの順序で考える。

$$\{\delta_s{}^*\}^T=[u_{si} \quad v_{si} \quad w_i \quad -v_{si}' \quad u_{si}' \quad \theta_i \quad u_{sj} \quad v_{sj} \quad w_j \quad -v_{sj}' \quad u_{sj}' \quad \theta_j]. \tag{91}$$

この順序で式(90)の剛性方程式を書き換え，具体的な形で表現すると，つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix}
\frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 \\
0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{yy}}{l} & 0 & 0 \\
\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zz}}{l} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GK}{l} \\
-\frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 \\
0 & -\frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{yy}}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} & 0 & 0 \\
\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zz}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GK}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{si} \\ v_{si} \\ w_i \\ -v_{si}' \\ u_{si}' \\ \theta_i \\ u_{sj} \\ v_{sj} \\ w_j \\ -v_{sj}' \\ u_{sj}' \\ \theta_j \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} V_{zi} \\ V_{yi} \\ P_i \\ M_{zi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ V_{zj} \\ V_{yj} \\ P_j \\ M_{zj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} \tag{92}$$

さて，局所座標系における単位ベクトルを $\{\bar{e}\}^T=[\bar{i}_x \quad \bar{i}_y \quad \bar{i}_z]$，全体座標系における単位ベクトルを $\{e\}^T=[i_x \quad i_y \quad i_z]$ とすると，座標変換マトリックス $[T]$ は次式で与えられる。

$$\{\bar{e}\}=[T]\{e\}. \tag{93}$$

ここに，

$$[T]=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \tag{94}$$

であり，(l_{11}, l_{12}, l_{13}) は局所 x 座標の全体 x, y, z 座標への方向余弦である。(l_{21}, l_{22}, l_{23})，(l_{31}, l_{32}, l_{33}) も同様である。したがって，座標変換公式より，直線はりの一般的局所剛性マトリックス $[k]$ [式(92)中の剛性マトリックス] は変換され，つぎのような形の全体剛性方程式が得られる。

$$[k^*]\{u^*\}=\{f^*\}. \tag{95}$$

ここに，$[k^*]$ は全体座標系に対する剛性マトリックス，$\{u^*\}$ は全体座標系における節点変位ベクトルであり，つぎのとおりである。

$$[k^*]=\begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix}^T [k] \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix} \tag{96}$$

$$\{u^*\}^T=[u_i{}^* \quad v_i{}^* \quad w_i{}^* \quad \theta_{xi}{}^* \quad \theta_{yi}{}^* \quad \theta_{zi}{}^* \quad u_j{}^* \quad v_j{}^* \quad w_j{}^* \quad \theta_{xj}{}^* \quad \theta_{yj}{}^* \quad \theta_{zj}{}^*] \tag{97}$$

また，$\{f^*\}$ は全体座標系における等価節点力ベクトルであり，式(97)に示す $\{u^*\}$ の成分に対応するものである。せん断変形を考慮する場合は，式(90)中の $[k_u]$，$[k_v]$ を，式(51)および(54)で示した $[k_u{}^{b+s}]$，$[k_v{}^{b+s}]$ で置き換えればよい。

ここでは，ねじり変形として一様ねじりの場合のみ取り扱っているが，本項に示したような座標変換を必要とする立体骨組構造の解析においては，特別な場合を除いて構成部材のねじり変形としては，一様ねじり変形のみを考慮すれば十分である。

TKeT の計算、Ke は以下の教科書のまま採用している

T の部分 T(3x3) の中身は以下を参照

11.4 座標変換マトリックスの計算

(11.18)式の座標変換マトリックスの成分は，次のように計算される。ただし，ここでは，全体座標系を (x,y,z)，要素の座標系を $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ で表す。また，全体座標系における要素両端の節点座標を (x_i,y_i,z_i)，(x_j,y_j,z_j) で表す。

(1) $\bar{x}$ 軸方向の方向余弦

要素の材軸方向である $\bar{x}$ 軸方向の方向余弦は次式で表される。

$$l_{\bar{x}}=(x_j-x_i)/l, m_{\bar{x}}=(y_j-y_i)/l, n_{\bar{x}}=(z_j-z_i)/l \tag{11.21}$$

ただし，$l=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}$。

(2) $\bar{y},\bar{z}$ 軸方向の方向余弦

$\bar{y},\bar{z}$ 軸方向は，コードアングル（断面の回転角）を定義することによって与える。以下その方法について示す。

(a) 部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行でない場合

部材の $\bar{x}$ 軸に垂直な平面 P を考え，その平面 P 上で，xy 平面に平行な y' 軸を考え，つぎに，部材 $\bar{x}$ 軸および y' 軸と右手の関係をなす z' 軸を考える。ここに，y' 軸の正方向は，z' 軸の正方向が全体 z 座標値が増大する方向を向くように定める。そして，平面 P 上で，y' 軸から部材 $\bar{y}$ 軸へ測った角をコードアングル θ とする。ただし，この角度は，部材 $\bar{x}$ 軸まわりに右ねじ方向を正のコードアングルとする。

このようにすることで部材座標系は Hogan と完全に同じである

※剛性の段階では，(変位結果における各部材の応力変位もこの順)

$$\begin{Bmatrix} Q_{xi} \\ Q_{yi} \\ N_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ j\text{も同様} \end{Bmatrix} = K_e \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ j\text{も同様} \end{Bmatrix}$$

$$l=\frac{dx}{L},\ m=\frac{dy}{L},\ n=\frac{dz}{L}$$

このサイト通り考えると (i) 鉛直でないとき，

$$\begin{array}{cccc} & l & m & n \\ T = & \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}(m\cos\theta+nl\sin\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}(m\sin\theta-nl\cos\theta) \end{array} \right. & \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}(l\cos\theta-mn\sin\theta) \\ \frac{-1}{\sqrt{l^2+m^2}}(l\sin\theta+mn\cos\theta) \end{array} & \left. \begin{array}{c} \sqrt{l^2+m^2}\sin\theta \\ \sqrt{l^2+m^2}\cos\theta \end{array} \right] \end{array}$$

(ii) 鉛直のとき，$(l=m=0)$ $(n=1 \text{ or } -1)$

$$T=\begin{pmatrix} l(=0) & m(=0) & n \\ n\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -n\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

骨組構造解析ハンドブックのP219の(94)の具体値

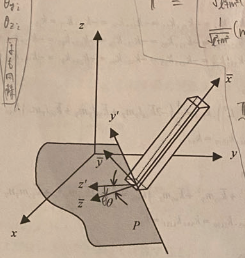


図 11.3 部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行でない場合のコードアングル θ

(b) 部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行な場合

全体 y 軸から部材 $\bar{z}$ 軸へ測った角をコードアングル θ とする。ただし，部材 $\bar{x}$ 軸まわりに右ねじの方向を正のコードアングルとする。

Hagoromo の Ke の順序を考慮して，実際の T は，上記の1行目と3行目を入れかえたものとなっている。

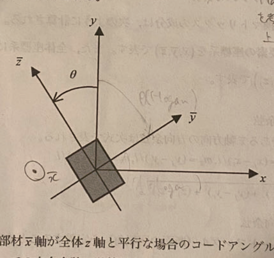


図 11.4 部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行な場合のコードアングル θ

以上の(a),(b)の場合についての方向余弦の計算法を示す。

まず，(a)の場合は，y' 軸は部材 $\bar{x}$ 軸に直交し，また xy 平面に平行であるから全体 z 軸に対しても直交する。したがって，部材 $\bar{x}$ 軸方向の単位ベクトルを $e_{\bar{x}}$，全体 z 軸方向の単位ベクトルを e_z とすると，y' 軸方向の単位ベクトル $e_{y'}$ は，$e_{\bar{x}}\times e_z$ に比例する。すなわち，

$$e_z=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, e_{\bar{x}}=\begin{Bmatrix} l_{\bar{x}} \\ m_{\bar{x}} \\ n_{\bar{x}} \end{Bmatrix}, e_{y'}=\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \tag{11.22}$$

とすると，

$$l_{y'}=\frac{\mp m_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2}}, m_{y'}=\frac{\pm l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2}}, n_{y'}=0 \quad (\text{複号同順}) \tag{11.23}$$

複合のいずれをとるかは z' 軸によって決まる。

z' 軸方向の単位ベクトル $e_{z'}$ は，$e_{\bar{x}}$ および $e_{y'}$ と右手系の関係をなすことから，

$$e_{z'}=\begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix}=e_{\bar{x}}\times e_{y'} \tag{11.24}$$

であるから，これを計算すると次式となる。

$$l_{z'}=m_{\bar{x}}n_{y'}-n_{\bar{x}}m_{y'}, m_{z'}=n_{\bar{x}}l_{y'}-l_{\bar{x}}n_{y'}, n_{z'}=l_{\bar{x}}m_{y'}-m_{\bar{x}}l_{y'} \tag{11.25}$$

ここで，z' 軸の正の方向は，全体 z 座標値が増大する方向を正にとるので，

$$\cos(e_{z'},e_z)=n_{z'}>0 \tag{11.26}$$

となる必要がある。$n_{z'}$ を(11.25),(11.23)式を用いて計算すると，

$$n_{z'}=\pm\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2} \tag{11.27}$$

となるので，$n_{z'}>0$ となるためには，複号の前の方を採用しなければならない。

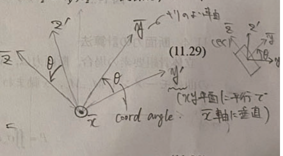
以上より，y',z' の方向余弦は次のようになる。

$$\begin{aligned} l_{y'}&=\frac{-m_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2}}, m_{y'}=\frac{l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2}}, n_{y'}=0 \\ l_{z'}&=\frac{-n_{\bar{x}}l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2}}, m_{z'}=\frac{-m_{\bar{x}}n_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2}}, n_{z'}=\sqrt{l_{\bar{x}}{}^2+m_{\bar{x}}{}^2} \end{aligned} \tag{11.28}$$

となる。

部材 $\bar{y}$ 軸方向の単位ベクトル $e_{\bar{y}}$，部材 $\bar{z}$ 軸方向の単位ベクトル $e_{\bar{z}}$ と $e_{y'},e_{z'}$ との関係は，コードアングル θ を用いて，

$$\begin{aligned} e_{\bar{y}}&=e_{y'}\cos\theta+e_{z'}\sin\theta \\ e_{\bar{z}}&=-e_{y'}\sin\theta+e_{z'}\cos\theta \end{aligned} \tag{11.29}$$



したがって，

$$\begin{aligned} e_{\bar{y}}&=\begin{Bmatrix} l_{\bar{y}} \\ m_{\bar{y}} \\ n_{\bar{y}} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix}\cos\theta+\begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix}\sin\theta \\ e_{\bar{z}}&=\begin{Bmatrix} l_{\bar{z}} \\ m_{\bar{z}} \\ n_{\bar{z}} \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix}\sin\theta+\begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix}\cos\theta \end{aligned} \tag{11.30}$$

一方，(b)の場合は，z' 軸を全体 y 軸と一致させることになるから，部材 y' 軸は，

$$e_{y'}=\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y} \end{Bmatrix}=e_{z'}\times e_{\bar{x}}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix} l_{\bar{x}} \\ m_{\bar{x}} \\ n_{\bar{x}} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11.31}$$

上式を(11.30)式に代入すると，

$$e_{\bar{y}}=\begin{pmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\theta+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin\theta$$

$$e_{\bar{z}}=-\begin{pmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\sin\theta+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\theta$$

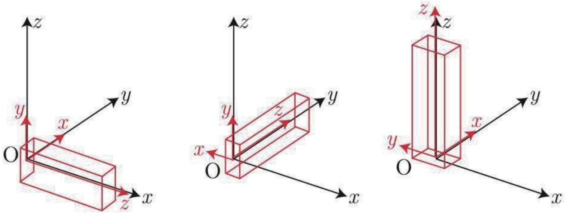


図 7: 全体座標系の軸に平行な部材の部材座標系

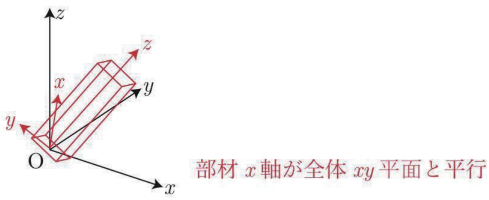


図 8: 全体座標系の軸に平行でない部材の部材座標系

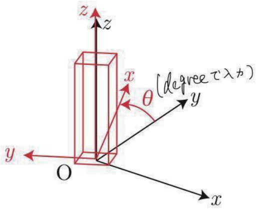
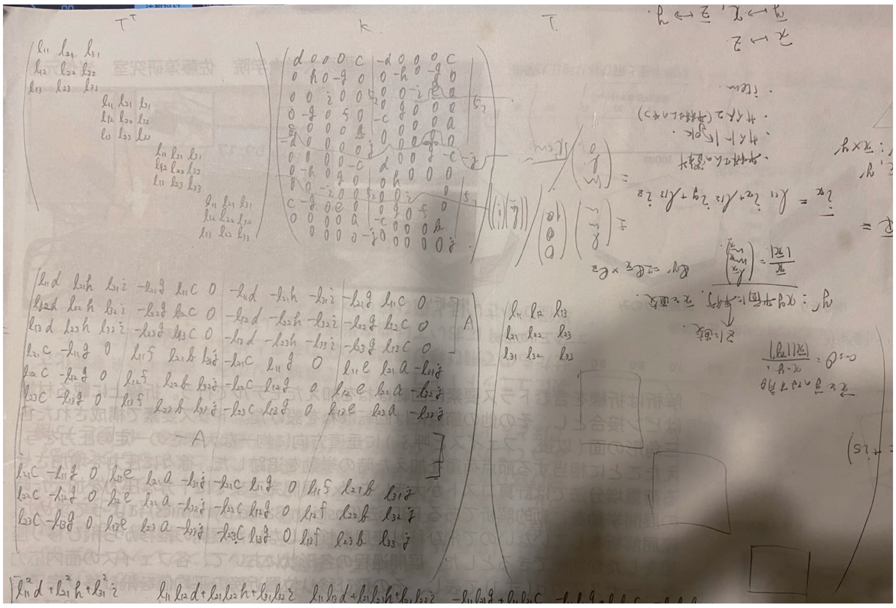
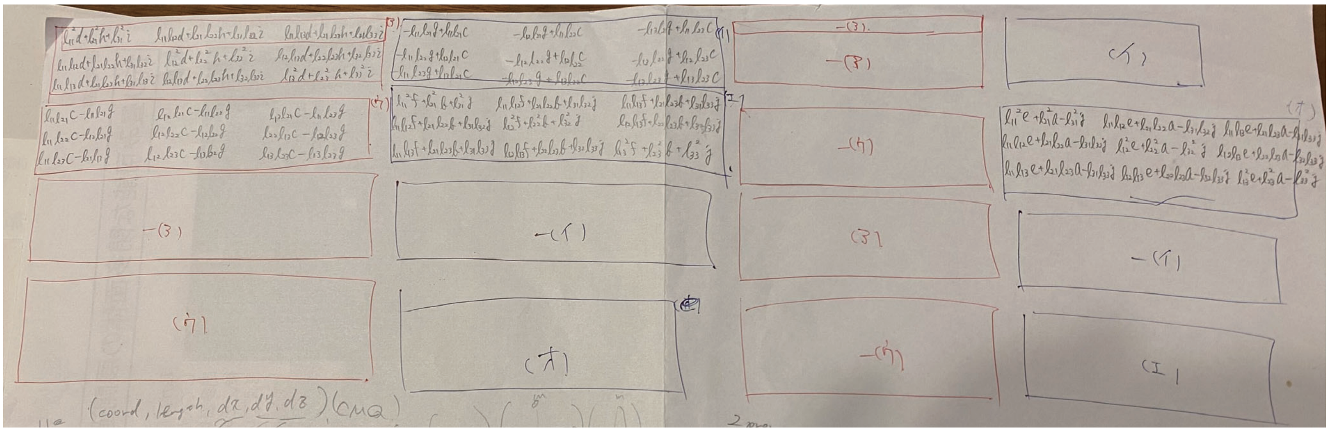


図 9: 柱のコードアングル

部材の両端が剛であるときは、TKeT の計算結果で同じブロックがたくさん出てくるので、その計算結果を手打ちでコードを組んでいる





部材端が剛剛以外の時は以下の操作をする必要がある。ピンが複数あっても以下の操作の順序によらず同じ剛性マトリクスが得られることに注意。

22:31 7月17日(木) 15%
注釈付け PDFを編集 記入と署名 挿入 NEW
arclm0...う copy 4.経済…の基礎-1 メモ 20...50_59 平面骨組...資料3) 平面骨...スト2)_

4.3.9 modifyhinge

部材端がピンのとき、剛性マトリクスを修正します。
いま、簡単のため2次元で考えると、部材座標系において、以下のつり合い式が成り立ちます。

$$\begin{Bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} & k_{05} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{40} & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{50} & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

○modify前のk_eで同じ数値(は許す のとき、modify後も0になるところ レスタトは同じ数値に保たれる。
○ modify前に0であれば modify後もその数値の要素は0

12×12

18

3×3 3×3 3×3 3×3

ElementArray[2]

始端にy方向(紙面垂直)まわりのピンがあるとします。始端はモーメントを負担できないので$p_2 = 0$になります。その場合、2行目において、

$$k_{20}u_0 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 = 0$$

全体座標にして、これをあとで戻す?

が成り立ちます。よって、u_2は、

$$u_2 = -\frac{k_{20}u_0 + k_{21}u_1 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5}{k_{22}}$$

でもu_2は求めないのでどうやって戻すか? ピンによる条件 $u = TU \Leftrightarrow T^T u$ 戻す

となります。
これを、たとえば0行目に代入すると、

→ 部材での $p_2 = 0$ k_eの修正

$$\begin{aligned} p_0 &= k_{00}u_0 + k_{01}u_1 + k_{02}u_2 + k_{03}u_3 + k_{04}u_4 + k_{05}u_5 \\ &= k_{00}u_0 + k_{01}u_1 \\ &\quad + k_{02}\left(-\frac{k_{20}u_0 + k_{21}u_1 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5}{k_{22}}\right) \\ &\quad + k_{03}u_3 + k_{04}u_4 + k_{05}u_5 \\ &= \left(k_{00} - k_{02}\frac{k_{20}}{k_{22}}\right)u_0 + \left(k_{01} - k_{02}\frac{k_{21}}{k_{22}}\right)u_1 \\ &\quad + \left(k_{03} - k_{02}\frac{k_{23}}{k_{22}}\right)u_3 + \left(k_{04} - k_{02}\frac{k_{24}}{k_{22}}\right)u_4 + \left(k_{05} - k_{02}\frac{k_{25}}{k_{22}}\right)u_5 \end{aligned}$$

6と12. 12.12は、
$k_{12\,12} - k_{12\,6}\frac{k_{6\,12}}{k_{66}}$
$= 23 - (-23)\cdot\frac{(-23)}{23}$

もし $k_{ij} = k_{ji}$ なら、
$k_{ji} - k_{jm}\frac{k_{mi}}{k_{mm}}$
$= k_{ij} - k_{mj}\frac{k_{im}}{k_{mm}}$

一般に、剛性マトリクスのi行j列目の要素について、m要素目がピンのとき、

$k_{12\,12} - k_{12\,6}\frac{k_{6\,12}}{k_{66}}$

4.5.6.10.11.12

$$k_{ij} - k_{im}\frac{k_{mj}}{k_{mm}}$$

(座標変換の前にこうする)
ピンが複数のときは1つずつピンとしてk_eを

$k_{11\,11} - k_{11\,6}\frac{k_{6\,11}}{k_{66}}$ −23

の計算を行う必要があります。