

RAPPORT FINAL BIOMEDICAL ENGINEERING

Où des gouttelettes inhalées se déposent-elles dans le poumon ?

CI1A

Réalisé par : GROUPE 6 (KOSSI Majda - MEJDI Majda - SDOUR Amine - AMMACH Yassine - EL HRIZI Noemane - BANOURI Mounsef)

Encadrant : Pr.Marcel FILOCHE



Table des matières

Table des matières	2
Introduction :	3
Sous projet 1 : Calcul de la carte d'écoulement visqueux dans une bifurcation, par résolution de l'équation de stokes et visualisation des lignes de courants	3
A / Résolution de l'équation de stokes :	3
1/ Cas d'écoulement de Poiseuille :	3
2/ Cas d'écoulement général :	5
3/ Optimisation du modèle : (voir annexe).....	6
B/ Visualisation de la carte d'écoulement :	6
Sous projet 2 : Calcul des trajectoires des goulettes	7
A/ Objectif :	7
B/ Principe d'interpolation :	7
C/ Interface graphique :	7
D/ Etude statistique :	9
Conclusion générale :	10
Annexe :	12
Sous projet 1 – A :	12
1 /Cas d'écoulement de Poiseuille :	12
Sous projet 2 – B :	12
1/ L'interpolation rectangulaire :	12
2/ L'interpolation triangulaire :	13
Bibliographie :	13

Introduction :

L'un des plus grands besoins des êtres vivants est l'apport en oxygène jusqu'aux cellules de l'organisme. Une partie de ce procédé se fait chez l'espèce humaine par le système respiratoire dont le bloc central est les poumons. La complexité et le surdimensionnement de celui-ci fait de lui une structure muette qui cache les problèmes, est donc une cible idéale pour plusieurs disfonctionnements fatals. C'est malheureusement cela qu'attaque le virus SARS-Cov-2 dont le moyen de transmission principale est les gouttelettes associées à l'éternuement, phénomène que nous allons étudier et modéliser. Or ce modèle sera nécessairement complexe au vu de ce qu'il cherche à modéliser et il disposera ainsi de plusieurs paramètres. En testant plusieurs combinaisons de ces paramètres, nous allons étudier le mouvement et le dépôt de ces gouttelettes dans les bronchioles pulmonaires. Ceci devra nous permettre de quantifier l'efficacité de certaines mesures prises face à ce virus.

Sous projet 1 : Calcul de la carte d'écoulement visqueux dans une bifurcation, par résolution de l'équation de stokes et visualisation des lignes de courants

A / Résolution de l'équation de stokes :

1/ Cas d'écoulement de Poiseuille :

On se lance en émettant l'hypothèse que : $\vec{\nabla}P = \overrightarrow{cst}$ selon la direction principale du tube, dans ce cas la vitesse verticale U_y est nulle et la vitesse horizontale U_x ne dépend pas de x , ce qui vérifie automatiquement l'équation sur la divergence. Et alors on a l'équation suivante :

$$\eta \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}P = \vec{0} \text{ Où } \eta \text{ est la viscosité du fluide}$$

Équation 1 : équation de Stokes

a/ Résolution dans la bronche principale :

En projetant on obtient :

$$\eta \Delta U - \frac{dP}{dx} = 0$$

Équation 2 : Projection de l'équation 1

Sachant que : $\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L}$ avec L la longueur du tube

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{P_2 - P_1}{\eta L}$$

Équation 3

➤ Discrétisation :

On utilise la méthode de discrétisation des dérivées partielles par différence finies en maillage rectangulaire qui consiste à approcher la solution de l'EDP en un nombre fini de points seulement. Pour cela, on discrétise le tube en une grille rectangulaire qui permet de ne pas avoir la vitesse du fluide comme inconnu tridimensionnel mais plutôt la vitesse en chacun des points de la grille avec un pas dx selon l'axe des x et un pas dy selon l'axe des y .

On numérote les points de la grille, et on approche l'équation 1 en chaque point i_0 par :

$$\frac{U_{i_2} + U_{i_1} - 2U_{i_0}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i_3} + U_{i_4} - 2U_{i_0}}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{\eta} \times \frac{P_2 - P_1}{L} = 0$$

Équation 4 : discrétisation de l'équation 3

Avec respectivement i_1, i_2, i_3, i_4 ses points voisins à gauche, à droite, en bas et en haut
Cela se traduit en écriture matricielle par :

$$\left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) X + \frac{C}{(\Delta y)^2} = D$$

Équation 5 : écriture matricielle de l'équation 4

Avec :

M_x : la matrice de Laplacien en considérant les voisins selon l'axe des x .

M_y : la matrice de Laplacien en considérant les voisins selon l'axe des y .

C : la matrice colonne des conditions aux limites.

D : la matrice remplie par la valeur, constante à ce stade, $\frac{1}{\eta} \frac{P_2 - P_1}{L}$.

En écrivant un programme qui reçoit comme paramètres le nombre de ligne et de colonne de la grille, les conditions aux limites dans les bords supérieurs et inférieurs (les deux nulles dans ce cas), la différence de pression partielle à l'intérieur des poumons et le diamètre du tube, on peut résoudre l'équation matricielle (5), ce qui permet de trouver la carte d'écoulement du fluide à l'intérieur du tube

➤ Remarque Importante :

On a jugé nécessaire d'imposer la valeur 0 au point de la subdivision de la bronche. Etant donné que le fluide doit avoir une vitesse nulle en ce point, ce qui va ralentir les particules venantes pour s'apprêter à la bifurcation.

Pour pouvoir l'imposer, on retient l'indice du point où on veut imposer la valeur nulle, et on annule toutes les valeurs non nulles dans la ligne correspondante à cet indice dans M_x et M_y sauf la valeur non nulle qui figure dans la diagonal.

En effet lorsqu'on annule les coefficients de M_x et M_y qui correspondent à l'équation scalaire du point dans lequel on veut imposer le 0 on obtient une équation qui ne contient que l'inconnu qui représente la vitesse dans ce point.

Pour U la vitesse du point en question et k, k' ses coefficients correspondants, $D = \frac{1}{\eta} \frac{P_2 - P_1}{L}$ et C la condition qu'on souhaite imposer

$$\frac{k * u}{\Delta x^2} + \frac{k' * u}{\Delta y^2} = D - \frac{c}{\Delta y^2}$$

Équation 6

Le premier terme de l'équation 6 doit être nulle pour que la vitesse s'annule et donc $C = D \cdot \Delta y^2$
Ainsi faisant, on obtient la valeur limite 0 dans le point en question.

b/ Résolution dans la bifurcation :

Les bronches se divisent avec un angle d'ouverture en deux, pour donner deux nouvelles bronches dérivées plus petites. Dans ces dernières, la vitesse a deux coordonnées selon x et selon y étant donné que la pression varie selon les deux axes x et y . Par conséquent, l'équation de Stokes s'écrit après projection :

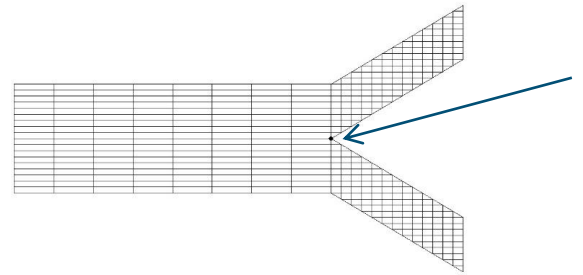


Figure 1

$$\begin{cases} \Delta U_x - \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} = 0 \\ \Delta U_y - \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dy} = 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \frac{dP}{dx} = \frac{(P_2 - P_1) \cos \alpha}{h \times L} \\ \frac{dP}{dy} = \frac{(P_2 - P_1) \sin \alpha}{h \times L} \end{cases}$$

Équation 7 : projection de l'équation de Stokes

avec: h = coefficient d'homothétie ; L = longueur de la branche principale ;

P_1, P_2 = pression d'entrée et de sortie ; $\alpha = \frac{\text{angle d'ouverture}}{2}$

Qui s'écrit sous la forme matricielle après discrétisation :

$$\begin{cases} \left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) X + \frac{C_x}{(\Delta x)^2} + \frac{C_y}{(\Delta y)^2} + \frac{C_1}{(\Delta x)^2} = D_x \\ \left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) Y + \frac{C_x}{(\Delta x)^2} + \frac{C_y}{(\Delta y)^2} + \frac{C_2}{(\Delta x)^2} = D_y \end{cases}$$

Équation 8

Avec : C_x, C_y les matrices des conditions aux limites dans les bords supérieurs et inférieurs

C_1, C_2 Les matrices des conditions aux limites à gauche de la bifurcation qui proviennent de la matrice solution de la branche principale en vue d'assurer la continuité.

2/ Cas d'écoulement général :

Dans le cas général, la pression est aussi inconnue dans la bifurcation, et donc il faut résoudre un système de 3 équations et à 3 variables (U_x, U_y et P). Dans ce cas, il faut discrétiser de plus le gradient de la pression et de la divergence de la vitesse du fluide, en effet en se plaçant en un point i_0 de la grille :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{i_2} - P_{i_1}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_{i_4} - P_{i_3}}{2\Delta y} \\ \text{div}(\vec{U}(i_0)) = \frac{U_x(i_2) - U_x(i_1)}{2\Delta x} + \frac{U_y(i_4) - U_y(i_3)}{2\Delta y} \end{cases}$$

Équation 9

Avec respectivement i_1, i_2, i_3, i_4 ses points voisins à gauche, à droite, en bas et en haut

Alors la forme matricielle de l'équation de Stokes devient :

Dans la branche principale :

$$\begin{cases} \left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) X + \frac{C_x}{(\Delta x)^2} + \frac{C_y}{(\Delta y)^2} = \frac{N_x \times Z + P_0}{2 \times \Delta x \times n} \\ \left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) Y + \frac{C_x}{(\Delta x)^2} + \frac{C_y}{(\Delta y)^2} = \frac{N_y \times Z}{2 \times \Delta y \times n} \\ \frac{N_x \times X}{2 \times \Delta y} + \frac{N_y \times Y + C^2}{2 \times \Delta y} = 0 \end{cases}$$

Équation 10

Dans la bifurcation :

$$\begin{cases} \left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) X + \frac{C_x}{(\Delta x)^2} + \frac{C_y}{(\Delta y)^2} + \frac{C_1}{(\Delta x)^2} = \frac{N_x \times Z + P_0}{2 \times \Delta x \times n} \\ \left(\frac{M_x}{(\Delta x)^2} + \frac{M_y}{(\Delta y)^2} \right) Y + \frac{C_x}{(\Delta x)^2} + \frac{C_y}{(\Delta y)^2} + \frac{C_2}{(\Delta x)^2} = \frac{N_y \times Z}{2 \times \Delta y \times n} \\ \frac{N_x \times X}{2 \times \Delta y} + \frac{N_y \times Y + C'}{2 \times \Delta y} = 0 \end{cases}$$

Équation 11

Avec C_x, C_y, C' les matrices des conditions aux limites dans les bords supérieurs et inférieurs, C_1, C_2 les matrices des conditions aux limites qui correspondent aux valeurs de la vitesse du fluide avant d'entrer dans les deux branches dérivées, P_0 la matrice colonne remplie par les pressions à l'entrée et la sortie, M_x et M_y, N_x et N_y sont respectivement la matrice des coefficients de Laplacien selon x et selon y, la matrices des coefficients du gradient et de la divergence selon x et selon y.

En rassemblant les inconnues en une seule matrice colonne d'ordre 3N, on peut réécrire notre système sous la forme $AX = B$ avec A est une matrice par blocs d'ordre $3N \times 3N$ et B la matrice des constantes du système. En revanche, la résolution de ce système linéaire présente une incongruité en affectant des pressions négatives en certains points.

Par la suite, nous utilisons le résultat du cas de l'écoulement de Poiseuille pour le deuxième sous projet.

3/ Optimisation du modèle : (voir annexe)

B/ Visualisation de la carte d'écoulement :

On réalise un programme en langage Python à l'aide de la bibliothèque Matplotlib, qui prend en input le diamètre de la bifurcation et l'angle alpha entre les deux branche fille .

On impose certaines conditions, tel qu'avoir un nombre impair de ligne dans la branche principale, avoir le même pas dy dans la bronchiole mère et fille, fixer h à 0.5, et obtenir dx dans la bifurcation à l'aide de la relation .

$$dx = \frac{dy}{\tan(\alpha)}$$

Il reste maintenant de localiser les points d'intersection des lignes et des colonnes dans la bifurcation. Par la suite, on associera une couleur à chacun de ces points selon sa valeur.

Le résultat de la visualisation de la carte d'écoulement obtenue est comme suit :

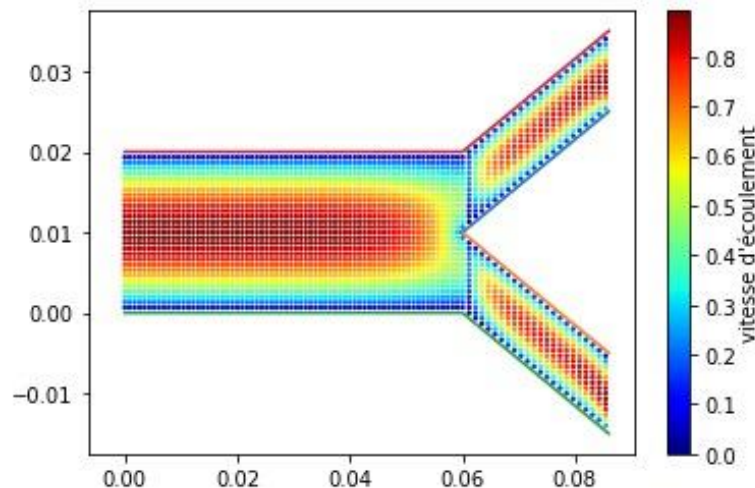


Figure 2 : Carte d'écoulement pour un angle d'ouverture de 60°

Sous projet 2 : Calcul des trajectoires des goulottes

A/ Objectif :

L'étude engagée dans ce sous-projet consiste à mettre en place le calcul de la trajectoire des particules et leur dépôt dans un écoulement pulmonaire. Le but est de pouvoir visualiser la trajectoire d'une particule tout au long de son mouvement à l'intérieur d'une bifurcation.

B/ Principe d'interpolation :

Afin d'obtenir le tracé de cette trajectoire, nous avons attribué à chaque particule soumise à son poids et à la force de frottements une masse m , une position d'entrée (x_0, y_0) , et une vitesse d'entrée (V_{x0}, V_{y0}) . Nous avons dans un premier lieu calculé la trajectoire dans un tube rectangulaire en résolvant analytiquement le problème de Poiseuille à 2D.

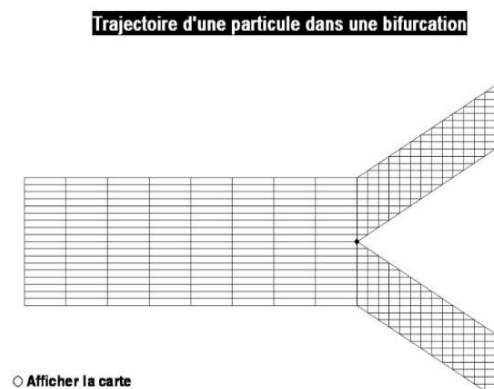
Nous avons par la suite pu la tracer en se basant sur les valeurs obtenues par la discrétisation dans le premier sous-projet et en utilisant une interpolation adéquate.

Celle-ci nous a permis d'avoir une continuité de la trajectoire en calculant la vitesse en tout point à l'intérieur de notre maillage. En effet, nous connaissons la vitesse du fluide en chaque point de la grille, nous avons donc utilisé une interpolation bilinéaire pour pouvoir en déduire celle en chaque point se trouvant à l'intérieur des rectangles du tube ainsi que des rectangles de la bifurcation.

Et en ce qui concerne les points se trouvant à l'intérieur des triangles formés aux limites de la bifurcation nous avons opté pour une interpolation triangulaire à partir de laquelle nous avons pu déterminer la vitesse en chaque point se trouvant dans ces positions.

C/ Interface graphique :

Nous avons préféré que notre traçage se fasse en utilisant des paramètres modifiables, que l'utilisateur fait entrer lui-même.



Paramètres	
$x_0 =$	0
$y_0 =$	0
$v_{x0} =$	0.5
$v_{y0} =$	0
$m =$	$1e-14$
$r =$	$5e-06$
$\eta =$	$1.79e-05$
$dP =$	50
$L =$	0.06
$n_l =$	17
$n_c =$	9
$teta =$	60
$dt =$	$1e-06$

Comme le montre la photo de l'interface, l'utilisateur pourra insérer :

- Des positions initiales : x_0 et y_0
- Des vitesses initiales : V_{x0} et V_{y0}
- La masse de la particule : m
- Le rayon de la particule : r
- Le coefficient de viscosité du fluide : $\eta = \text{éta}$
- La différence de pression entre l'entrée et la sortie de la bifurcation : dP
- La longueur du tube : L
- Le nombre de lignes et de colonnes

de la branche principale : n_l et n_c

- L'angle $\theta = \text{teta}$
- La différence de temps dt entre deux points successifs.

Figure 3 : Interface graphique

On pourra donc visualiser la trajectoire de la particule caractérisée par les paramètres qu'il a choisis avec un message affichant si la particule se dépose sur la bifurcation ou non.

Le choix de laisser tous les paramètres variables nous permettra alors de pouvoir remarquer l'impact de leur variation sur le chemin suivi par la particule.

Exemple1 :

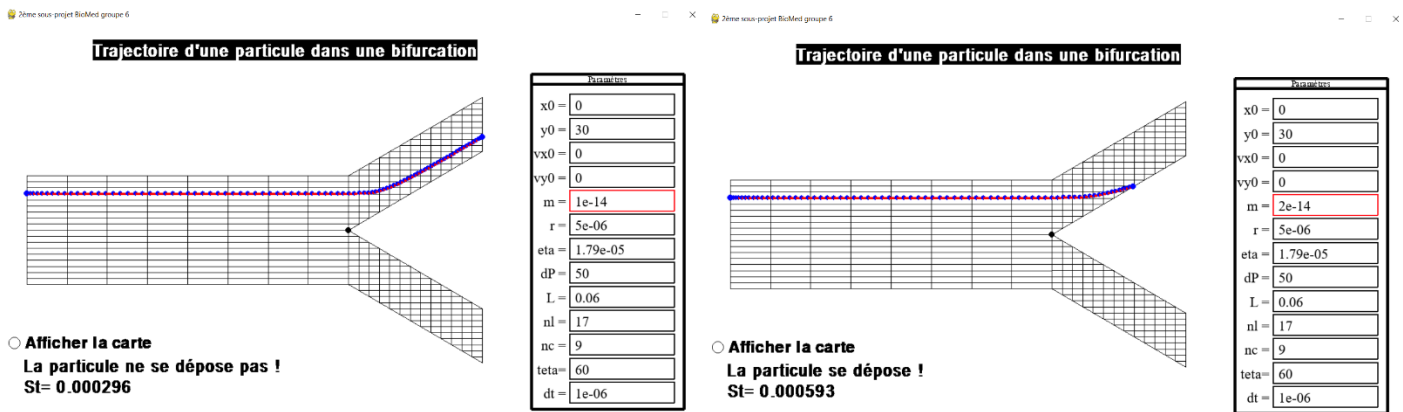


Figure 4 : Influence de la variation de la masse m sur la trajectoire de la particule

Exemple2 :

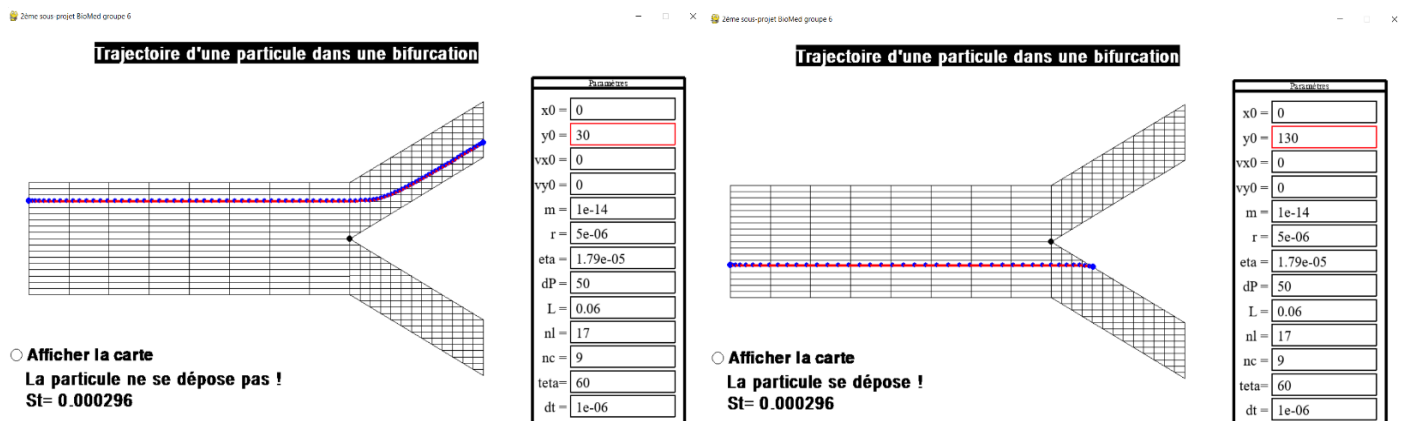


Figure 5 : Influence de la variation de y0 sur la trajectoire de la particule

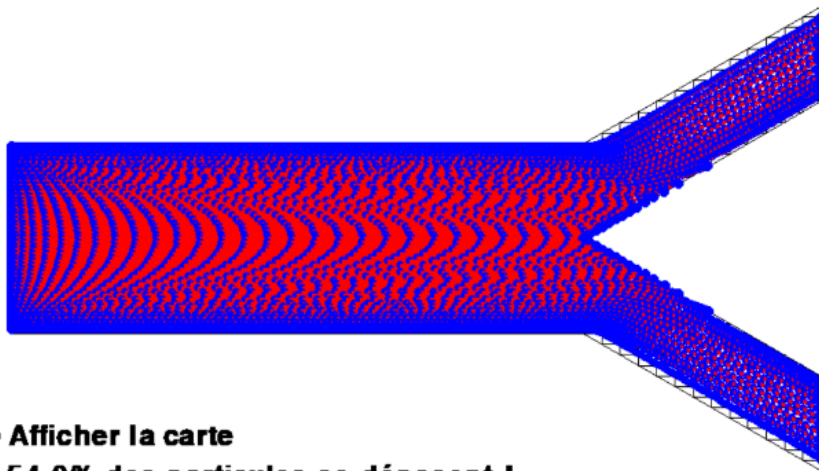
L'interface contient aussi le bouton « Afficher la carte » qui permet de visualiser, en même temps, les trajectoires de plusieurs particules avec des positions initiales différentes balayant toute la colonne d'entrée (figure 12) afin de pouvoir calculer le pourcentage de dépôt des particules indiqué dans l'interface par :

$$\text{pourcentage de dépôt} = \frac{\text{nombre de particules déposées}}{\text{nombre de particules à l'entrée}}$$

Équation 12

On affiche aussi le nombre de Stokes qui s'écrit en fonction des paramètres : $St = \frac{\rho_p d_p^2 u}{18\mu D}$

Trajectoire d'une particule dans une bifurcation



● Afficher la carte

54.0% des particules se déposent !

St= 0.000296

Figure 6 : carte des trajectoires pour 50 particules

Paramètres	
x0 =	0
y0 =	30
vx0 =	0
vy0 =	0
m =	1e-14
r =	5e-06
eta =	1.79e-05
dP =	50
L =	0.06
nl =	17
nc =	9
teta =	60
dt =	1e-06

D/ Etude statistique :

Nous avons, dans cette partie, cherché à varier certains paramètres et ce pour déterminer leur influence sur le pourcentage de dépôts des particules.

Dans un 1^{er} temps, on s'est intéressé au traçage de la courbe de dépôts des particules en fonction du nombre de stokes pour des angles θ fixés.

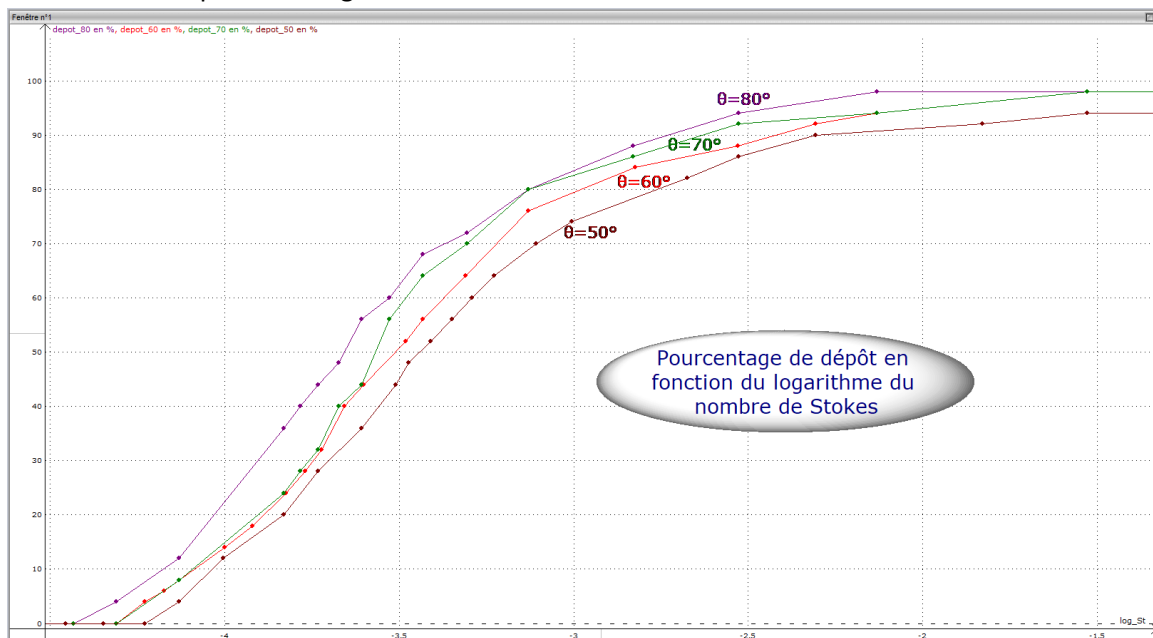


Figure 7 : courbe de variation du dépôt en fonction du nombre de stokes

On remarque sur le graphe que le pourcentage de dépôt des particules augmente avec l'augmentation du nombre de stokes et avec l'augmentation de l'angle θ .

Dans un 2^{ème} temps, nous avons étudié la variation du pourcentage de dépôt des particules en fonction de la masse volumique et ce pour 4 valeurs différentes de θ .

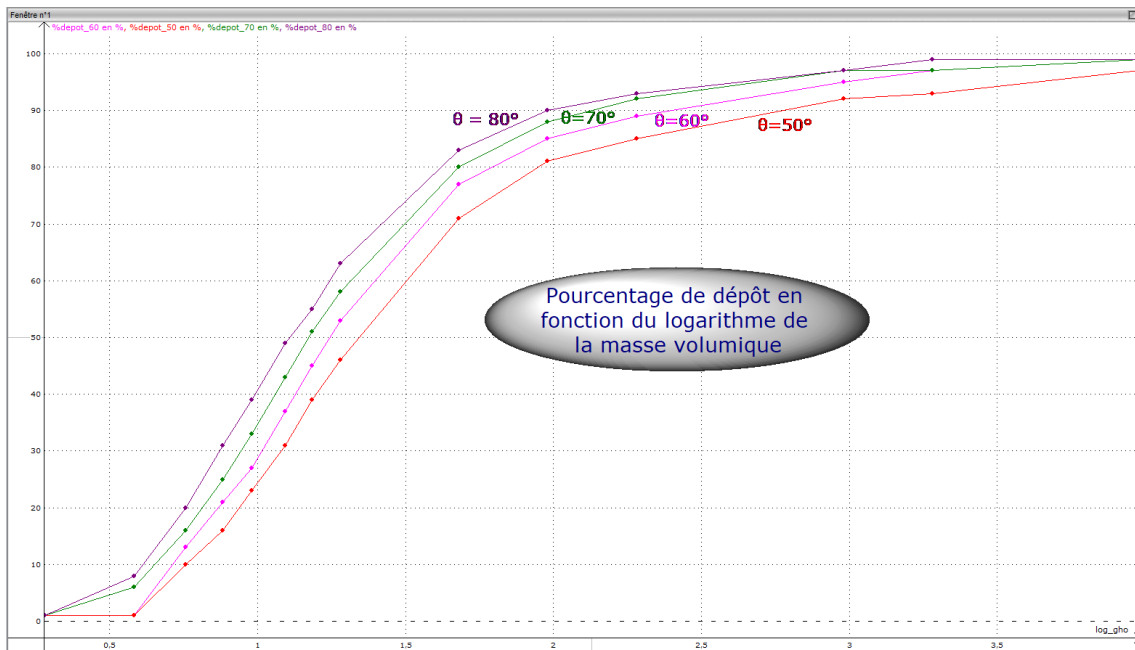


Figure 8 : courbe de variation du dépôt en fonction de la masse volumique

Nous remarquons une augmentation du pourcentage de dépôt avec l'augmentation du logarithme de la masse volumique.

Ces résultats sont en accord avec les résultats trouvés dans la littérature [2], ce qui nous pousse à s'assurer de la justesse de nos résultats.

Conclusion générale :

En guise de conclusion, notre étude s'est lancée à partir d'une question fondamentale : « **Où des gouttelettes inhalées se déposent-elles dans le poumon ?** » et nous a permis d'apporter des éléments de réponses qui ont mis en exergue différents paramètres qui influencent la trajectoire ainsi que le dépôt des particules dans le poumon. Ensemble de résultats qui peut être alors exploiter dans l'étude du virus Sars-cov-2. En outre, notre étude s'est faite principalement sur une seule bifurcation et peut par la suite être étendue sur l'ensemble des bifurcations du poumon.

Annexe :

Sous projet 1 – A :

1 /Cas d'écoulement de Poiseuille :

[0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414]
[0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736]
[0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966]
[1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104]
[1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15]
[1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104	1.104]
[0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966]
[0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736]
[0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414]

Figure 9 : Carte d'écoulement sans annuler la valeur du point de bifurcation

[0.414	0.413	0.413	0.411	0.407	0.397	0.372	0.318	0.23]
[0.735	0.735	0.733	0.73	0.722	0.703	0.656	0.548	0.358]
[0.965	0.964	0.963	0.958	0.947	0.92	0.854	0.695	0.373]
[1.103	1.102	1.1	1.095	1.082	1.05	0.97	0.768	0.261]
[1.149	1.148	1.146	1.14	1.127	1.093	1.008	0.783	-0.]
[1.103	1.102	1.1	1.095	1.082	1.05	0.97	0.768	0.261]
[0.965	0.964	0.963	0.958	0.947	0.92	0.854	0.695	0.373]
[0.735	0.735	0.733	0.73	0.722	0.703	0.656	0.548	0.358]
[0.414	0.413	0.413	0.411	0.407	0.397	0.372	0.318	0.23]

Figure 10 : Carte d'écoulement en annulant la valeur au point de bifurcation

On peut remarquer que la carte d'écoulement vérifie le profil de vitesse de l'écoulement de Poiseuille avec une décélération due au fait que le fluide rencontre un obstacle lorsque le tube se divise en deux branches dérivées.

Sous projet 2 – B :

1/ L'interpolation rectangulaire :

On pose :

$$\begin{aligned} t &= x - i \\ u &= y - j \end{aligned}$$

Équation 13

Une interpolation linéaire sur le côté gauche permet d'obtenir la valeur au point A :

$$V_A = (1 - u)V_{i,j} + uV_{i,j+1}$$

Équation 14

De même pour le point B sur le côté droit :

$$V_B = (1 - u)V_{i+1,j} + uV_{i+1,j+1}$$

Équation 15

La valeur au point M est obtenue en faisant une interpolation linéaire entre les points A et B :

$$V_M = (1 - t)V_A + tV_B = (1 - t)(1 - u)V_{i,j} + t(1 - u)V_{i+1,j} + tuV_{i+1,j+1} + (1 - t)uV_{i,j+1}$$

Équation 16

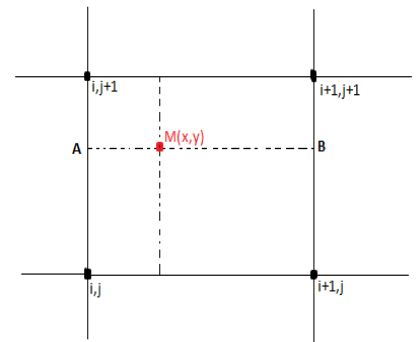


Figure 12

2/ L'interpolation triangulaire :

On pose :

$$\begin{aligned}u &= j - y \\u' &= 1 - u \\t &= x - i\end{aligned}$$

Équation 17

Par interpolation :

$$V_M = u' \times V_{i,j} + t \times V_{i+1,j-1} + (1 - t - u')V_{i,j-1}$$

Équation 18

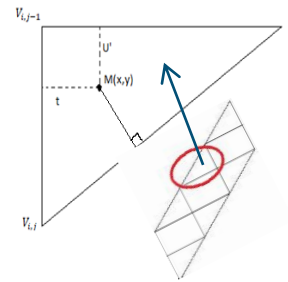


Figure 13

Bibliographie :

[1] : Interpolation bilinéaire. (2019, mai 13). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. Page consultée le 14:13, mai 13, 2019 à partir de

http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Interpolation_bilin%C3%A9aire&oldid=159239704.

[2] : Cheng, Yung. (2003). Aerosol Deposition in the Extrathoracic Region. *Aerosol science and technology : the journal of the American Association for Aerosol Research*. 37. 659-671.

[10.1080/02786820300906](https://doi.org/10.1080/02786820300906).