扱いたい構造は以下の全てを持つ圏

- 自己双対コンパクト閉圏 (Self–Dual Compact Closed Category)
- トレース付き有限双積 (Traced Finite Biproduct)
- 半環圏（Rig Category）
- 逆圏（Inverse Category）
- 上限による豊穣化（Sup enrichment）
- 余代数モーダリティの余クライスリ圏 (coKleisli Category of coAlgebra Modality)
- ダガーファイブレーション (Dagger Fibration)

0.1 圏

定義 1 (Category（圏）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える

- 対象（Object）の類 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ を持つ（各対象は A, B, C 等の大文字で表す）
- $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対する射（Morphism）の類 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を持つ（各射は単に $A \to B$ で表すか，f, g, h 等の小文字で表す）
  - 射 $f : A \to B$ の A を始域（Domain），B を終域（Codomain）と呼び，それぞれ $\mathrm{Dom}(f)$，$\mathrm{Cod}(f)$ で表す
- 任意の対象 A に対して恒等射 $\mathrm{id}_A : A \to A$ が存在する
- 任意の射 $f : A \to B$ 及び $g : B \to C$ に対して射の合成 $g \circ f : A \to C$ が存在する
- 任意の対象 A,B 及び射 $f : A \to B$ について，単位律 $\mathrm{id}_B \circ f = f \quad f \circ \mathrm{id}_A = f$ を満たす
- 任意の射 $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対して結合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を満たす

定義 2 (Monomorphism（単射）)**.** 射 $f : A \to B$ は，任意の射 $g_1, g_2 : C \to A$ に対して $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき，単射と呼ぶ.

定義 3 (Epimorphism（全射）)**.** 射 $f : A \to B$ は，任意の射 $g_1, g_2 : B \to C$ に対して $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき，全射と呼ぶ.

定義 4 (Bimorphism（双射）)**.** 単射かつ全射である射を全単射もしくは双射と呼ぶ.

定義 5 (Isomorphism（同型射）)**.** 射 $f : A \to B$ が同型射（Isomorphism）であるとは，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす $g : B \to A$ が存在することをいう．このとき g は f の逆射（Inverse morphism）と呼び f^{-1} で表す．二つの等式のうち，左のみ満たす場合の射 g を f の引き込み（Retraction）と呼び，右のみ満たす場合の g を f の断面（Section）と呼ぶ．射が同型射であることを強調する場合，$f : A \xrightarrow{\cong} B$ と表す．圏の対象 A, B の間に同型射が存在するとき，A と B は同型（Isomorphic）であるといい，$A \cong B$ で表す.

任意の同型射は双射だが，双射は必ずしも同型射ではないことに留意すること.

定義 6 (Functor（関手）)**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とする．関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は，$\mathcal{C}$ の対象を $\mathcal{D}$ の対象へ写す関数 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ と，$\mathcal{C}$ の射を $\mathcal{D}$ の射に写す関数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}A, \mathbf{F}B)$ であり，$\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$ と $\mathbf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{(\mathbf{F}A)}$ を満たす.

定義 7 (Natural Transformation（自然変換）)**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とし，$\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．自然変換 $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ は，射の族 $\tau_A : \mathbf{F}A \to \mathbf{G}A$ から成り，圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ について，以下の図式が可換（矢印をどの順番に通っても，射の合成に関して等式が成り立つこと）になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}A & \xrightarrow{\tau_A} & \mathbf{G}A \\ {\scriptstyle \mathbf{F}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{G}f} \\ \mathbf{F}B & \xrightarrow{\tau_B} & \mathbf{G}B \end{array}$$

任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について射 τ_A が $\mathcal{D}$ の同型射であるとき，τ は自然同型（Natural Isomorphism）であるという.

定義 8 (Categorical Equivalence（圏同値）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は，関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在して $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} \cong \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ かつ

$\mathbf{Id}_{\mathcal{D}} \cong \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ であるとき，同値であるという（$\mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}}$ は各圏の恒等関手）．圏同値は $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ で表す．

定義 9 (Opposite Category（反対圏）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の反対圏 $\mathcal{C}^{op}$ とは，$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ である圏である．

定義 10 (Adjunction（随伴）[1])**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とする．関手 $\mathbf{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathbf{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が随伴（Adjunction）であるとは，対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ と $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ について自然となる以下の自然同型が成り立つときであり，$\mathbf{L} \dashv \mathbf{R}$ であらわす．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{L}A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{R}B)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathbf{L}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "\mathbf{R}"] \end{tikzcd}$$

0.2　モノイダル圏

定義 11 (Monoidal Category（モノイダル圏）[2])**.** モノイダル圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える

- 双関手 $(-) \otimes (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（モノイダル積と呼ばれる）
- 単位対象 $\mathrm{I} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- （自然同型）結合子 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$
- （自然同型）左単位子 $\lambda_A : \mathrm{I} \otimes A \xrightarrow{\cong} A$
- （自然同型）右単位子 $\rho_A : A \otimes \mathrm{I} \xrightarrow{\cong} A$
- 二つの図式（五角等式，三角等式）が可換となる

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A \otimes B,C,D}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_D"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B \otimes C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes \mathrm{I}) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathrm{I},B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"'] & & A \otimes (\mathrm{I} \otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

定義 12 (Symmetric Monoidal Category（対称モノイダル圏）[2])**.** 対称モノイダル圏 $\mathcal{C}$ はモノイダル圏であり，以下の構造を備える．

- （自然同型）対称子 $\sigma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$
- 等式 $\sigma_{A,B} = \sigma^{-1}_{B,A}$ を満たす
- 六角等式が可換となる

$$\begin{tikzcd}
 & (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{B,A,C}"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[dr, "\mathrm{id}_B \otimes \sigma_{A,C}"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\sigma_{A,B} \otimes \mathrm{id}_C"] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C}"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
 & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma_{A,B \otimes C}"'] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[ur, "\alpha_{B,C,A}"'] &
\end{tikzcd}$$

定義 13 (Symmetric Monoidal Closed Category（対称モノイダル閉圏）[3])**.** 対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ は対象モノイダル圏であり，以下の構造を備える．

- 双関手 $(-) \multimap (-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（内部ホムと呼ばれる）
- 任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，モノイダル積 $\otimes$ と内部ホム $\multimap$ の随伴 $((-) \otimes A \dashv A \multimap (-)) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が存在する

命題 14. 対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について、同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ を持つ．

証明. モノイダル積 $\otimes$ と内部ホム $\multimap$ の随伴から自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C)$$

が得られる．任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，自然同型の合成により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, (A \otimes B) \multimap C) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes (A \otimes B), C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((X \otimes A) \otimes B, C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes A, B \multimap C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A \multimap (B \multimap C))
\end{aligned}$$

を得る．米田の補題より，同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ が存在する． □

命題 15. 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について、同型 $\mathrm{I} \multimap A \cong A$ を持つ．

証明. 任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について、自然同型の合成により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{I} \multimap A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes \mathrm{I}, A) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)
\end{aligned}$$

を得る．米田の補題より、同型 $\mathrm{I} \multimap A \cong A$ が存在する． □

命題 16. 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，以下の 3 つの射を持つ．

$$\begin{aligned}
\eta'_A &: \mathrm{I} \to A \multimap A \\
\mathrm{eval}_{A,B} &: (A \multimap B) \otimes A \to B \\
\mathrm{comp}_{A,B,C} &: (A \multimap C) \otimes (B \multimap C) \to A \multimap C
\end{aligned}$$

証明. 恒等射 id_A より，射の同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I} \otimes A, A) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}, A \multimap A)
\end{aligned}$$

を得るので，射 η_A は存在する．次に，恒等射 $\mathrm{id}_{A \multimap B}$ より，射の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \multimap B, A \multimap B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B)$$

を得るので，射 $\mathrm{eval}_{A,B}$ は存在する．次に，合成射 $\mathrm{eval}_{B,C} \circ (\mathrm{id}_{B \multimap C} \otimes \mathrm{eval}_{A,B})$ より，射の同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes ((A \multimap B) \otimes A), C) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(((B \multimap C) \otimes (A \multimap B)) \otimes A, C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes (A \multimap B), A \multimap C)
\end{aligned}$$

を得るので，射 $\mathrm{comp}_{A,B,C}$ は存在する． □

命題 14, 命題 15, 命題 16 は，対称子を使用せず証明しており，モノイド閉圏でも成り立つ．

命題 16 で用いた射 $\mathrm{eval}_{A,B}$ より，射の同型から

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (A \multimap B), B) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (A \multimap B) \multimap B)
\end{aligned}$$

を得る．

定義 17 ($\star$-autonomous Category（$\star$- 自立圏）[3])**.** $\star$- 自立圏 $\mathcal{C}$ は対称モノイド閉圏であり，以下の構造を備える．

- 双対化対象 $\bot \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- 双対化関手 $(-)^\star := (-) \multimap \bot : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$
- （自然同型）二重双対 $A \xrightarrow{\cong} A^{\star\star}$

双対化関手 $(-)^\star$ から射の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C^\star) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C \multimap \bot)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \otimes B) \otimes C, \bot)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (B \otimes C), \bot)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C) \multimap \bot)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C)^\star)\end{aligned}$$

を得る．

二重双対により，以下の同型

$$A \otimes B \cong (A \multimap B^\star)^\star \qquad A \multimap B \cong (A \otimes B^\star)^\star \qquad A \multimap B \cong B^\star \multimap A^\star$$

を得る．

証明.

$$\begin{aligned}A \otimes B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B)^{\star\star}\\ &= ((A \otimes B) \multimap \bot)^\star\\ &\xrightarrow{\cong} (A \multimap (B \multimap \bot))^\star\\ &= (A \multimap B^\star)^\star\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{\star\star}\\ &= A \multimap (B^\star \multimap \bot)\\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star) \multimap \bot\\ &= (A \otimes B^\star)^\star\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{\star\star}\\ &= A \multimap (B^\star \multimap \bot)\\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star) \multimap \bot\\ &\xrightarrow{\cong} (B^\star \otimes A) \multimap \bot\\ &\xrightarrow{\cong} B^\star \multimap (A \multimap \bot)\\ &= B^\star \multimap A^\star\end{aligned}$$

□

同様に，自然同型の合成により $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B^\star, A^\star)$ を得る．また，命題 15 より，同型 $\mathrm{I}^\star \cong \bot$ を得る．

定義 18 (Compact Closed Category（コンパクト閉圏）[4][5])**.** コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ は $\star$- 自立圏であり，以下の構造を備える．

- （自然同型）自己双対 $\varsigma_{A,B} : (A \otimes B)^\star \xrightarrow{\cong} A^\star \otimes B^\star$
- （自然同型）自己双対 $\varsigma_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}^\star \xrightarrow{\cong} \mathrm{I}$

コンパクト閉圏の定義から同型を得る．

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star)^\star\\ &\xrightarrow{\cong} (A^\star \otimes B^{\star\star})\\ &\xrightarrow{\cong} A^\star \otimes B\end{aligned}$$

また，コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 A, B, C について，以下の射の同型を得る．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B^\star \otimes C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C)$$

コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ の恒等射 id_A について，二つの射の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I} \otimes A, A)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}, A \multimap A)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}, A^\star \otimes A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathrm{I} \multimap A)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^\star \multimap \mathrm{I}^\star)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^\star \multimap \mathrm{I})\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A^\star, \mathrm{I})\end{aligned}$$

から，$\eta_A : \mathrm{I} \to A^\star \otimes A$ と $\epsilon_A : A \otimes A^\star \to \mathrm{I}$ を得る．

コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 A について，η_A から射 $\mathrm{decomp}_{A,B,C} : A \multimap C \to (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)$ を以下の射の合成として得る

$$
\begin{aligned}
A \multimap C &\xrightarrow{\cong} (A^\star \otimes C) \\
&\xrightarrow{\rho_{A^\star \otimes C}} (A^\star \otimes C) \otimes \mathrm{I} \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}_{A^\star \otimes C} \otimes \eta_B} (A^\star \otimes C) \otimes (B^\star \otimes B) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}_{A^\star \otimes C} \otimes \sigma_{B^\star, B}} (A^\star \otimes C) \otimes (B \otimes B^\star) \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^\star, C, B \otimes B^\star}} A^\star \otimes (C \otimes (B \otimes B^\star)) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}_{A^\star} \otimes \sigma_{C, B \otimes B^\star}} A^\star \otimes ((B \otimes B^\star) \otimes C) \\
&\xrightarrow{\alpha^{-1}_{A^\star, B \otimes B^\star, C}} (A^\star \otimes (B \otimes B^\star)) \otimes C \\
&\xrightarrow{\alpha^{-1}_{A^\star, B, B^\star} \otimes \mathrm{id}_C} ((A^\star \otimes B) \otimes B^\star) \otimes C \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^\star \otimes B, B^\star, C}} (A^\star \otimes B) \otimes (B^\star \otimes C) \\
&\xrightarrow{\cong} (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)
\end{aligned}
$$

0.3　ダガー圏

定義 19 (†-Category（†- 圏）[2])**.** †- 圏 $\mathcal{C}$ は，以下の構造を備える．

- 関手 $\dagger : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$
- $\dagger$ は対象に対して恒等
- 対合的 $\dagger \circ \dagger = \mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$

†- 圏の定義から，任意の射 $: A \to B, g : B \to C$ について，以下の等式が導かれる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_A^\dagger &= \mathrm{id}_A &&: A \to A \\
(g \circ f)^\dagger &= f^\dagger \circ g^\dagger &&: C \to A \\
f^{\dagger\dagger} &= f &&: A \to B,
\end{aligned}
$$

$f^\dagger = f^{-1}$ となる f をユニタリーと呼び，$f^\dagger = f$ となる f を自己随伴と呼ぶ．

定義 20 (†-Functor（†- 関手）)**. ToDo**

定義 21 (†-Symmetric Monoidal Category（†- 対称モノイド圏）[2][4])**.** †- 対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ は，対称モノイド圏かつ †- 圏であり，以下の構造を備える．

- 任意の $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，$\alpha_{A,B,C}, \lambda_A, \rho_A, \sigma_{A,B}$ がユニタリ
- 関手 $\dagger$ が厳密モノイド関手であり，任意の射 f, g について，$(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$

定義 22 (†-Comact Category（†- コンパクト圏）[4])**.** †- コンパクト圏 $\mathcal{C}$ は，コンパクト閉圏かつ †- 対称モノイド圏であり，以下の構造を備える．

- 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，以下の図式が可換

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\epsilon_A^\dagger"'] & A^\star \otimes A \arrow[d, "\sigma_{A^\star, A}"] \\
& A \otimes A^\star
\end{tikzcd}
$$

定義から ϵ_A は $\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A, A^\star}$ として定義可能となる．逆に ϵ_A から η_A を定義することもできる．

†- コンパクト圏 $\mathcal{C}$ は，任意の対象 A, B の内部ホム $A \multimap B$ について，以下の図式を可換にする射 $\mathrm{dagger}_{A,B} : A \multimap B \to B \multimap A$ を持つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{I}, A \multimap B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathrm{I}, \mathrm{dagger}_{A,B})"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{I}, B \multimap A) \\
\mathrm{Hom}(A, B) \arrow[r, "(-)^\dagger"] & \mathrm{Hom}(B, A) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

0.4 豊饒圏

定義 23 ($\mathcal{V}$–圏（$\mathcal{V}$–category））**.** [6] $\mathcal{V}$ をモノイダル圏とする．$\mathbb{A}$ が $\mathcal{V}$ で豊穣化された圏（あるいは単に $\mathcal{V}$–圏）とは以下の要素からなる．

- $\mathbb{A}$ の対象 $\mathrm{Obj}(\mathbb{A})$
- 任意の対象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対してホム対象 $\mathbb{A}(A, B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{V})$
- 任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対する $\mathcal{V}$ の射 $u_A : I \to \mathbb{A}(A, A)$
- 任意の対象 $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対する $\mathcal{V}$ の射 $c_{A,B,C} : \mathbb{A}(B, C) \otimes \mathbb{A}(A, B) \to \mathbb{A}(A, C)$
- 任意の対象 $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対して以下の可換図式を満たす

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}(A, D) & \\
\mathbb{A}(C, D) \otimes \mathbb{A}(A, C) \arrow[ur, "c_{A,C,D}"] & & \mathbb{A}(B, D) \otimes \mathbb{A}(A, B) \arrow[ul, "c_{A,B,D}"'] \\
\mathbb{A}(C, D) \otimes (\mathbb{A}(B, C) \otimes \mathbb{A}(A, B)) \arrow[u, "u_{\mathbb{A}(C,D)} \otimes c_{A,B,C}"] & & (\mathbb{A}(C, D) \otimes \mathbb{A}(B, C)) \otimes \mathbb{A}(A, B) \arrow[ll, "\alpha_{\mathbb{A}(C,D),\mathbb{A}(B,C),\mathbb{A}(A,B)}"] \arrow[u, "c_{B,C,D} \otimes u_{\mathbb{A}(A,B)}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(B, B) \otimes \mathbb{A}(A, B) \arrow[r, "c_{A,B,B}"] & \mathbb{A}(A, B) & \mathbb{A}(A, B) \otimes \mathbb{A}(A, A) \arrow[l, "c_{A,A,B}"'] \\
I \otimes \mathbb{A}(A, B) \arrow[u, "u_B \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{A}(A,B)}"] \arrow[ur, "\lambda_{\mathbb{A}(A,B)}"'] & & \mathbb{A}(A, B) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}(A,B)} \otimes u_A"'] \arrow[ul, "\rho_{\mathbb{A}(A,B)}"]
\end{tikzcd}$$

ToDo 必要なら $\mathcal{V}$–関手，$\mathcal{V}$–自然変換も定義する．

0.5 有限双積

定義 24 (Finite Product（有限積）[2])**.** 圏 $\mathcal{C}$ における対象 A, B に対して有限積 $A \times B$ は，以下の構造を備える．

- 射 $\pi_1 : A \times B \to A$ と $\pi_2 : A \times B \to B$
- 任意の対象 C と射の組 $f : C \to A, g : C \to B$ に対して一意な射 $h : C \to A \times B$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

  射 h は $\langle f, g \rangle$ と表記されることが多い．
- （終対象）任意の対象 C に対して一意な射 $h : C \to \mathrm{I}$ が存在する対象 I

有限積からなる圏（デカルト圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である．

- （自然な射の族）複製 $\Delta_A : A \to A \otimes A$
- （自然な射の族）削除 $\diamond_A : A \to \mathrm{I}$

定義 25 (Finite Coproduct（有限余積）[2])**.**] 圏 $\mathcal{C}$ における対象 A, B に対して有限余積 $A + B$ は，以下の構造を備える．

- 射 $\iota_1 : A \to A \oplus B$ と $\iota_2 : B \to A \oplus B$
- 任意の対象 C と射の組 $f : A \to C, g : B \to C$ に対して一意な射 $h : A + B \to C$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"'] & A + B \arrow[u, dashed, "h"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"]
\end{tikzcd}$$

 射 h は $[f, g]$ と表記されることが多い．
- （始対象）任意の対象 C に対して一意な射 $h : \mathrm{I} \to C$ が存在する対象 I

有限余積からなる圏（余デカルト圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である．

- （自然な射の族）合併 $\nabla_A : A \oplus A \to A$
- （自然な射の族）追加 $\Box_A : \mathrm{I} \to A$

定義 26 (Finite Biproduct（有限双積）[2])**.** 圏 $\mathcal{C}$ における対象 A_1, A_2 に対して有限双積 $A_1 \oplus A_2$ は，以下の構造を備える．

- （零対象）任意の対象 A_1, A_2 に対して一意な零射 $0_{A_1,A_2} : A_1 \to O \to A_2$ が存在する対象 O
- 射 $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \to A_1$ と $\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \to A_2$
- π_1, π_2 に関して有限積
- 射 $\iota_1 : A_1 \to A_1 \oplus A_2$ と $\iota_2 : A_2 \to A_1 \oplus A_2$
- ι_1, ι_2 に関して有限余積
- $\delta_{ij} = \pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} \mathrm{id}_A & \text{if} \quad i = j \\ 0_{A_j,A_i} & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$

ここで零射 $0_{A_1,A_2}$ は任意の対象 $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ および任意の射 $f : Y \to Z, g : X \to Y$ に対して，以下の図式を可換にする射である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0_{X,Y}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "0_{X,Z}"] & Y \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "0_{Y,Z}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

有限双積からなる圏は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である．

- （自然な射の族）複製 $\Delta_A : A \to A \otimes A$
- （自然な射の族）削除 $\Diamond_A : A \to I$
- （自然な射の族）合併 $\nabla_A : A \otimes A \to A$
- （自然な射の族）追加 $\Box_A : I \to A$

有限双積を持つ圏は半加法圏 [7] である．半加法圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f, g : A \to B$ に対して射の加法

$$f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A : A \to B$$

と定義できる [8]．よって有限双積を持つ圏は可換モノイドで豊穣化された圏（**CMon**–圏）である [9, Def. 2.7.6]．（ここで **CMon** は対象を可換モノイド，射を可換モノイド間の準同型射とする圏）

射の加法は任意の射 $f, g, h : A \to B$ について以下の等式を満たす．

$$\begin{aligned} (f + g) + h &= f + (g + h) \\ 0_{A,B} + f = f &= f + 0_{A,B} \\ f + g &= g + f \end{aligned}$$

また，射の合成は射の加法を保存し，任意の対象 X, Y と任意の射 $f, g : A \to B, e : X \to A, h : B \to Y$ について，以下の

等式を満たす.

$$
\begin{aligned}
(f+g)\circ e &= f\circ e + g\circ e \\
h\circ (f+g) &= h\circ f + h\circ g \\
f\circ 0_{X,A} &= 0_{X,B} \\
0_{B,Y}\circ f &= 0_{A,Y}
\end{aligned}
$$

また，モノイダル圏 $\mathcal{C}$ について有限双積が保存されるとき，モノイダル積は射の加法を保存し，任意の対象 X,Y と任意の射 $f,g:A\to B, e,h:C\to D$ に対して，以下の等式を満たす.

$$
\begin{aligned}
(f+g)\otimes h &= f\otimes h + g\otimes h \\
f\otimes (e+h) &= f\otimes e + f\otimes h \\
0_{X,Y}\otimes f &= 0_{X,Y}
\end{aligned}
$$

可換モノイドが冪等率 $f+f=f$ も満たす，すなわち射の加法が交わり（join）になっており，さらに完備上半束（sup–lattice），つまりホム対象の任意の部分集合について交わりを持つとき，**CMon**–圏はむしろ **Sup**–圏である.

定義 27 (**Sup**–Category（**Sup**–圏））**.** [10, Def. 1.3.(i)] **Sup** は対象が完備上半束，射が完備上半束を保存する写像からなる圏である．**Sup**–圏 $\mathcal{C}$ のホム対象 $\mathcal{C}(A,B)$ の任意の部分集合 S に対して，$\mathcal{C}(A,B)$ 上の半順序に関する上限 $\bigvee_{s\in S} s$ を持つ．射の合成は上限を保存し，任意の射 $f:X\to A, g:B\to Y$ について，以下の等式を満たす.

$$
\begin{aligned}
\left(\bigvee_{s\in S} s\right)\circ f &= \bigvee_{s\in S}(s\circ f) \\
g\circ\left(\bigvee_{s\in S} s\right) &= \bigvee_{s\in S}(g\circ s)
\end{aligned}
$$

また，射の加法と同様に，モノイダル圏でもある **Sup**–圏 $\mathcal{C}$ について，モノイダル積が上限を保存するとき，以下の等式を満たす.

$$
\begin{aligned}
\left(\bigvee_{s\in S} s\right)\otimes f &= \bigvee_{s\in S}(s\otimes f) \\
g\otimes\left(\bigvee_{s\in S} s\right) &= \bigvee_{s\in S}(g\otimes s)
\end{aligned}
$$

定義 28 (**Sup**–Functor（**Sup**–関手））**.** [10, Def. 1.3.(ii)] **Sup**–圏間の関手 $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が射の上限を保存するとき，**Sup**–関手と呼ぶ.

$$
\mathbf{F}\left(\bigvee_{s\in S} s\right) = \bigvee_{s\in S}\mathbf{F}(s)
$$

Sup–圏はクオンタロイド（Quantaloid）という名前でも知られており [11]，multi-valued な論理やファジィ論理などに応用されている.

0.6 制限圏

定義 29 (Restriction Category（制限圏））**.** [12, Def. 2.1.1.] 圏 $\mathcal{C}$ について，$\mathcal{C}$ の任意の射 $f:A\to B$ に対して射 $\overline{f}:A\to A$ が割り当てられ，次の 4 つの条件を満たすとき，圏 $\mathcal{C}$ は制限構造を持ち，圏 $\mathcal{C}$ を制限圏と呼ぶ.

- 任意の射 $f:A\to B$ について，$f\circ\overline{f}=f$
- 任意の射 $f:A\to B$ と $g:A\to C$ について，$\overline{f}\circ\overline{g}=\overline{g}\circ\overline{f}$
- 任意の射 $f:A\to B$ と $g:A\to C$ について，$\overline{g\circ\overline{f}}=\overline{g}\circ\overline{f}$
- 任意の射 $f:A\to B$ と $g:B\to C$ について，$\overline{g}\circ f=f\circ\overline{g\circ f}$

ここで，射 $\overline{f}$ は f の restriction idempotent（制限べき等）と呼ばれる.

制限圏の射 $f : A \to B$ は $\overline{f} = \mathrm{id}_A$ であるとき total と呼ぶ.

制限圏は半順序集合 poset で豊穣化された圏となる [12, p.237][13, Lemma 1.6.3]. 射の半順序関係は次の形で与えられる.

$$f \leq g \Leftrightarrow f = g \circ \overline{f}$$

定義 30 (Restriction Functor（制限関手）). [13, 1.6.3 p.22] 制限圏間の関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が制限構造を保存するとき，$\mathbf{F}$ を制限関手と呼ぶ.

$$\overline{\mathbf{F}(f)} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{f}})$$

制限圏において，同型射を弱めた射を考える．制限圏 $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ に対して $f^\circ \circ f = \overline{f}$ と $f \circ f^\circ = \overline{f^\circ}$ を満たす唯一の射を制限同型射（restricted isomorphism）あるいは部分同型射（partial isomorphism）と呼ぶ.

定義 31 (Inverse Category（逆圏）). [12, section 2.3.2][14, Def. 3] 制限圏 $\mathcal{C}$ について，全ての射 $f : A \to B$ が部分同型射 f° を持つとき，$\mathcal{C}$ を逆圏（Inverse Category）と呼ぶ.

定義 32 (Join Restriction Category（結び制限圏）). **要調査**

結び制限圏は poset というよりは完備上半束（sup–lattice）で豊穣化された圏

定義 33 (Join Inverse Category（結び逆圏）). **要調査**

Giles の論文の Def. 10.3.1. で射の加法とモノイダル積，射の合成の組み合わせについて定義している（お互いを保存する形）

0.7 その他構造

定義 34 (Rig Category（半環圏）[15]). 半環圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える.

- （加法としての）対称モノイド構造 $(\mathcal{C}, \oplus, O)$
- （乗法としての）モノイド構造 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$
- （自然同型）左分配子 $\delta_l : A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- （自然同型）右分配子 $\delta_r : (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- （自然同型）左吸収子 $\kappa_l : A \otimes O \cong O$
- （自然同型）右吸収子 $\kappa_r : O \otimes A \cong O$
- 諸々のコヒーレンス公理 [15]

定義 35 (Trace（トレース）). **要調査**

参考文献

[1] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Vol. 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer.

[2] Peter Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 813, , 08 2009.

[3] Michael Barr. *-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 1, No. 2, p. 159–178, 1991.

[4] Samson Abramsky. No-cloning in categorical quantum mechanics. *Semantic Techniques in Quantum Computation*, 10 2009.

[5] G.M. Kelly and M.L. Laplaza. Coherence for compact closed categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 19, pp. 193–213, 1980.

[6] G M Kelly. BASIC CONCEPTS OF ENRICHED CATEGORY THEORY.

[7] Stephen Lack. Non-canonical isomorphisms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 216, No. 3, pp. 593–597, 2012.

[8] Saunders MacLane. Duality for groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 56, No. 6, pp. 485–516, 1950.

[9] Brett Giles. An investigation of some theoretical aspects of reversible computing. Publisher: Graduate Studies.

[10] Andrew M. Pitts. Applications of sup-lattice enriched category theory to sheaf theory. Vol. s3-57, No. 3, pp. 433–480.

[11] Isar Stubbe. An introduction to quantaloid-enriched categories. Vol. 256, pp. 95–116.

[12] J.R.B. Cockett and Stephen Lack. Restriction categories i: categories of partial maps. Vol. 270, No. 1, pp. 223–259.

[13] Xiuzhan Guo. *Products, joins, meets, and ranges in restriction categories.* Ph.d. thesis, University of Calgary.

[14] Robin Kaarsgaard, Holger Bock Axelsen, and Robert Glück. Join inverse categories and reversible recursion. Vol. 87, pp. 33–50.

[15] Miguel L. Laplaza. Coherence for distributivity. In G. M. Kelly, M. Laplaza, G. Lewis, and Saunders Mac Lane, editors, *Coherence in Categories*, pp. 29–65, Berlin, Heidelberg, 1972. Springer Berlin Heidelberg.