

MOHAMMED VI
POLYTECHNIC
UNIVERSITY

Résolution Numérique des Équations de Transport et Burger par La Méthode des Éléments finis

Master Modélisation Hybride Avancée et Calcul Scientifique

Mémoire de fin d'année

Module : Les Méthodes Numériques

Années 2019-2020

Mouhcine Assouli & Mehdi Jaa

Sous l'encadrement de: Abdellah El Kacimi & Imad El Mahi & Ahmed Taik

Table des matières

Table des matières	2
Introduction	7
1 Résolution Numérique de l'Equation du Transport par La Méthode des Éléments finis	8
1.1 Étude théorique de Problème par EF	8
1.1.1 Formulation Variationnelle du Problème	8
1.1.2 Problème approché	9
1.1.3 Système linéaire associé au problème discret	9
1.1.4 Calcul des coefficients de la matrice	10
1.2 Étude Numérique de Problème	12
1.2.1 La Solution exacte	12
1.2.2 Résultats numériques	12
1.3 Étude Numérique de l'Erreur	16
1.3.1 Erreur en fonction du Temps	16
2 Résolution Numérique de l'Equation du Transport par La Méthode des EF (moindres carrés)	19
2.1 Étude théorique de Problème par EF (moindres carrés)	19
2.1.1 Formulation Variationnelle de Problème	19
2.1.2 Problème approché	20
2.1.3 Système linéaire associé au problème discret	20
2.1.4 Calcul des coefficients de la matrice	21
2.2 Étude Numérique de Problème	21
2.3 Étude Numérique de l'Erreur	25
3 Résolution Numérique de l'Equation du Burger par La Méthode des Éléments finis	27
3.1 La solution exacte de l'Équation de Burger	27
3.1.1 La Méthode des Caractéristiques	27
3.1.2 La Solution Faible	28
3.2 Étude théorique de Problème par EF	29
3.2.1 Formulation Variationnelle de Problème	29
3.2.2 Problème approché	29

3.2.3	Système linéaire associé au problème discret	30
3.2.4	Calcul des coefficients de la matrice	31
3.3	Étude Numérique de problème	32
3.3.1	Choc :	32
3.3.2	Détente :	33
Conclusion		36

Liste des figures

1.1	Discrétisation non uniforme du domaine $[a,b]$.	9
1.2	Les fonction chapeaux.	10
1.3	$dt=0.05$ et $c=1$.	13
1.4	$dt=0.05$ et $c=2$.	13
1.5	$dt=0.01$ et $c=1$.	14
1.6	$dt=0.01$ et $c=2$.	14
1.7	$N=200$, $\alpha = \{0, -10\}$.	15
1.8	$dt=0.01$, $c=1$, $\alpha = -10$.	15
1.9	$dt=0.01$, $c=2$ et $\alpha = -10$.	16
1.10	$dt=0.05$, $c=1$, $T_{max}=5$	16
1.11	augmente le temps final (T_{max}) : $dt=0.05$, $c=1$, $T_{max}=13$	17
1.12	$dt=0.05$, $c=2$,	17
1.13	$dt=0.01$, $c=1$,	17
2.1	Discrétisation uniforme du domaine $[a,b]$.	20
2.2	$dt=0.01$ et $c=1$.	22
2.3	$dt=0.05$ et $c=1$.	23
2.4	$dt=0.05$ et $c=0.5$.	23
2.5	$dt=0.01$, $c=1$ et $dx=0.05,0.02$	24
2.6	$dt=0.01$, $dx=0.1$ et $c=1$.	25
2.7	$dt=0.05$, $dx=0.1$ et $c=1$.	25
2.8	$dt=0.05$, $dx=0.04$ et $c=1$.	26
2.9	$dt=0.05$, $dx=0.02$ et $c=1,2$.	26
3.1	subdivision uniforme	29
3.2	$dt=0.05$ et $dx=0.1$	32
3.3	$dt=0.01$ et $dx=0.04$	33
3.4	Erreur pour : $dt=0.01$ et $dx=0.04$	33
3.5	$dt=0.05$ et $dx=0.1$	34
3.6	$dt=0.01$ et $dx=0.04$	34
3.7	Erreur pour : $dt=0.01$ et $dx=0.04$	35

Liste des tables

Introduction

La dynamique des fluides est un domaine dans lequel la description mathématique des phénomènes les plus simples pourrait générer un système des équations différentielles très complexe, difficile (parfois impossible) à résoudre. Les méthodes numériques sont donc indispensables pour simuler et mieux comprendre ces phénomènes, et également pour résoudre des problèmes d'ingénieries liées à ces phénomènes et créer des applications dans le monde réel. L'une des méthodes les plus utilisées est celle des éléments finis (EF). Elle est appréciée par les ingénieurs pour son adaptabilité et sa précision. Par conséquent a, nous la choisissons dans ce projet pour traiter des problèmes académiques gouvernés par une équation de transport linéaire, ou une équation non linéaire appelée équation de Burger.

Dans le chapitre I on introduit la formulation faible de l'équation de transport (la vitesse de flux est en général supposée positive) avec une condition initiale, et une condition limite à l'entrée du type Dirichlet, puis nous discrétisons l'espace en utilisant des grilles uniformes et non uniformes, respectivement. Quant à la discrétisation an temps, on fait appel à un schéma d'Euler implicite. Les systèmes linéaires résultants sont résolus en utilisant un solveur direct de Python, basé sur la méthode d'élimination de Gauss. L'étude numérique de l'erreur par rapport à la solution exacte montre que les résultats obtenus sont acceptables dans la plupart des cas tests, à l'exception des situations où il y'a discontinuité ou changement rapide de la solution, où on peut observer des fluctuations non physiques.

Pour minimiser ces oscillations, on utilise dans le chapitre II une autre méthode des éléments finis, qui est la méthode de moindres carrés. A partir de la même équation et des mêmes conditions initiales et limites dans le chapitre précédent, on applique la formulation de moindres carrés, avec des discrétisations uniforme pour l'espace et le temps (formule implicite d'Euler), Ceci conduit à un nouveau schéma numérique dont les systèmes linéaires résultants sont résolus comme auparavant en se basant sur un solveur direct. L'étude numérique de l'erreur par rapport à la solution exacte montre que le problème liée aux oscillations non physique est moins prononçant.

Dans le chapitre III, on utilise la formulation forte de l'équation de Burger avec une condition initiale, et une condition limite à l'entrée du type Dirichlet, avec des discrétisations uniforme pour l'espace et le temps. Le choix s'est porté sur un schéma semi-implicite pour traiter le terme non linéaire. Un schéma numérique similaire à celui du premier chapitre, sauf qu'ici la

matrice formant le système change à chaque pas dans le temps. Une série de tests numériques sont effectués dans le but de comparer la solution approchée à la solution exacte. Les résultats obtenus dans le cas particulier du problème de Riemann sont en général acceptables.

Chapitre 1

Résolution Numérique de l'Equation du Transport par La Méthode des Éléments finis

1.1 Étude théorique de Problème par EF

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R} (i.e $\Omega =]a, b[$). On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(t=0, x) = u_0(x) & \text{donnée,} \\ u(t, a) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) modélise le problème de *transport* simple.

1.1.1 Formulation Variationnelle du Problème

On prend v comme fonction de test suffisamment régulière qui dépend seulement de la variable x . En multipliant l'équation (1.1) par v , on obtient en intégrant par parties sur Ω

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) v(x) dx - \int_a^b c u(t, x) v'(x) dx + c v(b) u(b) = 0. \quad (1.2)$$

Pour donner un sens aux intégrales de l'équation (1.2) on prend l'espace :

$$V = H^1(\Omega)$$

Finalement, la formulation variationnelle du problème (1.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1([a, b]) ; \text{ telle que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.3)$$

Où

$$a(u, v) = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) v(x) dx - \int_a^b c u(t, x) v'(x) dx + c v(b) u(b) \quad \text{et} \quad L(v) = 0$$

Remarque 1.1.1. On a besoin aussi d'autres conditions sur u pour assurer l'existence et l'unicité de la solution ??

D'autre part on a fait une intégration par parties juste du terme de convection alors la solution approchée est aussi inconnue au premier noeud donc a priori on a en total $N+1$ inconnues, avec N le nombre de subdivisions. Pour le moment on suppose que le problème (3.5) admet une solution et $c > 0$.

1.1.2 Problème approché

Maintenant on considère l'espace discret V_h (sous espace de V) :

$$V_h = \{v_h \in V \ ; \ v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}1 \text{ pour } i = 0, \dots, N\}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}1$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal 1.

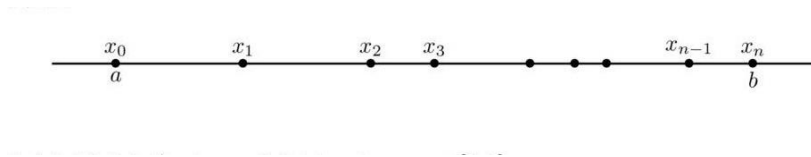


Figure 1.1. Discretisation non uniforme du domaine $[a, b]$.

On considère aussi B base de V_h , telle que :

$$B = \{\varphi_i \in V_h \ , \ \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} \ i, j = 0, \dots, N\}$$

Donc on approche (3.5) par le problème discret :

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.4)$$

Où

$$a(u_h, v_h) = \int_a^b \dot{u}_h v_h dx - \int_a^b c u_h v'_h dx + c v_h(b) u_h(b) \quad \text{et} \quad L(v_h) = 0$$

et

$$\dot{u}_h = \frac{\partial u_h}{\partial t} \quad , \quad v'_h = \frac{\partial v_h}{\partial x}$$

1.1.3 Système linéaire associé au problème discret

On a le problème (1.4) pour toute $v_h \in V_h$, alors (1.4) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad 0 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (1.5)$$

Posons :

$$u_h = \sum_{j=0}^{j=N} u_j(t) \varphi_j(x).$$

En remplaçant dans (1.5) on obtient :

$$\sum_{j=0}^{j=N} \dot{u}_j(t) \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx - \sum_{j=0}^{j=N} u_j(t) \int_a^b c \varphi_i' \varphi_j dx + c \sum_{j=0}^{j=N} u_j(t) \varphi_i(b) \varphi_j(b) = 0.$$

En définissant :

$$M_{ij} = \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx$$

$$N_{ij} = \int_a^b c \varphi_i' \varphi_j dx$$

$$R_{ij} = c \varphi_i(b) \varphi_j(b),$$

alors nous avons une EDO avec N+1 inconnus $u_j(t)$:

$$M \dot{u}_j(t) - (N - R) u_j(t) = 0.$$

Par le schéma d'Euler implicite on obtient le système linéaire suivant :

$$M \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{dt} - (N - R) u_j^n(t) = 0,$$

ou d'une manière équivalent

$$(M - (N - R)dt) u_j^n = M u_j^{n-1}. \quad (1.6)$$

1.1.4 Calcul des coefficients de la matrice

Pour calculer les matrices M , N et R il faut d'abord construire les fonction de base $\{\varphi_i\}_{0 \leq i \leq N}$. En générale on prend les fonctions *Chapeaux* qui possèdent un support compact sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

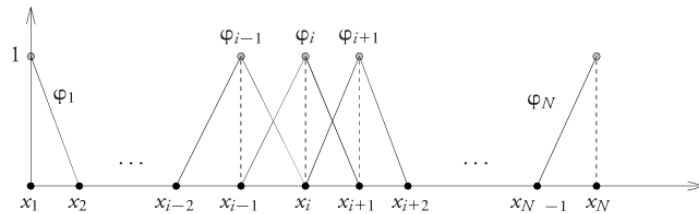


Figure 1.2. Les fonction chapeaux.

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{a+h-x}{h_0} & a \leq x \leq a+h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_N = \begin{cases} \frac{x-b+h}{h_{N-1}} & b-h \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et pour $1 \leq i \leq N-1$

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calcul M : Supposant que $1 \leq i \leq N-1$, si $i = j$, alors on a :

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \int_a^b \varphi_i^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i} \right)^2 dx, \\ &= \frac{h_{i-1}}{3} + \frac{h_i}{3}. \end{aligned}$$

On sait que $M_{ij} = 0$ si $|i-j| \geq 2$ (car l'intersection des supports est vide)

De la même manière on trouve :

$$\begin{aligned} M_{i,i+1} &= M_{i+1,i} = \int_a^b \varphi_i \varphi_{i+1} dx = h_i/6, \\ M_{00} &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 \varphi_0 dx = h_0/3, \\ M_{01} &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 \varphi_1 dx = h_0/6, \\ M_{NN} &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_N \varphi_N dx = h_{N-1}/3, \\ M_{NN-1} &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_N \varphi_{N-1} dx = h_{N-1}/6. \end{aligned}$$

D'où la matrice :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & & & 0 \\ h_1 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{N-2} & 2(h_{N-3}+h_{N-2}) & h_{N-2} \\ 0 & & & h_{N-1} & 2h_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Calcul de N : De même manière on trouve

$$N = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de R : Pour R le seule élément qui est non null est R_{NN} :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.2. Si $h_i = h$ pour $i = \{0, 1 \dots N\}$, (subdivision *uniforme*) on obtient une nouvelle matrice M :

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Étude Numérique de Problème

1.2.1 La Solution exacte

On considère le problème de transport (1.1) avec u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La solution exacte obtenue par la méthode des *caractéristiques* est donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct).$$

1.2.2 Résultats numériques

Subdivision uniforme :

Les figures ci-dessous montrent les graphes de la solution exacte et l'approchée sur l'intervalle $[-10, 10]$ avec $N=200$ et pour différents valeurs de c et dt avec $T_{\max}=5$ (temps maximal) :

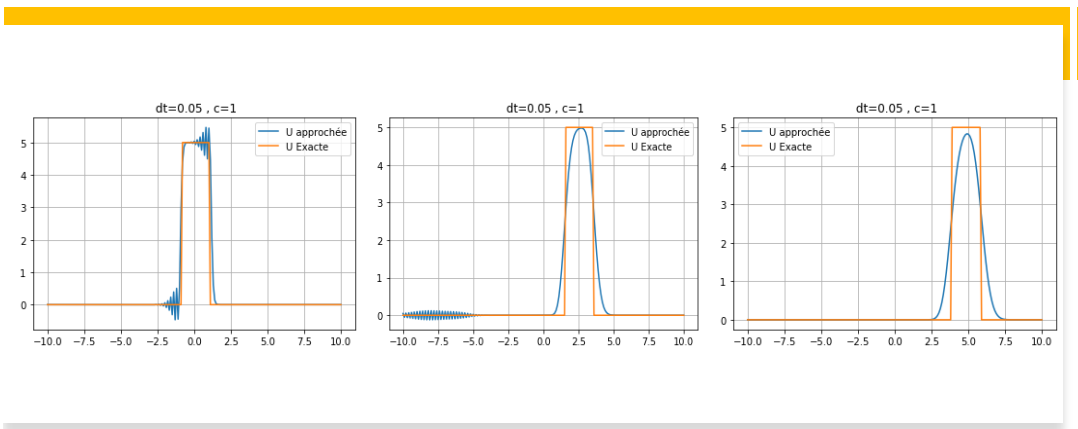


Figure 1.3. $dt=0.05$ et $c=1$.

On observe des oscillations au niveau de la solution approchée qui va disparaitre au cours du temps avec une petite diffusion

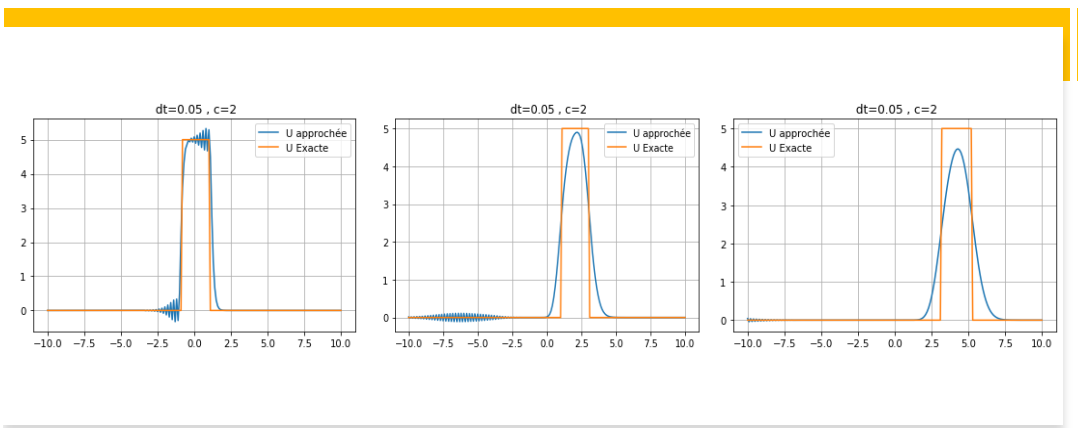


Figure 1.4. $dt=0.05$ et $c=2$.

On remarque une grande diffusion au cours du temps avec les oscillations toujours.

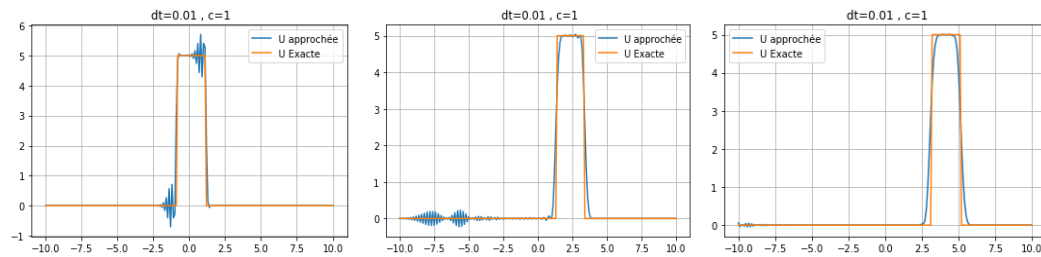


Figure 1.5. $dt=0.01$ et $c=1$.

On observe que l'amplitude des oscillation un peu grand par rapport les autres figures précédentes avec une diffusion presque négligeable.

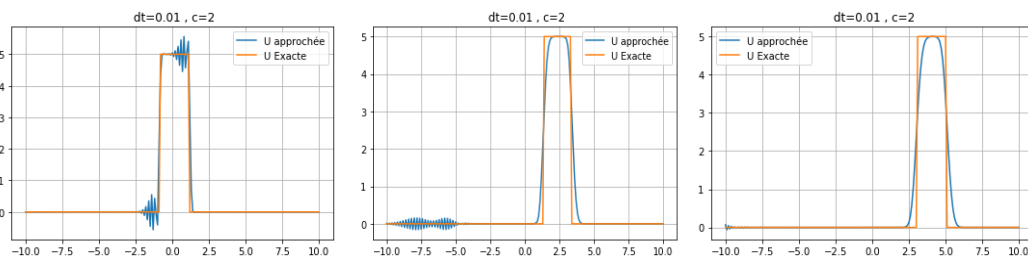


Figure 1.6. $dt=0.01$ et $c=2$.

La même chose que la figure précédente.

Subdivision non uniforme :

On va essayer avec une distribution non uniforme , on prend par exemple sur l'intervalle $[a, b]$ les points suivants :

$$x_i = \frac{a-b}{2} \cos\left((i+\alpha)\frac{\pi}{N}\right) \quad \text{pour } i = 0, 1 \dots N \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{R}$$

Les figures ci-dessous montrent les courbes de distribution des noeuds sur $[-10, 10]$

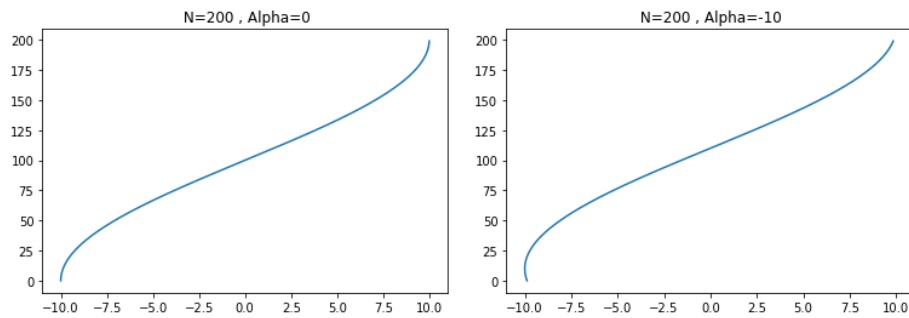


Figure 1.7. $N=200$, $\alpha = \{0, -10\}$.

Maintenant on va voir les graphes qui représentent la solution exacte et son approchée sur une distribution non uniforme.

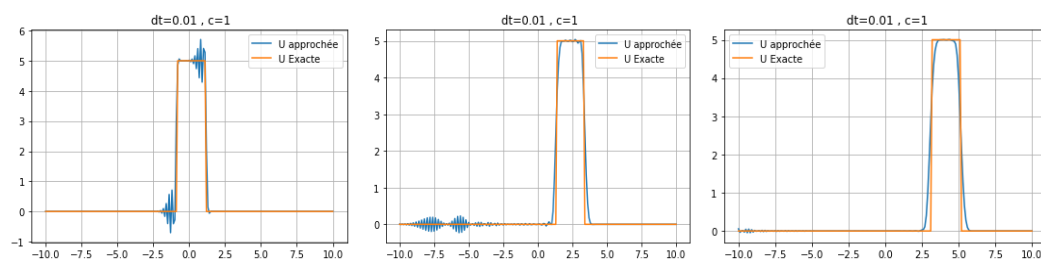


Figure 1.8. $dt=0.01$, $c=1$, $\alpha = -10$.

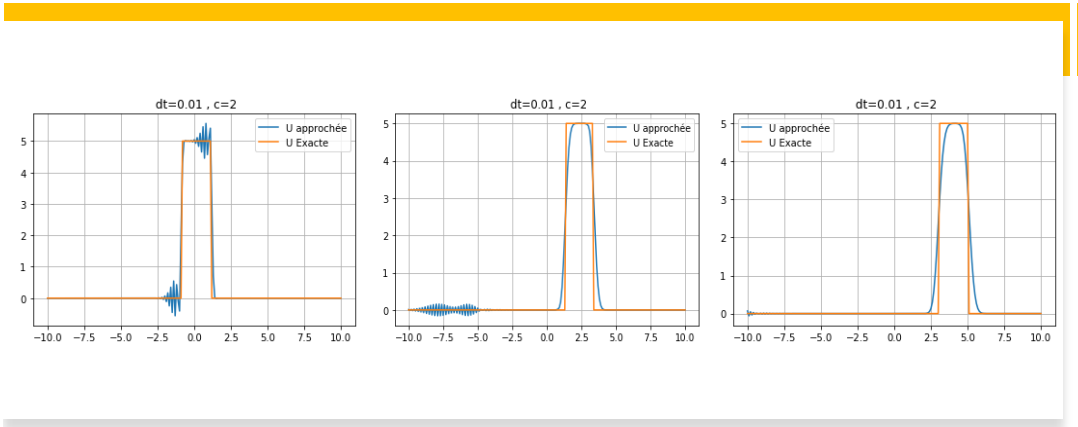


Figure 1.9. $dt=0.01$, $c=2$ et $\alpha = -10$.

Presque on a la même chose qu'une subdivision uniforme.

1.3 Étude Numérique de l'Erreur

Définition 1.3.1. On peut définir l'erreur de notre méthode par la différence entre la solution exacte et la solution approchée comme suivant :

$$Erreur = ||U_{exacte} - U_{approchée}||_{\infty}$$

Remarque 1.3.1. l'étude d'erreur sera effectué par la norme infinie au lieu de la norme H^1

1.3.1 Erreur en fonction du Temps

On garde les même valeurs qu'on a utilisé dans l'étude précédent et on va tracer l'erreur en fonction du temps :

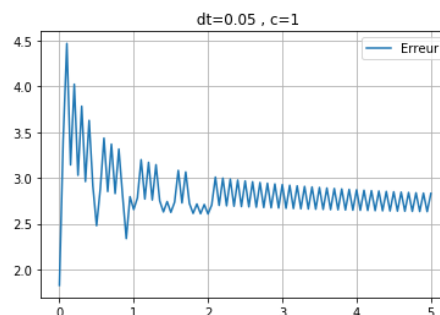


Figure 1.10. $dt=0.05$, $c=1$, $T_{max}=5$

On observe que la courbe n'est pas régulière à cause des oscillations, et la valeur d'erreur diminue avec le temps grâce à la disparition des oscillations comme déjà signalé

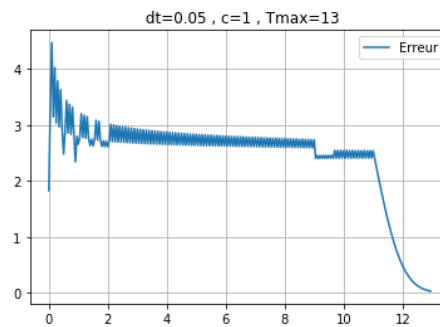


Figure 1.11. augmente le temps final (Tmax) : $dt=0.05$, $c=1$, Tmax=13

À partir d'un certain temps la courbe sera régulière ce qui montre la disparition des oscillations.

Remarque 1.3.2. *L'erreur tend vers zéro car la solution exacte et la solution approchée dépasse l'intervalle de représentation*

On représente les erreurs pour différentes valeurs de c et dt avec Tmax=5 :

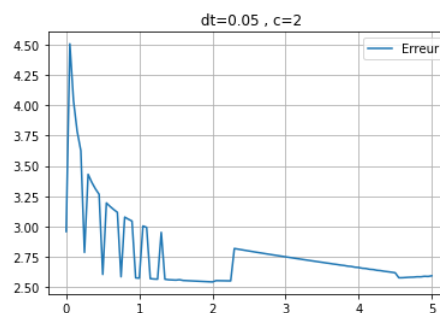


Figure 1.12. $dt=0.05$, $c=2$,

Quand c est grand on aura un peu des oscillations

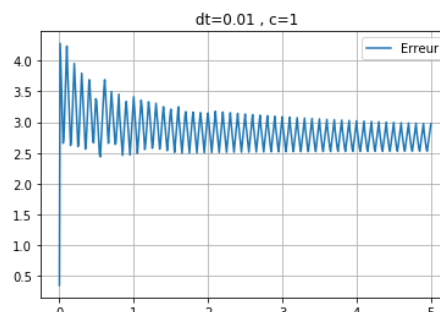


Figure 1.13. $dt=0.01$, $c=1$,

Quand l'espace de temps est petit on aura beaucoup des oscillations

Conclusion : D'après les figures précédentes on peut prédire qu'il y a une relation entre la vitesse c et le pas de temps dt et aussi le pas d'espace dx on généralise la méthode qu'on a

utilisée ne conduit pas à des résultats acceptables à cause des oscillations, alors on va chercher de stabiliser notre méthode c'est ça l'objectif du deuxième chapitre.

Chapitre 2

Résolution Numérique de l'Equation du Transport par La Méthode des EF (moindres carrés)

2.1 Étude théorique de Problème par EF (moindres carrés)

On considère l'équation de transport (1.1) qu'on a étudié dans le chapitre précédent et l'espace de sobolev $V = H^1(\Omega)$, où Ω un ouvert borné de \mathbb{R} . Dans ce chapitre on va essayer de traiter le problème par EF *moindres carrés*

2.1.1 Formulation Variationnelle de Problème

La méthodes des moindres carrés consiste à considérer le problème variationnelle suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V = H^1([a, b]) ; \text{ telle que} \\ a'(u, v) = L'(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où a' la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a'(u, v) = (Au, Av)_V &= \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x) + c \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right), \\ &= \int_a^b c \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(x) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(x), \end{aligned}$$

et

$$L'(v) = (L, Av)_V = 0.$$

Le A désigne l'opérateur :

$$A : V \ni v \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Par la suite s'il existe $\mu > 0$ tel que :

$$A \geq \mu,$$

alors on a la coercivité, en effet soit $v \in V$:

$$|a'(v, v)| = (Au, Av) \geq \mu^2 \|v\|_V^2.$$

Remarque 2.1.1. Cette condition seule est insuffisante pour prouver le caractère bien posé du problème, on a besoin aussi la *continuité* de la forme bilinéaire a' .

2.1.2 Problème approché

On considère l'espace discret V_h (sous espace de V)

$$V_h = \{v_h \in V \ ; \ v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}1 \text{ pour } i = 1, \dots, N\},$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b - a)/N$ (subdivision uniforme), $x_i = a + ih$, et $\mathbb{P}1$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal 1.



Figure 2.1. Discretisation uniforme du domaine $[a, b]$.

On considère aussi B base de V_h telle que :

$$B = \{\varphi_i \in V_h \ , \ \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} \ i, j = 1, \dots, N\}.$$

Donc on approche (2.1) par le problème discret :

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ a'(u_h, v_h) = L(v_h) \ \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.2)$$

Où

$$a'(u_h, v_h) = \int_a^b c u_h' v_h' + c^2 u_h' v_h' dx \text{ et } L'(v_h) = 0$$

et

$$u_h = \frac{\partial u_h}{\partial t}, \quad v_h' = \frac{\partial v_h}{\partial x}, \quad u_h' = \frac{\partial u_h}{\partial x}.$$

2.1.3 Système linéaire associé au problème discret

On a le problème (2.2) pour toute $v_h \in V_h$, alors (2.2) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ a'(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \ 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (2.3)$$

Posons :

$$u_h = \sum_{j=1}^{j=N} u_j(t) \varphi_j(x).$$

En remplaçant dans (2.3) on obtient :

$$\sum_{j=1}^{j=N} \dot{u}_j(t) \int_a^b c \varphi'_i \varphi_j dx + \sum_{j=1}^{j=N} u_j(t) \int_a^b c^2 \varphi'_i \varphi'_j dx = 0.$$

En définissant :

$$M_{ij} = \int_a^b c \varphi'_i \varphi_j dx$$

$$N_{ij} = \int_a^b c^2 \varphi'_i \varphi'_j dx,$$

finalement nous avons une EDO avec N inconnus $u_j(t)$. :

$$M \dot{u}(t) + N u(t) = 0$$

Par le schéma d'Euler implicite on obtient le système linéaire suivant :

$$(M + N dt) u_j^n = M u_j^{n-1}. \quad (2.4)$$

2.1.4 Calcul des coefficients de la matrice

Pour calculer les matrices M et N on referra les mêmes étapes du chapitre précédent, à la fin on trouve les matrices suivants :

$$M = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et :

$$N = \frac{c^2}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Étude Numérique de Problème

On referra la même chose que la méthode précédente, les figures ci-dessous montrent les graphes de la solution exacte et l'approchée sur l'intervale $[-10, 10]$ avec $N=200$ et pour

différents valeurs de c et dt avec $T_{\max}=5$ (temps maximal) :

Remarque 2.2.1. *il faut prendre c strictement positive.*

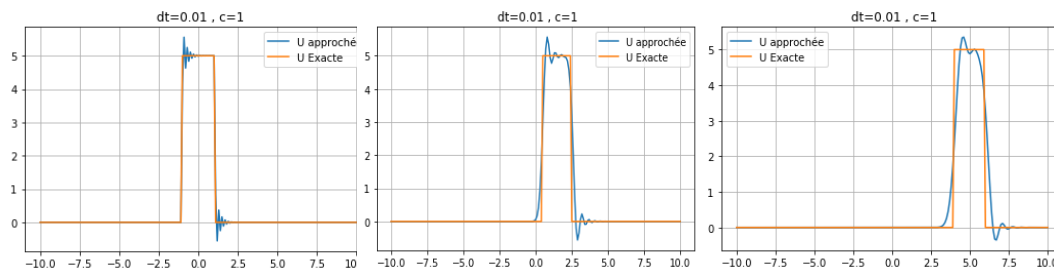


Figure 2.2. $dt=0.01$ et $c=1$.

On observe les oscillations au niveau de la solution approchée qui restent au cours du temps avec une petite diffusion

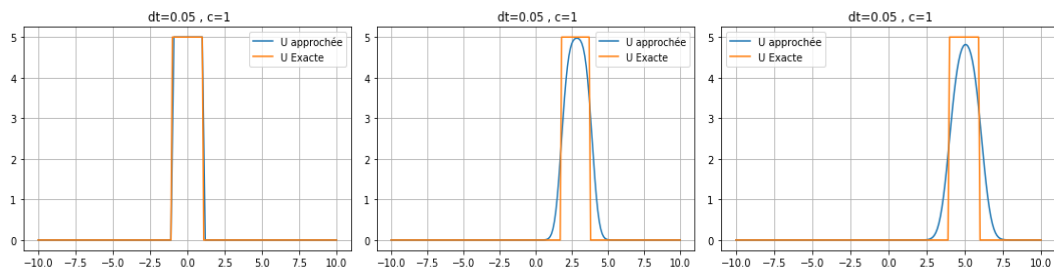


Figure 2.3. $dt=0.05$ et $c=1$.

Dans ce cas ($dt=0.05$) on observe que la diffusion.

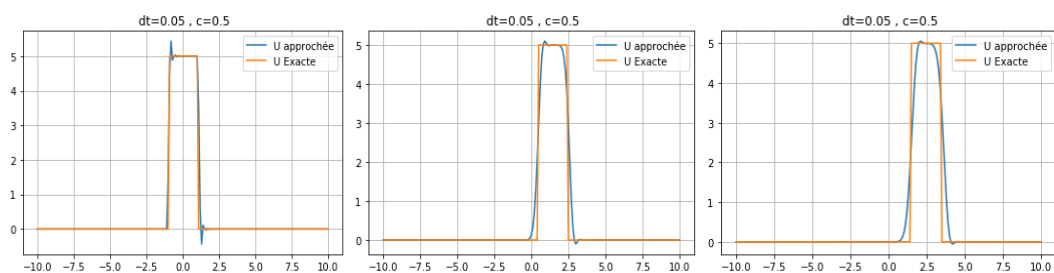


Figure 2.4. $dt=0.05$ et $c=0.5$.

On a diminué la valeur de c pour éviter la diffusion mais on aura des petites oscillations. Maintenant on fixe c et dt et on varie le pas d'espace dx .

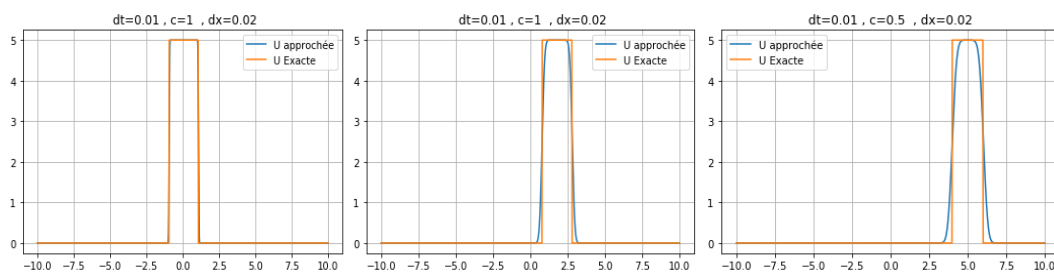
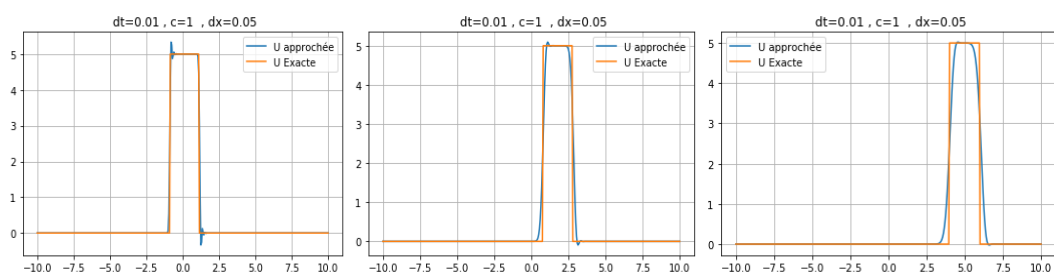


Figure 2.5. $dt=0.01$, $c=1$ et $dx=0.05, 0.02$

Quand dx est plus petit on aura presque la solution exacte avec une ptite diffusion

2.3 Étude Numérique de l'Erreur

On va essayer de contrôler l'erreur sur la norme infinie comme l'étude d'erreur précédent.

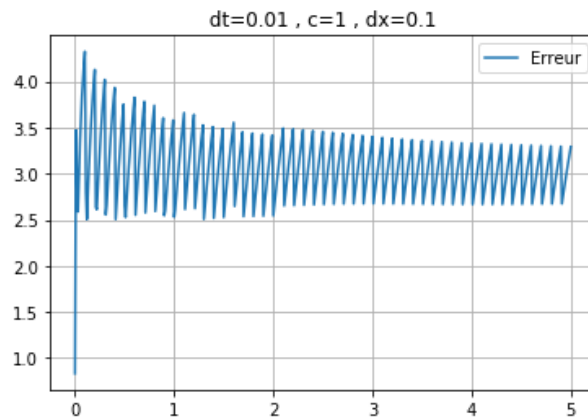


Figure 2.6. $dt=0.01$, $dx=0.1$ et $c=1$.

La figure montre l'existence des oscillations qui restent au cours du temps .

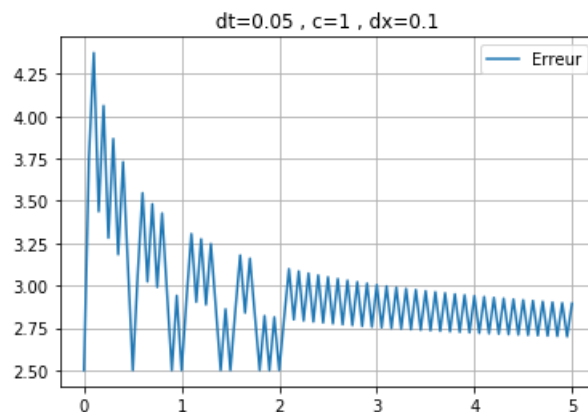


Figure 2.7. $dt=0.05$, $dx=0.1$ et $c=1$.

On augmente le pas du temps et on remarque encore les oscillations mais ils sont presque négligeable .

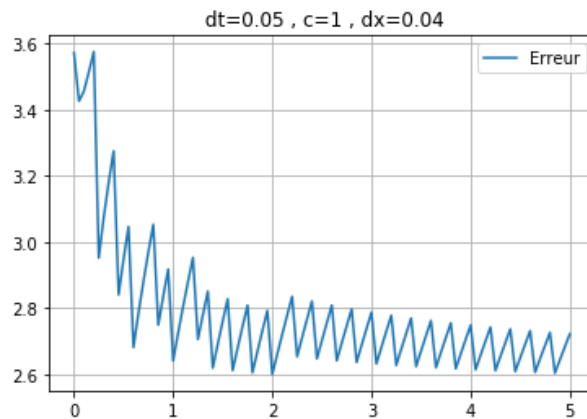


Figure 2.8. $dt=0.05$, $dx=0.04$ et $c=1$.

On observe un bon résultat si on diminue le pas de l'espace.

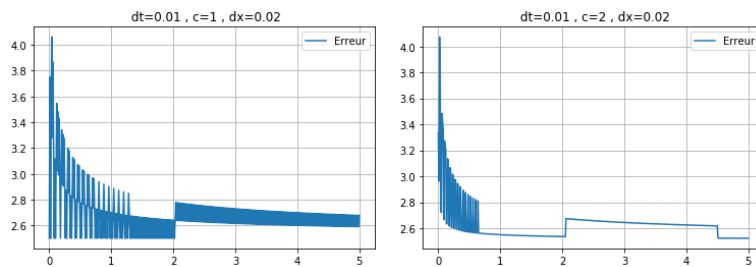


Figure 2.9. $dt=0.05$, $dx=0.02$ et $c=1,2$.

L'erreur est presque régulière à partir d'un certain temps petit et on remarque aussi la diffusion.

Conclusion : À la fin on peut dire que la méthode de moindres carrés permet de stabiliser le problème du coût on a un meilleur résultat

Chapitre 3

Résolution Numérique de l'Equation du Burger par La Méthode des Éléments finis

On s'intéresse ici à le problème simple (non linéaire) de *Burger* :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{donnée,} \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous allons chercher à résoudre cette équation au moyen de la méthode des caractéristiques. Cette tentative va échouer (du moins en ce qui concerne les solutions globales en temps). Nous introduirons alors la notion de solution faible (solution au sens des distributions). Cette notion nous permettra de prendre en compte une classe beaucoup plus grande de solutions des EDP, notamment celle des solutions discontinues.

3.1 La solution exacte de l'Équation de Burger

3.1.1 La Méthode des Caractéristiques

On considère l'équation (3.1) avec la condition initiale (*Problème de Riemann*) :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0. \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La solution (faible) u par la méthode des caractéristiques s'écrit sous la forme :

$$u(t, x) = u_0(x - \alpha t).$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer, c'est-à-dire que l'on cherche une solution en transport à la vitesse α .

Lorsque $u_g \neq u_d$ ($u_g = u_d$ est un cas trivial de solution de l'EDP), la relation de Rankine-Hugoniot donne l'expression de α :

$$\alpha = \frac{u_g + u_d}{2}.$$

Alors les solutions de l'équation de burgers avec condition initiale u_0 sont les suivants :

Si $u_g > u_d$ (*Choc* :)

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{u_g + u_d}{2}t. \\ u_d & \text{si } x > \frac{u_g + u_d}{2}t. \end{cases}$$

Sinon $u_g < u_d$ (*Détente* :)

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < u_g t. \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_g t < x < u_d t. \\ u_d & \text{si } x > u_d t. \end{cases}$$

3.1.2 La Solution Faible

On appelle solution faible de (3.1) avec $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ vérifiant pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) + \frac{u^2(t, x)}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \varphi(0, x) dx \quad (3.2)$$

En effet soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ solution de (3.1) associé à la donnée initiale u_0 , et soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \varphi(t, x) dx + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \varphi(t, x) = 0$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \varphi(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \varphi(t, x) dx dt = 0$$

En intégrant par parties et puisque φ est à support compact on aura l'équation (3.2), par conséquence la solution de l'équation de Burger est faible.

3.2 Étude théorique de Problème par EF

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R} (i.e $\Omega =]a, b[$). On considère le problème burger aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{donnée,} \\ u(t, a) = ug. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.1 Formulation Variationnelle de Problème

On prend v comme fonction de test suffisamment régulière qui dépend seulement de la variable x . En multipliant l'équation (3.3) par v , on obtient :

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) v(x) dx + \int_a^b u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) v(x) dx = 0. \quad (3.4)$$

Pour donner un sens aux intégrales de l'équation (1.2) on prend l'espace :

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \quad v(t, a) = ug\}.$$

Finalement, la formulation variationnelle du problème (3.3) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V ; \text{ telle que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.5)$$

Où

$$a(u, v) = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) v(x) dx + \int_a^b u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) v(x) dx, \quad \text{et } L(v) = 0$$

Remarque 3.2.1. On a besoin aussi d'autres conditions sur u pour assurer l'existence et l'unicité de la solution ??

3.2.2 Problème approché

Maintenant on considère l'espace discret V_h (sous espace de V) :

$$V_h = \{v_h \in V ; \quad v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}1 \text{ pour } i = 0, \dots, N\},$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b - a)/N$, $x_i = a + ih$ et $\mathbb{P}1$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal 1.



Figure 3.1. subdivision uniforme

On considère aussi B base de V_h , telle que :

$$B = \{\varphi_i \in V_h, \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, N\}.$$

Donc on approche (3.5) par le problème discret :

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Où

$$a(u_h, v_h) = \int_a^b \dot{u}_h v_h dx + \int_a^b u_h u'_h v_h dx = 0 \quad \text{et} \quad L(v_h) = 0,$$

et

$$\dot{u}_h = \frac{\partial u_h}{\partial t}, \quad u'_h = \frac{\partial v_h}{\partial x}.$$

3.2.3 Système linéaire associé au problème discret

On a le problème (3.6) pour toute $v_h \in V_h$, alors (3.6) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} u_h \in V_h, \\ a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (3.7)$$

Posons :

$$u_h = \sum_{j=1}^{j=N} u_j(t) \varphi_j(x).$$

En remplaçant dans (3.7) on obtient :

$$\sum_{j=1}^{j=N} \dot{u}_j(t) \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{j=1}^{j=N} \left(\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{k=N} u_k(t) \varphi_k \right) \varphi_i \varphi'_j dx \right) u_j(t) = 0.$$

En définissant :

$$M_{ij} = \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx$$

$$N_{ij}(u_k) = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{k=N} u_k(t) \varphi_k \right) \varphi_i \varphi'_j dx$$

finalment nous avons une EDO non linéaire avec N inconnus $u_j(t)$:

$$M \dot{u}_j(t) + N(u_k) u_j(t) = 0.$$

Effectuant un schéma semi-implicite on obtient le système linéaire suivant :

$$M \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + N(u_k^n) u_j^{n+1} = 0 \quad (3.8)$$

3.2.4 Calcul des coefficients de la matrice

Pour calculer les matrices M et N on referra les mêmes étapes des chapitres précédents, On a :

$$M_{ij} = \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx.$$

D'après le chapitre I on a :

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2.2. La matrice M est de dimension $N \times N$.

Pour la matrice N on a :

$$N_{00} = \int_{x_0}^{x_1} u_0 \varphi_0 \varphi_0' dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1 \varphi_1 \varphi_0' dx = \frac{-1}{3} u_0 - \frac{1}{6} u_1.$$

$$N_{01} = \int_{x_0}^{x_1} u_0 \varphi_0 \varphi_1' dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1 \varphi_1 \varphi_1' dx = \frac{1}{3} u_0 + \frac{1}{6} u_1.$$

Pour $1 \leq i \leq N-1$ on a :

$$N_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{i-1} \varphi_{i-1} \varphi_i' dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i \varphi_i \varphi_i' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i \varphi_i \varphi_i' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_{i+1} \varphi_{i+1} \varphi_i' dx = \frac{1}{6} u_{i-1} - \frac{1}{6} u_{i+1}.$$

$$N_{ii+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i \varphi_i \varphi_{i+1}' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_{i+1} \varphi_{i+1} \varphi_{i+1}' dx = \frac{1}{3} u_i + \frac{1}{6} u_{i+1}.$$

$$N_{ii-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{i-1} \varphi_{i-1} \varphi_i' dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i \varphi_i \varphi_{i-1}' dx = -\frac{1}{3} u_i - \frac{1}{6} u_{i-1}.$$

Et

$$N_{NN} = \int_{x_{N-1}}^{x_N} u_{N-1} \varphi_{N-1} \varphi_N' dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} u_N \varphi_N \varphi_N' dx = \frac{1}{3} u_N + \frac{1}{6} u_{N-1}.$$

Donc la matrice N de dimension $N \times N$ est :

$$N(u) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} u_0 - u_2 & 2u_1 + u_2 & & & 0 \\ -2u_2 - u_1 & u_1 - u_3 & 2u_2 + u_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -2u_{N-1} - u_{N-2} & u_{N-2} - u_N & 2u_{N-1} + u_N \\ 0 & & & -2u_N - u_{N-1} & 2u_N + u_{N-1} \end{pmatrix}$$

3.3 Étude Numérique de problème

3.3.1 Choc :

On prend u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Nous avons un problème de Riemann à l'état de choc alors d'après la section précédente la solution exacte par la méthode des caractéristiques est donnée par :

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

Les figures ci-dessous montrent les graphes de la solution exacte l'approchée sur l'intervalle $[-10, 10]$ pour différents valeurs de dx et dt avec $T_{\max}=5$ (temps maximal) :

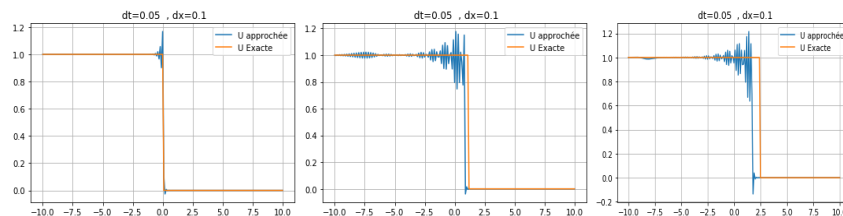
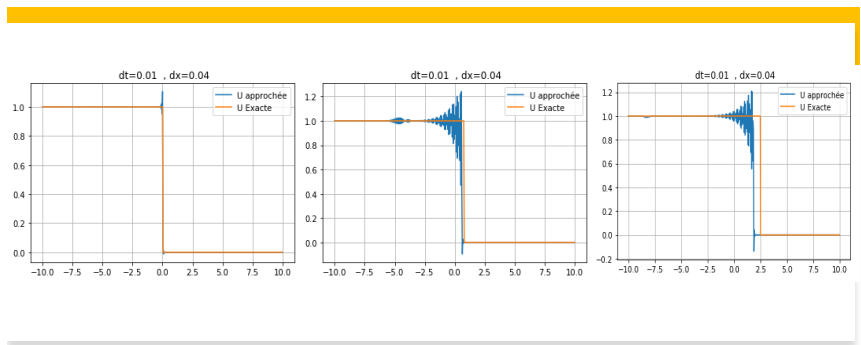
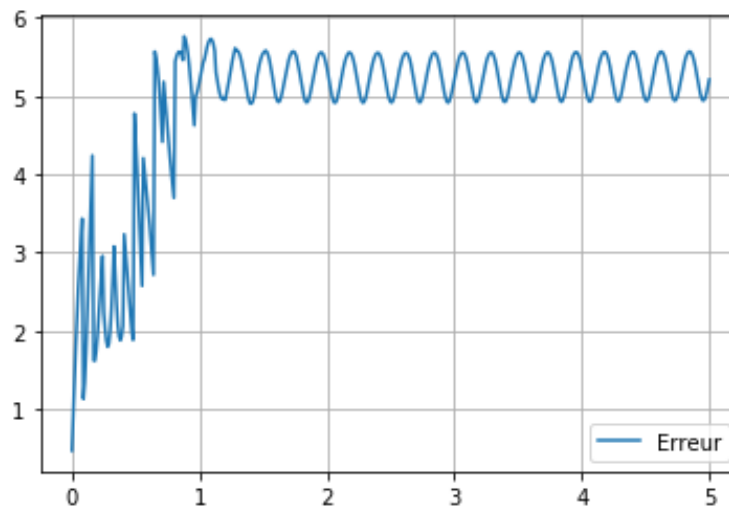


Figure 3.2. $dt=0.05$ et $dx=0.1$

Figure 3.3. $dt=0.01$ et $dx=0.04$

On observe les oscillations au choc et une petite diffusion de la solution approchée. On trace l'erreur en norme H^1 pour la dernière figure :

Figure 3.4. Erreur pour : $dt=0.01$ et $dx=0.04$

3.3.2 Détente :

On prend u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nous avons un problème de Riemann à l'état de détente alors la solution exacte par la méthode des caractéristiques est donnée par :

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases}$$

Les figures ci-dessous montrent les graphes de la solution exacte et son approchée sur l'intervalle $[-10, 10]$ pour différents valeurs de dx et dt avec $T_{\max}=5$ (temps maximal) :

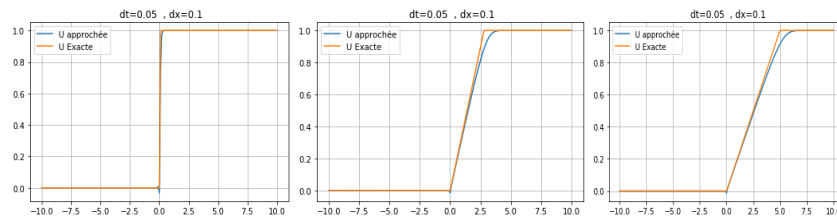


Figure 3.5. $dt=0.05$ et $dx=0.1$

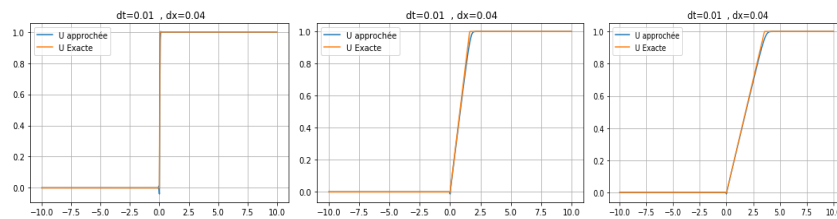


Figure 3.6. $dt=0.01$ et $dx=0.04$

Dans ce cas nous avons une meilleure l'approximation avec une petite diffusion. On trace l'erreur en norme H^1 pour la dernière figure :

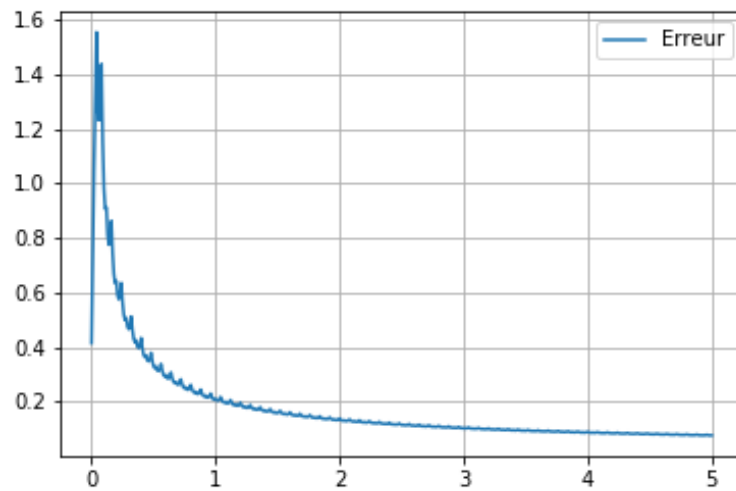


Figure 3.7. Erreur pour : $dt=0.01$ et $dx=0.04$

Conclusion : Dans le cas de Choc on obtient des oscillations de la solution numérique par contre le cas de Detente on observe que la diffusion.

Conclusion

Nous avons donc rencontré, en pratique, deux types de difficultés avec la méthode des éléments finis.

1. L'approximation des fonctions discontinues (choc) par des fonctions régulières (continues). Dans ce cas, on obtient des oscillations de la solution numérique mais celles-ci restent généralement bornées.
2. Les effets diffusifs vont plutôt jouer sur les petites échelles de longueur et les grandes échelles de temps, ils ont un effet régularisant sur les solutions trouvées.

On peut traiter le problème des oscillations par la méthode des moindres carrés.

Bibliographie

- [1] Alexandre Ern-Éléments finis-dunod (2005)
- [2] C.Brenner , L.Ridgway Scott-The Mathematical Theory of Finite Element Methods
- [3] R.Bank, J.Stoer-Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems