Optimización multiobjetivo en portafolios de inversión: multiobjetivos en la teoría de Markowitz

Andrés Santos Melogno
Facultad de Ingeniería - UDELAR
Montevideo, Uruguay

***Resumen*—El modelo de Markowitz es una herramienta de gestión de carteras de inversión que busca encontrar la cartera óptima para cada inversionista en términos de rentabilidad y riesgo. En este documento pondremos en práctica la teoría de portafolios de inversión desarrollada por Markowitz sin embargo, con una modificación: modelizar el problema desde una óptima multiobjetivo. En este trabajo utilizamos técnicas que permiten el desarrollo simultáneo de ambos objetivos, ilustrado a través de un ejemplo práctico que involucra diez empresas cotizantes en bolsa.**

I. Introducción

Una cartera de inversión consiste en agrupar varios activos financieros con el propósito de aumentar su valor. La selección adecuada de estos activos y la distribución de la inversión entre ellos influirán en el rendimiento y el riesgo esperado. Una cartera eficiente para el inversionista puede ser aquella que ofrece el menor riesgo para un nivel específico de rendimiento, o aquella que proporcione el rendimiento máximo para un nivel de riesgo dado.

La teoría de portafolios comúnmente utilizada en el ámbito financiero la establece Markowitz, en su paper "Portfolio Selection" del año 1952 [1]. Su enfoque busca optimizar portafolios en dos objetivos contrapuestos: minimizar el riesgo o maximizar el retorno del portafolio. El problema, conocido como Media-Varianza, calcula la mejor cartera de inversión posible, para un nivel de renidimiento dado "libre de riesgo" [1]. Por lo tanto, el problema se trasalada a un problema de optimización mono objetivo. [2]

Este trabajo tiene como objetivo conformar un portafolio de renta variable[2] sieguiendo los lineamientos básicos de la elección de las carteras de inversión, pero con ciertos cambios. Utilizamos herramientas de optmización multicriterio (específicamente métodos exáctos), modelizamos los objetivos de minimizar la varianza y maximizar el rendimiento esperado de los portafolios, de manera simultánea, con la finalidad hallar múltiples soluciones óptimas y plasmar el frente de Pareto.

[1]Activos con ningún riesgo de pérdida de capital, poseen alta calificación crediticia, como los bonos del Tesoro de los Estados Unidos.

[2]Instrumentos financieros que representan la participación en empresas, el retorno puede variar según el desempeño de la empresa.

II. Marco teórico

Sea P_t el precio de un activo ofrecido en el momento t y P_{t+1} el precio del activo ofrecido en el momento $t+1$. El rendimiento de un activo, se define como el cambio porcentual en el precio del mismo durante un período de tiempo específico (tomando en cuenta los lineamientos de M. Pierluigi y P. Simone **[3]**). Se calcula como la diferencia entre el precio al final del período P_{t+1} y el precio al principio del período de tiempo P_t. Por ende, el rendimiento de un activo i se define como:

$$R_i = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

Sea R_p el rendimiento del portafolio p. Como deseamos encontrar el retorno esperado y la variabilidad del portafolio, aplicamos esperanza al rendimiento:

$$R_p = \sum_{i}^{n} x_i R_i$$

$$E(R_p) = \sum_{i}^{n} x_i E(R_i)$$

Como $\mu_i = E(R_i)$ la esperanza del rendimiento del activo i, reescribimos el rendimiento esperado del portafolios como:

$$\mu_p = \sum_{i}^{n} x_i \mu_i$$

Ahora, definimos la varianza del portafolio:

$$\sigma_p^2 = E[R_p - E[R_p]^2]$$

La volatilidad de una cartera está dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum \sum x_i x_j . \sigma_{i,j}$$

El modelo se caracteriza por poseer dos fundamentos contrapuestas: minimizar la volatilidad miestras se maximiza la rentabilidad de la inversión. Vectorizamos el problema de minización y maximización:

$$min\ \sigma_p^2 = X^T . \sum .X$$

$$max\ \mu_p = \mu^T .X$$

Sujeto a:

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$$
$$\sum x_i = 1$$

Los parámetros α_i y β_i son los límites inferior y superior del peso del activo i. Si deseamos diversificar la cartera de inversión, marcamos un limite superior de 20% de inversión por activo y un limite inferior de cero. Al marcar un limite superior de 20% aseguramos que la inversión no se concentre en una sola empresa.

Por simplicidad establecemos los objetivos como:

$$f_1(X) = \sigma_p^2$$
$$f_2(X) = \mu_p$$

III. Desarrollo y resolución multiobjetivos

Utilizamos la base de datos de $Yahoo\ Finance$ empleando la librería $yfinance$, accedimos a información sobre diez títulos financieros de renta variable, desde enero 2023 a febrero 2024. Las empresas seleccionadas que componen la cartera de inversión son: Apple, Google, Tesla, Amazon, Microsoft, American Airlines Group, Equifax, FedEx, JP Morgan Chase y Coca-Cola.

Todas las empresas mencionadas cotizan en los mercados financieros internacionales. Esto significa que sus acciones están disponibles para ser compradas y vendidas públicamente en bolsas de valores como: Nasdaq, la Bolsa de Nueva York (NYSE), el London Stock Exchange (LSE), entre otros. Cada una de estas empresas tiene su propia cotización en el mercado bursátil. Dado el carácter variado de los precios y su heterogeneidad, se utilizó logaritmo para transformar los precios.

En primer lugar, identificamos los extremos mediante optimización mono objetivo y posteriormente a través de la optimización Lexicográfica (se obtuvieron extremos del frente de Pareto). Se aborda la minimización de la varianza, que es la función objetivo principal (f_1), luego dentro de las soluciones con la varianza mínima, se maximiza el rendimiento esperado (f_2). Esto proporciona una forma de tomar decisiones considerando las preferencias del inversionista en cuanto a riesgo y rendimiento, además permiten establecer cuál es el vector ideal y vector nadir del problema.

En segundo lugar utilizamos la librería $Pyomo$ y se recurrió al solver *Ipopt* (la varianza del portafolio indica un modelo cuadrático). Luego, empleamos las técnicas de épsilon restricciones y épsilon restricciones aumentado, con la finalizdad de representar el frente de Pareto aproximado. En problemas de este tipo, no siempre es factible hallar una solución óptima que satisfaga todas las funciones objetivo simultáneamente. No obstante, es viable identificar un conjunto de soluciones no dominadas y que el agente ahonde es sus opciones.

Por último se seleccionaron las siguientes métricas de evaluación: número de puntos no dominados, la eficiencia computacional (registrando la duración en segundos), los indicadores de Spacing y Spread.

A. Método de las epsilón restricciones:

Este consiste en optimizar un objetivo mientras el otro se transforma en un conjunto de restricciones. Se seleccionó la minimización de la varianza como prioritaria, el rendimiento esperado pasa a formar parte de las restricciones:

$$min\ f_1(X)$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} f_2(X) \geq \epsilon_2 \\ \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \\ \sum x_i = 1 \end{cases}$$

En valor de ϵ varía en cada iteración y es utilizado para equilibrar la optimización entre la varianza y el retorno esperado.

B. Método de las epsilón restricciones aumentado:

Modelamos el problema de optimización aplicando épsilon restricciones aumentado (para evitar soluciones repetidas), nuevamente se seleccionó la minimización de la varianza como prioritaria:

$$min\ \left(f_1(X) + \delta.\frac{s_2}{r_2}\right)$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} f_2(X) - s_2 = \epsilon_2 \\ s \geq 0 \\ \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \\ \sum x_i = 1 \end{cases}$$

Donde:

- s_2 es la variable de holgura de la restricción
- δ es igual a 0.00001
- r_2 equivale a $(f_2max - f_2min)$
- $\epsilon_2 \in (f_2max - f_2min)$

Además, se establece un paso:

$$step = \frac{f_2max - f_2min}{n} \leq s_2$$

IV. Evaluación y discusión:

En esta sección visualizamos los resultados de aplicar los dos métodos descriptos anteriormente. En una primera instancia mostramos los extremos al aplicar optimización Lexicográfica. Posteriormente, proyectamos el frente de Pareto, generado por cada método en 20 iteraciones ($n = 20$). Y, en última instancia, visualizamos el porcentaje que deberíamos invertir en cada activo, según los resultados del frente de Pareto.

A. Optimización Lexicográfica y vector ideal

Los extremos del frente de Pareto se encontraron aplicando optimización Lexicográfica. Se estimaron para un total de 20 soluciones no dominadas, los cuales son:

$$Extremo\ I$$

$$[f_1 = 0.01747\ ;\ f_2 = 0.00108]$$

$$Extremo\ II$$

$$[f_1 = 0.05541\ ;\ f_2 = 0.00185]$$

El vector ideal y nadir son los siguientes:

$$Vector\ ideal : [0.01747\ ;\ 0.00185]$$

$$Vector\ nadir : [0.0554\ ;\ 0.001086]$$

B. Frente de Pareto

Los enfoques de resolución aplicados a nuestra cartera de inversión nos permitieron encontrar puntos no dominados. Cada punto del frente de Pareto muestra las carteras que ofrecen el mejor equilibrio posible entre riesgo y rendimiento, una herramienta importante para el agente tomador de desiciones.

Se simualaron 20 problemas en cada método, en la Figura 1 se presentan los resultados obtenidos al aplicar épsilon restricciones y, en la Figura 2, se muestra el frente de Pareto mediante épsilon restricciones aumentado. Notamos cierta concavidad en ambos resultados y a primera vista, no se ven resultados diferentes entre métodos. En ambas figuras se visualiza un frente creciente hacia el segundo extremo, es decir, hacia el mayor retorno esperado de la cartera.

Al cotejar los resultados de ambos métodos, vemos que épsilon restricciones minimiza f_1 y maximiza f_2 en $[f_1 = 0.01747\ ;\ f_2 = 0.00108]$ respectivamente. La varianza mínima se encuentra en 0.0554, varía en 217% hasta alcanzar el otro extremo. En el caso de f_2, alcanza el otro extremo de 0.00185 con una variación de 70%. Esto indica una considerable variabilidad de los precios de nuestros activos. Por otro lado, épsilon restricciones aumentado tiene la mismas características de variablidad de f_1 y f_2, los resultados son practicamente idénticos (no hay soluciones repetidas, épsilon restricciones aumentado no ofrece mejoras respecto al otro método).

Al ajustar el valor de ϵ, tanto en las $\epsilon-$ restricciones como en el método de $\epsilon-$ restricciones aumentado, se pueden notar varios efectos:

- Un valor más bajo de ϵ favorece inversiones con menor riesgo, pero a costa de un retorno esperado también más bajo. Por el contrario, un valor más alto de ϵ favorece inversiones con mayores retornos esperados, pero con un riesgo mayor. Por lo tanto, al aumentar ϵ, se podría obtener un incremento más significativo en el retorno esperado a cambio de un aumento moderado en el riesgo.
- Un ϵ bajo otroga más peso a la minimización del riesgo, lo que resultaría en inversiones más conservadoras y menos sensibles a las fluctuaciones del mercado. Por otro lado, un ϵ alto daría más importancia a la maximización del retorno, lo que llevaría a portafolios más arriesgados y sensibles a las condiciones del mercado.
- El agente debe seleccionar entre el conjunto óptimo de Pareto, existe un trade-off entre riesgo y retorno. A medida que avanzamos hacia el segundo extremo, el equilibrio entre estas compensaciones se vuelve menos pronunciado, se refleja en que el agente tiene menos combinaciones de activos en las últimas iteraciones.

Por último, la eleccón del método va a depender de analizar el siguiente punto: las métricas de desempeño.

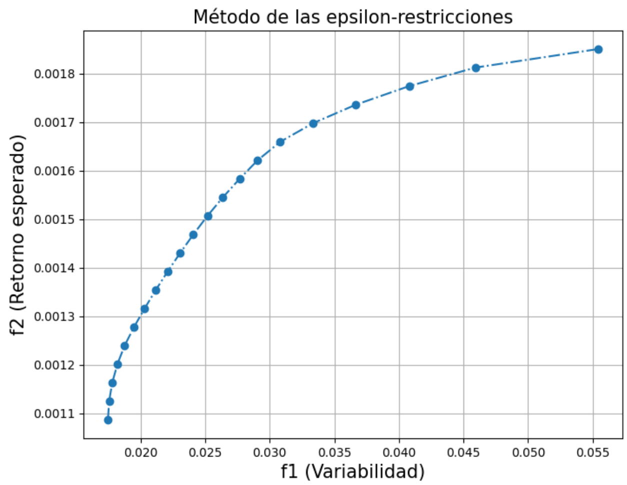

Fig. 1. Frente de Pareto por medio de $\epsilon-$ restricciones ($n = 20$)

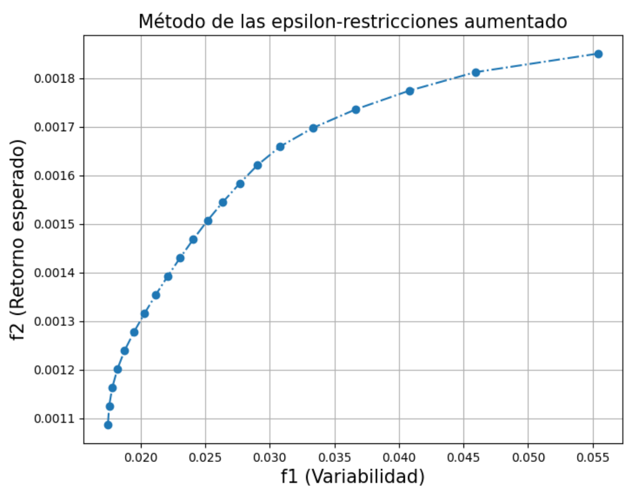

Fig. 2. Frente de Pareto por medio de $\epsilon-$ restricciones aumentado ($n = 20$)

C. *Métricas, comparación y eficiencia*

Evaluamos el desempeño de las soluciones por medio de las siguientes métricas: número de puntos no dominados, la eficiencia computacional (registrando la duración en segundos), los indicadores de Spacing y Spread. Se evalúa la cantidad efectiva de puntos no dominados que encuentra el algoritmo y medimos su eficiencia, observando el tiempo que tarda en converger (utilizando la librería $time$ en $python$). En cambio, debido a la falta del auténtico frente de Pareto, aplicamos los indicadores de Spacing y Spread. Estas métricas ayudan a evaluar la dispersión y distribución de las soluciones obtenidas en el conjunto de Pareto.

La Tabla I y II muestra las métricas de evaluación del algoritmo épsilon restricciones y épsilon restricciones aumentado en función del tamaño del conjunto de soluciones n. Se presentan cuatro casos diferentes: $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ y $n = 100$. Cómo ya se mencionó, en ambos métodos se llegan a conclusiones similares: a medida que aumenta n, aumenta el número de puntos no dominados en el conjunto de Pareto (los algoritmos se desempeñan eficientemente). Sin embargo, el tiempo de ejecución también aumenta, lo cual es esperado, debido al mayor número de soluciones que el algoritmo debe evaluar. El método épsilon restricciones tiene un tiempo de ejecución mayor en $n = 10$, respecto a épsilon restricciones aumentado. Pero, a partir de $n = 20$, épsilon restricciones es superior.

Analizando las métricas de Spacing y Spread en Tabla I y II, ambos métodos producen resultados prácticamente idénticos. A medida que aumenta el tamaño del conjunto de soluciones el valor del Spacing tiende a aumentar gradualmente. Por ejemplo, para $n = 10$ el valor es 0.0535, mientras que para $n = 100$ aumenta a 0.4048. En las primeras iteraciones se destaca un buen cubrimiento y buena equidistribución pero, a valores altos de n, baja la equidistribución (distribución uniforme menor).

En contraste, se observa un Spread de 0.2175 cuando $n = 10$, el cual decrece a 0.0260 al considerar $n = 100$; valores más cercanos a cero indican que las soluciones encontradas por el algoritmo están muy cerca unas de las otras, en el espacio de objetivos.

TABLA I
MÉTRICAS DE EVALUACIÓN ÉPSILON RESTRICCIONES

n / Métrica	Puntos no dominados	Ejecución (s)	Spacing	Spread
$n = 10$	11	1.369	0.0535	0.2175
$n = 20$	21	1.323	0.0917	0.1182
$n = 50$	51	2.006	0.2089	0.0507
$n = 100$	101	3.512	0.4048	0.0260

TABLA II
MÉTRICAS DE EVALUACIÓN CON ÉPSILON RESTRICCIONES AUMENTADO

n / Métrica	Puntos no dominados	Ejecución (s)	Spacing	Spread
$n = 10$	11	0.582	0.0535	0.2175
$n = 20$	21	1.478	0.0917	0.1182
$n = 50$	51	2.665	0.2089	0.0507
$n = 100$	101	6.774	0.4048	0.0260

D. *Ejemplo de un portafolios de inversión*

A nuestro criterio, los métodos arrojan resultados idénticos, pero se distinguen en el tiempo de ejecución. A medida que aumentan los ciclos, el método de épsilon restricciones posee un tiempo de actuación menor, por lo tanto, visualizamos el porcentaje que deberíamos invertir en cada activo, para un ciclo de $n = 10$ según el método $\epsilon-$restricciones.

La Tabla III presenta el porcentaje de inversión asignado a cada activo, variando la combinación del portafolio en cada instancia. En el primer portafolios ($n = 0$) se diversifica el riesgo, no se toma en cuenta Tesla y Amazon (en menor medida Google y American Airlines Group), el resto de los activos sí deben estar incluidos en la cartera de inversión. Los activos seleccionados presentaron una menor variabilidad en los precios, en comparación con el resto de las empresas. Por otro lado, si tomamos $n = 6$, la situación cambia, surge la empresa Tesla (con un porcentaje 1.08%), Amazon (20%) y una reducción de inversión en las empresas de Coca-Coca (5.36%).

La última combinación del portafolio se compone de aquellas empresas que reportaron un mayor retorno esperado. Ellos fueron: Apple, Google, Tesla, Amazon y Microsoft.

TABLA III: Ejemplo cartera inversión con el método de épsilon restricciones

N = n / Activo	Apple	Google	Tesla	Amazon	Microsoft	American Airlines Group	Equifax	FedEx	JP Morgan Chase	Coca-Cola
$n = 0$	20	0,97	0	0	18,32	0,47	7,52	12,73	20	20
$n = 1$	20	0	0	4,9	20	0	4,18	10,92	20	20
$n = 2$	20	0	0	10,67	20	0	0,41	8,92	20	20
$n = 3$	20	0	0	14,37	20	0	0	8,09	20	17,54
$n = 4$	20	0	0	16,94	20	0	0	9,16	20	13,9
$n = 5$	20	0	0	19,5	20	0	0	10,24	20	10,26
$n = 6$	20	0	1,08	20	20	0	0	13,56	20	5,36
$n = 7$	20	0,29	2,32	20	20	0	0,96	16,36	20	0,06
$n = 8$	20	2,46	9,27	20	20	0	0	8,27	20	0
$n = 9$	19,34	3,96	16,71	20	20	0	0	0	20	0
$n = 10$	19,96	20	20	20	20	0	0	0	0,04	0

REFERENCES

[1] Harry Markowitz, ”Portfolio Selection”;The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

[2] Eduardo Pascale, ”Desiciones Financieras”; Capitulo 10 y 11: Teoría de Portafolios.

[3] Murro Pierluigi-Precicchiani Simone: ”Extending the portfolio optimization problem with multi-objective evolutionary algorithms in Python. An application on sustainable finance. (2021)” Dipartimiento di Impresa e Management - LUISS

[4] Carlos Romero (1996), ”Análisis de las decisiones multicriterio”.