$$k_{71} = -k_{11}, k_{72} = -k_{21}, k_{73} = -k_{31}, k_{74} = -k_{41}, k_{75} = -k_{51}, k_{76} = -k_{61}, k_{77} = k_{11}$$
$$k_{81} = -k_{21}, k_{82} = -k_{22}, k_{83} = -k_{32}, k_{84} = -k_{42}, k_{85} = -k_{52}, k_{86} = -k_{62}, k_{87} = -k_{72}, k_{88} = k_{22}$$
$$k_{91} = -k_{31}, k_{92} = -k_{32}, k_{93} = -k_{33}, k_{94} = -k_{43}, k_{95} = -k_{53}, k_{96} = -k_{63}, k_{97} = -k_{73}, k_{98} = -k_{83}, k_{99} = k_{33}$$

$$k_{101} = k_{41}, k_{102} = k_{42}, k_{103} = k_{43}$$
$$k_{104} = \frac{1}{2}\left(-2\bar{k}_{44}l_{\bar{x}}{}^2 + \bar{k}_{55}l_{\bar{y}}{}^2 + \bar{k}_{66}l_{\bar{z}}{}^2\right), k_{105} = \frac{1}{2}\left(-2\bar{k}_{44}l_{\bar{x}}m_{\bar{x}} + \bar{k}_{55}l_{\bar{y}}m_{\bar{y}} + \bar{k}_{66}l_{\bar{z}}m_{\bar{z}}\right) k_{106} = \frac{1}{2}\left(-2\bar{k}_{44}l_{\bar{x}}n_{\bar{x}} + \bar{k}_{55}l_{\bar{y}}n_{\bar{y}} + \bar{k}_{66}l_{\bar{z}}n_{\bar{z}}\right)$$
$$k_{107} = k_{74}, k_{108} = k_{84}, k_{109} = k_{94}, k_{1010} = k_{44}$$

$$k_{111} = k_{51}, k_{112} = k_{52}, k_{113} = k_{53}$$
$$k_{114} = k_{105}, k_{115} = \frac{1}{2}\left(-2\bar{k}_{44}m_{\bar{x}}{}^2 + \bar{k}_{55}m_{\bar{y}}{}^2 + \bar{k}_{66}m_{\bar{z}}{}^2\right) k_{116} = \frac{1}{2}\left(-2\bar{k}_{44}m_{\bar{x}}n_{\bar{x}} + \bar{k}_{55}m_{\bar{y}}n_{\bar{y}} + \bar{k}_{66}m_{\bar{z}}n_{\bar{z}}\right)$$
$$k_{117} = k_{75}, k_{118} = k_{85}, k_{119} = k_{95}, k_{1110} = k_{54}, k_{1111} = k_{55}$$

$$k_{121} = k_{61}, k_{122} = k_{62}, k_{123} = k_{63}$$
$$k_{124} = k_{106}, k_{125} = k_{116} k_{126} = \frac{1}{2}\left(-2\bar{k}_{44}n_{\bar{x}}{}^2 + \bar{k}_{55}n_{\bar{y}}{}^2 + \bar{k}_{66}n_{\bar{z}}{}^2\right)$$
$$k_{127} = k_{76}, k_{128} = k_{86}, k_{129} = k_{96}, k_{1210} = k_{64}, k_{1211} = k_{65}, k_{1212} = k_{66}$$

(11.20)

11.4　座標変換マトリックスの計算

(11.18)式の座標変換マトリックスの成分は，次のように計算される。ただし，ここでは，全体座標系を(x, y, z)，要素の座標系を$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$で表す。また，全体座標系における要素両端の節点座標を$(x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j)$で表す。

(1) $\bar{x}$軸方向の方向余弦

要素の材軸方向である$\bar{x}$軸方向の方向余弦は次式で表される。

$$l_{\bar{x}} = (x_j - x_i)/l, m_{\bar{x}} = (y_j - y_i)/l, n_{\bar{x}} = (z_j - z_i)/l \tag{11.21}$$

ただし，$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ 。

(2) $\bar{y}, \bar{z}$軸方向の方向余弦

$\bar{y}, \bar{z}$軸方向は，コードアングル（断面の回転角）を定義することによって与える。以下その方法について示す。

(a) 部材$\bar{x}$軸が全体z軸と平行でない場合

部材の$\bar{x}$軸に垂直な平面Pを考え，その平面P上で，xy平面に平行なy'軸を考え，つぎに，部材$\bar{x}$軸およびy'軸と右手の関係をなすz'軸を考える。ここに，y'軸の正方向は，z'軸の正方向が全体z座標値が増大する方向を向くように定める。そして，平面P上で，y'軸から部材$\bar{y}$軸へ測った角をコードアングルθとする。ただし，この角度は，部材$\bar{x}$軸まわりに右ねじ方向を正のコードアングルとする。

$$l = \frac{dx}{L},\ m = \frac{dy}{L},\ n = \frac{dz}{L}$$

i) 鉛直でないとき、

$$T = \left[\begin{array}{ccc} l & m & n \\ -\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}(m\cos\theta + nl\sin\theta) & \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}(l\cos\theta - mn\sin\theta) & \sqrt{l^2+m^2}\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}(m\sin\theta - nl\cos\theta) & \frac{-1}{\sqrt{l^2+m^2}}(l\sin\theta + mn\cos\theta) & \sqrt{l^2+m^2}\cos\theta \end{array}\right]$$

(ii) 鉛直のとき、 $(l = m = 0)$ $(n = 1 \text{ or } -1)$

$$\underset{\sim}{T} = \left(\begin{array}{ccc} l & m & n \\ n\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -n\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{array}\right)$$

[illegible]ハンドブックのP219の(94)の具体値

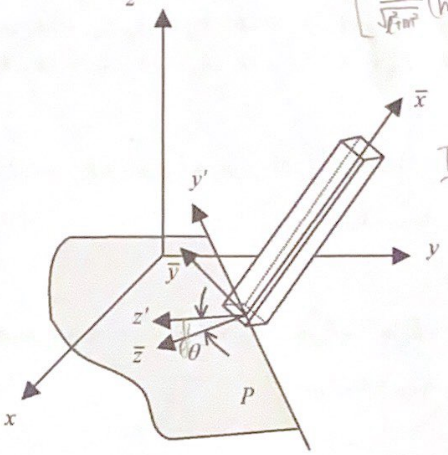


図 11.3　部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行でない場合のコードアングル θ

(b) 部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行な場合

全体 y 軸から部材 $\bar{z}$ 軸へ測った角をコードアングル θ とする。ただし，部材 $\bar{x}$ 軸まわりに右ねじの方向を正のコードアングルとする。

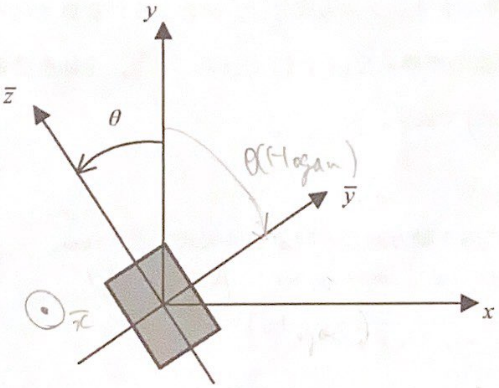


図 11.4　部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行な場合のコードアングル θ

以上の(a),(b)の場合についての方向余弦の計算法を示す。

まず，(a)の場合は， y' 軸は部材 $\bar{x}$ 軸に直交し，また xy 平面に平行であるから全体 z 軸に対しても直交する。したがって，部材 $\bar{x}$ 軸方向の単位ベクトルを $\mathrm{e}_{\bar{x}}$，全体 z 軸方向の単位ベクトルを e_z とすると， y' 軸方向の単位ベクトル $\mathrm{e}_{y'}$ は， $\mathrm{e}_{\bar{x}} \times \mathrm{e}_z$ に比例する。すなわち，

$$\mathrm{e}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \mathrm{e}_{\bar{x}} = \begin{Bmatrix} l_{\bar{x}} \\ m_{\bar{x}} \\ n_{\bar{x}} \end{Bmatrix}, \mathrm{e}_{y'} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \qquad (11.22)$$

とすると，

$$l_{y'} = \frac{\mp m_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}}}, m_{y'} = \frac{\pm l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}}}, n_{y'} = 0 \quad \text{(複号同順)} \tag{11.23}$$

複合のいずれをとるかはz'軸によって決まる。

z'軸方向の単位ベクトル$\mathrm{e}_{z'}$は，$\mathrm{e}_{\bar{x}}$および$\mathrm{e}_{y'}$と右手系の関係をなすことから，

$$\mathrm{e}_{z'} = \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} = \mathrm{e}_{\bar{x}} \times \mathrm{e}_{y'} \tag{11.24}$$

であるから，これを計算すると次式となる。

$$l_{z'} = m_{\bar{x}} n_{y'} - n_{\bar{x}} m_{y'}, m_{z'} = n_{\bar{x}} l_{y'} - l_{\bar{x}} n_{y'}, n_{z'} = l_{\bar{x}} m_{y'} - m_{\bar{x}} l_{y'} \tag{11.25}$$

ここで，z'軸の正の方向は，全体z座標値が増大する方向を正にとるので，

$$\cos(\mathrm{e}_{z'}, \mathrm{e}_{z}) = n_{z'} > 0 \tag{11.26}$$

となる必要がある。$n_{z'}$を(11.25),(11.23)式を用いて計算すると，

$$n_{z'} = \pm\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}} \tag{11.27}$$

となるので，$n_{z'} > 0$となるためには，複号の前の方を採用しなければならない。

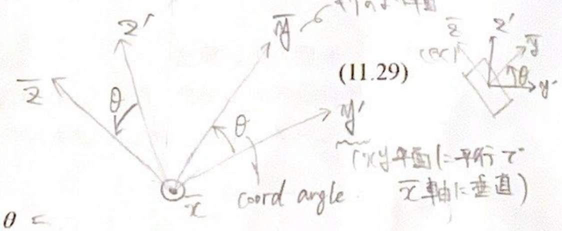
以上より，y', z'の方向余弦は次のようになる。

$$\begin{aligned} l_{y'} &= \frac{-m_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}}}, m_{y'} = \frac{l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}}}, n_{y'} = 0 \\ l_{z'} &= \frac{-n_{\bar{x}} l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}}}, m_{z'} = \frac{-m_{\bar{x}} n_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}}}, n_{z'} = \sqrt{l_{\bar{x}}^{2} + m_{\bar{x}}^{2}} \end{aligned} \tag{11.28}$$

となる。

部材$\bar{y}$軸方向の単位ベクトル$\mathrm{e}_{\bar{y}}$，部材$\bar{z}$軸方向の単位ベクトル$\mathrm{e}_{\bar{z}}$と$\mathrm{e}_{y'}, \mathrm{e}_{z'}$との関係は，コードアングル$\theta$を用いて，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{\bar{y}} &= \mathrm{e}_{y'} \cos\theta + \mathrm{e}_{z'} \sin\theta \\ \mathrm{e}_{\bar{z}} &= -\mathrm{e}_{y'} \sin\theta + \mathrm{e}_{z'} \cos\theta \end{aligned} \tag{11.29}$$



したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{\bar{y}} &= \begin{Bmatrix} l_{\bar{y}} \\ m_{\bar{y}} \\ n_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \cos\theta + \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} \sin\theta \\ \mathrm{e}_{\bar{z}} &= \begin{Bmatrix} l_{\bar{z}} \\ m_{\bar{z}} \\ n_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \sin\theta + \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} \cos\theta \end{aligned} \tag{11.30}$$

一方，(b)の場合は，z'軸を全体y軸と一致させることになるから，部材y'軸は，

$$\mathrm{e}_{y'} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y} \end{Bmatrix} = \mathrm{e}_{z'} \times \mathrm{e}_{\bar{x}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l_{\bar{x}} \\ m_{\bar{x}} \\ n_{\bar{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11.31}$$

上式を(11.30)式に代入すると，

$$\mathrm{e}_{\bar{y}} = \begin{pmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\theta$$

$$\mathrm{e}_{\bar{z}} = -\begin{pmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\theta$$