

Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

USTHB

Jeudi 25 Juin

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil
 - Conservation
- Types de réseaux de Petri
 - Réseaux de Petri généralisés
 - Réseaux de Petri à capacités
 - Graphe de marquage
- Arborescence de couverture
 - Algorithme de construction d'un graphe de marquage

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)
Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Définition générale

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)
Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Rappel d'histoire

Les réseaux de Petri ont été inventés par le mathématicien allemand Carl Alain Petri dans les années 1960.

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

- 1 Introduction
- 2 Notations et règles de franchissement
 - Places, Transitions et Arcs
 - Marquages
 - Franchissement
 - Réseaux particuliers
- 3 Propriétés des réseaux de Petri
 - Graphe de Marquage Accessible (GMA)
 - Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
 - Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Définitions

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe

Remarques

- Une place (p_i) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (t_i) modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés

Remarques

- Une place (p_i) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (t_i) modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

Remarques

- Une place (p_i) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (t_i) modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

Remarques

- Une place (**pi**) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (**ti**) modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

Remarques

- Une place (**pi**) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (**ti**) modélise les actions sur les ressources.

Exemples

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

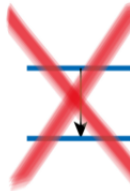
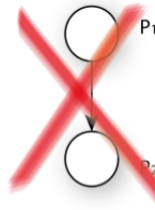
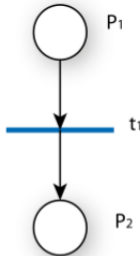
Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

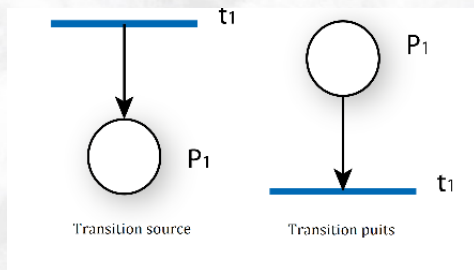
Exemples

la place p_1 est en entrée de la transition t_1 et p_2 est en sortie de t_1 .



Remarques

- Une transition sans place en entrée est une transition source.
- Une transition sans place en sortie est une transition puits.



Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- **Marquages**
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Marquage

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages

Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

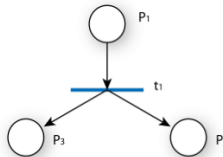
Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Le Marquage

Chaque place (pi) d'un RdP peut contenir un ou plusieurs marqueurs (jetons).

La configuration complète du réseau, avec toutes les marques positionnées, forme le marquage et définit l'état du réseau (et donc l'état du système modélisé).



- P1 ,P2,P3 sont des places .
- T1 est une transition qui permet de passer de P1 vers Deux places P2 et P3 .

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Franchissement

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

- 1 le franchissement est une opération indivisible (atomique)

Franchissement

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

- ❶ le franchissement est une opération indivisible (atomique)
- ❷ un jeton est consommé dans chaque place en entrée

Franchissement

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

- ❶ le franchissement est une opération indivisible (atomique)
- ❷ un jeton est consommé dans chaque place en entrée
- ❸ un jeton est produit dans chaque place en sortie

Exemples de franchissement

Voici des exemples de franchissement avec deux réseaux différents.



Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement

Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Graphe d'état

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement

Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Il existe des réseaux particuliers on va dans la suite de ce cours citer quelques uns .

Graphe d'état

un graphe d'état a une particularité qui est relative à ses transitions tel que , chaque transition ne dispose que d'une place en entrée et une place en sortie.



Réseau sans conflit

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

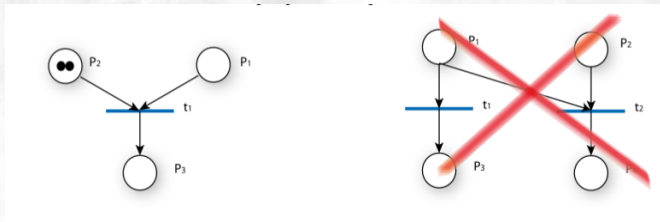
Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
**Réseaux
particuliers**

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)
Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Réseau sans conflit

Un réseau sans conflit est un réseau où chaque place n'a qu'une transition en sortie.



Réseau simple

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement

Réseaux particuliers

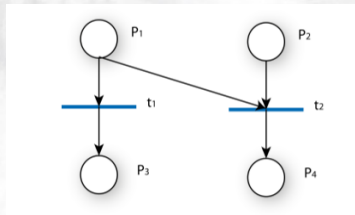
Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Réseau simple

Les réseaux dits simples sont des réseaux avec conflit(s) où chaque transition n'intervient au plus que dans une situation de conflit.



Les Graphes purs

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)
Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Graphe pur

Les Graphes purs sont ceux dont aucune place n'est à la fois en entrée ou en sortie de la même transition.



Notions et règles de franchissement

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage
Accessible (GMA)
Le vecteur d'occurrence
et l'équation de
changement
d'état

Définition

Un réseau de Petri est défini par le tuple $(P, T, Pré, Post, M_0)$

- **P** : ensemble de places p_i
- **T** : ensemble de transitions
- **Pré** : $Pré(p, t)$ est une valeur (≥ 0) associée à l'arc allant de la place p à la transition t
- **Post** : $Post(p, t)$ est une valeur (≥ 0) associée à l'arc allant de la transition t à la place p
- M_0 : vecteur décrivant le marquage initial, $M_0 = (M_0(p_1), \dots, M_0(p_n))$. nombre de jetons dans la place p_1

Notions et règles de franchissement

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

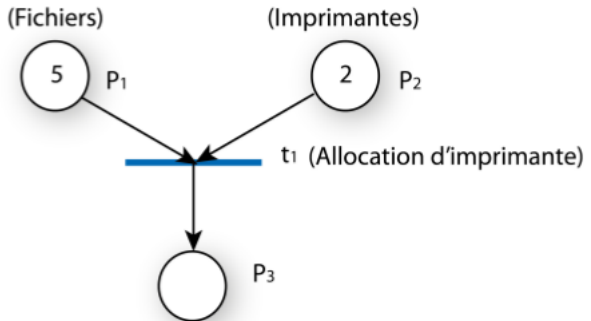
Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Exemple Soit $P = p_1, p_2, p_3$ où p_1 représente la ressource 'fichier', p_2 la ressource 'imprimante' et p_3 la ressource « fichiers en cours d'impression ». On peut définir le RP suivant dans son état initial (par exemple).



Exemple

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement

Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

On a :

$$\text{Pré}(p_1, t) = 1 \text{ (p donne le poids sur l'arc)}$$

$$\text{Pré}(p_2, t) = 1 ;$$

$$\text{Pré}(p_3, t) = 0$$

$$\text{Post}(p_1, t) = 0 ;$$

$$\text{Post}(p_3, t) = 0 ;$$

$$\text{Post}(p_3, t) = 1$$

$$M_0 = (M_0(p_1), M_0(p_2), M_0(p_3)) = (5, 2, 0)$$

Remarque :

dans le cas général, $\text{Pré}(p, t)$ représente le nombre de ressources de type p consommées par la transition t , et $\text{Post}(p, t)$ représente le nombre de ressources de type p produites suite au tir de la transition t . $M(p)$ indique le marquage de la place p (nombre de jetons contenus dans p).

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Propriétés des réseaux de Petri

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)
Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

À partir du marquage initial, le réseau de Petri peut évoluer si les conditions sont vérifiées.

Exemple (se référer à l'exemple précédent) :

Soit $M_0 = (5, 2, 0)$ Après le franchissement (tir) de la transition t , on utilisera un fichier et une imprimante (car $\text{Pré}(p_1, t) = 1$ et $\text{Pré}(p_2, t) = 1$) et on aura un fichier en cours d'impression .

le marquage deviendra alors :

$$M_1 = (4, 1, 1)$$

Après un deuxième tir de la transition t , on obtiendra :

$$M_2 = (3, 0, 2).$$

On ne peut plus effectuer un autre tir de t , car $M_2(p_2) = 0$.

Dans le cas général, pour un marquage M , une transition t est tirable si et seulement si pour tout $p \in P$, on a : $M_p \geq \text{Pré}(p, t)$ La franchissabilité (ou la sensibilisation ou le tir) d'une transition t pour le marquage M se note : $M[t>$.

Si le marquage résultant est M' , alors on note : $M[t>M'$.

suite exemple

Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Dans l'exemple précédent : $M_0 [t > M_1$; $M_1 [t > M_2$ et t n'est pas tirable pour M_2 car $M_2(p_2) < \text{Pré}(p_2, t)$.

Soit M un marquage : $M = (M(p_1), M(p_2), \dots)$

Notons:

C^- la matrice des Prés telle que : $C^-(ij) = \text{Prés}(p_i, t_j)$

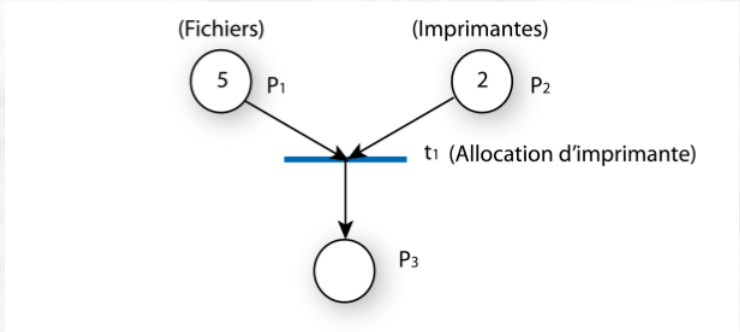
C^+ la matrice des Posts telle que : $C^+(ij) = \text{Posts}(p_i, t_j)$

$$C = C^+ - C^-$$

Toujours dans l'exemple précédent on a :

$$C^- = \text{Pré} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C^+ = \text{Post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

suite exemple(fichiers imprimantes)



Ainsi, avec cette notation, pour un marquage M , une transition t_i est tirable si et seulement si :

$M \geq {}^iC^-$, où ${}^iC^-$ est le vecteur colonne i de la matrice C^- .

suite exemple(fichiers imprimantes)

Exemple (précédent suite)

M_1 est tirable car $[4, 1, 1] \geq [1, 1, 0]$ c.-à-d $M_1 \geq t_1 C^- M_2$
 M_2 [3, 0, 2] n'est pas supérieur à $C^- [1, 1, 0]$

- - Le tir d'une transition t ou un marquage M conduit à un nouveau marquage M_0 défini par : $\forall p \in P, M_0(p) = M(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t)$ où $M_0 = M - {}^tC^- + {}^tC^+ = M + {}^tC$

Application

$$M_1 = M_0 - {}^tC^- + {}^tC^+$$

$$M_1 = [5, 2, 0] - [1, 1, 0] + [0, 0, 1]$$

$$M_1 = [4, 1, 1]$$

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

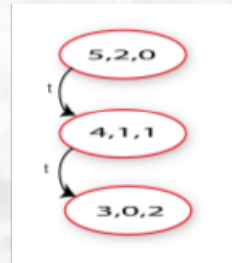
Définition

Un marquage sera dit accessible si on peut l'atteindre à partir du marquage initial, soit directement (avec un seul tir), soit indirectement (avec plusieurs tirs). On note A l'ensemble des marquages accessibles d'un réseau de Petri.

Exemple (précédent: fichiers & imprimantes) :

$A = M_0, M_1, M_2$

Le graphe des marquages accessibles:



Grphe de Marquage Accessible (GMA)

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

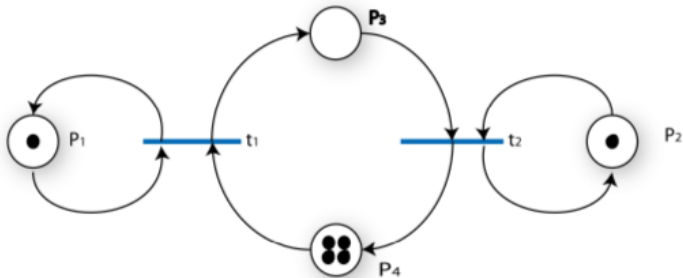
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Grphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Application Considérons le réseau de Petri suivant :



Application (suite)

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphes de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

soit $T = (t_1, t_2)$, on a:

$$C^- = \text{Pré} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^+ = \text{Post} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = C^+ - C^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^tC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

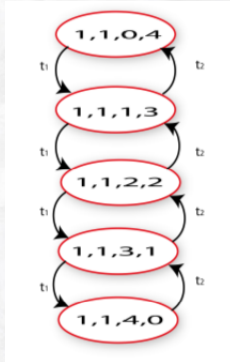
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Application(suive)



avec $M_0 = (1, 1, 0, 4)$

On peut avoir les autres marquages accessibles, exemple : $M_0 [t_1 > M_1$ car $[1, 1, 0, 4] > [0, 0, 1, -1]$

Donc : $M_1 = M_0 + {}^tC = [1, 1, 0, 4] + [0, 0, 1, -1] = [1, 1, 1, 3]$ etc.

Le graphe des marquages accessibles :

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

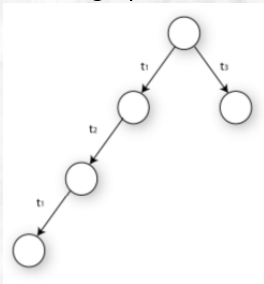
Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Soit T^* l'ensemble de transitions $T^* = t_1, t_2, \dots, t_n$
Soit S une séquence de transitions ($S \in T^*$) ; $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}(t))_t$
où $\vec{\sigma}(t)$ est le nombre d'occurrences de t dans S .

Exemple 1 :

Soit le graphe de marquage ci-dessous,



avec $T = t_1, t_2, t_3$.

Considérons la séquence $\vec{\sigma} = t_1 t_2 t_3$
Alors le vecteur d'occurrences
 $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}(t_1), \vec{\sigma}(t_2), \vec{\sigma}(t_3))$
est $\vec{\sigma} = (2, 1, 0)$

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Ainsi, à partir d'un marquage M , on peut tirer une séquence de transitions σ , et on trouve le marquage M' .

L'équation de changement d'état est alors donnée comme suit :

$$M_0 = M + C \cdot \vec{\sigma}$$

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

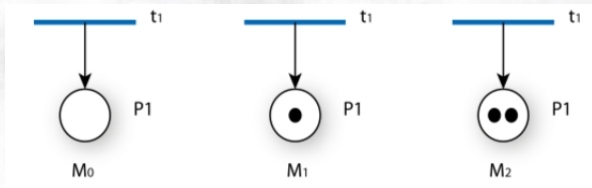
Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Grphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Exemple 2 : le franchissement d'une transition « source » consiste à rajouter un jeton à chacune des places en sortie.



Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

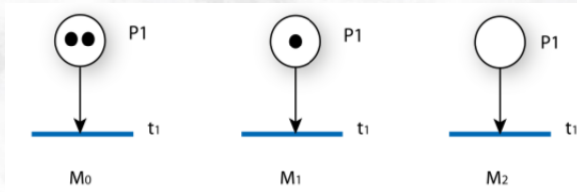
Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Exemple 3 : le franchissement d'une transition « puits » consiste à retirer un jeton de chacune de ses places en entrée.



Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Exemple 4 :

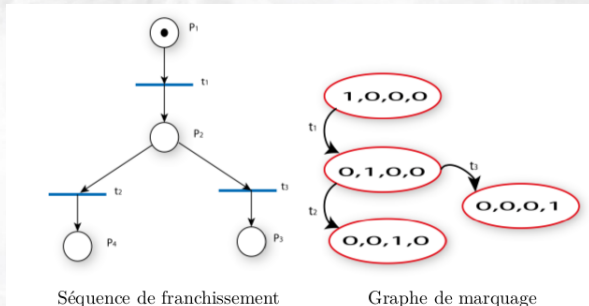
séquence de franchissement :

$M_0 [t_1 > M_1$ avec $M_1 = (0, 1, 0, 0)$

$M_0 [t_1 t_2 > M_2$ avec $M_2 = (0, 0, 0, 1)$

$M_0 [t_1 t_3 > M_3$ avec $M_3 = (0, 0, 0, 1)$

Ensemble des marquages accessibles : $M^* = M_0, M_1, M_2, M_3$



Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

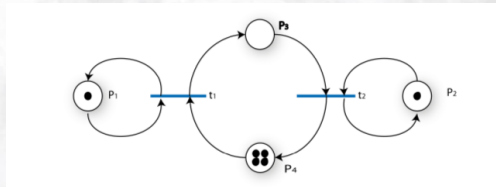
Quelques propriétés qualitatives: Bornitude

Définition: Bornitude

Une place sera dite k-bornée si $\forall M, M(p) \leq k$

Exemple (précédent):

- $M_0(p1) = M_1(p1) = M_2(p1) = M_3(p1) = M_4(p1) = 1$
donc p1 est 1-bornée
- la place p4 est 4-bornée



Bornitude(suite)

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Pétri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

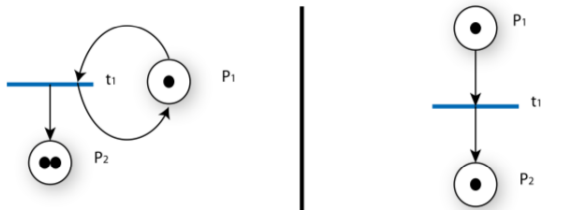
Un réseau de Petri est borné s'il existe une valeur k telle que :

$$\forall M, \forall p, M(p) \leq k$$

Remarque

Pour que le réseau soit borné, il faut que son ensemble de marquages accessibles A soit fini (sinon, le réseau n'est pas borné).

Exemple :



Quelques propriétés qualitatives: Pseudo-vivacité

Pseudo-vivacité

Définition

Le réseau de Petri est pseudo-vivant si $\forall M, \exists t / M[t >$ c.-à-d. pour tout marquage, il existe au moins une transition tirable à partir de ce marquage.

Ainsi, le GMA d'un RdP pseudo-vivant possède au moins un arc (transition) sortant de chaque état (marquage).

Remarque

Un réseau pseudo vivant n'a pas de marquage puits (ou mort) c.-à-d. un marquage sans transition tirable. Donc s'il y a un marquage à partir duquel on ne peut pas tirer une transition alors le réseau n'est pas pseudo-vivant.

Quelques propriétés qualitatives: Quasi-vivacité

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Définition : Quasi-vivacité

Un réseau est quasi-vivant si : $\forall t, \exists M/M [t >$ c-à-d que pour toute transition, il existe au moins un marquage à partir duquel on peut tirer cette transition.

Ainsi, la quasi-vivacité désigne la possibilité de franchir au moins une fois chaque transition.

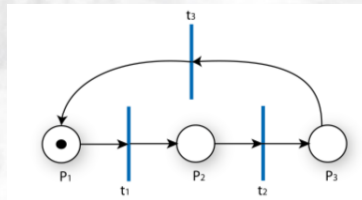
Quelques propriétés qualitatives: Vivacité

Vivacité

Définition

Un RdP est vivant s'il est pseudo-vivant et quasi-vivant.

Exemple:



Réseau vivant.

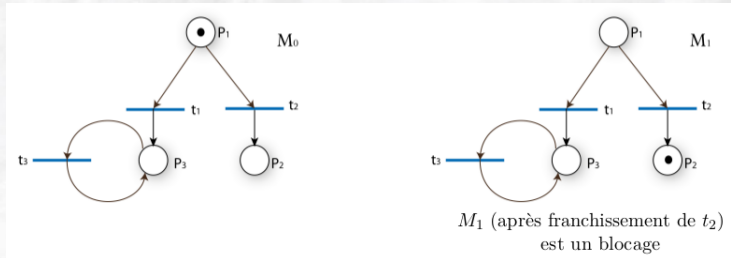
Quelques propriétés qualitatives: Réseau sans blocage

Réseau sans blocage

Définition

Un RdP est dit sans blocage s'il n'a pas de marquage puits (mort).

Exemple:



Quelques propriétés qualitatives: Etat d'accueil

Etat d'accueil

Définition

Un RdP admet un état d'accueil M_a si

$$:\forall M \in A, \exists \sigma \in T^* / M[\sigma > M_a.$$

c.-à-d. un marquage d'accueil M_a est tel qu'on peut lui accéder à partir de n'importe quel autre marquage M via une séquence de transition σ .

Remarque 1:

Un état d'accueil est accessible quelque soit l'évolution du réseau.

Quelques propriétés qualitatives: Etat d'accueil

Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places,
Transitions et
Arcs
Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

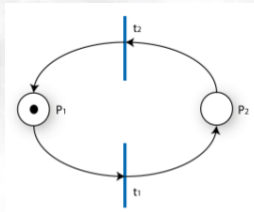
Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Remarque 2:

Si le marquage initial (M_0) est un marquage d'accueil, alors le réseau est dit réinitialisable.

Exemple:



Réseau réinitialisable

Définition: Réseau de Petri conservatif

Un réseau de Petri est conservatif si :

$$\forall M, \sum_{i=1}^{size(P)} M_0(p_i) = \sum_{i=1}^{size(P)} M(p_i)$$

Exemple :

Considérons le RdP tel que :

$$M_0 = [5, 8, 3] ; 5+8+3=16$$

$$M_1 = [4, 6, 6] ; 4+6+6=16$$

$$M_2 = [3, 7, 6] ; 3+7+6=16$$

Ce réseau est dit conservatif.

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Les Réseaux
de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés
des réseaux
de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Les Réseaux
de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés
des réseaux
de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Les Réseaux de Pétri

**Mourad
Daoudi**

Introduction

Notations et règles de franchisse- ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement

Réseaux
particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Les Réseaux de Pétri

**Mourad
Daoudi**

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés
des réseaux
de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Sommaire

Les Réseaux de Pétri

Mourad
Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages Franchissement Réseaux particuliers

Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

1 Introduction

2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
 - Bornitude
 - Pseudo-vivacité
 - Quasi-vivacité
 - Vivacité
 - Réseau sans blocage
 - Etat d'accueil

Les Réseaux de Pétri

**Mourad
Daoudi**

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés
des réseaux
de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état

Les Réseaux de Pétri

**Mourad
Daoudi**

Introduction

Notations et
règles de
franchisse-
ment

Places,
Transitions et
Arcs

Marquages
Franchissement
Réseaux
particuliers

Propriétés
des réseaux
de Petri

Graphe de
Marquage
Accessible
(GMA)

Le vecteur
d'occurrence
et l'équation
de
changement
d'état