Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

USTHB

Jeudi 25 Juin

Sommaire

Sommaire

Définition génerale

Rappel d'histoire

Les réseaux de Petri ont été inventés par le mathématicien allemand Carl Alain Petri dans les années 1960.

Sommaire

Sommaire

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe

Remarques

- Une place **(pi)** modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition **(ti)** modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés

Remarques

- Une place (pi) modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition (ti) modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

Remarques

- Une place **(pi)** modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition **(ti)** modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

Remarques

- Une place **(pi)** modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition **(ti)** modélise les actions sur les ressources.

Définitions

Un réseau de pétri c'est quoi ?

- un graphe
- formé de deux types de nœuds appelés places et transitions, reliés par des arcs orientés
- biparti, c.-à-d. qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place

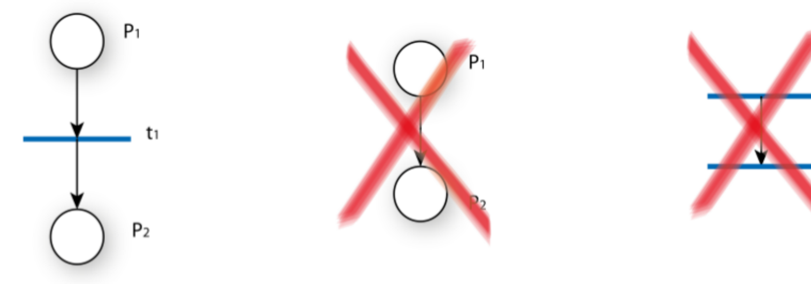
Remarques

- Une place **(pi)** modélise les ressources utilisées dans le système.
- Une transition **(ti)** modélise les actions sur les ressources.

Exemples

Exemples

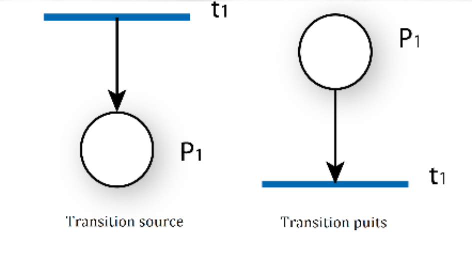
la place p1 est en entrée de la transition t1 et p2 est en sortie de t1 .



Remarques

-Une transition sans place en entrée est une transition source.

-Une transition sans place en sortie est une transition puits.

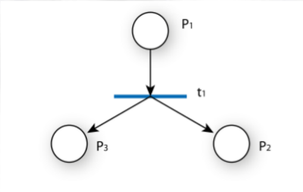


Sommaire

Marquage

Le Marquage

Chaque place ***(pi)*** d'un RdP peut contenir un ou plusieurs marqueurs (jetons).
La configuration complète du réseau, avec toutes les marques positionnées, forme le marquage et définit l'état du réseau (et donc l'état du système modélisé).



- P1 ,P2,P3 sont des places .
- T1 est une transition qui permet de passer de P1 vers Deux places P2 et P3 .

Sommaire

Franchissement

Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

1. le franchissement est une opération indivisible (atomique)

Franchissement

C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

1. le franchissement est une opération indivisible (atomique)
2. un jeton est consommé dans chaque place en entrée

Franchissement

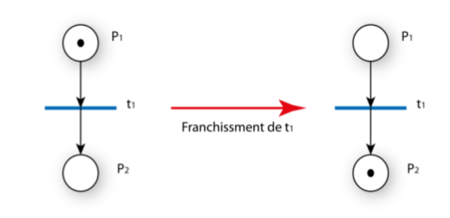
Franchissement

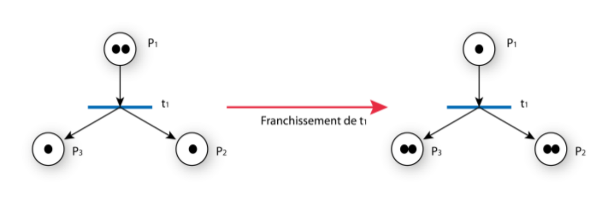
C'est le formalisme qui permet de passer d'un marquage à un autre, ce qui rend compte de l'évolution du système modélisé. Une transition est franchissable si chacune des places en entrée compte au moins un jeton ; dans ce cas :

1. le franchissement est une opération indivisible (atomique)
2. un jeton est consommé dans chaque place en entrée
3. un jeton est produit dans chaque place en sortie

Exemples de franchissement

Voici des exemples de franchissement avec deux réseaux différents.





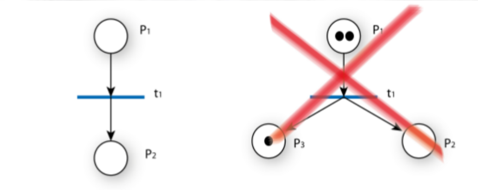
Sommaire

Graphe d'état

Il existe des réseaux particuliers on va dans la suite de ce cours citer quelques uns .

Graphe d'état

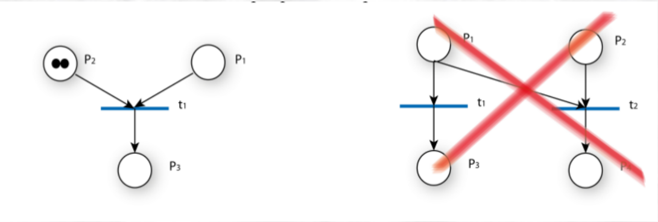
un graphe d'état a une particularité qui est relative à ses transitions tel que , chaque transition ne dispose que d'une place en entrée et une place en sortie.



Réseau sans conflit

Réseau sans conflit

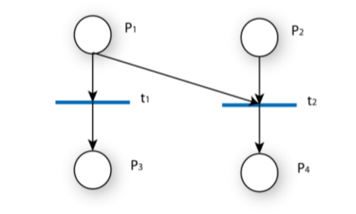
Un réseau sans conflit est un réseau où chaque place n'a qu'une transition en sortie.



Réseau simple

Réseau simple

Les réseaux dits simples sont des réseaux avec conflit(s) où chaque transition n'intervient au plus que dans une situation de conflit.



Les Graphes purs

Les Réseaux de Pétri

Mourad Daoudi

Introduction

Notations et règles de franchissement

Places, Transitions et Arcs

Marquages

Franchissement

Réseaux particuliers

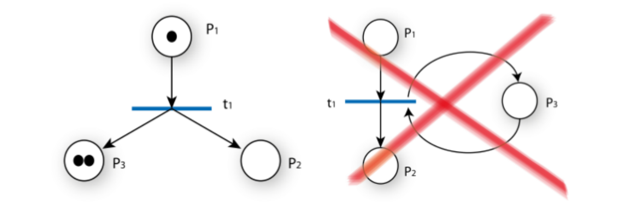
Propriétés des réseaux de Petri

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Graphe pur

Les Graphes purs sont ceux dont aucune place n'est à la fois en entrée ou en sortie de la même transition.



Notions et règles de franchissement

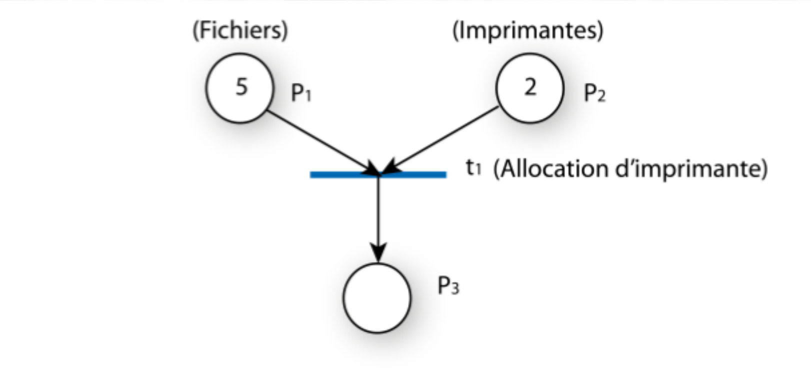
Définition

Un réseau de Petri est défini par le tuple ***(P, T, Pré, Post,*** M_0 ***)***

- **P** : ensemble de places p_i
- **T** : ensemble de transitions
- **Pré** : *Pré(p, t)* est une valeur (≥ 0) associée à l'arc allant de la place p à la transition t
- **Post** : *Post(p, t)* est une valeur (≥ 0) associée à l'arc allant de la transition t à la place p
- M_0 : vecteur décrivant le marquage initial, $M_0 = (M_0\ (p_1), \ldots, M_0\ (p_n))$. nombre de jetons dans la place p_1

Notions et règles de franchissement

Exemple Soit P = p_1 , p_2 , p_3 où p_1 représente la ressource ´fichierˇ, p_2 la ressource ´imprimanteˇ et p_3 la ressource fichiers en cours d'impression. On peut définir le RP suivant dans son état initial (par exemple).



Exemple

On a :

Pré(p_1 , t) = 1 (p donne le poids sur l'arc)

Pré(p_2 , t) = 1 ;

Pré(p_3 , t) = 0

P ost(p_1 , t) = 0 ;

Post(p_3 , t) = 0 ;

Post(p_3 , t) = 1

$M_0 = (M_0\ (p_1\ ),\ M_0\ (p_2),\ M_0\ (p_3\ )) = (5,\ 2,\ 0)$

Remarque :

dans le cas général, *Pré(p, t)* représente le nombre de ressources de type p consommées par la transition *t*, et *Post(p, t)* représente le nombre de ressources de type *p* produites suite au tir de la transition t. *M (p)* indique le marquage de la place *p* (nombre de jetons contenus dans *p*).

Sommaire

Propriétés des réseaux de Petri

À partir du marquage initial, le réseau de Petri peut évoluer si les conditions sont vérifiées.

Exemple (se référer à l'exemple précédent) :

Soit $M_0 = (5, 2, 0)$ Après le franchissement (tir) de la transition t, on utilisera un fichier et une imprimante (car Pré(p_1 , t) = 1 et Pré(p_2 , t) = 1) et on aura un fichier en cours d'impression .

le marquage deviendra alors :

$M_1 = (4, 1, 1)$

Après un deuxième tir de la transition t, on obtiendra :

$M_2 = (3, 0, 2)$.

On ne peut plus effectuer un autre tir de t, car M_2 (p_2) = 0.

Dans le cas général, pour un marquage M , une transition t est tirable si et seulement si pour tout $p \in$ P , on a : $M_p \geq$ Pré(p, t) La franchissabilité (ou la sensibilisation ou le tir) d'une transition t pour le marquage M se note : M [t>.

Si le marquage résultant est M' , alors on note : M [t>M' .

suite exemple

Dans l'exemple précédent : M_0 [t>M_1 ; M_1 [t>M_2 et t n'est pas tirable pour M_2 car M_2 (p_2) < Pré(p_2 , t).

Soit M un marquage : M = (M (p_1), M (p_2). . .)

Notons:

C^- la matrice des Prés telle que : C^-(ij) = Prés(p_i , t_j)

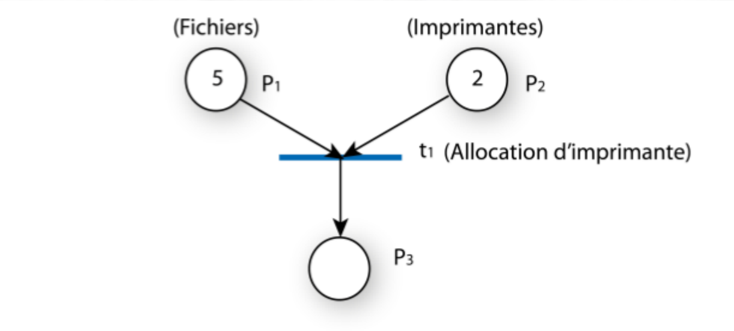
C^+ la matrice des P osts telle que: C^+ (ij) = Posts(p_i , t_j)

C = C^+ - C^-

Toujours dans l'exemple précédent on a:

$$C^- = \text{Pré} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C^+ = \text{Post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

suite exemple(fichiers imprimantes)



Ainsi, avec cette notation, pour un marquage M , une transition t_i est tirable si et seulement si :
M $\geq {}^{i}C^{-}$, où ${}^{i}C^{-}$ est le vecteur colonne i de la matrice C^{-} .

suite exemple(fichiers imprimantes)

Exemple (précédent suite)

M_1 est tirable car [4, 1, 1] > [1, 1, 0] c.-à-d $M_1 > t_1\ C^-\ M_2$ n'est pas tirable car M_2 [3, 0, 2] n'est pas supérieur à C^- [1, 1, 0]

- \- Le tir d'une transition t ou un marquage M conduit à un nouveau marquage M_0 défini par : $\forall$ p $\in$ P, $M_0(p) = M(p)$ - $Pré(p, t) + Post(p, t)$ où M_0 = M - ${}^tC^- + {}^tC^+$ = M + ${}^tC$

Application

$M_1 = M_0 - {}^tC^- + {}^tC^+$

$M_1 = [5, 2, 0] - [1, 1, 0] + [0, 0, 1]$

$M_1 = [4, 1, 1]$

Sommaire

Graphe de Marquage Accessible (GMA)

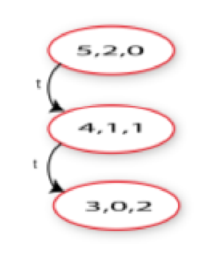
Définition

Un marquage sera dit accessible si on peut l'atteindre à partir du marquage initial, soit directement (avec un seul tir), soit indirectement (avec plusieurs tirs). On note A l'ensemble des marquages accessibles d'un réseau de Petri.

Exemple (précédent:fichiers & imprimantes) :

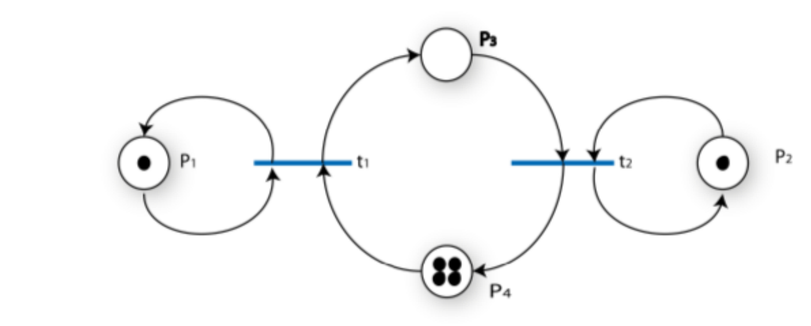
A = M_0 , M_1 , M_2

Le graphe des marquages accessibles:



Graphe de Marquage Accessible (GMA)

Application Considérons le réseau de Petri suivant :



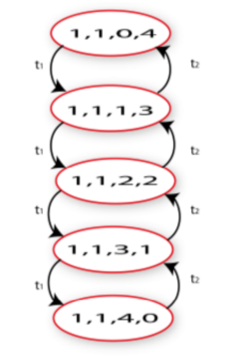
Application (suite)

soit T = (t_1, t_2), on a:

$$C^- = \text{Pré} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^+ = \text{Post} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = C^+ \text{ - } C^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^tC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Application(suite)



avec M0 = (1, 1, 0, 4)

On peut avoir les autres marquages accessibles, exemple : M_0 [t1 $>M_1$ car [1, 1, 0, 4] > [0, 0, 1, -1]

Donc :$M_1 = M_0 + {}^tC$ = [1, 1, 0, 4] + [0,0 ,1 ,-1] =[1,1,1,3] etc.

Le graphe des marquages accessibles :

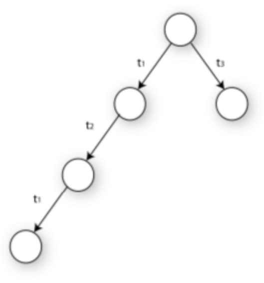
Sommaire

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Soit T^* l'ensemble de transitions $T^* = t_1\ ,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_n$
Soit S une séquence de transitions (S $\in T^*$) ; $\overrightarrow{\sigma} = (\overrightarrow{\sigma}(t))_t$
où $\overrightarrow{\sigma}$(t) est le nombre d'occurrences de t dans S.

Exemple 1 :

Soit le graphe de marquage ci-dessous,



avec T = $t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3$.
Considérons la séquence $\overrightarrow{\sigma} = t_1\ t_2\ t_3$
Alors le vecteur d'occurrences $\overrightarrow{\sigma} = (\overrightarrow{\sigma}\ (t_1\ ),\ \overrightarrow{\sigma}\ (t_2\ ),\ \overrightarrow{\sigma}\ (t_3\ ))$ est $\overrightarrow{\sigma}$ répétitives : $T_1\ T_2\ T_3\ T_4$ et $T_1\ T_3\ T_2\ T_4$
= (2, 1, 0)

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

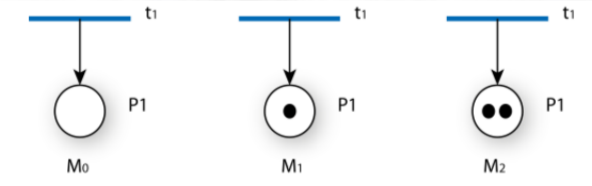
Ainsi, à partir d'un marquage M , on peut tirer une séquence de transitions σ, et on trouve le marquage M' .

L'équation de changement d'état est alors donnée comme suit :

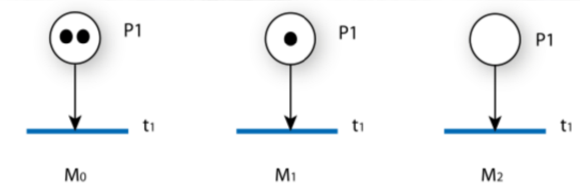
$$M_0 = M + C.\overrightarrow{\sigma}$$

Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Exemple 2 : le franchissement d'une transition «source» consiste à rajouter un jeton à chacune des places en sortie.



Exemple 3 : le franchissement d'une transition «puits» consiste à retirer un jeton de chacune de ses places en entrée.



Le vecteur d'occurrence et l'équation de changement d'état

Exemple 4 :

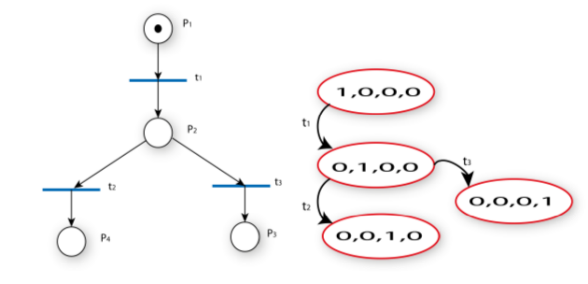
séquence de franchissement :

M_0 [t1 $> M_1$ avec $M_1 = (0, 1, 0, 0)$

M_0 [t1 t2 $> M_2$ avec $M_2 = (0, 0, 0, 1)$

M_0 [t1 t3 $> M_3$ avec $M_3 = (0, 0, 0, 1)$

Ensemble des marquages accessibles : M $*$ = M0 , M1 , M1 , M3



Séquence de franchissement Graphe de marquage

Sommaire

Sommaire

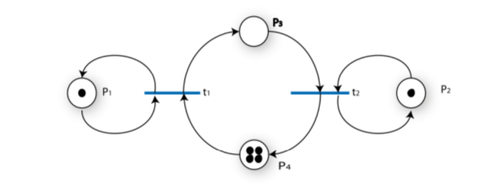
Quelques propriétés qualitatives:Bornitude

Définition:Bornitude

Une place sera dite k-bornée si $\forall M, M(p) \leq k$

Exemple (précédent):

- $M_0(\text{p1}) = M_1(\text{p1}) = M_2(\text{p1}) = M_3(\text{p1}) = M_4(\text{p1}) = 1$ donc p1 est 1-bornée
- la place p4 est 4-bornée



Bornitude(suite)

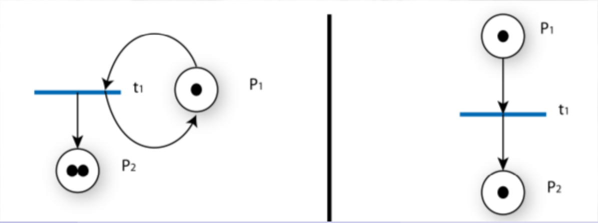
Un réseau de Petri est borné s'il existe une valeur k telle que :

$$\forall M, \forall p, M(p) \leq k$$

Remarque

Pour que le réseau soit borné, il faut que son ensemble de marquages accessibles A soit fini (sinon, le réseau n'est pas borné).

Exemple :



Sommaire

Quelques propriétés qualitatives:Pseudo-vivacité

Pseudo-vivacité

Définition

Le réseau de Petri est pseudo-vivant si $\forall M, \exists t / M[t >$ c.-à-d. pour tout marquage, il existe au moins une transition tirable à partir de ce marquage.
Ainsi, le GMA d'un RdP pseudo-vivant possède au moins un arc (transition) sortant de chaque état (marquage).

Remarque

Un réseau pseudo vivant n'a pas de marquage puits (ou mort) c.-à-d. un marquage sans transition tirable. Donc s'il y a un marquage à partir duquel on ne peut pas tirer une transition alors le réseau n'est pas pseudo-vivant.

Sommaire

Quelques propriétés qualitatives:Quasi-vivacité

Définition :Quasi-vivacité

Un réseau est quasi-vivant si : $\forall$ t, $\exists$ M/M [t > c-à-d que pour toute transition, il existe au moins un marquage à partir duquel on peut tirer cette transition.

Ainsi, la quasi-vivacité désigne la possibilité de franchir au moins une fois chaque transition.

Sommaire

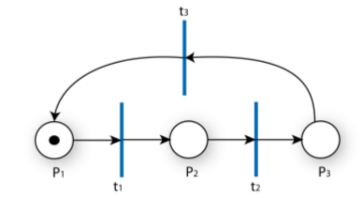
Quelques propriétés qualitatives:Vivacité

Vivacité

Définition

Un RdP est vivant s'il est pseudo-vivant et quasi-vivant.

Exemple:



Réseau vivant.

Sommaire

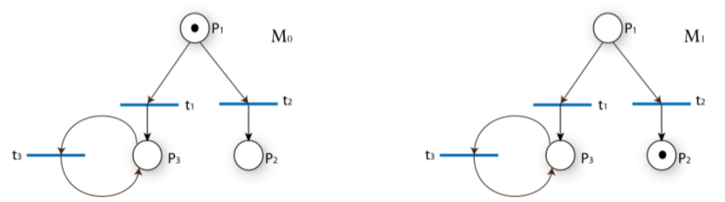
Quelques propriétés qualitatives:Réseau sans blocage

Réseau sans blocage

Définition

Un RdP est dit sans blocage s'il n'a pas de marquage puits (mort).

Exemple:



M_1 (après franchissement de t_2) est un blocage

Sommaire

Quelques propriétés qualitatives:Etat d'accueil

Etat d'accueil

Définition

Un RdP admet un état d'accueil M_a si :$\forall M \in A, \exists \sigma \in T* / M[\sigma > M_a$.
c.-à-d. un marquage d'accueil M_a est tel qu'on peut lui accéder à partir de n'importe quel autre marquage M via une séquence de transition σ.

Remarque 1:

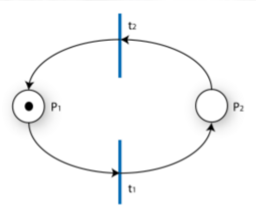
Un état d'accueil est accessible quelque soit l'évolution du réseau.

Quelques propriétés qualitatives:Etat d'accueil

Remarque 2:

Si le marquage initial (M_0) est un marquage d'accueil, alors le réseau est dit réinitialisable.

Exemple:



Réseau réinitialisable

Sommaire

Conversation

Définition:Réseau de Petri conservatif

Un réseau de Petri est conservatif si :

$$\forall M \in A, \sum_{i=1}^{size(P)} M_0(p_i) = \sum_{i=1}^{size(P)} M(p_i)$$

Exemple :

Considérons le RdP tel que :

M_0 = [5, 8, 3] ; 5+8+3=16

M_1 = [4, 6, 6] ; 4+6+6=16

M_2= [3, 7, 6] ; 3+7+6=16

Ce réseau est dit conservatif.

Sommaire

Sommaire

Réseaux de Petri généralisés

Définition

Dans ces réseaux, des poids sont associés aux arcs.

Exemple:

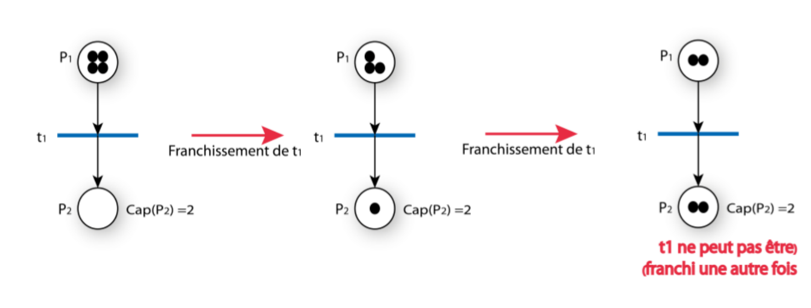
Sommaire

Réseaux de Petri à capacités

Définition

Dans ces réseaux, des poids sont associés aux places.

Exemple:



Sommaire

Réseaux de Petri à priorité

Définition

Dans ces réseaux, on franchit la transition avec la plus grande priorité.

Exemple:

Sommaire

Graphe de marquage

Définition

À utiliser quand le nombre de marquages accessibles est fini.

Exemple: ici ya une erreur sur le graphe de marquage (non respect de la priorité à refaire)

Graphe de marquage (propriétés)

Les propriétés déterminées à partir de ce graphe de marquages sont :

- 1 blocages : M_2 .
- 2-borné.
- non-vivant (non peusdo-vivant : $\forall M, \exists t / M[t >$)
- quasi-vivant ($\forall t, \exists M / M[t >$)
- non réinitialisable (on ne peut pas trouve à partir d'un marquage une séquence de transition pour retrouver un marquage M_0)

Sommaire

Arborescence de couverture

Définition

Un graphe de marquage ne peut plus être construit quand le réseau est non borné c.-à-d. quand le nombre de marquages accessibles est infini.

D'où le recours au graphe de couverture. C'est un graphe à nombre de marquages fini.

Sommaire

Algorithme de construction d'un graphe de marquage

Pas 1 :
À partir du marquage initial M_0 , indiquer toutes les transitions validées et les mar- quages accessibles successeurs correspondants. Si un des marquages est strictement supérieur à M_0 , on met la variable "w" pour chacun des composantes supérieures aux composantes de M_0 .

Pas 2 :
Pour chaque nouveau marquage M_i , on fait soit le pas 2.1, soit le pas 2.2

1. Pas 2.1 : S'il existe sur le chemin de M_0 jusqu'à M_i (exclu) un marquage $M_j = M_i$, alors M_i n'a pas de successeur.
2. Pas 2.2 : Sinon, on prolonge le graphe avec les successeurs M_k (M_i) : une com- posante "w" de M_i reste une composante de "w" de M_k . S'il existe un marquage M_j sur le chemin de M_0 à M_k tel que $M_k > M_j$, alors on met "w" pour chacune des composantes supérieure aux composantes de M_i .

Algorithme de construction d'un graphe de marquage

Opérations sur "w" (nombre très grand):

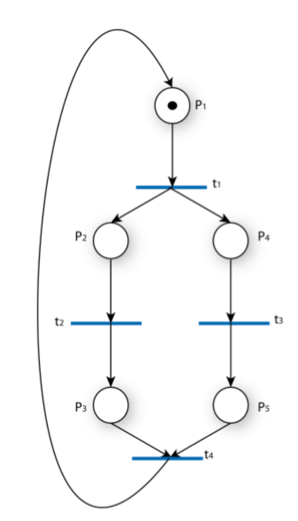
$$\forall n \in \mathbb{N}, n < \infty$$

Équation fondamentale:

$$\begin{cases} n + w + w + n = w + w & = & w \\ w - n & = & n \end{cases}$$

Exemple(Algorithme de construction d'un graphe de marquage)

Exemple :



Exemple(suite)

Soit la séquence $\sigma = t_1\ t_2$, donc $\overrightarrow{\sigma} = (1, 1, 0, 0, 0)$

$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C} = C^+ \text{-}\ C^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'équation fondamentale correspondant à cette séquence est :

$$M_2 = M_0 + \mathrm{C} \cdot \overrightarrow{\sigma}$$

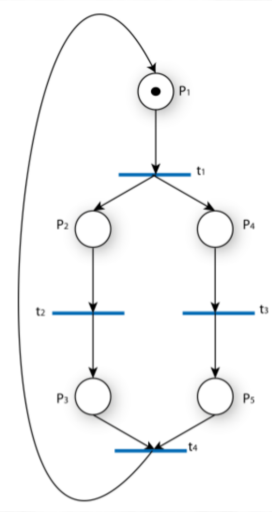
Exemple (suite : forme matricielle)

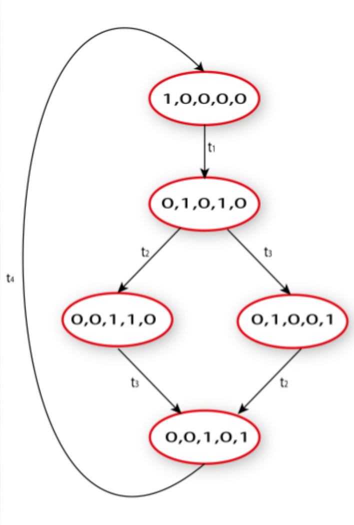
$$M_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exemple (suite :GMA)

Graphe de marquage



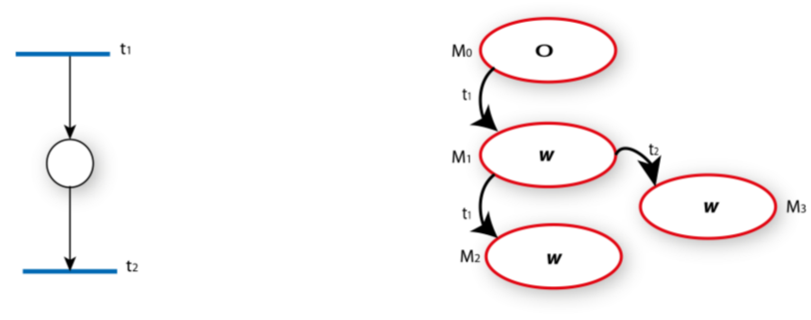


Exemple(suite:GMA)

Propriétés

1. sauf
2. sans blocage
3. réinitialisable : M_0 est un état d'accueil
4. 2 séquences répétitives : $T_1\ T_2\ T_3\ T_4$ et $T_1\ T_3\ T_2\ T_4$

Exemple : Graphe de couverture et graphe de marquages



Exemple : Graphe de couverture et graphe de marquages

t_1 est une transition source, franchissable un nombre infini de fois, d'où le recours au graphe de couverture.
À partir de $M_0 = (0)$, seule t_1 est franchissable :
$M_0[t_1 > M_1 = (1)$;
M_1 est supérieure à M_0, donc $M_1 = (w)$
À partir de M_1, t_1 et t_2 sont franchissables :

- on tire t_1 : $M_2 = (w + 1) = M_1 \Longrightarrow M_2$ n'a plus de successeur
- on tire t_2 : $M_3 = (w - 1) = (w) = M_1 \Longrightarrow M_3$ n'a plus de successeur