Chapitre 8 : Heuristiques d'amélioration locale et métaheuristiques

INF4705 - Analyse et conception d'algorithmes

Gilles Pesant Simon Brockbank

École Polytechnique Montréal
gilles.pesant@polymtl.ca, simon.brockbank@polymtl.ca

Hiver 2017

Plan

Introduction

Catégories d'algorithme d'optimisation

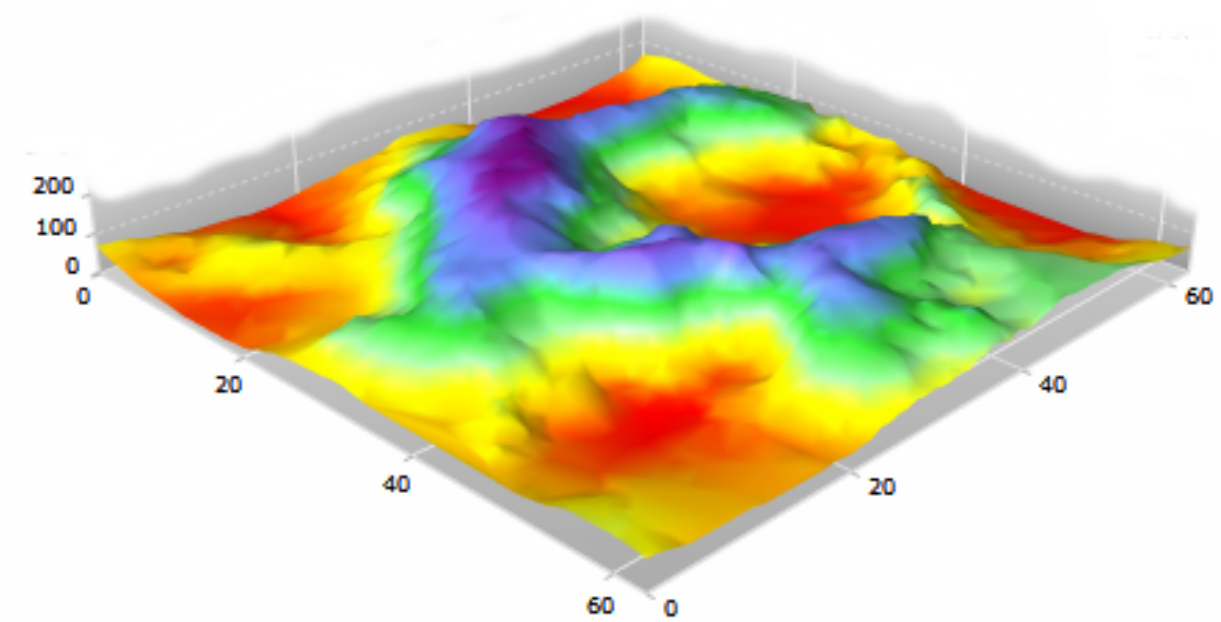
- exact
- approximatif
- heuristique

Plan

Heuristiques d'amélioration locale

Constat

L'espace des solutions est trop vaste pour être exploré en entier.

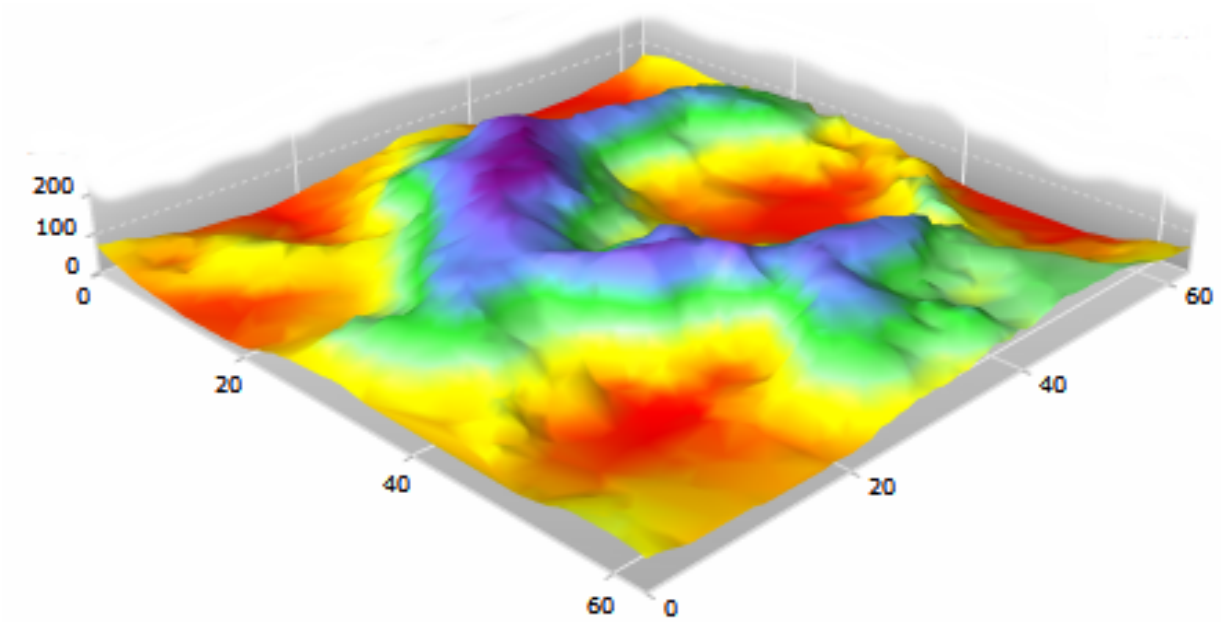


source : ©2016. Nevron Software LLC.

Heuristiques d'amélioration locale

Observation / Hypothèse de travail

Des solutions "voisines" ont des valeurs "voisines".

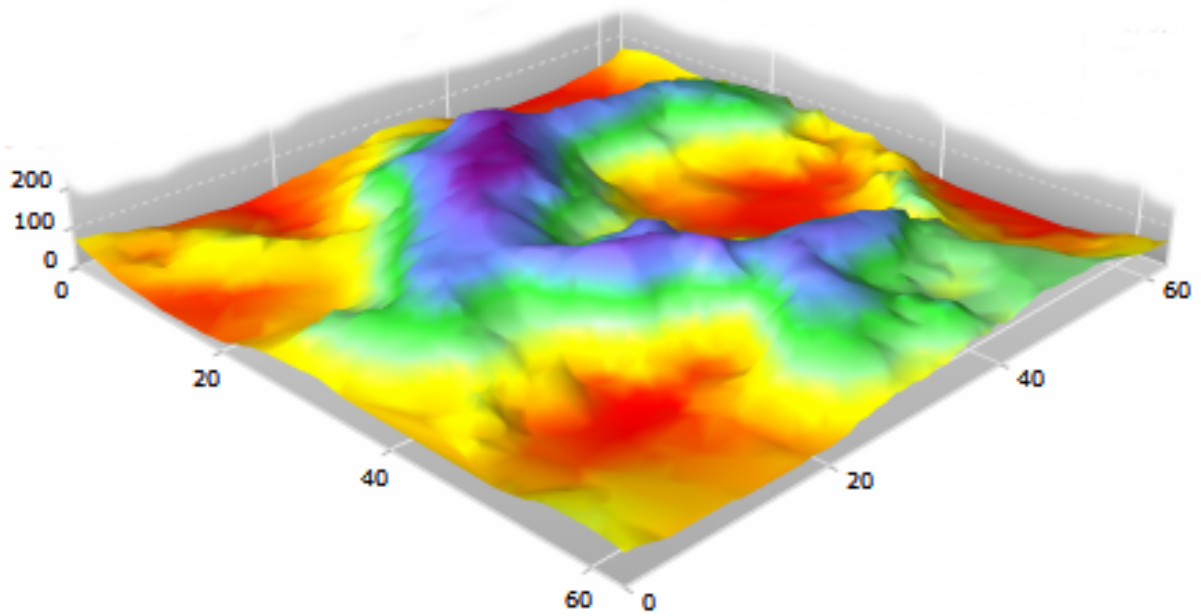


source : ©2016. Nevron Software LLC.

Heuristiques d'amélioration locale

Principe général

À partir d'une solution initiale s_0, appliquer une succession d'améliorations locales afin d'arriver à une meilleure solution s_t (selon une fonction d'évaluation f) après t itérations.



source : ©2016. Nevron Software LLC.

Heuristiques d'amélioration locale

Patron de conception

Démarrer avec une certaine solution s_0 ;
$i \leftarrow 0$;
tant que $\exists\, s \in V_{s_i}$ telle que $f(s) > f(s_i)$
    $i \leftarrow i + 1$;
    $s_i \leftarrow s$;
retourner s_i ;

Décisions de conception

- Définir le voisinage V_s d'une solution s,
  qui définit les améliorations locales à considérer.
- Est-ce qu'on choisit le meilleur voisin
  ou le premier voisin améliorant ?

Heuristiques d'amélioration locale

Avantages

- Mise en oeuvre facile
- Consommation de ressources moins sensible à la taille de l'exemplaire
- Algorithme "anytime" : à tout moment, on peut retourner une solution (s_i)

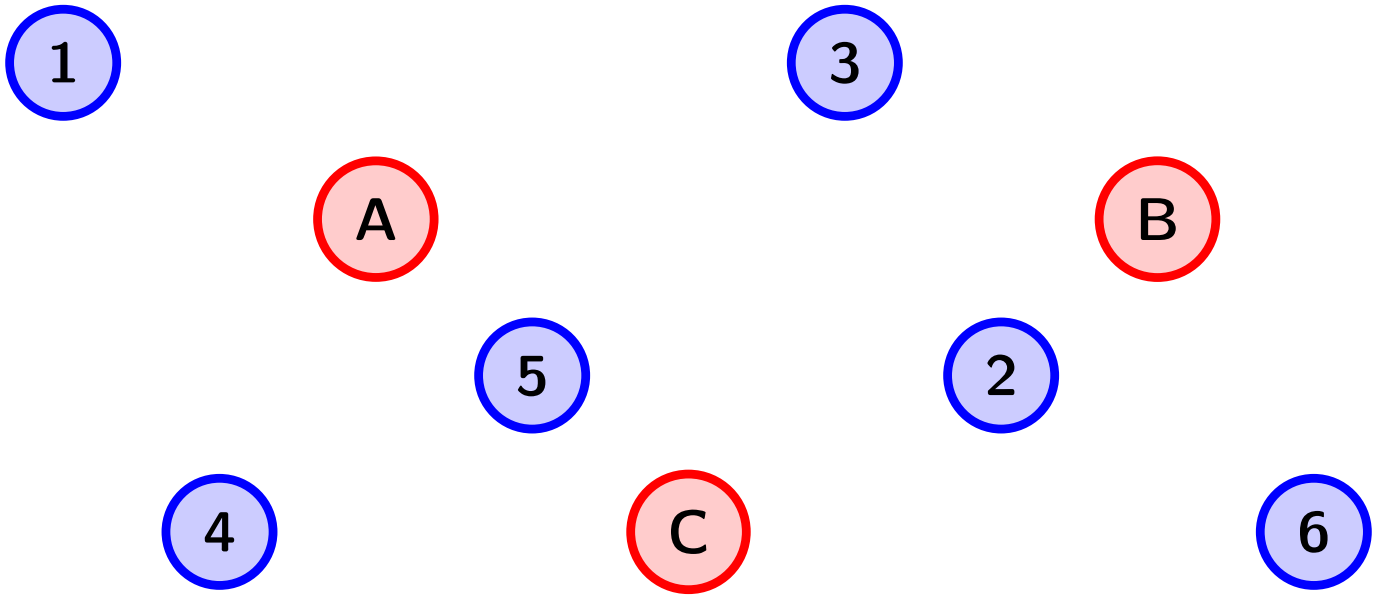
Inconvénients

On s'arrête à un optimum *local*

Soln 3 est un optimum local.
Soln 9 est l'optimum global.

Localisation d'entrepôts

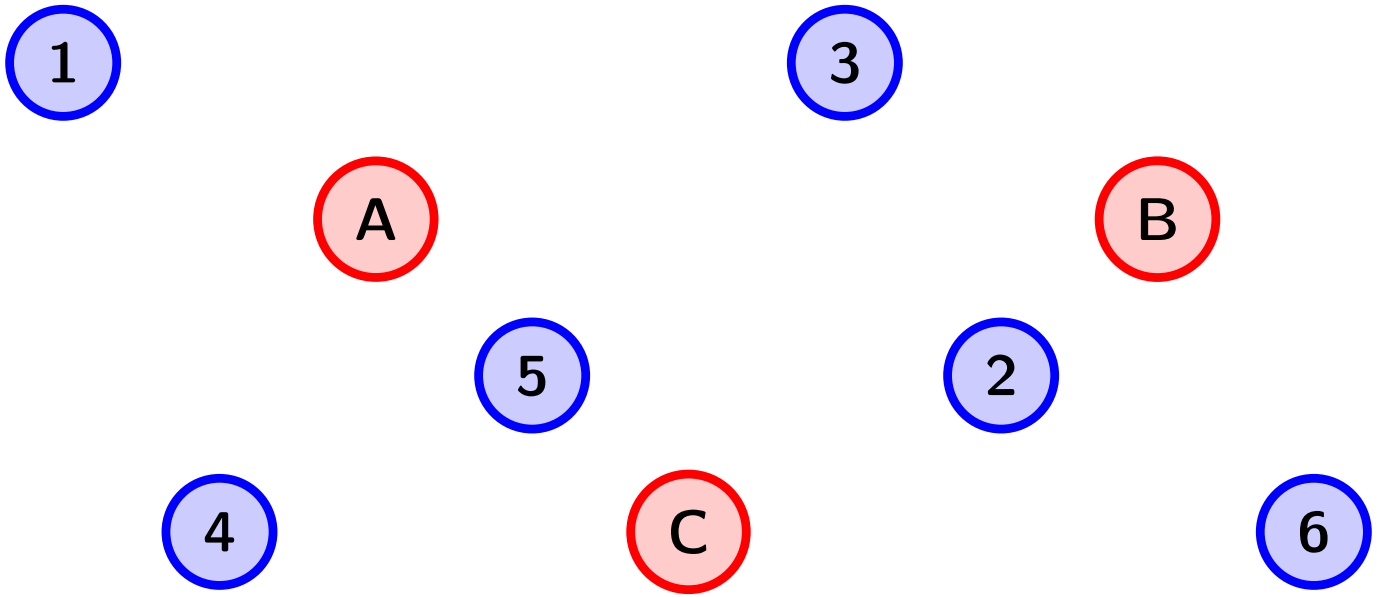
On doit affecter un entrepôt de ravitaillement parmi m
à chacun de n magasins d'une chaîne
de manière à minimiser la somme des coûts de ravitaillement
(et d'ouverture d'entrepôt).



Localisation d'entrepôts

Voisinage ré-affectation

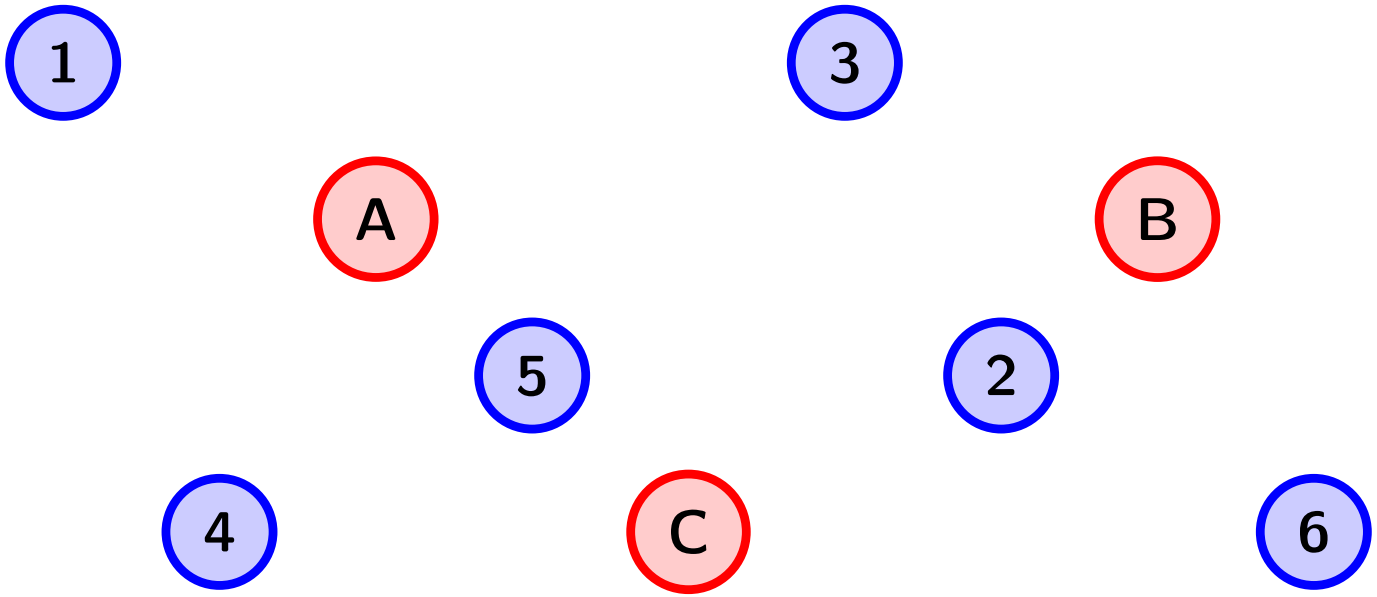
On change l'affectation d'un magasin.
$\Theta(nm)$ voisins



Localisation d'entrepôts

Voisinage échange

On échange les affectations de deux magasins.
$\Theta(n^2)$ voisins



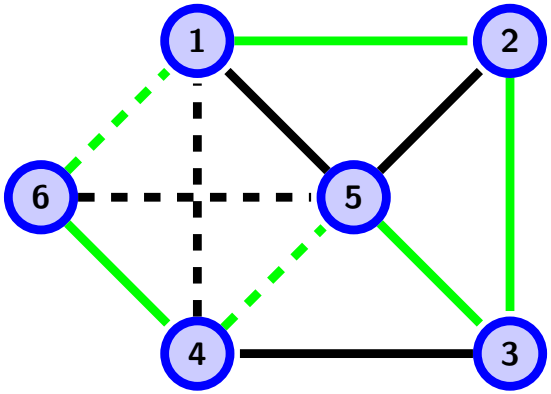
Voyageur de commerce

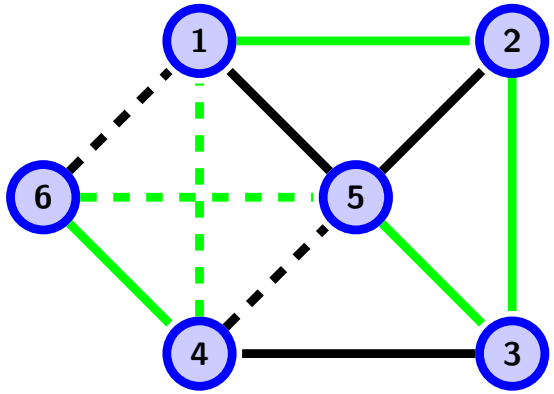
Problème

Faire la tournée d'un ensemble de villes en minimisant la distance totale parcourue.

Voisinage k-échange (d'arêtes)

Tournées voisines obtenues en remplaçant un petit nombre d'arêtes par autant de nouvelles arêtes.





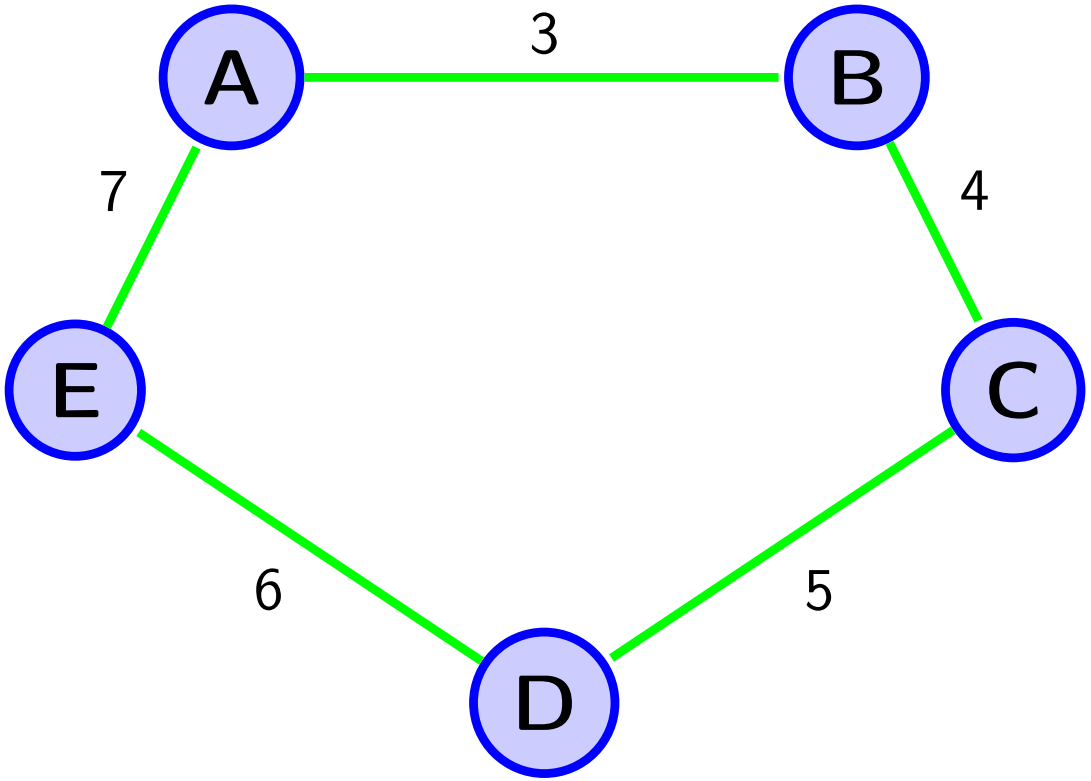
Algorithme k-opt

1. Démarrer avec une certaine tournée τ ;
2. **tant que** on peut remplacer k arêtes $a_1, \ldots, a_k$ de τ par k autres $a'_1, \ldots, a'_k$ reformant une tournée moins longue
$$\tau \leftarrow \tau - \{a_1, \ldots, a_k\} + \{a'_1, \ldots, a'_k\} ;$$
3. **retourner** τ ;

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ façons de choisir les arêtes à remplacer, $k \ll n$

$\Omega(n^k)$ voisins (plusieurs choix pour reformer une tournée)

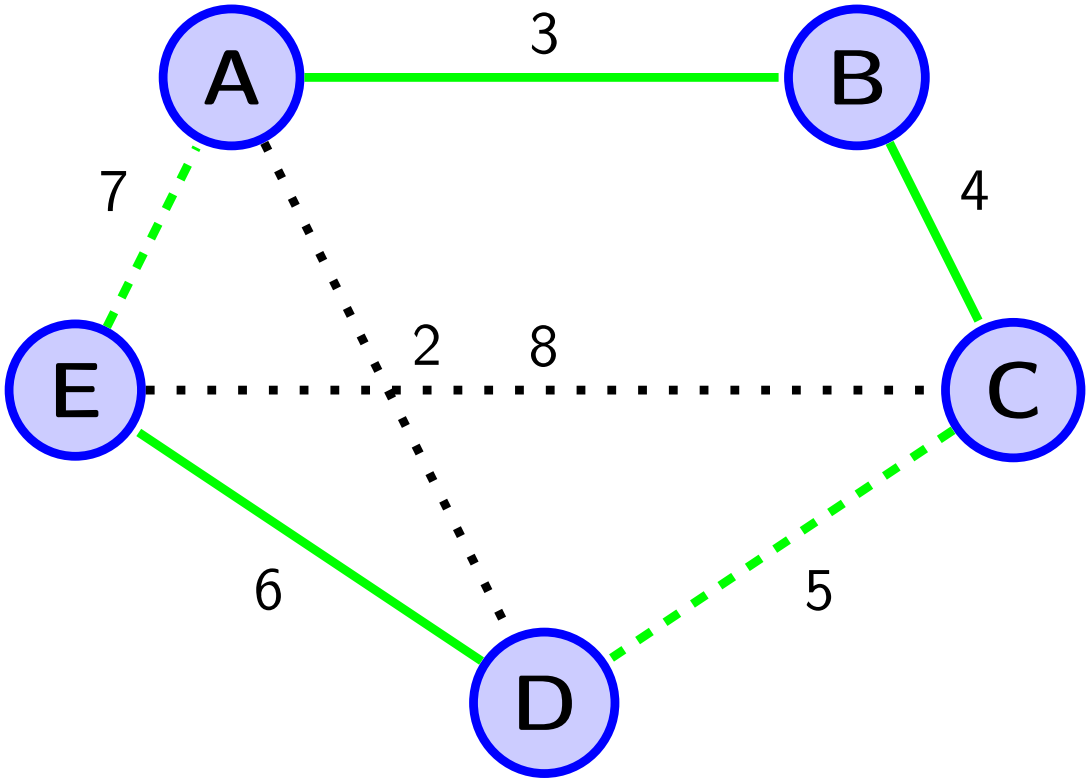
Exemple 2-opt



	B	C	D	E
A	3	4	2	7
B		4	5	3
C			5	8
D				6

Tournée initiale τ ; Distance totale = 25

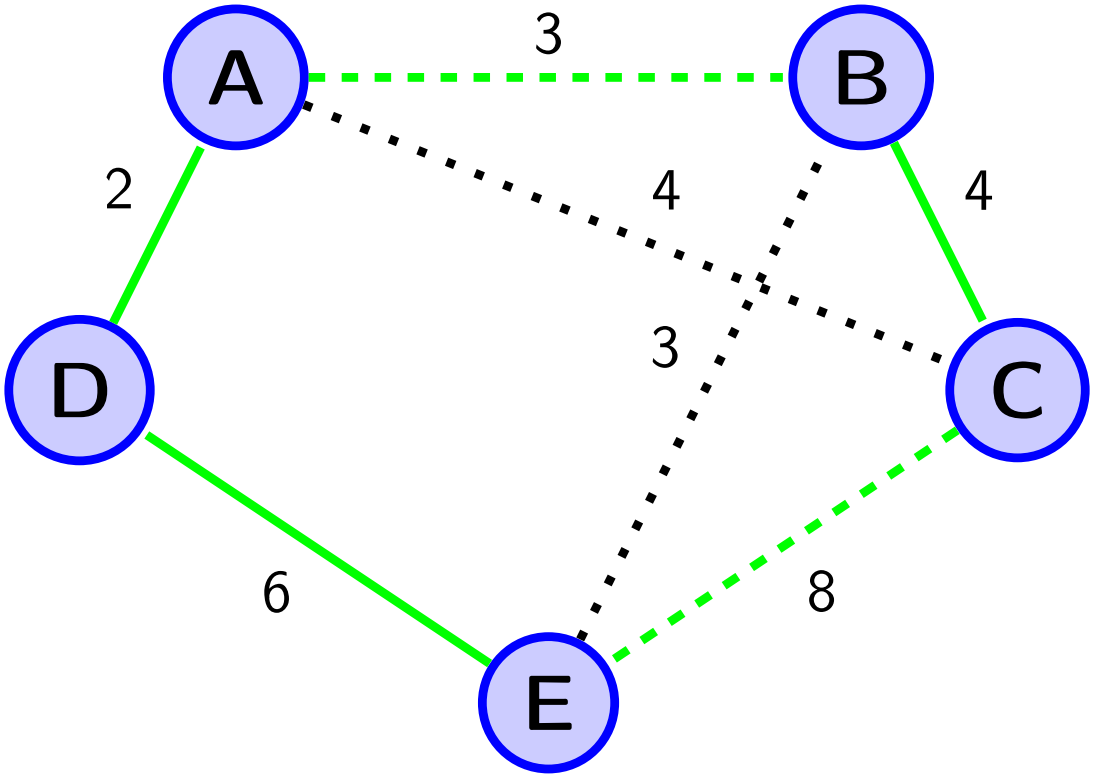
Exemple 2-opt



	B	C	D	E
A	3	4	2	7
B		4	5	3
C			5	8
D				6

Tournée initiale τ ; Distance totale = 25

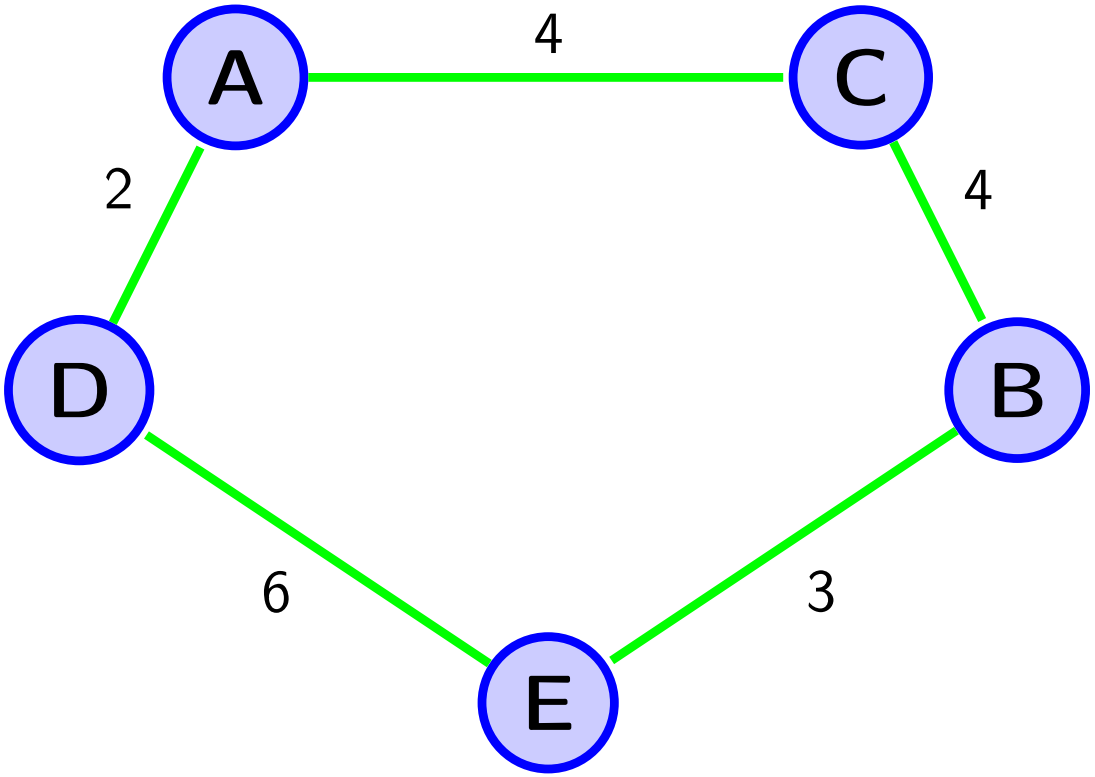
Exemple 2-opt



	B	C	D	E
A	3	4	2	7
B		4	5	3
C			5	8
D				6

Distance totale = 23

Exemple 2-opt

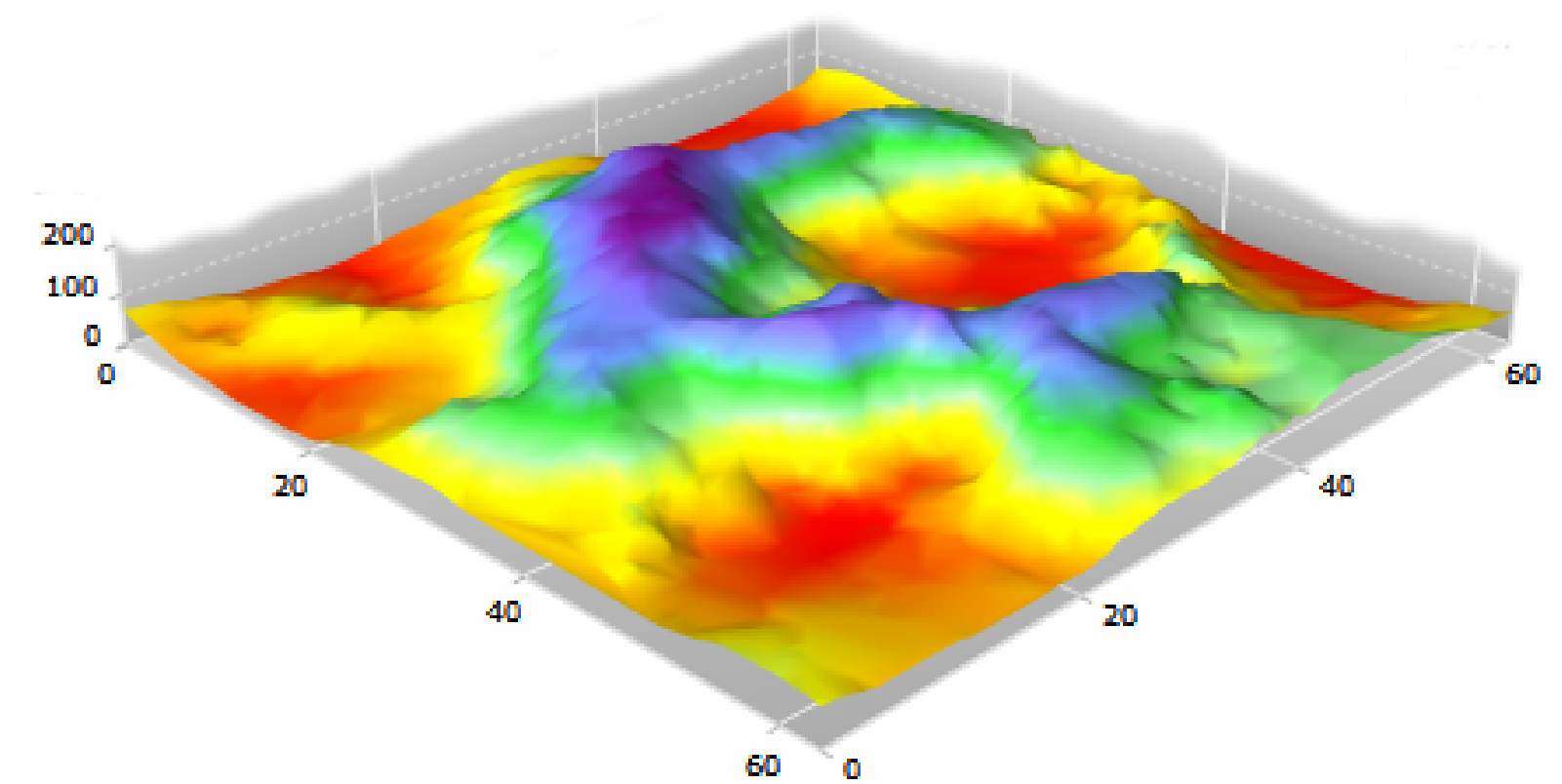


	B	C	D	E
A	3	4	2	7
B		4	5	3
C			5	8
D				6

Distance totale = 19 ; Optimum local

Heuristiques d'amélioration locale

Rappel : Mais les algorithmes conçus selon ce patron s'arrêtent à un optimum local.



source : ©2016. Nevron Software LLC.

Plan

Métaheuristiques

Patrons de conception d'algorithmes heuristiques
qui sont plus performants qu'une simple amélioration locale.

L'intuition de départ emprunte souvent au monde physique et même animal.

Deux grandes familles

- métaheuristiques à base de trajectoire :
  amélioration locale + mécanisme d'échappement à un optimum local
- métaheuristiques à base de populations :
  non plus *une* solution courante mais *plusieurs*

Métaheuristiques à base de trajectoire

- amélioration locale améliorée
- mécanisme pour échapper à un optimum local
- sans garantie de trouver l'optimum global

Elles sont très nombreuses ; en voici quelques-unes :

Recuit simulé

S'inspire d'une technique visant à produire une forte structure cristalline chez une substance en la chauffant puis en la refroidissant lentement.

Patron de conception

...

tant que *critère d'arrêt*

choisir s dans V_{s_i} de façon aléatoire ;

si $f(s) \geq f(s_i)$ **alors**

$s_{i+1} \leftarrow s$;

sinon

$s_{i+1} \leftarrow s$ avec probabilité p_i ;

$s_{i+1} \leftarrow s_i$ avec probabilité $1 - p_i$;

$i \leftarrow i + 1$;

...

Recuit simulé

Décisions de conception

- Définir le voisinage V_s d'une solution s.
- Critère d'arrêt :
  - nombre limite d'itérations
  - nombre limite d'itérations sans avoir changé de solution
  - nombre limite d'itérations sans avoir amélioré la valeur de la solution d'un certain pourcentage
- Probabilité p_i : croît inversement avec i et $f(s_i) - f(s)$, par exemple $p_i = e^{-(f(s_i)-f(s))/\theta_i}$.
- Température θ_i : décroit par paliers selon un *horaire de refroidissement*.

Recherche tabou

Lorsqu'une solution est choisie, on l'inclut dans un ensemble T de solutions taboues pendant un certain nombre d'itérations afin d'éviter d'y retourner.

Patron de conception

...
$T \leftarrow \emptyset$;
tant que *critère d'arrêt*
    choisir $s \in V_{s_i} \setminus T$ qui maximise f ;
    $i \leftarrow i + 1$;
    $s_i \leftarrow s$;
    retirer de T certaines solutions qui ont "fait leur temps" ;
    $T \leftarrow T \cup \{s\}$;
...

Recherche tabou

Décisions de conception

- Voisinage V_s
- Critère d'arrêt
- Durée du statut tabou : par exemple, un nombre d'itérations choisi aléatoirement dans l'intervalle $[5, 10]$.

Note : En pratique, plutôt que de déclarer taboue une nouvelle solution, on le fait pour la modification inverse de celle ayant mené à cette solution.

Recherche à voisinage variable

On ne définit pas seulement *un* mais *plusieurs* voisinages $V_s^1, \ldots V_s^k$ complémentaires.
Lorsqu'un certain voisinage nous a mené à un optimum local, on passe tout simplement à un autre voisinage afin d'y échapper.

Patron de conception

...
$j \leftarrow 1$;
tant que *critère d'arrêt*
    tant que $\exists\ s \in V_{s_i}^j$ telle que $f(s) > f(s_i)$
        $i \leftarrow i + 1$;
        $s_i \leftarrow s$;
    $j \leftarrow 1 + (j \bmod k)$;
...

Recherche à voisinage variable

Décisions de conception

- Voisinages $V_s^1, \ldots V_s^k$
- Critère d'arrêt
- Est-ce qu'on choisit le meilleur voisin ou le premier voisin améliorant ?

Métaheuristiques à base de populations

On maintient une population de solutions dont la composition évolue au fil des itérations.

Plusieurs inspirations du règne animal :
colonies de fourmis, d'abeilles, ...

Nous en décrivons une, assez répandue :

Algorithmes génétiques

Inspirés de la sélection naturelle. Chaque solution est représentée par un chromosome. La population évolue au fil des itérations par des croisements et mutations.

Patron de conception

Démarrer avec une certaine population P_0 ;
$i \leftarrow 0$;
tant que *critère d'arrêt*
    $P \leftarrow$ sélection(P_i, ρ, f) ;
    $P_c \leftarrow$ croisement(P) ;
    $P_m \leftarrow$ mutation(P) ;
    $P_{i+1} \leftarrow$ sélection$(P_i \cup P_c \cup P_m, |P_i|, f)$;
    $i \leftarrow i + 1$;
retourner sélection$(P_i, 1, f)$;

Algorithmes génétiques

Décisions de conception

- Définition d'un chromosome
- Taille de la population
- Critère d'arrêt
- Proportion de la population sélectionnée comme parents
- Probabilités de croisement et de mutation

Ex : Localisation d'entrepôts

Magasins $1, 2, \ldots, 6$ Entrepôts A, B, C

Chromosome : entrepôt du magasin 1, entrepôt du magasin 2, ...

Croisement

ParentX	*A*	*B*	*B*	*A*	*C*	*B*
ParentY	*C*	*B*	*A*	*C*	*B*	*A*
Enfant	*A*	*B*	*A*	*C*	*B*	*A*
Enfant	*C*	*B*	*B*	*A*	*C*	*B*

Mutation

	A	*B*	*B*	*A*	*C*	*B*
	A	*B*	*B*	*A*	*B*	*B*