Chapitre 3: Spectre et Corrélation

Dr Ndeye Fatou NGOM

Ecole Polytechnique de Thiès GEM-AERO DIC1 2019-2020

15 novembre 2019

Plan

Fréquence

- La fréquence correspond au nombre de fois qu'un motif se répète par seconde.
  - **Hautes fréquences** : variations qui se répètent fréquemment.
  - **Basses fréquences** : variations qui se répètent peu.
- **Unité (Physique)** : Hertz, nombre de cycles par seconde.
- **Spectre** : représentation graphique de l'amplitude ou de la phase en fonction de la fréquence.
  - **Fréquence fondamentale** que nous noterons f,
  - **Fréquence radiale** : souvent notée Ω et vaut $2\pi f$.
- Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquence donnée est appelée **signal à bande limitée** ou à **spectre à support borné**.

Bande spectrale

- La **bande spectrale** définit le domaine des fréquences où le spectre a des valeurs non nulles.
- Le domaine des fréquences occupés par le spectre est appelé la **largeur de bande spectrale** ($\Delta f = f_{max} - f_{min}$) du signal.
- **Remarques** :
  - Les **sons audibles** vont des EBF (20hz) aux TBF (20khz).
  - Lorsque la fréquence du signal devient très grande ($\succ 3ghz$), on raisonne en **longueur d'onde**. Exemple : les **signaux lumineux**.
- Si $f_{moy} = \frac{f_{max}+f_{min}}{2}$
  - **Signaux à bande étroite** : $\Delta f \prec\prec f_{moy}$,
  - **Signaux à large bande** : $\Delta f \succ\succ f_{moy}$

Joseph Fourier

Un signal peut être décomposé en une somme de signaux plus simples.

Decomposition de Fourier

Décomposition de Fourier

- fait apparaître les fréquences contenus dans un signal,
- permet d'analyser le contenue fréquentiel d'un signal et de déterminer son spectre.
- Permet d'exprimer un signal comme la somme pondérée de signaux exponentiels $e^{2j\pi ft}$, de fréquence f.
- Les **signaux exponentiels** sont
  - des **fonctions faciles à manipuler dont les propriétés sont bien connues.**
  - **ne sont pas déformés au cours de leur propagation dans les milieux linéaires et stationnaires**.
- **Deux types** : séries de Fourier, transformée de Fourier.

Décomposition sur une base de fonctions sinusoïdales

Théorème

Soit $x_{T_0}(t)$ un signal physiquement réalisable[1] *périodique de période T_0. Alors $\exists$ a_0 constant tel que*

$$x_{T_0}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left[\left(a_n cos\left(2\pi n f_0 t\right) + b_n sin\left(2\pi n f_0 t\right) \right) \right] \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_c^{c+T_0} x_{T_0}(t)\, cos\left(2\pi n f_0 t\right) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_c^{c+T_0} x_{T_0}(t)\, sin\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

a_0 : **moyenne du signal**

1. Par exemple $x_{T_0}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Symétrie : simplifier le calcul

- Si $x_{T_0}(t)$ est paire, alors

$$x_{T_0}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n cos(2\pi n f_0 t)$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) \, cos(2\pi n f_0 t) \, dt$$

- Si $x_{T_0}(t)$ est impaire, alors

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} b_n sin(2\pi n f_0 t) \, ; b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) \, sin(2\pi n f_0 t) \, dt$$

- Tout signal peut être décomposée en somme d'un signal paire et d'un signal impaire

Harmonique de rang n

- **Forme trigonométrique**

$$u_n(t) = a_n cos(2\pi f_n t) + b_n sin(2\pi f_n t) \tag{2}$$

Forme polaire : mieux identifier l'amplitude et la phase des composantes d'un signal

$$u_n(t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \tag{3}$$

- $\varphi_n = arctg\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$ la **phase**
- $D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, **l'amplitude**.
- $f_n = nf_0$, la **fréquence de l'harmonique**.
- $\frac{D_n}{\sqrt{2}}$ la **valeur efficace de l'harmonique**.
- Le **fondamental** D_1 est l'harmonique de rang 1.

Existence : $x_{T_0}(t)$ est développable en séries de Fourier

Deux conditions (Dirichlet)

1. $x_{T_0}(t)$ est définie et continue sur l'intervalle $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$ à l'exception d'un nombre fini de points.
2. $x_{T_0}(t)$ ne présente pas des discontinuités de seconde espèce.

Exemple

1. **Signaux vérifiant les conditions de Dirichlet** : tous les signaux d'énergie finie.
2. **Signaux ne vérifiant pas les conditions de Dirichlet** : tous les signaux admettant une discontinuité de seconde espèce
   2.1 La fonction tangente.
   2.2 La fonction de Dirichlet : D(x)=1 si x est rationnel et 0 sinon.

Décomposition de Fourier d'un signal non périodique

Définition

Soit $x(t)$ une fonction à temps continu et tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$ est bornée. On appelle

- **Transformée de Fourier** *de $x(t)$, si elle existe,*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

- **Transformée de Fourier inverse**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

$f \in \mathbb{C}$

Remarque

- La transformée de Fourier $X(f)$ et la transformée de Fourier inverse $x(t)$ représentent un même signal respectivement dans l'espace fréquentiel et l'espace temporel.
- La transformée de Fourier est une **transformée de Laplace** prise pour $p = j2\pi f$.
- La transfomée de Laplace bilatérale d'une fonction $x(t)$ est la fonction $X(p)$ définie par l'inrégrale,

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt$$

  où $p \in \mathbb{C}$
- **En Télécommunications**, la transformée de Fourier est plus utile que la transformée de Laplace.

Représentation dans l'espace fréquentielle

- Si $X(f) = TF\left(x\left(t\right)\right)$, alors

$$X\left(f\right) = \left|X\left(f\right)\right| e^{j\theta(f)} = A\left(f\right) + jB\left(f\right)$$

où $\left|X\left(f\right)\right| = \sqrt{A\left(f\right)^2 + B\left(f\right)^2}$ est le **module** de $X\left(f\right)$ et $\theta\left(f\right) = arctg\left(\frac{B(f)}{A(f)}\right)$ la **phase** de $X\left(f\right)$

- **Spectre d'amplitude** : représentation du module $\left|X\left(f\right)\right|$ en fonction de la fréquence,
- **Spectre de phase** : représentation de la phase des valeurs complexes du spectre en fonction de la fréquence,
- **spectre de raie** : spectre à support discret.

Convolution

Definition

Produit de convolution des deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{\mathbb{R}} x_1(t')\, x_2(t - t')\, dt' \tag{4}$$

Remarque

- La convolution est une opération fonctionnelle,
- L'impulsion de Dirac, $\delta(t)$, est l'élément neutre du produit de convolution.

Impulsion de Dirac

Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Propriétés

1. $(x * \delta)(t) = (\delta * x)(t) = x(t)$
2. $(1 * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, dt'$
3. $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$,
4. $x(t)\, \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$
5. $(x * \delta)(t - t_0) = x(t - t_0)$.
6. $TF(\delta(t)) = 1\,;\ TF(1) = \delta(f)$

Propriétés

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f) \rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$\int_0^t x(u) du$	$\rightleftharpoons$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$

Identité de Parseval

$x_1(t)$, $x_2(t)$ deux signaux :

- **Identité de Parseval** : il y a conservation de l'énergie entre l'espace temporelle et l'espace fréquentielle.

$$\int_{\mathbb{R}} x_1(t)\, x_1^*(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} X_1(f)\, X_1^*(f)\, df$$

$$\int_{\mathbb{R}} x_1(t)\, x_2^*(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} X_1(f)\, X_2^*(f)\, df$$

- **Relation de Gabor Heisenberg**
  - On ne peut avoir un signal ayant à la fois une dispersion temporelle et une dispersion fréquentielle arbitrairement petite.
  - Si $\Delta t \Delta f = \frac{1}{4\pi}$, alors $x(t)$ est un **signal de type gaussien**.

Corrélation et densité spectrale

- **Corrélation** : étudier la ressemblance entre signaux. On distingue deux groupes de fonctions
  - Les fonctions d'**autocorrélation** qui permettent de comparer un signal avec lui même mais décalé dans le temps.
  - Les fonctions d'**intercorrélation** qui permettent de comparer deux signaux que l'on décale dans le temps.
- **Densité spectrale de Puissance (DSP)** : mesure de dispersion de la puissance d'un signal en fonction de la fréquence
  - Transformée de Fourier de la fonction de corrélation,
  - La densité spectrale se mesure en $(Joule/Hertz)$.
- **Densité Interspectrale de Puissance** : transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation.

Signaux déterministes à énergie finie

- $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 \, df \prec \infty$
- **Produit scalaire**

$$\prec x(t), y(t) \succ = \int_{\mathbb{R}} x(t) \, y^*(t) \, dt$$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \prec x(t), x(t-\tau) \succ = \int_{\mathbb{R}} x(t) \, x^*(t-\tau) \, dt$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \prec x(t), y(t-\tau) \succ = \int_{\mathbb{R}} x(t) \, y^*(t-\tau) \, dt$$

- **Densité Spectrale**

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

Signaux deterministes périodiques

- $P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt \prec \infty$

  $\prec x(t), y(t) \succ = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t) \, dt$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \prec x(t), x(t-\tau) \succ = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) x^*(t-\tau) \, dt$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \prec x(t), y(t-\tau) \succ = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t-\tau) \, dt$$

- **DSP** de $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k exp(j2\pi f_0 t)$

$$Sx_x(f) = TF[R_x(\tau)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

Signaux déterministe à puissance finie

- $P_m = lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2\,dt \prec \infty$
- **Produit scalaire**

$$\prec x(t), y(t) \succ == lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,y^*(t)\,dt$$

- **Fonction d'intercorrelation**

$$R_{xy}(\tau) = \prec x(t), y(t-\tau) \succ = lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$$

- **Densité spectrale**

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$$

où $X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,exp(-j2\pi ft)\,dt$

Signaux aléatoires Stationaires

Si X_i représente la variable aléatoire correspondandant au processus aléatoire $X(t,\xi)$ à l'instant t_i, alors

- **Fonction de répartition** : $F_{X_i}(u) = F_X(u,t_i) = P(X_i \prec u)$,
- **Densité de probabilité** : $p_{X_i}(u) = p_X(u,t_i) = \frac{d}{du}F_{X_i}(u)$
- **Moment d'ordre 1 (Moyenne)** :
  $E[X(t,\xi)] = E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} u p_{X_i}(u)\,du$, indépendant de t
- **Moment centré d'ordre 2** :
  $E\left[(X_i - E[X_i])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}(u - E[X_i])^2 p_{X_i}(u)\,du$
  indépendant de t
- **Stationarité** : la moyenne du signal est constante,
- **Bruit blanc** : la moyenne du signal est nulle,
- **Produit scalaire**

$$\prec x(t), y(t) \succ = E[x(t)\,y^*(t)]$$

Correlation et densité spectrale

$\prec x(t), y(t) \succ = E[x(t)\, y^*(t)]$

- **Fonction d'autocorrélation** $R_x(\tau) = E[x(t)\, x^*(t-\tau)]$
- **Fonction d'intercorrélation**
  $E[x(t)\, y^*(t-\tau)] = \prec x(t), y(t-\tau) \succ$
- **Puissance moyenne**

$$P = R_x(0) = E\left[|x(t)|^2\right] = \int_{\mathbb{R}} S_x(f)\, df$$

- **Densité spectrale**

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$$

- **Remarque** : $X(f)$ n'existe pas.

Spectre d'un Signal échantillonné

Le spectre du signal échantillonné a pour expression

$$TF\left[x_e\left(t\right)\right] = X_e\left(f\right) = F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f - nf_e\right)$$

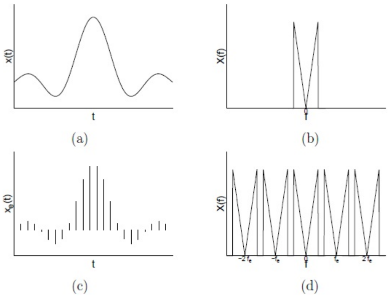

FIGURE: Echantillonnage : a) signal b) spectre du signal c) signal échantillonné d) spectre du signal échantillonné

Problèmes

- **Problème** : **quelle est la condition sur Fe pour que, à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on puisse reconstruire intégralement $x(t)$** ?
- **Théorème de Shanon**
  - Supposons qu'un signal $x(t)$ a un spectre à support borné ie $\{X(f) = 0, |f| \succ f_{max}\}$. Alors, il est possible d'échantillonner ce signal sans perdre d'information. Il suffit pour cela de **choisir une fréquence d'échantillonnage** $f_e \succ 2f_{max}$.
  - La condition $f_e \succ 2f_{max}$ est appelée **condition de Shannon**. La fréquence limite $\frac{f_e}{2}$ est appelée **fréquence de Shannon** ou **fréquence de Nyquist** ou encore **fréquence de repliement** (**folding frequency**).

Reconstruction d'un signal

Formule d'interpolation de Shannon

- Un signal qui a été échantillonné en respectant la condition de Shannon, peut s'exprimer sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_e x(nT_e) \frac{sin(\pi f_e (t - nT_e))}{\pi (t - nT_e)}$$

- La formule d'interpolation de Shannon correspond à une décomposition du signal $x(t)$ sur la base des fonctions orthogonales

$$s_n(t) = \frac{sin(\pi F_e (t - nT_e))}{\pi (t - nT_e)}; x(nT_e) = \int_{\mathbb{R}} x(t) s_n(t) \, dt$$

Transformée de Fourier discret

$x(n) = x(nT_e)$ comme un échantillon du signal discret x.

Transformée de Fourier Discrète

- Transformée de Fourier Discrète (TFD) de la suite de N termes $\{x(n), n \in [0, N-1]\}$, la suite de N termes $\{X(n), n \in [0, N-1]\}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

- La transformée de Fourier inverse, calculée à partir des $X(k)$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Forme matricielle

Notons par W_N, la matrice obtenue en faisant varier k de 0 à $N-1$

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & . & . & . & . & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & . & . & . & . & w^{2(N-1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & . & . & . & . & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ . \\ X(N-1) \end{pmatrix} = W_N \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

TFD

Le **calcul de la transformée de Fourier discrète se résume à une multiplication matricielle** de la forme

$$X = W_N x \tag{6}$$

Comme la matrice W_N est inversible, on vérifie que la TFD de X inverse est donnée

$$x = \frac{1}{N} W_N * X$$

Propriétés de la TFD

La TFD possède la plupart des propriétés de la transformée de Fourier continue à cause des propriétés de W_N.

Références

- Christian Jutten, 2009. Note de cours théorie du signal deuxième année du département 3i. Université Joseph Fourier. Polytech Grenoble.
- Jean Yves Tourneret, 2013. Note de cours traitement du Signal. Université de Toulouse.
- Bellanger, M. 2012. Traitement numérique du signal, Cours et exercices corrigés, 9 eme édition Second et troisième cycles Master, Écoles d'ingénieurs. Dunod.
- Gaillard, O and Lengellé, R, 2006. Analyse et traitement du signal. Ellipse.