研究目的

任意種数のファイブレーション構造を持つ複素代数曲面の特異ファイバーの因子としての形, そこから決まる双対グラフ, および付随する格子構造などについて考察する.

本講演では, 種数 1 の場合, すなわち楕円曲面の特異ファイバーについて詳細な考察を述べる.

定義 (楕円曲線 elliptic curve)

体 K 上定義された楕円曲線 E/K とは $\mathbf{P}^1$ の相異なる 4 点で分岐した 2 重被覆で K 有理点をもつものである.

定理

複素数 $\mathbf{C}$ 上の E は $\mathbf{P}^1/K$ の非同次座標 x を上手くとれば

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in \mathbf{C})$$

で表される. すなわち $E/\mathbf{C}$ は $x^3 + ax + b = 0$ の相異なる 3 根と $x = \infty$ で分岐する 2 重被覆である.

以下, E を $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ の部分代数多様体と考える.

定義 (ファイブレーションと楕円曲面)

コンパクト非特異射影的代数曲面を S とする. S からコンパクト非特異射影的代数曲線 C への全射正則写像をファイブレーションと呼ぶ. S にファイブレーションが定義されるとき, S はファイバー構造 $f: S \to C$ をもつという.
$Q \in C$ の引き戻し $f^{-1}(Q)$ を, ファイバーと呼ぶ.
任意の $Q \in C$ に対し, $f^{-1}(Q)$ が代数曲線であり, S の生成ファイバーが曲線 C 上の関数体 K 上の楕円曲線 E/K と同型であるとき, S を E/K に付随する楕円曲面と定義する.
ファイバーが非特異楕円曲線でないとき, 特異ファイバーと呼ぶ.

仮定

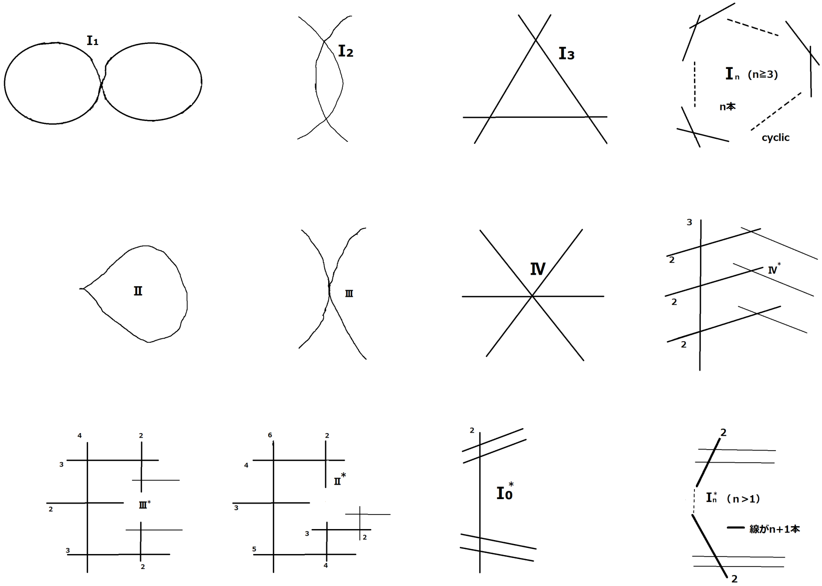
楕円曲面 S において, 特異ファイバーが 1 つ存在すると仮定する.

$Q \in C$ のファイバー $f^{-1}(Q)$ が特異ファイバーとし, 点 Q 周りの近傍を考える.

定理

楕円曲面の特異ファイバーは, 以下の 8 つのタイプに分類できる.

$$\mathrm{I_m}\ \ (\mathrm{m} \geqq 1), \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{I}^*, \mathrm{II}_\mathrm{b}^*\ \ (b \geqq 0), \mathrm{III}^*, \mathrm{IV}^*$$


I1
I2
I3
I n (n≧3)
n本
cyclic
II
III
IV
IV*
III*
II*
I0*
In* (n>1)
線がn+1本

Δ を複素数 $\mathbf{C}$ の原点の近傍とする. $f : X \to \Delta$ を楕円曲面, Δ 上の生成ファイバーを

$$y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$$

で与えられるものとする. ただし $a(t), b(t)$ $(t \in \Delta)$ は Δ 上の正則関数とする. このとき, 楕円曲面 X は, $\mathbf{P}^1 \times \Delta$ の 2 重被覆で与えられる.

この X の特異ファイバーを考えていく.
標準的特異点解消 (canonical resolution) の方法により, ファイバーを決定づける.

定義

$\mathbf{P}^1 \times \Delta$ 上

$$x^3 + a(t)x + b(t) = 0$$

で定義される因子を B とする． $x = \infty$ で定義される因子を Δ_∞ とする.

$B \cup \Delta_\infty$ は $\mathbf{P}^1 \times \Delta$ 上の 2 重被覆 X の分岐集合である.

定義

$\mathbf{P}^1 \times \Delta$ 上

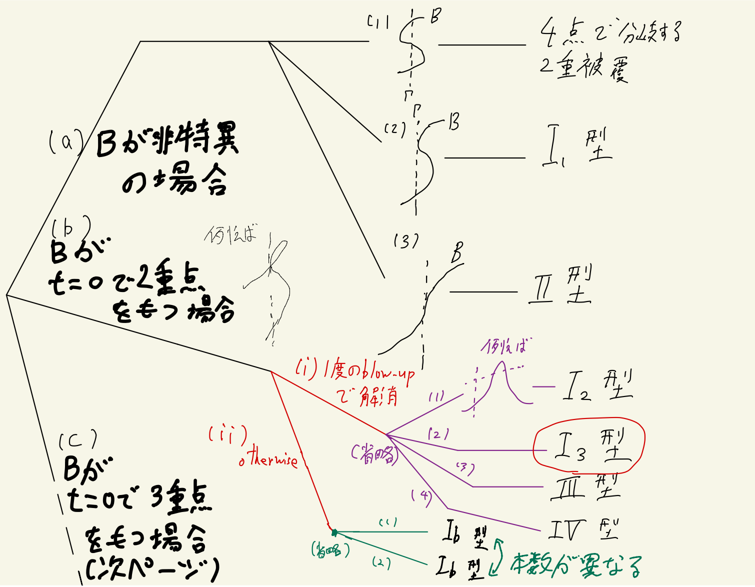
$$\Gamma = \{(x, t) \in \mathbf{P}^1 \times \Delta \mid t = 0\}$$

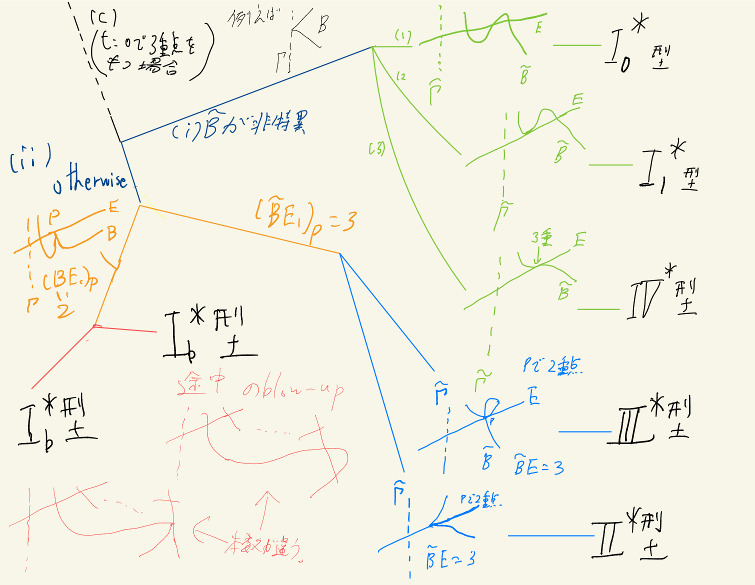
とする.

Remark

B が x の 3 次式なので, B と Γ が 3 点で交わる

B と Γ の交わり方によって分類して特異ファイバーを求める.


(a) Bが非特異の場合
(1) B
4点で分岐する2重被覆
(2) B
I_1 型
(3) B
II 型
(b) Bが t=0で2重点をもつ場合
例えば
(i) 1度のblow-upで解消
(1)
例えば
I_2 型
(2)
I_3 型
(3)
III 型
(4)
IV 型
(省略)
(ii) otherwise
(1)
I_b 型
(2)
I_b 型
(省略)
本数が異なる
(c) Bが t=0で 3重点をもつ場合 (次ページ)



(c) ($t=0$で3重点をもつ場合)
例えば: B
(i) $\tilde{B}$が非特異
(ii) otherwise
$(\tilde{B}E_1)_p=3$
$(BE_1)_p = 2$
(1) (2) (3)
I_0^*型
I_1^*型
IV^*型
3重
pで2重点
$\tilde{B}E=3$
III^*型
II^*型
I_b^*型
途中のblow-up
本数が違う

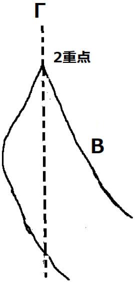
(例)$B : (x^2 - t^3)(x - 1) = 0$

ある点 P 中心のブローアップとは, P の座標近傍 U に対し, $\tilde{U}$ を対応させる写像のことである.

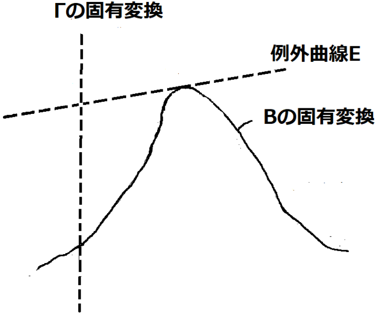
$$U \times \mathbf{P}^1 \supset \tilde{U} \to U\ ;\ (x, y) \times (\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (x, y)$$

$$\tilde{U} = \{(x, y) \times (\zeta_1, \zeta_2) \mid x\zeta_2 - \zeta_1 y = 0\}$$

- X に対し, 左下のブローアップで得られた代数多様体を Y とする.
- $\tilde{\Gamma}$ と $\tilde{B}$ の交点が 1 つであることは計算により確かめられる.



$\leftarrow$

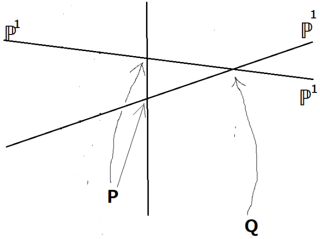


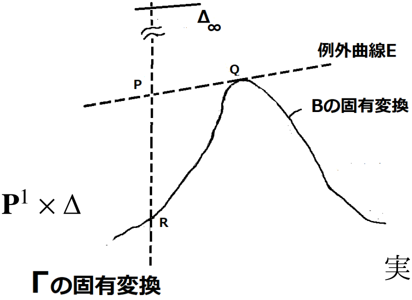
$$\begin{cases} x = x_1 t_1 \\ t = t_1 \end{cases}$$

ある座標近傍上…

$$t_1^2(x_1^2 - t_1)(x_1 t_1 - 1) = 0$$

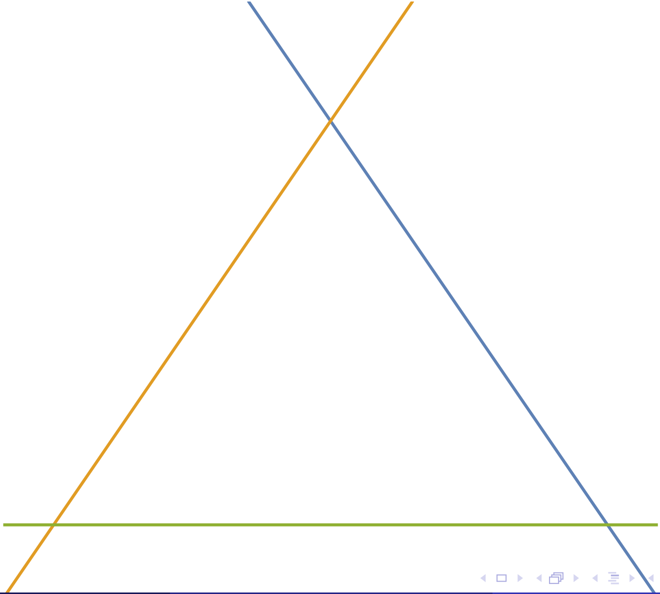
$t_1 = 0$ が例外曲線に相当する.





実線が, 分岐点である.

I_3型



今後の展望

1. 任意の種数をもちファイブレーションを構造を持つ複素代数曲面, ファイバータイプを分析する.
2. 上で得られた格子構造 (例えばグラム行列やディンキン図形) を分析する