

# Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

USTHB

Jeudi 25 Juin

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil
  - Conservation
- Types de réseaux de Petri
  - Réseaux de Petri généralisés
  - Réseaux de Petri à capacités
  - Graphe de marquage
- Arborescence de couverture
  - Algorithme de construction d'un graphe de marquage

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

Notations et  
règles de  
franchisse-  
ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Définition générale

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

Notations et  
règles de  
franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)  
Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Rappel d'histoire

Les réseaux de Petri ont été inventés par le mathématicien allemand Carl Alain Petri dans les années 1960.

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)  
Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement Réseaux particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

- 1 Introduction
- 2 Notations et règles de franchissement
  - Places, Transitions et Arcs
  - Marquages
  - Franchissement
  - Réseaux particuliers
- 3 Propriétés des réseaux de Petri
  - Graphe de Marquage Accessible (GMA)
  - Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
  - Quelques propriétés qualitatives
    - Bornitude
    - Pseudo-vivacité
    - Quasi-vivacité
    - Vivacité
    - Réseau sans blocage
    - Etat d'accueil

# Définitions

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchisse- ment

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement Réseaux particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe

## Remarques

- Une place ( $p_i$ ) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition ( $t_i$ ) modélise les actions sur les ressources.

# Définitions

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement Réseaux particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés

## Remarques

- Une place ( $p_i$ ) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition ( $t_i$ ) modélise les actions sur les ressources.



# Définitions

## Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

## Remarques

- Une place ( $p_i$ ) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition ( $t_i$ ) modélise les actions sur les ressources.

# Définitions

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement Réseaux particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

## Remarques

- Une place (**pi**) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (**ti**) modélise les actions sur les ressources.

# Définitions

## Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

## Remarques

- Une place (**pi**) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (**ti**) modélise les actions sur les ressources.

# Exemples

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement Réseaux particuliers

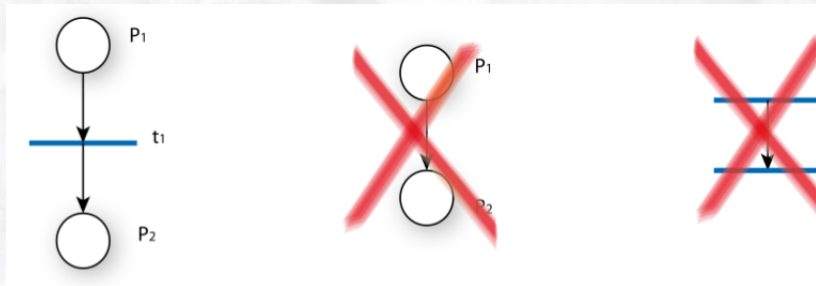
### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

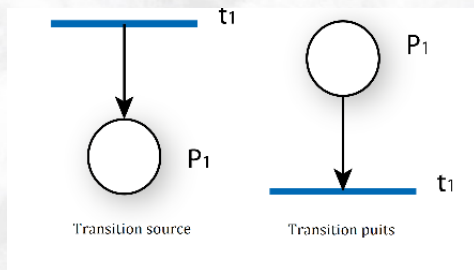
## Exemples

la place  $p_1$  est en entrée de la transition  $t_1$  et  $p_2$  est en sortie de  $t_1$ .



## Remarques

- Une transition sans place en entrée est une transition source.
- Une transition sans place en sortie est une transition puits.



# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

**Marquages**  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- **Marquages**
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Marquage

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

### Marquages

Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

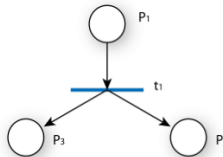
Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Le Marquage

Chaque place ( $pi$ ) d'un RdP peut contenir un ou plusieurs marqueurs (jetons).

La configuration complète du réseau, avec toutes les marques positionnées, forme le marquage et définit l'état du réseau (et donc l'état du système modélisé).



- P1 ,P2,P3 sont des places .
- T1 est une transition qui permet de passer de P1 vers Deux places P2 et P3 .

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages

### Franchissement

Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- **Franchissement**
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil



# Franchissement

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchisse- ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages

### Franchissement

Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

- 1 le franchissement est une opération indivisible (atomique)

# Franchissement

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

### Marquages

### Franchissement

Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

- 1 le franchissement est une opération indivisible (atomique)
- 2 un jeton est consommé dans chaque place en entrée

# Franchissement

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchisse- ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
**Franchissement**  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

- ❶ le franchissement est une opération indivisible (atomique)
- ❷ un jeton est consommé dans chaque place en entrée
- ❸ un jeton est produit dans chaque place en sortie

# Exemples de franchissement

Voici des exemples de franchissement avec deux réseaux différents.



# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement

### Réseaux particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Graphe d'état

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement

## Réseaux particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

Il existe des réseaux particuliers on va dans la suite de ce cours citer quelques uns .

## Graphe d'état

un graphe d'état a une particularité qui est relative à ses transitions tel que , chaque transition ne dispose que d'une place en entrée et une place en sortie.



# Réseau sans conflit

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

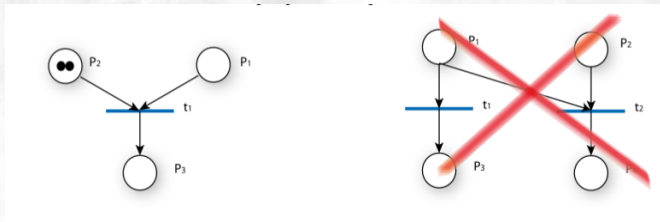
Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
**Réseaux  
particuliers**

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)  
Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Réseau sans conflit

Un réseau sans conflit est un réseau où chaque place n'a qu'une transition en sortie.



# Réseau simple

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement

### Réseaux particuliers

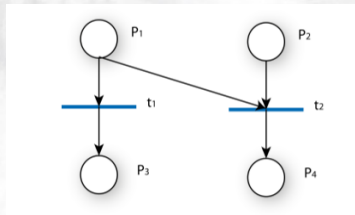
### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Réseau simple

Les réseaux dits simples sont des réseaux avec conflit(s) où chaque transition n'intervient au plus que dans une situation de conflit.





# Les Graphes purs

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
**Réseaux particuliers**

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage  
Accessible (GMA)  
Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Graphe pur

Les Graphes purs sont ceux dont aucune place n'est à la fois en entrée ou en sortie de la même transition.



# Notions et règles de franchissement

## Définition

Un réseau de Petri est défini par le tuple  $(P, T, Pré, Post, M_0)$

- **P** : ensemble de places  $p_i$
- **T** : ensemble de transitions
- **Pré** :  $Pré(p, t)$  est une valeur  $(\geq 0)$  associée à l'arc allant de la place  $p$  à la transition  $t$
- **Post** :  $Post(p, t)$  est une valeur  $(\geq 0)$  associée à l'arc allant de la transition  $t$  à la place  $p$
- **$M_0$**  : vecteur décrivant le marquage initial,  $M_0 = (M_0(p_1), \dots, M_0(p_n))$ . nombre de jetons dans la place  $p_1$

# Notions et règles de franchissement

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

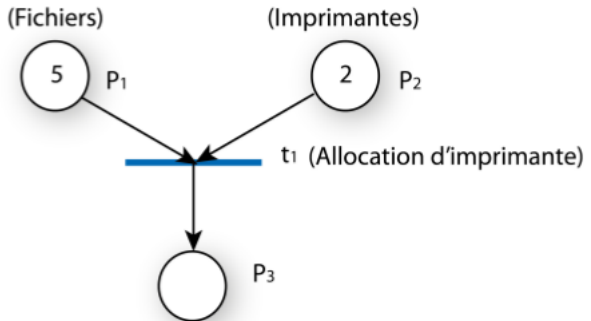
Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

**Exemple** Soit  $P = p_1, p_2, p_3$  où  $p_1$  représente la ressource 'fichier',  $p_2$  la ressource 'imprimante' et  $p_3$  la ressource « fichiers en cours d'impression ». On peut définir le RP suivant dans son état initial (par exemple).



# Exemple

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

## Places, Transitions et Arcs

## Marquages Franchissement

## Réseaux particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

## Graphe de Marquage Accessible (GMA)

## Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

On a :

$$\text{Pré}(p_1, t) = 1 \text{ (p donne le poids sur l'arc)}$$

$$\text{Pré}(p_2, t) = 1 ;$$

$$\text{Pré}(p_3, t) = 0$$

$$\text{Post}(p_1, t) = 0 ;$$

$$\text{Post}(p_3, t) = 0 ;$$

$$\text{Post}(p_3, t) = 1$$

$$M_0 = (M_0(p_1), M_0(p_2), M_0(p_3)) = (5, 2, 0)$$

**Remarque :**

dans le cas général,  $\text{Pré}(p, t)$  représente le nombre de ressources de type  $p$  consommées par la transition  $t$ , et  $\text{Post}(p, t)$  représente le nombre de ressources de type  $p$  produites suite au tir de la transition  $t$ .  $M(p)$  indique le marquage de la place  $p$  (nombre de jetons contenus dans  $p$ ).

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Propriétés des réseaux de Petri

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)  
Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

À partir du marquage initial, le réseau de Petri peut évoluer si les conditions sont vérifiées.

**Exemple** (se référer à l'exemple précédent) :

Soit  $M_0 = (5, 2, 0)$  Après le franchissement (tir) de la transition  $t$ , on utilisera un fichier et une imprimante (car  $\text{Pré}(p_1, t) = 1$  et  $\text{Pré}(p_2, t) = 1$ ) et on aura un fichier en cours d'impression .

**le marquage deviendra alors :**

$$M_1 = (4, 1, 1)$$

Après un deuxième tir de la transition  $t$ , on obtiendra :

$$M_2 = (3, 0, 2).$$

On ne peut plus effectuer un autre tir de  $t$ , car  $M_2(p_2) = 0$ .

Dans le cas général, pour un marquage  $M$ , une transition  $t$  est tirable si et seulement si pour tout  $p \in P$ , on a :  $M_p \geq \text{Pré}(p, t)$  La franchissabilité (ou la sensibilisation ou le tir) d'une transition  $t$  pour le marquage  $M$  se note :  $M[t > .$

Si le marquage résultant est  $M'$ , alors on note :  $M[t > M'$ .

## suite exemple

### Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

#### Introduction

#### Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux particuliers

#### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Dans l'exemple précédent :  $M_0 [t > M_1$  ;  $M_1 [t > M_2$  et  $t$  n'est pas tirable pour  $M_2$  car  $M_2(p_2) < \text{Pré}(p_2, t)$ .

Soit  $M$  un marquage :  $M = (M(p_1), M(p_2), \dots)$

**Notons:**

$C^-$  la matrice des Prés telle que :  $C^-(ij) = \text{Prés}(p_i, t_j)$

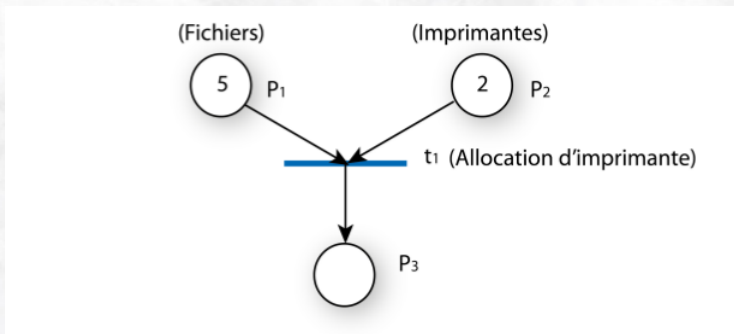
$C^+$  la matrice des Posts telle que :  $C^+(ij) = \text{Posts}(p_i, t_j)$

$$C = C^+ - C^-$$

Toujours dans l'exemple précédent on a :

$$C^- = \text{Pré} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C^+ = \text{Post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## suite exemple(fichiers imprimantes)



Ainsi, avec cette notation, pour un marquage  $M$ , une transition  $t_i$  est tirable si et seulement si :

$M \geq {}^iC^-$ , où  ${}^iC^-$  est le vecteur colonne  $i$  de la matrice  $C^-$ .



# suite exemple(fichiers imprimantes)

## Exemple (précédent suite)

$M_1$  est tirable car  $[4, 1, 1] \geq [1, 1, 0]$  c.-à-d  $M_1 \geq t_1 C^- M_2$   
 $M_2$  [3, 0, 2] n'est pas supérieur à  $C^- [1, 1, 0]$

- - Le tir d'une transition  $t$  ou un marquage  $M$  conduit à un nouveau marquage  $M_0$  défini par :  $\forall p \in P, M_0(p) = M(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t)$  où  $M_0 = M - {}^tC^- + {}^tC^+ = M + {}^tC$

## Application

$$M_1 = M_0 - {}^tC^- + {}^tC^+$$

$$M_1 = [5, 2, 0] - [1, 1, 0] + [0, 0, 1]$$

$$M_1 = [4, 1, 1]$$

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Graphe de Marquage Accessible (GMA)

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

## Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Définition

Un marquage sera dit accessible si on peut l'atteindre à partir du marquage initial, soit directement (avec un seul tir), soit indirectement (avec plusieurs tirs). On note  $A$  l'ensemble des marquages accessibles d'un réseau de Petri.



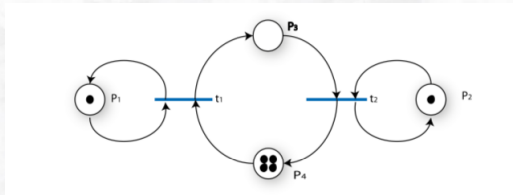
Exemple (précédent) :

$A = M_0, M_1, M_2$

Le graphe des marquages accessibles:

# Grphe de Marquage Accessible (GMA)

**Application** Considérons le réseau de Petri suivant :



soit  $T = (t_1, t_2)$ , on a:

$$C^- = \text{Pré} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^+ = \text{Post} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = C^+ - C^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Graphe de Marquage Accessible (GMA)

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

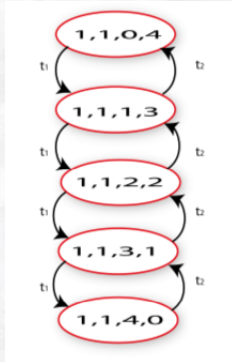
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

## Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Application(suive)



avec  $M_0 = (1, 1, 0, 4)$

On peut avoir les autres marquages accessibles, exemple :  $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$  car  $[1, 1, 0, 4] > [0, 0, 1, -1]$

Donc :  $M_1 = M_0 + {}^t C = [1, 1, 0, 4] + [0, 0, 1, -1] = [1, 1, 1, 3]$  etc.

Le graphe des marquages accessibles :

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

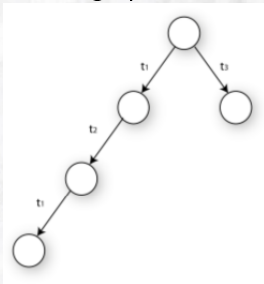
Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

Soit  $T^*$  l'ensemble de transitions  $T^* = t_1, t_2, \dots, t_n$   
Soit  $S$  une séquence de transitions ( $S \in T^*$ ) ;  $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}(t))_t$   
où  $\vec{\sigma}(t)$  est le nombre d'occurrences de  $t$  dans  $S$ .

### Exemple 1 :

Soit le graphe de marquage ci-dessous,



avec  $T = t_1, t_2, t_3$ .

Considérons la séquence  $\vec{\sigma} = t_1 t_2 t_3$   
Alors le vecteur d'occurrences  
 $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}(t_1), \vec{\sigma}(t_2), \vec{\sigma}(t_3))$  est  $\vec{\sigma}$   
 $= (2, 1, 0)$

# Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

Ainsi, à partir d'un marquage  $M$ , on peut tirer une séquence de transitions  $\sigma$ , et on trouve le marquage  $M'$ .

L'équation de changement d'état est alors donnée comme suit :

$$M_0 = M + C \cdot \vec{\sigma}$$



# Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

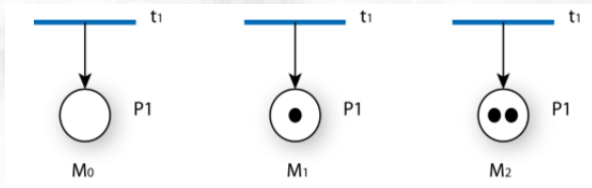
Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Grphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

**Exemple 2** : le franchissement d'une transition « source » consiste à rajouter un jeton à chacune des places en sortie.



# Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchisse- ment

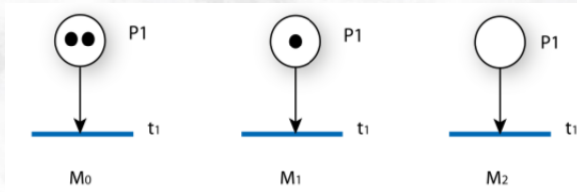
Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

**Exemple 3** : le franchissement d'une transition « puits » consiste à retirer un jeton de chacune de ses places en entrée.



# Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

## Introduction

## Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

## Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

### Exemple 4 :

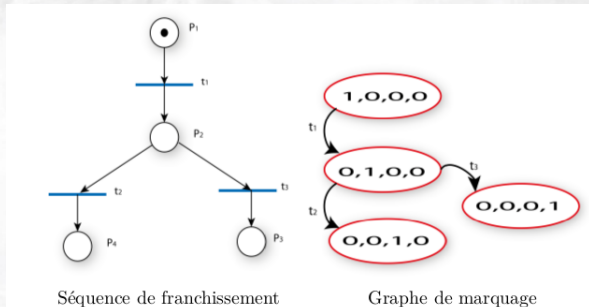
séquence de franchissement :

$M_0 [t_1 > M_1$  avec  $M_1 = (0, 1, 0, 0)$

$M_0 [t_1 t_2 > M_2$  avec  $M_2 = (0, 0, 0, 1)$

$M_0 [t_1 t_3 > M_3$  avec  $M_3 = (0, 0, 0, 1)$

Ensemble des marquages accessibles :  $M^* = M_0, M_1, M_2, M_3$



# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

# Quelques propriétés qualitatives: Bornitude

Quelques propriétés qualitatives Vérifiables en se basant sur le graphe des marquages accessibles.

## Bornitude

### Définition

Une place sera dite k-bornée si  $\forall M, M(p) \leq k$

### Exemple (précédent):

- $M_0(p1) = M_1(p1) = M_2(p2) = M_3(p3) = M_4(p4) = 1$  donc p1 est 1-bornée
- la place p4 est 4-bornée

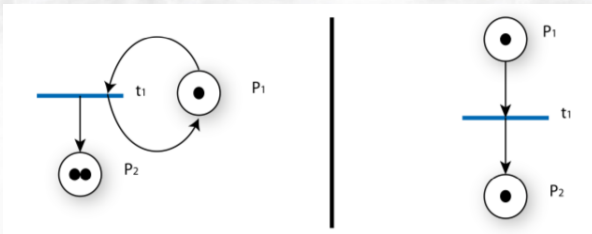
Un réseau de Petri est borné s'il existe une valeur k telle que :

$$\forall M, \forall p, M(p) \leq k$$

## Remarque

Pour que le réseau soit borné, il faut que son ensemble de marquages accessibles  $A$  soit fini (sinon, le réseau n'est pas borné).

Exemple :



Réseaux non borné

Réseau 2-borné

# Quelques propriétés qualitatives: Pseudo-vivacité

## Pseudo-vivacité

### Définition

Le réseau de Petri est pseudo-vivant si  $\forall M, \exists t / M[t >$  c.-à-d. pour tout marquage, il existe au moins une transition tirable à partir de ce marquage.

Ainsi, le GMA d'un RdP pseudo-vivant possède au moins un arc (transition) sortant de chaque état (marquage).

### Remarque

Un réseau pseudo vivant n'a pas de marquage puits (ou mort) c.-à-d. un marquage sans transition tirable. Donc s'il y a un marquage à partir duquel on ne peut pas tirer une transition alors le réseau n'est pas pseudo-vivant.

# Quelques propriétés qualitatives: Quasi-vivacité

## Définition : Quasi-vivacité

Un réseau est quasi-vivant si :  $\forall k, \exists M/M [t > c$ -à-d que pour toute transition, il existe au moins un marquage à partir duquel on peut tirer cette transition.

Ainsi, la quasi-vivacité désigne la possibilité de franchir au moins une fois chaque transition.



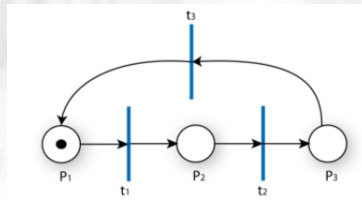
# Quelques propriétés qualitatives: Vivacité

## Vivacité

### Définition

Un RdP est vivant s'il est pseudo-vivant et quasi-vivant.

### Exemple:



Réseau vivant.

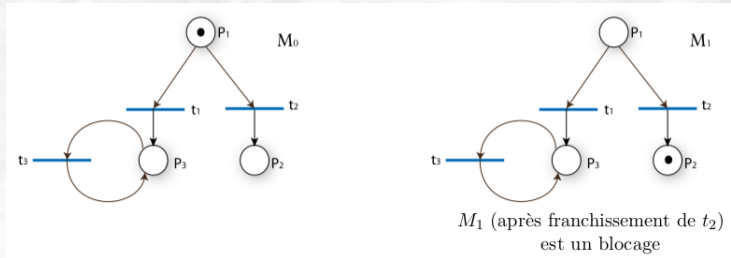
# Quelques propriétés qualitatives: Réseau sans blocage

## Réseau sans blocage

### Définition

Un RdP est dit sans blocage s'il n'a pas de marquage puits (mort).

Exemple:



# Quelques propriétés qualitatives: Etat d'accueil

## Etat d'accueil

### Définition

Un RdP admet un état d'accueil  $M_a$  si

$$:\forall M \in A, \exists \sigma \in T^* / M[\sigma > M_a.$$

c.-à-d. un marquage d'accueil  $M_a$  est tel qu'on peut lui accéder à partir de n'importe quel autre marquage  $M$  via une séquence de transition  $\sigma$ .

### Remarque 1:

Un état d'accueil est accessible quelque soit l'évolution du réseau.

# Quelques propriétés qualitatives: Etat d'accueil

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs  
Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

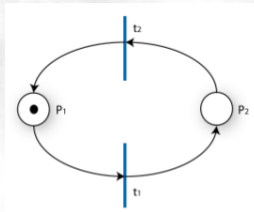
Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Remarque 2:

Si le marquage initial ( $M_0$ ) est un marquage d'accueil, alors le réseau est dit réinitialisable.

## Exemple:



Réseau réinitialisable

## Les Réseaux de Pétri

**Mourad  
Daoudi**

### Introduction

### Notations et règles de franchisse- ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement

Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

Les Réseaux  
de Pétri

Mourad  
Daoudi

Introduction

Notations et  
règles de  
franchisse-  
ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

Propriétés  
des réseaux  
de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

## Les Réseaux de Pétri

**Mourad  
Daoudi**

Introduction

Notations et  
règles de  
franchisse-  
ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

Propriétés  
des réseaux  
de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état



## Les Réseaux de Pétri

**Mourad  
Daoudi**

### Introduction

### Notations et règles de franchisse- ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement

Réseaux  
particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

Les Réseaux  
de Pétri

Mourad  
Daoudi

Introduction

Notations et  
règles de  
franchisse-  
ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

Propriétés  
des réseaux  
de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

# Sommaire

## Les Réseaux de Pétri

Mourad  
Daoudi

### Introduction

### Notations et règles de franchissement

### Places, Transitions et Arcs

### Marquages Franchissement Réseaux particuliers

### Propriétés des réseaux de Petri

### Graphe de Marquage Accessible (GMA)

### Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

## 1 Introduction

## 2 Notations et règles de franchissement

- Places, Transitions et Arcs
- Marquages
- Franchissement
- Réseaux particuliers

## 3 Propriétés des réseaux de Petri

- Graphe de Marquage Accessible (GMA)
- Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état
- Quelques propriétés qualitatives
  - Bornitude
  - Pseudo-vivacité
  - Quasi-vivacité
  - Vivacité
  - Réseau sans blocage
  - Etat d'accueil

## Les Réseaux de Pétri

**Mourad  
Daoudi**

Introduction

Notations et  
règles de  
franchisse-  
ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

Propriétés  
des réseaux  
de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état

Les Réseaux  
de Pétri

Mourad  
Daoudi

Introduction

Notations et  
règles de  
franchisse-  
ment

Places,  
Transitions et  
Arcs

Marquages  
Franchissement  
Réseaux  
particuliers

Propriétés  
des réseaux  
de Petri

Graphe de  
Marquage  
Accessible  
(GMA)

Le vecteur  
d'occurrence  
et l'équation  
de  
changement  
d'état