DEF 2024

I. ALGEBRE

EXERCICE 1: On considère les nombres réels strictement positifs a et b tels que : $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$. On pose $m=\frac{a}{b}$ et $n=m-\left(17-12\sqrt{2}\right)$.

1) Montre que $a \times b = 1$.
2) Rends rationnel le dénominateur de m.
3) Calcule n.

EXERCICE 2 : Soit l'application polynôme f définie par $f(x)=3(x-1)^2-x^2+1+(x-1)(x+2)$.

1) Factorise $f(x)$.
2) Développe, réduis et ordonne $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de la variable x.

3) Soit g une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=ax^2+b$. Calcule les réels a et b sachant que $g(0)=-4$ et $g(1)=5$. Ecris alors $g(x)$.

4) Soit h la fraction rationnelle définie par $h(x)=\frac{3x^2-5x+2}{9x^2-4}$.

a) Détermine l'ensemble de définition D_h de h puis simplifie $h(x)$.

b) Calcule $h(0)$; $h(7)$.

PROBLEME :

Le père de Moussa lui donne 100F pour chaque fois qu'il résout correctement un problème de mathématiques. Dans le cas contraire il lui retire 50F. Après 26 problèmes Moussa se retrouve avec 500F.
Détermine le nombre de problèmes que Moussa a correctement résolus.

II. GEOMETRIE

Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne trois droites D_1, D_2, D_3 d'équations respectives : $D_1 : x-y-2=0$; $D_2 : x+y+4=0$; $D_3 : y=2$.

1) Tracer ces droites dans le repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2) Calculer les coordonnées des points A, B, C définis par : $\{A\}=D_1 \cap D_2$; $\{B\}=D_1 \cap D_3$; $\{C\}=D_2 \cap D_3$.

3) Calculer $d(A, B)$; $d(B, C)$; $d(A, C)$.
4) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
5) Construis le cercle circonscrit au triangle ABC. Calcule les coordonnées de son centre K et son rayon r.

6) Calcule $\cos \widehat{B}$; $\cos \widehat{C}$; $\tan \widehat{B}$ et $\sin \widehat{B}$.

4) Soit h la fraction rationnelle définie par $h(x) = \frac{3x^2-5x+2}{9x^2-4}$.

a) Détermine l'ensemble de définition D_h de h

$D_h = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ 9x^2 - 4 \neq 0\}$

Posons $9x^2 - 4 = 0$ équivaut à $(3x-2)(3x+2) = 0$ équivaut à $3x - 2 = 0$ ou $3x + 2 = 0$ équivaut à

$x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$ équivaut à $D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right\}$.

Simplifions : $h(x) = \frac{3x^2-5x+2}{9x^2-4} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)(3x-2)}{(3x-2)(3x+2)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right\}$; $h(x) = \frac{x-1}{3x+2}$ (1*pt*)

b) Calculons : $h(0) = \frac{0-1}{3(0)+2} = -\frac{1}{2}$; $h(7) = \frac{7-1}{3(7)+2} = \frac{6}{23}$ (1*pt*)

PROBLEME

Soient x le nombre de problème que Moussa a correctement résolus et y celui de problèmes non correctement résolus.

$\begin{cases} x + y = 26 \\ 100x - 50y = 500 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ équivaut à $x = 12$.

Donc Moussa a correctement résolus 12 problèmes. (2*pts*)

II. GEOMETRIE

1) Traçons ces droites dans le repère (voir figure) : $D_1 : x - y - 2 = 0$; $D_2 : x + y + 4 = 0$; $D_3 : y = 2$.

2) Calculons les coordonnées des points A, B, C :

$D1 \cap D2 = \{A\} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $A(-1\ ;\ -3)$.

$D1 \cap D3 = \{B\} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $B(4\ ;\ 2)$.

$D2 \cap D3 = \{C\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $C(-6\ ;\ 2)$. (2,5*pts*)

3) Calculons :

$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$.

PROPOSITION DE CORRIGE DEF 2024

I. ALGEBRE

EXERCICE 1 :.

1) Montrons que $a \times b = 1$.

$$a \times b = \left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)} = \sqrt{17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2}$$

$= \sqrt{289-288} = \sqrt{1} = 1$. Alors $a \times b = 1$. $(1pt)$

2) Rendons rationnel le dénominateur de m.

$$m = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} = \frac{\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)^2}{a \times b} = \frac{17+12\sqrt{2}}{1} = 17+12\sqrt{2}$$

$$m = 17+12\sqrt{2} \qquad (1pt)$$

3) Calculons n.

$n = m-\left(17-12\sqrt{2}\right) = 17+12\sqrt{2}-17+12\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$; $n = 24\sqrt{2}$ $(1pt)$

EXERCICE 2 :.

1) Factorisons $f(x)$.

$f(x) = 3(x-1)^2 - x^2 + 1 + (x-1)(x+2)$

$= 3(x-1)(x-1) - (x^2-1) + (x-1)(x+2)$

$= 3(x-1)(x-1) - (x-1)(x+1) + (x-1)(x+2)$

$= (x-1)[3(x-1) - (x+1) + (x+2)]$

$= (x-1)(3x-3-x-1+x+2)$

$f(x) = (x-1)(3x-2)$ $(1pt)$

2) Développons, réduisons et ordonnons $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de la variable x.

$f(x) = (x-1)(3x-2) = 3x^2-2x-3x+2 = 3x^2-5x+2$ $(1pt)$

3) Soit g une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = ax^2+b$.

Calcule les réels a et b.

$g(0) = -4$ équivaut à $a(0)^2+b = -4$ équivaut à $b = -4$.

$g(1) = 5$ équivaut à $a(1)^2+b = 5$ équivaut à $a+b = 5$ équivaut à $a-4 = 5$ équivaut à $a = 9$.

Donc $g(x). = 9x^2-4$ $(1pt)$

$d(A,C)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-5)^2+5^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$.

$d(B,C)=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-10)^2+0^2}=\sqrt{100+0}=\sqrt{100}=10.$ (1.5*pts*)

4) Montrons que le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle :

ABC est un triangle isocèle car on a : $AB=AC=\sqrt{50}$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore : $BC^2=AB^2+AC^2$ équivaut à $10^2=\sqrt{50}^2+\sqrt{50}^2$ équivaut à $100=50+50$ équivaut à $100=100$. Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en A. (1*pt*)

5) Construisons le cercle circonscrit au triangle ABC (Voir figure).

Calculons les coordonnées de son cetre K. Le point K est le milieu de l'hypothénuse $[BC]$.

$$K\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{4+(-6)}{2}=\dfrac{4-6}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\\ \dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{2+2}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{array}\right. \qquad K(-1\,;2)$$

Calculons on rayon r : $r=KA=KB=KC=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{10}{2}=5$; $r=5$ (1*pt*)

6) Calculons :

$\cos\widehat{B}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{50}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\widehat{C}=\cos\widehat{B}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\widehat{B}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}}=1$; $\sin\widehat{B}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1*pt*)

(3*pts*)