Tests d'hypothèses

Un test est un mécanisme qui permet de prendre une décision entre généralement deux hypothèses au vu des résultats obtenus à partir d'un échantillon.

Tests d'hypothèses

Un test est un mécanisme qui permet de prendre une décision entre généralement deux hypothèses au vu des résultats obtenus à partir d'un échantillon. Ces hypothèses sont notées H_0 appelée **hypothèse nulle** et H_1 appelée **hypothèse alternative**, dont une seulement est vraie.

Tests d'hypothèses

Un test est un mécanisme qui permet de prendre une décision entre généralement deux hypothèses au vu des résultats obtenus à partir d'un échantillon. Ces hypothèses sont notées H_0 appelée **hypothèse nulle** et H_1 appelée **hypothèse alternative**, dont une seulement est vraie. La décision aboutira à choisir H_0 ou H_1.

Tests d'hypothèses

Un test est un mécanisme qui permet de prendre une décision entre généralement deux hypothèses au vu des résultats obtenus à partir d'un échantillon. Ces hypothèses sont notées H_0 appelée **hypothèse nulle** et H_1 appelée **hypothèse alternative**, dont une seulement est vraie. La décision aboutira à choisir H_0 ou H_1.

Réalité / Décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
Accepter H_0	**Vrai positif (VP)**	Faux positif (FP)
Rejeter H_0	Faux négatif (FN)	**Vrai négatif (VN)**

VN et VP sont des "bonnes décisions".

Tests d'hypothèses

Un test est un mécanisme qui permet de prendre une décision entre généralement deux hypothèses au vu des résultats obtenus à partir d'un échantillon. Ces hypothèses sont notées H_0 appelée **hypothèse nulle** et H_1 appelée **hypothèse alternative**, dont une seulement est vraie. La décision aboutira à choisir H_0 ou H_1.

Réalité / Décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
Accepter H_0	**Vrai positif (VP)**	Faux positif (FP)
Rejeter H_0	Faux négatif (FN)	**Vrai négatif (VN)**

VN et VP sont des "bonnes décisions". FN est dite **erreur de première espèce** pour lequel on associe un risque lié à la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie noté α,

Tests d'hypothèses

Un test est un mécanisme qui permet de prendre une décision entre généralement deux hypothèses au vu des résultats obtenus à partir d'un échantillon. Ces hypothèses sont notées H_0 appelée **hypothèse nulle** et H_1 appelée **hypothèse alternative**, dont une seulement est vraie. La décision aboutira à choisir H_0 ou H_1.

Réalité / Décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
Accepter H_0	**Vrai positif (VP)**	Faux positif (FP)
Rejeter H_0	Faux négatif (FN)	**Vrai négatif (VN)**

VN et VP sont des "bonnes décisions". FN est dite **erreur de première espèce** pour lequel on associe un risque lié à la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie noté α, et FP est dite **erreur de deuxième espèce** pour lequel on associe un risque lié à la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse noté β.

Tests d'hypothèses

Les probabilités correspondantes sont résumées dans le tableau suivant

Les probabilités correspondantes sont résumées dans le tableau suivant

Réalité / Décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
Accepter H_0	$1-\alpha$	β
Rejeter H_0	α	$1-\beta$

Souvent on prend $\alpha = 5\%$ (on peut aussi prendre 1% ou même 10%) et il est habituel de prendre 20% pour β.
La probabilité α est appelée **niveau ou seuil** du test,

Tests d'hypothèses

Les probabilités correspondantes sont résumées dans le tableau suivant

Réalité Décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
Accepter H_0	$1-\alpha$	β
Rejeter H_0	α	$1-\beta$

Souvent on prend $\alpha = 5\%$ (on peut aussi prendre 1% ou même 10%) et il est habituel de prendre 20% pour β.
La probabilité α est appelée **niveau ou seuil** du test, alors que $1-\beta$ est appelée **puissance** du test.

α étant fixé, il importe de choisir une variable de décision : variable qui doit apporter le maximum d'informations sur le problème posé et dont la loi sera différente selon que H_0 ou H_1 est vraie.

α étant fixé, il importe de choisir une variable de décision : variable qui doit apporter le maximum d'informations sur le problème posé et dont la loi sera différente selon que H_0 ou H_1 est vraie. Il faut que sa loi soit entièrement connue au moins si H_0 est vraie.

α étant fixé, il importe de choisir une variable de décision : variable qui doit apporter le maximum d'informations sur le problème posé et dont la loi sera différente selon que H_0 ou H_1 est vraie. Il faut que sa loi soit entièrement connue au moins si H_0 est vraie.
On appelle **région critique** W **l'ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à écarter** H_0 **au profit de** H_1.

α étant fixé, il importe de choisir une variable de décision : variable qui doit apporter le maximum d'informations sur le problème posé et dont la loi sera différente selon que H_0 ou H_1 est vraie. Il faut que sa loi soit entièrement connue au moins si H_0 est vraie.
On appelle **région critique** W **l'ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à écarter** H_0 **au profit de** H_1. La forme de la région critique est déterminée par la nature de H_1, sa détermination exacte est donnée par $\mathbb{P}\left(W / H_0\right) = \alpha$.

α étant fixé, il importe de choisir une variable de décision : variable qui doit apporter le maximum d'informations sur le problème posé et dont la loi sera différente selon que H_0 ou H_1 est vraie. Il faut que sa loi soit entièrement connue au moins si H_0 est vraie.
On appelle **région critique W l'ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à écarter H_0 au profit de** H_1. La forme de la région critique est déterminée par la nature de H_1, sa détermination exacte est donnée par $\mathbb{P}\left(W/\ H_0\right) = \alpha$.
La région d'acceptation est alors sont complémentaire $\overline{W}$, alors

$$\mathbb{P}\left(\overline{W}/\ H_0\right) = 1 - \alpha \text{ et } \mathbb{P}\left(W/\ H_1\right) = 1 - \beta.$$

α étant fixé, il importe de choisir une variable de décision : variable qui doit apporter le maximum d'informations sur le problème posé et dont la loi sera différente selon que H_0 ou H_1 est vraie. Il faut que sa loi soit entièrement connue au moins si H_0 est vraie.

On appelle **région critique** W **l'ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à écarter** H_0 **au profit de** H_1. La forme de la région critique est déterminée par la nature de H_1, sa détermination exacte est donnée par $\mathbb{P}\left(W/\,H_0\right)=\alpha$.

La région d'acceptation est alors sont complémentaire $\overline{W}$, alors

$$\mathbb{P}\left(\overline{W}/\,H_0\right)=1-\alpha \text{ et } \mathbb{P}\left(W/\,H_1\right)=1-\beta.$$

La construction d'un test n'est rien d'autre que la détermination de la région critique.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.
2. Détermination de la variable de décision.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de H_1.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de H_1.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de H_1.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul éventuelle de la puissance du test $1-\beta$.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de H_1.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul éventuelle de la puissance du test $1-\beta$.
6. Calcul de valeur expérimentale de la variable de décision.

Pour résumer la démarche d'un test est comme suit

1. Choix de H_0 et H_1.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de H_1.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul éventuelle de la puissance du test $1-\beta$.
6. Calcul de valeur expérimentale de la variable de décision.
7. Conclusion : rejet ou acceptation de H_0.

Nous classons les tests selon les objectifs recherchés (Indépendance, ajustement, conformité et homogénéité,...) et aussi selon leurs propriétés mathématiques (paramétriques ou non, tests robustes ou test libres).

Nous classons les tests selon les objectifs recherchés (Indépendance, ajustement, conformité et homogénéité,...) et aussi selon leurs propriétés mathématiques (paramétriques ou non, tests robustes ou test libres).
Un test est dit paramétrique s'il repose sur une hypothèse relative à un ou plusieurs paramètres d'une variable aléatoire suivant une loi spécifique. De nombreux tests paramétriques supposent que la variable aléatoire suit une loi normale.

Nous classons les tests selon les objectifs recherchés (Indépendance, ajustement, conformité et homogénéité,...) et aussi selon leurs propriétés mathématiques (paramétriques ou non, tests robustes ou test libres).
Un test est dit paramétrique s'il repose sur une hypothèse relative à un ou plusieurs paramètres d'une variable aléatoire suivant une loi spécifique. De nombreux tests paramétriques supposent que la variable aléatoire suit une loi normale. Si les résultats restent valables lorsque X n'est pas normale on dit que le test est **robuste**.

Une catégorie particulièrement intéressante de tests robustes est celle des tests **libres de distribution** (**distribution-free**), c'est-à-dire des tests dont la validité ne dépend pas de l'hypothèse d'une loi spécifique pour la variable aléatoire étudiée.

Une catégorie particulièrement intéressante de tests robustes est celle des tests **libres de distribution** (**distribution-free**), c'est-à-dire des tests dont la validité ne dépend pas de l'hypothèse d'une loi spécifique pour la variable aléatoire étudiée. Ils sont particulièrement utiles lorsque la distribution sous-jacente est inconnue, ce qui est fréquent en pratique.

Une catégorie particulièrement intéressante de tests robustes est celle des tests **libres de distribution** (**distribution-free**), c'est-à-dire des tests dont la validité ne dépend pas de l'hypothèse d'une loi spécifique pour la variable aléatoire étudiée. Ils sont particulièrement utiles lorsque la distribution sous-jacente est inconnue, ce qui est fréquent en pratique. Ces tests sont généralement appelés tests non paramétriques, bien que tous les tests non paramétriques ne soient pas nécessairement libres de distribution.

Pour les tests paramétriques on distigue généralement des hypothèses simples et des hypothèses composites:

Pour les tests paramétriques on distigue généralement des hypothèses simples et des hypothèses composites:

- Une hypothèse simple est du type $H : \theta = \theta_0$ ou θ_0 est une valeur isolée du paramètre;

Pour les tests paramétriques on distigue généralement des hypothèses simples et des hypothèses composites:

- Une hypothèse simple est du type $H : \theta = \theta_0$ ou θ_0 est une valeur isolée du paramètre;
- Une hypothèse composite est du type $H : \theta \in A$ ou A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour les tests paramétriques on distigue généralement des hypothèses simples et des hypothèses composites:

- Une hypothèse simple est du type $H : \theta = \theta_0$ ou θ_0 est une valeur isolée du paramètre;
- Une hypothèse composite est du type $H : \theta \in A$ ou A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

La plus part des hypothèses composites se ramènent aux cas $\theta \neq \theta_0$ (test bilatéral) ou $\theta > \theta_0$ (test unilatéral 1) ou $\theta < \theta_0$ (test unilatéral 2).

Ce test permet de contrôler l'indépendance de deux caractères dans une population donnée.

Ce test permet de contrôler l'indépendance de deux caractères dans une population donnée.
On dispose de deux v.a. X et Y, les valeurs possibles de X sont réparties en l modalités ou classes $(X_1, \cdots, X_l)$, celles de Y sont réparties en k modalités $(Y_1, \cdots, Y_k)$. On désire tester l'hypothèse H_0:"Les variables X et Y sont indépendantes".

Ce test permet de contrôler l'indépendance de deux caractères dans une population donnée.
On dispose de deux v.a. X et Y, les valeurs possibles de X sont réparties en l modalités ou classes $(X_1, \cdots, X_l)$, celles de Y sont réparties en k modalités $(Y_1, \cdots, Y_k)$. On désire tester l'hypothèse H_0:"Les variables X et Y sont indépendantes".
Pour cela on contruit le tableau de contingence correspondant, puis on calcule les effectifs théoriques

Ce test permet de contrôler l'indépendance de deux caractères dans une population donnée.
On dispose de deux v.a. X et Y, les valeurs possibles de X sont réparties en l modalités ou classes $(X_1, \cdots, X_l)$, celles de Y sont réparties en k modalités $(Y_1, \cdots, Y_k)$. On désire tester l'hypothèse H_0:"Les variables X et Y sont indépendantes".
Pour cela on contruit le tableau de contingence correspondant, puis on calcule les effectifs théoriques

$$C_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}. \text{ Il faut que } C_{ij} \geq 5 \text{ pour tout } i, j.$$

Sous l'hypothèse H_0, on a $C_{ij} = n_{ij}$. On calcule la valeur de la variable

Sous l'hypothèse H_0, on a $C_{ij} = n_{ij}$. On calcule la valeur de la variable

$$\sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - C_{ij}\right)^2}{C_{ij}} = \chi_c^2 \rightsquigarrow \chi^2(\nu) \text{ où } \nu = (l-1) \times (k-1).$$

On cherche la valeur critique χ_α^2 dans la table de la loi du $Khi2$ à ν degrés de liberté.

Sous l'hypothèse H_0, on a $C_{ij} = n_{ij}$. On calcule la valeur de la variable

$$\sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - C_{ij}\right)^2}{C_{ij}} = \chi^2_c \rightsquigarrow \chi^2\left(\nu\right) \text{ où } \nu = \left(l-1\right) \times \left(k-1\right).$$

On cherche la valeur critique χ^2_α dans la table de la loi du $Khi2$ à ν degrés de liberté.
Décision : si $\chi^2_c < \chi^2_\alpha$, on accepte l'hypothèse H_0, sinon on la rejette.

Example

On désire comparer l'efficacité de deux médicaments ayant des prix différents, pour cela la sécurité sociale a effectué une enquête sur les guérisons obtenues. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	Médicament	Générique
Guéris	48	158
Non guéris	6	44

Soit r le coefficient de corrélation linéaire d'un échantillon composé de n couples d'observations de deux caractères extrait de population gaussienne. On désire tester

$$H_0 : \rho = 0 \text{ (corrélation nulle entre les deux caractères)}$$

au risque α.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire d'un échantillon composé de n couples d'observations de deux caractères extrait de population gaussienne. On désire tester

$$H_0 : \rho = 0 \text{ (corrélation nulle entre les deux caractères)}$$

au risque α.
Sous H_0 la v.a.

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}} \rightsquigarrow \mathcal{T}\left(\nu = n-2\right).$$

On calculera

$$t_c = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

On calculera

$$t_c = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

puis on déterminera t_α ou $t_{\frac{\alpha}{2}}$ de la table de la loi de students à $\nu = n - 2$ degrés de liberté et on adoptera la règle de décision suivante :

On calculera

$$t_c = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

puis on déterminera t_α ou $t_{\frac{\alpha}{2}}$ de la table de la loi de students à $\nu = n-2$ degrés de liberté et on adoptera la règle de décision suivante :

- Si $H_1 : \rho \neq 0$ (cas bilatéral) : rejet de H_0 au risque α si $t_c \notin \left]-t_{\frac{\alpha}{2}} ; t_{\frac{\alpha}{2}}\right[$;

On calculera

$$t_c = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

puis on déterminera t_α ou $t_{\frac{\alpha}{2}}$ de la table de la loi de students à $\nu = n-2$ degrés de liberté et on adoptera la règle de décision suivante :

- Si $H_1 : \rho \neq 0$ (cas bilatéral) : rejet de H_0 au risque α si $t_c \notin \left]-t_{\frac{\alpha}{2}} ; t_{\frac{\alpha}{2}}\right[$;
- Si $H_1 : \rho > 0$ (cas unilatéral 1) : rejet de H_0 au risque α si $t_c > t_\alpha$;

On calculera

$$t_c = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

puis on déterminera t_α ou $t_{\frac{\alpha}{2}}$ de la table de la loi de students à $\nu = n-2$ degrés de liberté et on adoptera la règle de décision suivante :

- Si $H_1 : \rho \neq 0$ (cas bilatéral) : rejet de H_0 au risque α si $t_c \notin \left]-t_{\frac{\alpha}{2}}; t_{\frac{\alpha}{2}}\right[$;
- Si $H_1 : \rho > 0$ (cas unilatéral 1) : rejet de H_0 au risque α si $t_c > t_\alpha$;
- Si $H_1 : \rho < 0$ (cas unilatéral 2) : rejet de H_0 au risque α si $t_c < -t_\alpha$.

On utilise le test pour des variables X et Y dont les lois sont quelconques.

On utilise le test pour des variables X et Y dont les lois sont quelconques.

Procédure :

On utilise le test pour des variables X et Y dont les lois sont quelconques.

Procédure :

- On range par ordre croissant, séparément, les valeurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ et $\{y_1, \cdots, y_n\}$.

On utilise le test pour des variables X et Y dont les lois sont quelconques.

Procédure :

- On range par ordre croissant, séparément, les valeurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ et $\{y_1, \cdots, y_n\}$.
- On remplace chaque valeur x_i par son rang x_i' et chaque valeur y_i par son rang y_i'. S'il y'a des valeurs ex-aequo on attribue à chacun un rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent.

On utilise le test pour des variables X et Y dont les lois sont quelconques.

Procédure :

- On range par ordre croissant, séparément, les valeurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ et $\{y_1, \cdots, y_n\}$.
- On remplace chaque valeur x_i par son rang x_i' et chaque valeur y_i par son rang y_i'. S'il y'a des valeurs ex-aequo on attribue à chacun un rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent.
- On calcule le nombre $r_S = 1 - \frac{6\sum(x_i' - y_i')^2}{n(n^2-1)}$ à partir des couples des rangs.

Décision:

Décision:

1. Si $n \leq 13$.

Décision:

1. Si $n \leq 13$.
   Pour un risque α on détermine la valeur de r_α telle $P\left(|R_S| > r_\alpha\right) = \alpha$ lue dans la table de Spearman.

Décision:

1. Si $n \leq 13$.
   Pour un risque α on détermine la valeur de r_α telle $P\left(|R_S| > r_\alpha\right) = \alpha$ lue dans la table de Spearman.
   - Si $|r_S| > r_\alpha$ on rejette H_0 avec un risque α de se tromper.
2. Si $n > 13$.

Décision:

1. Si $n \leq 13$.
   Pour un risque α on détermine la valeur de r_α telle $P\left(|R_S| > r_\alpha\right) = \alpha$ lue dans la table de Spearman.
   - Si $|r_S| > r_\alpha$ on rejette H_0 avec un risque α de se tromper.
2. Si $n > 13$.
   Dans ce cas si H_0 est vraie, la statistique $T = \frac{R_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_s^2}}$ suit approximativement la loi de Student à $n-2$ ddl.

Décision:

1. Si $n \leq 13$.
   Pour un risque α on détermine la valeur de r_α telle $P\left(|R_S| > r_\alpha\right) = \alpha$ lue dans la table de Spearman.
   - Si $|r_S| > r_\alpha$ on rejette H_0 avec un risque α de se tromper.
2. Si $n > 13$.
   Dans ce cas si H_0 est vraie, la statistique $T = \frac{R_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_s^2}}$ suit approximativement la loi de Student à $n-2$ ddl. La décision se fera à l'aide la table du coefficient de corrélation linéaire qui donne la valeur de r_α telle que $P\left(|R_S| > r_\alpha\right) = \alpha$.

Example

Un traitement prolongé par un médicament (durée X en jours) peut provoquer une diminution Y du nombre de plaquettes sanguines (dans 10^{-4} ml). On dispose des observations suivantes :

X	2	4	10	10	10	14	14	18	18	20
Y	25	20	10	25	25	10	15	5	15	5

La baisse du nombre de plaquettes est-il lié à la durée du traitement :

1. En supposant les populations gaussiennes ?
2. Sans rien connaître des populations ?