# 高階の型付き可逆プログラミング言語

MountainSeal

## 1　構文

$$
\begin{array}{llll}
\text{Type Variable} & \ni & X, Y, Z & \\
\text{Term Variable} & \ni & x, y, z & \\
\text{Type} & \ni & S, T, U & ::= \quad X \mid \mathrm{I} \mid T \oplus T \mid T \otimes T \mid T \multimap T \mid \mu X.T \\
\text{Value} & \ni & v, w & ::= \quad x \mid () \mid \mathrm{inl}\ v \mid \mathrm{inr}\ v \mid v \times v \mid v \mapsto v \mid \mathrm{fold}_T\ v \mid \mathrm{trace}_T\ v \mid v \parallel v \mid v \mathbin{⨟} v \mid \varnothing \mid \mathrm{id} \\
\text{Term} & \ni & s, t, u & ::= \quad x \mid () \mid \mathrm{inl}\ t \mid \mathrm{inr}\ t \mid t \times t \mid t \mapsto t \mid \mathrm{fold}_T\ t \mid \mathrm{trace}_T\ t \mid t \parallel t \mid t \mathbin{⨟} t \mid \varnothing \mid \mathrm{id} \mid t^\dagger \\
\text{Expr} & \ni & e, f, g & ::= \quad t \mid e \mathbin{@} e \\
\text{Type Context} & \ni & \Theta & ::= \quad \ \mid \Theta, X \\
\text{Term Context} & \ni & \Gamma & ::= \quad \ \mid \Gamma, t : T \\
\text{Type Judgement} & \ni & \Theta \vdash T & \\
\text{Term Judgement} & \ni & \Gamma \vdash t : T & \\
\text{Expr Judgement} & \ni & \ \vdash e : T & \\
\text{Reduction} & \ni & t \Rrightarrow t &
\end{array}
$$

図 1　Syntax

## 2　型の構成

$$
\frac{}{\Theta, X \vdash X} \qquad \frac{}{\Theta \vdash I} \qquad \frac{\Theta \vdash T_1 \qquad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \oplus T_2} \qquad \frac{\Theta \vdash T_1 \qquad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \otimes T_2} \qquad \frac{\Theta \vdash T_1 \qquad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \multimap T_2} \qquad \frac{\Theta, X \vdash T}{\Theta \vdash \mu X.T}
$$

図 2　Formation rules

$$
\begin{array}{rl}
[\quad](X) & = X \\
[\sigma, X \to T](X) & = T \\
[\sigma, X' \to S](X) & = X \\
[\sigma](\mathrm{I}) & = \mathrm{I} \\
[\sigma](T_1 \oplus T_2) & = [\sigma](T_1) \oplus [\sigma](T_2) \\
[\sigma](T_1 \otimes T_2) & = [\sigma](T_1) \otimes [\sigma](T_2) \\
[\sigma](T_1 \multimap T_2) & = [\sigma](T_1) \multimap [\sigma](T_2) \\
[\sigma](\mu X.T) & = \mu X.[\sigma](T)
\end{array}
$$

図 3　Type Substitution

# 3 Preliminary

扱いたい構造は以下の全てを持つ圏

- 自己双対コンパクト閉圏 (Self–Dual Compact Closed Category)
- トレース付き有限双積 (Traced Finite Biproduct)
- 半環圏（Rig Category）
- 逆圏（Inverse Category）
- 上限による豊穣化（Sup enrichment）
- 余代数モーダリティの余クライスリ圏 (coKleisli Category of coAlgebra Modality)
- ダガーファイブレーション (Dagger Fibration)

## 3.1 圏

**定義 1** (Category（圏）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える

- 対象（Object）の類 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ を持つ（各対象は $A, B, C$ 等の大文字で表す）
- $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対する射（Morphism）の類 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を持つ（各射は単に $A \to B$ で表すか，$f, g, h$ 等の小文字で表す）
  - 射 $f : A \to B$ の $A$ を始域（Domain），$B$ を終域（Codomain）と呼び，それぞれ $\mathrm{Dom}(f)$，$\mathrm{Cod}(f)$ で表す
- 任意の対象 $A$ に対して恒等射 $\mathrm{id}_A : A \to A$ が存在する
- 任意の射 $f : A \to B$ 及び $g : B \to C$ に対して射の合成 $g \circ f : A \to C$ が存在する
- 任意の対象 A,B 及び射 $f : A \to B$ について，単位律 $\mathrm{id}_B \circ f = f \quad f \circ \mathrm{id}_A = f$ を満たす
- 任意の射 $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対して結合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を満たす

**定義 2** (Monomorphism（単射）)**.** 射 $f : A \to B$ は，任意の射 $g_1, g_2 : C \to A$ に対して $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき，単射と呼ぶ.

**定義 3** (Epimorphism（全射）)**.** 射 $f : A \to B$ は，任意の射 $g_1, g_2 : B \to C$ に対して $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき，全射と呼ぶ.

**定義 4** (Bimorphism（双射）)**.** 単射かつ全射である射を全単射もしくは双射と呼ぶ.

**定義 5** (Isomorphism（同型射）)**.** 射 $f : A \to B$ が同型射（Isomorphism）であるとは，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす $g : B \to A$ が存在することをいう．このとき $g$ は $f$ の逆射（Inverse morphism）と呼び $f^{-1}$ で表す．二つの等式のうち，左のみ満たす場合の射 $g$ を $f$ の引き込み（Retraction）と呼び，右のみ満たす場合の $g$ を $f$ の断面（Section）と呼ぶ．射が同型射であることを強調する場合，$f : A \xrightarrow{\cong} B$ と表す．圏の対象 $A, B$ の間に同型射が存在するとき，$A$ と $B$ は同型（Isomorphic）であるといい，$A \cong B$ で表す.

任意の同型射は双射だが，双射は必ずしも同型射ではないことに留意すること.

**定義 6** (Functor（関手）)**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とする．関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は，$\mathcal{C}$ の対象を $\mathcal{D}$ の対象へ写す関数 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ と，$\mathcal{C}$ の射を $\mathcal{D}$ の射に写す関数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}A, \mathbf{F}B)$ であり，$\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$ と $\mathbf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{(\mathbf{F}A)}$ を満たす.

**定義 7** (Natural Transformation（自然変換）)**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とし，$\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．自然変換 $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ は，射の族 $\tau_A : \mathbf{F}A \to \mathbf{G}A$ から成り，圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ について，以下の図式が可換（矢印をどの順番に通っても，射の合成に関して等式が成り立つこと）になる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathbf{F}f"'] & \mathbf{G}A \arrow[d, "\mathbf{G}f"] \\
\mathbf{F}B \arrow[r, "\tau_B"] & \mathbf{G}B
\end{tikzcd}$$

任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について射 $\tau_A$ が $\mathcal{D}$ の同型射であるとき，$\tau$ は自然同型（Natural Isomorphism）であるという．

**定義 8** (Categorical Equivalence（圏同値）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は，関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在して $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} \cong \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ かつ $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}} \cong \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ であるとき，同値であるという（$\mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}}$ は各圏の恒等関手）．圏同値は $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ で表す．

**定義 9** (Opposite Category（反対圏）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の反対圏 $\mathcal{C}^{op}$ とは，$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ である圏である．

**定義 10** (Adjunction（随伴）[1])**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とする．関手 $\mathbf{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathbf{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が随伴（Adjunction）であるとは，対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ と $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ について自然となる以下の自然同型が成り立つときであり，$\mathbf{L} \dashv \mathbf{R}$ であらわす．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{L}A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{R}B)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathbf{L}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "\mathbf{R}"] \end{tikzcd}$$

## 3.2 モノイダル圏

**定義 11** (Monoidal Category（モノイダル圏）[2])**.** モノイダル圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える

- 双関手 $(-) \otimes (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（モノイダル積と呼ばれる）
- 単位対象 $\mathrm{I} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- （自然同型）結合子 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$
- （自然同型）左単位子 $\lambda_A : \mathrm{I} \otimes A \xrightarrow{\cong} A$
- （自然同型）右単位子 $\rho_A : A \otimes \mathrm{I} \xrightarrow{\cong} A$
- 二つの図式（五角等式，三角等式）が可換となる

$$\begin{tikzcd} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"] & \\ ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A \otimes B,C,D}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_D"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\ (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B \otimes C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (A \otimes \mathrm{I}) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathrm{I},B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"'] & & A \otimes (\mathrm{I} \otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"] \\ & A \otimes B & \end{tikzcd}$$

**定義 12** (Symmetric Monoidal Category（対称モノイダル圏）[2])**.** 対称モノイダル圏 $\mathcal{C}$ はモノイダル圏であり，以下の構造を備える．

- （自然同型）対称子 $\sigma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$
- 等式 $\sigma_{A,B} = \sigma^{-1}_{B,A}$ を満たす
- 六角等式が可換となる

$$\begin{tikzcd}
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{B,A,C}"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[dr, "\mathrm{id}_B \otimes \sigma_{A,C}"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\sigma_{A,B} \otimes \mathrm{id}_C"] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C}"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma_{A,B\otimes C}"'] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[ur, "\alpha_{B,C,A}"'] &
\end{tikzcd}$$

**定義 13** (Symmetric Monoidal Closed Category（対称モノイダル閉圏）[3])**.** 対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ は対象モノイダル圏であり，以下の構造を備える．

- 双関手 $(-) \multimap (-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（内部ホムと呼ばれる）
- 任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，モノイダル積 $\otimes$ と内部ホム $\multimap$ の随伴 $((-) \otimes A \dashv A \multimap (-)) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が存在する

**命題 14.** 対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について、同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ を持つ．

**証明.** モノイダル積 $\otimes$ と内部ホム $\multimap$ の随伴から自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C)$$

が得られる．任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，自然同型の合成により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, (A \otimes B) \multimap C) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes (A \otimes B), C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((X \otimes A) \otimes B, C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes A, B \multimap C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A \multimap (B \multimap C))
\end{aligned}$$

を得る．米田の補題より，同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ が存在する． □

**命題 15.** 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について、同型 $\mathrm{I} \multimap A \cong A$ を持つ．

**証明.** 任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について、自然同型の合成により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{I} \multimap A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes \mathrm{I}, A) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)
\end{aligned}$$

を得る．米田の補題より、同型 $\mathrm{I} \multimap A \cong A$ が存在する． □

**命題 16.** 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，以下の 3 つの射を持つ．

$$\begin{aligned}
\eta'_A &: \mathrm{I} \to A \multimap A \\
\mathrm{eval}_{A,B} &: (A \multimap B) \otimes A \to B \\
\mathrm{comp}_{A,B,C} &: (A \multimap C) \otimes (B \multimap C) \to A \multimap C
\end{aligned}$$

**証明.** 恒等射 $\mathrm{id}_A$ より，射の同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I} \otimes A, A) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}, A \multimap A)
\end{aligned}$$

を得るので，射 $\eta_A$ は存在する．次に，恒等射 $\mathrm{id}_{A \multimap B}$ より，射の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \multimap B, A \multimap B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B)$$

を得るので，射 $\mathrm{eval}_{A,B}$ は存在する．次に，合成射 $\mathrm{eval}_{B,C} \circ (\mathrm{id}_{B \multimap C} \otimes \mathrm{eval}_{A,B})$ より，射の同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes ((A \multimap B) \otimes A), C) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(((B \multimap C) \otimes (A \multimap B)) \otimes A, C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes (A \multimap B), A \multimap C)
\end{aligned}$$

を得るので，射 $\mathrm{comp}_{A,B,C}$ は存在する． □

命題 14, 命題 15, 命題 16 は，対称子を使用せず証明しており，モノイド閉圏でも成り立つ．

命題 16 で用いた射 $\mathrm{eval}_{A,B}$ より，射の同型から

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (A \multimap B), B)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (A \multimap B) \multimap B)\end{aligned}$$

を得る．

**定義 17** ($\star$-autonomous Category（$\star$- 自立圏）[3])**.** $\star$- 自立圏 $\mathcal{C}$ は対称モノイド閉圏であり，以下の構造を備える．

- 双対化対象 $\perp \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- 双対化関手 $(-)^\star := (-) \multimap \perp : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$
- （自然同型）二重双対 $A \xrightarrow{\cong} A^{\star\star}$

双対化関手 $(-)^\star$ から射の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C^\star) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C \multimap \perp)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \otimes B) \otimes C, \perp)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (B \otimes C), \perp)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C) \multimap \perp)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C)^\star)\end{aligned}$$

を得る．

二重双対により，以下の同型

$$A \otimes B \cong (A \multimap B^\star)^\star \qquad A \multimap B \cong (A \otimes B^\star)^\star \qquad A \multimap B \cong B^\star \multimap A^\star$$

を得る．

**証明.**

$$\begin{aligned}A \otimes B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B)^{\star\star}\\ &= ((A \otimes B) \multimap \perp)^\star\\ &\xrightarrow{\cong} (A \multimap (B \multimap \perp))^\star\\ &= (A \multimap B^\star)^\star\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{\star\star}\\ &= A \multimap (B^\star \multimap \perp)\\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star) \multimap \perp\\ &= (A \otimes B^\star)^\star\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{\star\star}\\ &= A \multimap (B^\star \multimap \perp)\\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star) \multimap \perp\\ &\xrightarrow{\cong} (B^\star \otimes A) \multimap \perp\\ &\xrightarrow{\cong} B^\star \multimap (A \multimap \perp)\\ &= B^\star \multimap A^\star\end{aligned}$$

□

同様に，自然同型の合成により $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B^\star, A^\star)$ を得る．また，命題 15 より，同型 $\mathrm{I}^\star \cong \perp$ を得る．

**定義 18** (Compact Closed Category（コンパクト閉圏）[4][5])**.** コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ は $\star$- 自立圏であり，以下の構造を備える．

- （自然同型）自己双対 $\varsigma_{A,B} : (A \otimes B)^\star \xrightarrow{\cong} A^\star \otimes B^\star$
- （自然同型）自己双対 $\varsigma_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}^\star \xrightarrow{\cong} \mathrm{I}$

コンパクト閉圏の定義から同型を得る．

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star)^\star\\ &\xrightarrow{\cong} (A^\star \otimes B^{\star\star})\\ &\xrightarrow{\cong} A^\star \otimes B\end{aligned}$$

また，コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A, B, C$ について，以下の射の同型を得る．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B^\star \otimes C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C)$$

コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ の恒等射 $\mathrm{id}_A$ について，二つの射の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I} \otimes A, A) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}, A \multimap A) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}, A^\star \otimes A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathrm{I} \multimap A) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^\star \multimap \mathrm{I}^\star) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^\star \multimap \mathrm{I}) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A^\star, \mathrm{I})\end{aligned}$$

から，$\eta_A : \mathrm{I} \to A^\star \otimes A$ と $\epsilon_A : A \otimes A^\star \to \mathrm{I}$ を得る．

コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A$ について，$\eta_A$ から射 $\mathrm{decomp}_{A,B,C} : A \multimap C \to (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)$ を以下の射の合成として得る

$$\begin{aligned}A \multimap C &\xrightarrow{\cong} (A^\star \otimes C) \\ &\xrightarrow{\rho_{A^\star \otimes C}} (A^\star \otimes C) \otimes \mathrm{I} \\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{A^\star \otimes C} \otimes \eta_B} (A^\star \otimes C) \otimes (B^\star \otimes B) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{A^\star \otimes C} \otimes \sigma_{B^\star, B}} (A^\star \otimes C) \otimes (B \otimes B^\star) \\ &\xrightarrow{\alpha_{A^\star, C, B \otimes B^\star}} A^\star \otimes (C \otimes (B \otimes B^\star)) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{A^\star} \otimes \sigma_{C, B \otimes B^\star}} A^\star \otimes ((B \otimes B^\star) \otimes C) \\ &\xrightarrow{\alpha^{-1}_{A^\star, B \otimes B^\star, C}} (A^\star \otimes (B \otimes B^\star)) \otimes C \\ &\xrightarrow{\alpha^{-1}_{A^\star, B, B^\star} \otimes \mathrm{id}_C} ((A^\star \otimes B) \otimes B^\star) \otimes C \\ &\xrightarrow{\alpha_{A^\star \otimes B, B^\star, C}} (A^\star \otimes B) \otimes (B^\star \otimes C) \\ &\xrightarrow{\cong} (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)\end{aligned}$$

## 3.3 ダガー圏

**定義 19** (†-Category（†- 圏）[2])**.** †- 圏 $\mathcal{C}$ は，以下の構造を備える．

- 関手 $\dagger : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$
- † は対象に対して恒等
- 対合的 $\dagger \circ \dagger = \mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$

†- 圏の定義から，任意の射 $: A \to B, g : B \to C$ について，以下の等式が導かれる．

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_A^\dagger &= \mathrm{id}_A &&: A \to A \\ (g \circ f)^\dagger &= f^\dagger \circ g^\dagger &&: C \to A \\ f^{\dagger\dagger} &= f &&: A \to B,\end{aligned}$$

$f^\dagger = f^{-1}$ となる $f$ をユニタリーと呼び，$f^\dagger = f$ となる $f$ を自己随伴と呼ぶ．

**定義 20** (†-Functor（†- 関手）)**. ToDo**

**定義 21** (†-Symmetric Monoidal Category（†- 対称モノイド圏）[2][4])**.** †- 対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ は，対称モノイド圏かつ †-圏であり，以下の構造を備える．

- 任意の $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，$\alpha_{A,B,C}, \lambda_A, \rho_A, \sigma_{A,B}$ がユニタリ
- 関手 † が厳密モノイド関手であり，任意の射 $f, g$ について，$(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$

**定義 22** (†-Comact Category（†- コンパクト圏）[4])**.** †- コンパクト圏 $\mathcal{C}$ は，コンパクト閉圏かつ †- 対称モノイド圏であり，以下の構造を備える．

- 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ について，以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\epsilon_A^\dagger"'] & A^\star \otimes A \arrow[d, "\sigma_{A^\star,A}"] \\ & A \otimes A^\star \end{tikzcd}$$

定義から $\epsilon_A$ は $\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A^\star}$ として定義可能となる．逆に $\epsilon_A$ から $\eta_A$ を定義することもできる．

†- コンパクト圏 $\mathcal{C}$ は，任意の対象 $A, B$ の内部ホム $A \multimap B$ について，以下の図式を可換にする射 $\mathrm{dagger}_{A,B} : A \multimap B \to B \multimap A$ を持つ．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathrm{I}, A \multimap B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathrm{I},\mathrm{dagger}_{A,B})"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{I}, B \multimap A) \\ \mathrm{Hom}(A, B) \arrow[r, "(-)^\dagger"] & \mathrm{Hom}(B, A) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

## 3.4 豊饒圏

**定義 23** ($\mathcal{V}$–圏（$\mathcal{V}$–category）)**.** [6] $\mathcal{V}$ をモノイダル圏とする．$\mathbb{A}$ が $\mathcal{V}$ で豊穣化された圏（あるいは単に $\mathcal{V}$–圏）とは以下の要素からなる．

- $\mathbb{A}$ の対象 $\mathrm{Obj}(\mathbb{A})$
- 任意の対象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対してホム対象 $\mathbb{A}(A, B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{V})$
- 任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対する $\mathcal{V}$ の射 $u_A : I \to \mathbb{A}(A, A)$
- 任意の対象 $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対する $\mathcal{V}$ の射 $c_{A,B,C} : \mathbb{A}(B, C) \otimes \mathbb{A}(A, B) \to \mathbb{A}(A, C)$
- 任意の対象 $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathbb{A})$ に対して以下の可換図式を満たす

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}(A,D) & \\ \mathbb{A}(C,D) \otimes \mathbb{A}(A,C) \arrow[ur, "c_{A,C,D}"] & & \mathbb{A}(B,D) \otimes \mathbb{A}(A,B) \arrow[ul, "c_{A,B,D}"'] \\ \mathbb{A}(C,D) \otimes (\mathbb{A}(B,C) \otimes \mathbb{A}(A,B)) \arrow[u, "u_{\mathbb{A}(C,D)} \otimes c_{A,B,C}"] & & (\mathbb{A}(C,D) \otimes \mathbb{A}(B,C)) \otimes \mathbb{A}(A,B) \arrow[ll, "\alpha_{\mathbb{A}(C,D),\mathbb{A}(B,C),\mathbb{A}(A,B)}"] \arrow[u, "c_{B,C,D} \otimes u_{\mathbb{A}(A,B)}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}(B,B) \otimes \mathbb{A}(A,B) \arrow[r, "c_{A,B,B}"] & \mathbb{A}(A,B) & \mathbb{A}(A,B) \otimes \mathbb{A}(A,A) \arrow[l, "c_{A,A,B}"'] \\ I \otimes \mathbb{A}(A,B) \arrow[u, "u_B \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{A}(A,B)}"] \arrow[ur, "\lambda_{\mathbb{A}(A,B)}"'] & & \mathbb{A}(A,B) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}(A,B)} \otimes u_A"'] \arrow[ul, "\rho_{\mathbb{A}(A,B)}"] \end{tikzcd}$$

**ToDo** 必要なら $\mathcal{V}$–関手，$\mathcal{V}$–自然変換も定義する．

## 3.5 有限双積

**定義 24** (Finite Product（有限積）[2])**.** 圏 $\mathcal{C}$ における対象 $A, B$ に対して有限積 $A \times B$ は，以下の構造を備える．

- 射 $\pi_1 : A \times B \to A$ と $\pi_2 : A \times B \to B$
- 任意の対象 $C$ と射の組 $f : C \to A, g : C \to B$ に対して一意な射 $h : C \to A \times B$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[rd, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

射 $h$ は $\langle f, g \rangle$ と表記されることが多い.

- （終対象）任意の対象 $C$ に対して一意な射 $h : C \to \mathrm{I}$ が存在する対象 $\mathrm{I}$

有限積からなる圏（デカルト圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- （自然な射の族）複製 $\Delta_A : A \to A \otimes A$
- （自然な射の族）削除 $\diamond_A : A \to \mathrm{I}$

**定義 25** (Finite Coproduct（有限余積）[2]). ] 圏 $\mathcal{C}$ における対象 $A, B$ に対して有限余積 $A + B$ は，以下の構造を備える.

- 射 $\iota_1 : A \to A \oplus B$ と $\iota_2 : B \to A \oplus B$
- 任意の対象 $C$ と射の組 $f : A \to C, g : B \to C$ に対して一意な射 $h : A + B \to C$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ru, "f"] \arrow[r, "\iota_1"'] & A + B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[lu, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

射 $h$ は $[f, g]$ と表記されることが多い.

- （始対象）任意の対象 $C$ に対して一意な射 $h : \mathrm{I} \to C$ が存在する対象 $\mathrm{I}$

有限余積からなる圏（余デカルト圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- （自然な射の族）合併 $\nabla_A : A \oplus A \to A$
- （自然な射の族）追加 $\Box_A : \mathrm{I} \to A$

**定義 26** (Finite Biproduct（有限双積）[2]). 圏 $\mathcal{C}$ における対象 $A_1, A_2$ に対して有限双積 $A_1 \oplus A_2$ は，以下の構造を備える.

- （零対象）任意の対象 $A_1, A_2$ に対して一意な零射 $0_{A_1,A_2} : A_1 \to O \to A_2$ が存在する対象 $O$
- 射 $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \to A_1$ と $\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \to A_2$
- $\pi_1, \pi_2$ に関して有限積
- 射 $\iota_1 : A_1 \to A_1 \oplus A_2$ と $\iota_2 : A_2 \to A_1 \oplus A_2$
- $\iota_1, \iota_2$ に関して有限余積
- $\delta_{ij} = \pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} \mathrm{id}_A & \text{if} \quad i = j \\ 0_{A_j,A_i} & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$

ここで零射 $0_{A_1,A_2}$ は任意の対象 $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ および任意の射 $f : Y \to Z, g : X \to Y$ に対して，以下の図式を可換にする射である.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0_{X,Y}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[rd, "0_{X,Z}"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "0_{Y,Z}"'] & Z \end{tikzcd}$$

有限双積からなる圏は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- （自然な射の族）複製 $\Delta_A : A \to A \otimes A$
- （自然な射の族）削除 $\diamond_A : A \to I$
- （自然な射の族）合併 $\nabla_A : A \otimes A \to A$
- （自然な射の族）追加 $\Box_A : I \to A$

有限双積を持つ圏は半加法圏 [7] である．半加法圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f, g : A \to B$ に対して射の加法

$$f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A : A \to B$$

と定義できる [8]．よって有限双積を持つ圏は可換モノイドで豊穣化された圏（**CMon**–圏）である [9, Def. 2.7.6]．（ここで **CMon** は対象を可換モノイド，射を可換モノイド間の準同型射とする圏）

射の加法は任意の射 $f, g, h : A \to B$ について以下の等式を満たす．

- $(f + g) + h = f + (g + h)$
- $0_{A,B} + f = f + 0_{A,B} = f$
- $f + g = g + f$

また，射の合成は射の加法を保存し，任意の対象 $X, Y$ と任意の射 $f, g : A \to B, e : X \to A, h : B \to Y$ について，以下の等式を満たす．

- $(f + g) \circ e = f \circ e + g \circ e$
- $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$
- $f \circ 0_{X,A} = 0_{X,B}$
- $0_{B,Y} \circ f = 0_{A,Y}$

また，モノイダル圏 $\mathcal{C}$ について有限双積が保存されるとき，モノイダル積は射の加法を保存し，任意の対象 $X, Y$ と任意の射 $f, g : A \to B, e, h : C \to D$ に対して，以下の等式を満たす．

- $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$
- $f \otimes (e + h) = f \otimes e + f \otimes h$
- $0_{X,Y} \otimes f = 0_{X,Y}$

可換モノイドが冪等率 $f + f = f$ も満たす，すなわち射の加法が交わり（join）になっており，さらに完備上半束（sup–lattice），つまりホム対象の任意の部分集合について交わりを持つとき，**CMon**–圏はむしろ **Sup**–圏である．

**定義 27** (**Sup**–圏)**.** [10, Def. 1.3.(i)] **Sup** は対象が完備上半束，射が完備上半束を保存する写像からなる圏である．**Sup**–圏 $\mathcal{C}$ のホム対象 $\mathcal{C}(A, B)$ の部分集合 $S$ に対して上限を $\bigvee_{s \in S} s$ で表す．射の合成は上限を保存し，任意の射 $f : X \to A, g : B \to Y$ について，以下の等式を満たす．

$$\left(\bigvee_{s \in S} s\right) \circ f = \bigvee_{s \in S} (s \circ f) \tag{1}$$

$$g \circ \left(\bigvee_{s \in S} s\right) = \bigvee_{s \in S} (g \circ s) \tag{2}$$

また，射の加法と同様に，モノイダル圏でもある **Sup**–圏 $\mathcal{C}$ について，モノイダル積が上限を保存するとき，以下の等式を満たす．

$$\left(\bigvee_{s \in S} s\right) \otimes f = \bigvee_{s \in S} (s \otimes f) \tag{3}$$

$$g \otimes \left(\bigvee_{s \in S} s\right) = \bigvee_{s \in S} (g \otimes s) \tag{4}$$

**Sup**–圏はクオンタロイド（Quantaloid）という名前でも知られており，multi-valued あるいは fuzzy-set

## 3.6 制限圏

**定義 28** (Restriction Category（制限圏）)**.** [11, Def. 2.1.1.] 圏 $\mathcal{C}$ について，$\mathcal{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ に対して射 $\overline{f} : A \to A$ が割り当てられ，次の 4 つの条件を満たすとき，圏 $\mathcal{C}$ は制限構造を持ち，圏 $\mathcal{C}$ を制限圏と呼ぶ．

- 任意の射 $f : A \to B$ について，$f \circ \overline{f} = f$

- 任意の射 $f : A \to B$ と $g : A \to C$ について，$\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- 任意の射 $f : A \to B$ と $g : A \to C$ について，$\overline{g \circ \overline{f}} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- 任意の射 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ について，$\overline{g} \circ f = f \circ \overline{g \circ f}$

ここで，射 $\overline{f}$ は $f$ の restriction idempotent（制限べき等）と呼ばれる．

制限圏の射 $f : A \to B$ は $\overline{f} = \mathrm{id}_A$ であるとき total と呼ぶ．

制限圏は半順序集合 poset で豊穣化された圏となる [11, p.237][12, Lemma 1.6.3]．射の半順序関係は次の形で与えられる．

$$f \leq g \Leftrightarrow f = g \circ \overline{f}$$

**定義 29** (Restriction Functor（制限関手）)．**ToDo**

$\overline{\mathbf{F}(f)} = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{f}})$

制限圏において，同型射を弱めた射を考える．制限圏 $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ に対して $f^\circ \circ f = \overline{f}$ と $f \circ f^\circ = \overline{f^\circ}$ を満たす唯一の射を制限同型射（restricted isomorphism）あるいは部分同型射（partial isomorphism）と呼ぶ．

**定義 30** (Inverse Category（逆圏）)．[11, section 2.3.2][13, Def. 3] 制限圏 $\mathcal{C}$ について，全ての射 $f : A \to B$ が部分同型射 $f^\circ$ を持つとき，$\mathcal{C}$ を逆圏（Inverse Category）と呼ぶ．

**定義 31** (**Sup**–Category)．**ToDo**

**定義 32** (Join Restriction Category（結び制限圏）)．**要調査**

結び制限圏は poset というよりは完備上半束（sup–lattice）で豊穣化された圏

**定義 33** (Join Inverse Category（結び逆圏）)．**要調査**

Giles の論文の Def. 10.3.1. で射の加法とモノイダル積，射の合成の組み合わせについて定義している（お互いを保存する形）

## 3.7 その他構造

**定義 34** (Rig Category（半環圏）[14])．半環圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える．

- （加法としての）対称モノイド構造 $(\mathcal{C}, \oplus, O)$
- （乗法としての）モノイド構造 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$
- （自然同型）左分配子 $\delta_l : A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- （自然同型）右分配子 $\delta_r : (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- （自然同型）左吸収子 $\kappa_l : A \otimes O \cong O$
- （自然同型）右吸収子 $\kappa_r : O \otimes A \cong O$
- 諸々のコヒーレンス公理 [14]

**定義 35** (Trace（トレース）)．**要調査**

# 参考文献

[1] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Vol. 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer.

[2] Peter Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 813, , 08 2009.

[3] Michael Barr. *-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 1, No. 2, p. 159–178, 1991.

[4] Samson Abramsky. No-cloning in categorical quantum mechanics. *Semantic Techniques in Quantum Computation*, 10 2009.

[5] G.M. Kelly and M.L. Laplaza. Coherence for compact closed categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 19, pp. 193–213, 1980.

[6] G M Kelly. BASIC CONCEPTS OF ENRICHED CATEGORY THEORY.

[7] Stephen Lack. Non-canonical isomorphisms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 216, No. 3, pp. 593–597, 2012.

[8] Saunders MacLane. Duality for groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 56, No. 6, pp. 485–516, 1950.

[9] Brett Giles. An investigation of some theoretical aspects of reversible computing. Publisher: Graduate Studies.

[10] Andrew M. Pitts. Applications of sup-lattice enriched category theory to sheaf theory. Vol. s3-57, No. 3, pp. 433–480.

[11] J.R.B. Cockett and Stephen Lack. Restriction categories i: categories of partial maps. Vol. 270, No. 1, pp. 223–259.

[12] Xiuzhan Guo. *Products, joins, meets, and ranges in restriction categories*. Ph.d. thesis, University of Calgary.

[13] Robin Kaarsgaard, Holger Bock Axelsen, and Robert Glück. Join inverse categories and reversible recursion. Vol. 87, pp. 33–50.

[14] Miguel L. Laplaza. Coherence for distributivity. In G. M. Kelly, M. Laplaza, G. Lewis, and Saunders Mac Lane, editors, *Coherence in Categories*, pp. 29–65, Berlin, Heidelberg, 1972. Springer Berlin Heidelberg.

# 4 型検査

$$
\text{Variable}\ \frac{}{x : T \vdash x : T} \qquad \frac{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash t : T}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t : T}\ \text{Exchange}
$$

$$
\mathrm{I}_L\ \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, () : \mathrm{I} \vdash t : T} \qquad \frac{}{\vdash () : \mathrm{I}}\ \mathrm{I}_R
$$

$$
\oplus_{L_l}\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2}\ \oplus_{R_l}
$$

$$
\oplus_{L_r}\ \frac{\Gamma, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2}\ \oplus_{R_r}
$$

$$
\otimes_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2}\ \otimes_R
$$

$$
\multimap_L\ \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma_2, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma_1, \Gamma_2, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2}\ \multimap_R
$$

$$
\mu_L\ \frac{\Gamma, u : [X \to \mu X.U]U \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.U}\ u : \mu X.U \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : [X \to \mu X.T]T}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : \mu X.T}\ \mu_R
$$

$$
\mathrm{Trace}_L\ \frac{\Gamma, u : S \oplus U_1 \multimap S \oplus U_2 \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{trace}_S\ u : U_1 \multimap U_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_U\ t : T_1 \multimap T_2}\ \mathrm{Trace}_R
$$

$$
\mathrm{Par}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : U \vdash t : T \qquad \Gamma, t_2 : U \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T \qquad \Gamma \vdash t_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : T}\ \mathrm{Par}_R
$$

$$
\mathrm{Seq}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \multimap T_2 \qquad \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2 \multimap T_3}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3}\ \mathrm{Seq}_R
$$

$$
\dagger_L\ \frac{\Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \vdash t : T}{\Gamma, u^{\dagger} : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : T_2 \multimap T_1}{\Gamma \vdash t^{\dagger} : T_1 \multimap T_2}\ \dagger_R
$$

$$
\mathrm{id}_L\ \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{id} : U \multimap U \vdash t : T} \qquad \frac{}{\vdash \mathrm{id} : T \multimap T}\ \mathrm{id}_R
$$

$$
\varnothing_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, \varnothing : U \vdash t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \varnothing : T}\ \varnothing_{\mathrm{R}}
$$

$$
\frac{\vdash f : T_1 \multimap T_2 \qquad \vdash e : T_1}{\vdash f \mathbin{@} e : T_2}\ \mathrm{App}
$$

図 4 Typing rules

$$\vdash\ t : T \triangleright$$

$$\text{Variable}\ \frac{\Gamma(x) = T}{\Gamma\ \vdash\ x : T\ \triangleright\ \Gamma \setminus x}$$

$$\mathrm{I}_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, () : \mathrm{I}\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ () : \mathrm{I}\ \triangleright\ \Gamma}\ \mathrm{I}_R$$

$$\oplus_{L_l}\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2\ \triangleright\ \Gamma'}\ \oplus_{R_l}$$

$$\oplus_{L_r}\ \frac{\Gamma, t_2 : T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_2 : T_2\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2\ \triangleright\ \Gamma'}\ \oplus_{R_r}$$

$$\otimes_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1\ \triangleright\ \Gamma' \qquad \Gamma'\ \vdash\ t_2 : T_2\ \triangleright\ \Gamma''}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2\ \triangleright\ \Gamma''}\ \otimes_R$$

$$\multimap_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1\ \triangleright\ \Gamma' \qquad \Gamma', t_2 : T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma''}{\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma''} \qquad \frac{\Gamma, t_1 : T_1\ \vdash\ t_2 : T_2\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2\ \triangleright\ \Gamma'}\ \multimap_R$$

$$\mu_L\ \frac{\Gamma, u : [X \to \mu X.U]U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.U}\ u : \mu X.U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : [X \to \mu X.T]T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : \mu X.T\ \triangleright\ \Gamma'}\ \mu_R$$

$$\mathrm{Trace}_L\ \frac{\Gamma, u : S \oplus U_1 \multimap S \oplus U_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{trace}_S\ u : U_1 \multimap U_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{trace}_U\ t : T_1 \multimap T_2\ \triangleright\ \Gamma'}\ \mathrm{Trace}_R$$

$$\mathrm{Par}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma' \qquad \Gamma, t_2 : U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T\ \triangleright\ \Gamma' \qquad \Gamma\ \vdash\ t_2 : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \parallel t_2 : T\ \triangleright\ \Gamma'}\ \mathrm{Par}_R$$

$$\mathrm{Seq}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1 \multimap T_2\ \triangleright\ \Gamma' \qquad \Gamma'\ \vdash\ t_2 : T_2 \multimap T_3\ \triangleright\ \Gamma''}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3\ \triangleright\ \Gamma''}\ \mathrm{Seq}_R$$

$$\dagger_L\ \frac{\Gamma, u : T_2 \multimap T_1\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, u^\dagger : T_1 \multimap T_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T_2 \multimap T_1\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ t^\dagger : T_1 \multimap T_2\ \triangleright\ \Gamma'}\ \dagger_R$$

$$\mathrm{id}_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{id} : U \multimap U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{id} : T \multimap T\ \triangleright\ \Gamma}\ \mathrm{id}_R$$

$$\varnothing_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'}{\Gamma, \varnothing : U\ \vdash\ t : T\ \triangleright\ \Gamma'} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ \varnothing : T\ \triangleright\ \Gamma}\ \varnothing_{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\vdash\ f : T_1 \multimap T_2 \triangleright \qquad \vdash\ e : T_1 \triangleright}{\vdash\ f\ @\ e : T_2 \triangleright}\ \mathrm{App}$$

図 5　Syntax–Directed Typing rules

# 5　型推論

$$
\begin{aligned}
\mathrm{unify} &:= \mathrm{Constraints} \to \mathrm{Substitution} \\
\mathrm{unify}(\{\}) &= [] \\
\mathrm{unify}(\{X = T\} \cup C) &= \mathrm{unify}([X \to T]C) \circ [X \to T] \\
\mathrm{unify}(\{T = X\} \cup C) &= \mathrm{unify}([X \to T]C) \circ [X \to T] \\
\mathrm{unify}(\{S_1 \oplus S_2 = T_1 \oplus T_2\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
\mathrm{unify}(\{S_1 \otimes S_2 = T_1 \otimes T_2\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
\mathrm{unify}(\{S_1 \multimap S_2 = T_1 \multimap T_2\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
\mathrm{unify}(\{\mu X.S = \mu Y.T\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{X = Y, S = T\})
\end{aligned}
$$

図 6　unification

$$\vdash\ t : X \triangleright\ \mid C$$

$$\text{Variable}\ \frac{}{\Gamma \vdash x : V_1 \triangleright \Gamma \setminus (x : T) \mid \{V_1 = V_2\}}$$

$$\mathrm{I}_L\ \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, () : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = \mathrm{I}\}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash () : V \triangleright \Gamma \mid \{V = \mathrm{I}\}}\ \mathrm{I}_R$$

$$\oplus_{L_l}\ \frac{\Gamma, t_1 : X_1 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ t_1 : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}}\ \oplus_{R_l}$$

$$\oplus_{L_r}\ \frac{\Gamma, t_2 : X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_2 : X_2 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ t_2 : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{X_1 \oplus X_2\}}\ \oplus_{R_r}$$

$$\otimes_L\ \frac{\Gamma, t_1 : X_1, t_2 : X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, t_1 \times t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \otimes X_2\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \triangleright \Gamma' \mid C_1 \qquad \Gamma' \vdash t_2 : X_2 \triangleright \Gamma'' \mid C_2}{\Gamma \vdash t_1 \times t_2 : V \triangleright \Gamma'' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \otimes X_2\}}\ \otimes_R$$

$$\multimap_L\ \frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \triangleright \Gamma' \mid C_1 \qquad \Gamma', t_2 : X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'' \mid C_2}{\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma'' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \qquad \frac{\Gamma, t_1 : X_1 \vdash t_2 : X_2 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}\ \multimap_R$$

$$\mu_L\ \frac{\Gamma, u : [Y \to \mu Y.U]U \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu Y.U}\ u : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = \mu Y.U\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : [X \to \mu X.T]T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = \mu X.T\}}\ \mu_R$$

$$\mathrm{Trace}_L\ \frac{\Gamma, u : U \oplus X_1 \multimap U \oplus X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \mathrm{trace}_U\ u : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : T \oplus X_1 \multimap T \oplus X_2 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_T\ t : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}\ \mathrm{Trace}_R$$

$$\mathrm{Par}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : X \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C_1 \qquad \Gamma, t_2 : X \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C_2}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : X \triangleright \Gamma' \mid C_1 \qquad \Gamma \vdash t_2 : X \triangleright \Gamma' \mid C_2}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : V \triangleright \Gamma' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X\}}\ \mathrm{Par}_R$$

$$\mathrm{Seq}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : X_1 \multimap X_2, t_2 : X_2 \multimap X_3 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_3\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \multimap X_2 \triangleright \Gamma' \mid C_1 \qquad \Gamma' \vdash t_2 : X_2' \multimap X_3 \triangleright \Gamma'' \mid C_2}{\Gamma \vdash t_1 \fatsemi t_2 : V \triangleright \Gamma'' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \multimap X_3\}}\ \mathrm{Seq}_R$$

$$\dagger_L\ \frac{\Gamma, u : X_2 \multimap X_1 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, u^\dagger : \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : X_2 \multimap X_1 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash t^\dagger : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}\ \dagger_R$$

$$\mathrm{id}_L\ \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \mathrm{id} : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X \multimap X\}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} : V \triangleright \Gamma \mid \{V = X \multimap X\}}\ \mathrm{id}_R$$

$$\varnothing_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \varnothing : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C\{V = X\}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \varnothing : V \triangleright \Gamma \mid \{V = X\}}\ \varnothing_{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\vdash f : X_1 \multimap X_2 \triangleright\ \mid C_1 \qquad \vdash e : X_1 \triangleright\ \mid C_2}{\vdash f \mathbin{@} e : V \triangleright\ \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_2\}}\ \mathrm{App}$$

図 7　Type Inference rules

# 6　表示的意味論

$$
\begin{aligned}
[\![\Theta \vdash T]\!] &: \mathcal{V}^{|\Theta|} \to \mathcal{V} \\
[\![\Theta \vdash X_i]\!] &:= \Pi_i \\
[\![\Theta \vdash \mathrm{I}]\!] &:= K_I \\
[\![\Theta \vdash T_1 \oplus T_2]\!] &:= \oplus \circ \langle [\![\Theta \vdash T_1]\!], [\![\Theta \vdash T_2]\!] \rangle \\
[\![\Theta \vdash T_1 \otimes T_2]\!] &:= \otimes \circ \langle [\![\Theta \vdash T_1]\!], [\![\Theta \vdash T_2]\!] \rangle \\
[\![\Theta \vdash T_1 \multimap T_2]\!] &:= \otimes \circ \langle [\![\Theta \vdash T_1]\!]^{\star}, [\![\Theta \vdash T_2]\!] \rangle \\
[\![\Theta \vdash \mu X.T]\!] &:= [\![\Theta, X \vdash T]\!]^{\sharp} \\
[\![\Theta \vdash T[X \to U]]\!] &:= [\![\Theta \vdash T]\!] \circ \langle Id, [\![\Theta \vdash U]\!] \rangle \\
[\![T]\!] &:= [\![\vdash T]\!](*) \in Obj(\mathcal{V})
\end{aligned}
$$

図 8　Type Interpretation

$$
\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!] &\in Obj(\mathcal{V}) \\
[\![]\!] &:= \mathrm{I} \\
[\![\Gamma, () : \mathrm{I}]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \\
[\![\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \oplus [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \oplus [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \otimes [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ u : \mu X.T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes [\![\mu X.T]\!] \\
[\![\Gamma, \mathrm{trace}_T\ t : T_1 \multimap T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, t_1 \parallel t_2 : T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes [\![T]\!] \\
[\![\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_3]\!]) \\
[\![\Gamma, t^{\dagger} : T_1 \multimap T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, \mathrm{id} : T \multimap T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \\
[\![\Gamma, \varnothing : T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \\
[\![f \mathbin{@} e : T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes [\![T]\!]
\end{aligned}
$$

図 9　Context Interpretation

$$
\begin{aligned}
\llbracket \Gamma \vdash t : T \rrbracket &: \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket x : T \ \vdash\ x : T \rrbracket &:= \llbracket T \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\sigma_{\llbracket \Gamma_1 \rrbracket, \llbracket \Gamma_2 \rrbracket}} \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_2, \Gamma_1 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, () : \mathrm{I} \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \mathrm{I} \xrightarrow{\rho_{\llbracket \Gamma \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \ \vdash\ () : \mathrm{I} \rrbracket &:= \llbracket\rrbracket \xrightarrow{id_{\mathrm{I}}} \llbracket \mathrm{I} \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{inl}\, t_1 : T_1 \oplus T_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \pi_1} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ \mathrm{inl}\, t_1 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t_1 : T_1 \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\iota_1} \llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{inr}\, t_2 : T_1 \oplus T_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \pi_2} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_2 : T_2 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ \mathrm{inr}\, t_1 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \xrightarrow{\iota_2} \llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash\ t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \ \vdash\ t_1 : T_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_1 \ \vdash\ t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= (\llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \cong \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes (\llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes \llbracket T_1 \rrbracket^{\star} \to \llbracket T \rrbracket) \\
&\cong \left( \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes (\llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \ \vdash\ t_1 : T_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2, t_2 : T_2 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T \rrbracket \right) \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \cong \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \ \vdash\ t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \right) \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.U}\ u : \mu X.U \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \mu X.U \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes unfold_{\mu X.U}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket [X \to \mu X.U](U) \rrbracket \\
&\xrightarrow{\llbracket \Gamma, u : [X \to \mu X.U](U) \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : \mu X.T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t : [X \to \mu X.T](T) \rrbracket} \llbracket [X \to \mu X.T](T) \rrbracket \xrightarrow{fold_{\mu X.T}} \llbracket \mu X.T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{trace}_U\ u : T_1 \multimap T_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes Tr^{\llbracket U \rrbracket}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}(\llbracket \Gamma, t : (U \oplus T_1) \multimap (U \oplus T_2) \ \vdash\ t:T \rrbracket)} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ \mathrm{trace}_U\ t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{Tr^{\llbracket U \rrbracket}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}(\llbracket \Gamma \ \vdash\ t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2 \rrbracket)} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket U \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes (\llbracket \Gamma, t_1 : U \ \vdash\ t:T \rrbracket + \llbracket \Gamma, t_2 : U \ \vdash\ t:T \rrbracket)} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ t_1 \parallel t_2 : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t_1 : T \rrbracket + \llbracket \Gamma \ \vdash\ t_2 : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
&\xrightarrow{id_{\Gamma} \otimes decomp_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket, \llbracket T_3 \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes ((\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket)) \\
&\xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash\ t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \ \vdash\ t_1 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \ \vdash\ t_2 : T_2 \multimap T_3 \rrbracket} (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
&\xrightarrow{comp_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket, \llbracket T_3 \rrbracket}} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, u^{\dagger} : T_1 \multimap T_2 \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes dagger_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_1 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ t^{\dagger} : T_1 \multimap T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t : T_2 \multimap T_1 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{dagger_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{id} : U \multimap U \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \ \vdash\ \mathrm{id} : T \multimap T \rrbracket &:= \llbracket\rrbracket \to \llbracket T \rrbracket \multimap \llbracket T \rrbracket \cong \left( \llbracket T \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \right) \\
\llbracket \Gamma, \varnothing : U \ \vdash\ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash\ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash\ \varnothing : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{0_{\llbracket \Gamma \rrbracket, \llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \ \vdash\ t \mathbin{@} t_1 : T_2 \rrbracket &:= \llbracket\rrbracket \xrightarrow{\llbracket \ \vdash\ t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket \otimes \llbracket \ \vdash\ t_1 : T_1 \rrbracket} (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{eval_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket T_2 \rrbracket
\end{aligned}
$$

図 10　Term Interpretation

# 7 操作的意味論

$$
\sigma_1 \cup^{\times}_{\bot} \sigma_2 := \begin{cases} \bot & \text{if } \sigma_1 = \bot \vee \sigma_2 = \bot \\ \sigma_1 \cup \sigma_2 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

$$
\sigma_1 \cup^{+}_{\bot} \sigma_2 := \begin{cases} \bot & \text{if } \sigma_1 = \bot \wedge \sigma_2 = \bot \\ \sigma_1 & \text{if } \sigma_2 = \bot \\ \sigma_2 & \text{if } \sigma_1 = \bot \\ \sigma_1 \cup \sigma_2 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

図 11 Operations on Environment $\sigma$

$$
\begin{array}{rl}
x \triangleright t & := [x \to t] \\
() \triangleright () & := [\,] \\
\mathrm{inl}\ t \triangleright \mathrm{inl}\ u & := t \triangleright u \\
\mathrm{inl}\ t \triangleright \mathrm{inr}\ u & := \bot \\
\mathrm{inr}\ t \triangleright \mathrm{inr}\ u & := t \triangleright u \\
\mathrm{inr}\ t \triangleright \mathrm{inl}\ u & := \bot \\
t_1 \times t_2 \triangleright u_1 \times u_2 & := (t_1 \triangleright u_1) \cup^{\times}_{\bot} (t_2 \triangleright u_2) \\
t_1 \mapsto t_2 \triangleright u_1 \mapsto u_2 & := (t_1 \triangleright u_1) \cup^{\times}_{\bot} (t_2 \triangleright u_2) \\
\mathrm{fold}_T\ t \triangleright \mathrm{fold}_T\ u & := t \triangleright u \\
\mathrm{trace}_T\ t \triangleright \mathrm{trace}_T\ u & := t \triangleright u \\
t \triangleright u_1 \parallel u_2 & := (t \triangleright u_1) \cup^{+}_{\bot} (t \triangleright u_2) \\
t_1 \parallel t_2 \triangleright u & := (t_1 \triangleright u) \cup^{+}_{\bot} (t_2 \triangleright u) \\
t_1 \fatsemi t_2 \triangleright u_1 \fatsemi u_2 & := (t_1 \triangleright u_1) \cup^{\times}_{\bot} (t_2 \triangleright u_2) \\
t \fatsemi x \triangleright u & := x \triangleright t^{\dagger} \fatsemi u \\
x \fatsemi t \triangleright u & := x \triangleright u \fatsemi t^{\dagger} \\
t^{\dagger} \triangleright u & := t \triangleright u^{\dagger} \\
\mathrm{id} \triangleright \mathrm{id} & := [\,] \\
\varnothing \triangleright u & := \bot \\
t \triangleright \varnothing & := \bot
\end{array}
$$

図 12 Constructing Environment

$$
\begin{array}{rl}
[\,](x) & := \varnothing \\
[\sigma, x \to t](x) & := t \\
[\sigma, x' \to t](x) & := \varnothing \\
[\sigma](()) & := () \\
[\sigma](\mathrm{inl}\ t) & := \mathrm{inl}\ [\sigma](t) \\
[\sigma](\mathrm{inr}\ t) & := \mathrm{inr}\ [\sigma](t) \\
[\sigma_1, \sigma_2](t_1 \times t_2) & := [\sigma](t_1) \times [\sigma](t_2) \\
[\sigma_1, \sigma_2](t_1 \mapsto t_2) & := [\sigma](t_1) \mapsto [\sigma](t_2) \\
[\sigma](\mathrm{fold}_T\ t) & := \mathrm{fold}_T\ [\sigma](t) \\
[\sigma](\mathrm{trace}_T\ t) & := \mathrm{trace}_T\ [\sigma](t) \\
[\sigma_1, \sigma_2](t_1 \parallel t_2) & := [\sigma](t_1) \parallel [\sigma](t_2) \\
[\sigma](t_1 \fatsemi t_2) & := [\sigma](t_1) \fatsemi [\sigma](t_2) \\
[\sigma](t^{\dagger}) & := [\sigma](t)^{\dagger} \\
[\sigma](\mathrm{id}) & := \mathrm{id} \\
[\,](\varnothing) & := \varnothing \\
[\bot](t) & := \varnothing
\end{array}
$$

図 13 Consumption of Environment

$$
\begin{aligned}
\varnothing \parallel t &\Rrightarrow t \\
(t_1 \parallel t_2) \parallel t_3 &\Rrightarrow t_1 \parallel (t_2 \parallel t_3) \\
t_1 \parallel t_2 &\Rrightarrow t_2 \parallel t_1 \\
t \parallel t &\Rrightarrow t \\
\mathrm{id} \fatsemi t &\Rrightarrow t \\
t \fatsemi \mathrm{id} &\Rrightarrow t \\
(t_1 \fatsemi t_2) \fatsemi t_3 &\Rrightarrow t_1 \fatsemi (t_2 \fatsemi t_3) \\
\varnothing \fatsemi t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \fatsemi \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
(t_1 \parallel t_2) \fatsemi t_3 &\Rrightarrow (t_1 \fatsemi t_3) \parallel (t_2 \fatsemi t_3) \\
t_1 \fatsemi (t_2 \parallel t_3) &\Rrightarrow (t_1 \fatsemi t_2) \parallel (t_1 \fatsemi t_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{inl}\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{inr}\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\varnothing \times t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \times \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\varnothing \mapsto t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \mapsto \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{fold}_T\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{trace}_T\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varnothing^\dagger &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{id}^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{id} \\
()^\dagger &\Rrightarrow () \\
(t_1 \parallel t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \parallel t_2^\dagger \\
(t_1 \fatsemi t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \fatsemi t_2^\dagger \\
(\mathrm{inl}\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{inl}\ t^\dagger \\
(\mathrm{inr}\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{inr}\ t^\dagger \\
(t_1 \times t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \times t_2^\dagger \\
(t_1 \mapsto t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \mapsto t_2^\dagger \\
(\mathrm{fold}_T\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{fold}_T\ t^\dagger \\
(\mathrm{trace}_T\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{trace}_T\ t^\dagger \\
(t^\dagger)^\dagger &\Rrightarrow t \\
\mathrm{inl}\ (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow \mathrm{inl}\ t_1 \parallel \mathrm{inl}\ t_2 \\
\mathrm{inr}\ (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow \mathrm{inr}\ t_1 \parallel \mathrm{inr}\ t_2 \\
(t_1 \parallel t_2) \times t_3 &\Rrightarrow (t_1 \times t_3) \parallel (t_2 \times t_3) \\
t_1 \times (t_2 \parallel t_3) &\Rrightarrow (t_1 \times t_2) \parallel (t_1 \times t_3) \\
(t_1 \parallel t_2) \mapsto t_3 &\Rrightarrow (t_1 \mapsto t_3) \parallel (t_2 \mapsto t_3) \\
t_1 \mapsto (t_2 \parallel t_3) &\Rrightarrow (t_1 \mapsto t_2) \parallel (t_1 \mapsto t_3) \\
\mathrm{fold}_T\ (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow \mathrm{fold}_T\ t_1 \parallel \mathrm{fold}_T\ t_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1 \Rrightarrow t_1' \implies t_2 \Rrightarrow t_2' &\implies t_1 \parallel t_2 \Rrightarrow t_1' \parallel t_2' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \implies t_2 \Rrightarrow t_2' &\implies t_1 \fatsemi t_2 \Rrightarrow t_1' \fatsemi t_2' \\
t \Rrightarrow t' &\implies \mathrm{inl}\ t \Rrightarrow \mathrm{inl}\ t' \\
t \Rrightarrow t' &\implies \mathrm{inr}\ t \Rrightarrow \mathrm{inr}\ t' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \implies t_2 \Rrightarrow t_2' &\implies t_1 \times t_2 \Rrightarrow t_1' \times t_2' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \implies t_2 \Rrightarrow t_2' &\implies t_1 \mapsto t_2 \Rrightarrow t_1' \mapsto t_2' \\
t \Rrightarrow t' &\implies \mathrm{fold}_T\ t \Rrightarrow \mathrm{fold}_T\ t' \\
t \Rrightarrow t' &\implies \mathrm{trace}_T\ t \Rrightarrow \mathrm{trace}_T\ t' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \implies t_2 \Rrightarrow t_2' &\implies t_1 \mathbin{@} t_2 \Rrightarrow t_1' \mathbin{@} t_2'
\end{aligned}
$$

$$
(t_1 \mapsto t_2) \mathbin{@} t \Rrightarrow (t_1 \triangleright t)\ t_2
$$

$$
\begin{aligned}
\varnothing \mathbin{@} t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \mathbin{@} \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{id} \mathbin{@} t &\Rrightarrow t
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(t_1 \parallel t_2) \mathbin{@} t &\Rrightarrow (t_1 \mathbin{@} t) \parallel (t_2 \mathbin{@} t) \\
t \mathbin{@} (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow (t \mathbin{@} t_1) \parallel (t \mathbin{@} t_2) \\
t_1 \fatsemi t_2 \mathbin{@} t &\Rrightarrow t_2 \mathbin{@} (t_1 \mathbin{@} t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inr}\ u' &\implies (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \Rrightarrow u' \\
t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inl}\ u' \implies (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \Rrightarrow u'' &\implies (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \Rrightarrow u'' \\
t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inl}\ u' \implies (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \Rrightarrow u'' &\implies (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \Rrightarrow u'' \\
t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inr}\ u' &\implies (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \Rrightarrow u'
\end{aligned}
$$

図 14　Reduction

$$\frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash t \equiv t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_2 \equiv t_1 : T}{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_2 : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_2 : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_3 : T}{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_3 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \parallel t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \parallel t_3 \equiv t_1 \parallel (t_2 \parallel t_3) : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t \parallel t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 \equiv t_2 \parallel t_1 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} \mathbin{;} t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t \mathbin{;} \mathrm{id} \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mathbin{;} t_2) \mathbin{;} t_3 \equiv t_1 \mathbin{;} (t_2 \mathbin{;} t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \mathbin{;} t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \mathbin{;} t_3 \equiv (t_1 \mathbin{;} t_3) \parallel (t_2 \mathbin{;} t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \mathbin{;} \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \mathbin{;} (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \mathbin{;} t_2) \parallel (t_1 \mathbin{;} t_2) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ (t_1 \parallel t_2) \equiv \mathrm{inl}\ t_1 \parallel \mathrm{inl}\ t_2 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ (t_1 \parallel t_2) \equiv \mathrm{inr}\ t_1 \parallel \mathrm{inr}\ t_2 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \times t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \times t_3 \equiv (t_1 \times t_3) \parallel (t_2 \times t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \times \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \times (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \times t_2) \parallel (t_1 \times t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \mapsto t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \mapsto t_3 \equiv (t_1 \mapsto t_3) \parallel (t_2 \mapsto t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \mapsto \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \mapsto t_2) \parallel (t_1 \mapsto t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_T\ \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_T\ (t_1 \parallel t_2) \equiv \mathrm{fold}_T\ t_1 \parallel \mathrm{fold}_T\ t_2 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_T\ \varnothing \equiv \varnothing : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing^\dagger \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id}^\dagger \equiv \mathrm{id} : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash ()^\dagger \equiv () : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t^\dagger)^\dagger \equiv t : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \parallel t_2^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mathbin{;} t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \mathbin{;} t_2^\dagger : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{inl}\ t)^\dagger \equiv \mathrm{inl}\ t^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{inr}\ t)^\dagger \equiv \mathrm{inr}\ t^\dagger : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \times t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \times t_2^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mapsto t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \mapsto t_2^\dagger : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{fold}_T\ t)^\dagger \equiv \mathrm{fold}_T\ t^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t)^\dagger \equiv \mathrm{trace}_T\ t^\dagger : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 \equiv t_1' \parallel t_2' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \mathbin{;} t_2 \equiv t_1' \mathbin{;} t_2' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ t \equiv \mathrm{inl}\ t' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ t \equiv \mathrm{inr}\ t' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \times t_2 \equiv t_1' \times t_2' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 \equiv t_1' \mapsto t_2' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_T\ t \equiv \mathrm{fold}_T\ t' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_T\ t \equiv \mathrm{trace}_T\ t' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \mathbin{@} t_2 \equiv t_1' \mathbin{@} t_2' : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mapsto t_2) \mathbin{@} t \equiv (t_1 \triangleright t)\ (t_2) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \mathbin{@} t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \mathbin{@} t \equiv (t_1 \mathbin{@} t) \parallel (t_2 \mathbin{@} t) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \mathbin{@} \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (t_1 \parallel t_2) \equiv (t \mathbin{@} t_1) \parallel (t \mathbin{@} t_2) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} \mathbin{@} t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \mathbin{;} t_2 \mathbin{@} t \equiv t_2 \mathbin{@} (t_1 \mathbin{@} t) : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \equiv \mathrm{inr}\ u' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \equiv u' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv \mathrm{inl}\ u' : T \qquad \Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \equiv u'' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv u'' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \equiv \mathrm{inl}\ u' : T \qquad \Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \equiv u'' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \equiv u'' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv \mathrm{inr}\ u' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv u' : T}$$

図 15　equality judgement

# 8　諸々の性質

**定理 36** (型付けの一意性). 与えられた型環境 $Gamma$ のもとで，任意の項 $t$ は，高々 1 つの型しかもたない．つまり，$t$ が型付け可能ならばその型は一意である．

$$\Gamma \vdash t : T \land \Gamma \vdash t : U \implies T = U$$

**補題 37** (合流性（Confluence）).

$$e \Rrightarrow e_1 \land e \Rrightarrow e_2 \implies \exists t'.(t_1 \Rrightarrow t' \land t_1 \Rrightarrow t')$$

**定理 38** (簡約結果の一意性).

$$e \Rrightarrow e_1 \not\Rrightarrow \land e \Rrightarrow e_2 \not\Rrightarrow \implies e_1 = e_2$$

**定理 39** (型保存定理（Type Preservation）). リダクションの前後で同じ型付け

$$\Gamma \vdash t : T \land t \Rrightarrow t' \implies \Gamma \vdash t' : T$$

**定理 40** (型進行定理（Type Progress）). 型付けされた項は値かさらにリダクション可能

$$\Gamma \vdash t : T \implies t \text{ is value} \lor \exists t'.t \Rrightarrow t'$$