# 楕円曲面および高種数ファイバー構造を持つ複素代数曲面の特異ファイバーの分類について

山下　雄大

東京理科大学大学院理工学研究科数学専攻　伊藤研究室

2021/2/10

## 研究目的

任意種数のファイブレーション構造を持つ複素代数曲面の特異ファイバーの因子としての形, そこから決まる双対グラフ, および付随する格子構造などについて考察する.

再掲

**定義 (ファイブレーション)**

コンパクト非特異射影代数曲面を $S$ とする. $S$ からコンパクト非特異射影代数曲線 $C$ への全射正則写像をファイブレーションと呼ぶ. $S$ にファイブレーションが定義されるとき, $S$ はファイバー構造 $f: S \to C$ をもつという.
点 $Q \in C$ の引き戻し $f^{-1}(Q)$ を, ファイバーと呼ぶ.

任意の $Q \in C$ に対し, $f^{-1}(Q)$ が代数曲線であり, $S$ の生成ファイバーが代数曲線 $C$ 上の関数体 $K$ 上の曲線 $C/K$ と同型であるファイブレーション $f: S \to C$ を定義する.
ファイバーが非特異な代数曲線でないとき, 特異ファイバーと呼ぶ.

まず, ある複素代数曲面で有限個のファイバーを除いて, 連続に変形する種数 $g$ の超楕円曲線から成る曲面を考える.
体 $K$ 上で $K$ 有理点と生成ファイバーが次数 2 の被覆写像を持ち, 種数が $g$ である代数曲線の組である代数多様体を考える.
1 例としては, 複素数 $\mathbf{C}$ 上で $\mathbf{P}^1$ の非同次座標 $x$ を上手くとれば

$$y^2 = x^{2g+1} + ax + b \quad (a, b \in \mathbf{C})$$

で表される.

## 定義 (局所交点数)

複素数体 $\mathbf{C}$ における非特異な射影代数曲面 $S$ 上の相異なる既約曲線 $C$, $C'$ に対し，　点 $P$ 上の局所方程式を各々 $f$,$g$ とし, 局所交点数を以下のように定義する.

$$(C,C')_p := \dim_k \mathcal{O}_{S,P}/(f,g)$$

注：$(C,C')_P$ を $CC'_P$ と書くこともある. $\mathcal{O}_{S,P}$ は *stalk* と呼ばれる.*stalk* は $\mathcal{O}_P$ とも記し,$P$ の近くの $X$ 上の正則関数の *germ* のなす集合と定義する.

## 定義 (交点数)

大域的には，交点数とは以下の通りに定義される.
相異なる既約曲線 $C$,$C'$ に対し,

$$(C,C') := \textstyle\sum_P (C,C')_P \text{ (有限和)}$$

$CC'$ のように書くこともある.

$C = C'$ のときの交点数を自己交点数と呼ぶ.

## 定義

$X$ が代数曲面, $P$ を $X$ の点, $U$ を $P$ の座標近傍, $(x, y)$ を $P$ を中心とする $U$ 上の局所座標であるとする.
特異点 $P$ の開近傍 $U$ に対して
このとき $\mathbf{P}^1$ の同次座標 $(\zeta_0, \zeta_1)$ として $U \times \mathbf{P}^1$ の部分多様体

$$\tilde{U} := \{(x, y) \times (\zeta_0, \zeta_1) \mid x\zeta_1 - \zeta_0 y = 0\}$$

を考え

$$\pi : \tilde{U} \to U \ ; \ (x, y) \times (\zeta_0, \zeta_1) \mapsto (x, y)$$

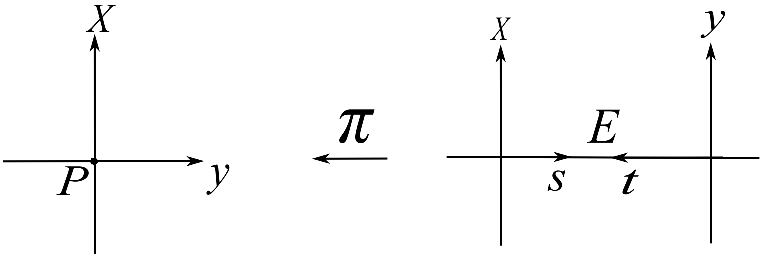
とすれば, これが $P$ を中心とする *blow-up* である.
$\mathbf{P}^1$ が 2 つの開集合 $\{\zeta_0 \neq 0\}, \{\zeta_1 \neq 0\}$ で覆われることに対応して $\tilde{U}$ は *2* つの開集合 $V_0, V_1$ で覆われる.$s = \zeta_1/\zeta_0$,$t = \zeta_0/\zeta_1$ とすれば

$$V_0 = \{(x, y, s) \in U \times \mathbf{C} | xs - y = 0\}$$

$$V_1 = \{(x, y, t) \in U \times \mathbf{C} | x - yt = 0\}$$

$V_0$ の $s \neq 0, V_1$ の $t \neq 0$ で $y - xs = 0, st = 1$ で変換しあう.
$X - U$ には恒等変換をするように写像を設定しなおして代数曲面 $X$ に以下の通り,blow-up を拡張する.

$$\pi : \tilde{X} \to X$$



## 定義

因子が非特異有理曲線であって, 自己交点数が $-1$ の因子を第一種例外因子 (第一種例外曲線) と定義する.

## 定義 (相対的極小モデル)

相対的極小モデル *(relatively minimal model)* とはコンパクト非特異射影代数曲面 $S$, コンパクト非特異射影代数曲線 $C$, ファイブレーション $S \to C$ で既約ファイバーが第一種例外因子を含まない複素代数曲面のことである.

非特異射影代数曲面を $S$ とする. また非特異射影代数曲線を $C$ とする. 曲面にファイバー構造 $f : S \to C$ が定義されるとし, 更に相対的極小が仮定されているとする.

**仮定**

曲面 $S$ において, 少なくとも特異ファイバーが 1 つ存在すると仮定する.

点 $Q \in C$ のファイバー $f^{-1}(Q)$ が特異ファイバーとし, 点 $Q$ の近傍を考える.
1 例として近傍での局所方程式が $y^2 = x^5 + t^a$ となる曲面を考える.

## 定理

$y^2 = x^5 + t^a$ は以下の様に, 不変量によって分類できる

| 不変量 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 行列式 | 5 | 1 | 5 | 16 | 5 | -1 | 5 | 1 |
| 既約因子の数 | 4 | 8 | 2 | 6 | 10 | 3 | 8 | 12 |

$$\Gamma = \{(x, t) \in \mathbf{P}^1 \times \Delta \mid t = 0\}$$

ある自然数 $a$ を用いて

$$0 = x^5 + t^a$$

で表される因子を $B$, $x = \infty$ で表せる因子を $\Delta_\infty$ と記す. 分岐集合を

$$B \cup \Delta_\infty$$

と表示できる.
blow-up の逆像を $\tilde{B}$ や $\tilde{E}_1$ のように表示する.
次数 2 の被覆写像を $\psi : S \to \mathbf{P}^1 \tilde{\times} \Delta$ とし, 特異点解消を
$\varphi : \mathbf{P}^1 \tilde{\times} \Delta \to \mathbf{P}^1 \times \Delta$ とする.
合成写像 $\psi \circ \varphi$ による $\Gamma$ の逆像 を考えれば既約因子表示が定まる.
アフィン 1 次元空間 $\mathbf{A}^1$ の原点の開近傍をとる. $\mathbf{P}^1 - \mathbf{A}^1 = \{\infty\}$ とし, 点 $\infty$ に当たる点の開近傍, 座標近傍と局所座標をとる. この 2 つの開集合上で, 固有変換を分析する必要がある.

合成写像を$\varphi$とする

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "2:1"', "\psi"] & & & \\
\widetilde{B\cup\Delta_\infty} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B\cup\Delta_\infty \\
\parallel & & & \parallel \\
\widetilde{X} & & & X \\
\bigcap & & & \bigcap \\
\widetilde{\mathbf{P}^1\times\Delta} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\text{blow-up}"'] & \cdots \arrow[r] & \mathbf{P}^1\times\Delta
\end{tikzcd}
$$

$$y^2 = x^5 + t^9$$

$y = 0$ とし

$$0 = x^5 + t^9$$

の分岐集合を考える. 1 回 blow-up したあと,

$$\uparrow \begin{cases} x = XT \\ t = T \end{cases}$$

$$0 = T^5(X^5 + T^4)$$

$y^2 = y'^2T^4$ とすれば, 結局 $0 = T(X^5 + T^4)$ を考えればいいことになる.

$$\uparrow \begin{cases} x = X' \\ t = X'T' \end{cases}$$

$$0 = X'^5 + X'^9T^9$$

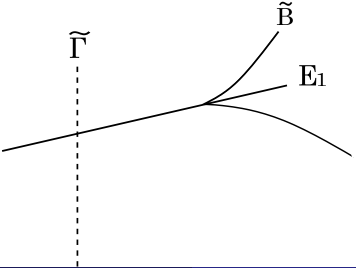
$$\Leftrightarrow 0 = X'^5(1 + X'^4T^9)$$

$(X', T') = (0, 0)$ は $\tilde{B}$ を通らない.

$\Gamma$ は blow-up によって $\tilde{\Gamma}$ に変換され, 新たな因子として例外因子 $E_1$ が導出する. $E_1$ の局所方程式は各開集合上 $T=0, X'=0$ で代表される.

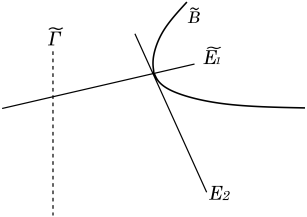
1 回目の blow-up 後

$$0 = X'^5(1 + X'^4T^9)$$
$$0 = T^5(X^5 + T^4)$$




(先掲)2 回目の blow-up 後

$$0 = X_1T_1({X_1}^5 + {X_1}^4{T_1}^4)$$
$$0 = {X_1}^5T_1(X_1 + {T_1}^4)$$



$$0 = T(X^5 + T^4)$$

$$\uparrow \left\{ \begin{aligned} X &= X_1 \\ T &= X_1 T_1 \end{aligned} \right.$$

$$0 = X_1 T_1 (X^5 + {X_1}^4 {T_1}^4)$$

$$0 = {X_1}^5 T_1 (X_1 + {T_1}^4)$$

$$\tilde{\Gamma} + \tilde{E}_1 + E_2$$

$\tilde{\Gamma}$ の blow-up の逆像として, $\tilde{\Gamma}$, $E_1$ から $\tilde{E}_1$, $E_2$ が導出する.

$$0 = X_1 T_1 (X_1^5 + T_1^4)$$

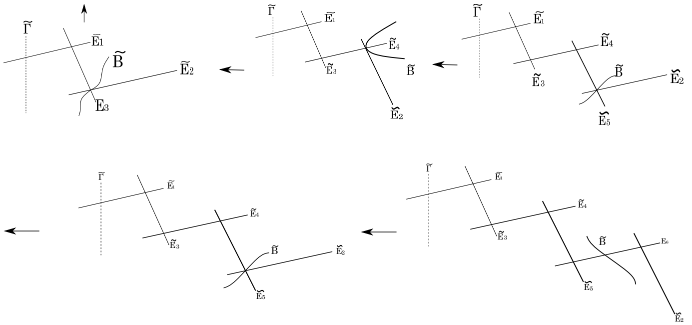
$$\uparrow \left\{ \begin{aligned} X_1 &= XT \\ T_1 &= T \end{aligned} \right.$$

$$0 = XT^2(XT + T^4)$$

$$0 = XT^3(X + T^3)$$

$$\tilde{\Gamma} + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + 2E_3$$

$\tilde{\Gamma}$ の blow-up の逆像として, $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{E}_1$ から $\tilde{E}_1, E_3$, $E_2$ から $\tilde{E}_2, E_3$ が導出する.
このように残りの方の開集合の様子を含め, 帰納的に推論できる.
以降, 図でもって説明をする.



$$\tilde{\Gamma} + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + 2E_3$$

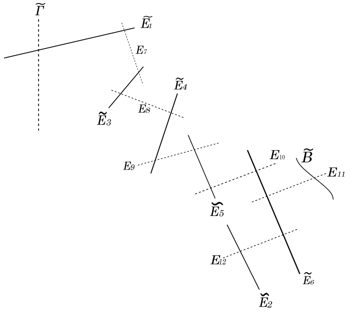
前スライドの右下の図の因子は

$$\tilde{\Gamma} + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + 2\tilde{E}_3 + 3\tilde{E}_4 + 4\tilde{E}_5 + 5E_6$$

全て解消した後

$$\vdots$$

$$\uparrow$$



$$\tilde{\Gamma}+\tilde{E}_1+\tilde{E}_2+2\tilde{E}_3+3\tilde{E}_4+4\tilde{E}_5+5\tilde{E}_6+3E_7+5E_8+8E_9+9E_{10}+4E_{11}+5E_{12}$$

$E_7$ は $\tilde{E}_1$ と $\tilde{E}_3$, $E_8$ は $\tilde{E}_3$ と $\tilde{E}_4$, $E_9$ は $\tilde{E}_4$ と $\tilde{E}_6$,
$E_{10}$ は $\tilde{E}_6$ と $\tilde{E}_5$, $E_{11}$ は $\tilde{E}_5$, $E_{12}$ は $\tilde{E}_5$ と $\tilde{E}_2$ から導出する.
被覆側 (「上」側）では,

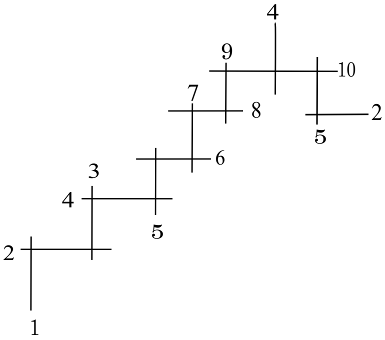
$$C_0+2C_1+2C_2+4C_3+6C_4+8C_5+10C_6+3C_7+5C_8+8C_9+9C_{10}+4C_{11}+5C_{12}$$

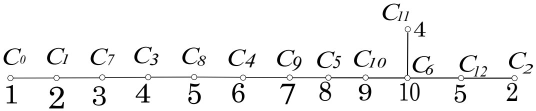
$E_i$ の被覆,「上」にある因子は 1 つずつで $C_i$ とすると, 破線部分は全て $-2$,$C_2$ は,
$(2C_2)^2 = 2(-1-1-1-1-1-1) \Leftrightarrow C_2^2 = -3$ である. 残りは, 全て $C_i^2 = -2, (i = 0, 1, 3, 4, 5, 6)$ 例えば,$E_6$ は導出時の 1 回の blow-up, 3 回の横断的に交わっている部分の blow-up,

$$(10C_7)^2 = 2(-25-25-25-25) \quad \Leftrightarrow {C_7}^2 = -2$$

グラム行列の行列式 (det) は 1

$$\begin{pmatrix} C_1C_1 & C_1C_2 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & C_iC_j & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$


4
9
10
7
8
2
5
6
3
4
5
2
1

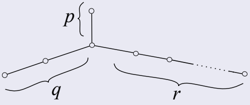

C11 4
C0 C1 C7 C3 C8 C4 C9 C5 C10 C6 C12 C2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 5 2

## 定理

種数 $g$ に対して,

$$y^2 = x^{2g+1} + t^{2(2g+1)-1}$$

のグラム行列の行列式は 1 で双対グラフは以下の通りである.




$(p, q, r)=(1, 2, x)\ |x>1$

(簡易な説明) 一度 blow-up すると

$$\uparrow \begin{cases} x = XT \\ t = T \end{cases}$$

$$0 = X^{2g+1}T^{2g+1} + T^{2(2g+1)-1}$$

$$0 = T^{2g+1}(X^{2g+1} + T^{2g})$$

もう一度 blow-up すると

$$0 = T^{2g+1}(X^{2g+1} + T^{2g})$$

$$\uparrow \left\{ \begin{array}{rl} X &= X \\ T &= XT \end{array} \right.$$

$$0 = XT(X^{2g+1} + X^{2g}T^{2g})$$

$$0 = X^{2g+1}T(X + T^{2g})$$

$$0 = XT(X + T^{2g})$$

$$\uparrow \left\{ \begin{array}{rl} X &= XT \\ T &= T \end{array} \right.$$

より,

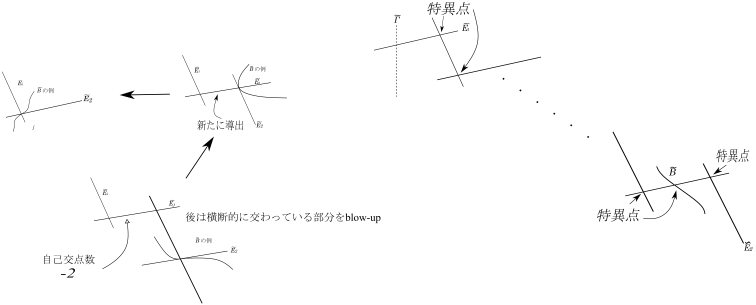
$$0 = XT(X + T^{2g-1})$$

帰納的に,

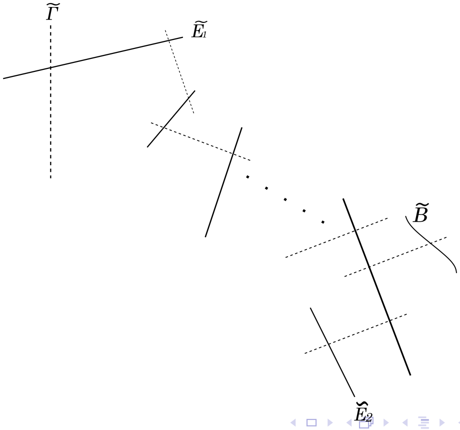
$$0 = XT(X + T)$$

となる.

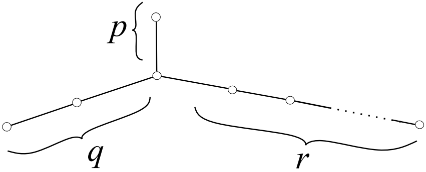
ここまでで注意しなければならない因子は,2 回目の blow-up で導出した $E_2$, もしくは $\tilde{E}_2$ であり, しばらく $\tilde{B}$ に図形的にいって「くっついて」変換されることが代数的演算で確かめられている. 感覚的に言って 3 回目の blow-up での $\tilde{B}$ は $\tilde{E}_1$ から離れる.
横断的に交わっている特異点は, blow-up の数は $2g+2$ 個で $\tilde{\Gamma}$ と交差しているところは破線と交差しているところだから 1 引く, ただ $\tilde{B}$ と横断的に交差しているところも blow-up するのだから 1 足して結局 $2g+2$ 個の破線, つまり 例外曲線が新たに blow-up で導出する.



実線の有理曲線に相当するのは blow-up の回数に対応し $2g+2$ 個
総計 $4g+4$ 本の有理曲線が導出する.
自己交点数は破線部分は全て $-2$ である.
$C_2$ に相当するもの以外の実線の被覆のファイバーの自己交点数は, $-2$ である.



$C_2$ に相当するものは, $(2C_2)^2 = 2(-1-2g-1) \Leftrightarrow (C_2)^2 = -g-1$
これは前章や前節の $g=1$ や $g=2$ の場合と合致する.
$a$ が $2(2g+1)-1$ に相当する行列の行列式は,1 でユニモジュラー行列となる.
これを証明するには多少の手間がかかる. まずグラム行列のサイズは,$4g+4$ である.
$A_r$ 型のグラム行列の求め方と似ている.




$(p, q, r)=(1, 2, x)\ |x>1$

双対グラフから適当に既約因子に順序付けをする.
そして以下の様にグラム行列を表示できる.

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
0 & -g-1 & 1 & 0 & & & & \text{\Large 0} & & & \\
0 & 1 & -2 & 1 & & & & & & & \\
1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & -2 & 1 & \vdots & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 1 & -2 & 1 \\
 & & \text{\Large 0} & & & & & & \cdots & 1 & -2
\end{pmatrix}
$$

次の様にブロック分けをする.

$$
\left(
\begin{array}{ccccccccccc}
\cline{1-4}
\multicolumn{1}{|c}{-2} & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} & & & & & & & \\
\multicolumn{1}{|c}{0} & -g-1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{0} & & & & \text{\huge 0} & & & \\
\multicolumn{1}{|c}{0} & 1 & -2 & \multicolumn{1}{c|}{1} & & & & & & & \\
\multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{-2} & 1 & 0 & & & & & \\
\cline{1-4}
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & -2 & 1 & \vdots & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 1 & -2 & 1 \\
 & & \text{\huge 0} & & & & & & \cdots & 1 & -2
\end{array}
\right)
$$

左上のブロック以外で下三角行列に変形する.

すると右下隅から上 1 行左 1 列分上の成分は $-\frac{3}{2}$, もう上 1 行左 1 列分上の成分は $-\frac{4}{3}$, これを続けていくと対角成分が右下から 1 番目, 2 番目,$\cdots$ と番号付けをすると $4g+1$ 番目で

$$-\left(\frac{4g+2}{4g+1}\right)$$

と変形できる.

さらに最初の行列は右下の隅から余因子展開をする. もちろん右下のブロック部分は 1 列中 1 つの成分以外 0 だから計算は楽である.
ここまで変形してしまえば, 元々の行列の対角成分の一部の積は,

$$(-\frac{2}{1})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{4g+1}{4g}) = 4g+1$$

因数 (項) の数は $4g$ 個より, 値は正.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\dfrac{4g+3}{2(4g+1)} \end{pmatrix}$$

計算すると行列式は 1

## 今後の展望

より一般的で, ファイバー構造を持つ複素代数曲面, の特異ファイバーの因子を分析する. 上で得られた因子のグラム行列や双対グラフを分析する.

参考文献


1. Robin Hartshorne, ”Algebraic Geometry”,GTM, vol.52, Springer, New York-Heidelberg, 1977
2. 堀川穎二,”複素代数幾何学入門”, 岩波書店,2015
3. Kunihiko Kodaira , ”On Compact Analytic Surfaces:II”,Ann.of Math.77,563-624, 1963
4. Yukihiro Namikawa, Kenji Ueno , ”The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two”,Manuscripta.Math.9, 143-186, 1973
5. Matthias Schutt,Tetsuji Shioda:”Mordell–Weil Lattices”,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge, Springer,2019
6. 山本芳彦, ”数論入門”, 岩波書店, 1996