

Mouhamed Lamine FALL
Mamadou KADIAKE

La solution stationnaire du problème (ou régime établi, observé après un temps suffisamment grand) est de la forme $u(t, x) = u(x)\cos(\omega t)$ où l'amplitude dynamique $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de :

$$\begin{cases} \omega^2 \rho A u(x) + EA \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 0, & \text{sur }]0, L[\\ u(0) = 0 \\ EA \frac{du}{dx}(L) = F \end{cases}$$

Montrons que l'amplitude dynamique du déplacement longitudinal le long de la barre est donnée par :

$$u(x) = \frac{F}{\beta EA} \frac{\sin(\beta x)}{\cos(\beta L)} \quad \text{Où } \beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

divisons par EA on a $\frac{d^2 u}{dx^2} + \beta^2 u(x) = 0$
 Eq. différentielle linéaire à coef. constant \Rightarrow solution : $u(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$
 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow u(x) = C_2 \sin(\beta x)$
 $\frac{du}{dx} = C_2 \beta \cos(\beta x) \Rightarrow EA \frac{du}{dx}(L) = F$
 $\Rightarrow EAC_2 \beta \cos(\beta L) = F \Rightarrow C_2 = \frac{F}{EA \beta \cos(\beta L)}$
 d'où $u(x) = \frac{F}{\beta EA} \frac{\sin(\beta x)}{\cos(\beta L)}$

Amplitude dynamique de la contrainte

Amplitude dynamique
 on a $\sigma(x) = E \frac{du}{dx}$; on rappelle que $\frac{du}{dx} = C_2 \beta \cos(\beta x)$
 $= \frac{F}{EA \cos(\beta L)} \cos(\beta x)$
 donc $E \frac{du}{dx} = \frac{F}{A} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta L)}$
 $\Rightarrow \sigma(x) = \frac{F}{A} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta L)}$

Résolution Élément Finis

La formulation faible associée au problème initial s'écrit :

$$\underbrace{- \int_0^L \omega^2 \rho A u(x) \psi(x)}_{\text{Effet de la Masse}} + \underbrace{\int_0^L EA \frac{du}{dx}(x) \frac{d\psi}{dx}(x)}_{\text{Effet de la rigidité}} \underbrace{- F\psi(L)}_{\text{Condition de Neumann}} = 0$$

Soit la solution approchée $U(x) \approx N_e(x)U_e + N_{e+1}(x)U_{e+1}$ à l'aide d'un polynôme de Lagrange de degrés 1.

Où U_e et U_{e+1} sont les inconnues et $N_e(x)$ et $N_{e+1}(x)$ les fonctions de base données par :

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x-(x_i-h)}{h}, & \text{sur } [x_i-h, x_i] \\ \frac{(x_i+h)-x}{h}, & \text{sur } [x_i, x_i+h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_e(x) = \begin{cases} \frac{x_{e+1}-x}{h}, & \text{sur } [x_e, x_{e+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ N_{e+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_e}{h}, & \text{sur } [x_e, x_{e+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi on a $\frac{dN_e}{dx} = -\frac{1}{h}$ et $\frac{dN_{e+1}}{dx} = \frac{1}{h}$

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_e}{dx} \frac{dN_e}{dx} dx = \frac{1}{h}, \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_e}{dx} \frac{dN_{e+1}}{dx} dx = -\frac{1}{h}, \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_{e+1}}{dx} \frac{dN_{e+1}}{dx} dx = \frac{1}{h},$$

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} N_e N_e dx = \frac{h}{3}, \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_e N_{e+1} dx = \frac{h}{3}, \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_{e+1} N_{e+1} dx = \frac{h}{3},$$

Ainsi on a $M_e = \underbrace{\frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de masse}}$ et $K_e = \underbrace{\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de rigidité}}$, et en appliquant la formule de la matrice

élémentaire $D_e = K_e - \omega^2 M_e$ nous obtenons cette matrice :

$$D_e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{h} - \omega^2 \frac{\rho Ah}{3} & -\frac{EA}{h} - \omega^2 \frac{\rho Ah}{6} \\ -\frac{EA}{h} - \omega^2 \frac{\rho Ah}{6} & \frac{EA}{h} - \omega^2 \frac{\rho Ah}{3} \end{bmatrix}}_{\text{matrice élémentaire}}$$

En ayant la matrice élémentaire on peut ainsi avoir la matrice globale puis celle réduite et enfin résoudre le système.

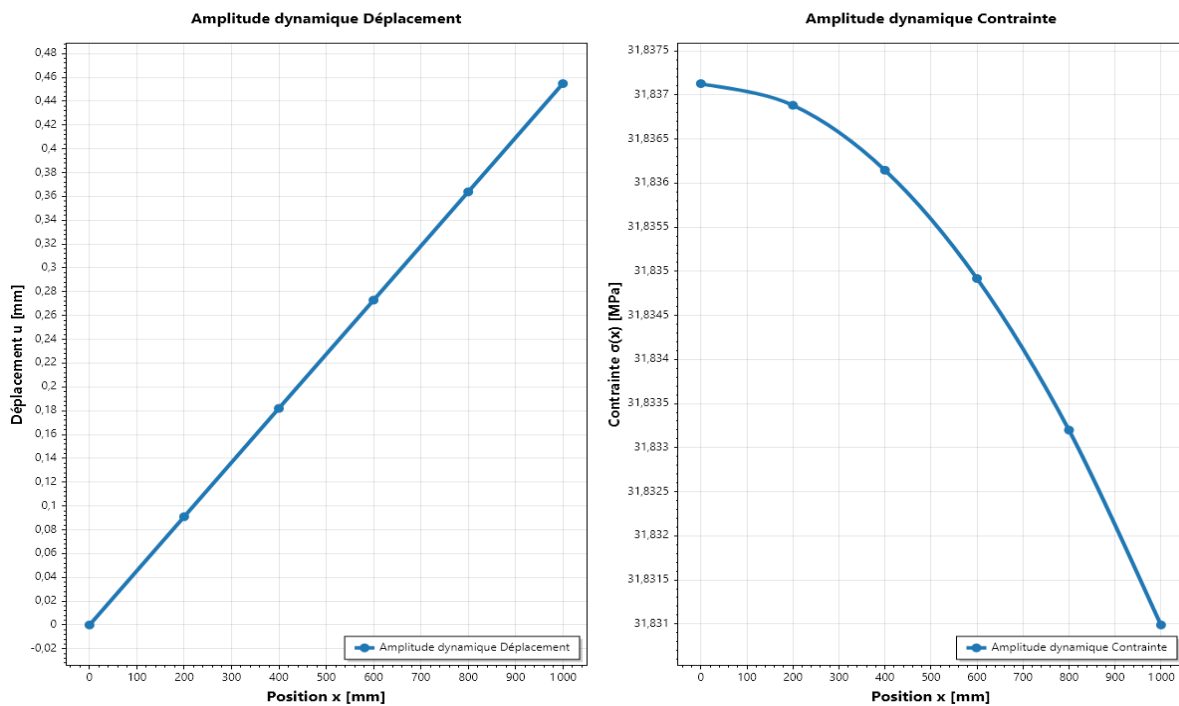


Figure 1 Amplitude dynamique du déplacement et de la contrainte pour $\omega = 0.1$

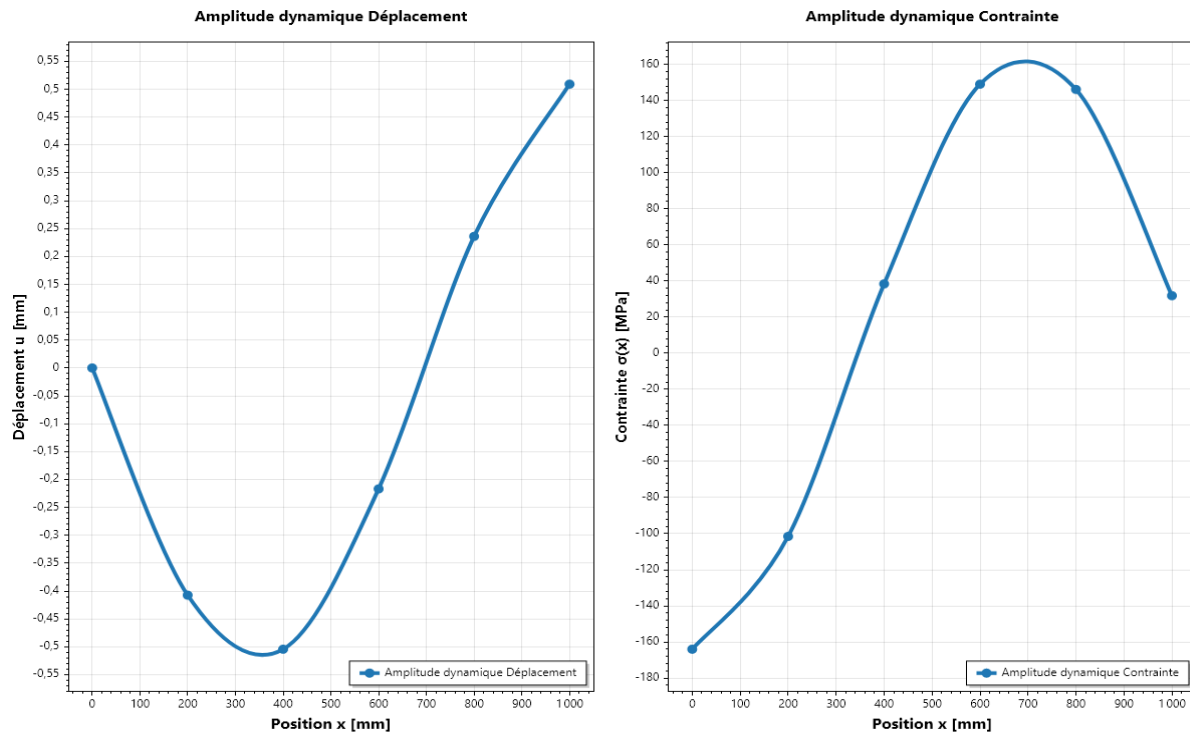


Figure 2 Amplitude dynamique du déplacement et de la contrainte pour $\omega=23$

Contrainte normale dans un élément e

Dans la méthode des éléments finis (MEF), le déplacement $u(x)$ sur chaque élément est approximé par une combinaison linéaire des fonctions de base $N_e(x)$ et $N_{e+1}(x)$. Ces fonctions étant linéaires, leur dérivée par rapport à x est constante sur chaque élément. Ainsi, la dérivée du déplacement, donnée par :

$\frac{du}{dx}(x) = \frac{dN_e}{dx}(x)U_e + \frac{dN_{e+1}}{dx}(x)U_{e+1}$, est également constante. La contrainte normale $\sigma(x)$, définie comme : $\sigma(x) = E \frac{du}{dx}(x)$, est donc constante sur chaque élément. L'expression de la contrainte normale sur l'élément e est donnée par : $\sigma(x) = E \frac{U_{e+1} - U_e}{h}$ puisque $\frac{dN_e}{dx} = -\frac{1}{h}$ et $\frac{dN_{e+1}}{dx} = \frac{1}{h}$. Ainsi, avec la méthode des éléments finis le profil de la courbe de la contrainte sera un peu en escalier avec une variation des valeurs qu'au nœuds.

Analyse des courbes obtenues

Dans cette étude, nous avons comparé les amplitudes dynamiques en déplacement et en contrainte obtenues par la méthode des éléments finis (MEF) et le calcul analytique pour deux valeurs de fréquence : $\omega = 0,1$ et $\omega = 23$.

Cas $\omega = 0,1$

Pour la fréquence faible ($\omega = 0,1$), les courbes de déplacement montrent un profil linéaire croissant avec une bonne correspondance entre la MEF et le calcul analytique. Pour la contrainte, les résultats suivent également une tendance régulière.

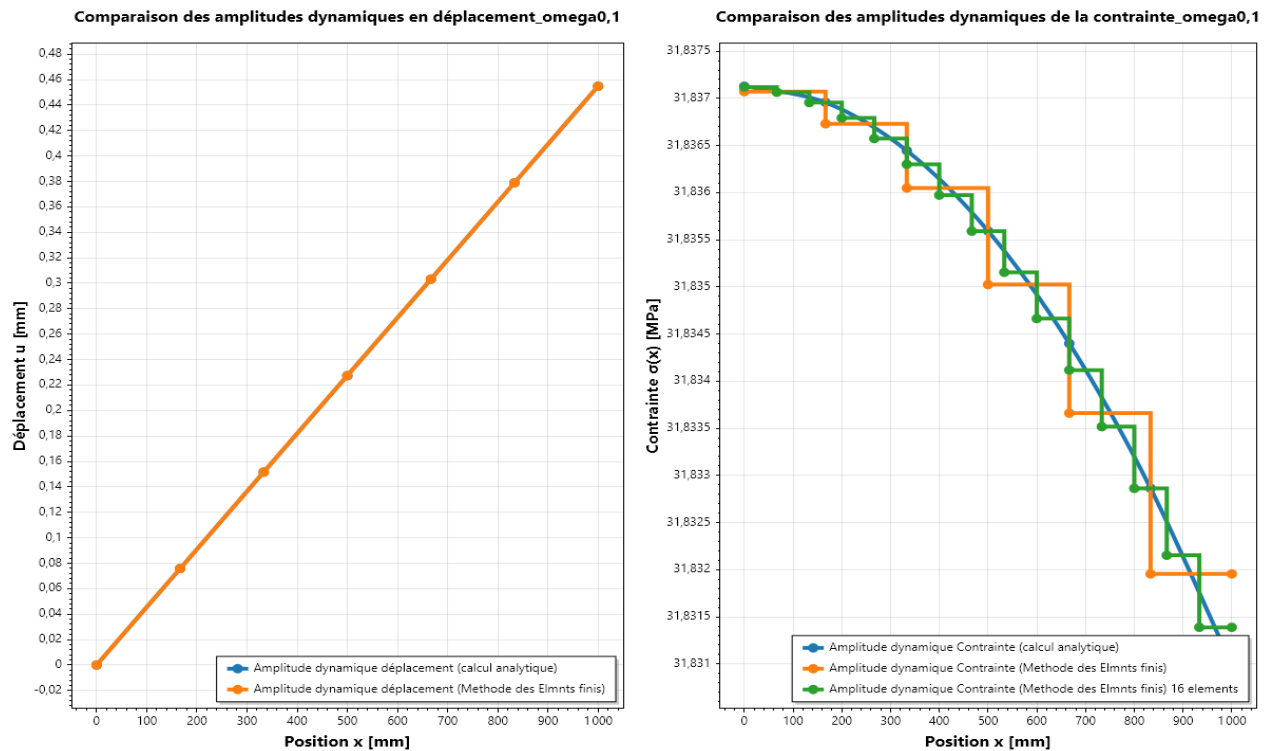


Figure 3 Comparaison des Amplitudes dynamiques du déplacement et de la contrainte pour $\omega=0.1$

Cas $\omega = 23$

À fréquence élevée ($\omega = 23$), les déplacements et contraintes présentent des oscillations plus complexes. Ici, les écarts entre les deux méthodes deviennent plus notables, en particulier au niveau des amplitudes maximales. Cela s'explique par l'influence accrue des phénomènes vibratoires et par les limites liées aux hypothèses simplifiées du calcul analytique, qui ne prend pas en compte certaines non-linéarités.

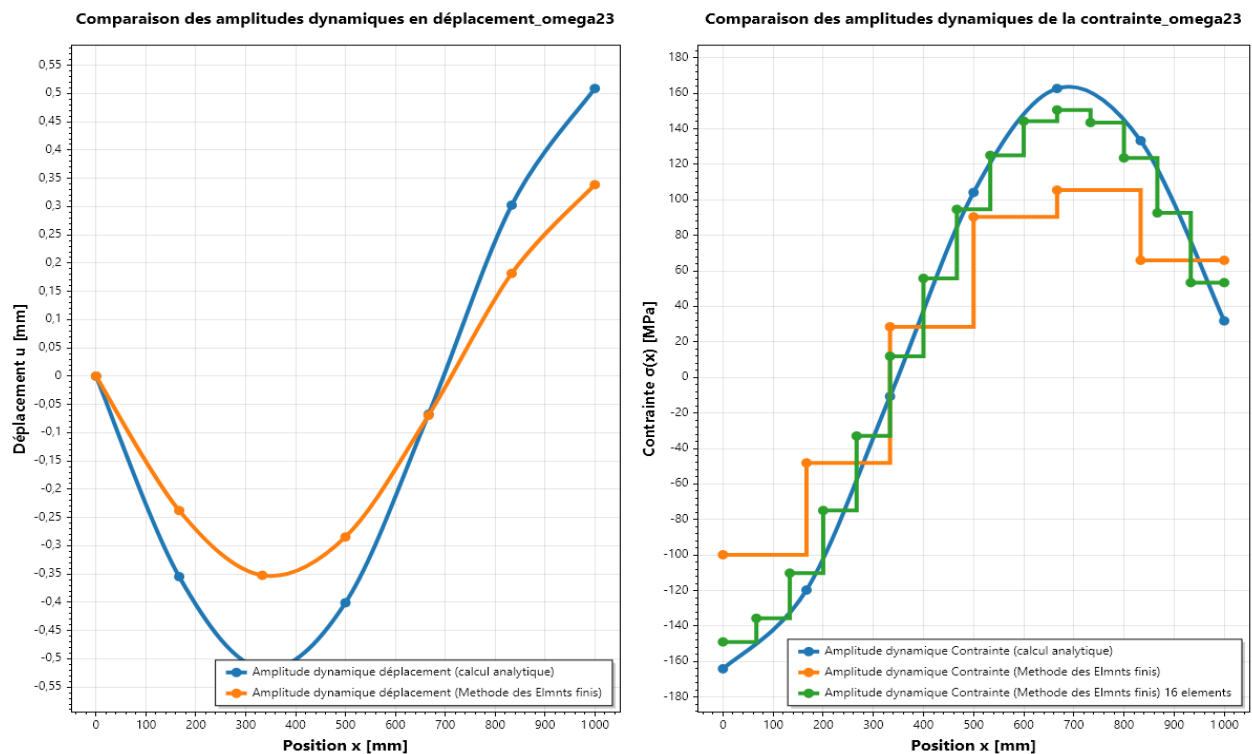


Figure 4 Comparaison des Amplitudes dynamiques du déplacement et de la contrainte pour $\omega=23$

La comparaison met en évidence la robustesse de la MEF pour modéliser des phénomènes dynamiques complexes, en particulier à haute fréquence. Toutefois, les écarts observés montrent l'importance du maillage dans la précision des résultats. Le calcul analytique reste pertinent pour les basses fréquences où les comportements sont plus simples et linéaires.

Interprétation des résultats

Etudions la convergence de la solution obtenue par la méthode des éléments finis (MEF) pour deux fréquences d'excitation : $\omega = 0,1$ rad/ms et $\omega = 23$ rad/ms. Les résultats montrent que pour une faible fréquence ($\omega = 0,1$ rad/ms), l'erreur relative diminue rapidement avec l'augmentation du nombre d'éléments n_e . Au-delà de 40 éléments, l'erreur se stabilise à une valeur négligeable $\approx 10^{-9}\%$. Ce comportement est dû à la nature quasi-statique du problème, où les effets inertiels sont faibles, ce qui facilite l'approximation numérique de la solution.

En revanche, pour une fréquence élevée ($\omega = 23$ rad/ms), l'erreur relative fluctue fortement pour des maillages grossiers ($n_e < 20$) et dépasse même 120 %. À mesure que le nombre d'éléments augmente, l'erreur diminue progressivement et se stabilise pour des maillages plus fins. Cela s'explique par la prédominance des effets inertiels, qui rendent la solution plus complexe et nécessitent un maillage plus raffiné pour capturer correctement les variations rapides de déplacement et de contraintes.

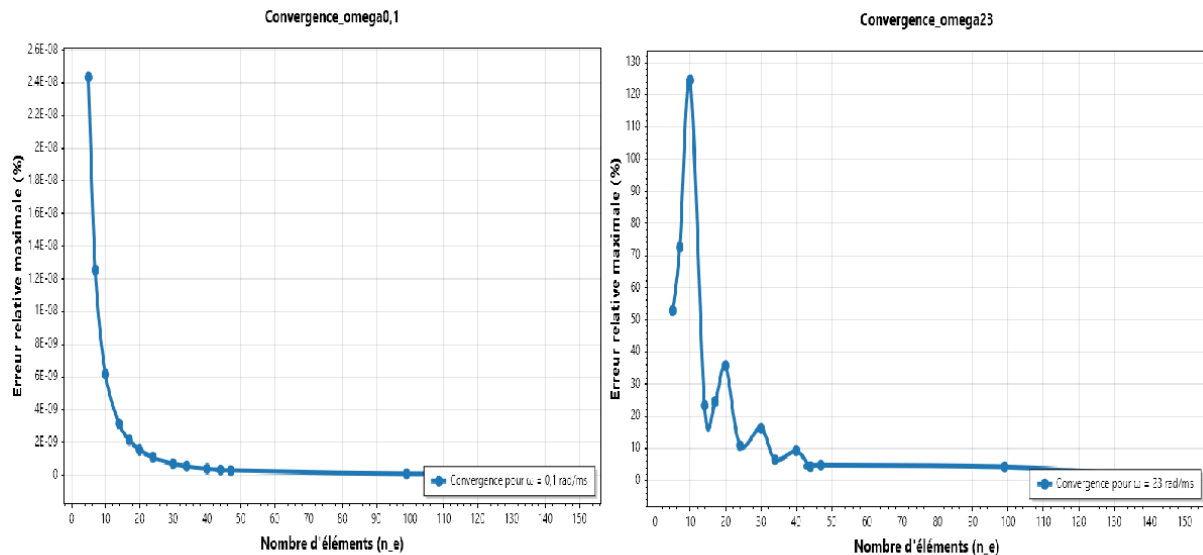


Figure 5 Convergence des erreurs relatives en fonctions du nombre d'éléments

En conclusion, pour des fréquences faibles, un maillage modéré ($n_e \approx 40$) suffit pour assurer une solution précise. Cependant, pour des fréquences élevées, un nombre d'éléments plus important ($n_e > 50$) est nécessaire afin de garantir la convergence. La précision de la méthode des éléments finis dépend donc fortement du raffinement du maillage, en particulier lorsque les effets inertiels deviennent dominants. Ce qui est illustrés par les figures 3 et 4 où l'on voit que plus on augmente le maillage du système plus les résultats du MEF corroborent avec ceux des calculs analytiques.