高階の型付き可逆プログラミング言語

MountainSeal

$$a = bc = de = f$$
$$a = bc = de = f$$

1 構文

Type Variable	$\ni$	X, Y, Z		
Term Variable	$\ni$	x, y, z		
Type	$\ni$	S, T, U	$::=$	$X \mid \mathrm{I} \mid T \oplus T \mid T \otimes T \mid T \multimap T \mid \mu X.T$
Value	$\ni$	v, w	$::=$	$x \mid () \mid \mathrm{inl}\ v \mid \mathrm{inr}\ v \mid v \times v \mid v \mapsto v \mid \mathrm{fold}_T\ v \mid \mathrm{trace}_T\ v \mid v \parallel v \mid v \fatsemi v \mid \varnothing \mid \mathrm{id}$
Term	$\ni$	s, t, u	$::=$	$x \mid () \mid \mathrm{inl}\ t \mid \mathrm{inr}\ t \mid t \times t \mid t \mapsto t \mid \mathrm{fold}_T\ t \mid \mathrm{trace}_T\ t \mid t \parallel t \mid t \fatsemi t \mid \varnothing \mid \mathrm{id} \mid t^\dagger$
Expr	$\ni$	e, f, g	$::=$	$t \mid e \mathbin{@} e$
Type Context	$\ni$	Θ	$::=$	$\mid \Theta, X$
Term Context	$\ni$	Γ	$::=$	$\mid \Gamma, t : T$
Type Judgement	$\ni$	$\Theta \vdash T$		
Term Judgement	$\ni$	$\Gamma \vdash t : T$		
Expr Judgement	$\ni$	$\vdash e : T$		
Reduction	$\ni$	$t \Rrightarrow t$		

図 1　Syntax

2 型の構成

$$\frac{}{\Theta, X \vdash X} \qquad \frac{}{\Theta \vdash I} \qquad \frac{\Theta \vdash T_1 \qquad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \oplus T_2} \qquad \frac{\Theta \vdash T_1 \qquad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \otimes T_2} \qquad \frac{\Theta \vdash T_1 \qquad \Theta \vdash T_2}{\Theta \vdash T_1 \multimap T_2} \qquad \frac{\Theta, X \vdash T}{\Theta \vdash \mu X.T}$$

図 2　Formation rules

$$
\begin{aligned}
[\quad](X) &= X \\
[\sigma, X \to T](X) &= T \\
[\sigma, X' \to S](X) &= X \\
[\sigma](\mathrm{I}) &= \mathrm{I} \\
[\sigma](T_1 \oplus T_2) &= [\sigma](T_1) \oplus [\sigma](T_2) \\
[\sigma](T_1 \otimes T_2) &= [\sigma](T_1) \otimes [\sigma](T_2) \\
[\sigma](T_1 \multimap T_2) &= [\sigma](T_1) \multimap [\sigma](T_2) \\
[\sigma](\mu X.T) &= \mu X.[\sigma](T)
\end{aligned}
$$

図 3　Type Substitution

3 Preliminary

扱いたい構造は以下の全てを持つ圏

- 自己双対コンパクト閉圏 (Self–Dual Compact Closed Category)
- トレース付き有限双積 (Traced Finite Biproduct)
- 半環圏（Rig Category）
- 逆圏（Inverse Category）
- 上限による豊穣化（Sup enrichment）
- 余代数モーダリティの余クライスリ圏 (coKleisli Category of coAlgebra Modality)
- ダガーファイブレーション (Dagger Fibration)

3.1 圏

定義 1 (Category（圏）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える

- 対象（Object）の類 $|\mathcal{C}|$ を持つ（各対象は A, B, C 等の大文字で表す）
- $A, B \in |\mathcal{C}|$ に対する射（Morphism）の類 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を持つ（各射は単に $A \to B$ で表すか，f, g, h 等の小文字で表す）
  - 射 $f : A \to B$ の A を始域（Domain），B を終域（Codomain）と呼び，それぞれ $Dom(f)$，$Cod(f)$ で表す
- 任意の対象 A に対して恒等射 $id_A : A \to A$ が存在する
- 任意の射 $f : A \to B$ 及び $g : B \to C$ に対して射の合成 $g \circ f : A \to C$ が存在する
- 任意の対象 A,B 及び射 $f : A \to B$ について，単位律 $id_B \circ f = f \quad f \circ id_A = f$ を満たす
- 任意の射 $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対して結合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を満たす

定義 2 (Monomorphism（単射）)**.** 射 $f : A \to B$ は，任意の射 $g_1, g_2 : C \to A$ に対して $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき，単射と呼ぶ.

定義 3 (Epimorphism（全射）)**.** 射 $f : A \to B$ は，任意の射 $g_1, g_2 : B \to C$ に対して $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つとき，全射と呼ぶ.

定義 4 (Bimorphism（双射）)**.** 単射かつ全射である射を全単射もしくは双射と呼ぶ.

定義 5 (Isomorphism（同型射）)**.** 射 $f : A \to B$ が同型射（Isomorphism）であるとは，$g \circ f = id_A$ かつ $f \circ g = id_B$ を満たす $g : B \to A$ が存在することをいう．このとき g は f の逆射（Inverse morphism）と呼び f^{-1} で表す．二つの等式のうち，左のみ満たす場合の射 g を f の引き込み（Retraction）と呼び，右のみ満たす場合の g を f の断面（Section）と呼ぶ．射が同型射であることを強調する場合，$f : A \xrightarrow{\cong} B$ と表す．圏の対象 A, B の間に同型射が存在するとき，A と B は同型（Isomorphic）であるといい，$A \cong B$ で表す.

任意の同型射は双射だが，双射は必ずしも同型射ではないことに留意すること.

定義 6 (Functor（関手）)**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とする．関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は，$\mathcal{C}$ の対象を $\mathcal{D}$ の対象へ写す関数 $|\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ と，$\mathcal{C}$ の射を $\mathcal{D}$ の射に写す関数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}A, \mathbf{F}B)$ であり，$\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$ と $\mathbf{F}(id_A) = id_{(\mathbf{F}A)}$ を満たす.

定義 7 (Natural Transformation（自然変換）)**.** $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を圏とし，$\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．自然変換 $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ は，射の族 $\tau_A : \mathbf{F}A \to \mathbf{G}A$ から成り，圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ について，以下の図式が可換（矢印をどの順番に通っても，射の合成に関して等式が成り立つこと）になる.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathbf{F}f"'] & \mathbf{G}A \arrow[d, "\mathbf{G}f"] \\ \mathbf{F}B \arrow[r, "\tau_B"] & \mathbf{G}B \end{tikzcd}$$

任意の対象 $A \in |\mathcal{C}|$ について射 τ_A が $\mathcal{D}$ の同型射であるとき，τ は自然同型（Natural Isomorphism）であるという．

定義 8 (Categorical Equivalence（圏同値）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は，関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在して $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} \cong \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ かつ $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}} \cong \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ であるとき，同値であるという（$\mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{Id}_{\mathcal{D}}$ は各圏の恒等関手）．圏同値は $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ で表す．

定義 9 (Opposite Category（反対圏）)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の反対圏 $\mathcal{C}^{op}$ とは，$|\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ である圏である．

定義 10 (Adjunction（随伴）)**.** 普遍射（及び普遍性）から導かれる随伴関手右随伴と左随伴の定義をここに書く．随伴の定義は他にも

1. 余単位–単位随伴による定義
2. ホム集合随伴による定義

があるが，モノイド積と内部ホムの随伴，最終的には six operations のうち Wirthmüller context の場合を説明する際に随伴関手の三つ組として定義してくため，この目的に適した定義にしたい．

定義 11 (Yoneda's Lemma（米田の補題）)**.**

3.2 モノイド圏

定義 12 (Monoidal Category（モノイド圏）[1])**.** モノイド圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える

- 双関手 $(-) \otimes (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（モノイド積と呼ばれる）
- 単位対象 $I \in |\mathcal{C}|$
- （自然同型）結合子 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$
- （自然同型）左単位子 $\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\cong} A$
- （自然同型）右単位子 $\rho_A : A \otimes I \xrightarrow{\cong} A$
- 二つの図式（五角等式，三角等式）が可換となる

$$
\begin{tikzcd}
 & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[drr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[urr, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"'] & & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
 & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[ur, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes id_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "id_A \otimes \lambda_B"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

定義 13 (Symmetric Monoidal Category（対称モノイド圏）[1])**.** 対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ はモノイド圏であり，以下の構造を備える．

- （自然同型）対称子 $\sigma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$
- 等式 $\sigma_{A,B} = \sigma_{B,A}^{-1}$ を満たす
- 六角等式が可換となる

$$
\begin{tikzcd}
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{B,A,C}"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[dr, "id_B \otimes \sigma_{A,C}"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\sigma_{A,B} \otimes id_C"] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C}"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma_{A,B \otimes C}"'] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[ur, "\alpha_{B,C,A}"'] &
\end{tikzcd}
$$

定義 14 (Symmetric Monoidal Closed Category（対称モノイド閉圏）[2])**.** 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は対象モノイド圏であり，以下の構造を備える．

- 双関手 $(-) \multimap (-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（内部ホムと呼ばれる）
- 任意の対象 $A \in |\mathcal{C}|$ について，モノイド積 $\otimes$ と内部ホム $\multimap$ の随伴 $((-) \otimes A \dashv A \multimap (-)) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が存在する

命題 15. 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $A, B, C \in |\mathcal{C}|$ について、同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ を持つ．

証明. モノイド積 $\otimes$ と内部ホム $\multimap$ の随伴から自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C)$$

が得られる．任意の $X \in |\mathcal{C}|$ について，自然同型の合成により，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, (A \otimes B) \multimap C) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes (A \otimes B), C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((X \otimes A) \otimes B, C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes A, B \multimap C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A \multimap (B \multimap C))
\end{aligned}
$$

を得る．米田の補題より，同型 $(A \otimes B) \multimap C \cong A \multimap (B \multimap C)$ が存在する． □

命題 16. 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $X \in |\mathcal{C}|$ について、同型 $I \multimap A \cong A$ を持つ．

証明. 任意の $X \in |\mathcal{C}|$ について、自然同型の合成により，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I \multimap A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes I, A) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)
\end{aligned}
$$

を得る．米田の補題より、同型 $I \multimap A \cong A$ が存在する． □

命題 17. 対称モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ は任意の $A, B, C \in |\mathcal{C}|$ について，以下の 3 つの射を持つ．

$$
\begin{aligned}
\eta'_A &: I \to A \multimap A \\
eval_{A,B} &: (A \multimap B) \otimes A \to B \\
comp_{A,B,C} &: (A \multimap C) \otimes (B \multimap C) \to A \multimap C
\end{aligned}
$$

証明. 恒等射 id_A より，射の同型

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I \otimes A, A) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A \multimap A)
\end{aligned}
$$

を得るので，射 η_A は存在する．次に，恒等射 $id_{A \multimap B}$ より，射の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \multimap B, A \multimap B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B)$$

を得るので，射 $eval_{A,B}$ は存在する．次に，合成射 $eval_{B,C} \circ (id_{B \multimap C} \otimes eval_{A,B})$ より，射の同型

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes ((A \multimap B) \otimes A), C) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(((B \multimap C) \otimes (A \multimap B)) \otimes A, C) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B \multimap C) \otimes (A \multimap B), A \multimap C)
\end{aligned}
$$

を得るので，射 $comp_{A,B,C}$ は存在する． □

命題 15, 命題 16, 命題 17 は，対称子を使用せず証明しており，モノイド閉圏でも成り立つ．

命題 17 で用いた射 $eval_{A,B}$ より，射の同型から

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \multimap B) \otimes A, B) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (A \multimap B), B) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (A \multimap B) \multimap B)\end{aligned}$$

を得る．

定義 18 ($\star$-autonomous Category（$\star$- 自立圏）[2])**.** $\star$- 自立圏 $\mathcal{C}$ は対称モノイド閉圏であり，以下の構造を備える．

- 双対化対象 $\perp \in |\mathcal{C}|$
- 双対化関手 $(-)^\star := (-) \multimap \perp : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$
- （自然同型）二重双対 $A \xrightarrow{\cong} A^{\star\star}$

双対化関手 $(-)^\star$ から射の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C^\star) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A \otimes B) \otimes C, \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (B \otimes C), \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C) \multimap \perp) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B \otimes C)^\star)\end{aligned}$$

を得る．

二重双対により，以下の同型

$$A \otimes B \cong (A \multimap B^\star)^\star \qquad A \multimap B \cong (A \otimes B^\star)^\star \qquad A \multimap B \cong B^\star \multimap A^\star$$

を得る．

証明.

$$\begin{aligned}A \otimes B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B)^{\star\star} \\ &= ((A \otimes B) \multimap \perp)^\star \\ &\xrightarrow{\cong} (A \multimap (B \multimap \perp))^\star \\ &= (A \multimap B^\star)^\star\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{\star\star} \\ &= A \multimap (B^\star \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star) \multimap \perp \\ &= (A \otimes B^\star)^\star\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} A \multimap B^{\star\star} \\ &= A \multimap (B^\star \multimap \perp) \\ &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star) \multimap \perp \\ &\xrightarrow{\cong} (B^\star \otimes A) \multimap \perp \\ &\xrightarrow{\cong} B^\star \multimap (A \multimap \perp) \\ &= B^\star \multimap A^\star\end{aligned}$$

□

同様に，自然同型の合成により $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B^\star, A^\star)$ を得る．また，命題 16 より，同型 $I^\star \cong \perp$ を得る．

定義 19 (Compact Closed Category（コンパクト閉圏）[3][4])**.** コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ は $\star$- 自立圏であり，以下の構造を備える．

- （自然同型）自己双対 $\varsigma_{A,B} : (A \otimes B)^\star \xrightarrow{\cong} A^\star \otimes B^\star$
- （自然同型）自己双対 $\varsigma_I : I^\star \xrightarrow{\cong} I$

コンパクト閉圏の定義から同型を得る．

$$\begin{aligned}A \multimap B &\xrightarrow{\cong} (A \otimes B^\star)^\star \\ &\xrightarrow{\cong} (A^\star \otimes B^{\star\star}) \\ &\xrightarrow{\cong} A^\star \otimes B\end{aligned}$$

また，コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 A, B, B について，以下の射の同型を得る．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B^\star \otimes C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \multimap C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C)$$

コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in |\mathcal{C}|$ の恒等射 id_A について，二つの射の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I \otimes A, A)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A \multimap A)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A^\star \otimes A)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I \multimap A)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^\star \multimap I^\star)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^\star \multimap I)\\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A^\star, I)\end{aligned}$$

から，$\eta_A : I \to A^\star \otimes A$ と $\epsilon_A : A \otimes A^\star \to I$ を得る．

コンパクト閉圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 A について，η_A から射 $decomp_{A,B,C} : A \multimap C \to (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)$ を以下の射の合成として得る

$$\begin{aligned}A \multimap C &\xrightarrow{\cong} (A^\star \otimes C)\\ &\xrightarrow{\rho_{A^\star \otimes C}} (A^\star \otimes C) \otimes I\\ &\xrightarrow{id_{A^\star \otimes C} \otimes \eta_B} (A^\star \otimes C) \otimes (B^\star \otimes B)\\ &\xrightarrow{id_{A^\star \otimes C} \otimes \sigma_{B^\star, B}} (A^\star \otimes C) \otimes (B \otimes B^\star)\\ &\xrightarrow{\alpha_{A^\star, C, B \otimes B^\star}} A^\star \otimes (C \otimes (B \otimes B^\star))\\ &\xrightarrow{id_{A^\star} \otimes \sigma_{C, B \otimes B^\star}} A^\star \otimes ((B \otimes B^\star) \otimes C)\\ &\xrightarrow{\alpha^{-1}_{A^\star, B \otimes B^\star, C}} (A^\star \otimes (B \otimes B^\star)) \otimes C\\ &\xrightarrow{\alpha^{-1}_{A^\star, B, B^\star} \otimes id_C} ((A^\star \otimes B) \otimes B^\star) \otimes C\\ &\xrightarrow{\alpha_{A^\star \otimes B, B^\star, C}} (A^\star \otimes B) \otimes (B^\star \otimes C)\\ &\xrightarrow{\cong} (A \multimap B) \otimes (B \multimap C)\end{aligned}$$

3.3 ダガー圏

定義 20 (†-Category（†- 圏）[1])**.** †- 圏 $\mathcal{C}$ は，以下の構造を備える．

- 関手 $\dagger : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$
- † は対象に対して恒等
- 対合的 $\dagger \circ \dagger = id_{\mathcal{C}}$

†- 圏の定義から，任意の射 $: A \to B, g : B \to C$ について，以下の等式が導かれる．

$$\begin{aligned}id_A^\dagger &= id_A &&: A \to A\\ (g \circ f)^\dagger &= f^\dagger \circ g^\dagger &&: C \to A\\ f^{\dagger\dagger} &= f &&: A \to B,\end{aligned}$$

$f^\dagger = f^{-1}$ となる f をユニタリーと呼び，$f^\dagger = f$ となる f を自己随伴と呼ぶ．

定義 21 (†-Symmetric Monoidal Category（†- 対称モノイド圏）[1][3])**.** †- 対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ は，対称モノイド圏かつ †- 圏であり，以下の構造を備える．

- 任意の $A, B, C \in |\mathcal{C}|$ について，$\alpha_{A,B,C}, \lambda_A, \rho_A, \sigma_{A,B}$ がユニタリ
- 関手 † が厳密モノイド関手であり，任意の射 f, g について，$(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$

定義 22 (†-Comact Category（†- コンパクト圏）[3])**.** †- コンパクト圏 $\mathcal{C}$ は，コンパクト閉圏かつ †- 対称モノイド圏であり，以下の構造を備える．

- 任意の $A \in |\mathcal{C}|$ について，以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\epsilon_A^\dagger"'] & A^\star \otimes A \arrow[d, "\sigma_{A^\star,A}"] \\ & A \otimes A^\star \end{tikzcd}$$

定義から ϵ_A は $\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A^\star}$ として定義可能となる．逆に ϵ_A から η_A を定義することもできる．

†- コンパクト圏 $\mathcal{C}$ は，任意の対象 A, B の内部ホム $A \multimap B$ について，以下の図式を可換にする射 $dagger_{A,B} : A \multimap B \to B \multimap A$ を持つ．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(I, A \multimap B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(I, dagger_{A,B})"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(I, B \multimap A) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Hom}(A, B) \arrow[r, "(-)^\dagger"] & \mathrm{Hom}(B, A) \end{tikzcd}$$

3.4 その他の構造

定義 23 (Finite Product（有限積）[1])**.** 圏 $\mathcal{C}$ における対象 A, B に対して有限積 $A \times B$ は，以下の構造を備える．

- 射 $\pi_1 : A \times B \to A$ と $\pi_2 : A \times B \to B$
- 任意の対象 C と射の組 $f : C \to A, g : C \to B$ に対して一意な射 $h : C \to A \times B$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

  射 h は $\langle f, g \rangle$ と表記されることが多い．
- （終対象）任意の対象 C に対して一意な射 $h : C \to I$ が存在する対象 I

有限積からなる圏（デカルト圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [1] を持つ対称モノイド圏と同値である．

- （自然な射の族）複製 $\Delta_A : A \to A \otimes A$
- （自然な射の族）削除 $\diamond_A : A \to I$

定義 24 (Finite Coproduct（有限余積）[1])**.**] 圏 $\mathcal{C}$ における対象 A, B に対して有限余積 $A + B$ は，以下の構造を備える．

- 射 $\iota_1 : A \to A \oplus B$ と $\iota_2 : B \to A \oplus B$
- 任意の対象 C と射の組 $f : A \to C, g : B \to C$ に対して一意な射 $h : A + B \to C$ が存在して以下の図式が可換

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"'] & A + B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

  射 h は $[f, g]$ と表記されることが多い．
- （始対象）任意の対象 C に対して一意な射 $h : I \to C$ が存在する対象 I

有限余積からなる圏（余デカルト圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [1] を持つ対称モノイド圏と同値である．

- （自然な射の族）合併 $\nabla_A : A \oplus A \to A$
- （自然な射の族）追加 $\square_A : I \to A$

定義 25 (Finite Biproduct（有限双積）[1])**.** 圏 $\mathcal{C}$ における対象 A_1, A_2 に対して有限双積 $A_1 \oplus A_2$ は，以下の構造を備える．

- （零対象）任意の対象 A_1, A_2 に対して一意な射 $0_{A_1,A_2} : A_1 \to O \to A_2$ が存在する対象 O
- 射 $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \to A_1$ と $\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \to A_2$

- π_1, π_2 に関して有限積
- 射 $\iota_1 : A_1 \to A_1 \oplus A_2$ と $\iota_2 : A_2 \to A_1 \oplus A_2$
- ι_1, ι_2 に関して有限余積
- $\delta_{ij} = \pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} id_A & \text{if} \quad i = j \\ 0_{A_j, A_i} & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$

有限双積からなる圏（半加法圏）は，以下の構造と満たすべきいくつかの公理 [1] を持つ対称モノイド圏と同値である．

- （自然な射の族）複製 $\Delta_A : A \to A \otimes A$
- （自然な射の族）削除 $\Diamond_A : A \to I$
- （自然な射の族）合併 $\nabla_A : A \otimes A \to A$
- （自然な射の族）追加 $\Box_A : I \to A$

定義 26 (Semi Additive Category（半加法圏））**.** 有限双積を持つ圏は半加法圏 [5] である．半加法圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f, g : A \to B$ に対して

$$f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A : A \to B$$

と定義できる [6]．各射 $f : A \to B$ に対して逆 $-f : A \to B$ が存在する場合，半加法圏は Additive Category（加法圏）である．他方，$f + f = f$ となる場合，Semilattice Category（半束圏）で豊穣化された圏である．

定義 27 (Rig Category（半環圏）[7]）**.** 半環圏 $\mathcal{C}$ は以下の構造を備える．

- （加法としての）対称モノイド構造 $(\mathcal{C}, \oplus, O)$
- （乗法としての）モノイド構造 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$
- （自然同型）左分配子 $\delta_l : A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- （自然同型）右分配子 $\delta_r : (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- （自然同型）左吸収子 $\kappa_l : A \otimes O \cong O$
- （自然同型）右吸収子 $\kappa_r : O \otimes A \cong O$
- 諸々のコヒーレンス公理 [7]

定義 28 (Trace（トレース））**.**

定義 29 (Restriction Category（制約圏））**.**

定義 30 (Inverse Category（逆圏））**.**

定義 31 (Algebraically Compact Category（代数的コンパクト圏））**.**

4 型検査

$$\text{Variable}\ \frac{}{x : T \vdash x : T} \qquad \frac{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash t : T}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t : T}\ \text{Exchange}$$

$$I_L\ \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, () : I \vdash t : T} \qquad \frac{}{\vdash () : I}\ I_R$$

$$\oplus_{L_l}\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2}\ \oplus_{R_l}$$

$$\oplus_{L_r}\ \frac{\Gamma, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2}\ \oplus_{R_r}$$

$$\otimes_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2}\ \otimes_R$$

$$\multimap_L\ \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma_2, t_2 : T_2 \vdash t : T}{\Gamma_1, \Gamma_2, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2}\ \multimap_R$$

$$\mu_L\ \frac{\Gamma, u : [X \to \mu X.U]U \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.U}\ u : \mu X.U \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : [X \to \mu X.T]T}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : \mu X.T}\ \mu_R$$

$$\mathrm{Trace}_L\ \frac{\Gamma, u : S \oplus U_1 \multimap S \oplus U_2 \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{trace}_S\ u : U_1 \multimap U_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_U\ t : T_1 \multimap T_2}\ \mathrm{Trace}_R$$

$$\mathrm{Par}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : U \vdash t : T \qquad \Gamma, t_2 : U \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T \qquad \Gamma \vdash t_2 : T}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 : T}\ \mathrm{Par}_R$$

$$\mathrm{Seq}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \vdash t : T}{\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : T_1 \multimap T_2 \qquad \Gamma_2 \vdash t_2 : T_2 \multimap T_3}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3}\ \mathrm{Seq}_R$$

$$\dagger_L\ \frac{\Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \vdash t : T}{\Gamma, u^\dagger : T_1 \multimap T_2 \vdash t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : T_2 \multimap T_1}{\Gamma \vdash t^\dagger : T_1 \multimap T_2}\ \dagger_R$$

$$\mathrm{id}_L\ \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, \mathrm{id} : U \multimap U \vdash t : T} \qquad \frac{}{\vdash \mathrm{id} : T \multimap T}\ \mathrm{id}_R$$

$$\varnothing_\mathrm{L}\ \frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma, \varnothing : U \vdash t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \varnothing : T}\ \varnothing_\mathrm{R}$$

$$\frac{\vdash f : T_1 \multimap T_2 \qquad \vdash e : T_1}{\vdash f \mathbin{@} e : T_2}\ \mathrm{App}$$

図 4　Typing rules

$$\vdash\ t : T \rhd$$

$$\text{Variable}\ \frac{\Gamma(x) = T}{\Gamma\ \vdash\ x : T\ \rhd\ \Gamma \setminus x}$$

$$I_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, () : I\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ () : I\ \rhd\ \Gamma}\ I_R$$

$$\oplus_{L_l}\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2\ \rhd\ \Gamma'}\ \oplus_{R_l}$$

$$\oplus_{L_r}\ \frac{\Gamma, t_2 : T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_2 : T_2\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2\ \rhd\ \Gamma'}\ \oplus_{R_r}$$

$$\otimes_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1\ \rhd\ \Gamma' \qquad \Gamma'\ \vdash\ t_2 : T_2\ \rhd\ \Gamma''}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2\ \rhd\ \Gamma''}\ \otimes_R$$

$$\multimap_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1\ \rhd\ \Gamma' \qquad \Gamma', t_2 : T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma''}{\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma''} \qquad \frac{\Gamma, t_1 : T_1\ \vdash\ t_2 : T_2\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2\ \rhd\ \Gamma'}\ \multimap_R$$

$$\mu_L\ \frac{\Gamma, u : [X \to \mu X.U]U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.U}\ u : \mu X.U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : [X \to \mu X.T]T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : \mu X.T\ \rhd\ \Gamma'}\ \mu_R$$

$$\mathrm{Trace}_L\ \frac{\Gamma, u : S \oplus U_1 \multimap S \oplus U_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{trace}_S\ u : U_1 \multimap U_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{trace}_U\ t : T_1 \multimap T_2\ \rhd\ \Gamma'}\ \mathrm{Trace}_R$$

$$\mathrm{Par}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma' \qquad \Gamma, t_2 : U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T\ \rhd\ \Gamma' \qquad \Gamma\ \vdash\ t_2 : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \parallel t_2 : T\ \rhd\ \Gamma'}\ \mathrm{Par}_R$$

$$\mathrm{Seq}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : T_1 \multimap T_2\ \rhd\ \Gamma' \qquad \Gamma'\ \vdash\ t_2 : T_2 \multimap T_3\ \rhd\ \Gamma''}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3\ \rhd\ \Gamma''}\ \mathrm{Seq}_R$$

$$\dagger_L\ \frac{\Gamma, u : T_2 \multimap T_1\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, u^\dagger : T_1 \multimap T_2\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T_2 \multimap T_1\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma\ \vdash\ t^\dagger : T_1 \multimap T_2\ \rhd\ \Gamma'}\ \dagger_R$$

$$\mathrm{id}_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, \mathrm{id} : U \multimap U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{id} : T \multimap T\ \rhd\ \Gamma}\ \mathrm{id}_R$$

$$\varnothing_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'}{\Gamma, \varnothing : U\ \vdash\ t : T\ \rhd\ \Gamma'} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ \varnothing : T\ \rhd\ \Gamma}\ \varnothing_{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\vdash\ f : T_1 \multimap T_2 \rhd \qquad \vdash\ e : T_1 \rhd}{\vdash\ f \mathbin{@} e : T_2 \rhd}\ \mathrm{App}$$

図 5 Syntax–Directed Typing rules

5　型推論

$$
\begin{aligned}
\mathrm{unify} &:= [\mathrm{Constraint}] \to \mathrm{Substitution} \\
\mathrm{unify}(\{\}) &= [] \\
\mathrm{unify}(\{X = T\} \cup C) &= \mathrm{unify}([X \to T]C) \circ [X \to T] \\
\mathrm{unify}(\{T = X\} \cup C) &= \mathrm{unify}([X \to T]C) \circ [X \to T] \\
\mathrm{unify}(\{S_1 \oplus S_2 = T_1 \oplus T_2\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
\mathrm{unify}(\{S_1 \otimes S_2 = T_1 \otimes T_2\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
\mathrm{unify}(\{S_1 \multimap S_2 = T_1 \multimap T_2\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{S_1 = T_1, S_2 = T_2\}) \\
\mathrm{unify}(\{\mu X.S = \mu Y.T\} \cup C) &= \mathrm{unify}(C \cup \{X = Y, S = T\})
\end{aligned}
$$

図 6　unification

$$\vdash\ t : X \triangleright\ \mid C$$

$$\text{Variable}\ \frac{\Gamma(x) = V_2}{\Gamma\ \vdash\ x : V_1\ \triangleright \Gamma \setminus (x : T)\ \mid\ \{V_1 = V_2\}}$$

$$I_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, () : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = I\}} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ () : V\ \triangleright \Gamma\ \mid\ \{V = I\}}\ I_R$$

$$\oplus_{L_l}\ \frac{\Gamma, t_1 : X_1\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : X_1\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{inl}\ t_1 : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}}\ \oplus_{R_l}$$

$$\oplus_{L_r}\ \frac{\Gamma, t_2 : X_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \oplus X_2\}} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t_2 : X_2\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{inr}\ t_2 : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{X_1 \oplus X_2\}}\ \oplus_{R_r}$$

$$\otimes_L\ \frac{\Gamma, t_1 : X_1, t_2 : X_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, t_1 \times t_2 : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \otimes X_2\}}$$

$$\frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : X_1\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \qquad \Gamma'\ \vdash\ t_2 : X_2\ \triangleright \Gamma''\ \mid\ C_2}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \times t_2 : V\ \triangleright \Gamma''\ \mid\ C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \otimes X_2\}}\ \otimes_R$$

$$\multimap_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : X_1\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \qquad \Gamma', t_2 : X_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma''\ \mid\ C_2}{\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma''\ \mid\ C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}$$

$$\frac{\Gamma, t_1 : X_1\ \vdash\ t_2 : X_2\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \mapsto t_2 : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}\ \multimap_R$$

$$\mu_L\ \frac{\Gamma, u : [Y \to \mu Y.U]U\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu Y.U}\ u : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = \mu Y.U\}} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : [X \to \mu X.T]T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = \mu X.T\}}\ \mu_R$$

$$\mathrm{Trace}_L\ \frac{\Gamma, u : U \oplus X_1 \multimap U \oplus X_2\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, \mathrm{trace}_U\ u : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}$$

$$\frac{\Gamma\ \vdash\ t : T \oplus X_1 \multimap T \oplus X_2\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{trace}_T\ t : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}\ \mathrm{Trace}_R$$

$$\mathrm{Par}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : X\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \qquad \Gamma, t_2 : X\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_2}{\Gamma, t_1 \parallel t_2 : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \cup C_2 \cup \{V = X\}}$$

$$\frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : X\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \qquad \Gamma\ \vdash\ t_2 : X\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_2}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \parallel t_2 : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \cup C_2 \cup \{V = X\}}\ \mathrm{Par}_R$$

$$\mathrm{Seq}_L\ \frac{\Gamma, t_1 : X_1 \multimap X_2, t_2 : X_2 \multimap X_3\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \multimap X_3\}}$$

$$\frac{\Gamma\ \vdash\ t_1 : X_1 \multimap X_2\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C_1 \qquad \Gamma'\ \vdash\ t_2 : X_2' \multimap X_3\ \triangleright \Gamma''\ \mid\ C_2}{\Gamma\ \vdash\ t_1 \fatsemi t_2 : V\ \triangleright \Gamma''\ \mid\ C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_1 \multimap X_3\}}\ \mathrm{Seq}_R$$

$$\dagger_L\ \frac{\Gamma, u : X_2 \multimap X_1\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, u^\dagger : \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}} \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ t : X_2 \multimap X_1\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma\ \vdash\ t^\dagger : V\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X_1 \multimap X_2\}}\ \dagger_R$$

$$\mathrm{id}_L\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, \mathrm{id} : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C \cup \{V = X \multimap X\}} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ \mathrm{id} : V\ \triangleright \Gamma\ \mid\ \{V = X \multimap X\}}\ \mathrm{id}_R$$

$$\varnothing_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C}{\Gamma, \varnothing : V\ \vdash\ t : T\ \triangleright \Gamma'\ \mid\ C\{V = X\}} \qquad \frac{}{\Gamma\ \vdash\ \varnothing : V\ \triangleright \Gamma\ \mid\ \{V = X\}}\ \varnothing_{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\vdash\ f : X_1 \multimap X_2 \triangleright\ \mid\ C_1 \qquad \vdash\ e : X_1 \triangleright\ \mid\ C_2}{\vdash\ f\ @\ e : V \triangleright\ \mid\ C_1 \cup C_2 \cup \{V = X_2\}}\ \mathrm{App}$$

図 7　Type Inference rules

6 表示的意味論

$$
\begin{aligned}
[\![\Theta \vdash T]\!] &: \mathcal{V}^{|\Theta|} \to \mathcal{V} \\
[\![\Theta \vdash X_i]\!] &:= \Pi_i \\
[\![\Theta \vdash \mathrm{I}]\!] &:= K_I \\
[\![\Theta \vdash T_1 \oplus T_2]\!] &:= \oplus \circ \langle [\![\Theta \vdash T_1]\!], [\![\Theta \vdash T_2]\!] \rangle \\
[\![\Theta \vdash T_1 \otimes T_2]\!] &:= \otimes \circ \langle [\![\Theta \vdash T_1]\!], [\![\Theta \vdash T_2]\!] \rangle \\
[\![\Theta \vdash T_1 \multimap T_2]\!] &:= \otimes \circ \langle [\![\Theta \vdash T_1]\!]^{\star}, [\![\Theta \vdash T_2]\!] \rangle \\
[\![\Theta \vdash \mu X.T]\!] &:= [\![\Theta, X \vdash T]\!]^{\sharp} \\
[\![\Theta \vdash T[X \to U]]\!] &:= [\![\Theta \vdash T]\!] \circ \langle Id, [\![\Theta \vdash U]\!] \rangle \\
[\![T]\!] &:= [\![\vdash T]\!](*) \in Obj(\mathcal{V})
\end{aligned}
$$

図 8　Type Interpretation

$$
\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!] &\in Obj(\mathcal{V}) \\
[\![]\!] &:= I \\
[\![\Gamma, () : \mathrm{I}]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \\
[\![\Gamma, \mathrm{inl}\ t_1 : T_1 \oplus T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \oplus [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, \mathrm{inr}\ t_2 : T_1 \oplus T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \oplus [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \otimes [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ u : \mu X.T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes [\![\mu X.T]\!] \\
[\![\Gamma, \mathrm{trace}_T\ t : T_1 \multimap T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, t_1 \parallel t_2 : T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes [\![T]\!] \\
[\![\Gamma, t_1 \mathbin{;} t_2 : T_1 \multimap T_3]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_3]\!]) \\
[\![\Gamma, t^{\dagger} : T_1 \multimap T_2]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes ([\![T_1]\!] \multimap [\![T_2]\!]) \\
[\![\Gamma, \mathrm{id} : T \multimap T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \\
[\![\Gamma, \varnothing : T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \\
[\![f \mathbin{@} e : T]\!] &:= [\![\Gamma]\!] \otimes [\![T]\!]
\end{aligned}
$$

図 9　Context Interpretation

$$
\begin{aligned}
\llbracket \Gamma \vdash t : T \rrbracket &: \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket x : T \ \vdash \ x : T \rrbracket &:= \llbracket T \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\sigma_{\llbracket \Gamma_1 \rrbracket, \llbracket \Gamma_2 \rrbracket}} \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_2, \Gamma_1 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, () : \mathrm{I} \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes I \xrightarrow{\rho_{\llbracket \Gamma \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \ \vdash \ () : \mathrm{I} \rrbracket &:= \llbracket \rrbracket \xrightarrow{id_I} \llbracket \mathrm{I} \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{inl}\, t_1 : T_1 \oplus T_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \pi_1} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ \mathrm{inl}\, t_1 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t_1 : T_1 \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\iota_1} \llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{inr}\, t_2 : T_1 \oplus T_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes \pi_2} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_2 : T_2 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ \mathrm{inr}\, t_1 : T_1 \oplus T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \xrightarrow{\iota_2} \llbracket T_1 \rrbracket \oplus \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1, t_2 : T_2 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ t_1 \times t_2 : T_1 \otimes T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \ \vdash \ t_1 : T_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_1 \ \vdash \ t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2, t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= (\llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \cong \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes (\llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes \llbracket T_1 \rrbracket^{\star} \to \llbracket T \rrbracket) \\
&\cong \left(\llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes (\llbracket \Gamma_2 \rrbracket \otimes \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \ \vdash \ t_1 : T_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2, t_2 : T_2 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T_1 \rrbracket \otimes \llbracket T \rrbracket \right) \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ t_1 \mapsto t_2 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \cong \left(\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \ \vdash \ t_2 : T_2 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \right) \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{fold}_{\mu X.U}\ u : \mu X.U \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \mu X.U \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes unfold_{\mu X.U}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket [X \to \mu X.U](U) \rrbracket \\
&\xrightarrow{\llbracket \Gamma, u : [X \to \mu X.U](U) \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ \mathrm{fold}_{\mu X.T}\ t : \mu X.T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t : [X \to \mu X.T](T) \rrbracket} \llbracket [X \to \mu X.T](T) \rrbracket \xrightarrow{fold_{\mu X.T}} \llbracket \mu X.T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{trace}_U\ u : T_1 \multimap T_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes Tr^{\llbracket U \rrbracket}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}(\llbracket \Gamma, t : (U \oplus T_1) \multimap (U \oplus T_2) \ \vdash \ t:T \rrbracket)} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ \mathrm{trace}_U\ t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{Tr^{\llbracket U \rrbracket}_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}(\llbracket \Gamma \ \vdash \ t : U \oplus T_1 \multimap U \oplus T_2 \rrbracket)} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, t_1 \parallel t_2 : U \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket U \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes (\llbracket \Gamma, t_1 : U \ \vdash \ t:T \rrbracket + \llbracket \Gamma, t_2 : U \ \vdash \ t:T \rrbracket)} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ t_1 \parallel t_2 : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t_1 : T \rrbracket + \llbracket \Gamma \ \vdash \ t_2 : T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
&\xrightarrow{id_{\Gamma} \otimes decomp_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket, \llbracket T_3 \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes ((\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket)) \\
&\xrightarrow{\llbracket \Gamma, t_1 : T_1 \multimap T_2, t_2 : T_2 \multimap T_3 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ t_1 \fatsemi t_2 : T_1 \multimap T_3 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma_1 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma_1 \ \vdash \ t_1 : T_1 \multimap T_2 \rrbracket \otimes \llbracket \Gamma_2 \ \vdash \ t_2 : T_2 \multimap T_3 \rrbracket} (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket) \\
&\xrightarrow{comp_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket, \llbracket T_3 \rrbracket}} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_3 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, u^{\dagger} : T_1 \multimap T_2 \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \xrightarrow{id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \otimes dagger_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes (\llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_1 \rrbracket) \xrightarrow{\llbracket \Gamma, u : T_2 \multimap T_1 \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ t^{\dagger} : T_1 \multimap T_2 \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t : T_2 \multimap T_1 \rrbracket} \llbracket T_2 \rrbracket \multimap \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{dagger_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket \\
\llbracket \Gamma, \mathrm{id} : U \multimap U \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \ \vdash \ \mathrm{id} : T \multimap T \rrbracket &:= \llbracket \rrbracket \to \llbracket T \rrbracket \multimap \llbracket T \rrbracket \cong \left(\llbracket T \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \right) \\
\llbracket \Gamma, \varnothing : U \ \vdash \ t : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \Gamma \ \vdash \ t:T \rrbracket} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \Gamma \ \vdash \ \varnothing : T \rrbracket &:= \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{0_{\llbracket \Gamma \rrbracket, \llbracket T \rrbracket}} \llbracket T \rrbracket \\
\llbracket \ \vdash \ t \mathbin{@} t_1 : T_2 \rrbracket &:= \llbracket \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \ \vdash \ t : T_1 \multimap T_2 \rrbracket \otimes \llbracket \ \vdash \ t_1 : T_1 \rrbracket} (\llbracket T_1 \rrbracket \multimap \llbracket T_2 \rrbracket) \otimes \llbracket T_1 \rrbracket \xrightarrow{eval_{\llbracket T_1 \rrbracket, \llbracket T_2 \rrbracket}} \llbracket T_2 \rrbracket
\end{aligned}
$$

図 10　Term Interpretation

7 操作的意味論

$$\sigma_1 \cup^{\times}_{\perp} \sigma_2 := \begin{cases} \perp & \text{if } \sigma_1 = \perp \vee \sigma_2 = \perp \\ \sigma_1 \cup \sigma_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma_1 \cup^{+}_{\perp} \sigma_2 := \begin{cases} \perp & \text{if } \sigma_1 = \perp \wedge \sigma_2 = \perp \\ \sigma_1 & \text{if } \sigma_2 = \perp \\ \sigma_2 & \text{if } \sigma_1 = \perp \\ \sigma_1 \cup \sigma_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

図 11　Operations on Environment σ

$$\begin{aligned}
x \rhd t &:= [x \to t] \\
() \rhd () &:= [\,] \\
\mathrm{inl}\ t \rhd \mathrm{inl}\ u &:= t \rhd u \\
\mathrm{inl}\ t \rhd \mathrm{inr}\ u &:= \perp \\
\mathrm{inr}\ t \rhd \mathrm{inr}\ u &:= t \rhd u \\
\mathrm{inr}\ t \rhd \mathrm{inl}\ u &:= \perp \\
t_1 \times t_2 \rhd u_1 \times u_2 &:= (t_1 \rhd u_1) \cup^{\times}_{\perp} (t_2 \rhd u_2) \\
t_1 \mapsto t_2 \rhd u_1 \mapsto u_2 &:= (t_1 \rhd u_1) \cup^{\times}_{\perp} (t_2 \rhd u_2) \\
\mathrm{fold}_T\ t \rhd \mathrm{fold}_T\ u &:= t \rhd u \\
\mathrm{trace}_T\ t \rhd \mathrm{trace}_T\ u &:= t \rhd u \\
t \rhd u_1 \parallel u_2 &:= (t \rhd u_1) \cup^{+}_{\perp} (t \rhd u_2) \\
t_1 \parallel t_2 \rhd u &:= (t_1 \rhd u) \cup^{+}_{\perp} (t_2 \rhd u) \\
t_1 \fatsemi t_2 \rhd u_1 \fatsemi u_2 &:= (t_1 \rhd u_1) \cup^{\times}_{\perp} (t_2 \rhd u_2) \\
t \fatsemi x \rhd u &:= x \rhd t^{\dagger} \fatsemi u \\
x \fatsemi t \rhd u &:= x \rhd u \fatsemi t^{\dagger} \\
t^{\dagger} \rhd u &:= t \rhd u^{\dagger} \\
\mathrm{id} \rhd \mathrm{id} &:= [\,] \\
\varnothing \rhd u &:= \perp \\
t \rhd \varnothing &:= \perp
\end{aligned}$$

図 12　Constructing Environment

$$\begin{aligned}
[\,](x) &:= \varnothing \\
[\sigma, x \to t](x) &:= t \\
[\sigma, x' \to t](x) &:= \varnothing \\
[\sigma](()) &:= () \\
[\sigma](\mathrm{inl}\ t) &:= \mathrm{inl}\ [\sigma](t) \\
[\sigma](\mathrm{inr}\ t) &:= \mathrm{inr}\ [\sigma](t) \\
[\sigma_1, \sigma_2](t_1 \times t_2) &:= [\sigma](t_1) \times [\sigma](t_2) \\
[\sigma_1, \sigma_2](t_1 \mapsto t_2) &:= [\sigma](t_1) \mapsto [\sigma](t_2) \\
[\sigma](\mathrm{fold}_T\ t) &:= \mathrm{fold}_T\ [\sigma](t) \\
[\sigma](\mathrm{trace}_T\ t) &:= \mathrm{trace}_T\ [\sigma](t) \\
[\sigma_1, \sigma_2](t_1 \parallel t_2) &:= [\sigma](t_1) \parallel [\sigma](t_2) \\
[\sigma](t_1 \fatsemi t_2) &:= [\sigma](t_1) \fatsemi [\sigma](t_2) \\
[\sigma](t^{\dagger}) &:= [\sigma](t)^{\dagger} \\
[\sigma](\mathrm{id}) &:= \mathrm{id} \\
[\,](\varnothing) &:= \varnothing \\
[\perp](t) &:= \varnothing
\end{aligned}$$

図 13　Consumption of Environment

$$
\begin{aligned}
\varnothing \parallel t &\Rrightarrow t \\
(t_1 \parallel t_2) \parallel t_3 &\Rrightarrow t_1 \parallel (t_2 \parallel t_3) \\
t_1 \parallel t_2 &\Rrightarrow t_2 \parallel t_1 \\
t \parallel t &\Rrightarrow t \\
\mathrm{id} \fatsemi t &\Rrightarrow t \\
t \fatsemi \mathrm{id} &\Rrightarrow t \\
(t_1 \fatsemi t_2) \fatsemi t_3 &\Rrightarrow t_1 \fatsemi (t_2 \fatsemi t_3) \\
\varnothing \fatsemi t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \fatsemi \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
(t_1 \parallel t_2) \fatsemi t_3 &\Rrightarrow (t_1 \fatsemi t_3) \parallel (t_2 \fatsemi t_3) \\
t_1 \fatsemi (t_2 \parallel t_3) &\Rrightarrow (t_1 \fatsemi t_2) \parallel (t_1 \fatsemi t_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{inl}\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{inr}\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\varnothing \times t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \times \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\varnothing \mapsto t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \mapsto \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{fold}_T\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{trace}_T\ \varnothing &\Rrightarrow \varnothing
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varnothing^\dagger &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{id}^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{id} \\
()^\dagger &\Rrightarrow () \\
(t_1 \parallel t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \parallel t_2^\dagger \\
(t_1 \fatsemi t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \fatsemi t_2^\dagger \\
(\mathrm{inl}\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{inl}\ t^\dagger \\
(\mathrm{inr}\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{inr}\ t^\dagger \\
(t_1 \times t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \times t_2^\dagger \\
(t_1 \mapsto t_2)^\dagger &\Rrightarrow t_1^\dagger \mapsto t_2^\dagger \\
(\mathrm{fold}_T\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{fold}_T\ t^\dagger \\
(\mathrm{trace}_T\ t)^\dagger &\Rrightarrow \mathrm{trace}_T\ t^\dagger \\
(t^\dagger)^\dagger &\Rrightarrow t \\
\mathrm{inl}\ (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow \mathrm{inl}\ t_1 \parallel \mathrm{inl}\ t_2 \\
\mathrm{inr}\ (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow \mathrm{inr}\ t_1 \parallel \mathrm{inr}\ t_2 \\
(t_1 \parallel t_2) \times t_3 &\Rrightarrow (t_1 \times t_3) \parallel (t_2 \times t_3) \\
t_1 \times (t_2 \parallel t_3) &\Rrightarrow (t_1 \times t_2) \parallel (t_1 \times t_3) \\
(t_1 \parallel t_2) \mapsto t_3 &\Rrightarrow (t_1 \mapsto t_3) \parallel (t_2 \mapsto t_3) \\
t_1 \mapsto (t_2 \parallel t_3) &\Rrightarrow (t_1 \mapsto t_2) \parallel (t_1 \mapsto t_3) \\
\mathrm{fold}_T\ (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow \mathrm{fold}_T\ t_1 \parallel \mathrm{fold}_T\ t_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1 \Rrightarrow t_1' \Longrightarrow t_2 \Rrightarrow t_2' &\Longrightarrow t_1 \parallel t_2 \Rrightarrow t_1' \parallel t_2' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \Longrightarrow t_2 \Rrightarrow t_2' &\Longrightarrow t_1 \fatsemi t_2 \Rrightarrow t_1' \fatsemi t_2' \\
t \Rrightarrow t' &\Longrightarrow \mathrm{inl}\ t \Rrightarrow \mathrm{inl}\ t' \\
t \Rrightarrow t' &\Longrightarrow \mathrm{inr}\ t \Rrightarrow \mathrm{inr}\ t' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \Longrightarrow t_2 \Rrightarrow t_2' &\Longrightarrow t_1 \times t_2 \Rrightarrow t_1' \times t_2' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \Longrightarrow t_2 \Rrightarrow t_2' &\Longrightarrow t_1 \mapsto t_2 \Rrightarrow t_1' \mapsto t_2' \\
t \Rrightarrow t' &\Longrightarrow \mathrm{fold}_T\ t \Rrightarrow \mathrm{fold}_T\ t' \\
t \Rrightarrow t' &\Longrightarrow \mathrm{trace}_T\ t \Rrightarrow \mathrm{trace}_T\ t' \\
t_1 \Rrightarrow t_1' \Longrightarrow t_2 \Rrightarrow t_2' &\Longrightarrow t_1 \mathbin{@} t_2 \Rrightarrow t_1' \mathbin{@} t_2'
\end{aligned}
$$

$$
(t_1 \mapsto t_2) \mathbin{@} t \Rrightarrow (t_1 \triangleright t)\ t_2
$$

$$
\begin{aligned}
\varnothing \mathbin{@} t &\Rrightarrow \varnothing \\
t \mathbin{@} \varnothing &\Rrightarrow \varnothing \\
\mathrm{id} \mathbin{@} t &\Rrightarrow t
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(t_1 \parallel t_2) \mathbin{@} t &\Rrightarrow (t_1 \mathbin{@} t) \parallel (t_2 \mathbin{@} t) \\
t \mathbin{@} (t_1 \parallel t_2) &\Rrightarrow (t \mathbin{@} t_1) \parallel (t \mathbin{@} t_2) \\
t_1 \fatsemi t_2 \mathbin{@} t &\Rrightarrow t_2 \mathbin{@} (t_1 \mathbin{@} t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inr}\ u' &\Longrightarrow (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \Rrightarrow u' \\
t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inl}\ u' \Longrightarrow (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \Rrightarrow u'' &\Longrightarrow (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \Rrightarrow u'' \\
t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inl}\ u' \Longrightarrow (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \Rrightarrow u'' &\Longrightarrow (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \Rrightarrow u'' \\
t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \Rrightarrow \mathrm{inr}\ u' &\Longrightarrow (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \Rrightarrow u'
\end{aligned}
$$

図 14　Reduction

$$\frac{\Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash t \equiv t : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_2 \equiv t_1 : T}{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_2 : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_2 : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_3 : T}{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_3 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \parallel t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \parallel t_3 \equiv t_1 \parallel (t_2 \parallel t_3) : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t \parallel t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 \equiv t_2 \parallel t_1 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} \fatsemi t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t \fatsemi \mathrm{id} \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \fatsemi t_2) \fatsemi t_3 \equiv t_1 \fatsemi (t_2 \fatsemi t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \fatsemi t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \fatsemi t_3 \equiv (t_1 \fatsemi t_3) \parallel (t_2 \fatsemi t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \fatsemi \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \fatsemi (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \fatsemi t_2) \parallel (t_1 \fatsemi t_2) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ (t_1 \parallel t_2) \equiv \mathrm{inl}\ t_1 \parallel \mathrm{inl}\ t_2 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ (t_1 \parallel t_2) \equiv \mathrm{inr}\ t_1 \parallel \mathrm{inr}\ t_2 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \times t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \times t_3 \equiv (t_1 \times t_3) \parallel (t_2 \times t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \times \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \times (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \times t_2) \parallel (t_1 \times t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \mapsto t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \mapsto t_3 \equiv (t_1 \mapsto t_3) \parallel (t_2 \mapsto t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \mapsto \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto (t_2 \parallel t_3) \equiv (t_1 \mapsto t_2) \parallel (t_1 \mapsto t_3) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_T\ \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_T\ (t_1 \parallel t_2) \equiv \mathrm{fold}_T\ t_1 \parallel \mathrm{fold}_T\ t_2 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_T\ \varnothing \equiv \varnothing : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing^\dagger \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id}^\dagger \equiv \mathrm{id} : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash ()^\dagger \equiv () : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t^\dagger)^\dagger \equiv t : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \parallel t_2^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \fatsemi t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \fatsemi t_2^\dagger : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{inl}\ t)^\dagger \equiv \mathrm{inl}\ t^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{inr}\ t)^\dagger \equiv \mathrm{inr}\ t^\dagger : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \times t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \times t_2^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mapsto t_2)^\dagger \equiv t_1^\dagger \mapsto t_2^\dagger : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{fold}_T\ t)^\dagger \equiv \mathrm{fold}_T\ t^\dagger : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t)^\dagger \equiv \mathrm{trace}_T\ t^\dagger : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \parallel t_2 \equiv t_1' \parallel t_2' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \fatsemi t_2 \equiv t_1' \fatsemi t_2' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{inl}\ t \equiv \mathrm{inl}\ t' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{inr}\ t \equiv \mathrm{inr}\ t' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \times t_2 \equiv t_1' \times t_2' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \mapsto t_2 \equiv t_1' \mapsto t_2' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{fold}_T\ t \equiv \mathrm{fold}_T\ t' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \equiv t' : T}{\Gamma \vdash \mathrm{trace}_T\ t \equiv \mathrm{trace}_T\ t' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \equiv t_1' : T \qquad \Gamma \vdash t_2 \equiv t_2' : T}{\Gamma \vdash t_1 \mathbin{@} t_2 \equiv t_1' \mathbin{@} t_2' : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \mapsto t_2) \mathbin{@} t \equiv (t_1 \rhd t)\ (t_2) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varnothing \mathbin{@} t \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (t_1 \parallel t_2) \mathbin{@} t \equiv (t_1 \mathbin{@} t) \parallel (t_2 \mathbin{@} t) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t \mathbin{@} \varnothing \equiv \varnothing : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (t_1 \parallel t_2) \equiv (t \mathbin{@} t_1) \parallel (t \mathbin{@} t_2) : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} \mathbin{@} t \equiv t : T} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t_1 \fatsemi t_2 \mathbin{@} t \equiv t_2 \mathbin{@} (t_1 \mathbin{@} t) : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \equiv \mathrm{inr}\ u' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \equiv u' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv \mathrm{inl}\ u' : T \qquad \Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \equiv u'' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv u'' : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inr}\ u) \equiv \mathrm{inl}\ u' : T \qquad \Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u') \equiv u'' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} u \equiv u'' : T} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv \mathrm{inr}\ u' : T}{\Gamma \vdash (\mathrm{trace}_T\ t) \mathbin{@} (\mathrm{inl}\ u) \equiv u' : T}$$

図 15　equality judgement

参考文献

[1] Peter Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 813, , 08 2009.

[2] Michael Barr. *-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 1, No. 2, p. 159–178, 1991.

[3] Samson Abramsky. No-cloning in categorical quantum mechanics. *Semantic Techniques in Quantum Computation*, 10 2009.

[4] G.M. Kelly and M.L. Laplaza. Coherence for compact closed categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 19, pp. 193–213, 1980.

[5] Stephen Lack. Non-canonical isomorphisms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 216, No. 3, pp. 593–597, 2012.

[6] Saunders MacLane. Duality for groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 56, No. 6, pp. 485–516, 1950.

[7] Miguel L. Laplaza. Coherence for distributivity. In G. M. Kelly, M. Laplaza, G. Lewis, and Saunders Mac Lane, editors, *Coherence in Categories*, pp. 29–65, Berlin, Heidelberg, 1972. Springer Berlin Heidelberg.