Théorie des graphes
Recherche Operationnelle (R.O)

Chapitre 1: Coloration des sommets d'un graphe

asma.ghdami@esprit.tn

September 20, 2022

Outline

L’histoire de la coloration des graphes

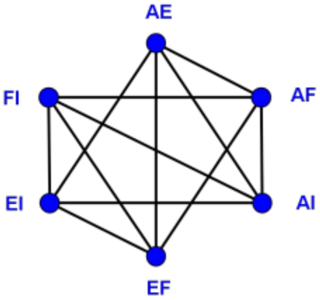
- Les premiers résultats de coloration de graphes concernent presque exclusivement la coloration des cartes. En cherchant à mettre en couleurs une carte des comtés d’Angleterre, Francis Guthrie (mathématicien et botaniste sud-africain 1831 1899) postule en 1852 la conjecture des quatre couleurs : il remarqua en effet qu’il n’y avait besoin que de quatre couleurs pour que deux comtés ayant une frontière commune soient de couleurs différentes.
- Outre le problème de cartes, la coloration des graphes intervient également pour les problème d’optimisation avec contraintes (planning, incompatibilités), dans les réseaux, la cryptographie...
- Aucune formule miracle permet de déterminer le nombre chromatique d’un graphe quelconque.
- La plupart du temps, il faut se contenter d’un encadrement, autrement dit d’un minorant et d’un majorant du nombre chromatique.
- Il existe plusieurs algorithmes de coloration, que nous allons voir plus en détail.

Content

Activité

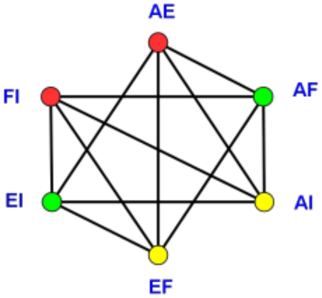
Pour une coupe du monde de football, les équipes qualifiées sont réparties en « poule » de quatre équipes. Chaque équipe rencontre une et une seule fois les trois autres.
Toutes les équipes de la même poule, jouent le même jour un match et un seul.
On suppose que dans l'une des poules les équipes qualifiées sont:
A: Angleterre, E : Espagne, F : France, I : Italie.
On notera les six matchs de la poule:
AE (Angleterre;Espagne); AI; AF; EF; EI; FI.
On considère le graphe suivant, les six sommets sont les six matchs, il ya une arête entre deux sommets si et seulement si les deux matchs ne peuvent pas être joués le même jour.

Activité



- L’ordre du graphe est 6.
- Le degré de chaque sommet est 4.
- On se propose de colorier les sommets de ce graphe de façon que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.
- On commence par le sommet AE que l’on colorie en rouge (par exemple).
- Les sommets: AF; AI; EF et EI sont adjacents donc on ne peut pas les colorier en rouge.
- Par contre le sommet FI peut être colorié en rouge.
- Puis on choisit le sommet AF que l’on colorie en vert (par exemple).
- Les sommets AI et EF sont non coloriés et adjacents donc on ne peut pas les colorier en vert.
- Par contre le sommet EI n’est pas colorié et n’est pas adjacent donc peut être colorié en vert.
- Puis on choisit le sommet AI que l’on colorie en jaune (par exemple).

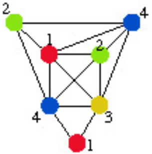
- Le seul sommet non encore colorié EF n'est pas adjacent à AI donc on le colorie en jaune.

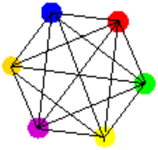


Lorsqu'on regarde le graphe, il existe des sous graphes d'ordre trois (tout simplement des triangles) donc il est nécessaire d'utiliser au moins trois couleurs distinctes pour le graphe donc 3 est le nombre minimal de couleurs que l'on puisse utiliser pour colorier le graphe. On dit que 3 est le nombre chromatique du graphe.

Définitions

Colorier un graphe G c'est colorier les sommets de telle façon que deux sommets distincts et adjacents aient toujours des couleurs différentes.





Le nombre chromatique $\gamma(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe.

Content

Propriétés:

- Si un graphe à n sommets, alors $\gamma(G) \leq n$.
  (On peut donner des couleurs différentes aux sommets).
- Si un graphe de n sommets est complet, alors $\gamma(G) = n$.
  (Deux sommets distincts devront avoir des couleurs différentes, il faut donc au moins n couleurs).
- Si le plus grand degré d'un sommet est d, alors $\gamma(G) \leq d + 1$.
  (Prendre un sommet de degré d ainsi que les sommets qui lui sont reliés, colorier ces $d + 1$ sommets avec $d + 1$ couleurs différentes.
  Prendre ensuite, l'un après l'autre, les sommets restants ... pour chacun d'eux, l'une des couleurs, au moins, convient).
- Lorsque le graphe est planaire, alors $\gamma(G) \leq 4$.
- Si G d'ordre n admet un sous graphe complet de m sommets, alors: $m \leq \gamma(G) \leq n$

Définition: Graphe planaire
C’est un graphe qui peut être représenté sur un plan (ou une sphère) tel que tout arc (ou arête) ne se croise pas avec un autre.

Théorème de coloration (Appel Haken, 1977): Tout graphe planaire est 4-chromatique.

Content

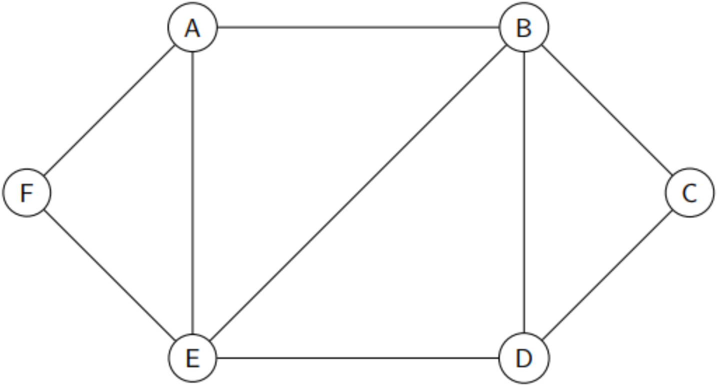
Algorithme de Glouton

Principe: En informatique, un algorithme glouton (greedy algorithm en anglais) est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local.

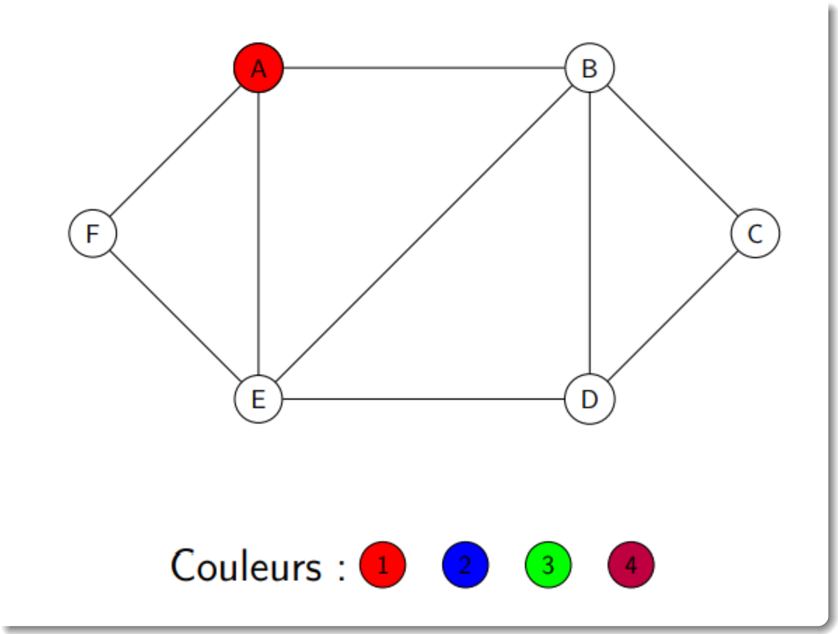
L'algorithme:

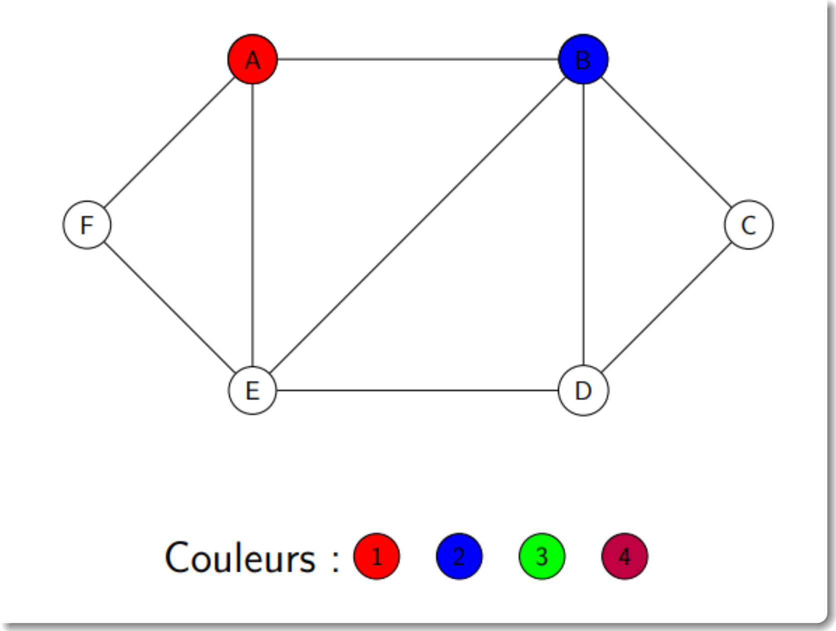
Les sommets de G sont numérotés de 1 à n ($s_1, s_2, \cdots, s_n$).
Début
Pour i allant de 1 à n:
Affecter à s_i la plus petite couleur non affectée à ses voisins déjà coloriés.
Fin Pour.
Afficher le nombre de couleur utilisée.
Fin

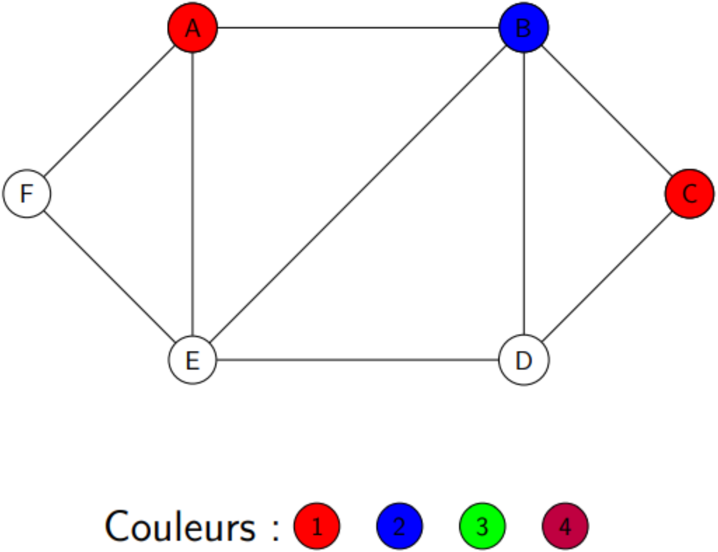
Exemple

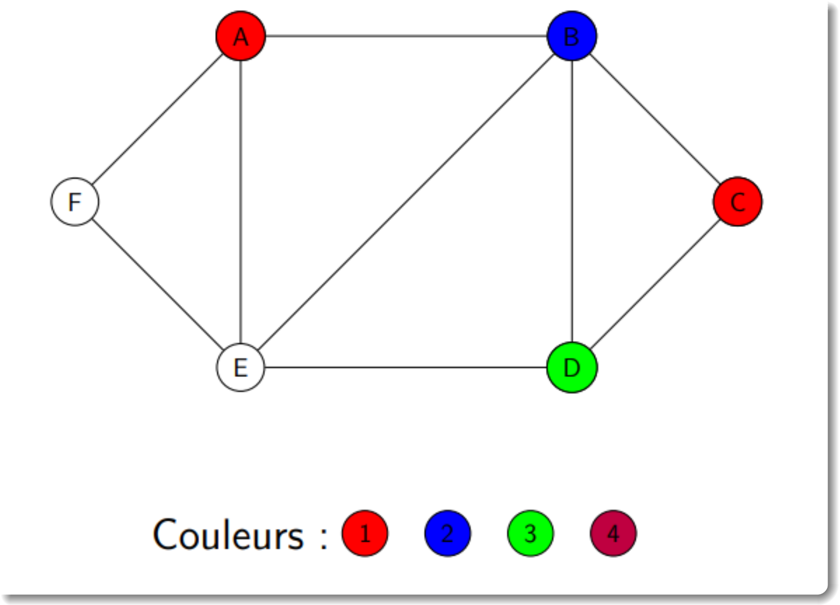


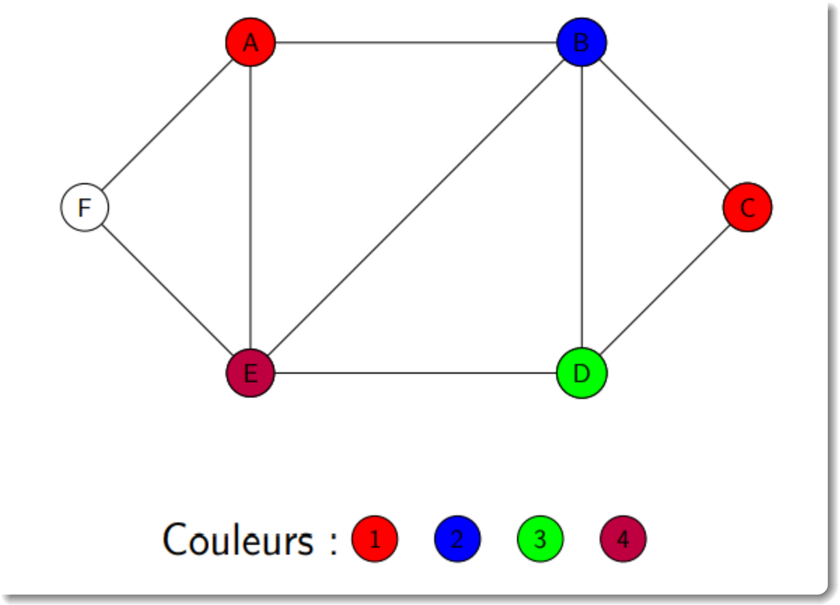
Couleurs : 1 2 3 4

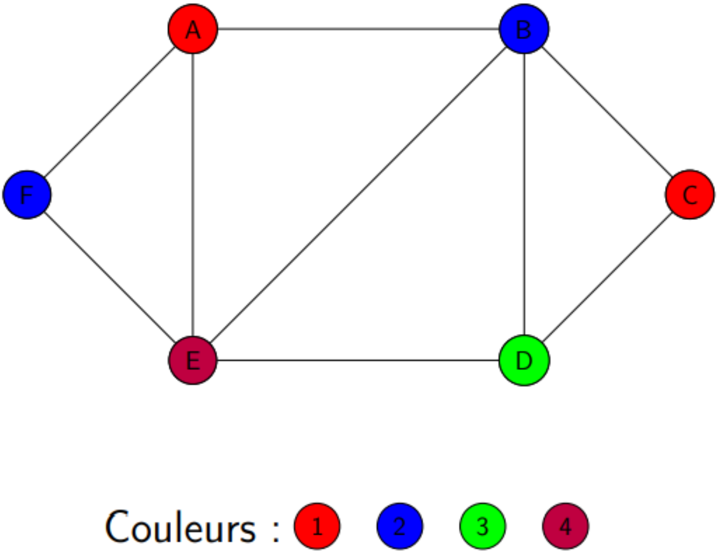

A
B
F
C
E
D
Couleurs :
1
2
3
4


A
B
F
C
E
D
Couleurs :
1
2
3
4


A
B
F
C
E
D
Couleurs : 1 2 3 4


A
B
C
D
E
F
Couleurs :
1
2
3
4


A
B
F
C
E
D
Couleurs : 1 2 3 4


A
B
F
C
E
D
Couleurs : 1 2 3 4

Théorème

L'algorithme Glouton nécessite n étapes (n: nombre des sommets du graphe). Il utilise au plus $d + 1$ couleurs (d: degré du graphe).

Content

Algorithme de WELCH & POWELL

L'algorithme de Welsh Powell consiste ainsi à colorer séquentiellement le graphe en visitant les sommets par ordre de degré décroissant. L'idée est que les sommets ayant beaucoup de voisins seront plus difficiles à colorer, et donc il faut les colorer en premier.

Procédure:

1. Ordonner les sommets du graphe suivant un ordre décroissant des degrés.
(On obtient ainsi une liste $x_1, x_2, \cdots, x_n$ telle que

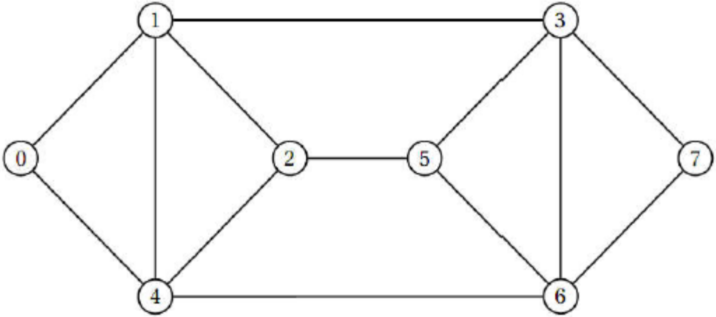
$$deg(x_1) \geq deg(x_2) \geq \cdots \geq deg(x_n))$$

2. Affecter une couleur c_1 au sommet x_1 et attribuer la même couleur aux reste des sommets non colorés et non adjacents d'une façon cumulative et suivant des degrés décroissants.
3. S'il reste des sommets non colorés, attribuer une nouvelle couleur au premier sommet non coloré de la liste résiduelle et répéter la procédure.
4. Condition d'arrêt: tous les sommets sont colorés.

Algorithme:

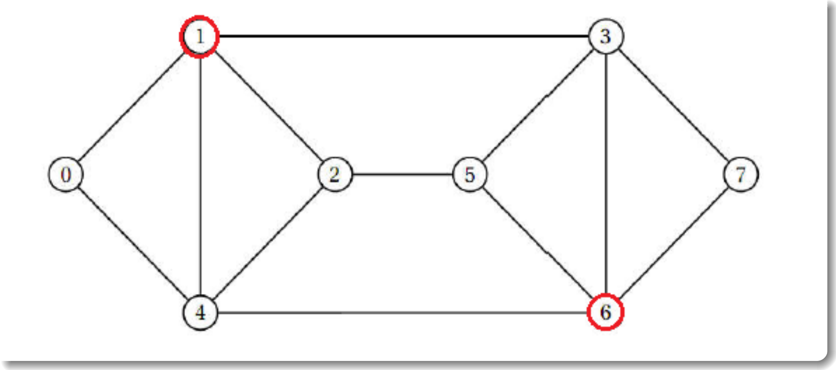
On note L la liste des sommets s_i classés suivant l'ordre décroissant de leurs degrés: $d(s_1), d(s_2), d(s_3), \cdots, d(s_n)$.
Initialisation:
L: liste des sommets dans l'ordre décroissant du degré
couleur $= 0$, $\Gamma_s = s_1$
Tant que $L \neq 0$; faire:
couleur$=$couleur$+1$
couleur(s_1) $=$ couleur
Pour tout t dans L, faire:
Si t non-adjacent Γ_s
couleur(s_1)=couleur
$\Gamma_s = \Gamma_s \bigcup t$
Fin si
Fin faire
Retirer les sommets colorés de L
Fin faire

Application: WELCH & POWELL

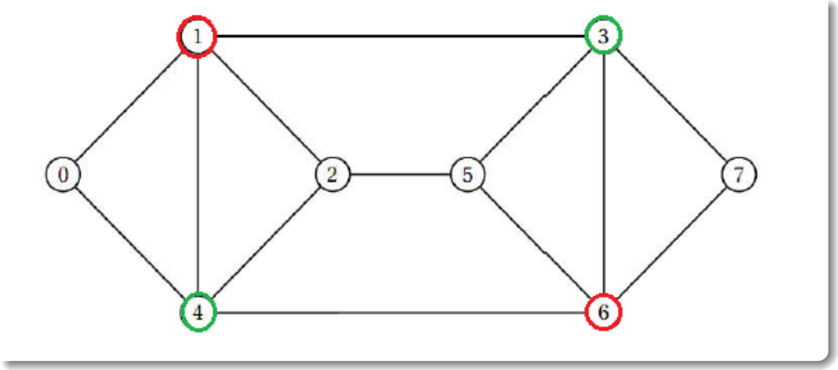


Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
Degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Iter 1								
Iter2								
Iter 3								
Iter 4								

Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
Degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Iter 1	C1	-	-	C1	-	-	-	-
Iter2								
Iter 3								
Iter 4								

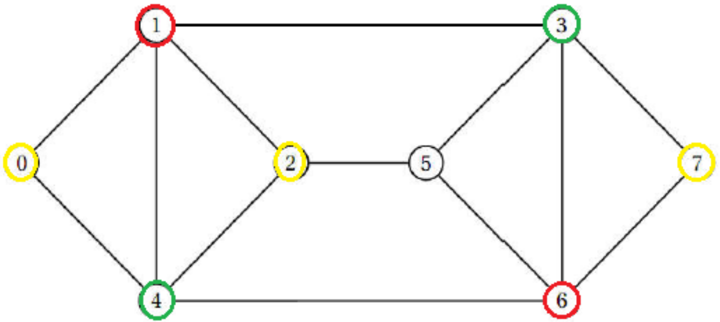

1
3
0
2
5
7
4
6

Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
Degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Iter 1	C1	-	-	C1	-	-	-	-
Iter2	X	C2	C2	X	-	-	-	-
Iter 3								
Iter 4								

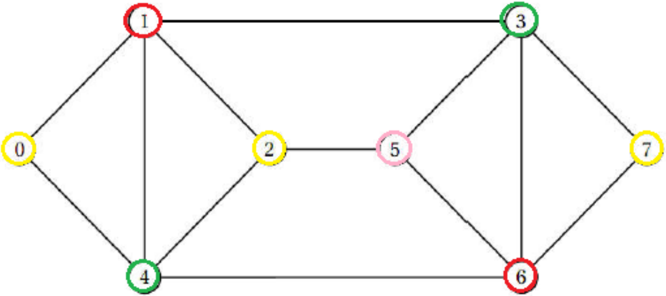

0
1
2
3
4
5
6
7

Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
Degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Iter 1	C1	-	-	C1	-	-	-	-
Iter2	X	C2	C2	X	-	-	-	-
Iter 3	X	X	X	X	C3	-	C3	C3
Iter 4								

A



Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
Degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Iter 1	C1	-	-	C1	-	-	-	-
Iter2	X	C2	C2	X	-	-	-	-
Iter 3	X	X	X	X	C3	-	C3	C3
Iter 4	X	X	X	X	X	C4	X	X

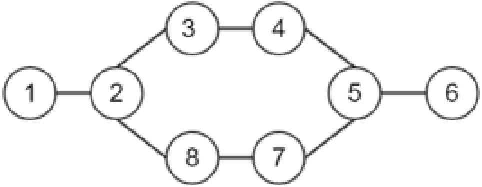


D’après la configuration considérée, 4 couleurs sont suffisants pour colorier le graphe.

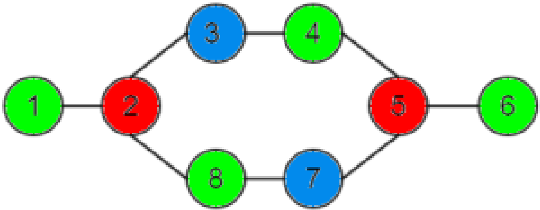
$$\chi(G) \leq 4$$

Contre-exemple:

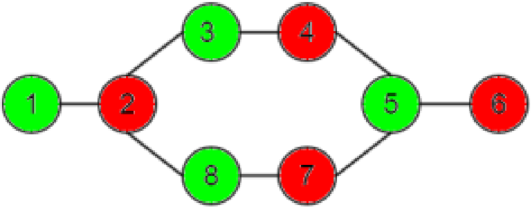
Afin de tester l'efficacité de l'algorithme de Welsh Powell, nous allons mettre en place un contre exemple.
Soit le graphe:



Avec l’application de l’algorithme de Welsh Powell, on obtient alors cette coloration:



Mais, elle n’est pas optimale.
En effet, seul deux couleurs suffisent pour colorier ce graphe, tel que :



Néanmoins, le contre-exemple montre bien que la coloration proposée n’est pas toujours optimale, car dans certains cas, un nombre plus restreint de couleurs peuvent être utilisées (voir ci-dessus).