

扱いたい構造は以下の全てを持つ圏

- 自己双対コンパクト閉圏 (Self-Dual Compact Closed Category)
- トレース付き有限双積 (Traced Finite Biproduct)
- 半環圏 (Rig Category)
- 逆圏 (Inverse Category)
- 上限による豊穡化 (Sup enrichment)
- 余代数モダリティの余クライスリ圏 (coKleisli Category of coAlgebra Modality)
- ダガーファイブレーション (Dagger Fibration)

0.1 圏

定義 1 (Category (圏)). 圏 \mathcal{C} は以下の構造を備える

- 対象 (Object) の類 $\text{Obj}(\mathcal{C})$ を持つ (各対象は A, B, C 等の大文字で表す)
- $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ に対する射 (Morphism) の類 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を持つ (各射は単に $A \rightarrow B$ で表すか, f, g, h 等の小文字で表す)
 - 射 $f : A \rightarrow B$ の A を始域 (Domain), B を終域 (Codomain) と呼び, それぞれ $\text{Dom}(f)$, $\text{Cod}(f)$ で表す
- 任意の対象 A に対して恒等射 $\text{id}_A : A \rightarrow A$ が存在する
- 任意の射 $f : A \rightarrow B$ 及び $g : B \rightarrow C$ に対して射の合成 $g \circ f : A \rightarrow C$ が存在する
- 任意の対象 A, B 及び射 $f : A \rightarrow B$ について, 単位律 $\text{id}_B \circ f = f$ $f \circ \text{id}_A = f$ を満たす
- 任意の射 $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ に対して結合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を満たす

定義 2 (Monomorphism (単射)). 射 $f : A \rightarrow B$ は, 任意の射 $g_1, g_2 : C \rightarrow A$ に対して $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき, 単射と呼ぶ.

定義 3 (Epimorphism (全射)). 射 $f : A \rightarrow B$ は, 任意の射 $g_1, g_2 : B \rightarrow C$ に対して $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき, 全射と呼ぶ.

定義 4 (Bimorphism (双射)). 単射かつ全射である射を全単射もしくは双射と呼ぶ.

定義 5 (Isomorphism (同型射)). 射 $f : A \rightarrow B$ が同型射 (Isomorphism) であるとは, $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たす $g : B \rightarrow A$ が存在することをいう. このとき g は f の逆射 (Inverse morphism) と呼び f^{-1} で表す. 二つの等式のうち, 左のみ満たす場合の射 g を f の引き込み (Retraction) と呼び, 右のみ満たす場合の g を f の断面 (Section) と呼ぶ. 射が同型射であることを強調する場合, $f : A \xrightarrow{\cong} B$ と表す. 圏の対象 A, B の間に同型射が存在するとき, A と B は同型 (Isomorphic) であるといい, $A \cong B$ で表す.

任意の同型射は双射だが, 双射は必ずしも同型射ではないことに留意すること.

定義 6 (Functor (関手)). \mathcal{C} と \mathcal{D} を圏とする. 関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は, \mathcal{C} の対象を \mathcal{D} の対象へ写す関数 $\text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ と, \mathcal{C} の射を \mathcal{D} の射に写す関数 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}A, \mathbf{F}B)$ であり, $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$ と $\mathbf{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{(\mathbf{F}A)}$ を満たす.

定義 7 (Natural Transformation (自然変換)). \mathcal{C} と \mathcal{D} を圏とし, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を関手とする. 自然変換 $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ は, 射の族 $\tau_A : \mathbf{F}A \rightarrow \mathbf{G}A$ から成り, 圏 \mathcal{C} の任意の射 $f : A \rightarrow B$ について, 以下の図式が可換 (矢印をどの順番に通っても, 射の合成に関して等式が成り立つこと) になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}A & \xrightarrow{\tau_A} & \mathbf{G}A \\ \mathbf{F}f \downarrow & & \downarrow \mathbf{G}f \\ \mathbf{F}B & \xrightarrow{\tau_B} & \mathbf{G}B \end{array}$$

任意の対象 $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について射 τ_A が \mathcal{D} の同型射であるとき, τ は自然同型 (Natural Isomorphism) であるという.

定義 8 (Categorical Equivalence (圏同値)). 圏 \mathcal{C} と \mathcal{D} は, 関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $\mathbf{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が存在して $\text{Id}_{\mathcal{C}} \cong \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ かつ

$\text{Id}_{\mathcal{D}} \cong \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ であるとき, 同値であるという ($\text{Id}_{\mathcal{C}}$ と $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ は各圏の恒等関手). 圏同値は $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ で表す.

定義 9 (Opposite Category (反対圏)). 圏 \mathcal{C} の反対圏 \mathcal{C}^{op} とは, $\text{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Obj}(\mathcal{C})$ かつ $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ である圏である.

定義 10 (Adjunction (随伴) [1]). \mathcal{C} と \mathcal{D} を圏とする. 関手 $\mathbf{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $\mathbf{R} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が随伴 (Adjunction) であるとは, 対象 $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ と $B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ について自然となる以下の自然同型が成り立つときであり, $\mathbf{L} \dashv \mathbf{R}$ であらわす.

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{L}A, B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{R}B)$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{L} & \\ \mathcal{C} & \xrightleftharpoons[\mathbf{R}]{\perp} & \mathcal{D} \end{array}$$

0.2 モノイダル圏

定義 11 (Monoidal Category (モノイダル圏) [2]). モノイダル圏 \mathcal{C} は以下の構造を備える

- 双関手 $(-) \otimes (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (モノイダル積と呼ばれる)
- 単位対象 $I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$
- (自然同型) 結合子 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$
- (自然同型) 左単位子 $\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\cong} A$
- (自然同型) 右単位子 $\rho_A : A \otimes I \xrightarrow{\cong} A$
- 二つの図式 (五角等式, 三角等式) が可換となる

$$\begin{array}{ccccc} & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & & \\ & \nearrow \alpha_{A \otimes B, C, D} & & \searrow \alpha_{A, B, C \otimes D} & \\ ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\ & \searrow \alpha_{A, B, C} \otimes \text{id}_D & & \nearrow \text{id}_A \otimes \alpha_{B, C, D} & \\ & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A, B \otimes C, D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \\ & & & & \\ (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A, I, B}} & A \otimes (I \otimes B) & & \\ & \searrow \rho_A \otimes \text{id}_B & & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_B & \\ & A \otimes B & & & \end{array}$$

定義 12 (Symmetric Monoidal Category (対称モノイダル圏) [2]). 対称モノイダル圏 \mathcal{C} はモノイダル圏であり, 以下の構造を備える.

- (自然同型) 対称子 $\sigma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$
- 等式 $\sigma_{A,B} = \sigma_{B,A}^{-1}$ を満たす
- 六角等式が可換となる

$$\begin{array}{ccccc} & & (B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{B, A, C}} & B \otimes (A \otimes C) \\ & \nearrow \sigma_{A, B} \otimes \text{id}_C & & \searrow \text{id}_B \otimes \sigma_{A, C} & \\ (A \otimes B) \otimes C & & & & B \otimes (C \otimes A) \\ & \searrow \alpha_{A, B, C} & & \nearrow \alpha_{B, C, A} & \\ & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A, B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A & \end{array}$$

定義 13 (Symmetric Monoidal Closed Category (対称モノイダル閉圏) [3]). 対称モノイダル閉圏 \mathcal{C} は対象モノイダル圏であり, 以下の構造を備える.

- 双関手 $(-) \multimap (-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (内部ホムと呼ばれる)
- 任意の対象 $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, モノイダル積 \otimes と内部ホム \multimap の随伴 $((-) \otimes A \dashv A \multimap (-)) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が存在する

命題 14. 対称モノイダル閉圏 \mathcal{C} は任意の $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, 同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ を持つ.

証明. モノイダル積 \otimes と内部ホム \multimap の随伴から自然同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C)$$

が得られる. 任意の $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, 自然同型の合成により,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, (A \otimes B) \multimap C) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes (A \otimes B), C) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}((X \otimes A) \otimes B, C) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes A, B \multimap C) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A \multimap (B \multimap C)) \end{aligned}$$

を得る. 米田の補題より, 同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ が存在する. □

命題 15. 対称モノイダル閉圏 \mathcal{C} は任意の $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, 同型 $I \multimap A \cong A$ を持つ.

証明. 任意の $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, 自然同型の合成により,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I \multimap A) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes I, A) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \end{aligned}$$

を得る. 米田の補題より, 同型 $I \multimap A \cong A$ が存在する. □

命題 16. 対称モノイダル閉圏 \mathcal{C} は任意の $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, 以下の 3 つの射を持つ.

$$\begin{aligned} \eta'_A &: I \rightarrow A \multimap A \\ \text{eval}_{A,B} &: (A \multimap B) \otimes A \rightarrow B \\ \text{comp}_{A,B,C} &: (A \multimap C) \otimes (B \multimap C) \rightarrow A \multimap C \end{aligned}$$

証明. 恒等射 id_A より, 射の同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I \otimes A, A) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A \multimap A) \end{aligned}$$

を得るので, 射 η_A は存在する. 次に, 恒等射 $\text{id}_{A \multimap B}$ より, 射の同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \multimap B, A \multimap B) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B)$$

を得るので, 射 $\text{eval}_{A,B}$ は存在する. 次に, 合成射 $\text{eval}_{B,C} \circ (\text{id}_{B \multimap C} \otimes \text{eval}_{A,B})$ より, 射の同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes ((A \multimap B) \otimes A), C) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(((B \multimap C) \otimes (A \multimap B)) \otimes A, C) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes (A \multimap B), A \multimap C) \end{aligned}$$

を得るので, 射 $\text{comp}_{A,B,C}$ は存在する. □

命題 14, 命題 15, 命題 16 は, 対称子を使用せず証明しており, モノイダル閉圏でも成り立つ.

命題 16 で用いた射 $\text{eval}_{A,B}$ より, 射の同型から

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (A \multimap B), B) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (A \multimap B) \multimap B) \end{aligned}$$

を得る.

定義 17 (\star -autonomous Category (\star - 自立圏) [3]). \star - 自立圏 \mathcal{C} は対称モノイド閉圏であり, 以下の構造を備える.

- 双対化対象 $\perp \in \text{Obj}(\mathcal{C})$
- 双対化関手 $(-)^* := (-) \multimap \perp : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$
- (自然同型) 二重双対 $A \xrightarrow{\cong} A^{**}$

双対化関手 $(-)^*$ から射の同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C^*) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}((A \otimes B) \otimes C, \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (B \otimes C), \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C) \multimap \perp) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C)^*) \end{aligned}$$

を得る.

二重双対により, 以下の同型

$$A \otimes B \cong (A \multimap B^*)^* \quad A \multimap B \cong (A \otimes B^*)^* \quad A \multimap B \cong B^* \multimap A^*$$

を得る.

証明.

$$\begin{aligned} A \otimes B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B)^{**} \\ &= ((A \otimes B) \multimap \perp)^* \\ &\xrightarrow{\cong} (A \multimap (B \multimap \perp))^* \\ &= (A \multimap B^*)^* \\ A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{**} \\ &= A \multimap (B^* \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^*) \multimap \perp \\ &= (A \otimes B^*)^* \\ A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{**} \\ &= A \multimap (B^* \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^*) \multimap \perp \\ &\xrightarrow{\cong} (B^* \otimes A) \multimap \perp \\ &\xrightarrow{\cong} B^* \multimap (A \multimap \perp) \\ &= B^* \multimap A^* \end{aligned}$$

□

同様に, 自然同型の合成により $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B^*, A^*)$ を得る. また, 命題 15 より, 同型 $I^* \cong \perp$ を得る.

定義 18 (Compact Closed Category (コンパクト閉圏) [4][5]). コンパクト閉圏 \mathcal{C} は \star - 自立圏であり, 以下の構造を備える.

- (自然同型) 自己双対 $\varsigma_{A,B} : (A \otimes B)^* \xrightarrow{\cong} A^* \otimes B^*$
- (自然同型) 自己双対 $\varsigma_I : I^* \xrightarrow{\cong} I$

コンパクト閉圏の定義から同型を得る.

$$\begin{aligned} A \multimap B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^*)^* \\ &\xrightarrow{\cong} (A^* \otimes B^{**}) \\ &\xrightarrow{\cong} A^* \otimes B \end{aligned}$$

また, コンパクト閉圏 \mathcal{C} の任意の対象 A, B, C について, 以下の射の同型を得る.

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B^* \otimes C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C)$$

コンパクト閉圏 \mathcal{C} の任意の対象 $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ の恒等射 id_A について, 二つの射の同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I \otimes A, A) & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I \multimap A) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A \multimap A) & &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^* \multimap I^*) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A^* \otimes A) & &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^* \multimap I) \\ & & &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A^*, I) \end{aligned}$$

から, $\eta_A : I \rightarrow A^* \otimes A$ と $\epsilon_A : A \otimes A^* \rightarrow I$ を得る.

コンパクト閉圏 \mathcal{C} の任意の対象 A について, η_A から射 $\text{decomp}_{A,B,C} : A \multimap C \rightarrow (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)$ を以下の射の合成として得る

$$\begin{aligned}
A \multimap C &\xrightarrow{\cong} (A^* \otimes C) \\
&\xrightarrow{\rho_{A^* \otimes C}} (A^* \otimes C) \otimes I \\
&\xrightarrow{\text{id}_{A^* \otimes C} \otimes \eta_B} (A^* \otimes C) \otimes (B^* \otimes B) \\
&\xrightarrow{\text{id}_{A^* \otimes C} \otimes \sigma_{B^*, B}} (A^* \otimes C) \otimes (B \otimes B^*) \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^*, C, B \otimes B^*}} A^* \otimes (C \otimes (B \otimes B^*)) \\
&\xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes \sigma_{C, B \otimes B^*}} A^* \otimes ((B \otimes B^*) \otimes C) \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^*, B \otimes B^*, C}^{-1}} (A^* \otimes (B \otimes B^*)) \otimes C \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^*, B, B^*}^{-1} \otimes \text{id}_C} ((A^* \otimes B) \otimes B^*) \otimes C \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^* \otimes B, B^*, C}} (A^* \otimes B) \otimes (B^* \otimes C) \\
&\xrightarrow{\cong} (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)
\end{aligned}$$

0.3 ダガー圏

定義 19 (\dagger -Category (\dagger -圏) [2]). \dagger -圏 \mathcal{C} は, 以下の構造を備える.

- 関手 $\dagger : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$
- \dagger は対象に対して恒等
- 対合的 $\dagger \circ \dagger = \text{Id}_{\mathcal{C}}$

\dagger -圏の定義から, 任意の射 $A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ について, 以下の等式が導かれる.

$$\begin{aligned}
\text{id}_A^\dagger &= \text{id}_A : A \rightarrow A \\
(g \circ f)^\dagger &= f^\dagger \circ g^\dagger : C \rightarrow A \\
f^{\dagger\dagger} &= f : A \rightarrow B,
\end{aligned}$$

$f^\dagger = f^{-1}$ となる f をユニタリーと呼び, $f^\dagger = f$ となる f を自己随伴と呼ぶ.

定義 20 (\dagger -Functor (\dagger -関手)). **ToDo**

定義 21 (\dagger -Symmetric Monoidal Category (\dagger -対称モノイド圏) [2][4]). \dagger -対称モノイド圏 \mathcal{C} は, 対称モノイド圏かつ \dagger -圏であり, 以下の構造を備える.

- 任意の $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, $\alpha_{A,B,C}, \lambda_A, \rho_A, \sigma_{A,B}$ がユニタリ
- 関手 \dagger が厳密モノイド関手であり, 任意の射 f, g について, $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$

定義 22 (\dagger -Comact Category (\dagger -コンパクト圏) [4]). \dagger -コンパクト圏 \mathcal{C} は, コンパクト閉圏かつ \dagger -対称モノイド圏であり, 以下の構造を備える.

- 任意の $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ について, 以下の図式が可換

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{\eta_A} & A^* \otimes A \\
& \searrow \epsilon_A^\dagger & \downarrow \sigma_{A^*, A} \\
& & A \otimes A^*
\end{array}$$

定義から ϵ_A は $\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A, A^*}$ として定義可能となる. 逆に ϵ_A から η_A を定義することもできる.

\dagger -コンパクト圏 \mathcal{C} は、任意の対象 A, B の内部ホム $A \multimap B$ について、以下の図式を可換にする射 $\text{dagger}_{A,B} : A \multimap B \rightarrow B \multimap A$ を持つ。

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(I, A \multimap B) & \xrightarrow{\text{Hom}(I, \text{dagger}_{A,B})} & \text{Hom}(I, B \multimap A) \\ \cong \downarrow & & \cong \uparrow \\ \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{(-)^\dagger} & \text{Hom}(B, A) \end{array}$$

0.4 豊饒圏

定義 23 (\mathcal{V} -圏 (\mathcal{V} -category)). [6] \mathcal{V} をモノイダル圏とする. \mathbb{A} が \mathcal{V} で豊穰化された圏 (あるいは単に \mathcal{V} -圏) とは以下の要素からなる.

- \mathbb{A} の対象 $\text{Obj}(\mathbb{A})$
- 任意の対象 $A, B \in \text{Obj}(\mathbb{A})$ に対してホム対象 $\mathbb{A}(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{V})$
- 任意の対象 $A \in \text{Obj}(\mathbb{A})$ に対する \mathcal{V} の射 $u_A : I \rightarrow \mathbb{A}(A, A)$
- 任意の対象 $A, B, C \in \text{Obj}(\mathbb{A})$ に対する \mathcal{V} の射 $c_{A,B,C} : \mathbb{A}(B, C) \otimes \mathbb{A}(A, B) \rightarrow \mathbb{A}(A, C)$
- 任意の対象 $A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathbb{A})$ に対して以下の可換図式を満たす

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{A}(A, D) & & \\ & \swarrow c_{A,C,D} & & \nwarrow c_{A,B,D} & \\ \mathbb{A}(C, D) \otimes \mathbb{A}(A, C) & & & & \mathbb{A}(B, D) \otimes \mathbb{A}(A, B) \\ \nwarrow u_{\mathbb{A}(C,D)} \otimes c_{A,B,C} & & & & \nearrow c_{B,C,D} \otimes u_{\mathbb{A}(A,B)} \\ & \mathbb{A}(C, D) \otimes (\mathbb{A}(B, C) \otimes \mathbb{A}(A, B)) & \xleftarrow{\alpha_{\mathbb{A}(C,D), \mathbb{A}(B,C), \mathbb{A}(A,B)}} & (\mathbb{A}(C, D) \otimes \mathbb{A}(B, C)) \otimes \mathbb{A}(A, B) & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \mathbb{A}(B, B) \otimes \mathbb{A}(A, B) & \xrightarrow{c_{A,B,B}} & \mathbb{A}(A, B) & \xleftarrow{c_{A,A,B}} & \mathbb{A}(A, B) \otimes \mathbb{A}(A, A) \\ \uparrow u_B \otimes \text{id}_{\mathbb{A}(A,B)} & \nearrow \lambda_{\mathbb{A}(A,B)} & & \nwarrow \rho_{\mathbb{A}(A,B)} & \uparrow \text{id}_{\mathbb{A}(A,B)} \otimes u_A \\ I \otimes \mathbb{A}(A, B) & & & & \mathbb{A}(A, B) \otimes I \end{array}$$

ToDo 必要なら \mathcal{V} -関手, \mathcal{V} -自然変換も定義する.

0.5 有限双積

定義 24 (Finite Product (有限積) [2]). 圏 \mathcal{C} における対象 A, B に対して有限積 $A \times B$ は、以下の構造を備える.

- 射 $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ と $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$
- 任意の対象 C と射の組 $f : C \rightarrow A, g : C \rightarrow B$ に対して一意な射 $h : C \rightarrow A \times B$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow f & \downarrow h & \searrow g & \\ A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \end{array}$$

射 h は $\langle f, g \rangle$ と表記されることが多い.

- (終対象) 任意の対象 C に対して一意な射 $h : C \rightarrow I$ が存在する対象 I

有限積からなる圏 (デカルト圏) は、以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- (自然な射の族) 複製 $\Delta_A : A \rightarrow A \otimes A$
- (自然な射の族) 削除 $\diamond_A : A \rightarrow I$

定義 25 (Finite Coproduct (有限余積) [2]). \mathcal{C} 圏 \mathcal{C} における対象 A, B に対して有限余積 $A + B$ は、以下の構造を備える.

- 射 $\iota_1 : A \rightarrow A \oplus B$ と $\iota_2 : B \rightarrow A \oplus B$
- 任意の対象 C と射の組 $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$ に対して一意な射 $h : A + B \rightarrow C$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \nearrow & \uparrow h & \nwarrow g \\ A & \xrightarrow[\iota_1]{} A + B \xleftarrow[\iota_2]{} & B \end{array}$$

射 h は $[f, g]$ と表記されることが多い.

- (始対象) 任意の対象 C に対して一意な射 $h : I \rightarrow C$ が存在する対象 I

有限余積からなる圏 (余デカルト圏) は, 以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- (自然な射の族) 合併 $\nabla_A : A \oplus A \rightarrow A$
- (自然な射の族) 追加 $\square_A : I \rightarrow A$

定義 26 (Finite Biproduct (有限双積) [2]). 圏 \mathcal{C} における対象 A_1, A_2 に対して有限双積 $A_1 \oplus A_2$ は, 以下の構造を備える.

- (零対象) 任意の対象 A_1, A_2 に対して一意な零射 $0_{A_1, A_2} : A_1 \rightarrow O \rightarrow A_2$ が存在する対象 O
- 射 $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_1$ と $\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_2$
- π_1, π_2 に関して有限積
- 射 $\iota_1 : A_1 \rightarrow A_1 \oplus A_2$ と $\iota_2 : A_2 \rightarrow A_1 \oplus A_2$
- ι_1, ι_2 に関して有限余積
- $\delta_{ij} = \pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} \text{id}_A & \text{if } i = j \\ 0_{A_j, A_i} & \text{if } i \neq j \end{cases}$

ここで零射 $0_{A_1, A_2}$ は任意の対象 $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ および任意の射 $f : Y \rightarrow Z, g : X \rightarrow Y$ に対して, 以下の図式を可換にする射である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0_{X,Y}} & Y \\ g \downarrow & \searrow 0_{X,Z} & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{0_{Y,Z}} & Z \end{array}$$

有限双積からなる圏は, 以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [2] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- (自然な射の族) 複製 $\Delta_A : A \rightarrow A \otimes A$
- (自然な射の族) 削除 $\diamond_A : A \rightarrow I$
- (自然な射の族) 合併 $\nabla_A : A \otimes A \rightarrow A$
- (自然な射の族) 追加 $\square_A : I \rightarrow A$

有限双積を持つ圏は半加法圏 [7] である. 半加法圏 \mathcal{C} の任意の射 $f, g : A \rightarrow B$ に対して射の加法

$$f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A : A \rightarrow B$$

と定義できる [8]. よって有限双積を持つ圏は可換モノイドで豊穠化された圏 (**CMon**-圏) である [9, Def. 2.7.6]. (ここで **CMon** は対象を可換モノイド, 射を可換モノイド間の準同型射とする圏)

射の加法は任意の射 $f, g, h : A \rightarrow B$ について以下の等式を満たす.

$$\begin{aligned} (f + g) + h &= f + (g + h) \\ 0_{A,B} + f &= f = f + 0_{A,B} \\ f + g &= g + f \end{aligned}$$

また, 射の合成は射の加法を保存し, 任意の対象 X, Y と任意の射 $f, g : A \rightarrow B, e : X \rightarrow A, h : B \rightarrow Y$ について, 以下の

等式を満たす.

$$\begin{aligned}(f + g) \circ e &= f \circ e + g \circ e \\ h \circ (f + g) &= h \circ f + h \circ g \\ f \circ 0_{X,A} &= 0_{X,B} \\ 0_{B,Y} \circ f &= 0_{A,Y}\end{aligned}$$

また, モノイダル圏 \mathcal{C} について有限双積が保存されるとき, モノイダル積は射の加法を保存し, 任意の対象 X, Y と任意の射 $f, g : A \rightarrow B, e, h : C \rightarrow D$ に対して, 以下の等式を満たす.

$$\begin{aligned}(f + g) \otimes h &= f \otimes h + g \otimes h \\ f \otimes (e + h) &= f \otimes e + f \otimes h \\ 0_{X,Y} \otimes f &= 0_{X,Y}\end{aligned}$$

可換モノイドが冪等率 $f + f = f$ も満たす, すなわち射の加法が交わり (join) になっており, さらに完備上半束 (sup-lattice), つまりホム対象の任意の部分集合について交わりを持つとき, **CMon**-圏はむしろ **Sup**-圏である.

定義 27 (Sup-Category (Sup-圏)). [10, Def. 1.3.(i)] **Sup** は対象が完備上半束, 射が完備上半束を保存する写像からなる圏である. **Sup**-圏 \mathcal{C} のホム対象 $\mathcal{C}(A, B)$ の任意の部分集合 S に対して, $\mathcal{C}(A, B)$ 上の半順序に関する上限 $\bigvee_{s \in S} s$ を持つ. 射の合成は上限を保存し, 任意の射 $f : X \rightarrow A, g : B \rightarrow Y$ について, 以下の等式を満たす.

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{s \in S} s\right) \circ f &= \bigvee_{s \in S} (s \circ f) \\ g \circ \left(\bigvee_{s \in S} s\right) &= \bigvee_{s \in S} (g \circ s)\end{aligned}$$

また, 射の加法と同様に, モノイダル圏でもある **Sup**-圏 \mathcal{C} について, モノイダル積が上限を保存するとき, 以下の等式を満たす.

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{s \in S} s\right) \otimes f &= \bigvee_{s \in S} (s \otimes f) \\ g \otimes \left(\bigvee_{s \in S} s\right) &= \bigvee_{s \in S} (g \otimes s)\end{aligned}$$

定義 28 (Sup-Functor (Sup-関手)). [10, Def. 1.3.(ii)] **Sup**-圏間の関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が射の上限を保存するとき, **Sup**-関手と呼ぶ.

$$\mathbf{F}\left(\bigvee_{s \in S} s\right) = \bigvee_{s \in S} \mathbf{F}(s)$$

Sup-圏はクオントロイド (Quantaloid) という名前でも知られており [11], multi-valued な論理やファジィ論理などに応用されている.

0.6 制限圏

定義 29 (Restriction Category (制限圏)). [12, Def. 2.1.1.] 圏 \mathcal{C} について, \mathcal{C} の任意の射 $f : A \rightarrow B$ に対して射 $\bar{f} : A \rightarrow A$ が割り当てられ, 次の 4 つの条件を満たすとき, 圏 \mathcal{C} は制限構造を持ち, 圏 \mathcal{C} を制限圏と呼ぶ.

- 任意の射 $f : A \rightarrow B$ について, $f \circ \bar{f} = f$
- 任意の射 $f : A \rightarrow B$ と $g : A \rightarrow C$ について, $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- 任意の射 $f : A \rightarrow B$ と $g : A \rightarrow C$ について, $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- 任意の射 $f : A \rightarrow B$ と $g : B \rightarrow C$ について, $\bar{g} \circ f = f \circ \overline{g \circ f}$

ここで, 射 \bar{f} は f の restriction idempotent (制限べき等) と呼ばれる.

制限圏の射 $f : A \rightarrow B$ は $\bar{f} = \text{id}_A$ であるとき total と呼ぶ.

制限圏は半順序集合 poset で豊穡化された圏となる [12, p.237][13, Lemma 1.6.3]. 射の半順序関係は次の形で与えられる.

$$f \leq g \Leftrightarrow f = g \circ \bar{f}$$

定義 30 (Restriction Functor (制限関手)). [13, 1.6.3 p.22] 制限圏間の関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が制限構造を保存するとき, \mathbf{F} を制限関手と呼ぶ.

$$\overline{\mathbf{F}(f)} = \mathbf{F}(\bar{f})$$

制限圏において, 同型射を弱めた射を考える. 制限圏 \mathcal{C} の射 $f : A \rightarrow B$ に対して $f^\circ \circ f = \bar{f}$ と $f \circ f^\circ = \overline{f^\circ}$ を満たす唯一の射を制限同型射 (restricted isomorphism) あるいは部分同型射 (partial isomorphism) と呼ぶ.

定義 31 (Inverse Category (逆圏)). [12, section 2.3.2][14, Def. 3] 制限圏 \mathcal{C} について, 全ての射 $f : A \rightarrow B$ が部分同型射 f° を持つとき, \mathcal{C} を逆圏 (Inverse Category) と呼ぶ.

定義 32 (Join Restriction Category (結び制限圏)). **要調査**

結び制限圏は poset というよりは完備上半束 (sup-lattice) で豊穡化された圏

定義 33 (Join Inverse Category (結び逆圏)). **要調査**

Giles の論文の Def. 10.3.1. で射の加法とモノイダル積, 射の合成の組み合わせについて定義している (お互いを保存する形)

0.7 その他構造

定義 34 (Rig Category (半環圏) [15]). 半環圏 \mathcal{C} は以下の構造を備える.

- (加法としての) 対称モノイド構造 (\mathcal{C}, \oplus, O)
- (乗法としての) モノイド構造 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$
- (自然同型) 左分配子 $\delta_l : A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- (自然同型) 右分配子 $\delta_r : (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- (自然同型) 左吸収子 $\kappa_l : A \otimes O \cong O$
- (自然同型) 右吸収子 $\kappa_r : O \otimes A \cong O$
- 諸々のコヒーレンス公理 [15]

定義 35 (Trace (トレース)). **要調査**

参考文献

- [1] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Vol. 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer.
- [2] Peter Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 813, , 08 2009.
- [3] Michael Barr. *-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 1, No. 2, p. 159–178, 1991.
- [4] Samson Abramsky. No-cloning in categorical quantum mechanics. *Semantic Techniques in Quantum Computation*, 10 2009.
- [5] G.M. Kelly and M.L. Laplaza. Coherence for compact closed categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 19, pp. 193–213, 1980.
- [6] G M Kelly. BASIC CONCEPTS OF ENRICHED CATEGORY THEORY.
- [7] Stephen Lack. Non-canonical isomorphisms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 216, No. 3, pp. 593–597, 2012.

- [8] Saunders MacLane. Duality for groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 56, No. 6, pp. 485–516, 1950.
- [9] Brett Giles. An investigation of some theoretical aspects of reversible computing. Publisher: Graduate Studies.
- [10] Andrew M. Pitts. Applications of sup-lattice enriched category theory to sheaf theory. Vol. s3-57, No. 3, pp. 433–480.
- [11] Isar Stubbe. An introduction to quantaloid-enriched categories. Vol. 256, pp. 95–116.
- [12] J.R.B. Cockett and Stephen Lack. Restriction categories i: categories of partial maps. Vol. 270, No. 1, pp. 223–259.
- [13] Xiuzhan Guo. *Products, joins, meets, and ranges in restriction categories*. Ph.d. thesis, University of Calgary.
- [14] Robin Kaarsgaard, Holger Bock Axelsen, and Robert Glück. Join inverse categories and reversible recursion. Vol. 87, pp. 33–50.
- [15] Miguel L. Laplaza. Coherence for distributivity. In G. M. Kelly, M. Laplaza, G. Lewis, and Saunders Mac Lane, editors, *Coherence in Categories*, pp. 29–65, Berlin, Heidelberg, 1972. Springer Berlin Heidelberg.