

# 高階の型付き可逆プログラミング言語

MountainSeal

## 1 構文

Type Variable	$\ni$	$X, Y, Z$
Term Variable	$\ni$	$x, y, z$
Type	$\ni$	$S, T, U ::= X \mid \mathbf{I} \mid T \oplus T \mid T \otimes T \mid T \multimap T \mid \mu X. T$
Value	$\ni$	$v, w ::= x \mid () \mid \text{inl } v \mid \text{inr } v \mid v \times v \mid v \mapsto v \mid \text{fold}_T v \mid \text{trace}_T v \mid v \parallel v \mid v \circ v \mid \emptyset \mid \text{id}$
Term	$\ni$	$s, t, u ::= x \mid () \mid \text{inl } t \mid \text{inr } t \mid t \times t \mid t \mapsto t \mid \text{fold}_T t \mid \text{trace}_T t \mid t \parallel t \mid t \circ t \mid \emptyset \mid \text{id} \mid t^\dagger$
Expression	$\ni$	$e, f, g ::= t \mid e @ e$
Type Context	$\ni$	$\Theta ::= \mid \Theta, X$
Term Context	$\ni$	$\Gamma ::= \mid \Gamma, t : T$
Type Judgement	$\ni$	$\Theta \vdash T$
Term Judgement	$\ni$	$\Gamma \vdash t : T$
Expression Judgement	$\ni$	$\vdash e : T$
Reduction	$\ni$	$t \Rightarrow t$

図 1 Syntax

## 2 型の構成

$$\frac{}{\Theta, X \vdash X} \quad \frac{}{\Theta \vdash \mathbf{I}} \quad \frac{\Theta \vdash T_1 \quad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \oplus T_2} \quad \frac{\Theta \vdash T_1 \quad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \otimes T_2} \quad \frac{\Theta \vdash T_1 \quad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \multimap T_2} \quad \frac{\Theta, X \vdash T}{\Theta \vdash \mu X. T}$$

図 2 Formation rules

$$\begin{aligned} [](X) &= X \\ [\sigma, X \rightarrow T](X) &= T \\ [\sigma, X' \rightarrow S](X) &= X \\ [\sigma](\mathbf{I}) &= \mathbf{I} \\ [\sigma](T_1 \oplus T_2) &= [\sigma](T_1) \oplus [\sigma](T_2) \\ [\sigma](T_1 \otimes T_2) &= [\sigma](T_1) \otimes [\sigma](T_2) \\ [\sigma](T_1 \multimap T_2) &= [\sigma](T_1) \multimap [\sigma](T_2) \\ [\sigma](\mu X. T) &= \mu X. [\sigma](T) \end{aligned}$$

図 3 Type Substitution

### 3 Preliminary

扱いたい構造は以下の全てを持つ圏

- 自己双対コンパクト閉圏 (Self-Dual Compact Closed Category)
- トレース付き有限双積 (Traced Finite Biproduct)
- 半環圏 (Rig Category)
- 逆圏 (Inverse Category)
- 上限による豊穡化 (Sup enrichment)
- 余代数モダリティの余クライスリ圏 (coKleisli Category of coAlgebra Modality)
- ダガーファイブレーション (Dagger Fibration)

#### 3.1 圏

**定義 1** (Category (圏)). 圏  $\mathcal{C}$  は以下の構造を備える

- 対象 (Object) の類  $|\mathcal{C}|$  を持つ (各対象は  $A, B, C$  等の大文字で表す)
- $A, B \in |\mathcal{C}|$  に対する射 (Morphism) の類  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  を持つ (各射は単に  $A \rightarrow B$  で表すか,  $f, g, h$  等の小文字で表す)
  - 射  $f: A \rightarrow B$  の  $A$  を始域 (Domain),  $B$  を終域 (Codomain) と呼び, それぞれ  $\text{Dom}(f)$ ,  $\text{Cod}(f)$  で表す
- 任意の対象  $A$  に対して恒等射  $\text{id}_A: A \rightarrow A$  が存在する
- 任意の射  $f: A \rightarrow B$  及び  $g: B \rightarrow C$  に対して射の合成  $g \circ f: A \rightarrow C$  が存在する
- 任意の対象  $A, B$  及び射  $f: A \rightarrow B$  について, 単位律  $\text{id}_B \circ f = f$   $f \circ \text{id}_A = f$  を満たす
- 任意の射  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h: C \rightarrow D$  に対して結合律  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  を満たす

**定義 2** (Monomorphism (単射)). 射  $f: A \rightarrow B$  は, 任意の射  $g_1, g_2: C \rightarrow A$  に対して  $f \circ g_1 = f \circ g_2$  ならば  $g_1 = g_2$  が成り立つとき, 単射と呼ぶ.

**定義 3** (Epimorphism (全射)). 射  $f: A \rightarrow B$  は, 任意の射  $g_1, g_2: B \rightarrow C$  に対して  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$  ならば  $g_1 = g_2$  が成り立つとき, 全射と呼ぶ.

**定義 4** (Bimorphism (双射)). 単射かつ全射である射を全単射もしくは双射と呼ぶ.

**定義 5** (Isomorphism (同型射)). 射  $f: A \rightarrow B$  が同型射 (Isomorphism) であるとは,  $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  を満たす  $g: B \rightarrow A$  が存在することをいう. このとき  $g$  は  $f$  の逆射 (Inverse morphism) と呼び  $f^{-1}$  で表す. 二つの等式のうち, 左のみ満たす場合の射  $g$  を  $f$  の引き込み (Retraction) と呼び, 右のみ満たす場合の  $g$  を  $f$  の断面 (Section) と呼ぶ. 射が同型射であることを強調する場合,  $f: A \xrightarrow{\cong} B$  と表す. 圏の対象  $A, B$  の間に同型射が存在するとき,  $A$  と  $B$  は同型 (Isomorphic) であるといい,  $A \cong B$  で表す.

任意の同型射は双射だが, 双射は必ずしも同型射ではないことに留意すること.

**定義 6** (Functor (関手)).  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  を圏とする. 関手  $\mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は,  $\mathcal{C}$  の対象を  $\mathcal{D}$  の対象へ写す関数  $|\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$  と,  $\mathcal{C}$  の射を  $\mathcal{D}$  の射に写す関数  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}A, \mathbf{F}B)$  であり,  $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$  と  $\mathbf{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathbf{F}A}$  を満たす.

**定義 7** (Natural Transformation (自然変換)).  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  を圏とし,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を関手とする. 自然変換  $\tau: \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$  は, 射の族  $\tau_A: \mathbf{F}A \rightarrow \mathbf{G}A$  から成り, 圏  $\mathcal{C}$  の任意の射  $f: A \rightarrow B$  について, 以下の図式が可換 (矢印をどの順番に通っても, 射の合成に関して等式が成り立つこと) になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}A & \xrightarrow{\tau_A} & \mathbf{G}A \\ \mathbf{F}f \downarrow & & \downarrow \mathbf{G}f \\ \mathbf{F}B & \xrightarrow{\tau_B} & \mathbf{G}B \end{array}$$

任意の対象  $A \in |\mathcal{C}|$  について射  $\tau_A$  が  $\mathcal{D}$  の同型射であるとき,  $\tau$  は自然同型 (Natural Isomorphism) であるという.

**定義 8** (Categorical Equivalence (圏同値)). 圏  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  は, 関手  $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  と  $\mathbf{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が存在して  $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} \cong \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  かつ  $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}} \cong \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  であるとき, 同値であるという ( $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$  と  $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}}$  は各圏の恒等関手). 圏同値は  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  で表す.

**定義 9** (Opposite Category (反対圏)). 圏  $\mathcal{C}$  の反対圏  $\mathcal{C}^{op}$  とは,  $|\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$  かつ  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  である圏である.

**定義 10** (Universal Morphism (普遍射)).

**定義 11** (Adjunction (随伴)). 普遍射 (及び普遍性) から導かれる随伴関手右随伴と左随伴の定義をここに書く. 随伴の定義は他にも

1. 余単位-単位随伴による定義
2. ホム集合随伴による定義

があるが, モノイド積と内部ホムの随伴, 最終的には six operations のうち Wirthmüller context の場合を説明する際に随伴関手の三つ組として定義してくため, この目的に適した定義にしたい.

**定義 12** (Yoneda's Lemma (米田の補題)).

### 3.2 モノイド圏

**定義 13** (Monoidal Category (モノイド圏) [1]). モノイド圏  $\mathcal{C}$  は以下の構造を備える

- 双関手  $(-) \otimes (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (モノイド積と呼ばれる)
- 単位対象  $I \in |\mathcal{C}|$
- (自然同型) 結合子  $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$
- (自然同型) 左単位子  $\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\cong} A$
- (自然同型) 右単位子  $\rho_A : A \otimes I \xrightarrow{\cong} A$
- 二つの図式 (五角等式, 三角等式) が可換となる

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & & \\
 & \nearrow \alpha_{A \otimes B, C, D} & & \searrow \alpha_{A, B, C \otimes D} & \\
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
 \downarrow \alpha_{A, B, C} \otimes id_D & & & & \uparrow id_A \otimes \alpha_{B, C, D} \\
 (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A, B \otimes C, D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & & \\
 & & & & \\
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A, I, B}} & A \otimes (I \otimes B) & & \\
 \downarrow \rho_A \otimes id_B & & \downarrow id_A \otimes \lambda_B & & \\
 A \otimes B & & A \otimes B & & 
 \end{array}$$

**定義 14** (Symmetric Monoidal Category (対称モノイド圏) [1]). 対称モノイド圏  $\mathcal{C}$  はモノイド圏であり, 以下の構造を備える.

- (自然同型) 対称子  $\sigma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$
- 等式  $\sigma_{A,B} = \sigma_{B,A}^{-1}$  を満たす
- 六角等式が可換となる

$$\begin{array}{ccccc}
& & (B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{B,A,C}} & B \otimes (A \otimes C) \\
& \nearrow \sigma_{A,B} \otimes id_C & & & \searrow id_B \otimes \sigma_{A,C} \\
(A \otimes B) \otimes C & & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& \searrow \alpha_{A,B,C} & & & \nearrow \alpha_{B,C,A} \\
& & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A
\end{array}$$

**定義 15** (Symmetric Monoidal Closed Category (対称モノイド閉圏) [2]). 対称モノイド閉圏  $\mathcal{C}$  は対象モノイド圏であり, 以下の構造を備える.

- 双関手  $(-) \multimap (-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (内部ホムと呼ばれる)
- 任意の対象  $A \in |\mathcal{C}|$  について, モノイド積  $\otimes$  と内部ホム  $\multimap$  の随伴  $((-) \otimes A \dashv A \multimap (-)) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  が存在する

**命題 16.** 対称モノイド閉圏  $\mathcal{C}$  は任意の  $A, B, C \in |\mathcal{C}|$  について, 同型  $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$  を持つ.

### Proof

モノイド積  $\otimes$  と内部ホム  $\multimap$  の随伴から自然同型

$$Hom_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \cong Hom_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C)$$

が得られる. 任意の  $X \in |\mathcal{C}|$  について, 自然同型の合成により,

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{C}}(X, (A \otimes B) \multimap C) &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes (A \otimes B), C) \\
&\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}((X \otimes A) \otimes B, C) \\
&\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes A, B \multimap C) \\
&\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X, A \multimap (B \multimap C))
\end{aligned}$$

を得る. 米田の補題より, 同型  $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$  が存在する.

**命題 17.** 対称モノイド閉圏  $\mathcal{C}$  は任意の  $X \in |\mathcal{C}|$  について, 同型  $I \multimap A \cong A$  を持つ.

### Proof

任意の  $X \in |\mathcal{C}|$  について, 自然同型の合成により,

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{C}}(X, I \multimap A) &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes I, A) \\
&\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X, A)
\end{aligned}$$

を得る. 米田の補題より, 同型  $I \multimap A \cong A$  が存在する.

**命題 18.** 対称モノイド閉圏  $\mathcal{C}$  は任意の  $A, B, C \in |\mathcal{C}|$  について, 以下の 3 つの射を持つ.

$$\begin{aligned}
\eta'_A &: I \rightarrow A \multimap A \\
eval_{A,B} &: (A \multimap B) \otimes A \rightarrow B \\
comp_{A,B,C} &: (A \multimap C) \otimes (B \multimap C) \rightarrow A \multimap C
\end{aligned}$$

**Proof**

恒等射  $id_A$  より, 射の同型

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(I \otimes A, A) \\ &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(I, A \multimap A) \end{aligned}$$

を得るので, 射  $\eta_A$  は存在する. 次に, 恒等射  $id_{A \multimap B}$  より, 射の同型

$$Hom_{\mathcal{C}}(A \multimap B, A \multimap B) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B)$$

を得るので, 射  $eval_{A,B}$  は存在する. 次に, 合成射  $eval_{B,C} \circ (id_{B \multimap C} \otimes eval_{A,B})$  より, 射の同型

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes ((A \multimap B) \otimes A), C) &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(((B \multimap C) \otimes (A \multimap B)) \otimes A, C) \\ &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes (A \multimap B), A \multimap C) \end{aligned}$$

を得るので, 射  $comp_{A,B,C}$  は存在する.

命題 16, 命題 17, 命題 18 は, 対称子を使用せず証明しており, モノイド閉圏でも成り立つ.

命題 18 で用いた射  $eval_{A,B}$  より, 射の同型から

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B) &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(A \otimes (A \multimap B), B) \\ &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(A, (A \multimap B) \multimap B) \end{aligned}$$

を得る.

**定義 19** ( $\star$ -autonomous Category ( $\star$ -自立圏) [2]).  $\star$ -自立圏  $\mathcal{C}$  は対称モノイド閉圏であり, 以下の構造を備える.

- 双対化対象  $\perp \in |\mathcal{C}|$
- 双対化関手  $(-)^{\star} := (-) \multimap \perp : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$
- (自然同型) 二重双対  $A \xrightarrow{\cong} A^{\star\star}$

双対化関手  $(-)^{\star}$  から射の同型

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C^{\star}) &= Hom_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}((A \otimes B) \otimes C, \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(A \otimes (B \otimes C), \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C) \multimap \perp) \\ &= Hom_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C)^{\star}) \end{aligned}$$

を得る.

二重双対により, 以下の同型

$$A \otimes B \cong (A \multimap B^{\star})^{\star} \qquad A \multimap B \cong (A \otimes B^{\star})^{\star} \qquad A \multimap B \cong B^{\star} \multimap A^{\star}$$

を得る.

**Proof**

$$\begin{array}{lll}
A \otimes B \xrightarrow{\cong} (A \otimes B)^{**} & A \multimap B \xrightarrow{\cong} A \multimap B^{**} & A \multimap B \xrightarrow{\cong} A \multimap B^{**} \\
= ((A \otimes B) \multimap \perp)^* & = A \multimap (B^* \multimap \perp) & = A \multimap (B^* \multimap \perp) \\
\xrightarrow{\cong} (A \multimap (B \multimap \perp))^* & \xrightarrow{\cong} (A \otimes B^*) \multimap \perp & \xrightarrow{\cong} (A \otimes B^*) \multimap \perp \\
= (A \multimap B^*)^* & = (A \otimes B^*)^* & \xrightarrow{\cong} (B^* \otimes A) \multimap \perp \\
& & \xrightarrow{\cong} B^* \multimap (A \multimap \perp) \\
& & = B^* \multimap A^*
\end{array}$$

同様に, 自然同型の合成により  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B^*, A^*)$  を得る. また, 命題 17 より, 同型  $I^* \cong \perp$  を得る.

**定義 20** (Compact Closed Category (コンパクト閉圏) [3][4]). コンパクト閉圏  $\mathcal{C}$  は  $\star$ - 自立圏であり, 以下の構造を備える.

- (自然同型) 自己双対  $\varsigma_{A,B} : (A \otimes B)^* \xrightarrow{\cong} A^* \otimes B^*$
- (自然同型) 自己双対  $\varsigma_I : I^* \xrightarrow{\cong} I$

コンパクト閉圏の定義から同型を得る.

$$\begin{aligned}
A \multimap B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^*)^* \\
&\xrightarrow{\cong} (A^* \otimes B^{**}) \\
&\xrightarrow{\cong} A^* \otimes B
\end{aligned}$$

また, コンパクト閉圏  $\mathcal{C}$  の任意の対象  $A, B, C$  について, 以下の射の同型を得る.

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B^* \otimes C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C)$$

コンパクト閉圏  $\mathcal{C}$  の任意の対象  $A \in |\mathcal{C}|$  の恒等射  $\text{id}_A$  について, 二つの射の同型

$$\begin{array}{ll}
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I \otimes A, A) & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I \multimap A) \\
\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A \multimap A) & \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^* \multimap I^*) \\
\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A^* \otimes A) & \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^* \multimap I) \\
& \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A^*, I)
\end{array}$$

から,  $\eta_A : I \rightarrow A^* \otimes A$  と  $\epsilon_A : A \otimes A^* \rightarrow I$  を得る.

コンパクト閉圏  $\mathcal{C}$  の任意の対象  $A$  について,  $\eta_A$  から射  $\text{decomp}_{A,B,C} : A \multimap C \rightarrow (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)$  を以下の射の合成として得る

$$\begin{aligned}
A \multimap C &\xrightarrow{\cong} (A^* \otimes C) \\
&\xrightarrow{\rho_{A^* \otimes C}} (A^* \otimes C) \otimes I \\
&\xrightarrow{\text{id}_{A^* \otimes C} \otimes \eta_B} (A^* \otimes C) \otimes (B^* \otimes B) \\
&\xrightarrow{\text{id}_{A^* \otimes C} \otimes \sigma_{B^*, B}} (A^* \otimes C) \otimes (B \otimes B^*) \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^*, C, B \otimes B^*}} A^* \otimes (C \otimes (B \otimes B^*)) \\
&\xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes \sigma_{C, B \otimes B^*}} A^* \otimes ((B \otimes B^*) \otimes C) \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^*, B \otimes B^*, C}^{-1}} (A^* \otimes (B \otimes B^*)) \otimes C \\
&\xrightarrow{\alpha_{A^*, B, B^*}^{-1} \otimes \text{id}_C} ((A^* \otimes B) \otimes B^*) \otimes C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\alpha_{A^* \otimes B, B^*, C}} (A^* \otimes B) \otimes (B^* \otimes C) \\ & \xrightarrow{\cong} (A \multimap B) \otimes (B \multimap C) \end{aligned}$$

### 3.3 ダガー圏

**定義 21** ( $\dagger$ -Category ( $\dagger$ -圏) [1]).  $\dagger$ -圏  $\mathcal{C}$  は、以下の構造を備える。

- 関手  $\dagger : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$
- $\dagger$  は対象に対して恒等
- 対合的  $\dagger \circ \dagger = id_{\mathcal{C}}$

$\dagger$ -圏の定義から、任意の射  $A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  について、以下の等式が導かれる。

$$\begin{aligned} id_A^\dagger &= id_A : A \rightarrow A \\ (g \circ f)^\dagger &= f^\dagger \circ g^\dagger : C \rightarrow A \\ f^{\dagger\dagger} &= f : A \rightarrow B, \end{aligned}$$

$f^\dagger = f^{-1}$  となる  $f$  をユニタリーと呼び、 $f^\dagger = f$  となる  $f$  を自己随伴と呼ぶ。

**定義 22** ( $\dagger$ -Symmetric Monoidal Category ( $\dagger$ -対称モノイド圏) [1][3]).  $\dagger$ -対称モノイド圏  $\mathcal{C}$  は、対称モノイド圏かつ  $\dagger$ -圏であり、以下の構造を備える。

- 任意の  $A, B, C \in |\mathcal{C}|$  について、 $\alpha_{A,B,C}, \lambda_A, \rho_A, \sigma_{A,B}$  がユニタリ
- 関手  $\dagger$  が厳密モノイド関手であり、任意の射  $f, g$  について、 $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$

**定義 23** ( $\dagger$ -Comact Category ( $\dagger$ -コンパクト圏) [3]).  $\dagger$ -コンパクト圏  $\mathcal{C}$  は、コンパクト閉圏かつ  $\dagger$ -対称モノイド圏であり、以下の構造を備える。

- 任意の  $A \in |\mathcal{C}|$  について、以下の図式が可換

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\eta_A} & A^* \otimes A \\ & \searrow \epsilon_A^\dagger & \downarrow \sigma_{A^*, A} \\ & & A \otimes A^* \end{array}$$

定義から  $\epsilon_A$  は  $\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A, A^*}$  として定義可能となる。逆に  $\epsilon_A$  から  $\eta_A$  を定義することもできる。

$\dagger$ -コンパクト圏  $\mathcal{C}$  は、任意の対象  $A, B$  の内部ホム  $A \multimap B$  について、以下の図式を可換にする射  $dagger_{A,B} : A \multimap B \rightarrow B \multimap A$  を持つ。

$$\begin{array}{ccc} Hom(I, A \multimap B) & \xrightarrow{Hom(I, dagger_{A,B})} & Hom(I, B \multimap A) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ Hom(A, B) & \xrightarrow{(-)^\dagger} & Hom(B, A) \end{array}$$

### 3.4 その他の構造

**定義 24** (Finite Product (有限積) [1]). 圏  $\mathcal{C}$  における対象  $A, B$  に対して有限積  $A \times B$  は、以下の構造を備える。

- 射  $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$  と  $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$
- 任意の対象  $C$  と射の組  $f : C \rightarrow A, g : C \rightarrow B$  に対して一意な射  $h : C \rightarrow A \times B$  が存在して以下の図式が可換

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow f & \downarrow h & \searrow g & \\ A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \end{array}$$

射  $h$  は  $\langle f, g \rangle$  と表記されることが多い。

- (終対象) 任意の対象  $C$  に対して一意な射  $h : C \rightarrow I$  が存在する対象  $I$

有限積からなる圏 (デカルト圏) は, 以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [1] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- (自然な射の族) 複製  $\Delta_A : A \rightarrow A \otimes A$
- (自然な射の族) 削除  $\Diamond_A : A \rightarrow I$

**定義 25** (Finite Coproduct (有限余積) [1]). ] 圏  $\mathcal{C}$  における対象  $A, B$  に対して有限余積  $A + B$  は, 以下の構造を備える.

- 射  $\iota_1 : A \rightarrow A \oplus B$  と  $\iota_2 : B \rightarrow A \oplus B$
- 任意の対象  $C$  と射の組  $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$  に対して一意な射  $h : A + B \rightarrow C$  が存在して以下の図式が可換

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \nearrow & \uparrow h & \nwarrow g \\ A & \xrightarrow[\iota_1]{} A + B \xleftarrow[\iota_2]{} & B \end{array}$$

射  $h$  は  $[f, g]$  と表記されることが多い.

- (始対象) 任意の対象  $C$  に対して一意な射  $h : I \rightarrow C$  が存在する対象  $I$

有限余積からなる圏 (余デカルト圏) は, 以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [1] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- (自然な射の族) 合併  $\nabla_A : A \oplus A \rightarrow A$
- (自然な射の族) 追加  $\Box_A : I \rightarrow A$

**定義 26** (Finite Biproduct (有限双積) [1]). 圏  $\mathcal{C}$  における対象  $A_1, A_2$  に対して有限双積  $A_1 \oplus A_2$  は, 以下の構造を備える.

- (零対象) 任意の対象  $A_1, A_2$  に対して一意な射  $0_{A_1, A_2} : A_1 \rightarrow O \rightarrow A_2$  が存在する対象  $O$
- 射  $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_1$  と  $\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_2$
- $\pi_1, \pi_2$  に関して有限積
- 射  $\iota_1 : A_1 \rightarrow A_1 \oplus A_2$  と  $\iota_2 : A_2 \rightarrow A_1 \oplus A_2$
- $\iota_1, \iota_2$  に関して有限余積
- $\delta_{ij} = \pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} id_A & \text{if } i = j \\ 0_{A_j, A_i} & \text{if } i \neq j \end{cases}$

有限双積からなる圏 (半加法圏) は, 以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [1] を持つ対称モノイド圏と同値である.

- (自然な射の族) 複製  $\Delta_A : A \rightarrow A \otimes A$
- (自然な射の族) 削除  $\Diamond_A : A \rightarrow I$
- (自然な射の族) 合併  $\nabla_A : A \otimes A \rightarrow A$
- (自然な射の族) 追加  $\Box_A : I \rightarrow A$

**定義 27** (Semi Additive Category (半加法圏)). 有限双積を持つ圏は半加法圏 [5] である. 半加法圏  $\mathcal{C}$  の任意の射  $f, g : A \rightarrow B$  に対して

$$f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A : A \rightarrow B$$

と定義できる [6]. 各射  $f : A \rightarrow B$  に対して逆  $-f : A \rightarrow B$  が存在する場合, 半加法圏は Additive Category (加法圏) である. 他方,  $f + f = f$  となる場合, Semilattice Category (半束圏) で豊穣化された圏である.

**定義 28** (Rig Category (半環圏) [7]). 半環圏  $\mathcal{C}$  は以下の構造を備える.

- (加法としての) 対称モノイド構造  $(\mathcal{C}, \oplus, O)$
- (乗法としての) モノイド構造  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$
- (自然同型) 左分配子  $\delta_l : A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- (自然同型) 右分配子  $\delta_r : (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- (自然同型) 左吸収子  $\kappa_l : A \otimes O \cong O$
- (自然同型) 右吸収子  $\kappa_r : O \otimes A \cong O$



- 諸々のコヒーレンス公理 [7]

**定義 29** (Trace (トレース)).

**定義 30** (Restriction Category (制約圏)).

**定義 31** (Inverse Category (逆圏)).

**定義 32** (Algebraically Compact Category (代数的コンパクト圏)).

## 4 型検査

$$\begin{array}{c}
\text{Variable} \frac{}{x : T \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash t : T}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t : T} \text{Exchange} \\
\\
I_L \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, () : I \vdash t : T} \quad \frac{}{\vdash () : I} I_R \\
\\
\oplus_{Ll} \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t : T}{\Gamma, \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1}{\Gamma \vdash \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2} \oplus_{Rl} \\
\\
\oplus_{Lr} \frac{\Gamma, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma, \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2} \oplus_{Rr} \\
\\
\otimes_L \frac{\Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \quad \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2} \otimes_R \\
\\
\multimap_L \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \quad \Gamma_2, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma_1, \Gamma_2, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2} \multimap_R \\
\\
\mu_L \frac{\Gamma, u : [X \rightarrow \mu X.U]U \vdash t : T}{\Gamma, \text{fold}_{\mu X.U} u : \mu X.U \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t : [X \rightarrow \mu X.T]T}{\Gamma \vdash \text{fold}_{\mu X.T} t : \mu X.T} \mu_R \\
\\
\text{Trace}_L \frac{\Gamma, u : S \oplus U_1 \multimap S \oplus U_2 \vdash t : T}{\Gamma, \text{trace}_S u : U_1 \multimap U_2 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2}{\Gamma \vdash \text{trace}_U t : T_1 \multimap T_2} \text{Trace}_R \\
\\
\text{Par}_L \frac{\Gamma, t_1 : U \vdash t : T \quad \Gamma, t_2 : U \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : T} \text{Par}_R \\
\\
\text{Seq}_L \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \circ t_2 : T_1 \multimap T_3 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \multimap T_2 \quad \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2 \multimap T_3}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \circ t_2 : T_1 \multimap T_3} \text{Seq}_R \\
\\
\dagger_L \frac{\Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \vdash t : T}{\Gamma, u^\dagger : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t : T_2 \multimap T_1}{\Gamma \vdash t^\dagger : T_1 \multimap T_2} \dagger_R \\
\\
\text{id}_L \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, \text{id} : U \multimap U \vdash t : T} \quad \frac{}{\vdash \text{id} : T \multimap T} \text{id}_R \\
\\
\emptyset_L \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, \emptyset : U \vdash t : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \emptyset : T} \emptyset_R \\
\\
\text{App} \frac{\vdash f : T_1 \multimap T_2 \quad \vdash e : T_1}{\vdash f @ e : T_2}
\end{array}$$

図 4 Typing rules

$$\begin{array}{c}
\vdash t : T \triangleright \\
\text{Variable } \frac{\Gamma(x) = T}{\Gamma \vdash x : T \triangleright \Gamma \setminus x} \\
I_L \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, () : I \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{}{\Gamma \vdash () : I \triangleright \Gamma} I_R \\
\oplus_{L_l} \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2 \triangleright \Gamma'} \oplus_{R_l} \\
\oplus_{L_r} \frac{\Gamma, t_2 : T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t_2 : T_2 \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2 \triangleright \Gamma'} \oplus_{R_r} \\
\otimes_L \frac{\Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \triangleright \Gamma' \quad \Gamma' \vdash t_2 : T_2 \triangleright \Gamma''}{\Gamma \vdash t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \triangleright \Gamma''} \otimes_R \\
\multimap_L \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \triangleright \Gamma' \quad \Gamma', t_2 : T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma''}{\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma''} \quad \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t_2 : T_2 \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \triangleright \Gamma'} \multimap_R \\
\mu_L \frac{\Gamma, u : [X \rightarrow \mu X.U]U \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, \text{fold}_{\mu X.U} u : \mu X.U \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t : [X \rightarrow \mu X.T]T \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash \text{fold}_{\mu X.T} t : \mu X.T \triangleright \Gamma'} \mu_R \\
\text{Trace}_L \frac{\Gamma, u : S \oplus U_1 \multimap S \oplus U_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, \text{trace}_S u : U_1 \multimap U_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2 \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash \text{trace}_U t : T_1 \multimap T_2 \triangleright \Gamma'} \text{Trace}_R \\
\text{Par}_L \frac{\Gamma, t_1 : U \vdash t : T \triangleright \Gamma' \quad \Gamma, t_2 : U \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T \triangleright \Gamma' \quad \Gamma \vdash t_2 : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : T \triangleright \Gamma'} \text{Par}_R \\
\text{Seq}_L \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, t_1 \circ t_2 : T_1 \multimap T_3 \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \multimap T_2 \triangleright \Gamma' \quad \Gamma' \vdash t_2 : T_2 \multimap T_3 \triangleright \Gamma''}{\Gamma \vdash t_1 \circ t_2 : T_1 \multimap T_3 \triangleright \Gamma''} \text{Seq}_R \\
\dagger_L \frac{\Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, u^\dagger : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{\Gamma \vdash t : T_2 \multimap T_1 \triangleright \Gamma'}{\Gamma \vdash t^\dagger : T_1 \multimap T_2 \triangleright \Gamma'} \dagger_R \\
\text{id}_L \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, \text{id} : U \multimap U \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{id} : T \multimap T \triangleright \Gamma} \text{id}_R \\
\emptyset_L \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma'}{\Gamma, \emptyset : U \vdash t : T \triangleright \Gamma'} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \emptyset : T \triangleright \Gamma} \emptyset_R \\
\text{App} \frac{\vdash f : T_1 \multimap T_2 \triangleright \quad \vdash e : T_1 \triangleright}{\vdash f @ e : T_2 \triangleright}
\end{array}$$

图 5 Syntax-Directed Typing rules

## 5 型推論

$$\begin{aligned}
& \text{unify} := \text{Set of Constraint} \rightarrow \text{Substitution} \\
& \text{unify}(\{\}) = [] \\
& \text{unify}(\{X = T\} \cup C) = \text{unify}([X \rightarrow T]C) \circ [X \rightarrow T] \\
& \text{unify}(\{T = X\} \cup C) = \text{unify}([X \rightarrow T]C) \circ [X \rightarrow T] \\
& \text{unify}(\{S_1 \oplus S_2 = T_1 \oplus T_2\} \cup C) = \text{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
& \text{unify}(\{S_1 \otimes S_2 = T_1 \otimes T_2\} \cup C) = \text{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
& \text{unify}(\{S_1 \multimap S_2 = T_1 \multimap T_2\} \cup C) = \text{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
& \text{unify}(\{\mu X.S = \mu Y.T\} \cup C) = \text{unify}(C \cup \{X = Y, S = T\})
\end{aligned}$$

図 6 単一化

$$\begin{array}{c}
\vdash t : X \triangleright \mid C \\
\\
\text{Variable} \frac{\Gamma(x) = V_2}{\Gamma \vdash x : V_1 \triangleright \Gamma \setminus (x : T) \mid \{V_1 = V_2\}} \\
\\
I_L \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, () : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = I\}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash () : V \triangleright \Gamma \mid \{V = I\}} I_R \\
\\
\oplus_{L_l} \frac{\Gamma, t_1 : X_1 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \text{inl } t_1 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \text{inl } t_1 : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \oplus_{R_l} \\
\\
\oplus_{L_r} \frac{\Gamma, t_2 : X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \text{inr } t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \quad \frac{\Gamma \vdash t_2 : X_2 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \text{inr } t_2 : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{X_1 \oplus X_2\}} \oplus_{R_r} \\
\\
\otimes_L \frac{\Gamma, t_1 : X_1, t_2 : X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, t_1 \times t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \otimes X_2\}} \\
\frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \triangleright \Gamma' \mid C_1 \quad \Gamma' \vdash t_2 : X_2 \triangleright \Gamma'' \mid C_2}{\Gamma \vdash t_1 \times t_2 : V \triangleright \Gamma'' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \otimes X_2\}} \otimes_R \\
\\
\multimap_L \frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \triangleright \Gamma' \mid C_1 \quad \Gamma', t_2 : X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma'' \mid C_2}{\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma'' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \\
\frac{\Gamma, t_1 : X_1 \vdash t_2 : X_2 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \multimap_R \\
\\
\mu_L \frac{\Gamma, u : [Y \rightarrow \mu Y.U]U \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \text{fold}_{\mu Y.U} u : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = \mu Y.U\}} \quad \frac{\Gamma \vdash t : [X \rightarrow \mu X.T]T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \text{fold}_{\mu X.T} t : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = \mu X.T\}} \mu_R \\
\\
\text{Trace}_L \frac{\Gamma, u : U \oplus X_1 \multimap U \oplus X_2 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \text{trace}_U u : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \\
\frac{\Gamma \vdash t : T \oplus X_1 \multimap T \oplus X_2 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash \text{trace}_T t : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \text{Trace}_R \\
\\
\text{Par}_L \frac{\Gamma, t_1 : X \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C_1 \quad \Gamma, t_2 : X \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C_2}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X\}} \\
\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \triangleright \Gamma' \mid C_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : X \triangleright \Gamma' \mid C_2}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : V \triangleright \Gamma' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X\}} \text{Par}_R \\
\\
\text{Seq}_L \frac{\Gamma, t_1 : X_1 \multimap X_2, t_2 : X_2 \multimap X_3 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, t_1 \circ t_2 : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_3\}} \\
\frac{\Gamma \vdash t_1 : X_1 \multimap X_2 \triangleright \Gamma' \mid C_1 \quad \Gamma' \vdash t_2 : X_2' \multimap X_3 \triangleright \Gamma'' \mid C_2}{\Gamma \vdash t_1 \circ t_2 : V \triangleright \Gamma'' \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \multimap X_3\}} \text{Seq}_R \\
\\
\dagger_L \frac{\Gamma, u : X_2 \multimap X_1 \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, u^\dagger : \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \quad \frac{\Gamma \vdash t : X_2 \multimap X_1 \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma \vdash t^\dagger : V \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \dagger_R \\
\\
\text{id}_L \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \text{id} : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X \multimap X\}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{id} : V \triangleright \Gamma \mid \{V = X \multimap X\}} \text{id}_R \\
\\
\emptyset_L \frac{\Gamma \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C}{\Gamma, \emptyset : V \vdash t : T \triangleright \Gamma' \mid C \cup \{V = X\}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \emptyset : V \triangleright \Gamma \mid \{V = X\}} \emptyset_R \\
\\
\text{App} \frac{\vdash f : X_1 \multimap X_2 \triangleright \mid C_1 \quad \vdash e : X_1 \triangleright \mid C_2}{\vdash f @ e : V \triangleright \mid C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_2\}}
\end{array}$$

图 7 Type Inference rules

## 6 表示的意味論

$$\begin{aligned}
& \llbracket \Theta \vdash T \rrbracket : \mathcal{V}^{|\Theta|} \rightarrow \mathcal{V} \\
& \llbracket \Theta \vdash X_i \rrbracket := \Pi_i \\
& \llbracket \Theta \vdash \mathbf{I} \rrbracket := K_I \\
& \llbracket \Theta \vdash T_1 \oplus T_2 \rrbracket := \oplus \circ \langle \llbracket \Theta \vdash T_1 \rrbracket, \llbracket \Theta \vdash T_2 \rrbracket \rangle \\
& \llbracket \Theta \vdash T_1 \otimes T_2 \rrbracket := \otimes \circ \langle \llbracket \Theta \vdash T_1 \rrbracket, \llbracket \Theta \vdash T_2 \rrbracket \rangle \\
& \llbracket \Theta \vdash T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \otimes \circ \langle \llbracket \Theta \vdash T_1 \rrbracket^*, \llbracket \Theta \vdash T_2 \rrbracket \rangle \\
& \llbracket \Theta \vdash \mu X.T \rrbracket := \llbracket \Theta, X \vdash T \rrbracket^\sharp \\
& \llbracket \Theta \vdash T[X \rightarrow U] \rrbracket := \llbracket \Theta \vdash T \rrbracket \circ \langle Id, \llbracket \Theta \vdash U \rrbracket \rangle \\
& \llbracket T \rrbracket := \llbracket \vdash T \rrbracket(*) \in \text{Obj}(\mathcal{V})
\end{aligned}$$

図 8 Type Interpretation

$$\begin{aligned}
& \llbracket \Gamma \rrbracket \in \text{Obj}(\mathcal{V}) \\
& \llbracket () \rrbracket := I \\
& \llbracket \Gamma, () : \mathbf{I} \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, \text{fold}_{\mu X.T} u : \mu X.T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \mu X.T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \text{trace}_T t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \parallel t_2 : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \wp t_2 : T_1 \multimap T_3 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, t^\dagger : T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \\
& \llbracket \Gamma, \text{id} : T \multimap T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \emptyset : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \\
& \llbracket f @ e : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T \rrbracket
\end{aligned}$$

図 9 Context Interpretation

$$\begin{aligned}
& \llbracket \Gamma \vdash t : T \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket x : T \vdash x : T \rrbracket := \llbracket T \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\sigma_{\llbracket \Gamma_1 \rrbracket, \llbracket \Gamma_2 \rrbracket}} \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_2, \Gamma_1 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, () : \mathbf{I} \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes I \xrightarrow{\rho_{\llbracket \Gamma \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \vdash () : \mathbf{I} \rrbracket := \llbracket \rrbracket \xrightarrow{id_I} \llbracket \mathbf{I} \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \pi_1} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash \text{inl } t_1 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t_1 : T_1 \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\iota_1} \llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \pi_2} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_2 : T_2 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash \text{inr } t_2 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \xrightarrow{\iota_2} \llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma_1, \Gamma_2, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T \rrbracket := (\llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket)) \cong \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes (\llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes \llbracket T_1 \rrbracket^* \rightarrow \llbracket T \rrbracket \\
& \quad \cong \left( \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes (\llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2, t_2 : T_2 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T \rrbracket} \right) \\
& \llbracket \Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \cong \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \vdash t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket} \right) \\
& \llbracket \Gamma, \text{fold}_{\mu X. U} u : \mu X. U \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \mu X. U \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \text{unfold}_{\mu X. U}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket [X \rightarrow \mu X. U](U) \rrbracket \\
& \quad \xrightarrow{\llbracket \Gamma, u : [X \rightarrow \mu X. U](U) \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash \text{fold}_{\mu X. T} t : \mu X. T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t : [X \rightarrow \mu X. T](T) \rrbracket} \llbracket [X \rightarrow \mu X. T](T) \rrbracket \xrightarrow{\text{fold}_{\mu X. T}} \llbracket \mu X. T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \text{trace}_U u : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \text{Tr}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}^{[U]}(\llbracket \Gamma, t : (U \oplus T_1) \multimap (U \oplus T_2) \vdash t : T \rrbracket)} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash \text{trace}_U t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\text{Tr}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}^{[U]}(\llbracket \Gamma \vdash t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2 \rrbracket)} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket U \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes (\llbracket \Gamma, t_1 : U \vdash t : T \rrbracket + \llbracket \Gamma, t_2 : U \vdash t : T \rrbracket)} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t_1 : T \rrbracket + \llbracket \Gamma \vdash t_2 : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, t_1 \circ t_2 : T_1 \multimap T_3 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
& \quad \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \text{decomp}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket, \llbracket T_3 \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes ((\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket)) \\
& \quad \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \circ t_2 : T_1 \multimap T_3 \rrbracket := \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2 \multimap T_3 \rrbracket} (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
& \quad \xrightarrow{\text{comp}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket, \llbracket T_3 \rrbracket}} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, u^\dagger : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \text{dagger}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_1 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash t^\dagger : T_1 \multimap T_2 \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t : T_2 \multimap T_1 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\text{dagger}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma, \text{id} : U \multimap U \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \vdash \text{id} : T \multimap T \rrbracket := \llbracket \rrbracket \rightarrow \llbracket T \rrbracket \multimap \llbracket T \rrbracket \cong \left( \llbracket T \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \right) \\
& \llbracket \Gamma, \emptyset : U \vdash t : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \vdash t : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \vdash \emptyset : T \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{0_{\llbracket \Gamma \rrbracket, \llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \\
& \llbracket \vdash t @ t_1 : T_2 \rrbracket := \llbracket \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \vdash t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket \otimes \llbracket \vdash t_1 : T_1 \rrbracket} (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\text{eval}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket T_2 \rrbracket
\end{aligned}$$

图 10 Term Interpretation

## 7 操作的意味論

$$\sigma_1 \cup_{\perp}^{\times} \sigma_2 := \begin{cases} \perp & \text{if } \sigma_1 = \perp \vee \sigma_2 = \perp \\ \sigma_1 \cup \sigma_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma_1 \cup_{\perp}^+ \sigma_2 := \begin{cases} \perp & \text{if } \sigma_1 = \perp \wedge \sigma_2 = \perp \\ \sigma_1 & \text{if } \sigma_2 = \perp \\ \sigma_2 & \text{if } \sigma_1 = \perp \\ \sigma_1 \cup \sigma_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

図 11 Operations on Environment  $\sigma$

$$\begin{aligned} x \triangleright t &:= [x \rightarrow t] \\ () \triangleright () &:= [] \\ \text{inl } t \triangleright \text{inl } u &:= t \triangleright u \\ \text{inl } t \triangleright \text{inr } u &:= \perp \\ \text{inr } t \triangleright \text{inr } u &:= t \triangleright u \\ \text{inr } t \triangleright \text{inl } u &:= \perp \\ t_1 \times t_2 \triangleright u_1 \times u_2 &:= (t_1 \triangleright u_1) \cup_{\perp}^{\times} (t_2 \triangleright u_2) \\ t_1 \mapsto t_2 \triangleright u_1 \mapsto u_2 &:= (t_1 \triangleright u_1) \cup_{\perp}^{\times} (t_2 \triangleright u_2) \\ \text{fold}_T t \triangleright \text{fold}_T u &:= t \triangleright u \\ \text{trace}_T t \triangleright \text{trace}_T u &:= t \triangleright u \\ t \triangleright u_1 \parallel u_2 &:= (t \triangleright u_1) \cup_{\perp}^+ (t \triangleright u_2) \\ t_1 \parallel t_2 \triangleright u &:= (t_1 \triangleright u) \cup_{\perp}^+ (t_2 \triangleright u) \\ t_1 \circledast t_2 \triangleright u_1 \circledast u_2 &:= (t_1 \triangleright u_1) \cup_{\perp}^{\times} (t_2 \triangleright u_2) \\ t \circledast x \triangleright u &:= x \triangleright t^{\dagger} \circledast u \\ x \circledast t \triangleright u &:= x \triangleright u \circledast t^{\dagger} \\ t^{\dagger} \triangleright u &:= t \triangleright u^{\dagger} \\ \text{id} \triangleright \text{id} &:= [] \\ \emptyset \triangleright u &:= \perp \\ t \triangleright \emptyset &:= \perp \end{aligned}$$

図 12 Constructing Environment

$$\begin{aligned} [](x) &:= \emptyset \\ [\sigma, x \rightarrow t](x) &:= t \\ [\sigma, x' \rightarrow t](x) &:= \emptyset \\ [\sigma](()) &:= () \\ [\sigma](\text{inl } t) &:= \text{inl } [\sigma](t) \\ [\sigma](\text{inr } t) &:= \text{inr } [\sigma](t) \\ [\sigma_1, \sigma_2](t_1 \times t_2) &:= [\sigma](t_1) \times [\sigma](t_2) \\ [\sigma_1, \sigma_2](t_1 \mapsto t_2) &:= [\sigma](t_1) \mapsto [\sigma](t_2) \\ [\sigma](\text{fold}_T t) &:= \text{fold}_T [\sigma](t) \\ [\sigma](\text{trace}_T t) &:= \text{trace}_T [\sigma](t) \\ [\sigma_1, \sigma_2](t_1 \parallel t_2) &:= [\sigma](t_1) \parallel [\sigma](t_2) \\ [\sigma](t_1 \circledast t_2) &:= [\sigma](t_1) \circledast [\sigma](t_2) \\ [\sigma](t^{\dagger}) &:= [\sigma](t)^{\dagger} \\ [\sigma](\text{id}) &:= \text{id} \\ [](\emptyset) &:= \emptyset \\ [\perp](t) &:= \emptyset \end{aligned}$$

図 13 Consumption of Environment



$$\begin{array}{ll}
\emptyset \parallel t \Rightarrow t & \emptyset^\dagger \Rightarrow \emptyset \\
(t_1 \parallel t_2) \parallel t_3 \Rightarrow t_1 \parallel (t_2 \parallel t_3) & \text{id}^\dagger \Rightarrow \text{id} \\
t_1 \parallel t_2 \Rightarrow t_2 \parallel t_1 & ()^\dagger \Rightarrow () \\
t \parallel t \Rightarrow t & (t_1 \parallel t_2)^\dagger \Rightarrow t_1^\dagger \parallel t_2^\dagger \\
\text{id} \circ t \Rightarrow t & (t_1 \circ t_2)^\dagger \Rightarrow t_1^\dagger \circ t_2^\dagger \\
t \circ \text{id} \Rightarrow t & (\text{inl } t)^\dagger \Rightarrow \text{inl } t^\dagger \\
(t_1 \circ t_2) \circ t_3 \Rightarrow t_1 \circ (t_2 \circ t_3) & (\text{inr } t)^\dagger \Rightarrow \text{inr } t^\dagger \\
\emptyset \circ t \Rightarrow \emptyset & (t_1 \times t_2)^\dagger \Rightarrow t_1^\dagger \times t_2^\dagger \\
t \circ \emptyset \Rightarrow \emptyset & (t_1 \mapsto t_2)^\dagger \Rightarrow t_1^\dagger \mapsto t_2^\dagger \\
(t_1 \parallel t_2) \circ t_3 \Rightarrow (t_1 \circ t_3) \parallel (t_2 \circ t_3) & (\text{fold}_T t)^\dagger \Rightarrow \text{fold}_T t^\dagger \\
t_1 \circ (t_2 \parallel t_3) \Rightarrow (t_1 \circ t_2) \parallel (t_1 \circ t_3) & (\text{trace}_T t)^\dagger \Rightarrow \text{trace}_T t^\dagger \\
& (t^\dagger)^\dagger \Rightarrow t \\
\text{inl } \emptyset \Rightarrow \emptyset & \text{inl } (t_1 \parallel t_2) \Rightarrow \text{inl } t_1 \parallel \text{inl } t_2 \\
\text{inr } \emptyset \Rightarrow \emptyset & \text{inr } (t_1 \parallel t_2) \Rightarrow \text{inr } t_1 \parallel \text{inr } t_2 \\
\emptyset \times t \Rightarrow \emptyset & (t_1 \parallel t_2) \times t_3 \Rightarrow (t_1 \times t_3) \parallel (t_2 \times t_3) \\
t \times \emptyset \Rightarrow \emptyset & t_1 \times (t_2 \parallel t_3) \Rightarrow (t_1 \times t_2) \parallel (t_1 \times t_3) \\
\emptyset \mapsto t \Rightarrow \emptyset & (t_1 \parallel t_2) \mapsto t_3 \Rightarrow (t_1 \mapsto t_3) \parallel (t_2 \mapsto t_3) \\
t \mapsto \emptyset \Rightarrow \emptyset & t_1 \mapsto (t_2 \parallel t_3) \Rightarrow (t_1 \mapsto t_2) \parallel (t_1 \mapsto t_3) \\
\text{fold}_T \emptyset \Rightarrow \emptyset & \text{fold}_T (t_1 \parallel t_2) \Rightarrow \text{fold}_T t_1 \parallel \text{fold}_T t_2 \\
\text{trace}_T \emptyset \Rightarrow \emptyset & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
t_1 \Rightarrow t'_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t'_2 \Rightarrow t_1 \parallel t_2 \Rightarrow t'_1 \parallel t'_2 \\
t_1 \Rightarrow t'_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t'_2 \Rightarrow t_1 \circ t_2 \Rightarrow t'_1 \circ t'_2 \\
t \Rightarrow t' \Rightarrow \text{inl } t \Rightarrow \text{inl } t' \\
t \Rightarrow t' \Rightarrow \text{inr } t \Rightarrow \text{inr } t' \\
t_1 \Rightarrow t'_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t'_2 \Rightarrow t_1 \times t_2 \Rightarrow t'_1 \times t'_2 \\
t_1 \Rightarrow t'_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t'_2 \Rightarrow t_1 \mapsto t_2 \Rightarrow t'_1 \mapsto t'_2 \\
t \Rightarrow t' \Rightarrow \text{fold}_T t \Rightarrow \text{fold}_T t' \\
t \Rightarrow t' \Rightarrow \text{trace}_T t \Rightarrow \text{trace}_T t' \\
t_1 \Rightarrow t'_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t'_2 \Rightarrow t_1 @ t_2 \Rightarrow t'_1 @ t'_2
\end{array}$$

$$(t_1 \mapsto t_2) @ t \Rightarrow (t_1 \triangleright t) t_2$$

$$\begin{array}{ll}
\emptyset @ t \Rightarrow \emptyset & (t_1 \parallel t_2) @ t \Rightarrow (t_1 @ t) \parallel (t_2 @ t) \\
t @ \emptyset \Rightarrow \emptyset & t @ (t_1 \parallel t_2) \Rightarrow (t @ t_1) \parallel (t @ t_2) \\
\text{id} @ t \Rightarrow t & t_1 \circ t_2 @ t \Rightarrow t_2 @ (t_1 @ t)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
t @ (\text{inr } u) \Rightarrow \text{inr } u' \Rightarrow (\text{trace}_T t) @ u \Rightarrow u' \\
t @ (\text{inr } u) \Rightarrow \text{inl } u' \Rightarrow (\text{trace}_T t) @ (\text{inl } u') \Rightarrow u'' \Rightarrow (\text{trace}_T t) @ u \Rightarrow u'' \\
t @ (\text{inl } u) \Rightarrow \text{inl } u' \Rightarrow (\text{trace}_T t) @ (\text{inl } u') \Rightarrow u'' \Rightarrow (\text{trace}_T t) @ u \Rightarrow u'' \\
t @ (\text{inl } u) \Rightarrow \text{inr } u' \Rightarrow (\text{trace}_T t) @ (\text{inl } u) \Rightarrow u'
\end{array}$$

图 14 Reduction

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash t \equiv t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_2 \equiv t_1 : T}{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_2 : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_2 : T \quad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_3 : T}{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_3 : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset \parallel t \equiv t : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \parallel t_3 \equiv t_1 \parallel (t_2 \parallel t_3) : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t \parallel t \equiv t : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 \equiv t_2 \parallel t_1 : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \text{id} \circ t \equiv t : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t \circ \text{id} \equiv t : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \circ t_2) \circ t_3 \equiv t_1 \circ (t_2 \circ t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset \circ t \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \circ t_3 \equiv (t_1 \circ t_3) \parallel (t_2 \circ t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash t \circ \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \circ (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \circ t_2) \parallel (t_1 \circ t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \text{inl} \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{inl} (t_1 \parallel t_2) \equiv \text{inl} t_1 \parallel \text{inl} t_2 : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \text{inr} \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{inr} (t_1 \parallel t_2) \equiv \text{inr} t_1 \parallel \text{inr} t_2 : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset \times t \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \times t_3 \equiv (t_1 \times t_3) \parallel (t_2 \times t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash t \times \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \times (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \times t_2) \parallel (t_1 \times t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset \mapsto t \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \mapsto t_3 \equiv (t_1 \mapsto t_3) \parallel (t_2 \mapsto t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash t \mapsto \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \mapsto t_2) \parallel (t_1 \mapsto t_3) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \text{fold}_T \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{fold}_T (t_1 \parallel t_2) \equiv \text{fold}_T t_1 \parallel \text{fold}_T t_2 : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \text{trace}_T \emptyset \equiv \emptyset : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset^\dagger \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{id}^\dagger \equiv \text{id} : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash ()^\dagger \equiv () : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t^\dagger)^\dagger \equiv t : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \parallel t_2^\dagger : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \circ t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \circ t_2^\dagger : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash (\text{inl} t)^\dagger \equiv \text{inl} t^\dagger : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (\text{inr} t)^\dagger \equiv \text{inr} t^\dagger : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \times t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \times t_2^\dagger : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mapsto t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \mapsto t_2^\dagger : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash (\text{fold}_T t)^\dagger \equiv \text{fold}_T t^\dagger : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (\text{trace}_T t)^\dagger \equiv \text{trace}_T t^\dagger : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t'_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 \equiv t'_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 \equiv t'_1 \parallel t'_2 : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t'_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 \equiv t'_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \circ t_2 \equiv t'_1 \circ t'_2 : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \text{inl} t \equiv \text{inl} t' : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \text{inr} t \equiv \text{inr} t' : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t'_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 \equiv t'_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \times t_2 \equiv t'_1 \times t'_2 : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t'_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 \equiv t'_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 \equiv t'_1 \mapsto t'_2 : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \text{fold}_T t \equiv \text{fold}_T t' : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \text{trace}_T t \equiv \text{trace}_T t' : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t'_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 \equiv t'_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 @ t_2 \equiv t'_1 @ t'_2 : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mapsto t_2) @ t \equiv (t_1 \triangleright t) (t_2) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset @ t \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) @ t \equiv (t_1 @ t) \parallel (t_2 @ t) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash t @ \emptyset \equiv \emptyset : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t @ (t_1 \parallel t_2) \equiv (t @ t_1) \parallel (t @ t_2) : T} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \text{id} @ t \equiv t : T} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \circ t_2 @ t \equiv t_2 @ (t_1 @ t) : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t @ (\text{inr} u) \equiv \text{inr} u' : T}{\Gamma \vdash (\text{trace}_T t) @ u \equiv u' : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t @ (\text{inl} u) \equiv \text{inl} u' : T \quad \Gamma \vdash (\text{trace}_T t) @ (\text{inl} u') \equiv u'' : T}{\Gamma \vdash (\text{trace}_T t) @ (\text{inl} u) \equiv u'' : T} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t @ (\text{inr} u) \equiv \text{inl} u' : T \quad \Gamma \vdash (\text{trace}_T t) @ (\text{inl} u') \equiv u'' : T}{\Gamma \vdash (\text{trace}_T t) @ u \equiv u'' : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t @ (\text{inl} u) \equiv \text{inr} u' : T}{\Gamma \vdash (\text{trace}_T t) @ (\text{inl} u) \equiv u' : T}
\end{array}$$

图 15 equality judgement

## 8 諸々の性質

**定理 33** (型付けの一意性). 与えられた型環境  $\Gamma$  のもとで, 任意の項  $t$  は, 高々 1 つの型しかもたない. つまり,  $t$  が型付け可能ならばその型は一意である.

$$\Gamma \vdash t : T \wedge \Gamma \vdash t : U \Rightarrow T = U$$

**補題 34** (合流性 (Confluence)).

$$e \Rightarrow e_1 \wedge e \Rightarrow e_2 \Rightarrow \exists t'. (t_1 \Rightarrow t' \wedge t_2 \Rightarrow t')$$

**定理 35** (簡約結果の一意性).

$$e \Rightarrow e_1 \not\Rightarrow e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$$

**定理 36** (型保存定理 (Type Preservation)). リダクションの前後で同じ型付け

$$\Gamma \vdash t : T \wedge t \Rightarrow t' \Rightarrow \Gamma \vdash t' : T$$

**定理 37** (型進行定理 (Type Progress)). 型付けされた項は値かさらにリダクション可能

$$\Gamma \vdash t : T \Rightarrow t \text{ is value } \vee \exists t'. t \Rightarrow t'$$

## 参考文献

- [1] Peter Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 813, , 08 2009.
- [2] Michael Barr. \*-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 1, No. 2, p. 159–178, 1991.
- [3] Samson Abramsky. No-cloning in categorical quantum mechanics. *Semantic Techniques in Quantum Computation*, 10 2009.
- [4] G.M. Kelly and M.L. Laplaza. Coherence for compact closed categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 19, pp. 193–213, 1980.
- [5] Stephen Lack. Non-canonical isomorphisms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 216, No. 3, pp. 593–597, 2012.
- [6] Saunders MacLane. Duality for groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 56, No. 6, pp. 485–516, 1950.
- [7] Miguel L. Laplaza. Coherence for distributivity. In G. M. Kelly, M. Laplaza, G. Lewis, and Saunders Mac Lane, editors, *Coherence in Categories*, pp. 29–65, Berlin, Heidelberg, 1972. Springer Berlin Heidelberg.