

Exercice1..... (6 pts)

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a) Calcule $P(-1)$.

b) Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

c) Résous, dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$,

$$Z_B = 2 + i\sqrt{3}, Z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } Z_G = 3.$$

a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G .

b) Calcule les distances AB, BC et AC . En déduis la nature du triangle ABC .

c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC .

Exercice2..... (4 pts)

1) Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

a) Calcule $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$.

b) Soit $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$. Calcule $I_1 + I_2$ et en déduis la valeur de I_2 .

2) a) Détermine trois réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$:

$$\frac{u^2 - 1}{2u - 1} = au + b + \frac{c}{2u - 1}.$$

b) Calcule $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx$.

Problème..... (10 pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm).

1) On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Etudie le sens de variation de g , et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

b) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2) a) Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f .

b) Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresse le tableau de variation de f .

3) a) Montre qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

b) En déduis que \mathcal{C} admet une asymptote oblique Δ et étudie la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .

Vérifie en particulier que \mathcal{C} rencontre Δ en un point unique A.

4) Détermine les abscisses des points B et B' de \mathcal{C} admettant une tangente parallèle à Δ .

5) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.

6) Construis la courbe \mathcal{C} .