Projet intermédiaire - Sujet 6 - Contrat à issues multiples

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : ***. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h. Sujet recto-verso.*

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à simuler la somme que doit provisionner un assureur dans le cadre d'un contrat ayant deux issues possibles :
— décès du souscripteur ;
— sortie volontaire du souscripteur,
et indexé sur la valorisation du NASDAQ (un indice d'actions technologiques), que l'on notera $(X_t)_{t\geq 0}$.

On commencera par calibrer l'évolution de l'actif risqué, puis l'on estimera le provisionnement à effectuer à l'aide d'un schéma d'Euler.

2 Calibration

Pour les données historiques, on pourra utiliser la librarie python *yfinance*, et en particulier le ticker "NDX" qui représente le NASDAQ. On se référera également aux données sur les options disponibles au lien suivant : `https://www.nasdaq.com/market-activity/index/ndx/option-chain`.

On suppose que l'actif risqué (NASDAQ) suit un mouvement Brownien géométrique

$$\begin{cases} dX_t = \mu S_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

avec μ, x et σ des constantes. On appelle r le taux sans risque. Dans cette partie, on cherche à estimer ces paramètres.

1. Donner une estimation de x, en précisant la date du relevé.
2. Rappeler, en la justifiant par une démonstration succinte, la formule pour le prix du call en date $t > 0$ de strike $K > 0$ de maturité $T > t$ dans le modèle de Black-Scholes.
3. Utiliser le taux EURIBOR 1 an (à trouver en ligne) pour donner une estimation du taux sans risque r. Préciser la source utilisée.
4. En utilisant les données des options call du lien ci-dessus, de maturité fixée au 18 Décembre 2026 (le prix est donné par la colonne "Last", attention ce n'est pas la colonne "Last Trade") et vos réponses précédentes, calibrer, à l'aide d'un modèle linéaire, le paramètre σ. A l'aide des données historiques sur l'actif, et en passant au logarithme, donner une estimation du rendement historique μ : on pourra utiliser le package *yfinance* de Python.

3 Simulation

On s'intéresse à un contrat démarrant au premier Octobre 2025 avec la structure suivante : un montant 100 est investi sur X_t en $t = 0$. Un taux $\nu = 4\%$ (annuel) est garanti par l'assureur, après 5 ans ou à la date de décès de l'assuré. Le contrat est aussi indexé sur l'actif $(X_t)_{t\geq 0}$ et l'assuré dispose de la possibilité, à chaque date d'anniversaire, de sortir du contrat. A la date $t \in \{0, \dots, 4\}$, pour un assuré non-décédé, la valeur du contrat est donc donnée par

$$f(t) = \mathbb{E}\Big[\max\Big((100/X_0)X_t, e^{-r}(100/X_0)X_{t+1}, \dots, e^{-r(5-t)}(100/X_0)X_5, e^{-r(5-t)}e^{5\nu}100\Big)\Big].$$

En $t = 5$, si le contrat est toujours actif, le payoff est ainsi simplement $100e^{5\nu}$.

5. Expliquer en quelques lignes la formule précédente pour $f(t)$. A l'aide des paramètres obtenus précédemment, écrire une fonction simulant la valeur de X_t pour $t \in \{1, \ldots, 10\}$.
6. A partir des données historiques, on estime la probabilité de survenue du décès à 1% chaque année. En déduire une estimation de la valeur du contrat en $t = 0$ par un schéma d'Euler basé sur 40000 simulations.
7. Sachant que l'assureur a vendu 2000 contrats de ce type au premier octobre 2025, calculer la provision nécessaire pour honorer ces contrats dans 95% des scénarios.
8. A l'aide des estimations obtenues avec le schéma de la question 6, estimer la VAR à 99% de l'ensemble des contrats vendus.
9. Donner une estimation des deux grecques suivantes pour ce contrat :

$$\triangle = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \nu = \frac{\partial f}{\partial \sigma}.$$

   Comparer la provision associée à une stratégie de couverture par le δ (δ-hedging) à la réponse obtenue question 7.