Exo7

Tous les exercices

Table des matières

1 100.01 Logique

Exercice 1

Soient R et S des relations. Donner la négation de $R \Rightarrow S$. [000104]

Exercice 2

Démontrer que $(1=2) \Rightarrow (2=3)$.

Correction ▼ [000105]

Exercice 3

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\,;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000106]

Exercice 4

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Correction ▼ Vidéo ■ [000107]

Exercice 5

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2=4$ ...... $x=2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z=\bar{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x=\pi$ ...... $e^{2ix}=1$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000108]

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq 0\}$ et $F_2=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 1,\ x \geq 0\}$. On note M_1M_2 la distance usuelle entre deux points M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^2$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2<\varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad M_1M_2<\varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2<\varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad M_1M_2<\varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000109]

Exercice 7

Nier la proposition : "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

Correction ▼ Vidéo ■ [000110]

Exercice 8

Écrire la négation des assertions suivantes où P,Q,R,S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Correction ▼ [000111]

Exercice 9

Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x+1$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000112]

Exercice 10 Le missionnaire et les cannibales

Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d'après Cervantès) [000113]

Exercice 11

La proposition $\big(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ? [000114]

Exercice 12

On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ? [000115]

Exercice 13

Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. $(\forall x)(\exists n)/(x \leq n)$.
2. $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leq M)$.
3. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
4. $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geq N)(|u_n| < \varepsilon)$.
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathscr{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

[000116]

Exercice 14

Comparer les différentes phrases (sont-elles équivalentes, contraires, quelles sont celles qui impliquent les autres...)

1. $(\forall x)(\exists y)/(x \leq y)$.
2. $(\forall x)(\forall y)(x \leq y)$.
3. $(\exists x)(\exists y)/(x \leq y)$.
4. $(\exists x)/(\forall y)(x \leq y)$.
5. $(\exists x)/(\forall y)(y < x)$.
6. $(\exists x)(\exists y)/(y < x)$.

7. $(\forall x)(\exists y)/(x = y)$.

[000117]

Exercice 15

Si $P(x)$ est une proposition dépendant de $x \in X$, on note $\overline{P} = \{x \in X / P(x) \text{ est vraie}\}$. Exprimer en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les ensembles $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$. [000118]

Exercice 16

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000119]

Exercice 17

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

Correction ▼ Vidéo ■ [000120]

Exercice 18 **IT

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. (f étant une application du plan dans lui-même)
   (a) f est l'identité du plan.
   (b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
2. (f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
   (a) f est l'application nulle.
   (b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
3. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle)
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Correction ▼ [005103]

Exercice 19 *IT

Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geq 3$
2. $0 < x \leq 2$.

Correction ▼ [005104]

Exercice 20 **IT

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, \ (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, \ (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = 0)$ ».

Donner un exemple de fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Correction ▼ [005105]

2 100.02 Ensemble

Exercice 21

Montrer que $\emptyset \subset X$, pour tout ensemble X. [000121]

Exercice 22

Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000122]

Exercice 23

Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000123]

Exercice 24

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000124]

Exercice 25

A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

[000125]

Exercice 26

Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

[000126]

Exercice 27

Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$

[000127]

Exercice 28

Soit E et F des ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que $A \times B \subset E \times F$. [000128]

Exercice 29

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Écrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$? [000129]

Exercice 30

Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ? [000130]

Exercice 31

x, y, z étant des nombres réels, résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)z &= 0 \\ (x-2)(y-3) &= 0 \end{cases}$$

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions. [000131]

Exercice 32

Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1-f$.
2. fg.
3. $f+g-fg$.

[000132]

Exercice 33

Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A\triangle X = X\triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A\triangle A' = A'\triangle A = X$.

[000133]

Exercice 34

1. Écrire l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes : $x\mapsto\sqrt{x}$, $x\mapsto\frac{1}{x-1}$, $x\mapsto\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$.
2. Simplifier $[1,3]\cap[2,4]$ et $[1,3]\cup[2,4]$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs multiples de n : $n\mathbb{Z} = \{np \mid p\in\mathbb{Z}\}$. Simplifier $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$.

[000134]

Exercice 35

On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y<1\right\} \\ A_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x+y|<1\right\} \\ A_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|+|y|<1\right\} \\ A_4 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y>-1\right\} \\ A_5 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x-y|<1\right\} \end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

[000135]

Exercice 36

Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right].$$

Correction ▼ [000136]

Exercice 37

Montrez que chacun des ensembles suivants est un intervalle que vous calculerez.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \text{et} \qquad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n}, n\right]$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000137]

Exercice 38

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$. [000138]

Exercice 39

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$. [000139]

Exercice 40

Donner les positions relatives de $A, B, C \subset E$ si $A \cup B = B \cap C$. [000140]

Exercice 41

Est-il vrai que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$? Et $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$? [000141]

Exercice 42

Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$. [000142]

Exercice 43

Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1, 2\}))$. [000143]

Exercice 44

Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Correction ▼ [000144]

Exercice 45

Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$. [000145]

Exercice 46

Soient E, F, G, H quatre ensembles. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$. [000146]

Exercice 47

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour $i = 1, 2, 3$ on pose $A_i = \{f \in E / f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E. [000147]

Exercice 48 **T

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $(A\Delta B = A\cap B) \Leftrightarrow (A = B = \varnothing)$.
2. $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) = (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.
3. $A\Delta B = B\Delta A$.
4. $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
5. $A\Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.
6. $A\Delta C = B\Delta C \Leftrightarrow A = B$.

Correction ▼ [005112]

Exercice 49 ***IT

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indéxée par un ensemble I et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble F indéxée par un ensemble I. Soit f une application de E vers F. Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$ (recommencer par $f(A\cup B)$ si on n'a pas les idées claires).
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f(E\setminus A_i)$ et $F\setminus f(A_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
5. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}(F\setminus B_i)$ et $E\setminus f^{-1}(Bi)$.

Correction ▼ [005113]

Exercice 50 ***I Théorème de CANTOR

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. En considérant la partie $A = \{x\in E/\ x\notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Correction ▼ [005117]

3 100.03 Absurde et contraposée

Exercice 51

Montrer que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. [000148]

Exercice 52

Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x\in X$ vérifiant $x\notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x\in X$ tel que $A = f(x)$. [000149]

Exercice 53

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n)+1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p\in\mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000150]

Exercice 54

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$, r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1p_2\ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000151]

4 100.04 Récurrence

Exercice 55

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9\times 111+1$). [000152]

Exercice 56

Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000153]

Exercice 57

En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit $\mathscr{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

– $\mathscr{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
– Supposons $\mathscr{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence. Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
– On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

[000154]

Exercice 58

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1}-3 > \frac{3}{2}(x_n-3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000155]

Exercice 59

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un “vrai” triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n’y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu’il n’en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu’il n’en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1}+n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c’est-à-dire telles qu’il n’en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Correction ▼ [000156]

Exercice 60

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathscr{F}(X,X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000157]

Exercice 61

Montrer que

$$\forall n \geq 2, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

[000158]

Exercice 62

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

[000159]

Exercice 63

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété suivante :

$$P_n : \quad 2^n > n^2$$

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

[000160]

Exercice 64

Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

1. Pour tout $n \geq 2$, on considère la propriété :

   $$P(n) : \quad n \text{ points distincts du plan sont toujours alignés}$$

2. Initialisation : $P(2)$ est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.
3. Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie et on va démontrer $P(n+1)$.
   Soit donc $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ des points distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite d, et $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite d'. Les deux droites d et d' ayant $n-1$ points communs $A_2, \ldots, A_n$ sont confondues. Donc $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés, ce qui montre l'hérédité de la propriété.
4. Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

[000161]

Exercice 65

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.
2. Soit k un entier strictement positif. Étudier la propriété suivante : pour tout entier naturel n, k divise $(k+1)^n + 2$.

[000162]

Exercice 66

Démontrer que pour $n \geq 1$, le produit de n entiers impairs est un entier impair. [000163]

Exercice 67

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

[000164]

Exercice 68

Soit $b \geq 2$ un entier fixé. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ appartenant à $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ tels que ;

$$N = a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n \quad \text{et} \quad a_n \neq 0$$

Démontrer que pour chaque N, le système $(n, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est déterminé par la propriété ci-dessus.
On dit que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les chiffres de l'écriture du nombre N suivant la base b. [000165]

Exercice 69

Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k!$ divise le produit de k entiers consécutifs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k! \mid n(n+1)\cdots(n-k+1)$$

[000166]

Exercice 70

Les propriétés

$$P_n\ :\ 3 \mid 4^n - 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$Q_n\ :\ 3 \mid 4^n + 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

sont-elles vraies ou fausses ? [000167]

Exercice 71

1. Calculer les restes de la division euclidienne de $1, 4, 4^2, 4^3$ par 3.
2. Formuler, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une hypothèse $\mathscr{P}(n)$ concernant le reste de la division euclidienne de 4^n par 3. Démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $16^n + 4^n + 3$ est-il divisible par 3.

[000168]

Exercice 72

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. [000169]

Exercice 73

1. Démontrer par récurrence :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Calculer de deux manières différentes :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$
3. En déduire :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 3n).$$

[000170]

Exercice 74

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

[000171]

Exercice 75

Démontrer, en le déterminant qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ 2^n \geq (n+2)^2.$$

[000172]

Exercice 76

Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$$

est vraie. [000173]

Exercice 77

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a
$$n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k.$$
2. Soit b un réel positif ou nul. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a
$$(1+b)^n \leq 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{(nb)^2}{2!} + \ldots + \frac{(nb)^n}{n!}.$$

[000174]

Exercice 78

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$
pour tout réel a et b. [000175]

Exercice 79

On définit une suite (F_n) de la façon suivante :
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 1, F_1 = 1 \ .$$

1. Calculer F_n pour $1 < n < 10$.
2. Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ admet une unique solution positive a que l'on calculera.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a
$$a^{n-2} < F_n < a^{n-1} \ .$$

[000176]

Exercice 80

Montrer que :
$$2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}.$$

[000177]

Exercice 81

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, trouver une loi simplifiant le produit :
$$(1 - \frac{1}{4})\ldots(1 - \frac{1}{n}).$$

[000178]

Exercice 82

Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels de même signe tel que $a_i > -1$, montrer que :
$$(1+a_0)\ldots(1+a_n) > 1 + a_0 + \ldots + a_n.$$

[000179]

---

5 100.05 Relation d'équivalence, relation d'ordre

Exercice 83

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathscr{R}$ par : $(a,b)\mathscr{R}(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathscr{R}$.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathscr{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

[000207]

Exercice 84

Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathscr{R}$ par :
$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[000208]

Exercice 85

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathscr{R}$ par :

$$z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000209]

Exercice 86

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$ car $\mathscr{R}$ est symétrique,
or $(x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x) \Rightarrow x\mathscr{R}x$ car $\mathscr{R}$ est transitive,
donc $\mathscr{R}$ est réflexive."

Indication ▼ Correction ▼ [000210]

Exercice 87

Étudier la relation Re définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) par :

$$f \,\mathrm{Re}\, g \Longleftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in R, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

[000211]

Exercice 88

Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathscr{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000212]

Exercice 89

La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ? [000213]

Exercice 90

Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathscr{P}(E)$: $A\mathscr{R}_1B \Leftrightarrow A \subset B$; $A\mathscr{R}_2B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
2. Dans $\mathbb{Z}$: $a\mathscr{R}_3b \Leftrightarrow a$ et b ont la même parité ; $a\mathscr{R}_4b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ a-b = 3n$; $a\mathscr{R}_5b \Leftrightarrow a-b$ est divisible par 3.

[000214]

Exercice 91

Soient $(X,\leq)$ et $(Y,\leq)$ deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur $X \times Y$ la relation $(x,y) \leq (x',y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$. Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement ordonnés.
[000215]

Exercice 92

Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

[000216]

Exercice 93

Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathscr{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ la relation $\prec$ par

$$X \prec Y \quad \text{ssi} \quad (X=Y \text{ ou } \forall x\in X\ \forall y\in Y\ x\leq y).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Correction ▼ Vidéo ■ [000217]

Exercice 94

Montrer que $a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$ est une l.c.i sur $]-1,1[$ et déterminer ses propriétés. [000218]

Exercice 95 Congruence des carrés modulo 5

On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x\sim y \iff x^2\equiv y^2 \bmod 5$.

1. Déterminer l'ensemble quotient.
2. Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

[003030]

Exercice 96 Produit cartésien

Soient deux relations d'équivalence : $\mathscr{R}$ sur E, et $\mathscr{S}$ sur F. On définit sur $E\times F$:

$$(x,y)\sim(x',y') \iff x\mathscr{R}x' \text{ et } y\mathscr{S}y'.$$

1. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : E\times F\to(E/\mathscr{R})\times(F/\mathscr{S}), (x,y)\mapsto(\dot{x},\dot{y})$
   Démontrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

[003031]

Exercice 97 $X\cup A=Y\cup A$

Soit E un ensemble et $A\subset E$. On définit la relation sur $\mathscr{P}(E)$:

$$X\sim Y \iff X\cup A=Y\cup A.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : \mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E\setminus A), X\mapsto X\setminus A$.
   Montrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

[003032]

Exercice 98 Équivalences sur E^E

Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F=E^E$:

$$f\sim g \iff \exists\, n\in\mathbb{N}^* \text{ tq } f^n=g^n,$$
$$f\approx g \iff \exists\, m,n\in\mathbb{N}^* \text{ tq } f^n=g^m,$$
$$f\equiv g \iff f(E)=g(E).$$

1. Montrer que $\sim$, $\approx$, $\equiv$ sont des relations d'équivalence.
2. Pour $f\in F$, on note $f^\sim$, $f^\approx$, $f^\equiv$ les classes d'équivalence de f modulo $\sim$, $\approx$, $\equiv$.
   (a) Comparer $f^\sim$, $f^\approx$.
   (b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\approx$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim$.
   (c) Que pouvez-vous dire de f s'il existe $g\in f^\approx$ injective ? surjective ?
   (d) Même question avec $f^\equiv$.

[003033]

Exercice 99 Relation d'équivalence quotient

Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E, telles que :

$$\forall\, x,y \in E,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow x\mathscr{S}y.$$

On définit $\dot{\mathscr{S}}$ sur $E/\mathscr{R}$ par : $\dot{x}\dot{\mathscr{S}}\dot{y} \iff x\mathscr{S}y$.
Vérifier que $\dot{\mathscr{S}}$ est une relation d'équivalence, puis définir une bijection entre $(E/\mathscr{R})/\dot{\mathscr{S}}$ et $E/\mathscr{S}$. [003034]

Exercice 100 Complétion d'une relation réflexive et transitive

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E réflexive et transitive. On définit les deux relations :

$$\begin{aligned} x\mathscr{S}y &\iff (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x),\\ x\mathscr{T}y &\iff (x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x). \end{aligned}$$

Est-ce que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont des relations d'équivalence ? [003035]

Exercice 101 Parties saturées pour une relation d'équivalence

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup_{x\in A} \dot{x}$.

1. Comparer A et $s(A)$.
2. Simplifier $s(s(A))$.
3. Montrer que : $\forall\, x \in E$, on a $(x \in s(A)) \iff (\dot{x} \cap s(A) \neq \varnothing)$. En déduire $s(E \setminus s(A))$.
4. Démontrer que $s\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} s(A_i)$.
5. Donner un exemple d'inclusion stricte.

[003036]

Exercice 102 Ordre sur les fonctions

Soit X un ensemble et $E = \mathbb{R}^X$. On ordonne E par : $f \le g \iff \forall\, x \in X,\ f(x) \le g(x)$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total ?
3. Comparer les énoncés : *"f est majorée"*, et *"$\{f\}$ est majoré"*.
4. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille majorée de fonctions de E. Montrer qu'elle admet une borne supérieure.

[003037]

Exercice 103 $\sup\circ\inf$ et $\inf\circ\sup$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit les fonctions :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sup\{f(t,y) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \inf\{f(x,t) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que g et h sont bornées, puis comparer $\sup h$ et $\inf g$. [003038]

Exercice 104 Ordre lexicographique

On note $E = [-1,1]^2$, et on définit sur E la relation :
$(x,y) \preceq (x',y') \iff \Big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \le y')\Big)$ (*ordre lexicographique*).

1. Pour $(a,b) \in E$, représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (a,b).
2. Soit A une partie non vide de E. Montrer que A admet une borne supérieure.

[003039]

Exercice 105 Distance entre un point et une partie

Pour $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée, et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$d(x,A) = \inf\{|x-a| \text{ tq } a \in A\} \qquad (\textit{distance de } x \textit{ à } A).$$

Montrer que $\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \le |x-y|$. [003040]

Exercice 106 Parties adjacentes

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\begin{cases} \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leq b \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \text{ tq } b - a \leq \varepsilon \end{cases}$$
(on dit que A et B sont *adjacentes*). Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$. [003041]

Exercice 107 borne sup $\Rightarrow$ borne inf

Soit E ordonné tel que toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Correction ▼ [003042]

Exercice 108 Ordre sur $\mathbb{R}^2$

On définit sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \ll (x',y') \iff |x'-x| \leq y'-y$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a,b).
3. L'ordre est-il total ?
4. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 \leq 1\}$. Déterminer $\sup(A)$.

Correction ▼ [003043]

Exercice 109 Propriétés de sup et inf

Un treillis est un ensemble ordonné E dans lequel pour tous $x, y \in E$, $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$ existent. Soit E un treillis.

1. Montrer que sup et inf sont des opérations associatives.
2. A quelle condition ont-elles des éléments neutres ?
3. Montrer que :

$$\begin{aligned} &\forall\, x,y \in E, && \sup\big(x, \inf(x,y)\big) = \inf\big(x, \sup(x,y)\big) = x, \\ &\forall\, x,y,z \in E, && x \leq z \Rightarrow \sup\big(x, \inf(y,z)\big) \leq \inf\big(\sup(x,y), z\big), \\ &\forall\, x,y,z \in E, && \inf\big(x, \sup(y,z)\big) \geq \sup\big(\inf(x,y), \inf(x,z)\big). \end{aligned}$$

[003044]

Exercice 110 Ordre déduit d'une loi idempotente

Soit $\cdot$ une opération commutative et associative sur E, telle que : $\forall\, x \in E,\ x \cdot x = x$.
On définit la relation $\leq$ sur E par : $x \leq y \iff x \cdot y = x$

1. Reconnaître $\leq$ quand $\cdot$ est $\cap$ sur $\mathscr{P}(X)$ (resp $\cup$).
2. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre.
3. Démontrer que : $\forall\, x,y \in E,\ x \cdot y = \inf(x,y)$.

[003045]

Exercice 111 Borne supérieure parmi les intervalles

Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris $\varnothing$) ordonné par l'inclusion.
Soient I, J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I,J)$? $\sup(I,J)$? [003046]

Exercice 112 Prolongement d'applications

Soit E un ensemble et $\mathscr{E} = \{(A,f) \text{ tq } A \subset E,\ A \neq \varnothing, \text{ et } f \in E^A\}$. On ordonne $\mathscr{E}$ par :
$$(A,f) \preceq (B,g) \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x) \end{cases}$$
(c'est-à-dire que la fonction g, définie sur B, prolonge la fonction f, définie seulement sur A).

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Soient (A,f) et (B,g) deux éléments de $\mathscr{E}$. Trouver une CNS pour que la partie $\{(A,f),(B,g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?
3. Même question avec minorée.

[003047]

Exercice 113 Point fixe d'une fonction croissante

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. On note $A = \{x \in [0,1] \text{ tq } f(x) \leq x\}$.

1. Démontrer que A n'est pas vide.
2. Démontrer que $f(A) \subset A$.
3. Soit $a = \inf(A)$. Montrer que $f(a)$ minore A.
4. En déduire que $f(a) = a$.

Cela prouve que toute application croissante de $[0,1]$ dans lui-même admet un point fixe. Montrer que c'est faux pour l'intervalle $[0,1[$.
[003048]

Exercice 114 Relation d'ordre sur un ensemble quotient

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur E réflexive et transitive. On définit la relation : $x \sim y \iff x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
   Sur $E/\sim$ on pose : $\dot{x} \leq \dot{y} \iff x\mathscr{R}y$.
2. Montrer que cette définition est indépendante des représentants x et y choisis.
3. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $E/\sim$.

[003049]

Exercice 115 Pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

Dans cet exercice, on admet que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$.

1. Soient $A = \{\, x \in \mathbb{Z}^{+*} \text{ tq } x^2 < 2 \,\}$ et $B = \{\, x \in \mathbb{Z}^{+*} \text{ tq } x^2 > 2 \,\}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.
2. Soient $A = \{\, x \in \mathbb{Q}^{+*} \text{ tq } x^2 < 2 \,\}$ et $B = \{\, x \in \mathbb{Q}^{+*} \text{ tq } x^2 > 2 \,\}$. On veut démontrer que A n'admet pas de borne supérieure *dans* $\mathbb{Q}$. Pour cela, on suppose au contraire que $\alpha = \sup(A)$ existe ($\alpha \in \mathbb{Q}$), et on pose $\beta = \frac{2}{\alpha}$.
   (a) Montrer que $\beta = \inf(B)$.
   (b) Montrer que : $\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B$, ona $a \leq b$. Que pouvez-vous en déduire pour α et β ?
   (c) Obtenir une contradiction en considérant $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

[003050]

6 100.99 Autre

Exercice 116

Quels sont les entiers n tels que $4^n \leq n!$? [000180]

Exercice 117

Montrer que :

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}.$$

Indication : montrer que

$$\forall n \geq 2, \exists (p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n = \frac{2p_n + 1}{2q_n}.$$

[000181]

Exercice 118

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) > f(f(n)).$$

Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}^*}$. *Indications* : que dire de $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = \inf\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$? En déduire que $\forall n > 0, f(n) > f(0)$. Montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall m > n, f(m) > f(n)$ et $\forall m \leq n, f(m) \geq m$ (on pourra introduire k tel que $f(k)$ soit le plus petit entier de la forme $f(m)$ avec $m > n$). En déduire que f est strictement croissante et qu'il n'existe qu'une seule solution au problème. Laquelle ?
[000182]

Exercice 119

Pour $p \in \{1,2,3\}$ on note $S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. A l'aide du changement d'indice $i = n-k$ dans S_1, calculer S_1.
2. Faire de même avec S_2. Que se passe-t-il ?
3. Faire de même avec S_3 pour l'exprimer en fonction de n et S_2.
4. En utilisant l'exercice 56, calculer S_3.

[000183]

Exercice 120

Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1. $\sum_{1\le i\le j\le n} ij$.
2. $\sum_{1\le i<j\le n} i(j-1)$.
3. $\sum_{1\le i<j\le n} (i-1)j$.
4. $\sum_{1\le i\le j\le n} (n-i)(n-j)$.
5. $\sum_{1\le p,q\le n} (p+q)^2$ (on posera $k = p+q$).

[000184]

---

7 101.01 Application

Exercice 121

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$. A-t-on $f\circ g = g\circ f$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000185]

Exercice 122

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f: x\mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]\cup[-2,1])$ et $f([-3,-1]\cap[-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[)$.

[000186]

Exercice 123 Images directes et réciproques

Soit $f: E\to F$ une application, $A, A'\subset E$ et $B, B'\subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A\cap f^{-1}(B)) = f(A)\cap B$.
3. Comparer $f(A\,\Delta\,A')$ et $f(A)\,\Delta\,f(A')$.
4. Comparer $f^{-1}(B\,\Delta\,B')$ et $f^{-1}(B)\,\Delta\,f^{-1}(B')$.
5. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\, A\subset E,\ f(E\setminus A) = F\setminus f(A)$?

[002889]

Exercice 124 $(X\cap A, X\cap B)$

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit $\phi : \mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B), X\mapsto(X\cap A, X\cap B)$.

1. Qu'est-ce que $\phi(\varnothing)$? $\phi(E\setminus(A\cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?

[002890]

Exercice 125 Partie stable par une application

Soit $f: E\to E$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $A\subset E$, $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

[002891]

Exercice 126 Factorisation d'une application

1. Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?
2. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\, x, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?

[002892]

Exercice 127 Propriétés des applications $A \mapsto f(A)$ et $B \mapsto f^{-1}(B)$

Soit $f : E \to F$. On considère les applications

$$\Phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F), A \mapsto f(A) \quad \text{et} \quad \Psi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E), B \mapsto f^{-1}(B).$$

Montrer que :
1) f est injective $\iff$ Φ est injective $\iff$ Ψ est surjective. [002893]
2) f est surjective $\iff$ Φ est surjective $\iff$ Ψ est injective.

Exercice 128 $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ et $\varphi \mapsto \varphi \circ f$

Soit $f : E \to F$ une application, et G un troisième ensemble ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : E^G \to F^G, \varphi \mapsto f \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad f^* G^F \to G^E, \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Montrer que :

1. f est injective $\iff$ f_* est injective $\iff$ f^* est surjective.
2. f est surjective $\iff$ f_* est surjective $\iff$ f^* est injective.

[002894]

Exercice 129

[$h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective] Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$ trois applications telles que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g, h sont bijectives. [002895]

Exercice 130 Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathscr{S} = \{X \subset E \text{ tq } f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$.
2. Montrer que $\mathscr{S}$ est stable par intersection et réunion.
3. Soient $X \in \mathscr{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
4. Soient X et $Y \in \mathscr{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathscr{S}$.
5. Montrer que l'application $\mathscr{S} \to \mathscr{P}(f(E)), A \mapsto f(A)$ est une bijection.

[002896]

Exercice 131 Conjugaison

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ bijective.
La conjugaison par f est l'application $\Phi_f : E^E \to E^E, \phi \mapsto f \circ \phi \circ f^{-1}$

1. Montrer que Φ_f est une bijection de E^E.
2. Simplifier $\Phi_f \circ \Phi_g$.
3. Simplifier $\Phi_f(\phi) \circ \Phi_f(\psi)$.
4. Soient $\mathscr{I}$, $\mathscr{S}$, les sous-ensembles de E^E constitués des injections et des surjections. Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{S}$ sont invariants par Φ_f.
5. Lorsque ϕ est bijective, qu'est-ce que $\Big(\Phi_f(\phi)\Big)^{-1}$?

[002897]

Exercice 132 Ensembles équipotents

Soient E,F deux ensembles. On dit que :

E est moins puissant que F	s'il existe une injection	$f:\ E\to F$
E est plus puissant que F	s'il existe une surjection	$f:\ E\to F$
E et F sont équipotents	s'il existe une bijection	$f:\ E\to F$.

1. Démontrer que : (E est moins puissant que F) $\iff$ (F est plus puissant que E).
2. Montrer que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\{n\in\mathbb{N}$ tq n est divisible par $3\}$, et $\mathbb{Z}$ sont deux à deux équipotents.
3. Démontrer que E est moins puissant que $\mathscr{P}(E)$.
4. Soit $f:E\to\mathscr{P}(E)$ quelconque et $A=\{x\in E \text{ tq } x\notin f(x)\}$. Prouver que $A\notin f(E)$.
5. Est-ce que E et $\mathscr{P}(E)$ peuvent être équipotents ?
6. Soit G un troisième ensemble. Si E est moins puissant que F, démontrer que E^G est moins puissant que F^G.

[002898]

Exercice 133 Affirmations

Soit $f:E\to F$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall\, x\in E \quad \forall\, y\in F \quad f(x)=y.$
2. $\forall\, x\in E \quad \exists\, y\in F$ tel que $\quad f(x)=y.$
3. $\exists\, x\in E$ tel que $\quad \forall\, y\in F \quad f(x)=y.$
4. $\exists\, x\in E$ tel que $\quad \exists\, y\in F$ tel que $\quad f(x)=y.$
5. $\forall\, y\in F \quad \forall\, x\in E \quad f(x)=y.$
6. $\forall\, y\in F \quad \exists\, x\in E$ tel que $\quad f(x)=y.$
7. $\exists\, y\in F$ tel que $\quad \forall\, x\in E \quad f(x)=y.$
8. $\exists\, y\in F$ tel que $\quad \exists\, x\in E$ tel que $\quad f(x)=y.$

[002899]

8 101.02 Injection, surjection

Exercice 134

Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective, puis surjective et non injective. [000187]

Exercice 135

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3-x$.
f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$. [000188]

Exercice 136

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n \quad ; \quad f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2 \quad ; \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$$

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z^2.$$

[000189]

Exercice 137

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto n+1$
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, n\mapsto n+1$
3. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$
4. $k:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000190]

Exercice 138

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g:[-1,1]\to[-1,1]$ $g(x)=f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000191]

Exercice 139

L'application $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z+1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$. [000192]

Exercice 140

On considère quatre ensembles A,B,C et D et des applications $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Montrer que :

$$g\circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g\circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives}\big) \Leftrightarrow \big(f,g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000193]

Exercice 141

Soit $f:X\to Y$. Montrer que

1. $\forall B\subset Y$ $f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B\subset Y$ $f(f^{-1}(B))=B$.
3. f est injective ssi $\forall A\subset X$ $f^{-1}(f(A))=A$.
4. f est bijective ssi $\forall A\subset X$ $f(\complement A)=\complement f(A)$.

[000194]

Exercice 142

Soit $f:X\to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.
ii. $\forall A,B\subset X$ $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.
iii. $\forall A,B\subset X$ $A\cap B=\emptyset\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\emptyset$.

[000195]

Exercice 143

Soit $f:X\to Y$.On note $\hat{f}:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y), A_mapstof(A)$ et $\tilde{f}:\mathscr{P}(Y)\to\mathscr{P}(X), B\mapsto f^{-1}(B)$. Montrer que :

1. f est injective ssi $\hat{f}$ est injective.
2. f est surjective ssi $\tilde{f}$ est injective.

[000196]

Exercice 144 Exponentielle complexe

Si $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $e^z=e^x\times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n\in\mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

Correction ▼ Vidéo ■ [000197]

Exercice 145 *IT

Montrer que : ($g\circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective) et ($g\circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective).

Correction ▼ [005110]

Exercice 146 ***IT

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (f est une application d'un ensemble E dans lui-même) :

1. f est injective.
2. $\forall X\in\mathscr{P}(E),\ f^{-1}(f(X))=X$.
3. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$.
4. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ X\cap Y=\varnothing\Rightarrow f(X)\cap f(Y)=\varnothing$.
5. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ Y\subset X\Rightarrow f(X\setminus Y)=f(X)\setminus f(Y)$.

Correction ▼ [005114]

9 101.03 Bijection

Exercice 147

Soient $a,\ b\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$, et $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f_{a,b}(x)=ax+b$. Démontrer que $f_{a,b}$ est une permutation et déterminer sa réciproque.

Correction ▼ [000198]

Exercice 148

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ telle que

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1-x & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démontrer que $f\circ f=id$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000199]

Exercice 149

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ t\mapsto e^{it}$. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) f devienne bijective.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000200]

Exercice 150

On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im} z>0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathscr{D}$ des nombres complexes z tels que $|z|<1$. Démontrer que $z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{D}$. [000201]

Exercice 151

Soit $f:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ telle que $f(x)=x^2-1$. f est-elle bijective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000202]

Exercice 152

Soient $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$. Montrer que si $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives alors f,g et h le sont également. [000203]

Exercice 153

Soient $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A$. Montrer que si $h\circ g\circ f$ et $g\circ f\circ h$ sont injectives et $f\circ h\circ g$ surjective alors f,g et h sont bijectives. [000204]

Exercice 154

Soit X un ensemble. Si $A\subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée. Montrer que $\Phi:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{F}(X,\{0,1\}),\ A\mapsto\chi_A$ est bijective. [000205]

Exercice 155

Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application $f : \wp(E) \to \wp(E), X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discuter et résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit bijective.
On suppose maintenant $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique Δ. Montrer que f est bijective, préciser f^{-1}. f est-elle involutive (i.e. $f^2 = id$) ? Quelle propriété en déduit-on ? [000206]

Exercice 156 **IT

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ puis préciser f^{-1} :

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty[$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$, $I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.
4. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.

Correction ▼ [005106]

Exercice 157 **IT

Pour $z \neq i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Montrer que f réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C} / \ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser f^{-1}.
Correction ▼ [005107]

Exercice 158 **T

Parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.
Correction ▼ [005111]

Exercice 159 **** Une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \end{array}$. Montrer que f est une bijection. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, le couple (x,y) dont il est l'image.
Correction ▼ [005118]

10 101.99 Autre

11 102.01 Binôme de Newton et combinaison

Exercice 160

Démontrer que si p est un nombre premier, p divise C_p^k pour $1 \leq k \leq p-1$. [000219]

Exercice 161

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000220]

Exercice 162

Démontrer que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ (pour $0 \leq k \leq p \leq n$). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

[000221]

Exercice 163

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. 2^n+1 est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1}+2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000222]

Exercice 164

Démontrer que $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$. [000223]

Exercice 165

Montrer que, pour p et n entiers naturels non nuls tels que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

[000224]

Exercice 166

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p,$$
où p et n sont des entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$.
2. Avec les mêmes notations, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0.$$

[000225]

Exercice 167

1. Soient n, p et q des entiers naturels tels que $0 \leq p,q \leq n$.
2. Montrer que l'on a $C_n^p = C_n^q$ si et seulement si $p=q$ ou $p+q=n$.
3. Résoudre l'équation
$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-2n+3}.$$

[000226]

Exercice 168

Soient $m,n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme, démontrer que $m^{2p+1}+n^{2p+1}$ est divisible par $m+n$. [000227]

Exercice 169

En utilisant la formule du binôme montrer :

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

Correction ▼ [000228]

Exercice 170

Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots \\ S_2 &= C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots \end{aligned}$$

Indication ▼ Correction ▼ [000229]

Exercice 171

Démontrer les formules suivantes :

1. $C_n^m = C_m^{n-m}$ (on pourra utiliser le fait que $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E) A \mapsto A^c$ est une bijection.)
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$,
3. $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$.

Correction ▼ [000230]

Exercice 172

Soient E un ensemble non vide et X,Y une partition de E.

1. Montrer que l'application suivante est une bijection :
$$\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$$
$$A \mapsto (A\cap X, A\cap Y)$$
2. Montrer que pour $p,q,r\in\mathbb{N}$ tel que $r\leq p+q$ on a :
$$\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r.$$
3. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

[000231]

Exercice 173

Soit E un ensemble, $a\in E$ et $f : \begin{cases} \mathscr{P}(E)\rightarrow\mathscr{P}(E) \\ X\mapsto X\cup\{a\} \text{ si } a\notin X \\ X\mapsto X-\{a\} \text{ si } a\in X \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose désormais que E est fini et $\mathrm{Card}(E)=n$. On pose $\mathscr{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathscr{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_0(E)) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1(E))$.
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

[000232]

Exercice 174

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{0\leq 2k\leq n} C_n^{2k}$.

[000233]

Exercice 175

Soient $0\leq p\leq n$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\sum\limits_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$.
2. Écrire ces égalités pour $p=2$ et $p=3$.
3. En déduire les sommes
$$S_2' = 1.2+2.3+\ldots+(n-1).n \qquad S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$$
$$S_3' = 1^2.2+2^2.3+\ldots+(n-1)^2.n \qquad S_3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$$

[000234]

Exercice 176 Calcul de sommes

Calculer $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

Correction ▼ [002900]

Exercice 177 Calcul de sommes

Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq p$.

1. Vérifier que $C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{k-p}$ pour $p\leq k\leq n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^p$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^p = 0$ si $p<n$.

Correction ▼ [002901]

Exercice 178 Calcul de sommes

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k$.

Correction ▼ [002902]

Exercice 179 Sommes de cardinaux

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer $\sum_{A \subset E} \operatorname{Card}(A)$, $\sum_{A,B \subset E} \operatorname{Card}(A \cap B)$, $\sum_{A,B \subset E} \operatorname{Card}(A \cup B)$.

Correction ▼ [002903]

Exercice 180 Sommes d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$ et $\displaystyle\sum_{i+j+k=n} ijk$.

Correction ▼ [002904]

Exercice 181 Combinaisons avec répétitions

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

1. Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.
2. Démontrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^p + \Gamma_n^{p+1}$ (on classera les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = p+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non).
3. En déduire que $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Correction ▼ [002905]

Exercice 182 Sommes de coefficients du binôme

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$. [002906]

Exercice 183 C_n^p maximal

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer pour quelle valeur de p le nombre C_n^p est maximal (on étudiera le rapport C_n^p / C_n^{p+1}).

Correction ▼ [002907]

Exercice 184 Parité de C_n^p

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $n = 2^p$.

1. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Vérifier que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
2. En déduire que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, C_n^k est pair.
3. En déduire que : $\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}$, C_{n-1}^k est impair.

[002908]

Exercice 185 Formule de Vandermonde

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\sum_{k=0}^{c} C_a^k C_b^{c-k} = C_{a+b}^c$ ...

1. En calculant de deux manières $(1+x)^a(1+x)^b$.
2. En cherchant le nombre de parties de cardinal c dans $E \cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b.
3. Application : Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{q} C_q^k C_n^{p+k} = C_{n+q}^{p+q}$.

[002909]

Exercice 186 Formule d'inversion

Soit (x_n) une suite de réels. On pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k$. Montrer que $(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_k$. [002910]

Exercice 187 Suite de Fibonacci

Soit $u_n = \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}^p$. Montrer que $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (*suite de Fibonacci*). [002911]

Exercice 188 IT Identités combinatoires

La difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable.

1. Calculer $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$.
2. Montrer que $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
3. Calculer les sommes $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+...$ et $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+...$.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.
5. Montrer que $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
6. Calculer les sommes $0.\binom{n}{0}+1.\binom{n}{1}+...+n.\binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1}+\frac{\binom{n}{1}}{2}+...+\frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
7. Montrer que $\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}...+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ où $0\leq p\leq n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?
8. (a) Soit $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n (faire une intégration par parties dans I_n-I_{n+1}).
   (b) Démontrer l'identité valable pour $n\geq 1$: $1-\frac{\binom{n}{1}}{3}+\frac{\binom{n}{2}}{5}+...+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1}=\frac{2.4.....(2n)}{1.3...(2n+1)}$.

Correction ▼ [005137]

Exercice 189 **

Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.

Correction ▼ [005138]

Exercice 190 **I

Développer $(a+b+c+d)^2$ et $(a+b+c)^3$.

Correction ▼ [005139]

Exercice 191 ***

Soit $(n,a,b)\in\mathbb{N}^*\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a+b)^n$?

Correction ▼ [005140]

Exercice 192 *

Résoudre dans $\mathbb{N}*$ l'équation $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$.

Correction ▼ [005141]

Exercice 193 *I Inégalité de BERNOULLI

Montrer que, pour a réel positif et n entier naturel donnés, $(1+a)^n\geq 1+na$.

Correction ▼ [005147]

Exercice 194 ****I

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n,b_n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2=a_n^2-1$.
2. Montrer que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair (penser à $(2-\sqrt{3})^n$)).

Correction ▼ [005158]

Exercice 195 IT

1. (***) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $\sum C_n^{2k}=\sum C_n^{2k+1}$ ou encore démontrer directement qu'un ensemble à n éléments contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
2. (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.
3. (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $C_{2n}^n=\sum_{k=0}^n(C_n^k)^2$.

Correction ▼ [005278]

Exercice 196 ***

Combinaisons avec répétitions. Montrer que le nombre de solutions en nombres entiers $x_i\geq 0$ de l'équation $x_1+x_2+...+x_n=k$ (k entier naturel donné) est C_{n+k-1}^k. (Noter $a_{n,k}$ le nombre de solutions et procéder par récurrence.)

Correction ▼ [005280]

12 102.02 Cardinal

Exercice 197

Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application :

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \begin{cases} n \mapsto 2n-1 & \text{si } n > 0\,; \\ n \mapsto -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

[000235]

Exercice 198

Pour A, B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A \cap B.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000236]

Exercice 199

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000237]

Exercice 200

Déterminer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec 6 voyelles et 20 consonnes, chaque mot étant composé de 3 consonnes et 2 voyelles, en excluant les mots qui renferment 3 consonnes consécutives. [000238]

Exercice 201

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000239]

Exercice 202

Soient A, A', B, B' quatre ensembles tels que :

$$\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(A') = a \text{ et } \operatorname{Card}(B) = \operatorname{Card}(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\}$, $\{A', B'\}$ forment deux partitions de E, un ensemble. Déterminer le nombre de bijections $f : E \longrightarrow E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

[000240]

Exercice 203

Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble E.

1. Montrer que : $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)$.
2. Montrer par récurrence que si $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de sous-ensembles finis de E alors :

$$\operatorname{Card}(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(F_i)$$

avec égalité si les F_i sont deux à deux disjoints.

[000241]

Exercice 204

Soient $1 \leq k \leq n$. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. [000242]

Exercice 205 Permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \ldots, 12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application.*

Correction ▼ Vidéo ■ [002912]

Exercice 206 Permutations de couples

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions ...

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

Correction ▼ [002913]

Exercice 207 Nombre d'opérations

1. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?
2. Combien sont commutatives ?
3. Combien ont un élément neutre ?
4. Combien sont commutatives et ont un élément neutre ?

Correction ▼ [002914]

Exercice 208 Formule du crible

Soient $A_1,\dots,A_n$ n ensembles finis.

1. (a) Calculer $\operatorname{Card}(A_1\cup A_2\cup A_3)$ et $\operatorname{Card}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$.
   (b) Suggérer une formule pour $\operatorname{Card}(A_1\cup\dots\cup A_n)$.
2. Démonstration de la formule : On note $E=\bigcup_{i=1}^n A_i$, et pour $x\in E$ on pose $f_i(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A_i\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$
   (a) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Développer complètement $p=(1-x_1)\times\dots\times(1-x_n)$.
   (b) En considérant la somme $\sum_{x\in E}(1-f_1(x))\dots(1-f_n(x))$, démontrer la formule 1b.
3. Applications :
   (a) Déterminer le nombre d'applications $f:\{1,\dots,p\}\to\{1,\dots,n\}$ non surjectives.
   (b) Déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant au moins un point fixe.

Correction ▼ [002915]

Exercice 209 Inégalités pour la formule du crible

Soient $A_1,\dots,A_n$ n ensembles finis, et $E=\bigcup_{i=1}^n A_i$.

1. Montrer que $\operatorname{Card}(E)\le\sum_{i=1}^n\operatorname{Card}(A_i)$. Cas d'égalité ?
2. Montrer que $\operatorname{Card}(E)\ge\sum_{i=1}^n\operatorname{Card}(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{Card}(A_i\cap A_j)$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [002916]

Exercice 210 Couples (A,B) tels que $A\cup B=E$

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $\mathscr{E}=\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \text{ tq } A\cup B=E\}$. Chercher card($\mathscr{E}$).

Correction ▼ [002917]

Exercice 211 Parties ne contenant pas d'éléments consécutifs

1. Quel est le nombre de parties à p éléments de $\{1,\dots,n\}$ ne contenant pas d'éléments consécutifs ?
2. Soit t_n le nombre de parties de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal quelconque sans éléments consécutifs.
   (a) Montrer que $t_{n+2}=t_{n+1}+t_n$, $t_{2n+1}=t_n^2+t_{n-1}^2$, et $t_{2n}=t_n^2-t_{n-2}^2$.
   (b) Calculer t_{50}.

Indication ▼ Correction ▼ [002918]

Exercice 212 Nombre de relations d'équivalence

Soit R_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1. Trouver une relation de récurrence entre R_n et les R_k, $k < n$
   (fixer un élément, et raisonner sur la classe d'équivalence de cet élément).
2. Calculer R_n pour $n \leq 6$.

Correction ▼ [002919]

Exercice 213 Equivalence entre fonctions

Soient E, F, deux ensembles non vides. On définit deux relations sur $X = F^E$ par :

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists\, \phi : F \to F \text{ bijective tq } g = \phi \circ f, \\ f \equiv g &\iff \big(\forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \iff g(x) = g(y)\big). \end{aligned}$$

1. Montrer que ce sont des relations d'équivalence.
2. Montrer que $f \sim g \Rightarrow f \equiv g$.
3. On suppose $f \equiv g$. Montrer que $f \sim g$ dans les cas suivants :
   (a) F est fini et f est surjective.
   (b) F est fini et f est quelconque.
   (c) E est fini.
4. Chercher un contrexemple pour $E = F = \mathbb{N}$.

[002920]

Exercice 214 Très bon ordre

Soit E un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide possède un plus grand et un plus petit élément.
Montrer que E est totalement ordonné et fini. [002921]

Exercice 215 Élément maximal

Soit E un ensemble ordonné. Un élément $a \in E$ est dit *maximal* s'il n'existe pas de $b \in E$ tq $b > a$.

1. Si E est totalement ordonné, montrer que : *maximal* $\iff$ *maximum.*
2. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordonné par la divisibilité. Chercher les éléments maximaux.
3. Si E est fini, montrer qu'il existe un élément maximal.
4. Si E est fini et n'a qu'un seul élément maximal, montrer que cet élément est maximum.

[002922]

Exercice 216 Nombres de Catalan

Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels. Pour calculer la somme $x_1 + \cdots + x_n$, on place des parenthèses de façon à n'avoir que des additions de deux nombres à effectuer. Soit t_n le nombre de manières de placer les parenthèses (on pose $t_1 = 1$).

1. Déterminer t_2, t_3, t_4.
2. Trouver une relation de récurrence entre t_n et $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Correction ▼ [002923]

Exercice 217 ***

Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ? (Si E est un ensemble à pq éléments et si A_1,..., A_p sont p parties de E, A_1,..., A_p forment une partition de E si et seulement si tout élément de E est dans une et une seule des parties A_i. Il revient au même de dire que la réunion des A_i est E et que les A_i sont deux à deux disjoints.)

Correction ▼ [005279]

Exercice 218 *

Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Correction ▼ [005281]

Exercice 219 **I

On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005284]

Exercice 220 ***I

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Correction ▼ [005285]

Exercice 221 ****

1. Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et A_1,..., A_n, n parties de E. Montrer la « formule du crible » :

$$\begin{aligned}\text{card}(A_1\cup\ldots\cup A_n) = & \sum_{i=1}^{n}\text{card}(A_i) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\text{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \\ & +\ldots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\text{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}) \\ & +\ldots+(-1)^{n-1}\text{card}(A_1\cap\ldots\cap A_n).\end{aligned}$$

2. Combien y a-t-il de permutations σ de $\{1,...,n\}$ vérifiant $\forall i\in\{1,...,n\}$, $\sigma(i)\neq i$? (Ces permutations sont appelées dérangements (permutations sans point fixe)). Indication : noter A_i l'ensemble des permutations qui fixent i et utiliser 1).
   On peut alors résoudre un célèbre problème de probabilité, le problème des chapeaux. n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.

Correction ▼ [005286]

Exercice 222 **

Combien y a-t-il de surjections de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$?

Correction ▼ [005287]

Exercice 223 ***

Soit (P) un polygone convexe à n sommets. Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum ?

Correction ▼ [005288]

Exercice 224 ***

1. On donne n droites du plan. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourantes. Déterminer le nombre $P(n)$ de régions délimitées par ces droites.
2. On donne n plans de l'espace. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourants en une droite, ni quatre qui soient concourants en un point. Déterminer le nombre $Q(n)$ de régions délimitées par ces plans.

Correction ▼ [005289]

Exercice 225 ***

Soit P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes.
Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2\leq k\leq n-1$.
Dresser un tableau pour $1\leq k,n\leq 5$.
Calculer en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Correction ▼ [005290]

13 102.99 Autre

Exercice 226

1. (*principe des bergers*) Soient E,F deux ensembles avec F ensemble fini, et f une surjection de E sur F vérifiant :

$$\forall y\in F,\ \text{Card}(f^{-1}(y)) = p$$

   Montrer que E est alors un ensemble fini et $\text{Card}(E) = p\text{Card}(F)$.

2. (*principe des tiroirs*) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p élements distincts d'un ensemble E, répartis entre une famille de n sous-ensembles de E. Si $n < p$ montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les α_i.(on pourra raisonner par l'absurde)

[000243]

Exercice 227

Montrer par récurrence sur n que si $A_1, \ldots, A_n \subset E$ alors $\mathrm{Card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$. [000244]

Exercice 228

Soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1,...,n\}$ ayant k points fixes, montrer alors que :

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

Interpréter. [000245]

Exercice 229

Soit E un ensemble de cardinal $nm \in \mathbb{N}^*$, où $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $P_{n,m}$l'ensemble des partitions de E en n parties à m éléments chacune. Montrer que :

$$N_{n,m} = card(P_{n,m}) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}.$$

(*Indication* : on peut procéder par récurrence.) [000246]

Exercice 230

L'histoire : n personnes apportent chacune un cadeau à une fête, et chacun tire au sort un cadeau dans le tas formé par tous les présents apportés. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne reparte avec son cadeau ? Que devient cette probabilité quand le nombre de personnes devient très grand, i.e. : $n \to \infty$? (On remarquera que l'intuition met en évidence deux effets contradictoires : plus de personnes c'est plus de proba qu'une personne ait son cadeau car... il y a plus de personnes, mais c'est aussi plus de cadeaux, donc une proportion plus élevée de cadeaux “acceptables”).

Soit $S_n = \sigma(\{1,\ldots,n\})$. On dit que $\sigma \in S_n$ est un dérangement si $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ $\sigma(i) \neq i$. On note $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(i) = i\}$ et D_n l'ensemble des dérangements.

1. Calculer $\mathrm{Card}(A_i)$.
2. Exprimer $S_n - D_n$ en fonction des A_i.
3. En déduire $\mathrm{Card}(D_n)$ (on pourra utiliser l'exercice 227).
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\mathrm{Card} D_n}{\mathrm{Card} S_n}$. (on rappelle que $\lim_{n \to +\infty} (1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}) = e^x$).

[000247]

Exercice 231

Soit E un ensemble de cardinal n, Re une relation d'équivalence sur E, avec k classes d'équivalences et r couples $(x,y) \in E^2$ tels que $x \mathrm{Re}\, y$. Montrer que $n^2 \leq kr$. [000248]

Exercice 232 Dénombrement de $\mathbb{N}^2$

Soit

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},$$
$$(p,q) \mapsto \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) + p.$$

1. Montrer pour $q > 0$: $f(p+1, q-1) = f(p,q) + 1$ et $f(0, p+1) = f(p,0) + 1$.
2. Montrer que : $f(0, p+q) \leq f(p,q) < f(0, p+q+1)$.
3. Montrer que $g : n \mapsto f(0,n)$ est strictement croissante.
4. Montrer que f est injective (on supposera $f(p,q) = f(p',q')$ et on montrera dans un premier temps que $p+q = p'+q'$).
5. Montrer que f est surjective.

[003051]

Exercice 233 Parties dénombrables

Soit (n_k) une suite d'entiers naturels. On dit que la suite est :
- presque nulle s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, k \geq p,\ n_k = 0$
- stationnaire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, k \geq p,\ n_k = n_p$.
Montrer que les ensembles des suites presque nulles et des suites stationnaires sont dénombrables. [003052]

Exercice 234 Propriétés du pgcd et du ppcm

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On pose $m = \operatorname{ppcm}(a,b)$ et $d = \operatorname{pgcd}(a,b)$.

1. Soit x un multiple commun à a et b. En écrivant la division euclidienne de x par m, montrer que $m \mid x$.
2. Soit x un diviseur commun à a et b. Montrer que $\operatorname{ppcm}(x,d)$ est aussi un diviseur commun à a et b. En déduire $x \mid d$.
3. Comment qualifier m et d pour la relation d'ordre de divisibilité ?

[003053]

Exercice 235 Bases de numération

Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in \{0,\dots,b^p - 1\}$, il existe un unique p-uplet $(n_0,\dots,n_{p-1})$ d'entiers naturels tel que :

$$\forall\, k < p,\ n_k \in \{0,\dots,b-1\}, \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=0}^{p-1} n_k b^k.$$

[003054]

Exercice 236 Bases de numération

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $n_0, n_1, \dots, n_p \in \{1,2\}$ uniques tels que $n = \sum_{k=0}^{p} n_k 2^k$. [003055]

Exercice 237 Bases de numération

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p!$. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(n_1,\dots,n_p)$ d'entiers naturels tel que

$$\forall\, k \leq p,\ n_k \leq k, \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=1}^{p} n_k k!.$$

[003056]

Exercice 238 Récurrence d'ordre 2

On note $a_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

1. Trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a.a_{n+1} + b.a_n$.
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n$ est divisible par 17.

Correction ▼ [003057]

Exercice 239 Ordre sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Soit $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour $f, g \in E$ avec $f \neq g$, on note $n_{f,g} = \min\{k \text{ tq } f(k) \neq g(k)\}$.
On ordonne E par :

$$\forall\, f, g \in E,\ f \ll g \iff (f = g) \text{ ou } \big(f(n_{f,g}) < g(n_{f,g})\big).$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre total.
2. Montrer que toute partie de E non vide admet une borne inférieure et toute partie de E non vide et majorée admet une borne supérieure.

[003058]

Exercice 240 $f \circ f(n) = n + k$

On veut montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 1987$.
(*Olympiades 1987*)
Soit f une telle application. On pose :

$$E = \{0,\dots,1986\}, \qquad F = \mathbb{N} \setminus E, \qquad G = f(\mathbb{N}) \cap E, \qquad H = E \setminus G.$$

Démontrer successivement :

1. f est injective,
2. $f(F) \subset F$,
3. $f^{-1}(F) = F \cup G$,
4. $f^{-1}(G) = H$,

puis obtenir une contradiction. [003059]

Exercice 241 $f(f(n)) < f(n+1)$

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) < f(n+1)$. On veut montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
(Olympiades 1977)

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq n,\ f(x) \geq n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \geq n$ tel que $f(a) = \min\{f(x) \text{ tq } x \geq n\}$. Montrer que $a = n$.
3. En déduire que f est strictement croissante, puis conclure.

Correction ▼ [003060]

Exercice 242 ***I

Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables). Montrer que pour $n \geq 23$, on a $p_n \geq \frac{1}{2}$.
Correction ▼ [005282]

Exercice 243 ***

Montrer que le premier de l'an tombe plus souvent un dimanche qu'un samedi.
Correction ▼ [005283]

---

14 103.01 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 244

Combien 15! admet-il de diviseurs ?
Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000249]

Exercice 245

Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.
Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000250]

Exercice 246

Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.
Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000251]

Exercice 247

Soient $m \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers ; montrer que :

1. $n-1 | n^m - 1$;
2. $(n-1)^2 | n^m - 1$ si et seulement si $n-1 | m$.

[000252]

Exercice 248

Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2-1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6. [000253]

Exercice 249

Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.
Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000254]

Exercice 250

Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par $8, 15, 18$ et 24, donne respectivement pour reste $7, 14, 17$ et 23 ? [000255]

Exercice 251

Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y. Application : démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. [000256]

Exercice 252

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$
$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000257]

Exercice 253

Trouver tous les entiers relatifs n tels que n^2+n+7 soit divisible par 13. [000258]

Exercice 254

On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer, en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs. [000259]

Exercice 255

Le diviseur d'une division est égal à 45 ; le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende entier naturel. [000260]

Exercice 256

Trouver le plus petit entier naturel n telle que le développement décimal de $1/n$ admette une plus petite période de longueur 5, c'est-à-dire $1/n = 0,abcde\,abcde\,ab\ldots$ avec $a,b,\ldots,e \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. [000261]

Exercice 257

Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c, alors c^2-2b est multiple de a.
2. S'il existe u et v entiers tels que $au+bv=d$ alors $\operatorname{pgcd}(a,b)=|d|$.
3. Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^3.
4. Si a divise $b+c$ et $b-c$, alors a divise b et a divise c.
5. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
6. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a+c$ est multiple de $b+d$.
7. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
8. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
9. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
10. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
11. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
12. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

[000262]

Exercice 258

On définit les trois ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{7n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \\ E_2 & = & \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \ n \text{ est multiple de } 4\} \\ E_3 & = & \{28n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

1. Pour $1 \le i,j \le 3$, déterminer si on a l'inclusion $E_i \subset E_j$.
2. Ecrire $E_1 \cap E_2$ sous la forme $E = \{n \in \mathbb{N}\,,\ \mathscr{P}(n)\}$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

[000263]

Exercice 259

Montrer que si r et s sont deux nombres entiers naturels somme de deux carrés d'entiers alors il en est de même pour le produit rs. [000264]

Exercice 260

Soit n un entier relatif. Montrer que soit 8 divise n^2, soit 8 divise n^2-1, soit 8 divise n^2-4. [000265]

Exercice 261

Étant donnés deux nombres relatifs n et p montrer que soit np est pair, soit n^2-p^2 est divisible par 8. [000266]

Exercice 262

Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Correction ▼ Vidéo ■ [000267]

Exercice 263

1. Soit n un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que n^2+1 est divisible par 5.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier n^5-n est divisible par 5.

[000268]

Exercice 264

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que parmi les trois entiers $n.(n+1)$, $n.(n+2)$ et $(n+1).(n+2)$, il y en a exactement deux qui sont divisibles par 3. [000269]

Exercice 265

1. Pour tout couple de nombres réels (x,y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation
$$(*)\ x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
Indication : on pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n-y^n)+(x-y)x^n$.
2. Soit (a,b,p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. En utilisant la formule $(*)$, montrer que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a+pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.
3. Soient a,b,p des entiers éléments de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 2, montrer que si $a-b$ est divisible par p,
$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$
est aussi divisible par p. En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule $(*)$, que si $a-b$ est divisible par p^n i.e. il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $a-b = l.p^n$, alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1}.

Correction ▼ [000270]

Exercice 266

Calculer 2000^{2000} modulo 7 et 2^{500} modulo 3. [000271]

Exercice 267

Soit $a,b \in \mathbb{Z}^2$ dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement. Donner le reste modulo 11 de a^2-b^2. [000272]

Exercice 268

1. Montrer que 7 divise $2222^{5555}+5555^{2222}$;

2. montrer que que 11 divise
$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}}+10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}};$$
3. trouver un critère de divisibilité par 8 puis par 6.

[000273]

Exercice 269

Montrer que pour tout $n > 0$:

1. 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$
2. 11 divise $2^{6n+3}+3^{2n+1}$
3. 6 divise $5n^3+n$
4. 8 divise $5^n+2.3^{n-1}+1$.

[000274]

Exercice 270

1. Déterminer la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 3^{500}.
2. On se donne 51 nombres compris entre 1 et 100. Montrer que parmi ces nombres il y en a nécessairement au moins deux tels que l'un divise l'autre. Montrer que l'on peut toujours trouver un ensemble de 50 nombres compris entre entre 1 et 100 ne vérifiant pas la propriété de divisibilité ci-dessus.

[000275]

Exercice 271

Trouver les entiers positifs n tels que $n-1$ divise n^2+1. [000276]

Exercice 272

Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, 4 ne divise pas n^2+1. [000277]

Exercice 273

Montrer que pour chaque entier positif n, 49 divise $2^{3n+3}-7n-8$. [000278]

Exercice 274

Trouver tous les entiers positifs a tels que $a^{10}+1$ est divisible par 10. [000279]

Exercice 275

Quel est le chiffre des unités de 19971997^{10} ? [000280]

Exercice 276

Montrer que :

1. Si un entier est de la forme $6k+5$, alors il est nécessairement de la forme $3k-1$, alors que la réciproque est fausse.
2. Le carré d'un entier de la forme $5k+1$ est aussi de cette forme.
3. Le carré d'un entier est de la forme $3k$ ou $3k+1$, mais jamais de la forme $3k+2$.
4. Le carré d'un entier est de la forme $4k$ ou $4k+1$, mais jamais de la forme $4k+2$ ni de la forme $4k+3$.
5. Le cube de tout entier est de la forme $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$.
6. Si un entier est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième, et il est de la forme $7k$ ou $7k+1$.

[000281]

Exercice 277

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n|n+8$.
2. $n-1|n+11$.
3. $n-3|n^3-3$.

[000282]

Exercice 278

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n|2k+1$ et $n|9k+4)$. [000283]

Exercice 279

Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ il existe un unique $r(a) \in \{0,\dots,b-1\}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $a = bq + r(a)$.

1. En utilisant ceci pour $b = 13$, déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $13|n^2+n+7$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ et $b = 7$, déterminer les valeurs possibles de $r(a^2)$ (on rappelle que $r(a^2)$ doit appartenir à $\{0,\dots,b-1\}$). Montrer alors que $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$ $(7|x^2+y^2)$ ssi $(7|x$ et $7|y)$.
3. Montrer qu'un entier positif de la forme $8k+7$ ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

[000284]

Exercice 280

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0 \pmod 8$ ou $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Soient a,b,c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $2(ab+bc+ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab+bc+ca$ non plus.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000285]

Exercice 281 Sommes de nombres impairs

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que si N est la somme de n nombres impairs consécutifs, alors N n'est pas premier. [003090]

Exercice 282 Petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que pour $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k.
En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n (\operatorname{mod} p)$. [003091]

Exercice 283 $(p-1)(p-2)\dots(p-n)/n!$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$. Montrer que $\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p. [003092]

Exercice 284 $n^7 \equiv n (\operatorname{mod} 42)$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n (\operatorname{mod} 42)$. [003093]

Exercice 285 Puissances de 10 modulo 7

1. Vérifier $10^6 \equiv 1 (\operatorname{mod} 7)$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5 (\operatorname{mod} 7)$.

[003094]

Exercice 286 Puissances de 7

Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?
Correction ▼ [003095]

Exercice 287 $3^x = 2^y + 1$

1. Soient $x,y \in \mathbb{N}$, $y \geq 3$. Montrer par récurrence sur y que : $3^x \equiv 1 (\operatorname{mod} 2^y) \iff 2^{y-2} \mid x$.
2. Trouver tous les couples d'entiers $x,y \in \mathbb{N}$ tels que $3^x = 2^y + 1$.

Correction ▼ [003096]

Exercice 288 Suites récurrentes linéaires

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7. [003097]

Exercice 289 Suites récurrentes linéaires

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7}+3^{5n-2}$ par 11.

Correction ▼ [003098]

Exercice 290 $a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$

Soient $a,b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$. [003099]

Exercice 291 $a^2+b^2+c^2+1 \not\equiv 0 (\bmod 8)$

Montrer que : $\forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a^2+b^2+c^2+1 \not\equiv 0 \bmod 8$. [003100]

Exercice 292 Cubes consécutifs

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9. [003101]

Exercice 293 n^2+3n+5 mod 121

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, n^2+3n+5 n'est pas divisible par 121.

Correction ▼ [003102]

Exercice 294 $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. [003103]

Exercice 295 $2^{32}+1$ est divisible par 641

Montrer sans calculatrice que $2^{32}+1$ est divisible par 641. [003104]

Exercice 296 $3^x.7^y$ mod 10

Trouver tous les couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^x 7^y$ se termine par 1 en base 10.

Correction ▼ [003105]

Exercice 297 $a^3 = \ldots 123456789$

Soit $a \in \mathbb{N}$ premier à 10.

1. Montrer que $a^4 \equiv 1 (\bmod 10)$.
2. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a^{4\times 10^k} \equiv 1 (\bmod 10^{k+1})$.
3. En déduire qu'il existe un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que x^3 se termine par 123456789 en base 10.

Correction ▼ [003106]

Exercice 298 $mn(m^{60}-n^{60})$ est divisible par 56786730

Montrer que pour tous entiers m et n, le nombre $mn(m^{60}-n^{60})$ est divisible par 56786730.

Correction ▼ [003107]

Exercice 299 $q \mid 2^p-1$

Soient p,q premiers impairs tels que $q \mid 2^p-1$. Montrer que $q \equiv 1 (\bmod 2p)$.

Correction ▼ [003108]

Exercice 300 Divisibilité par 7

Infirmer ou justifier le critère de divisibilité par 7 suivant retrouvé dans un vieux grimoire : *Sépare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zéro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.* [003109]

Exercice 301 *****

k est un entier impair. Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, la somme $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ est un entier divisible par $\frac{n(n+1)}{2}$. [005115]

Exercice 302 ****

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que, pour $n \geq 2$, H_n n'est jamais un entier (indication : montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair en distinguant les cas où n est pair et n est impair).

Correction ▼ [005116]

Exercice 303 ****

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{8n+24}{25})$.

Correction ▼ [005157]

15 103.02 Sous-groupes de Z

Exercice 304

Montrer qu'il est équivalent dans $\mathbb{Z}$ de dire m divise n, ou $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$. [000286]

Exercice 305

1. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Caractériser le sous-groupe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Caractériser les sous-groupes suivants :
$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}\,; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}\,; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$
2. Montrer que toute intersection de sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Caractériser l'intersection d'une famille finie de sous-groupes. Caractériser les sous-groupes suivants :
$$\bigcap_{n=1}^{17} 2^n\mathbb{Z}\,; \quad 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} \cap 19\mathbb{Z} \cap 35\mathbb{Z}.$$

[000287]

Exercice 306

1. Déterminer $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. Est-ce un sous-groupe de $\mathbb{Z}$?
2. Déterminer : $7\mathbb{Z} \cup 49\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cup 45\mathbb{Z}$; $\bigcup_{n=1}^{28} 2^n\mathbb{Z}$. Ces ensembles sont-ils des sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réunion de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

[000288]

Exercice 307

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$; montrer que la famille des sous-groupes contenant A n'est pas vide. Soit H une partie contenant A. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   i) H est l'intersection des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ qui contiennent A,
   ii) H est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient A,
   iii) H est l'ensemble des sommes finies d'éléments de A ou d'éléments dont l'opposé est dans A.

   Si ces conditions sont vérifiées on dit que H est le sous-groupe engendré par A.
2. Soient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$ deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Montrer que
$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{mu + nv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$$
   a) est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$,
   b) contient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$,
   c) est contenu dans tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$.
   d) Si $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, que peut-on dire de d ?
3. Déterminer les sous-groupes engendrés par : $14\mathbb{Z} \cup 35\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \cup 64\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z} \cup 21\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cup 25\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$; $\{70, 4\}$.

[000289]

16 103.03 Pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 308

Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Correction ▼ Vidéo ■ [000290]

Exercice 309

1. Calculer le ppcm des nombres : 108 et 144 ; 128 et 230 ; 6, 16 et 50.
2. Montrer que si $a \geq 1$ et $b \geq 1$ sont des entiers de pgcd d et, si on pose $a = da'; b = db'$, le ppcm de a et b est $da'b'$.
3. Montrer que si a, b, c sont des entiers supérieurs à 1, on a :

$$\text{ppcm}(a,b,c) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a,b),c).$$

[000291]

Exercice 310

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Correction ▼ Vidéo ■ [000292]

Exercice 311

Si a, b, c, d sont des entiers supérieurs à 1, montrer que l'on a :

$$(a,b,c,d) = ((a,b),(c,d))$$

où (,) désigne le pgcd . [000293]

Exercice 312

1. Soient a, b, c des entiers relatifs tels que $(a,b) \neq (0,0)$, montrer que pour que l'équation

$$ax + by = c$$

ait une solution (x,y) en entiers relatifs x et y, il faut et il suffit que le pgcd de a et b divise c.

2. Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1,$$
$$7x - 9y = 6,$$
$$11x + 17y = 5.$$

[000294]

Exercice 313

Soient a et b deux entiers tels que $a \geq b \geq 1$ et $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

1. Montrer que $\text{pgcd}(a+b, a-b) = 1$ ou 2,
2. Si $\text{pgcd}(a,b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a+b, ab) = 1$,
3. Si $\text{pgcd}(a,b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a+b, a^2+b^2) = 1$ ou 2.

[000295]

Exercice 314

Calculer par l'algorithme d'Euclide : $\text{pgcd}(18480, 9828)$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction ▼ Vidéo ■ [000296]

Exercice 315

Déterminer le pgcd de 99 099 et 43 928. Déterminer le pgcd de 153 527 et 245 479. [000297]

Exercice 316

Déterminer l'ensemble de tous les couples (m,n) tels que

$$955m + 183n = 1.$$

Correction ▼ [000298]

Exercice 317

Calculer, en précisant la méthode suivie,

$$a = \text{pgcd}(720, 252) \qquad b = \text{ppcm}(720, 252)$$

ainsi que deux entiers u et v tels que $720u + 252v = a$. [000299]

Exercice 318

Démontrer :

$$a \wedge (b_1 b_2) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b_1 = 1 \text{ et } a \wedge b_2 = 1),$$

puis par récurence :

$$a \wedge (b_1 \dots b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \;\; a \wedge b_i = 1.$$

[000300]

Exercice 319

Démontrer pour $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^m \wedge b^n = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1.$$

[000301]

Exercice 320

Déteminer deux entiers naturels connaissant leur somme, 1008, et leur pgcd, 24. [000302]

Exercice 321

Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000303]

Exercice 322

Soient m et n deux entiers $(m > n > 0)$ et $a \geq 2$ un entier. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^m - 1$ par $a^n - 1$ est $a^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n, et que le pgcd de $a^m - 1$ et $a^n - 1$ est $a^d - 1$, où d est le pgcd de m et n. [000304]

Exercice 323

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000305]

Exercice 324

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que

$$m + n = 101 \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(m, n) = 3$$

[000306]

Exercice 325

Soit m et n deux entiers positifs.

1. Si $\text{pgcd}(m, 4) = 2$ et $\text{pgcd}(n, 4) = 2$, montrer que $\text{pgcd}(m + n, 4) = 4$.
2. Montrer que pour chaque entier n, 6 divise $n^3 - n$.
3. Montrer que pour chaque entier n, 30 divise $n^5 - n$.
4. Montrer que si m et n sont des entiers impairs, $m^2 + n^2$ est pair mais non divisible par 4.

5. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
6. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, alors
   – $\mathrm{pgcd}(a+b, a-b) \in \{1,2\}$,
   – $\mathrm{pgcd}(2a+b, a+2b) \in \{1,3\}$,
   – $\mathrm{pgcd}(a^2+b^2, a+b) \in \{1,2\}$,
   – $\mathrm{pgcd}(a+b, a^2-3ab+b^2) \in \{1,5\}$.

[000307]

Exercice 326

Trouver une CNS pour que $ax+b \equiv 0$ mod n ait une solution. [000308]

Exercice 327

1. Calculer $\mathrm{pgcd}(18,385)$ par l'algorithme d'Euclide, en déduire un couple $(u_0,v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation $18u+385v = 1$, avec $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Fournir enfin l'ensemble des solutions entières de

$$18u+385v = 1; \quad 18u+385v = 3; \quad 54u+1155v = 3; \quad 54u+1155v = 5.$$

[000309]

Exercice 328

Trouver a et b entiers naturels tels que

1. $a+b = 2070$ et $\mathrm{ppcm}(a,b) = 9180$;
2. $a^2+b^2 = 5409$ et $\mathrm{ppcm}(a,b) = 360$ (on pourra commencer par montrer que $\mathrm{pgcd}(a,b)$ divise $\mathrm{pgcd}(5409,360)$ et considérer ensuite différents cas).

[000310]

Exercice 329

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $35x \equiv 7$ mod 4; 22x $\equiv$ 33 mod 5 [000311]

Exercice 330

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 4 & \text{mod } 6 \\ x & \equiv & 7 & \text{mod } 9 \end{array} \right.$$

On recherchera d'abord une solution particulière. [000312]

Exercice 331

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $x^2 \equiv 2$ mod 6; x$^3 \equiv 3$ mod 9.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : $5x^2+2xy-3 = 0$; $y^2+4xy-2 = 0$.

[000313]

Exercice 332

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

a) $17x+6y = 1$ b) $27x+25y = 1$
c) $118x+35y = 1$ d) $39x+26y = 1$

[000314]

Exercice 333

Montrer que si a divise $42n+37$ et $7n+4$, pour une valeur de n donnée, alors a divise 13. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?
[000315]

Exercice 334

Trouver $\text{pgcd}(-357,629)$ et trouver des entiers x et y tels que

$$\text{pgcd}(-357,629) = -357x+629y$$

[000316]

Exercice 335

Trouver $\text{pgcd}(2183,6313) = d$ et trouver des entiers x et y tels que

$$d = 2183x+6313y$$

[000317]

Exercice 336

Supposons $\text{pgcd}(a,b) = d$ et soit x_0 et y_0 des entiers tels que $d = ax_0 + by_0$. Montrer que :

1. $\text{pgcd}(x_0,y_0) = 1$,
2. x_0 et y_0 ne sont pas uniques.

[000318]

Exercice 337

Soit a, b, c des entiers.

1. Montrer que $\text{pgcd}(ca,cb) = |c|\,\text{pgcd}(a,b)$.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a^2,b^2) = (\text{pgcd}(a,b))^2$.
3. Montrer que si $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et si c divise a, alors $\text{pgcd}(c,b) = 1$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(a,bc) = 1 \iff \text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a,c) = 1$.
5. Montrer que si $\text{pgcd}(b,c) = 1$ alors $\text{pgcd}(a,bc) = \text{pgcd}(a,b)\text{pgcd}(a,c)$.
6. Montrer que $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a+b,\text{ppcm}(a,b))$.

[000319]

Exercice 338

En divisant un nombre par 8, un élève a obtenu 4 pour reste ; en divisant ce même nombre par 12, il a obtenu 3 pour reste. Qu'en pensez-vous ?

Le fort en calcul de la classe, qui ne fait jamais d'erreur, a divisé le millésime de l'année par 29, il a trouvé 25 pour reste ; il a divisé le même millésime par 69, il a trouvé 7 pour reste. En quelle année cela se passait-il ? [000320]

Exercice 339

Trouver deux nombres sachant que leur somme est 581 et que le quotient de leur PPCM par leur pgcd est 240. [000321]

Exercice 340

Trouver les solutions entières de l'équation :

$$102x-18018y = 18.$$

Combien y a-t-il de solutions telles que x et y soient compris entre entre 0 et 4000 ? [000322]

Exercice 341

Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres. [000323]

Exercice 342

Trouver les couples de nombres a et b, divisibles par 3, vérifiant les propriétés suivantes : leur ppcm est 7560, et si on augmente chacun de ces nombres d'un tiers de sa valeur, le pgcd des deux nombres obtenus est 84. [000324]

Exercice 343

Un terrain rectangulaire dont les dimensions en mètres a et b sont des nombres entiers, a pour aire 3024 m^2. Calculer son périmètre sachant que le pgcd de a et b est 6. Combien y a-t-il de solutions possibles ? [000325]

Exercice 344

1. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, écrire l'ensemble des multiples de $\bar{x}$, classe de x, pour x variant de 0 à $n-1$ dans chacun des cas suivants : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer l'équivalence des trois propositions :
   i) $\bar{x}$ est inversible ;
   ii) x et n sont premiers entre eux ;
   iii) $\bar{x}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est à dire que l'ensemble des multiples de $\bar{x}$ est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. La classe de 18 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ? (On pourra utiliser le théorème de Bézout).

[000326]

Exercice 345

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $91x-65y=156$.
2. $135x-54y=63$.
3. $72x+35y=13$.

[000327]

Exercice 346

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

1. $31x-13y=1$.
2. $31x-13y=-1$.

Application : Au bord d'une piscine pleine d'eau, on dispose d'une cuve fixe de 31 litres munie à sa base d'un robinet de vidange, et d'un seau de 13 litres. Expliquer comment opérer pour obtenir exactement 1 litre dans le seau. [000328]

Exercice 347

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $77x+105y=2401$. [000329]

Exercice 348

Dans un pays nommé ASU, dont l'unité monétaire est le rallod, la banque nationale émet seulement des billets de 95 rallods et des pièces de 14 rallods.

1. Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière (à condition bien sûr que les deux parties disposent chacune d'assez de pièces et de billets).
2. On suppose que vous devez payer une somme S, que vous avez une quantité illimitée de pièces et de billets, mais que votre créancier ne puisse pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si $S=14$, mais pas si $S=13$ ou si $S=15$... Montrer qu'il est toujours possible de payer si S est assez grande. Quelle est la plus grande valeur de S telle qu'il soit impossible de payer S ?

[000330]

Exercice 349

Trouver tous les points à coordonnées entières du plan d'équation $6x+10y+15z=1997$. Combien y a-t-il de solutions dans $\mathbb{N}^3$? [000331]

Exercice 350

1. Trouver tous les points à coordonnées entières de la droite de l'espace d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-2y-z-5 & = & 0 \\ x+3y-4z-7 & = & 0 \end{array}\right.$.
2. Même question avec la droite $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-5z-5 & = & 0 \\ 4x-2y+z+13 & = & 0 \end{array}\right.$.

[000332]

Exercice 351

Résoudre dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$$

[000333]

Exercice 352

Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ? [000334]

Exercice 353

Soient a et b deux nombres entiers relatifs. On note d leur pgcd. Construisons les suites a_n et b_n $n \in \mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & a \\ b_0 & = & b \end{array}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = r$ où r est le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.

1. Montrer que si d_n est le pgcd de a_n et b_n alors d_n est également le pgcd de a_{n+1} et b_{n+1}.
2. Déduire de la questionh précédente que d est le pgcd des nombres a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite b_n est strictement décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Déduire de ce qui précède que pour tout couple d'entiers relatifs (a,b) il existe un couple d'entier relatifs (u,v) tel que :

$$d = au + bv.$$

[000335]

Exercice 354

Soient $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$. [003110]

Exercice 355 pgcd$(a+b, ppcm(a,b))$

Soient a,b entiers, $d = a \wedge b$, $m = a \vee b$. Chercher $(a+b) \wedge m$.

Correction ▼ [003111]

Exercice 356 pgcd$((a-b)^3, a^3 - b^3)$

Soient $a,b \in \mathbb{Z}$. Chercher $(a-b)^3 \wedge (a^3 - b^3)$.

Correction ▼ [003112]

Exercice 357 pgcd$(n^3 + n, 2n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(n^3 + n) \wedge (2n+1)$.

Correction ▼ [003113]

Exercice 358 pgcd$(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13)$.

Correction ▼ [003114]

Exercice 359 pgcd et ppcm imposés

Soient $d,m \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur d et m pour qu'il existe $a,b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$. Résoudre ce problème pour $d = 50$ et $m = 600$.

Correction ▼ [003115]

Exercice 360 ppcm$(x,y) + 11$pgcd$(x,y) = 203$

Trouver les couples d'entiers $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $x \vee y + 11(x \wedge y) = 203$.

Correction ▼ [003116]

Exercice 361 $x^2 + y^2 = 85113$, ppcm$(x,y) = 1764$

Résoudre :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 85113 \\ x \vee y = 1764. \end{cases}$$

Correction ▼ [003117]

Exercice 362 ppcm$(x,y) = 210$ pgcd(x,y), $y-x =$ pgcd(x,y)

Résoudre : $\begin{cases} x\vee y = 210(x\wedge y) \\ y-x = x\wedge y. \end{cases}$

Correction ▼ [003118]

Exercice 363 pgcd$(x,y) = x+y-1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x\wedge y = x+y-1$.

Correction ▼ [003119]

Exercice 364 ppcm$(x,y) = x+y-1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$: $x\vee y = x+y-1$.

Correction ▼ [003120]

Exercice 365 pgcd$(x,y) = x-y$, ppcm$(x,y) = 300$

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{cases} x\wedge y = x-y \\ x\vee y = 300. \end{cases}$

Correction ▼ [003121]

Exercice 366 pgcd(a^n-1, a^m-1)

Soient $a,m,n \in \mathbb{N}^*$, $a\geq 2$, et $d = (a^n-1)\wedge(a^m-1)$.

1. Soit $n = qm+r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $a^n \equiv a^r (\bmod a^m-1)$.
2. En déduire que $d = (a^r-1)\wedge(a^m-1)$, puis $d = a^{(n\wedge m)}-1$.
3. A quelle condition a^m-1 divise-t-il a^n-1 ?

Correction ▼ [003122]

Exercice 367 pgcd multiple

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j\neq i} a_j$. Montrer que $a_1,\dots,a_n$ sont *deux à deux* premiers entre eux si et seulement si $b_1,\dots,b_n$ sont premiers entre eux *dans leur ensemble*. [003123]

Exercice 368 Équations à coefficients entiers

Soient a,b,c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax+by = c$, dont on recherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
2. Soit (x_0,y_0) une solution du problème de Bézout : $ax_0+by_0 = d$. Déterminer toutes les solutions de $ax+by = c$ en fonction de a, b, c, d, x_0 et y_0.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $2520x-3960y = 6480$.

Correction ▼ [003124]

Exercice 369 Équations à coefficients entiers

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $95x+71y = 46$.
2. $20x-53y = 3$.
3. $12x+15y+20z = 7$.

Correction ▼ [003125]

Exercice 370 Congruences simultanées

1. Soient $a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$ avec $b\wedge b' = 1$. Montrer que le système : $\begin{cases} x\equiv a (\bmod b) \\ x\equiv a' (\bmod b') \end{cases}$ possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo bb'.

2. Généraliser.

[003126]

Exercice 371 Congruences simultanées

Résoudre :

1. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{140} \\ x \equiv -3 \pmod{99}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv -2 \pmod 3 \\ x \equiv 7 \pmod 5. \end{cases}$

Correction ▼ [003127]

Exercice 372 Congruences simultanées

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Correction ▼ [003128]

Exercice 373 Décomposition à coefficients positifs

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que : $\forall\, x \geq ab$, $\exists\, u,v \in \mathbb{N}$ tels que $au+bv = x$. [003129]

17 103.04 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 374

Soient a,b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a-1) | (2^{ab}-1)$;
2. 2^p-1 premier $\Rightarrow$ p premier ;
3. $\mathrm{pgcd}(2^a-1, 2^b-1) = 2^{\mathrm{pgcd}(a,b)}-1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000336]

Exercice 375

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a+b$ et ab.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000337]

Exercice 376

Résoudre l'équation $29x-11y = 1$ dans $\mathbb{Z}$.
On considère maintenant l'équation $29x-11y = 5$. Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale. [000338]

Exercice 377

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :
$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$
2. Montrer par récurence que :
$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000339]

Exercice 378

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que :
$$\begin{aligned} x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow \exists (x',y',z') \in \mathbb{N}^3, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq} \\ \text{pgcd}(x',y',z')=1 \\ x'^2+y'^2=z'^2 \\ x=nx' \text{ et } y=ny' \text{ et } z=nz'. \end{aligned}$$
2. Soit$(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2+y^2=z^2$. On suppose que $\text{pgcd}(x,y,z)=1$
   (a) Montrer que x et y ne sont pas de mêmes parité.
   (b) On suppose x pair et y impair. On pose :
   $$x=2u,\ z-y=2v,\ z+y=2w$$
   avec $(u,v) \in \mathbb{N}^*$. Montrer que v et w sont premiers entre eux.
   (c) Montrer que
   $$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$$
   avec m et n entiers naturels de parité différentes.
   (d) Montrer que si
   $$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$$
   alors
   $$x^2+y^2=z^2.$$

[000340]

Exercice 379

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ on a :
$$2^{2^{n+k}}-1=\left(2^{2^n}-1\right)\times\prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}}+1).$$
2. On pose $F_n=2^{2^n}+1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000341]

Exercice 380

Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
2. Si a divise b et c, alors a divise $2b+3c$.
3. S'il existe u et v entiers tels que $au+bv=4$ alors $\text{pgcd}(a,b)=4$.
4. Si $7a-9b=1$ alors a et b sont premiers entre eux.
5. Si a divise b et b divise c et c divise a, alors $|a|=|b|$.
6. « a et b premiers entre eux » équivaut à « $\text{ppcm}(a,b)=|ab|$ ».
7. Si a divise c et b divise d, alors ab divise cd.
8. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.
9. Si a divise b ou a divise c, alors a divise bc.
10. « a divise b » équivaut à « $\text{ppcm}(a,b)=|b|$ ».
11. Si a divise b, alors a n'est pas premier avec b.
12. Si a n'est pas premier avec b, alors a divise b ou b divise a.

[000342]

Exercice 381

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier. Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$ n'est pas congru à 0 modulo p alors p ne divise pas a et donc $\text{pgcd}(a,p)=1$.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ non congru à 0 modulo p avec p premier. Montrer en utilisant le a) qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ non congru à 0 modulo p vérifiant $au \equiv 1[p]$. (Remarquer que cela donne un inverse de a modulo p).
3. Montrer que si p n'est pas premier, il existe des éléments $a,u \in \mathbb{Z}$ non nuls modulo p tels que $au \equiv 0[p]$.

[000343]

Exercice 382

1. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\text{pgcd}((n+1)^2, n+2) = 1$.

[000344]

Exercice 383

Prouver que pour vérifier qu'un entier p est premier, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de diviseurs inférieurs ou égaux à $\sqrt{p}$. [000345]

Exercice 384 Théorème de Wilson

Démontrer que tout nombre premier p divise $(p-1)!+1$. [000346]

Exercice 385

Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

1. $n^4 - 20n^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ pour $n \geq 2$.
3. $a^4 + 4b^4$ pour $a, b \geq 2$.

[000347]

Exercice 386

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Correction ▼ Vidéo ■ [000348]

Exercice 387

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000349]

Exercice 388

Soit n un nombre premier et $p \in \{1, ..., n-1\}$, montrer que $n$divise C_n^p. [000350]

Exercice 389

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 premiers entre eux, montrer que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, n \in \left\{ax + by | (x, y) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

[000351]

Exercice 390 pgcd $\times$ ppcm

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Quand a-t-on $\text{pgcd}(a, b, c) \times \text{ppcm}(a, b, c) = abc$?

Correction ▼ [003130]

Exercice 391 pgcd $\times$ ppcm

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$.
Montrer que :
$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) \times \text{ppcm}(b_1, \dots, b_n) = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) \times \text{pgcd}(b_1, \dots, b_n) = \prod a_i$.

Correction ▼ [003131]

Exercice 392 *ab est un carré parfait*

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont des carrés parfaits. [003132]

Exercice 393 $a^n = b^m$

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et m, n premiers entre eux tels que $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^m$ et $b = c^n$. [003133]

Exercice 394 Valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$

Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{(2^n)} - 1$ est 2^{n+2}.

Correction ▼ [003134]

Exercice 395 $a^r - 1$ premier ?

On suppose que $a^r - 1$ est un nombre premier. Montrez que r est premier, puis que a vaut 2. Réciproque ?

Correction ▼ [003135]

Exercice 396 Nombres de Mersenne

On note $M_n = 2^n - 1$ (n-ième nombre de Mersenne).

1. Montrer que : M_n est premier $\Rightarrow n$ est premier.
2. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.

Correction ▼ [003136]

Exercice 397 $a^n + 1$ est premier

Soient $a, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \geq 2$, $n \geq 1$, et $a^n + 1$ est premier. Montrer que n est une puissance de 2. [003137]

Exercice 398 Nombre de diviseurs d'un nombre entier

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de n.

1. Montrer que si $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$, alors $d_n = d_a d_b$.
2. Montrer que n est un carré parfait si et seulement si d_n est impair.
3. Montrer que : $\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d_n}$.

[003138]

Exercice 399 Nombres premiers congrus à 3 modulo 4

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv -1 \pmod 4$. [003139]

Exercice 400 Nombres premiers congrus à 1 modulo 4

On rappelle que si p est premier et $n \wedge p = 1$, alors $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 3$ un diviseur premier de $n^2 + 1$. Montrer que $p \equiv 1 \pmod 4$.
2. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$.

Correction ▼ [003140]

Exercice 401 Intervalle sans nombres premiers

Trouver 1000 entiers consécutifs non premiers. [003141]

Exercice 402 Factorisation de 1000!

Quelle est la plus grande puissance de 6 divisant 1000 ! ?

Correction ▼ [003142]

Exercice 403 $1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ n'est pas entier

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ est de la forme : $\frac{p_n}{2q_n}$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ et p_n impair.

Correction ▼ [003143]

18 103.99 Autre

Exercice 404

Résoudre en nombres entiers naturels l'équation :

$$(x+1)(y+2) = 2xy.$$

[000352]

Exercice 405

Montrer que $(0,0,0)$ est le seul triplet (x,y,z) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$x^2+y^2 = 3z^2.$$

[000353]

Exercice 406

Déterminer les solutions des équations :

$$x^2-5x-11 \equiv 0 \bmod 17; \quad \cos((\mathrm{n}^2-8\mathrm{n}+2)\pi/7) = 1$$

[000354]

Exercice 407

Un groupe de $N \geq 2$ personnes se réunit. Montrer qu'au moins deux personnes ont serré le meme nombre de mains. On pourra séparer les deux cas suivants : soit tout le monde a serré au moins une main, soit il existe quelqu'un qui n'a serré aucune main. [000355]

19 104.01 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 408

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000001]

Exercice 409

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

[000002]

Exercice 410

Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000003]

Exercice 411

Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivantes : $z_1 = i, \quad z_2 = 1+i, \quad z_3 = -2+2i, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. [000004]

Exercice 412

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}, \frac{1}{(1+2i)(3-i)}, \frac{1+2i}{1-2i}, \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

[000005]

Exercice 413

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1 = 3+3i$, $z_2 = -1-\sqrt{3}i$, $z_3 = -\frac{4}{3}i$, $z_4 = -2$, $z_5 = e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.
2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

[000006]

Exercice 414

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Correction ▼ [000007]

Exercice 415

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1+i(1+\sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5})$.
3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un angle donné.

Correction ▼ [000008]

Exercice 416

Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

[000009]

Exercice 417

Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84)+i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)-i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Correction ▼ [000010]

Exercice 418

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000011]

Exercice 419

Écrire sous la forme partie réelle-partie imaginaire, puis sous la forme module-argument le nombre complexe :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2.$$

[000012]

Exercice 420

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta}+e^{2i\theta}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000013]

Exercice 421

Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Correction ▼ [000014]

Exercice 422

Calculer $Z=(1+i\sqrt{3})^{2000}$. [000015]

Exercice 423

Calculer $(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$ et $(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$. [000016]

Exercice 424

Calculer le module et l'argument de $z=\frac{1}{1+i\tan\alpha}$. [000017]

Exercice 425

Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2=1+j \quad ; \quad z_3=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

[000018]

Exercice 426

Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel ? un imaginaire ? [000019]

Exercice 427

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\dots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000020]

Exercice 428 partiel novembre 88

Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z=e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z=\rho e^{i\gamma}$ (indication : poser $u=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $v=\frac{\alpha-\beta}{2}$).

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha+(n-p)\beta].$$

Correction ▼ [000021]

Exercice 429

Écrire l'expression $(1+\cos\phi+i\sin\phi)$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de $(1+\cos\phi+i\sin\phi)^n$. [000022]

Exercice 430

Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Correction ▼ [000023]

Exercice 431

Montrer que si $|z| \leq k < 1$ alors $1-k \leq |1+z| \leq 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité. [000024]

Exercice 432

Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z|=1$ alors $|1+z| \geq 1$ ou $\left|1+z^2\right| \geq 1$.

[000025]

Exercice 433

Résoudre l'équation $\exp(z) = \sqrt{3}+3i$. [000026]

Exercice 434 $\sum z_i + z_j$

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|+|u-v| \geq |u|+|v|$, et déterminer les cas d'égalité.
2. Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=k+1}^{4} |z_k + z_\ell|$.

Correction ▼ [002924]

Exercice 435

Soient $a, b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. On note $u = \frac{z+ab\bar{z}-a-b}{a-b}$. Montrer que $u^2 \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [002927]

Exercice 436 **IT

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Correction ▼ [005119]

Exercice 437 **I

Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Correction ▼ [005127]

Exercice 438 **I

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (z \in U \setminus \{-1\} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \ z = \frac{1+ix}{1-ix}).$$

Correction ▼ [005128]

Exercice 439 **IT

Forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ et de $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Correction ▼ [005129]

Exercice 440 *T

Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.

Correction ▼ [005130]

20 104.02 Racine carrée, équation du second degré

Exercice 441

Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000027]

Exercice 442

Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

Correction ▼ [000028]

Exercice 443

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000029]

Exercice 444

Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Correction ▼ [000030]

Exercice 445

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$
$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\,;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\,;\ 4z^2-2z+1=0\,;$$
$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000031]

Exercice 446

Trouver les racines complexes de l'équation suivante :

$$x^4-30x^2+289=0.$$

[000032]

Exercice 447

Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$, on pose

$$f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}.$$

1. Résoudre l'équation $z^2=i$, $z\in\mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $f(z)=z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

[000033]

Exercice 448

On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Mettre j et j^2 sous forme algébrique.
2. Vérifier que $1+j+j^2=0$.
3. Factoriser le polynôme z^3-8i.

[000034]

Exercice 449

1. Calculer les racines carrées de $1+i$, $7+24i$, i, $5+12i$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $z^2+z+1=0$
   (b) $z^2+z-2=0$
   (c) $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$
   (d) $z^2+4z+5=0$
   (e) $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$
   (f) $z^4-(1-i)z^2-i=0$
   (g) $z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$

[000035]

Exercice 450

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$.

2. $z^3+3z-2i=0$.

Correction ▼ [000036]

Exercice 451

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^2-(1+a)(1+i)z+\left(1+a^2\right)i=0,$$

où a est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de $a\in\mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication : on pourra déterminer les racines carées complexes de $-2i(1-a)^2$).
2. On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1,Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

[000037]

Exercice 452

1. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\cos(\alpha)z+1=0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :
$$z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1=0,\ \text{où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$
$$P_\alpha(z)=z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1.$$
   (a) Justifier la factorisation suivante de P_α :
$$P_\alpha(z)=\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)+1\right)\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+1\right)\dots\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+1\right).$$
   (b) Prouver, à l'aide des nombres complexes par exemple, la formule suivante :
$$1-\cos\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$
   (c) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire
$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\dots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$
2. Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :
$$H_n(\alpha)=\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$
   (a) Montrer que, pour tout α non nul, on a :
$$2^{n-1}H_n(\alpha)=\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$
   (b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

[000038]

Exercice 453 Position des racines carrées

Soit $z\in\mathbb{C}$ et p,q ses racines carrées. A quelle condition z,p,q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Correction ▼ [002945]

Exercice 454 Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Correction ▼ [002946]

Exercice 455 Ensi P 91

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4+6z^3+9z^2+100=0$.
Correction ▼ [002947]

Exercice 456

Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2-(2+im)z-(1+im)=0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?
Correction ▼ [002948]

Exercice 457

1. Soient $u,v \in \mathbb{C}$. Vérifier que
$$\left(|u|^2-|v|^2\right)^2 = \left(\frac{|u+v|^2+|u-v|^2}{2}\right)^2 - 4|uv|^2.$$
2. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. CNS pour que les racines de $z^2+\alpha z+\beta=0$ aient même module ?

Correction ▼ [002949]

Exercice 458 Moyennes géométrique et arithmétique

1. Soient $u,v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2|u|^2+2|v|^2$.
2. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $m=\frac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha|+|\beta| = |m+\mu|+|m-\mu|$.

Correction ▼ [002950]

Exercice 459 **T

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$
2. $2z^2+2z+1=0$
3. $z^2-2z\cos\theta+1=0$, θ réel donné.
4. $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$
5. $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.

Correction ▼ [005120]

Exercice 460 **T

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.
Correction ▼ [005125]

21 104.03 Racine n-ieme

Exercice 461

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.
Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

[000039]

Exercice 462

Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z)=Z^4-1$.

1. Factoriser $P(Z)$ et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z)=0$.
2. Déduire de 1. les solutions de l'équation d'inconnue z :
$$((2z+1)/(z-1))^4 = 1$$

[000040]

Exercice 463

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 = (1-i)\,/\left(1+i\sqrt{3}\right)$. [000041]

Exercice 464

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Correction ▼ [000042]

Exercice 465

Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000043]

Exercice 466

Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Correction ▼ [000044]

Exercice 467

Trouver les racines quatrièmes de 81 et de -81.

Correction ▼ [000045]

Exercice 468

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$(z-1)\left(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$
et en déduire que, si $z \neq 1$, on a :
$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i\exp\left(\frac{ix}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :
$$Z_n = 1+\exp(ix)+\exp(2ix)+\ldots+\exp((n-1)ix),$$
et en déduire les valeurs de
$$\begin{aligned} X_n &= 1+\cos(x)+\cos(2x)+\ldots+\cos((n-1)x) \\ Y_n &= \sin(x)+\sin(2x)+\ldots+\sin((n-1)x). \end{aligned}$$

Correction ▼ [000046]

Exercice 469

Calculer la somme $S_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000047]

Exercice 470

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1+\varepsilon^p+\varepsilon^{2p}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)p}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000048]

Exercice 471

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5 = 1$.
2. $z^5 = 1-i$.
3. $z^3 = -2+2i$.
4. $z^5 = \bar{z}$.

[000049]

Exercice 472

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

[000050]

Exercice 473

Soit ε une racine n-ième de l'unité ; calculer

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}.$$

[000051]

Exercice 474

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$. [000052]

Exercice 475

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \geq 1$. [000053]

Exercice 476

Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}.$$

[000054]

Exercice 477

Résoudre $z^6 + 27 = 0$. ($z \in \mathbb{C}$) [000055]

Exercice 478

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :
   $$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$
   (Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9+i)^2$)

Correction ▼ Vidéo ■ [000056]

Exercice 479

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. [000057]

Exercice 480

Déterminer les racines quatrièmes de $-7-24i$. [000058]

Exercice 481

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

[000059]

Exercice 482 Racines de l'unité

Résoudre :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $(z+1)^n = z^n = 1$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.
5. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.
6. $\overline{x} = x^{n-1}$.
7. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Correction ▼ [002939]

Exercice 483 Sommes sur les racines de l'unité

Soit $\omega = \exp\frac{2i\pi}{n}$. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2. $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=k}^{n-1} C_\ell^k \omega^{k+\ell}$.

Correction ▼ [002940]

Exercice 484 Somme des puissances p-èmes des racines de l'unité

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-èmes de 1.

1. Calculer $\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $M = \max\{|P(x)|,\ x \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que tous les coefficients de P sont bornés par M.

Correction ▼ [002941]

Exercice 485 $\sum \omega^{k^2}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. On demande de calculer $|Z|^2$. Pour cela ...

1. Écrire $|Z|^2$ comme une somme double.
2. Regrouper les termes diagonalement en tenant compte de la périodicité de la fonction $k \mapsto \omega^k$.
3. Terminer le calcul.

Correction ▼ [002942]

Exercice 486 $e^{2i\pi/7}$

Soit $z = \exp\frac{2i\pi}{7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Correction ▼ [002943]

Exercice 487 Calcul de produit

Simplifier $x = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$ en utilisant $1, j, j^2$.

Correction ▼ [002944]

Exercice 488 ***

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Correction ▼ [005122]

Exercice 489 **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n - (z-1)^{2n} = 0$.

Correction ▼ [005126]

Exercice 490 **T

Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Correction ▼ [005131]

Exercice 491 **I

On considère l'équation $(E)\ :\ (z-1)^n-(z+1)^n=0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1. Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3. Résoudre (E).

Correction ▼ [005135]

Exercice 492 ***I

Calculer $a_n=\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$, $b_n=\prod_{k=1}^{n}\cos(a+\frac{k\pi}{n})$ et $c_n=\prod_{k=1}^{n}\tan(a+\frac{k\pi}{n})$ en éliminant tous les cas particuliers concernant a.

Correction ▼ [005313]

22 104.04 Géométrie

Exercice 493

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000060]

Exercice 494

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $(z-2)/(z-1)=i$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. Soit M,A, et B les points d'affixes respectives $z,1,2$. On suppose que $M\neq A$ et que $M\neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z-2)/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

[000061]

Exercice 495

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x,y)\mapsto x+iy=z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit f : Prg$P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z'=\frac{z-i}{z+i}$.

1. Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie ?
2. Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert
$$H:=\{M(x,y)\in P\mid y>0.\}?$$
3. En déduire l'image par f de H.

[000062]

Exercice 496

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x,y)\mapsto x+iy=z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit g : Prg$P$ qui à tout point M d'fixe $z\neq-1$ associe $g(M)$ d'affixe $z'=\frac{1-z}{1+z}$.

1. Calculer $z'+\bar{z'}$ pour $|z|=1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1,0)$ par l'application g.

[000063]

Exercice 497

Soit C la courbe d'équation $x^2-xy+y^2=0$ dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

1. La courbe C a-t-elle des points d'intersection avec le rectangle ouvert R dont les sommets sont :
$$\begin{array}{rcl} A & = & (-3,2) \\ B & = & (4,2) \\ C & = & (4,-1) \\ D & = & (-3,-1). \end{array}$$

2. Même question pour le rectangle fermé R' de sommets :
$$\begin{array}{rcl} A' & = & (-1,4) \\ B' & = & (2,4) \\ C' & = & (2,1) \\ D' & = & (-1,1). \end{array}$$

[000064]

Exercice 498

Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Correction ▼ [000065]

Exercice 499

Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Correction ▼ [000066]

Exercice 500

1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?
2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Correction ▼ [000067]

Exercice 501

Soit H une hyperbole équilatère de centre O, et M un point de H. Montrer que le cercle de centre M qui passe par le symétrique de M par rapport à O recoupe H en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Indications : en choisissant un repère adéquat, H a une équation du type $xy = 1$, autrement dit en identifiant le plan de H au plan complexe, $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$. En notant a l'affixe de M, le cercle a pour équation $|z-a|^2 = 4a\bar{a}$. On pose $Z = z - a$ et on élimine $\bar{Z}$ entre les équations du cercle et de l'hyperbole. En divisant par $Z + 2a$ pour éliminer la solution déjà connue du symétrique de M, on obtient une équation du type $Z^3 - A = 0$. [000068]

Exercice 502

Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Donner une interprétation géométrique.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000069]

Exercice 503

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z\overline{z'} + \bar{z}z' = 0$.
2. Montrer que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

[000070]

Exercice 504

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1+z^2$ soient alignées.

[000071]

Exercice 505

Soit $s=(1-z)(1-iz)$.

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit imaginaire pur.

[000072]

Exercice 506

1. Soit A un point du plan d'affixe $\alpha = a+ib$. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z|^2 = \alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z$.
2. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz, i forment un triangle équilatéral.
4. Soit $z=a+ib$, mettre l'expression $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme $A+iB$, . Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$ soit $\frac{\pi}{2}$.

[000073]

Exercice 507

Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

[000074]

Exercice 508

Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O. [000075]

Exercice 509

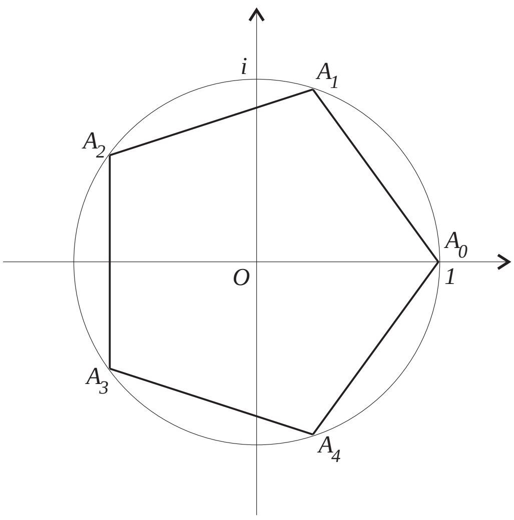
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$|z-1| \leq 1, |z+1| \leq 1.$$

[000076]

Exercice 510

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Montrer que $1+\omega_1+\omega_1^2+\omega_1^3+\omega_1^4=0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2+2z-1=0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).

4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Correction ▼ Vidéo ■ [000077]

Exercice 511 Équations affines

1. Montrer que toute droite du plan admet pour équation complexe : $az+\overline{az}=b$ avec $a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{R}$.
2. Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$, a,b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E=\{z\in\mathbb{C}$ tq $az+b\bar{z}=c\}$.

Correction ▼ [002925]

Exercice 512 Transformation homographique

Soit $f:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}\setminus\{1\}, z\mapsto\frac{z+i}{z-i}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U}\setminus\{i\})$, $f(i\mathbb{R}\setminus\{i\})$.

Correction ▼ [002926]

Exercice 513 Triangle équilatéral

Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\{a,b,c\}$ est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine de $az^2+bz+c=0$.
3. $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.
4. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$.

[002928]

Exercice 514 Sommets d'un carré

Soient $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} a+ib &= c+id \\ a+c &= b+d. \end{cases}$$

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a,b,c,d ?
En déduire qu'il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$.

Correction ▼ [002929]

Exercice 515 Configuration de points

Déterminer les nombres $z\in\mathbb{C}$ tels que ...

1. z,z^2,z^4 sont alignés.
2. $1,z,z^2$ forment un triangle rectangle.
3. $z,\frac{1}{z},-i$ sont alignés.

Correction ▼ [002930]

Exercice 516 $a+b+c=1$

Trouver $a,b,c\in\mathbb{U}$ tels que $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1. \end{cases}$

Correction ▼ [002931]

Exercice 517 $u+v+w=0$

Soient u,v,w trois complexes unitaires tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u=jv=j^2w$ ou $u=jw=j^2v$. [002932]

Exercice 518 $z+1/z=2$

Trouver les complexes $z\in\mathbb{C}^*$ tels que $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$.

Correction ▼ [002933]

Exercice 519 Symétrique par rapport à une droite

Les points A, B, M ayant pour affixes a, b, z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Correction ▼ [002934]

Exercice 520 Orthocentre

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\frac{d-a}{b-c}, \frac{d-b}{c-a}, \frac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Correction ▼ [002935]

Exercice 521 Similitudes dans un triangle

On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité. [002936]

Exercice 522 Centre du cercle circonscrit

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, affixes de points A, B, C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a, b, c.

Correction ▼ [002937]

Exercice 523 Sphère de $\mathbb{R}^3$

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u+v \neq 0$. On pose $x = \frac{1+uv}{u+v}$, $y = i\frac{1-uv}{u+v}$, $z = \frac{u-v}{u+v}$.

1. CNS sur u et v pour que x, y, z soient réels ?
2. On suppose cette condition réalisée. Montrer que le point $M(x, y, z)$ dans l'espace appartient à la sphère de centre O et de rayon 1.
3. A-t-on ainsi tous les points de cette sphère ?

Correction ▼ [002938]

Exercice 524 **IT Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas

1. On pose $z = e^{2i\pi/5}$ puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $\overline{OI} + \overline{OJ} = \overline{OI}.\overline{OJ} = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.
3. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Correction ▼ [005121]

Exercice 525 ****

1. Soit (ABC) un triangle dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle (ABC). Montrer que $I = \mathrm{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$.
2. Déterminer z complexe tel que O soit le centre du cercle inscrit au triangle (PQR) dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3.

Correction ▼ [005123]

Exercice 526 ***I

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0.$$

Correction ▼ [005124]

Exercice 527 **T

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $Z = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1. $|Z| = 1$.
2. $|Z| = 2$.
3. $Z \in \mathbb{R}$.
4. $Z \in i\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005133]

Exercice 528 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1 - i)z + 2 + i$

Correction ▼ [005134]

---

23 104.05 Trigonométrie

Exercice 529

On rappelle la formule ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1. Etablir les formules d'Euler ($\theta \in \mathbb{R}$) :
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$
2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (ou transformer de produit en somme) ($a, b \in \mathbb{R}$) :
$$2\cos a \cos b \quad ; \quad 2\sin a \sin b \quad ; \quad \cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a.$$
3. A l'aide de la formule : $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), retrouver celles pour $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction de sinus, cosinus et tangente de x ou de y ; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
4. Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ ($x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$).
5. Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
6. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

[000078]

Exercice 530

1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des lignes trigonométriques de l'angle θ.
2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des lignes trigonométriques des multiples entiers de θ.

[000079]

Exercice 531

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000080]

Exercice 532

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$:
   (a) $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
   (b) $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$. En déduire une équation du troisième degré admettant pour solution $\cos(\frac{\pi}{3})$ et la résoudre.
2. Linéariser les polynomes trigonométriques suivants : $1 + \cos^2 x$, $\cos^3 x + 2\sin^2 x$.

[000081]

Exercice 533

Exprimer $(\cos 5x)(\sin 3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$. [000082]

Exercice 534

Soit x un nombre réel. On note $C = 1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx = \sum_{k=0}^{n}\cos kx$, et $S = \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx = \sum_{k=0}^{n}\sin kx$. Calculer C et S. [000083]

Exercice 535

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\sin x = \frac{1}{2},\ \cos x = -\frac{1}{2},\ \tan x = -1,$$

et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions ; résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

[000084]

Exercice 536

Calculer $\sin(25\pi/3), \cos(19\pi/4), \tan(37\pi/6)$. [000085]

Exercice 537

Résoudre l'équation : $2\sin^2 x-3\sin x-2 = 0$, puis l'inéquation : $2\sin^2 x-3\sin x-2 > 0$. [000086]

Exercice 538

Etudier le signe de la fonction donnée par $f(x) = \cos 3x+\cos 5x$. [000087]

Exercice 539

Simplifier, suivant la valeur de $x \in [-\pi,\pi]$, l'expression $\sqrt{1+\cos x}+|\sin x/2|$. [000088]

Exercice 540

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (donner les valeurs des solutions appartenant à $]-\pi,\pi]$ et les placer sur le cercle trigonométrique).

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$,
2. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$,
3. $\cos(3x) = \sin(x)$.

Correction ▼ [000089]

Exercice 541

A quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x) = m$ a-t-elle une solution réelle ? Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.
Correction ▼ [000090]

Exercice 542

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\cos(5x)+\cos(3x) \leq \cos(x)$$
$$2\cos^2(x)-9\cos(x)+4 > 0.$$

Correction ▼ [000091]

Exercice 543

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x)-\sin^2(x) = \sin(3x)$.

2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

Correction ▼ [000092]

Exercice 544 Somme de coefficients binomiaux

A l'aide de formules du binôme, simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{[n/3]} C_n^{3k}$.
2. $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(-3)^k$.
3. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$.
4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\big((k+1)\theta\big)$.
5. $\cos a + C_n^1 \cos(a+b) + C_n^2 \cos(a+2b) + \cdots + C_n^n \cos(a+nb)$.

Correction ▼ [002951]

Exercice 545 Sommes trigonométriques

Simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$.
2. $\sum_{k=1}^{n} \sin^3(k\theta)$.

Correction ▼ [002952]

Exercice 546 Équation trigonométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0. \end{cases}$$

Correction ▼ [002953]

Exercice 547 $\sum \cos^{2p}(x + k\pi/2p)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Simplifier $\cos^4\theta + \cos^4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\theta + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Simplifier $\cos^6\theta + \cos^6\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cdots + \cos^6\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$.
3. Simplifier $\cos^{2p}\theta + \cos^{2p}\left(\theta + \frac{\pi}{2p}\right) + \cdots + \cos^{2p}\left(\theta + \frac{(2p-1)\pi}{2p}\right)$.

Correction ▼ [002954]

Exercice 548 $\sum \cos(kx)/\cos x^k = 0$

Résoudre : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Correction ▼ [002955]

Exercice 549 $\sum C_n^k x^{n-k}\cos(k\alpha) = 0$

Résoudre en x : $x^n + C_n^1 x^{n-1}\cos\alpha + \cdots + C_n^n \cos(n\alpha) = 0$.

Correction ▼ [002956]

Exercice 550 $\sum 2^{-k}/\cos\theta \ldots \cos(2^k\theta)$

Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta \ldots \cos 2^{k-1}\theta}.$$

Correction ▼ [002957]

Exercice 551 Calcul de $\tan(nx)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(nx)$ en fonction de $\tan x$.

Correction ▼ [002958]

Exercice 552 $z = (1+ia)/(1-ia)$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$?

Correction ▼ [002959]

Exercice 553 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Correction ▼ [005063]

Exercice 554 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005064]

Exercice 555 **IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
2. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$,
3. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$,
4. $\cos(2x) = \cos^2 x$, $I = [0, 2\pi]$,
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos(nx) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,
7. $|\cos(nx)| = 1$,
8. $\sin(nx) = 0$,
9. $|\sin(nx)| = 1$,
10. $\sin x = \tan x$, $I = [0, 2\pi]$,
11. $\sin(2x) + \sin x = 0$, $I = [0, 2\pi]$,
12. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I = [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [005065]

Exercice 556 **IT

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$,
2. $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbb{R}$,
3. $\cos x > \cos \frac{x}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
4. $\cos^2 x \geq \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$,

5. $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos\frac{x}{3} \leq \sin\frac{x}{3}$, $I = [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [005066]

Exercice 557 *I

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Correction ▼ [005067]

Exercice 558 *I

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Correction ▼ [005068]

Exercice 559 ***

Montrer que $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Correction ▼ [005069]

Exercice 560 ***I

1. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, \pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

Correction ▼ [005070]

Exercice 561 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

Correction ▼ [005071]

Exercice 562 ***

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$
On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Correction ▼ [005072]

Exercice 563 ****

On veut calculer $S = \tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$.

1. Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan x$.
2. En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9°$, $-\tan 27°$, $-\tan 63°$ et $\tan 81°$ puis la valeur de S.

Correction ▼ [005073]

Exercice 564 ***

Combien l'équation
$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$
possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Correction ▼ [005074]

Exercice 565 **I

On veut calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2. Vérifier que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

3. En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b puis les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Correction ▼ [005075]

Exercice 566 **I

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos^2 x$,
2. $x \mapsto \cos^4 x$,
3. $x \mapsto \sin^4 x$,
4. $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$,
5. $x \mapsto \sin^6 x$,
6. $x \mapsto \cos x \sin^6 x$,
7. $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$,
8. $x \mapsto \cos^3 x$.

Correction ▼ [005076]

Exercice 567 **

Calculer $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

Correction ▼ [005077]

Exercice 568 **

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\frac{x}{2}$,
2. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$,
3. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$,
4. $\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$.

Correction ▼ [005078]

Exercice 569 ***

Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1. Etudier les variations de $f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1-2k\cos x + k^2}}$.
2. Calculer $\int_0^{\pi} f_k(x) \, dx$.

Correction ▼ [005079]

Exercice 570 ***I

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
2. $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Correction ▼ [005080]

Exercice 571 ***

Résoudre le système $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$ où a, b et c sont trois réels.

Correction ▼ [005081]

Exercice 572 **

Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Correction ▼ [005082]

Exercice 573 ***

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\right\}$.

Correction ▼ [005083]

Exercice 574 ***

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geq \frac{n}{4}$ (remarquer que si $x \in [0;1]$, $x^2 \leq x$).

Correction ▼ [005162]

---

24 104.99 Autre

Exercice 575

Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$. [000093]

Exercice 576

Soit u, v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel. [000094]

Exercice 577

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx).$$

[000095]

Exercice 578

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \; ; \; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - \alpha| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :
$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Correction ▼ Vidéo ■ [000096]

Exercice 579

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\dfrac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$. Étudier les cas d'égalité.

[000097]

Exercice 580

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. Montrer que si $z \neq -\dfrac{d}{c}$ alors $\mathrm{Im}(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|(cz+d)|^2}$. [000098]

Exercice 581

Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a + b + c| = |a| + |b| + |c|$. [000099]

Exercice 582

1. Étudier la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 4$, $z_{n+1} = f(z_n)$ où f est l'application de $\mathbb{C}$ sur lui-même définie par :
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = i + \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z.$$
Indication : on commencera par rechercher les coordonnées cartésiennes de l'unique point α tel que $f(\alpha) = \alpha$, puis on s'intéressera à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = z_n - \alpha.$$

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = |z_{n+1} - z_n|$. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} l_k$$
et interpréter géométriquement.

[000100]

Exercice 583 Examen octobre 1999

On définit une fonction f de $\mathbb{C} - \{i\}$ dans $\mathbb{C} - \{1\}$ en posant
$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

[000101]

Exercice 584 Examen novembre 2001

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

1. Calculer les points fixes de la fonction f, c'est à dire les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.
2. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z)$ est réel.

[000102]

Exercice 585

1. Montrer que si $x+y+z = a$, $yz+zx+xy = b$, $xyz = c$, alors x, y et z sont solutions de l'équation $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$. Trouver x, y et z si on suppose $a = b = 0$ et $c = -8$.
2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \end{cases}$$

Correction ▼ [000103]

Exercice 586 ***

Montrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}-nz^n = 0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Correction ▼ [005132]

Exercice 587 ***T ESIM 1993

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ et $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1. Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{th} z$ existe ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\operatorname{th} z = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases}$.
4. Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / \ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $U = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1\}$.

Correction ▼ [005136]

---

25 105.01 Division euclidienne

Exercice 588

Effectuer la division euclidienne du polynôme $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $Q = X^2 - 1$. Même exercice lorsque $P = X^4 - 2X\cos(2\varphi) + 1$ et $Q = X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1$. [000356]

Exercice 589

Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est 1 et celui de la division de P par $X-b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$? [000357]

Exercice 590

Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n+X+1 par le polynôme $(X-1)^2$. [000358]

Exercice 591

Pour quelles valeurs de m le polynôme $P=(X+1)^m-X^m-1$ est-il divisible par le polynôme $Q=X^2+X+1$? [000359]

Exercice 592

Montrer que le polynôme $P(X)-X$ divise le polynôme $P(P(X))-X$. [000360]

Exercice 593

Déterminer $a,b\in\mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1}-bX^n+1$ soit divisible par le polynôme $(X-1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes. [000361]

Exercice 594

Existe-t-il un polynôme P de degré 7 tel que $(X-1)^4$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^4$ divise $P(X)-1$? [000362]

Exercice 595

Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

1. $P=1$ par $Q=1-X$, à l'ordre n,
2. $P=1+X$ par $Q=1+X^2$ à l'ordre 5,
3. $P=X-\frac{X^3}{6}+\frac{X^5}{12}$ par $Q=1-2X^2+X^4$ à l'ordre 5.

[000363]

Exercice 596

Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3,
$3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2,
X^4-X^3+X-2 par X^2-2X+4.
Correction ▼ [000364]

Exercice 597

Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$X^2-3iX-5(1+i)$ par $X-1+i$,
$4X^3+X^2$ par $X+1+i$. [000365]

Exercice 598

Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4+X^3-2X+1 \text{ par } X^2+X+1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Correction ▼ [000366]

Exercice 599

Soit a et b deux nombres complexes distincts, m et n deux entiers naturels. Montrer que si les polynômes $(X-a)^m$ et $(X-b)^n$ divisent un polynôme P, alors le polynôme $(X-a)^m(X-b)^n$ divise P. [000367]

Exercice 600

Pour $n\in\mathbb{N}$, quel est le reste de la division de X^n+X+b par $(X-a)^2$? [000368]

Exercice 601

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ est divisible par X^2-X+1. Trouver le quotient si $n=2$. [000369]

Exercice 602

Trouver les polynômes P tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé P'.

Combien y a-t-il de solutions de degré ≤ 7 ?

Correction ▼ [000370]

Exercice 603

Effectuer la division de $A = X^6-2X^4+X^3+1$ par $B = X^3+X^2+1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Correction ▼ [000371]

Exercice 604

Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que X^2+2 divise $X^4+X^3+aX^2+bX+2$. [000372]

Exercice 605

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin aX+\cos a)^n$ par X^2+1. [000373]

Exercice 606

Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X-1$ est 7 et par $X+5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par X^2+4X-5 ? [000374]

Exercice 607

Effectuer la division euclidienne de $X^5-7X^4-X^2-9X+9$ par X^2-5X+4.

Correction ▼ [000375]

Exercice 608

Soit $n \geq 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ par $(X-1)^2$. [000376]

Exercice 609

Soient $P, Q \in K[X]$ tels que X^2+X+1 divise $P(X^3)+XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$. Réciproque ? [000377]

Exercice 610

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Correction ▼ [000378]

Exercice 611 Décomposition en puissances croissantes

Soit $A \in K[X]$ de degré > 0. Montrer que pour tout polynôme $P \in K_n[X]$, il existe des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ uniques vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i < \deg A \\ P = P_0 + P_1 A + \cdots + P_n A^n. \end{cases}$$

[003196]

Exercice 612 Linéarité du reste et du quotient

Soit $B \in K[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :

$$\Phi : K[X] \to K_{n-1}[X], P \mapsto R$$

et

$$\Psi : K[X] \to K[X], P \mapsto Q \qquad \text{avec } P = QB + R.$$

1. Montrer que Φ et Ψ sont linéaires. Chercher leurs noyaux et leurs images.
2. Simplifier $\Phi(P_1 P_2)$.

[003197]

Exercice 613 Endomorphisme $P \mapsto AP \bmod B$

Soit $E = K_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$, et $\varphi : E \to E, P \mapsto$ reste de la div. euclid. de AP par B.
Chercher $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$.

Correction ▼ [003198]

Exercice 614 Congruences

Soient $P \in K[X]$, $a, b \in K$ distincts, et $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?
2. Trouver le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Correction ▼ [003199]

Exercice 615 Congruences

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ divisibles par $X+1$ et dont les restes des divisions par $X+2, X+3, X+4$ sont égaux.

Correction ▼ [003200]

Exercice 616 Calcul de pgcd

Calculer le pgcd de P et Q pour :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$
   $Q = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$
   $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$
3. $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$
   $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$

Correction ▼ [003201]

Exercice 617 Coefficients de Bézout

Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U, V \in K[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

1. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$
   $Q = X^2 + X + 1$
2. $P = X^3 + X^2 + 1$
   $Q = X^3 + X + 1$

Correction ▼ [003202]

Exercice 618 Division de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$

Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

Correction ▼ [003203]

Exercice 619 Ensi P 90

Pour quels $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1+X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $1 + X + X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Correction ▼ [003204]

Exercice 620 Division de $(X-2)^2 n + (X-1)^n - 1$ par $(X-1)(X-2)$

Soit $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

1. Montrer que P_n est divisible par $X-1$ et par $X-2$. On note Q_1 et Q_2 les quotients correspondant.
2. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient est $Q_2 - Q_1$.
3. Montrer que ce quotient est égal à :

$$\Big((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + \cdots - (X-2) + 1\Big) + \Big((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + \cdots + (X-1) + 1\Big).$$

Correction ▼ [003205]

Exercice 621 Calcul de restes

Trouver les restes des divisions euclidiennes :

1. de X^{50} par X^2-3X+2.
2. de $\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}$ par X^2+1.
3. de X^8-32X^2+48 par $\left(X-\sqrt{2}\right)^3$.

Correction ▼ [003206]

Exercice 622 Divisibilité

Trouver $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ tels que X^2+X+1 divise $X^5+\lambda X^3+\mu X^2+1$.

Correction ▼ [003207]

Exercice 623 Congruences

Soit $P\in K[X]$ tel que les restes des divisions de P par X^2+1 et X^2-1 valent respectivement $2X-2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de P par X^4-1 ?

Correction ▼ [003208]

Exercice 624 $\operatorname{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$

Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Chercher $\operatorname{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$.

Correction ▼ [003209]

Exercice 625 Degré minimal dans la formule de Bézout

Soient $P,Q\in K[X]$ non nuls et $D=\operatorname{pgcd}(P,Q)$.

1. Démontrer qu'il existe $U,V\in K[X]$ uniques tels que : $\begin{cases} UP+VQ=D \\ \deg U<\deg Q-\deg D \\ \deg V<\deg P-\deg D. \end{cases}$
2. Montrer que la méthode des divisions euclidiennes fournit U et V.

Correction ▼ [003210]

Exercice 626 Application $(U,V)\mapsto UA+VB$

Soient $A,B\in K[X]$, $p=\deg A$, $q=\deg B$. On considère l'application :

$$\Phi: K_{q-1}[X]\times K_{p-1}[X]\to K_{p+q-1}[X], (U,V)\mapsto UA+VB$$

Démontrer que : $A\wedge B=1 \iff \Phi$ est bijective. [003211]

Exercice 627 $\operatorname{pgcd}(P(X),P(-X))$ et $\operatorname{ppcm}(P(X),P(-X))$

Soit $P\in K[X]$. Démontrer que $\operatorname{pgcd}(P(X),P(-X))$ et $\operatorname{ppcm}(P(X),P(-X))$ sont pairs ou impairs. [003212]

Exercice 628 $A\circ P|B\circ P\Rightarrow A|B$

Soient $A,B,P\in K[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A\circ P$ divise $B\circ P$, alors A divise B. [003213]

Exercice 629 ***

Division euclidienne de $P=\sin aX^n-\sin(na)X+\sin((n-1)a)$ par $Q=X^2-2X\cos a+1$, a réel donné.

Correction ▼ [005323]

26 105.02 Pgcd

Exercice 630

Calculer $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Correction ▼ [000379]

Exercice 631

Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Correction ▼ [000380]

Exercice 632

Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$. [000381]

Exercice 633

Montrer qu'il existe deux polynômes : U, V, vérifiant : $(\star)$ $(X-1)^n U + X^n V = 1$. Déterminer U_1 et V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$. [000382]

Exercice 634

Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n, m sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

[000383]

Exercice 635

Soit n un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X - 1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3 - 1)U + (X - 1)^3 V = X - 1$. En donner un.

[000384]

Exercice 636

Montrer que les éléments $X^2 + X$, $X^2 - X$, $X^2 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux, mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux. [000385]

Exercice 637

Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un pgcd de A et B avec $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. [000386]

Exercice 638

Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Correction ▼ [000387]

Exercice 639

Trouver le pgcd des trois polynômes :

$$\begin{aligned} A &= X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 2 \\ B &= X^2 + 3X + 2 \\ C &= X^3 + 2X^2 + X + 2. \end{aligned}$$

[000388]

Exercice 640

Soit les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{array}{rcl} A & = & (X+3)^2(X+1)(X^2+1)^3 \\ B & = & (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1) \\ C & = & (X+3)(X+2)(X^2+1)^2. \end{array}$$

1. Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?
2. Écrire le pgcd et le ppcm de A et B.
3. Écrire le pgcd et le ppcm des trois polynômes A, B et C.

[000389]

Exercice 641

1. Trouver le pgcd de $X^{24}-1$ et $X^{15}-1$; le pgcd de $X^{280}-1$ et $X^{60}-1$.
2. Montrer que quels que soient les entiers positifs b et q, X^b-1 divise $X^{bq}-1$. En déduire que le reste de la division de X^a-1 par X^b-1 est X^r-1 où r est le reste de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b. Quel est alors le pgcd de X^a-1 et X^b-1 ? Application : trouver le pgcd de $X^{5400}-1$ et $X^{1920}-1$.
3. P étant un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$, et a et b deux entiers naturels, quel est le pgcd de P^a-1 et P^b-1 ? Indication : utiliser le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

[000390]

Exercice 642

Soit $A\in\mathbb{C}[X]$ et $B\in\mathbb{C}[X]$.

1. A-t-on $\mathrm{pgcd}(A,B)=1 \iff \mathrm{pgcd}(A+B,AB)=1$?
2. A-t-on $\mathrm{pgcd}(A,B)=\mathrm{pgcd}(A+B,AB)$?

[000391]

Exercice 643

Soit n un entier strictement positif.

1. Démontrer qu'il existe un unique couple de polynômes P et Q de degrés strictement inférieurs à n tels que $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$.
2. Démontrer que $P(1-X)=Q(X)$ et $Q(1-X)=P(X)$.
3. Démontrer qu'il existe une constante a telle que
$$(1-X)P'(X)-nP(X)=aX^{n-1}.$$
En déduire les coefficients de P et la valeur de a.

Réponse : $a=-(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}$.

[000392]

Exercice 644

Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ et $Q\in\mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, tels que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$. En déduire que l'équation $x^2+y^2=z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$.

[000393]

Exercice 645

1. Montrer que les polynômes $X-1$ et $X-2$ sont premiers entre eux et en déduire $d=\mathrm{pgcd}((X-1)^2,(X-2)^3)$ et des U et V polynômes tels que
$$U(X-1)^2+V(X-2)^3=d.$$
2. Déterminer le polynôme P, de degré minimal, tel que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $2X$ et le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^3$ est $3X$.

[000394]

Exercice 646

Montrer que les polynômes complexes $P=X^{1998}+X+1$ et $Q=X^5+X+1$ sont premiers entre eux.

[000395]

Exercice 647 **IT

Déterminer le PGCD de $X^6-7X^4+8X^3-7X+7$ et $3X^5-7X^3+3X^2-7$.

Correction ▼

[005317]

---

27 105.03 Racine, décomposition en facteurs irréductibles

Exercice 648

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irationnelle.
2. Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

[000396]

Exercice 649

Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux (c'est à dire tels que les seuls diviseurs communs à tous les a_i soient -1 et 1). Montrer que si $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n. [000397]

Exercice 650

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}$ alors il n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P, de multiplicité strictement plus grande que $\frac{n}{2}$.Montrer que λ est rationnel.

[000398]

Exercice 651

Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

[000399]

Exercice 652

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1$, $Q = X^{2n} + 1$, $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

[000400]

Exercice 653

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.
Correction ▼ [000401]

Exercice 654

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$. [000402]

Exercice 655

Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. [000403]

Exercice 656

Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$. [000404]

Exercice 657

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $n \in \mathbb{Z}$; notons $m = P(n)$; $(\deg(P) \geq 1)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, m$ divise $P(n + km)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit premier.

[000405]

Exercice 658

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$). *Indications :*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

[000406]

Exercice 659

Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on suppose $\sin n\theta \neq 0$. Déterminer les racines du polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin k\theta \, X^k$. Vérifier que ces racines sont toutes réelles. [000407]

Exercice 660

Soit $a \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux. On suppose que a est racine double de $P^2 + Q^2$. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$. [000408]

Exercice 661

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Correction ▼ [000409]

Exercice 662

Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?
Correction ▼ [000410]

Exercice 663

Montrer que le polynôme $X^3 + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. [000411]

Exercice 664

Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Correction ▼ [000412]

Exercice 665

Quelle est la décomposition de $X^6 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$? [000413]

Exercice 666

Soit P le polynôme $X^4 + 2X^2 + 1$. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P. [000414]

Exercice 667

Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

[000415]

Exercice 668

Soit E le polynôme du troisième degré : aX^3+bX^2+cX+d avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, et soit x_1, x_2, x_3 ses trois racines dans $\mathbb{C}$. Trouver un polynôme ayant pour racines x_1x_2, x_2x_3 et x_3x_1. [000416]

Exercice 669

Soient x_1,x_2,x_3 les racines de X^3-2X^2+X+3. Calculer $x_1^3+x_2^3+x_3^3$. [000417]

Exercice 670

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1. [000418]

Exercice 671

Soit $n \geq 2$ et $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. P_n a-t-il une racine double ? [000419]

Exercice 672

Résoudre les équations :

1. $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

[000420]

Exercice 673

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme P^2+1 n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

[000421]

Exercice 674

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2p+1}) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

[000422]

Exercice 675

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. X^6+1.
2. $X^9+X^6+X^3+1$.

Correction ▼ [000423]

Exercice 676 Factorisation de X^n-1

Factoriser X^n-1 sur $\mathbb{C}$.

1. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer également $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)$.
3. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\prod_{0 \leq k,\ell<n, k\neq \ell}(\omega^k-\omega^\ell)$.

Correction ▼ [003214]

Exercice 677 Mines MP 1999

Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^{2k}-2\omega^k\cos\theta+1) = 2(1-\cos(n\theta))$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Correction ▼ [003215]

Exercice 678 Racines de j et j^2

Montrer que si $p \leq n$, alors $X^{2^p} + X^{2^{p-1}} + 1$ divise $X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$. [003216]

Exercice 679 $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n\cos(n\theta) + 1$

Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n\cos n\theta + 1$. Pour $\sin\theta \neq 0$, chercher le quotient.

Correction ▼ [003217]

Exercice 680 $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$

Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$, puis déterminer le quotient.

Correction ▼ [003218]

Exercice 681 $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{8n} + pX^{4n} + q$

Donner une CNS sur $p, q \in \mathbb{C}$ pour que $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{8n} + pX^{4n} + q$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé).

Correction ▼ [003219]

Exercice 682 Racines rationnelles

Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant qu'il existe des racines rationnelles.

Correction ▼ [003220]

Exercice 683 Équation de degré 4 tq $x_1x_2 = 5$

Trouver les racines de $P(X) = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ sachant que deux racines, x_1 et x_2, vérifient : $x_1x_2 = 5$ (on introduira le polynôme $Q = X^4P(5/X)$).

Correction ▼ [003221]

Exercice 684 Racines multiples

Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Correction ▼ [003222]

Exercice 685 Recherche d'une racine triple

Soit $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$. Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que P a une racine triple dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors P.

Correction ▼ [003223]

Exercice 686 Ensi P 90

Donner une condition sur λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 + 2x - 1 = 0$ ait une racine au moins triple.

Correction ▼ [003224]

Exercice 687 $x_1 + x_2 = 1$

Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^5 + pX + q$. Donner une CNS sur p et q pour que deux des racines de P aient pour somme 1.

Correction ▼ [003225]

Exercice 688 Factorisation

Factoriser

$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

Correction ▼ [003226]

Exercice 689 $X - 1 \mid P(X^n) \Rightarrow X - 1 \mid P$

Soient $P, Q \in K[X]$.

1. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors P est divisible par $X - 1$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

2. Montrer que si $P(X^3)+XQ(X^3)$ est divisible par X^2+X+1, alors P et Q sont divisibles par $X-1$.

[003227]

Exercice 690 Racines de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\sin k\theta)X^k$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin n\theta \neq 0$. Démontrer que le polynôme $P=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\sin k\theta)X^k$ a toutes ses racines réelles.

Correction ▼ [003228]

Exercice 691

Démontrer que $1+X+X^n$ n'a que des racines simples. [003229]

Exercice 692 P' divise P

Quels sont les polynômes $P \in K[X]$ tels que P' divise P ?

Correction ▼ [003230]

Exercice 693 Équations fonctionnelles

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que ...

1. $P(X^2)=P(X-1)P(X+1)$.
2. $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.
3. $P(X)P(X+2)+P(X^2)=0$.

Correction ▼ [003231]

Exercice 694 P à racines réelles simples => P^2+a^2 à racines simples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. Démontrer que les racines de P' sont aussi réelles.
2. En déduire que : $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, les racines de P^2+a^2 sont simples.

[003232]

Exercice 695 P et Q ont même module

Soient $P,Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |P(z)|=|Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}, |u|=1$ tel que $P=uQ$.

Correction ▼ [003233]

Exercice 696 Valeur moyenne

Soient $z_0,z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a $P(z_0)=\frac{P(z_1)+\cdots+P(z_n)}{n}$.
On note $\Phi(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-z_i)$.

1. Calculer $\frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k}$.
2. En déduire que $\Phi(X)=\frac{(X-z_0)\Phi'(X)}{n}+\Phi(z_0)$.
3. Démontrer que $z_1,\dots,z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.
4. Réciproque ?

Correction ▼ [003234]

Exercice 697 $P(x)\neq 14$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x)=7$ pour au moins 4 valeurs distinctes $x \in \mathbb{Z}$.
Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, on a $P(x)\neq 14$. [003235]

Exercice 698 Nombre algébrique rationnel

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$.
Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant $P(\alpha)=0$ est appelé : *polynôme minimal de* α.

1. Soit α algébrique de polynôme minimal P. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que α est racine simple de P.
2. Soit α algébrique, et $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$. On suppose que la multiplicité de α dans P est strictement supérieure à $\frac{1}{2}\deg P$. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

[003236]

Exercice 699 $P(\sqrt{2}) = 0$

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Démontrer que $-\sqrt{2}$ est aussi racine de P avec la même multiplicité que $\sqrt{2}$. [003237]

Exercice 700 Polynôme minimal de $2\cos(2\pi/7)$

Montrer que $x = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Quelles sont les autres racines ?
Correction ▼ [003238]

Exercice 701 Racines réelles simples

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leq P'^2(x)$.
2. Démontrer que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Correction ▼ [003239]

Exercice 702 Méthode de Ferrari

Soit $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$.
Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, et $P - Q^2$ a une racine double. Factoriser alors P sur $\mathbb{R}$.
Correction ▼ [003240]

Exercice 703 Pgcd $\neq 1 \Leftrightarrow$ racine commune

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine en commun dans $\mathbb{C}$. [003241]

Exercice 704 Mines MP 2001

Soit K un corps de caractéristique p.

1. Montrer que $\sigma\ :\ x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps.
2. Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in K[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Correction ▼ [003242]

Exercice 705 Centrale MP 2001

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $V(x)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$ en convenant de retirer les termes nuls. Soient $\alpha < \beta$ deux réels non racines de P. Montrer que le nombre de racines de P dans $[\alpha, \beta]$, comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que $V(\alpha) - V(\beta)$ et que $V(\alpha) - V(\beta) \geq 0$.
Correction ▼ [003243]

Exercice 706 X MP* 2004

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1. Pour $\omega \in \mathbb{U}$ on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P et $Q(X) = P(X) + \omega X^d \overline{P}(1/X)$. Montrer que les racines de Q sont de module 1.
Correction ▼ [003244]

Exercice 707 X MP* 2005

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| < a_n$. Soit $f(x) = a_0 + a_1\cos x + \cdots + a_n\cos(nx)$. Montrer que les zéros de f sont tous réels (cad. si $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $f(x) \neq 0$).
Correction ▼ [003245]

Exercice 708 Factorisation sur $\mathbb{R}$ de $X^8 + X^4 + 1$

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Correction ▼ [003246]

Exercice 709 Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$

Démontrer que $1+(X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Correction ▼ [003247]

Exercice 710 Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \exists\, Q,R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2+R^2\}$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par multiplication.
2. Montrer que $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0\}$.
3. (Centrale MP 2000, avec Maple) $P = 65X^4-134X^3+190X^2-70X+29$. Trouver A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $P = A^2+B^2$.

Correction ▼ [003248]

Exercice 711 Lemme de Gauss

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On appelle *contenu de P* le pgcd des coefficients de P (notation : $\mathrm{cont}(P)$).

1. Soient $P,Q \in \mathbb{Z}[X]$ avec $\mathrm{cont}(P) = 1$, et $R = PQ$. Soit p un facteur premier de $\mathrm{cont}(R)$.
   (a) Si p est premier avec le coefficient constant de P, Démontrer que p divise tous les coefficients de Q.
   (b) Si p divise le coefficient constant de P, se ramener au cas précédent.
   (c) En déduire que $\mathrm{cont}(Q) = \mathrm{cont}(R)$.
2. Lorsque $\mathrm{cont}(P) \neq 1$, trouver $\mathrm{cont}(PQ)$.
3. Application : Soit $R \in \mathbb{Z}[X]$, et $P,Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe $P_1,Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ proportionnels à P et Q et tels que $R = P_1Q_1$.
   (*cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur $\mathbb{Q}$ est aussi réductible sur $\mathbb{Z}$*)

[003249]

Exercice 712 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Démontrer que X^4+X+1 et X^6+X^2+1 sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$. [003250]

Exercice 713 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z}$ distincts.

1. Montrer que $(X-a_1)\dots(X-a_n)-1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Même question avec $(X-a_1)\dots(X-a_n)+1$, n impair.

Correction ▼ [003251]

Exercice 714 Critère d'irréductibilité d'Eisenstein

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0X^0$ et p un nombre premier tel que :

$$a_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p), \quad \dots, \quad a_{n-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p), \quad a_0 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^2).$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Correction ▼ [003252]

Exercice 715 Irréductibilité de $X^p - a$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $a \in K$ et $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que le polynôme X^p-a est irréductible sur K si et seulement s'il n'a pas de racine dans K.

Indication ▼ Correction ▼ [003253]

Exercice 716 **T

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n-X^n-1$ est-il divisible par X^2+X+1 ?

Correction ▼ [005318]

Exercice 717 ***

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2+S^2$.

Correction ▼ [005319]

Exercice 718 ****I Théorème de LUCAS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P' sont barycentres à coefficients positifs des racines de P (on dit que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\frac{P'}{P}$.
Correction ▼ [005324]

Exercice 719 ***
Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.
Correction ▼ [005325]

Exercice 720 **T
Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 - 209X + a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.
Correction ▼ [005328]

Exercice 721 ***T
Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq 5}$ la famille des racines de $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k+2}{a_k-1}$.
Correction ▼ [005329]

Exercice 722
Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 - 2X^3 \cos a + 1$ où a est un réel donné dans $[0, \pi]$.
Correction ▼ [005342]

Exercice 723
Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin \frac{k\pi}{7}$ où $k \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.
Correction ▼ [005345]

Exercice 724
Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4 - 4z^3 - 36z^2 + \lambda z + \mu$ soient en progression arithmétique. Résoudre alors l'équation.
Correction ▼ [005349]

Exercice 725
Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
Correction ▼ [005350]

Exercice 726
Soient x_1,..., x_8 les zéros de $X^8 + X^7 - X + 3$. Calculer $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$ (168 termes).
Correction ▼ [005351]

28 105.04 Fraction rationnelle

Exercice 727
Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3}{X^3-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^2} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ en remarquant que } F(jX) = F(X)$$

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$
$$\frac{1}{X^{2n}+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$
$$\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

[000443]

Exercice 728

1. Décomposer $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Décomposer $\frac{X}{X^2-4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
6. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
7. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
8. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
9. Décomposer $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
10. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
11. Décomposer $\frac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
12. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
13. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. Décomposer $\frac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. Décomposer $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. Décomposer $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [000444]

Exercice 729

Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000445]

Exercice 730

Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000446]

Exercice 731

Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}$.

Correction ▼ [000447]

Exercice 732

Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$. [000448]

Exercice 733

Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$. [000449]

Exercice 734

On appelle valuation une application $v : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ telle que : $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow v(\lambda) = 0, v(0) = \infty, \exists a \in \mathbb{C}(X) : v(a) = 1$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(fg) = v(f) + v(g)$$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$$

(avec les convention évidentes $k + \infty = \infty, \forall k \geq 1 : k\infty = \infty, 0\infty = 0$, etc.) Déterminer toutes les valuations de $\mathbb{C}(X)$ et montrer la formule (la somme portant sur toutes les valuations) :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X) - \{0\}, \sum_v v(f) = 0.$$

[000450]

Exercice 735 Substitution de fractions

Soit $F \in K(X)$ non constante et $P \in K[X]$, $P \neq 0$.

1. Montrer que $P \circ F \neq 0$.
2. Montrer que l'application$K(X) \to K(X), G \mapsto G \circ F$ est un morphisme injectif d'algèbre.
3. A quelle condition est-il surjectif ?
4. Montrer que tous les isomorphismes de corps de $K(X)$ sont de cette forme.

Correction ▼ [003270]

Exercice 736 Multiplicité des pôles

Soient $F, G_0, \ldots, G_{n-1} \in K(X)$ telles que $F^n + G_{n-1}F^{n-1} + \cdots + G_0 = 0$.
Montrer que l'ensemble des pôles de F est inclus dans la réunion des ensembles des pôles des G_i. [003271]

Exercice 737 Ensemble image d'une fonction rationelle

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Étudier $F(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\})$.
Correction ▼ [003272]

Exercice 738 $F \circ G$ est un polynôme

Trouver tous les couples $(F,G) \in \big(\mathbb{C}(X)\big)^2$ tels que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$ (utiliser l'exercice 737).
Correction ▼ [003273]

Exercice 739 Fractions invariantes

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(e^{2i\pi/n}X) = F(X)$. Montrer qu'il existe une unique fraction $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$.
2. Application : Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}$.

Correction ▼ [003274]

Exercice 740 Fractions invariantes

Soit $H = \{F \in K(X)$ tel que $F(X) = F(\frac{1}{X})\}$.

1. Montrer que : $F \in H \Leftrightarrow \exists\, G \in K(X)$ tel que $F(X) = G\left(X + \frac{1}{X}\right)$.
2. Montrer que H est un sous-corps de $K(X)$.
3. Que vaut $\dim_H(K(X))$? Donner une base de $K(X)$ sur H.

Correction ▼ [003275]

Exercice 741 Formule de Taylor

Soit $F \in K(X)$ définie en $a \in K$. Démontrer qu'il existe une fraction G_n définie en a telle que :

$$F(X) = F(a) + (X-a)F'(a) + \cdots + (X-a)^{n-1}\frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (X-a)^n G_n(X).$$

[003276]

Exercice 742 Dérivée de $1/(x^2+1)$

Soit $F = \frac{1}{X^2+1}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tel que $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^n}$.
Montrer que les racines de P_n sont réelles et simples. [003277]

Exercice 743 Fractions de degré négatif

Soit $A = \{F \in K(X)$ tels que $\deg F \leq 0\}$. Démontrer que A est une sous-algèbre de $K(X)$.
Chercher ses idéaux.
Correction ▼ [003278]

Exercice 744 Décompositions pratiques des fractions rationnelles

Éléments de 1ère espèce

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2-1)^5} &= \frac{1}{32(x-1)^5} - \frac{5}{64(x-1)^4} + \frac{15}{128(x-1)^3} - \frac{35}{256(x-1)^2} + \frac{35}{256(x-1)} \\
&\quad - \frac{35}{256(x+1)} - \frac{35}{256(x+1)^2} - \frac{15}{128(x+1)^3} - \frac{15}{64(x+1)^4} - \frac{1}{32(x+1)^5} \\
\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} &= \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^3+x+1}{x^4(x-1)^3} &= -\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^2} - \frac{17}{x} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{17}{x-1} \\
\frac{(x^2-x+1)^2}{x^2(x-1)^2} &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^2}{(x^2-1)^2} &= \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}
\end{aligned}$$

Du type x^2+1

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} \\
\frac{x}{(x^4-1)^2} &= \frac{1}{16(x-1)^2} - \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{16(x+1)^2} - \frac{1}{8(x+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{4(x^2+1)} \\
\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} &= \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} \\
\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} &= 1 + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1/4}{x^2+1} \\
\frac{x^6}{(x^2+1)(x-1)^3} &= x+3 + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{5}{2(x-1)^2} + \frac{19}{4(x-1)}
\end{aligned}$$

Du type x^2+x+1

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} \\
\frac{x^4+1}{x^4+x^2+1} &= 1 + \frac{x}{2(x^2+x+1)} - \frac{x}{2(x^2-x+1)} \\
\frac{x^4+1}{x^2(x^2+x+1)^2} &= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+2}{x^2+x+1} \\
\frac{3x^5-5x^4+4x^2-11x+1}{(x^2+x+1)^6} &= -\frac{23x+6}{(x^2+x+1)^6} + \frac{13x+18}{(x^2+x+1)^5} + \frac{3x-11}{(x^2+x+1)^4}
\end{aligned}$$

Autres éléments de 2ème espèce

$$\begin{aligned}
\frac{x^8}{x^6-1} &= x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) \\
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) \\
\frac{x}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right) \\
\frac{1}{x^5+1} &= \frac{1}{5(x+1)} - \frac{1}{5}\left(\frac{\omega x-2}{x^2-\omega x+1} + \frac{\omega' x-2}{x^2-\omega' x+1}\right), \quad \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Racines de l'unité

$$\begin{aligned}
\frac{x^n+1}{x^n-1} &= 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{n(x-\omega^k)}, \quad \omega = e^{2i\pi/n} \\
\frac{1}{x^n-1} &= \sum_{k=1;2k\neq n}^{n-1} \frac{2x\cos\alpha_k - 2}{n(x^2-2x\cos\alpha_k+1)} + \frac{1}{n(x-1)} \left[-\frac{1}{n(x+1)} \text{ si n est pair}\right], \quad \alpha_k = \frac{2k\pi}{n} \\
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-\omega^k} &= \frac{nx^{n-1}}{x^n-1}, \quad \omega = e^{2i\pi/n} \\
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x-\omega^k)^2} &= \frac{nx^{2n-2}+n(n-1)x^{n-2}}{(x^n-1)^2}, \quad \omega = e^{2i\pi/n} \quad \text{(dérivée)}
\end{aligned}$$

Polynômes de Tchebychev

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(n\arccos x)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\beta_k}{x-\cos\beta_k}, \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\
\tan(n\arctan x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0;2k\neq n-1}^{n-1} \frac{1}{\cos^2\beta_k(\tan\beta_k - x)} \left[+\frac{x}{n} \text{ si n est impair}\right], \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}
\end{aligned}$$

Divers

$$\frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{(x^2+1)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma_n^k}{2^{n+k}} \left(\frac{(-1)^k}{(x-1)^{n-k}} + \frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-k}} \right)$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n \Gamma_n^k}{2^{n+k}} \left(\frac{i^{k+n}}{(x-i)^{n-k}} + \frac{(-i)^{k+n}}{(x+i)^{n-k}} \right)$$

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} k C_n^k}{x+k}$$

$$\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos\alpha+1} = \frac{1}{4\cos(\alpha/2)} \left(\frac{x}{x^2-2x\cos(\alpha/2)+1} - \frac{x}{x^2+2x\cos(\alpha/2)+1} \right), \quad \alpha \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi)$$

[003279]

Exercice 745 Ensi PC 1999

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur (x^2+1) : $\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)}$.

Correction ▼ [003280]

Exercice 746 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées p-ièmes des fractions suivantes :

1. $\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$.
2. $\frac{1}{X^2-2X\cos\alpha+1}$ $(\alpha \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi))$.
3. $\frac{1}{X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Correction ▼ [003281]

Exercice 747 Sommation de séries

A l'aide de décomposition en éléments simples, calculer :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Correction ▼ [003282]

Exercice 748 Partie polaire pour un pôle d'ordre 2

Soit $F(X) = \frac{1}{R(X)} = \frac{1}{(X-a)^2 Q(X)}$ avec $Q(a) \neq 0$. Chercher la partie polaire de F en a en fonction de Q puis en fonction de R.

Correction ▼ [003283]

Exercice 749

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ distincts et $P = (X-a_1)\dots(X-a_n)$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{(1+X^2)^n}{P^2}$.
2. Montrer que les coefficients des $\frac{1}{X-a_i}$ sont tous nuls si et seulement si : $(1+X^2)P'' - 2nXP' + n(n+1)P = 0$.

Correction ▼ [003284]

Exercice 750 P à racines x_i simples $\Rightarrow \sum x_i^k / P'(x_i) = 0$

Soit $P \in (x^2+1)^n[X]$ $(n \geq 2)$ ayant n racines distinctes : $x_1, \dots, x_n$.

1. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0$.
2. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Correction ▼ [003285]

Exercice 751 Les racines de P' sont des barycentres des racines de P

Soit $P \in (x^2+1)^[X]$ de racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_n$.

1. Décomposer en éléments simples $\frac{P'}{P}$.
2. En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $x_1, \dots, x_n$.

Correction ▼ [003286]

Exercice 752 $F'(X)/F(X) = \dots$

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Existe-t-il $F \in K(X)$ telle que : $\frac{F'(X)}{F(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - a_k}$? [003287]

Exercice 753 $F(X+1) - F(X) = \dots$

Trouver les fractions $F \in \mathbb{R}(X)$ telles que : $F(X+1) - F(X) = \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.

Correction ▼ [003288]

Exercice 754 Inversion de la matrice $(1/(a_i - b_j))$

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, et c des scalaires distincts. On note A la matrice carrée $\left(\frac{1}{a_i - b_j}\right)$ et B la matrice colonne $\left(\frac{1}{a_i - c}\right)$. Montrer que l'équation $AX = B$ possède une solution unique en considérant une fraction rationnelle bien choisie.

Correction ▼ [003289]

Exercice 755 Racines de $(X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant n racines positives distinctes (entre autres).
Factoriser le polynôme $Q = (X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$ en deux termes, faire apparaître $\frac{P'}{P}$, et Démontrer que Q admet au moins $2n-2$ racines positives.

Correction ▼ [003290]

Exercice 756 Inégalité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et $Q(X) = X(X-1)\dots(X-n)$.
Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k-i)}$ et en déduire l'existence de $k \in [[0,n]]$ tel que $|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}$.

Correction ▼ [003291]

Exercice 757 ENS MP 2002

Soit $P \in (x^2+1)^{[}X]$ admettant deux racines distinctes et tel que P'' divise P. Montrer que P est à racines simples.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant deux racines réelles distinctes, et tel que P'' divise P. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples.

Correction ▼ [003292]

Exercice 758 Division de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$ à l'ordre 3.
2. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^4(x^2+1)}$.

Correction ▼ [003293]

Exercice 759 Division de 1 par $(1-X)^2$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à un ordre n quelconque de 1 par $(1-X)^2$.
2. En déduire $1 + 2\cos\theta + 3\cos 2\theta + \cdots + n\cos(n-1)\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [003294]

Exercice 760 Division de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos t + X^2$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à un ordre queclonque de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos\theta + X^2$.
2. En déduire la valeur de $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$, $(\theta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi))$.

Correction ▼ [003295]

Exercice 761 Coefficients de Bézout

Soient $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$.

1. Vérifier que P et Q sont premiers entre eux.
2. Trouver $U, V \in K[X]$ tels que $UP + VQ = 1$ (utiliser une division suivant les puissances croissantes).

Correction ▼ [003296]

Exercice 762

Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$ 2) $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ 3) $\frac{1}{X(X-1)^2}$
4) $\frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ 5) $\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$ 6) $\frac{X^6}{(X^3-1)^2}$
7/ $\frac{1}{X^6+1}$ 8) $\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$ 9) $\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$
10) $\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$ 11) $\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$ 12) $\frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$
13) $\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

Correction ▼ [005335]

Exercice 763

Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\frac{1}{X^n-1}$ 2) $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ 3) $\frac{n!}{(X-1)(X-2)...(X-n)}$
4) $\frac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$ 5) $\frac{1}{X^{2n}+1}$.

Correction ▼ [005336]

Exercice 764

Soit U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ecrire sous forme d'une fraction rationnelle (ou encore réduire au même dénominateur) $F = \sum_{\omega \in U_n} \frac{\omega X+1}{\omega^2 X^2+\omega X+1}$.

Correction ▼ [005337]

Exercice 765

Soit $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont pairs. Etablir un résultat analogue pour F impaire.

Correction ▼ [005338]

Exercice 766

Montrer que $(\frac{1}{X-a})_{a\in\mathbb{C}}$ est libre dans $K(X)$.

Correction ▼ [005339]

Exercice 767

Calculer la dérivée n-ième de $\frac{1}{X^2+1}$.

Correction ▼ [005340]

Exercice 768

On pose $P = a(X-x_1)...(X-x_n)$ où les x_i sont des complexes non nécessairement deux à deux distincts et a est un complexe non nul. Calculer $\frac{P'}{P}$. De manière générale, déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est un polynôme scindé. Une application : déterminer tous les polynômes divisibles par leur dérivées.

Correction ▼ [005341]

29 105.99 Autre

Exercice 769

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme P_n et un seul tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta.$$

Montrer que P_n est unitaire et que ses coefficients sont entiers. En déduire les r rationnels tels que $\cos r\pi$ soit rationnel. [000424]

Exercice 770

Déterminer, s'il en existe, tous les idéaux J de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $I(P) \subset J \subset \mathbb{R}[X]$, avec $I(P)$ idéal engendré par P dans les cas suivants :

$$P = X^2 + X + 1, \quad P = X^2 + 2X + 1, \quad P = X^3 + 3X - 4.$$

[000425]

Exercice 771

Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Correction ▼ [000426]

Exercice 772

Trouver un polynôme P de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

Correction ▼ [000427]

Exercice 773

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\int_k^{k+1} P(t)dt = k+1$ (on pourra utiliser le polynôme $Q(x) = \int_0^x P(t)dt$). [000428]

Exercice 774

Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $\deg P_k = k$. Montrer à l'aide d'une récurrence soigneuse que cette famille est libre. [000429]

Exercice 775

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est linéaire, i.e. que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ $\Delta(aP + bQ) = a\Delta(P) + b\Delta(Q)$.
2. Déterminer $\ker(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \Delta(P) = 0\}$.
3. Soient $H_0 = 1$ et pour $k \in \{1, \dots, n\}$ $H_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$. Calculer $\Delta(H_k)$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comment trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
5. Déterminer P pour $Q = X^2$ tel que $P(1) = 0$.
6. En déduire la somme $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

[000430]

Exercice 776

Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$. [000431]

Exercice 777

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tels que $\exists (a,A) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall x \in]-a,a[, |P(x) - Q(x)| \leq A \left|x^{n+1}\right|$. Que dire de P et Q ? [000432]

Exercice 778

Soient $W_n = (X^2-1)^n$, $L_n = \frac{1}{2^n n!} W_n^{(n)}$.

1. Donner le degré de L_n, son coefficient dominant, sa parité, calculer $L_n(1)$. Donner L_0, L_1, L_2.
2. Démontrer : $\forall n \geq 1, (X^2-1)W_n' = 2nXW_n$, en déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0.$$
3. Montrer ensuite : $\forall n \geq 1, L_n' = XL_{n-1}' + nL_{n-1}$, puis $nL_n = XL_n' - L_{n-1}'$.
4. Montrer enfin que les polynômes L_n peuvent être définis par la récurrence :
$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}.$$

[000433]

Exercice 779

Montrer que si $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale (i.e. $xyz \neq 0$) dans $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on peut supposer x, y, z, sans facteurs communs. Dériver la relation, la multiplier par z, étudier le degré. [000434]

Exercice 780

Soit $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $P(0) = 1, P(1) = 0$, montrer :

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Indication : $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$, montrer $\sum_{k=0}^{n} P(w_k) = (n+1)a_0.$ [000435]

Exercice 781

1. Lemme : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $z_0 \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| \leq \varepsilon\}, |P(z)| > |P(z_0)|\,.$$

   Indications : Ecrire $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\deg P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$où k est le plus petit entier strictement positif tel que $P^{(i)}(z_0) \neq 0$.
   On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
2. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction $z \to |P(z)|$ est atteint sur un disque centré en 0, mettons $D(0, \mathbb{R})$, et expliquer pourquoi :

$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|\,.$$

3. Montrer avec le lemme que $P(z_0) = 0$.

[000436]

Exercice 782

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$. Quel est le degré de P ? Le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$. [000437]

Exercice 783

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont tous les zéros sont réels et distincts, montrer que $\phi = (P')^2 - PP''$ n'a pas de zéro réel. [000438]

Exercice 784

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un corps pour les lois usuelles sur $\mathbb{C}$ et $P \in K[X]$ non constant.

1. Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \in [1, +\infty[$ alors α est racine du polynôme P' avec la multiplicité $m-1$.
2. On suppose $K = \mathbb{R}$ et P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (on utilisera le théorème de Rolle).

[000439]

Exercice 785

Soient $m, n \in [1, +\infty[$, $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$ et $P = X^m - 1, Q = X^n - 1, D = X^d - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. (a) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est racine commune de P et Q alors x est racine de D (on pourra utiliser l'égalité de Bézout dans $\mathbb{Z}$).
   (b) Montrer que si $y \in \mathbb{C}$ est racine de D alors y est racine commune de P et Q (utiliser la définition de d).
2. (a) Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est racine de B. Peut-on en déduire que A divise B ? Même question si les racines de A sont simples.
   (b) Montrer que les racines de D et P sont simples et en déduire que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = D$.

[000440]

Exercice 786

Soient les polynômes complexes $P_1 = X^3 - 2$, $P_2 = X^4 + 4$ et $P_3 = X^4 + 4X^3 + 8$.

1. Étudier leur irréductibilité sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que P_1 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on utilisera que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$).
3. Montrer que P_2 est réductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que P_3 est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

[000441]

Exercice 787

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer toutes les racines complexes de P sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit. [000442]

Exercice 788 Familles libres de polynômes

Soit $a, b \in K$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. [003164]

Exercice 789 Formule de Van der Monde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0, n]]$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathscr{B}$ de $\frac{d^n}{dx^n}\left(X^n(1-X)^n\right)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$. [003165]

Exercice 790 Famille libre de polynômes

Soient $U, V \in K[X]$ non constants. On pose $P_k = U^k V^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre ...

1. lorsque $U \wedge V = 1$.
2. lorsque (U, V) est libre.

[003166]

Exercice 791 Ensi PC 1999

Déterminer les polyômes $P \in \mathbb{R}_{2n-1}(X)$ tels que $P(X) + 1$ est multiple de $(X-1)^n$ et $P(X) - 1$ est multiple de $(X+1)^n$.
Correction ▼ [003167]

Exercice 792 Opérateur différence

On note $U_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $\quad p \in \mathbb{N}$, et $\Delta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$

1. Démontrer que la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3. En déduire que : $\forall\, P \in K_n[X]$, ona $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que :
   $\big(\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $P(n) \in \mathbb{Z}\big) \Leftrightarrow \big($ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières$\big)$.
5. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

[003168]

Exercice 793 Liberté de $P(X), \dots, P(X+n)$

Soit $P \in K[X]$ de degré n. Démontrer que la famille $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big)$ est une base de $K_n[X]$.
(Utiliser l'opérateur Δ de l'exercice 792)
Correction ▼ [003169]

Exercice 794 $(X+z_0)^n, \dots, (X+z_k)^n$ (Centrale MP 2003)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z_0, \dots, z_k$ des complexes. Soient les polynômes $P_0 = (X+z_0)^n, \dots, P_k = (X+z_k)^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_0, \dots, P_k)$ soit une base de $C_n[X]$.
Correction ▼ [003170]

Exercice 795 $P - X \mid P \circ P - X$

1. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre dans (x^2+1) : $(z^2+3z+1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Correction ▼ [003171]

Exercice 796 $P \mapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$

Soit $\Phi : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$

1. Chercher $\deg(\Phi(P))$ en fonction de $\deg P$.
2. En déduire $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
3. Montrer que : $\forall\, Q \in K[X],\ \exists!\, P \in K[X]$ tq $\begin{cases} \Phi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0. \end{cases}$

[003172]

Exercice 797 $P \mapsto (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a)$

Soit $a \in K$ et $\Phi : K_n[X] \to K_n[X], P \mapsto (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a)$.
Chercher $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
Correction ▼ [003173]

Exercice 798 $A^3+B = C^3+D$

Soient $A,B,C,D \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\begin{cases} \deg A = \deg C = m \\ \deg B < 2m,\ \deg D < 2m \\ A^3+B = C^3+D. \end{cases}$

Montrer que $A = C$ et $B = D$.
Trouver un contre-exemple avec des polynômes à coefficients complexes. [003174]

Exercice 799 $P(n) \mid P(n+P(n))$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X],\ n \in \mathbb{Z}$, et $p = P(n)$. Montrer que p divise $P(n+p)$.
Correction ▼ [003175]

Exercice 800 $P(a/b) = 0 \Rightarrow a-kb$ divise $P(k)$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a,b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

1. Montrer que a divise le coefficient constant de P.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a-kb$ divise $P(k)$.

Correction ▼ [003176]

Exercice 801 Automorphismes des polynômes

Pour $A \in K[X]$ on note $\Phi_A : K[X] \to K[X], P \mapsto P \circ A$

1. Démontrer que les applications Φ_A sont les seuls endomorphismes d'algèbre de $K[X]$.
2. A quelle condition Φ_A est-il un isomorphisme ?

[003177]

Exercice 802 Sous anneau non principal des polynômes

Soit $A = \{P \in K[X]$ dont le coefficient de X est nul$\}$. Démontrer que A est un sous anneau non principal de $K[X]$. [003178]

Exercice 803 Équation $P^2+Q^2 = (X^2+1)^2$

Trouver $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $P^2+Q^2 = (X^2+1)^2$.
Correction ▼ [003179]

Exercice 804 Équation $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X = 0$

Trouver tous les polynômes $P \in K[X]$ tels que : $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X = 0$.
Correction ▼ [003180]

Exercice 805 $P(X)+P(X+1) = 2X^n$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in K[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.
2. Chercher une relation de récurrence entre P_n' et P_{n-1}.
3. Décomposer $P_n(X+1)$ sur la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Correction ▼ [003181]

Exercice 806 $(1-X)^n P + X^n Q = 1$

1. Démontrer qu'il existe $P, Q \in K_{n-1}[X]$ uniques tels que $(1-X)^n P + X^n Q = 1$.
2. Montrer que $Q = P(1-X)$.
3. Montrer que : $\exists\ \lambda \in K$ tel que $(1-X)P' - nP = \lambda X^{n-1}$.
4. En déduire P.

Correction ▼ [003182]

Exercice 807 Endomorphismes qui commutent avec la dérivation

Soit $\Phi \in \mathscr{L}K[X]$ commutant avec la dérivation, c'est à dire : $\forall\ P \in K[X]$, on a $\Phi(P') = \Phi(P)'$.

1. Démontrer qu'il existe un unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de scalaires tels que :
$$\forall\ P \in K_n[X],\ \text{on a } \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}.$$
(On écrit *formellement* : $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{D}^k$ avec $\mathrm{D}(P) = P'$)
2. Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \mapsto P(X+1)$.

[003183]

Exercice 808 P est positif $\Rightarrow P + P' + P" + \dots$ aussi

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) \geq 0$. Démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a $(P + P' + P'' + \dots)(x) \geq 0$.

Correction ▼ [003184]

Exercice 809 $P(\tan\alpha) = Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ P(\tan\alpha) = Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$?

Correction ▼ [003185]

Exercice 810 $X^n + 1/X^n = P_n(X + 1/X)$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant :
$$\forall\ z \in (x^2+1)^{*},\ z^n + z^{-n} = P_n(z + z^{-1}).$$
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant, et les racines de P_n.
3. Pour $P \in (x^2+1)^{[X]}$, on note $\tilde{P}$ le polynôme tel que :
$$\forall\ z \in (x^2+1)^{*},\ P(z) + P(z^{-1}) = \tilde{P}(z + z^{-1}).$$
Étudier l'application $P \mapsto \tilde{P}$.

Correction ▼ [003186]

Exercice 811 Polytechnique MP* 2000

1. Donner un isomorphisme f entre $(x^2+1)^{n+1}$ et $(x^2+1)^{n[X]}$.
2. Montrer que $\sigma : (x^2+1)^{n+1} \to (x^2+1)^{n+1}, (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$ est linéaire.
3. Si $(P, Q) \in ((x^2+1)^{[X]})^2$, on définit le produit $\overline{PQ}$ comme le reste de la division euclidienne de PQ par $X^{n+1} - 1$. Montrer que l'application induite par σ sur $(x^2+1)^{n[X]}$ (c'est-à-dire $f \circ \sigma \circ f^{-1}$) est l'application qui à P associe $\overline{XP}$.
4. Soit F un sous-espace de $(x^2+1)^{n+1}$ stable par σ.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(F) = \{\overline{RQ},\ R \in (x^2+1)^{n[X]}\}$.

Correction ▼ [003187]

Exercice 812 Centrale MP 2002

Déterminer tous les polynômes P tels que $P((x^2+1)^{)} \subset \mathbb{R}$ puis tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et enfin tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Correction ▼ [003188]

Exercice 813 Polytechnique MP 2002

Soient $x_1,\dots,x_n \in (x^2+1)$ distincts et $y_1,\dots,y_n \in (x^2+1)$. Trouver $E = \{P \in (x^2+1)^{[}X] \text{ tq } \forall\, i,\ P^{-1}(\{y_i\}) = \{x_i\}\}$.

Correction ▼ [003189]

Exercice 814 ENS Ulm MP 2002

Soit $S \subset \mathbb{N}$ fini et $P = \sum_{s\in S} a_s X^s \in (x^2+1)^{[}X]$.

1. On suppose que les a_s sont réels. Montrer que P a moins de racines strictement positives distinctes que la suite (a_s) n'a de changement de signe.
2. On suppose que P vérifie : $\forall\, s \in S,\ P(s) = 0$. Montrer que P est nul.

Correction ▼ [003190]

Exercice 815 $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geq 1$ (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geq 1$ est une réunion finie d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Correction ▼ [003191]

Exercice 816 Polynôme positif (Ens Ulm MP* 2003)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :
$(\forall\, x \geq 0,\ P(x) > 0) \Leftrightarrow (\exists\, \ell \in \mathbb{N}$ tq $(X+1)^{\ell}P(X)$ est à coefficients strictement positifs).

Correction ▼ [003192]

Exercice 817 Diviseurs premiers de la suite $(P(n))$ (Ens ULM-Lyon-Cachan MP* 2003)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant et E l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que E est infini.

Correction ▼ [003193]

Exercice 818 Centrale MP 2004

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X - P_n^2$ est divisible par X^n.

Correction ▼ [003194]

Exercice 819 Polynômes à coefficients entiers, ULM-Lyon-Cachan MP* 2004

On donne un entier $n \geq 0$.
Montrer qu'il existe des polynômes $P_0,\dots,P_n$ dans $\mathbb{Z}_n[X]$ tels que $\forall\, i,j \in [[0,n]],\ \int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.

Correction ▼ [003195]

Exercice 820 $a/b + b/c + c/a$

Soient a,b,c les racines de $X^3 + pX + q$, $q \neq 0$. Calculer : $\sum_{\sigma\in S_3} \left(\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} + \frac{\sigma(b)}{\sigma(c)} + \frac{\sigma(c)}{\sigma(a)}\right)$.

Correction ▼ [003254]

Exercice 821 $1/(x_i - 1)$

Soient x_1,x_2,x_3,x_4 les racines de $X^4 + X + 1$. Calculer $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i - 1}$.

Correction ▼ [003255]

Exercice 822 $x_i/(x_j x_k)$

Soient $x_1,\dots,x_8$ les racines de $X^8 + X^7 - X^2 + 3$. Calculer $\sum_{1\leq i\leq 8, 1\leq j<k\leq 8} \frac{x_i}{x_j x_k}$.

Correction ▼ [003256]

Exercice 823 x_i^7

Soient a,b,c les racines de X^3-X+1. Calculer $a^7+b^7+c^7$.

Correction ▼ [003257]

Exercice 824 $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $1/a+1/b+1/c$ donnés

Résoudre

$$\begin{cases} a+ & b+ & c= & 0 \\ a^2+ & b^2+ & c^2= & 1 \\ \dfrac{1}{a}+ & \dfrac{1}{b}+ & \dfrac{1}{c}= & -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003258]

Exercice 825 Ensi P 90

Résoudre dans (x^2+1) le système : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Correction ▼ [003259]

Exercice 826 $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$

Trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$.

Correction ▼ [003260]

Exercice 827 a,b,c en progression géométrique

Soient $a,b,c \in (x^2+1)$.
Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$. [003261]

Exercice 828 Condition liant les racines

Soit $P = X^3+pX+q$ de racines a,b,c.

1. CNS pour ces racines soient aux sommets d'un carré ?
2. CNS pour que $a^2+b^2 = 1+c^2$?

Correction ▼ [003262]

Exercice 829 Condition liant les racines

Soient A,B,C les points dont les affixes sont les racines de X^3+pX+q, $p,q \in (x^2+1)$. A quelle condition sur p et q a t-on $AB = AC = 2BC$?

Correction ▼ [003263]

Exercice 830 Condition liant les racines

Soit $P = X^4+aX^2+bX+c$ de racines $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. CNS pour ces racines soient en progression arithmétique ?

Correction ▼ [003264]

Exercice 831 Transformation d'équation

Soient x_1,x_2,x_3 les racines de X^3+2X^2+3X+4.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ sont *les* racines.

Correction ▼ [003265]

Exercice 832 Transformation d'équation

Soient x_1,x_2,x_3 les racines de X^3+aX^2+bX+c.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont x_1^2,x_2^2,x_3^2 sont *les* racines.

Correction ▼ [003266]

Exercice 833 $2X^3+5X^2-X+\lambda$ a une racine de module 1

Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2X^3+5X^2-X+\lambda$ ait une racine de module 1.

Correction ▼ [003267]

Exercice 834 Polynômes dont les racines sont de module 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, unitaires de degré n et dont toutes les racines sont de module 1.

1. Démontrer que $\mathscr{E}$ est fini.
2. Pour $P \in \mathscr{E}$ de racines $x_1,\dots,x_n$, on note $\widetilde{P}$ le polynôme unitaire de racines $x_1^2,\dots,x_n^2$.
   Démontrer que $\widetilde{P} \in \mathscr{E}$.
3. En déduire que : $\forall\, P \in \mathscr{E}$, les racines de P sont des racines de l'unité.

Correction ▼ [003268]

Exercice 835 Centrale MP 2001

Soit $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ avec a,b,c,d réels. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour qu'il existe une droite coupant la courbe représentative de f en quatre points distincts M_1,M_2,M_3,M_4 tels que $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4$.

Correction ▼ [003269]

Exercice 836 ***

On pose $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$ et $Q=1+2X+...+nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}Q(\omega_k)$.

Correction ▼ [005314]

Exercice 837 **

Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.

Correction ▼ [005320]

Exercice 838 ***

Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m=P(n)$.

1. Montrer que $\forall k\in\mathbb{Z},\ P(n+km)$ est un entier divisible par m.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n.

Correction ▼ [005321]

Exercice 839 *** Polynômes P vérifiant $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$

Soit E la partie de $\mathbb{C}[X]$ formée des polynômes P vérifiant $\forall a\in\mathbb{Z},\ P(a)\in\mathbb{Z}$.

1. On pose $P_0=1$ et pour n entier naturel non nul, $P_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k)$ (on peut définir la notation $P_n=C_{X+n}n$). Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n\in E$.
2. Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est encore un élément de E.
3. Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_n.

Correction ▼ [005322]

Exercice 840 ***T

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X)+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X)-10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Correction ▼ [005326]

Exercice 841 ***I

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

Correction ▼ [005327]

Exercice 842 **

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{C}^4$) le système :

$$1)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=10 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=0 \\ x^4+y^4+z^4+t^4=26 \end{cases}.$$

Correction ▼ [005330]

Exercice 843 **T

Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X)=P'(X)P''(X)$.

Correction ▼ [005331]

Exercice 844 **

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $12X^4+X^3+15X^2-20X+4$.

Correction ▼ [005332]

Exercice 845 ***

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$ est divisible par $2X^3-3X^2+X$ puis déterminer le quotient.

Correction ▼ [005333]

Exercice 846 **I

Déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n+V(1-X)^m=1$ et $\deg(U)<m$ et $\deg(V)<n$.

Correction ▼ [005334]

Exercice 847

Soit $P=$ où n est un entier naturel non nul, les a_i sont des entiers relatifs et a_0 et a_n sont non nuls. Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p\wedge q=1$.
Montrer que, si $r=\frac{p}{q}$ est une racine (rationnelle) de P alors p divise a_0 et q divise a_n.
Application. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $9z^4-3z^3+16z^2-6z-4=0$.

Correction ▼ [005343]

Exercice 848 Equations réciproques

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4+2z^3+3z^2+2z+1=0$ en posant $Z=z+\frac{1}{z}$ (ou autrement).
2. $z^6-5z^5+5z^4-5z^2+5z-1=0$.
3. $z^7-z^6-7z^5+7z^4+7z^3-7z^2-z+1=0$.

Correction ▼ [005344]

Exercice 849

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4.
Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune

Correction ▼ [005346]

Exercice 850

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\begin{cases} y^2+yz+z^2=7 \\ z^2+zx+x^2=13 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$.

Correction ▼ [005347]

Exercice 851

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$.

1. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{2-\omega_k}\right)$.
2. Montrer que, pour tout réel a, $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2-2\omega_k\cos a+1)=2(1-\cos(na))$ (questions indépendantes.)

Correction ▼ [005348]

Exercice 852

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 21z + 8 = 0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.
Correction ▼ [005352]

30 106.01 Définition, sous-espace

Exercice 853

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x+y-z = x+y+z = 0\}$.

$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 - z^2 = 0\}$.

$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; e^x e^y = 0\}$.

$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z(x^2+y^2) = 0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000886]

Exercice 854

Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab, \forall a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. [000887]

Exercice 855

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+a = 0, \text{ et } x+3az = 0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) ; f(1) = 0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) ; f(0) = 1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] ; P' = 3\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x+\alpha y+1 \geqslant 0\right\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000888]

Exercice 856

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y = 0\}$; $E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.

$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$; $E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.

$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy \geq 0\}$; $E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy+y^2 \geq 0\}$. [000889]

$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(1) = 0\}$; $E_4' = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(0) = 1\}$;

$E_4" = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 857

Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) ; \lambda(a,b) = (a,\lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) ; \lambda(a,b) = (\lambda^2 a,\lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(a,b)+(c,d) = (c,d) ; \lambda(a,b) = (\lambda a,\lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

[000890]

Exercice 858

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
3. L'ensemble des solutions (x_1,x_2,x_3) du système : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0. \end{array}\right.$
4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
5. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

6. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t)\,dt$.
8. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
9. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4. Identifier cet ensemble.
10. L'ensemble des polynômes de degré exactement n.
11. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
12. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
13. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
14. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
15. L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
16. L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
17. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 \sin x f(x)\,dx = 0$.
18. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
19. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.

[000891]

Exercice 859

Montrer que l'ensemble $\mathscr{E} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / (\exists (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a\cos(x-\varphi)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. [000892]

Exercice 860

Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

Indication ▼ Correction ▼ [000893]

Exercice 861

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition usuelle et de la loi externe $\lambda(x,y) = (\lambda x, y)$. Est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? [000894]

Exercice 862

Montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0 \text{ et } 2x-y+3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. [000895]

Exercice 863

Montrer que
$$F = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\phi)\}$$
est un espace vectoriel. [000896]

Exercice 864

VRAI OU FAUX

1. L'ensemble $\{0\}$ est un espace vectoriel réel.
2. L'ensemble $\{0,1\}$ est un espace vectoriel réel.
3. Tout sous-espace vectoriel autre que $\{0\}$ possède un sous-espace strict.
4. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels (d'un même espace plus grand) est un espace vectoriel.
5. La réunion de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
6. La somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
7. Le produit cartésien $E \times F$ de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.

[002425]

Exercice 865

On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ de nombres réels ; $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels en la variable X ; $\mathbb{R}[X]_p$ le sous-ensemble des polynômes de degré $\leq p$; $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels en la variable X ; $\mathbb{R}(X)_p$ le sous-ensemble des fractions rationnelles de degré $\leq p$; $C^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et k fois continûment dérivables ($k \geq 0$ entier) ; $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dotés des opérations d'addition et de multiplication usuelles, lesquels de ces ensembles sont des espaces vectoriels ?
2. Montrer que $\mathbb{R}[X]_p \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}(X)$ et que $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$, et que ce sont des sous-espaces vectoriels.
3. Si l'on identifie les polynômes et les fractions rationnelles aux fonctions correspondantes, a-t-on $\mathbb{R}[X] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}(X) \subset C^\infty(\mathbb{R})$?

[002427]

Exercice 866

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F,G deux sous-espaces de E. Montrer que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.
[002428]

Exercice 867

Soit $E = \mathbb{R}[X]_n$ (polynômes de degré $\leq n$), et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E. Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme sans racine commune avec P, et tel que $\deg P + \deg Q = n$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

[002429]

Exercice 868

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions définies par
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t \cosh t, \\ x_2(t) &= \sin t \cosh t, \\ x_3(t) &= \cos t \sinh t, \\ x_4(t) &= \sin t \sinh t \end{aligned}$$
appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces quatres vecteurs, et u l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$. Montrer que F est stable par u et déterminer la matrice M de u dans la bae (x_1,x_2,x_3,x_4) de F.
3. Calculer M^n.

[002447]

Exercice 869

1. En utilisant les opérations d'addition $+$ et de multiplication $\cdot$ de deux nombres, définir, pour chaque ensemble E de la liste ci-dessous :
   – une addition $\oplus\ : E\times E \to E$;
   – une multiplication par un nombre réel $\odot\ : \mathbb{R}\times E \to E$.
   (a) $E = \mathbb{R}^n$;
   (b) $E =$ l'ensemble des trajectoires d'une particule ponctuelle dans l'espace $\mathbb{R}^3$;
   (c) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathscr{S}_1\ : x - 2y + 3z = 0;$
   (d) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ du système d'équations.
   $$\mathscr{S}_2\ : \begin{cases} 2x+4y-6z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} ;$$
   (e) $E =$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$;
   (f) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que
   $$y''(x)\sin x + x^3 y'(x) + y(x)\log x = 0,\ \forall x > 0;$$

(g) $E =$ l'ensemble des fonctions $\Psi(t,x)$, à valeurs complexes, solutions de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + x^2\Psi(t,x)$$

où $\hbar$ et m sont des constantes ;

(h) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ;

(i) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels ;

(j) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 ;

(k) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels divisibles par $(x-1)$;

(l) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles ;

(m) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles et d'intégrale nulle ;

(n) $E =$ l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0,1[$ à valeurs réelles ;

(o) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui s'annulent en $0 \in \mathbb{R}$.

(p) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$;

2. Pour les opérations d'addition $\oplus$ construites, montrer que E possède un élément neutre (terme à définir), et que chaque élément de E possède un inverse.

[002778]

Exercice 870

Qu'est -ce qui empêche de définir les mêmes opérations que dans l'exercice précédent sur les ensembles suivants ?

(a) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathscr{S}_3 : x - 2y + 3z = 3$;

(b) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que $y''(x)\sin x + x^3 y^2(x) + y(x)\log x = 0, \forall x > 0$;

(c) $E = \mathbb{N}$;

(d) $E = \mathbb{Z}$;

(e) $E = \mathbb{R}^+$;

(f) $E = \mathbb{Q}^n$;

(g) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs ;

(h) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui prennent la valeur 1 en 0 ;

(i) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$;

[002779]

Exercice 871 Somme de sous-espaces

Soient F,G,H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Comparer $F\cap(G+(F\cap H))$ et $(F\cap G)+(F\cap H)$.

Correction ▼ [003298]

Exercice 872 $F\cap G = F'\cap G'$

Soient F,G,F',G' des sev d'un ev E.

Montrer que si $F\cap G = F'\cap G'$ alors $\big(F+(G\cap F')\big)\cap\big(F+(G\cap G')\big) = F$.

Correction ▼ [003299]

Exercice 873 E n'est pas union de sous-espaces stricts

Soit E un K-ev non nul et $F_1,\dots,F_n$ des sev stricts de E. On veut montrer que $E \neq F_1\cup\dots\cup F_n$:

1. Traiter le cas $n=2$.
2. Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1\cup\dots\cup F_{n-1}$ et on choisit $\vec{x}\in F_n\setminus(F_1\cup\dots\cup F_{n-1})$ et $\vec{y}\notin F_n$.

   (a) Montrer que : $\forall\, \lambda\in K$, $\lambda\vec{x}+\vec{y}\notin F_n$.

   (b) Montrer que : $\forall\, i\le n-1$, il existe au plus un $\lambda\in K$ tel que $\lambda\vec{x}+\vec{y}\in F_i$.

   (c) Conclure.

[003300]

Exercice 874 Intersection et somme de sev

Soit E un ev de dimension finie et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E.

On note $H = \bigcap_{i\in I} F_i$ et $S = \sum_{i\in I} F_i = \operatorname{vect}\Big(\bigcup_{i\in I} F_i\Big)$.

Montrer qu'il existe une partie finie, J, de I telle que : $H = \bigcap_{i\in J} F_i$ et $S = \sum_{i\in J} F_i$. [003323]

Exercice 875 *T

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $f+g$ et $\lambda.f$ usuels) (ne pas hésiter à redémontrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1) $f(0)+f(1)=0$ 2) $f(0)=0$ 3) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ 4) $\forall x\in[0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$
5) $\forall x\in[0,1],\ f(x)\geq 0$ 6) $2f(0)=f(1)+3$

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Correction ▼ [005164]

Exercice 876 **T

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois produit usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$ 2) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=1\}$
3) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=x_2\}$ 4) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1+...+x_n=0\}$
5) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1.x_2=0\}$

Correction ▼ [005165]

Exercice 877 **

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A\cap B=A\cap C$, $A+B=A+C$ et $B\subset C$. Montrer que $B=C$.

Correction ▼ [005166]

Exercice 878 **T

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u=(1,2,-5,3)$ et $v=(2,-1,4,7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda,\mu,-37,-3)$ appartienne à F.

Correction ▼ [005168]

Exercice 879 **T

Montrer que $a=(1,2,3)$ et $b=(2,-1,1)$ engendrent le même sous espace de $\mathbb{R}^3$ que $c=(1,0,1)$ et $d=(0,1,1)$.

Correction ▼ [005169]

Exercice 880 **

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E.

1. Montrer que : $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+C)$.
2. A-t-on toujours l'égalité ?
3. Montrer que : $(A\cap B)+(A\cap C)=A\cap(B+(A\cap C))$.

Correction ▼ [005172]

Exercice 881 **T

Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère $V=\{(x,y,z,t)\in E/\ x-2y=0 \text{ et } y-2z=0\}$ et $W=\{(x,y,z,t)\in E/\ x+z=y+t\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Donner une base de V, W et $V\cap W$.
3. Montrer que $E=V+W$.

Correction ▼ [005173]

Exercice 882 ***

Soit $f:\ \begin{array}{ccc}[0,+\infty[\times[0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (x\cos y, x\sin y)\end{array}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soient a, b, α et β quatre réels. Montrer qu'il existe $(c,\gamma)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(x-\beta)=c\cos(x-\gamma)$.
3. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F=\{u\in E/\ \exists(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ u(x)=a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Déterminer $\{\cos x,\sin x,\cos(2x),\sin(2x),1,\cos^2 x,\sin^2 x\}\cap F$.

5. Montrer que $(\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x))$ est une famille libre de F.

Correction ▼ [005174]

Exercice 883 **

Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. C est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
2. Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (g,h) \in C^2 \text{ tel que } f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Correction ▼ [005175]

Exercice 884 **

Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Correction ▼ [005176]

Exercice 885 ***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A+B) \cap (B+C) \cap (C+A).$$

Correction ▼ [005177]

Exercice 886 ** I

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $[(F \cup G \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)]$.

Correction ▼ [005563]

Exercice 887 ****

Généralisation de l'exercice 886. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 puis F_1, ... , F_n n sous-espaces de E où E est un espace vectoriel sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$. Montrer que $\left[(F_1 \cup \ldots \cup F_n \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (\text{il existe } i \in [\![1,n]\!] / \bigcup_{j \neq i} F_j \subset F_i)\right]$.

Correction ▼ [005564]

31 106.02 Système de vecteurs

Exercice 888

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v}_1(1,1,0)$, $\vec{v}_2(4,1,4)$ et $\vec{v}_3(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$, puis avec $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.
2. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ?

[000897]

Exercice 889

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v}_1(1,0,1)$, $\vec{v}_2(0,2,2)$ et $\vec{v}_3(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v}_1(1,0,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$ et $\vec{v}_3(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v}_1(1,2,1,2,1)$, $\vec{v}_2(2,1,2,1,2)$, $\vec{v}_3(1,0,1,1,0)$ et $\vec{v}_4(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v}_1(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v}_2(1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v}_3(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v}_1(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v}_2(-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v}_3(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[000898]

Exercice 890

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$.

3. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$.
4. $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.
5. $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

[000899]

Exercice 891

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e}_1(1,2,3,4)$ et $\vec{e}_2(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

Indication ▼ Correction ▼ [000900]

Exercice 892

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Indication ▼ Correction ▼ [000901]

Exercice 893

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace. [000902]

Exercice 894

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. À quelle(s) condition(s) un vecteur $B = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations. [000903]

Exercice 895

Soient les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,-2,3,-4)$ de $\mathbb{R}^4$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}$? pour que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}$? [000904]

Exercice 896

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et x,y,z,t une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $x, 2y, z$.
2. x, z.
3. $x, 2x+t, t$.
4. $3x+z, z, y+z$.
5. $2x+y, x-3y, t, y-x$.

[000905]

Exercice 897

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

[000906]

Exercice 898

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_4, \dots, v_n-v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, \dots, v_n+v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4, \dots, v_1+v_2+\dots+v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

[000907]

Exercice 899

Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$.
Montrer que E et F sont égaux.

Indication ▼ Correction ▼ [000908]

Exercice 900

Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2,3,-1)$ et $u_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$.

[000909]

Exercice 901

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1;\sqrt{2})$ et $S_2 = (1;\sqrt{2};\sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système (u_1,u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1-i, i)$ et $v_2 = (2, -1+i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   (a) Montrer que le système (v_1,v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.
   (b) Vérifier que le système $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ est une base de l'e.v. $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et donner les composantes des vecteurs v_1, v_2 par rapport à cette base.

[000910]

Exercice 902

1. On définit les fonctions suivantes : $f_1 : t \mapsto \cos t.\mathrm{ch}t$, $f_2 : t \mapsto \cos t.\mathrm{sh}t$, $f_3 : t \mapsto \sin t.\mathrm{ch}t$, $f_4 : t \mapsto \sin t.\mathrm{sh}t$. Montrer que le système (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Même question pour la famille $\mathscr{F} = \{f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

[000911]

Exercice 903

Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \sin 3x$, sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser. [000912]

Exercice 904

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $S_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un système libre dans E, $n \geq 2$.

1. On considère le système $S_2 = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ défini par : $e'_j = \sum_{k=1}^{j} e_k, 1 \leq j \leq n$. S_2 est-il libre ?
2. On considère le système $S_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ défini par : $\varepsilon_j = e_j + e_{j+1}, 1 \leq j \leq n-1$ et $\varepsilon_n = e_n + e_1$. Montrer les résultats suivants :
   (a) S_3 libre $\Rightarrow S_1$ libre.
   (b) n impair : S_3 libre $\Leftrightarrow S_1$ libre.
   (c) n pair : S_3 lié.

[000913]

Exercice 905

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1,-1,1,2)$ et $e_2 = (-1,2,3,1)$?

Correction ▼ [000914]

Exercice 906

Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $\mathrm{vect}(f,g,h)$. [000915]

Exercice 907

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha \text{ ,} 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ [000916]

Exercice 908

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre. [000917]

Exercice 909

Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et ce quelque soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(x \to |x-a|)_{a=1,3,5,\dots,2N+1}\,;(x \to \cos nx)_{n=1,2,\dots,N}\,;(x \to e^{ax})_{a=1,\dots,N}$$

[000918]

Exercice 910

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note δ_k l'élément de E dont les coordonnées sont toutes nulles, sauf $\delta_{k,k} = 1$. Montrer que la famille infinie $\mathscr{B} = \{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est libre (en ce sens que toute sous-famille finie est libre). Soit E_0 le sous-ensemble des suites qui convergent vers zéro. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\mathscr{B}$ est aussi une famille libre de E_0. [002430]

Exercice 911

Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -I$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. On suppose que les $2p-1$ vecteurs $x_1,\dots,x_p,u(x_1),\dots,u(x_{p-1})$ sont linéairement indépendants. Montrer que les $2p$ vecteurs $x_1,\dots,x_p,\ u(x_1),\dots,u(x_p)$ sont linéairement indépendants.
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que E possède une base de la forme $x_1,\dots,x_p,u(x_1),\dots,u(x_p)$ et est de dimension paire. Donner la matrice de u dans cette base.

[002435]

Exercice 912

Dans $\mathbb{R}^4$, on note $v_1 = {}^t(1,2,0,-1)$, $v_2 = {}^t(3,2,-1,-1)$, $v_3 = {}^t(-1,2,1,-3)$ et $v_4 = {}^t(1,-1,1,-1)$. Sont-ils linéairement indépendants ? Trouver une relation de dépendance linéaire entre eux. [002450]

Exercice 913

$\mathbb{C}$ isomorphe à un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Montrer que les “vecteurs"

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de E sont linéairement indépendants.
2. Montrer que tout élément $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de E s'écrit de façon unique sous la forme $X = x_1I + x_2J + x_3K + x_4L$ et calculer x_1,x_2,x_3,x_4 en fonction de a,b,c,d.
3. Vérifier la relation $J^2 = -I$. Calculer JX et XJ. Montrer que l'équation $XJ = JX$ est équivalente à $x_3 = x_4 = 0$. En déduire que le sous-espace de E engendré par I,J est isomorphe au corps des complexes $\mathbb{C}$.

[002459]

Exercice 914

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ est-elle libre ?

[002780]

Exercice 915

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,2,2)$ et $\vec{v_3} = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,1)$ et $\vec{v_3} = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

3. $\vec{v}_1 = (1,2,1,2,1)$, $\vec{v}_2 = (2,1,2,1,2)$, $\vec{v}_3 = (1,0,1,1,0)$ et $\vec{v}_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v}_1 = (2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v}_2 = (1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v}_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v}_1 = (2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v}_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v}_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[002781]

Exercice 916

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

[002782]

Exercice 917 Sev de K^3 engendrés par deux vecteurs

On considère les vecteurs de K^3 : $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,3,2)$, $\vec{c} = (1,1,0)$, $\vec{d} = (3,8,5)$.
Soient $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \text{vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Comparer F et G.

Correction ▼ [003297]

Exercice 918 Étude de liberté

Étudier la liberté des familles suivantes :

1. $E = \{\text{fcts} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (\sin, \cos)$.
2. $E = \{\text{fcts} : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (f_a : x \longmapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.
3. $E = \{\text{fcts} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (f_a : x \longmapsto |x-a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

[003301]

Exercice 919 Nombres algébriques

On considère que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la famille $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

[003302]

Exercice 920 Modification des vecteurs d'une famille libre

Soit E un espace vectoriel, $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des scalaires.
On pose $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, et $\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \vec{y}$. Étudier à quelle condition la famille $(\vec{x}_1', \ldots, \vec{x}_n')$ est libre.

Correction ▼ [003303]

Exercice 921 Polynômes trigonométriques

Soit E l'ev $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, F le sev engendré par les fonctions $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, et G le sev engendré par les fonctions $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = G$. [003304]

Exercice 922 **T

Soit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de E suivants : $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés. Montrer que (u, v, w) est une famille liée.

Correction ▼ [005167]

Exercice 923 ***T

Dans $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, étudier la liberté des familles suivantes A de vecteurs de E :

1. a, b et c étant trois réels donnés, $A = (f_a, f_b, f_c)$ où, pour tout réel x, $f_u(x) = \sin(x+u)$.
2. $A = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où, pour tout réel x, $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.
3. $A = (x \mapsto x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ (ici $E = (]0; +\infty[)^2$).

4. $A = (x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005180]

Exercice 924 **

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^4$ sont-elles libres ou liées ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

1. (e_1,e_2,e_3) où $e_1 = (3,0,1,-2)$, $e_2 = (1,5,0,-1)$ et $e_3 = (7,5,2,1)$.
2. (e_1,e_2,e_3,e_4) où $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,-1)$, $e_3 = (1,1,-1,1)$ et $e_4 = (1,-1,1,1)$.
3. (e_1,e_2,e_3,e_4) où $e_1 = (0,0,1,0)$, $e_2 = (0,0,0,1)$, $e_3 = (1,0,0,0)$ et $e_4 = (0,1,0,0)$.
4. (e_1,e_2,e_3,e_4) où $e_1 = (2,-1,3,1)$, $e_2 = (1,1,1,1)$, $e_3 = (4,1,5,3)$ et $e_4 = (1,-2,2,0)$.

Correction ▼ [005566]

Exercice 925 ***

Montrer que $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005567]

Exercice 926 **

Soit $f(x) = \ln(1+x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f\circ f$ et $f_3 = f\circ f\circ f$. Etudier la liberté de (f_1,f_2,f_3) dans $[0,+\infty[^{[0,+\infty[}$.

Correction ▼ [005568]

Exercice 927 **

Soit $f_a(x) = |x-a|$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005569]

Exercice 928 **I

On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005570]

Exercice 929 **

Montrer que toute suite de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
Montrer que toute suite de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Correction ▼ [005571]

Exercice 930 **

1. Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :
$$J(p,q) = \int_0^{2\pi}\cos(px)\cos(qx)\,dx,\ K(p,q) = \int_0^{2\pi}\cos(px)\sin(qx)\,dx \text{ et } L(p,q) = \int_0^{2\pi}\sin(px)\sin(qx)\,dx.$$
2. Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}}\cup(\sin(qx))_{q\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Correction ▼ [005574]

32 106.03 Somme directe

Exercice 931

Soient $\vec{e}_1(0,1,-2,1), \vec{e}_2(1,0,2,-1), \vec{e}_3(3,2,2,-1), \vec{e}_4(0,0,1,0)$ et $\vec{e}_5(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $Vect\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} = Vect\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0)\in Vect\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\cap Vect\{\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$.
3. $dim(Vect\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\cap Vect\{\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}) = 1$.
4. $Vect\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}+Vect\{\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect\{\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Indication ▼ Correction ▼ [000919]

Exercice 932

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Vect$\{v_1,v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect$\{v_1,v_3,v_4\}$ et Vect$\{v_2,v_5\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000920]

Exercice 933

Si L,M,N sont trois sous-espaces vectoriels de E, a-t-on :

$$L\cap(M+N)=L\cap M+L\cap N\ ?$$

[000921]

Exercice 934

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On définit

$$E_a=\{P\in E;(X-a)/P\}$$

pour $a\in\mathbb{R}$. Montrer que si $a\neq b$ il existe un couple de réels (c,d) tels que $1=c(X-a)+d(X-b)$. En déduire que $E=E_a+E_b$, la somme est-elle directe ? [000922]

Exercice 935

Soit $E=\Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F=\{f\in E/f(0)=f'(0)=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Indication ▼ Correction ▼ [000923]

Exercice 936

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E lorsque $F\cap G=\{0\}$ et $E=F+G$. On note $E=F\oplus G$.

1. Soient $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Posons $F=\text{Vect }\{e_1,e_2\},G=\text{Vect }\{e_3,e_4\},G'=\text{Vect }\{e_3,e_4,e_5\}$. Montrer que $E=F\oplus G$ et $E\neq F\oplus G'$.
2. Supposons que E est de dimension finie n, que dim $(F)=p$ et $E=F\oplus G$.
   (a) Calculer dim (G).
   (b) Montrer que tout élément x de E se décompose d'une manière *unique* en une somme $x=y+z$ avec $y\in F$ et $z\in G$.
   (c) Soient $\mathscr{F}=\{f_1,\cdots,f_k\}$ une famille libre de F et $\mathscr{G}=\{g_1,\cdots,g_l\}$ une famille libre de G. Montrer que la famille $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ est libre.
   (d) Soit φ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^q$, $q\in\mathbb{N}$. Construire deux applications linéaires ψ et ψ' de E dans $\mathbb{R}^q$ telles que : $\forall y\in F:\psi'(y)=0,\forall z\in G:\psi(z)=0$ et $\forall x\in E:\varphi(x)=\psi(x)+\psi'(x)$.

[000924]

Exercice 937 Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.

Soient U,V,W des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant $(I):U\cap V=\{0\}=(U+V)\cap W$.

1. Démontrer que $V\cap W=\{0\}=U\cap(V+W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(II):(\forall x\in U+V+W)(\exists!(u,v,w)\in U\times V\times W)(x=u+v+w).$$

[000925]

Exercice 938

Soit

$$E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid(u_n)_n\text{ converge }\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Indication ▼ Correction ▼ [000926]

Exercice 939

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1,e_2,e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1+3e_2+e_3, \quad e'_2 = 3e_1+4e_2+e_3, \quad e'_3 = e_1+2e_2+2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de u par rapport à cette base. [002433]

Exercice 940 Supplémentaire commun, X MP* 2005

1. Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
   (a) Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $R[X] = A \oplus \{$ polynômes pairs $\}$.
   A-t-on $R[X] = A \oplus \{$ polynômes impairs $\}$?
   (b) Que peut-on dire si l'on remplace $Q(X^2)$ par une fonction f paire ?
2. Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E = E_1 \oplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

Correction ▼ [003305]

Exercice 941

Soit $E = K_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tq } P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

[003652]

Exercice 942 Caractérisation des sommes directes

Soient F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1+F_2+F_3$ est directe si et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et $(F_1+F_2) \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.
Généraliser.

[003653]

Exercice 943 Somme directe dans $E \Rightarrow$ somme directe dans $\mathscr{L}(E)$

Soit E un K-ev de dimension finie n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E.
On note $F_i = \{u \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} u \subset \operatorname{vect}(\vec{e}_i)\}$.

1. Caractériser matriciellement les éléments de F_i.
2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathscr{L}(E)$.

[003654]

Exercice 944 Toute somme peut être rendue directe en réduisant les sev

Soit E un K-ev de dimension finie, F_1, F_2, …, F_n des sev de E tels que $F_1+\cdots+F_n = E$. Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1$, …, $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$. [003655]

Exercice 945 Somme et intersection

Soit E un K-ev, $E_1,\dots,E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E, et $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1+\cdots+F_n$ est directe.
2. Comparer F et G.

[003656]

Exercice 946 Somme directe d'endomorphismes

Soit E un K-ev, $E_1,\dots,E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. Soient $u_1 \in \mathscr{L}(E_1),\dots,u_n \in \mathscr{L}(E_n)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout i : $u_{|F_i} = u_i$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u_n)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_n)$.

[003657]

Exercice 947 Somme de projecteurs

Soit E un K-ev de dimension finie et $p_1,\dots,p_n$ des projecteurs tels que $p_1+\dots+p_n=\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(p_i)=\mathrm{rg}(p_i)$.
2. Montrer que $E=\mathrm{Im}(p_1)\oplus\dots\oplus\mathrm{Im}(p_n)$.

[003658]

Exercice 948 Projecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f_1,\dots,f_n$ n applications linéaires toutes non nulles. On suppose que : $\forall\,(i,j)\in[[1,n]]^2,\ f_i\circ f_j=\delta_{i,j}f_i$. Montrer les f_i sont toutes de rang un.

Correction ▼ [003659]

Exercice 949 **IT

Soient $u=(1,1,\dots,1)$ et $F=\mathrm{Vect}(u)$ puis $G=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1+\dots+x_n=0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n=F\oplus G$.

Correction ▼ [005178]

Exercice 950 **

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E=\mathrm{Ker}f+\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Correction ▼ [005185]

Exercice 951 ** I

$E=\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Soient $F=\{(x_1,\dots,x_n)\in E/\ x_1+\dots+x_n=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}((1,\dots,1))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Préciser le projeté d'un vecteur x de E sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F.

Correction ▼ [005565]

33 106.04 Base

Exercice 952

Montrer que les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Correction ▼ [000979]

Exercice 953

Soient $\vec{v}_1(1,2,3,4),\vec{v}_2(2,2,2,6),\vec{v}_3(0,2,4,4),\vec{v}_4(1,0,-1,2),\vec{v}_5(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F=Vect\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ et $G=Vect\{\vec{v}_4,\vec{v}_5\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F\cap G$, F, G et $F+G$. [000980]

Exercice 954

1. Montrer que les vecteurs $x_1=(0,1,1)$, $x_2=(1,0,1)$ et $x_3=(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x=(1,1,1)$.
2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Correction ▼ [000981]

Exercice 955

On considère dans $\mathbb{R}^4$, $F=\mathrm{lin}\{a,b,c\}$ et $G=\mathrm{lin}\{d,e\}$, avec $a=(1,2,3,4)$, $b=(2,2,2,6)$, $c=(0,2,4,4)$, $d=(1,0,-1,2)$ et $e=(2,3,0,1)$. Déterminer des bases des sous-espaces $F\cap G$, F, G, $F+G$. [000982]

Exercice 956

Dans l'espace $\mathscr{P}_5$ des polynômes de degré ≤ 5, on définit les sous-ensembles :
$E_1 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid P(0) = 0\}$
$E_2 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$
$E_3 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divise } P\}$
$E_4 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ est une fonction paire}\}$
$E_5 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid \forall x,\ P(x) = xP'(x)\}$.

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$.
2. Déterminer dans $\mathscr{P}_5$ des sous-espaces supplémentaires de E_4 et de $E_1 \cap E_3$.

[000983]

Exercice 957

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base. [000984]

Exercice 958

Vrai ou faux ? On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x,y,z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x,y,z est libre.
2. Soit $x_1,x_2,\dots,x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Indication ▼ Correction ▼ [000985]

Exercice 959

Étudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes, et trouver à chaque fois une base du sous-espace engendré.

1. $(1,0,1)$, $(0,2,2)$, $(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $(1,2,1,2,1)$, $(2,1,2,1,2)$, $(1,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $(2,4,3,-1,-2,1)$, $(1,1,2,1,3,1)$, $(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $(2,1,3,-1,4,-1)$, $(-1,1,-2,2,-3,3)$, $(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[000986]

Exercice 960

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

1. $v_1 = (1,1,1), v_2 = (3,0,-1), v_3 = (-1,1,-1)$.
2. $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,0,-1), v_3 = (1,8,13)$.
3. $v_1 = (1,2,-3), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (1,10,-11)$.

Correction ▼ [000987]

Exercice 961

Dans $\mathbb{R}^3$, comparer les sous-espaces F et G suivants :
$F = \mathrm{lin}\{(2,3,-1),(1,-1,-2)\}$ et $G = \mathrm{lin}\{(3,7,0),(5,0,-7)\}$. [000988]

Exercice 962

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (1,0,-2,3)$, $v_4 = (2,1,0,-1)$, $v_5 = (4,3,2,1)$.
$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (3,4,5,16)$.
$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (2,1,0,11)$, $v_4 = (3,4,5,14)$.
Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

[000989]

Exercice 963

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. [000990]

Exercice 964

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soient D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est somme de D_1, D_2, D_3.
2. Soient F et G des hyperplans vectoriels de E. Alors $E \neq F \cup G$.
3. Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Alors $\dim E \geq 4$.
4. Soient F et G des sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.
5. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $F = \text{lin}\{e_1, e_3\}$. Tout sous-espace vectoriel supplémentaire de F contient e_2.

[000991]

Exercice 965

1. Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ (calculer a, b, c, d réels), et aussi sous la forme $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$ (calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels).
2. Soit $\mathscr{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de $\mathscr{P}_3$: $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2 = \{1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\}$, $B_3 = \{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

Correction ▼ [000992]

Exercice 966

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{P}_2$ des polynômes de degré ≤ 2, on considère les polynômes $P_1 = X^2 + X(1-X) + (1-X)^2$, $P_2 = X^2 + (1-X)^2$, $P_3 = X^2 + 1 + (1-X)^2$, $P_4 = X(1-X)$. Peut-on extraire de $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ des bases de $\mathscr{P}_2$? Si oui, les trouver toutes. [000993]

Exercice 967

Soit E l'ensemble des fractions rationnelles F qui peuvent s'écrire

$$F = \frac{P}{(X-1)^3(X^2+1)^2}, \qquad P \text{ polynôme de degré } \leq 6.$$

Les fractions $\frac{1}{(X-1)}, \frac{1}{(X-1)^2}, \frac{1}{(X-1)^3}, \frac{1}{X^2+1}, \frac{X}{X^2+1}, \frac{1}{(X^2+1)^2}, \frac{X}{(X^2+1)^2}$ forment-elles une base de E ?
Que se passe-t-il si on suppose que P décrit l'ensemble des polynômes de degré ≤ 9 ? [000994]

Exercice 968

Problème de l'interpolation : soit les cinq points $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (0, -2)$, $(x_3, y_3) = (1, 5)$, $(x_4, y_4) = (5, 1)$, $(x_5, y_5) = (6, 7)$ de $\mathbb{R}^2$, et $\mathscr{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 4. On veut trouver un polynôme F dans $\mathscr{P}_4$ tel que pour $i = 1, \ldots, 5$ on ait $F(x_i) = y_i$.

1. Sans effectuer les calculs, indiquer comment on pourrait calculer a, b, c, d, e exprimant $F = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$ selon la base $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ de $\mathscr{P}_4$.
2. Montrer que $\{1, X+2, (X+2)X, (X+2)X(X-1), (X+2)X(X-1)(X-5)\}$ est une base de $\mathscr{P}_4$. Calculer directement (indépendamment de la question précédente) les coordonnées de F dans cette base.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes $X(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)X(X-5)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-5)$ forment une base de $\mathscr{P}_4$. Calculer directement (indépendamment des questions précédentes) les coordonnées de F dans cette base.
4. Dans laquelle des diverses bases ci-dessus le calcul de F vous paraît-il le plus simple ?

[000995]

Exercice 969

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [000996]

Exercice 970

Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F. [000997]

Exercice 971

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A_p(X) = (X-a)^p$ et $B_p(X) = X^p$.

1. Montrer que $\varepsilon = \{A_0, \dots, A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)

[000998]

Exercice 972

On munit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi interne "addition" + : $(a,b)+(a',b') = (aa', b+b')$, et de la loi externe . à coefficients réels : $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \forall (a,b) \in E \lambda.(a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

1. Vérifier que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
2. Les systèmes suivants sont-ils libres ou liés : ((1,0),(1,1)) ? ((2,1),(8,3)) ? ((2,1),(6,3)) ?
3. Vérifier que le système $b = ((2,0),(2,1))$ est une base de E et déterminer les composantes du vecteur $v = (x,y) \in E$ par rapport à la base b.

[000999]

Exercice 973

Pour $k = 2,3,4$ montrer que V_k est un s.e.v. de $\mathbb{C}^k$, et en donner une base :

$$V_2 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 / a+ib=0\}, V_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 / a+2b+3c=0\},$$
$$V_4 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 / a+ib=b+ic=c+id\}.$$

[001000]

Exercice 974

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

1. Soit $\beta = (P_0, P_1, ..., P_n)$ un système de $(n+1)$ polynômes tels que, $\forall k$, $0 \leq k \leq n$, $\deg P_k = k$. Montrer que β est une base de E.
2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que : $\gamma = (P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E et déterminer les composantes du polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+a)$, (a réel fixé), dans la base γ.
3. Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E, et déterminer, pour tout $p \in \{0,1,\dots,n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.

[001001]

Exercice 975

Soient $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,-3,1,0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$. Déterminer un supplémentaire de G dans F dans $\mathbb{R}^4$. [001002]

Exercice 976

Soient le triplet $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,0), \mathbf{v}_2 = (-1,1,2,1), \mathbf{v}_3 = (1,5,8,1)$ et le triplet $\mathbf{w}_1 = (0,3,5,1), \mathbf{w}_2 = (1,-1,1,0), \mathbf{w}_3 = (0,0,3,1)$. On considère les sous-espaces vectoriels $F = < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ et $G = < \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >$. Donner une base des sous-espaces suivants $F, G, F \cap G$ et $F+G$. [001003]

Exercice 977

Soit

$$E = \left\{ f_{\alpha,A} \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); (\alpha, A) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{\alpha,A}(x) = A\cos(x+\alpha) \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en donner une base. [001004]

Exercice 978

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,1), \mathbf{e}_2 = (1,1,2), \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\}$$

1. Montrer que S est une base de E.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5,7,12)$ dans cette base.

[001005]

Exercice 979

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1,-1,i), \mathbf{w}_2 = (-1,i,1), \mathbf{w}_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $(x^2+1)^3$.
2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Correction ▼ [001006]

Exercice 980

1. Montrer que le système $\mathbf{s}_1 = (1, \sqrt{2})$ et $\mathbf{s}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
2. Soient dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $\mathbf{u}_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est $\mathbb{Q}$–libre et $\mathbb{R}$–lié.
3. Soient dans $(x^2+1)^2$, les vecteurs $\mathbf{r}_1 = (1+i, 1-2i)$ et $\mathbf{r}_2 = (3i-1, 5)$. Montrer que le système $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est $\mathbb{R}$–libre et (x^2+1)–lié.

[001007]

Exercice 981

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + t/2$, $X - t$, $(X+t+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. [001008]

Exercice 982

Etudier la liberté des familles

1. $(1,1), (1,2)$.
2. $(2,3), (-6,9)$.
3. $(1,3,1), (1,3,0), (0,3,1)$.
4. $(1,3), (-1,-2), (0,1)$.

[001009]

Exercice 983

Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $(1,1), (3,1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $(1,0,2), (1,2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

[001010]

Exercice 984

On considère dans $\mathbb{R}^3$, $\Pi = \text{vect}\{(1,1,1), (1,1,-1)\}$ et $D = \text{vect}\{(0,1,-1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$. [001011]

Exercice 985

Déterminer une base de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\right\}$. [001012]

Exercice 986

Déterminer une base de $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y = 0, x-y+z = 0\right\}$. [001013]

Exercice 987 Essai de bases

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (-1,-1,2)$ et $\vec{c} = (-2,1,-2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{x} = (x,y,z)$.

Correction ▼ [003317]

Exercice 988 Rang de vecteurs

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{a}=(3,2,1,0),\quad \vec{b}=(2,3,4,5),\quad \vec{c}=(0,1,2,3),\quad \vec{d}=(1,2,1,2),\quad \vec{e}=(0,-1,2,1).$$

Correction ▼ [003318]

Exercice 989 Fonctions affines par morceaux

Soit $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ une subdivision de $[0,1]$ et F l'ensemble des fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ est affine.
Montrer que F est de dimension finie et trouver une base de F.

[003319]

Exercice 990 Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} H=\{\vec{X}=(x,y,z) \text{ tq } x+y+z=0\} \\ K=\operatorname{vect}(\vec{U}=(1,1,2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que $H\oplus K=K^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.

Correction ▼ [003320]

Exercice 991 Supplémentaires

Soit $E=H\oplus K$ et $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ une base de K.

1. Montrer que pour tout $\vec{a}\in H$, $K_{\vec{a}}=\operatorname{vect}(\vec{e}_1+\vec{a},\dots,\vec{e}_k+\vec{a})$ est un supplémentaire de H.
2. Montrer que si $\vec{a}\neq\vec{b}$, alors $K_{\vec{a}}\neq K_{\vec{b}}$.

[003321]

Exercice 992 ****

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$.
2. Soit $E=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6},\ (a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4\}$. Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel puis déterminer une base de E.

Correction ▼ [005179]

Exercice 993 **I

$E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour $0\leqslant k\leqslant n$, on pose $P_k=X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.
Correction ▼ [005572]

Exercice 994 **I Polynômes d'interpolation de LAGRANGE

Soient a_0,..., a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et b_0,..., b_n $n+1$ nombres complexes.
Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall(i,j)\in[\![0,n]\!]$, $L_i(a_j)=1$ si $i=j$ et 0 sinon.
Montrer que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P(a_i)=b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.
Correction ▼ [005573]

34 106.05 Dimension

Exercice 995

Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $V_1=(0,1,2,3)$, $V_2=(1,2,3,4)$ et $V_3=(2,3,4,5)$.
[001014]

Exercice 996

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Indication ▼ Correction ▼ [001015]

Exercice 997

Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Indication ▼ Correction ▼ [001016]

Exercice 998

Soient P_0, P_1, P_2 et $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$
$$P_2(X) = 2X(X-2), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer 1, X, X^2 en fonction de P_0, P_1 et P_2. On note $F = Vect\{P_0, P_1\}$ et $G = Vect\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

[001017]

Exercice 999

Donner la dimension du sous-espace F de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = \sin 2x$ et $f_4(x) = \cos 2x$.

[001018]

Exercice 1000

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5. Calculer les dimensions respectives de E, F, $E \cap F$, $E+F$.

Correction ▼ [001019]

Exercice 1001

Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y = z+t\}$. Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$.

[001020]

Exercice 1002

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (z, x-y, y+z)$ est un automorphisme. [001021]

Exercice 1003

Soit E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}(E) / \operatorname{Im} f = \ker f$$

[001022]

Exercice 1004

Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,2) = 2$ et $f(-2,1) = 5$. Déterminer le noyau et l'image de f.

[001023]

Exercice 1005

Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs $e_1 = (1,x,-1), e_2 = (x,1,x), e_3 = (-1,x,1)$. [001024]

Exercice 1006

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x_0 \in E / f^2(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de base (id, f, f^2).

[001025]

Exercice 1007

Soit E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(i) $\ker f = \ker f^2$.

(ii) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

(iii) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

[001026]

Exercice 1008

Soient E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v)$.

Correction ▼ [001027]

Exercice 1009

Soit $(f,g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, montrer les inégalités :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \leq \inf(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

(on pourra utiliser $g_{|\ker(f \circ g)} = h$ dont on déterminera le noyau) [001028]

Exercice 1010

Soit $(f,g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, tel que : $(f+g)$ est inversible et $fg = 0$. Montrer que :

$$rg(f) + rg(g) = n.$$

[001029]

Exercice 1011

Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset Ker(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ? [001030]

Exercice 1012

Soient $E_0, E_1, \ldots, E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif K, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, f_k \in L(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :
- f_0 est injective ;
- $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, Imf_{j-1} = Ker(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

[001031]

Exercice 1013

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, espace vectoriel de dimension n. Montrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2.$$

Généraliser. [001032]

Exercice 1014

Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif. [001033]

Exercice 1015

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$, montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus Im(f) \Leftrightarrow Imf = Imf^2.$$

Donner un contre-exemple quand $\dim E = +\infty$. [001034]

Exercice 1016

Soit $(f,g) \in L(E,F)^2$ avec E,F de dimension finie. On suppose

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f) + Imf;$$
$$Imf \cap Img = \{0\}.$$

[001035]

Exercice 1017

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f,g) \in L(E)^2$ avec $E = Imf + Img = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes. [001036]

Exercice 1018

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f_1,...,f_k)$ des projecteurs de E. Montrer l'équivalence :

$$\left[\forall (i,j) \in \{1,...,k\}^2, i \neq j \Rightarrow f_i f_j = 0\right] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ est un projecteur.}$$

[001037]

Exercice 1019

Soit $f \in L(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension n, tel que :

$$f^2 = -Id.$$

1. Montrer que f est inversible et que la dimension de E est paire, donc $n = 2p$.
2. Soit $x \neq 0$, monter que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de E.
3. Montrer qu'il existe p sous-espaces de dimension deux stables par f, $E_1...E_p$ tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En déduire une "bonne" formule de calcul de f.

[001038]

Exercice 1020

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $f \in L(E)$ nilpotente. On note $q \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f, i.e. :

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* | f^j = 0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), ..., f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q \leq n$.
2. Soit $r = \dim Ker(f)$. Montrer que $r > 0$ et que
$$\frac{n}{r} \leq q \leq n+1-r.$$

[001039]

Exercice 1021 $\dim H = \dim K \Leftrightarrow H$ et K ont un supplémentaire commun

Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun (par récurrence sur $\operatorname{codim} H$).

Correction ▼ [003322]

Exercice 1022 **IT

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$, $e_4 = (-1,0,-1,2)$ et $e_5 = (2,3,0,1)$. Soient alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$?

Correction ▼ [005183]

Exercice 1023 **IT

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

Correction ▼ [005184]

Exercice 1024 ***I

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Démontrer que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Correction ▼ [005575]

Exercice 1025 **

Soient F, G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Montrer que : $\dim(F+G+H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H)$.
Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Correction ▼ [005576]

Exercice 1026 ***

Soient F_1, F_2,..., F_n n sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 2$).
Montrer que $\dim(F_1 + ... + F_n) \leqslant \dim F_1 + ... + \dim F_n$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Correction ▼ [005577]

Exercice 1027 **I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est non nulle.

Correction ▼ [005578]

Exercice 1028 **

Soient $(x_1, .., x_n)$ une famille de n vecteurs de rang r et $(x_1, ..., x_m)$ une sous famille de rang s ($m \leqslant n$ et $s \leqslant r$). Montrer que $s \geqslant r + m - n$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005579]

Exercice 1029 **

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer que $|\mathrm{rg} f - \mathrm{rg} g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g$.

Correction ▼ [005580]

Exercice 1030 **

Soient E, F et G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels puis $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g - \dim F \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g\}$.

Correction ▼ [005581]

35 106.99 Autre

36 107.01 Définition

Exercice 1031

Notations :
$\mathscr{C}$: ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$.
$\mathscr{C}_d$: ensemble des fonctions numériques ayant une dérivée continue sur $[0,1]$.
$\mathscr{C}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$: définis de façon analogue pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{P}$: ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{P}_n$: ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré $\leq n$.

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x-3$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.
5. $\mathscr{C} \to \mathscr{C} : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$.
6. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$.
7. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$.
8. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x+5y$.
9. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{3x^2+5y^2}$.
10. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin(3x+5y)$.
11. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
12. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.
13. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2 \neq 0$ et0 sinon.
14. $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_d : f \mapsto \{x \mapsto e^{-x}\int_0^1 f(t)\,dt\}$.
15. $\mathscr{P} \to \mathscr{P}_n : A \mapsto$ quotient de A par B à l'ordre n selon les puissances croissantes (B et n fixés, avec $B(0) \neq 0$).
16. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : M \mapsto M'$ défini par : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{0}$ et 0 sinon.
17. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V} = (4,-1,1/2)$.
18. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
19. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t)$.
20. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t) - \min_{t\in[0,1]} f(t)$.
21. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u,v) :
$$\begin{cases} 3u-v &= x \\ 6u+2v &= y. \end{cases}$$
22. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ le symétrique de (x,y) par rapport à la droite d'équation $x+y-a=0$ (discuter selon les valeurs de a).
23. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto$ la projection de (x,y,z) sur le plan $x+y+z-a=0$ parallèlement à Oz (discuter selon les valeurs de a).
24. $\mathscr{C}_d \to \mathscr{C} : f \mapsto f'$.
25. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x-3y+z, x-y+z/3)$.
26. $\mathbb{R} \to \mathscr{C}d : \lambda \mapsto$ la solution de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$ valant λ en $x_0 = 1$.
27. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1+|f(t)|)\,dt$.
28. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto$ la 17-ième décimale de x (en écriture décimale).
29. $\mathscr{C}_d \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)\,dt$.
30. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.
31. $\mathbb{R} \times \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}) : (\lambda, f) \mapsto$ la primitive de f qui vaut λ en $x_0 = \pi$.
32. $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x)\cdot \sin x\}$.

[000927]

Exercice 1032

Soient f et g, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \mathrm{Re}(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v. [000928]

Exercice 1033

Déterminer si les applications f_i suivantes (de E_i dans F_i) sont linéaires :

$$f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2, f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, x, y) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y+z, y-z, x+y) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_4 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X], f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, f_7 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P-(X-2)P' \in \mathbb{R}[X].$$

Indication ▼ Correction ▼ [000929]

Exercice 1034

Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Indication ▼ Correction ▼ [000930]

Exercice 1035

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$f \mapsto f(0), \quad f \mapsto f(1)-1, \quad f \mapsto f''(3), \quad f \mapsto (f'(2))^2, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

[002431]

Exercice 1036

1. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

[002740]

Exercice 1037

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t, 2x+2y+2z+2t).$$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = (1,-1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,-1,0)$ et $\vec{c} = (0,0,1,-1)$ appartiennent à $\ker f$.
3. Vérifier que le vecteur $\vec{d} = (5,5,5,10)$ appartient à $\operatorname{Im} f$.

[002741]

Exercice 1038

Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y+3z, -x-y-z).$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice de A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f, noté $\ker f$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
4. (a) Donner le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$.
   (b) L'application f est-elle surjective ?

[002742]

Exercice 1039 Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\left(\vec{x}, f(\vec{x})\right)$ est liée.

1. Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
2. Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.
3. Montrer que f est une homothétie.

[003309]

Exercice 1040 Applications $\mathbb{R}$-linéaires sur (x^2+1)

On considère que (x^2+1) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Donner une base de (x^2+1).
2. Montrer que tout endomorphisme de (x^2+1) peut se mettre sous la forme : $f(z) = az + b\bar{z}$, avec $a, b \in (x^2+1)$.
3. CNS sur a et b pour que f soit bijectif ?

Correction ▼ [003312]

Exercice 1041 **T

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1,0,0)) = (1,1)$ puis $f((0,1,0)) = (0,1)$ et $f((0,0,1)) = (-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im} f$.

Correction ▼ [005170]

Exercice 1042 ***I

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Correction ▼ [005186]

Exercice 1043 **

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction ▼ [005188]

Exercice 1044 **

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x,y)) = (x', y')$.

1. Rappeler l'écriture générale de (x', y') en fonction de (x,y).
2. Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C},\ z' = az + b\bar{z}$.
3. Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ est $z' = az + b\bar{z}$).

Correction ▼ [005189]

37 107.02 Image et noyau, théorème du rang

Exercice 1045

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application $f : F \times G \to \mathbb{R}^n$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

[000931]

Exercice 1046

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.

(1) $$\mathbb{R}^n = Im(f) \bigoplus Ker(f)$$

(2) $$Im(f) = Im(f^2)$$

(3) $$Ker(f) = Ker(f^2)$$

[000932]

Exercice 1047

Soient : E, F et G trois sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. On rappelle que $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par $g \circ f(v) = g(f(v))$, pour tout vecteur v de E.

1. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire.
2. Montrer que $f\big(\mathrm{K}er(g \circ f)\big) = \mathrm{K}erg \cap \mathrm{I}mf$.

[000933]

Exercice 1048

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E, on définit l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Appliquer le théorème du rang.

Indication ▼ Correction ▼ [000934]

Exercice 1049

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $p \leq n$ on note e_p le polynôme $x \mapsto x^p$. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(x) = P(x+1) + P(x-1) - 2P(x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Calculer $f(e_p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, Im f et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de Im f ; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

[000935]

Exercice 1050

Soit E, F, G trois espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; montrer que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \mathrm{Im}\, f) = f^{-1}(\ker g).$$

[000936]

Exercice 1051

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et N deux sous-espaces vectoriels de E ; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire f de E dans E vérifiant : $f(E) = F$ et $\ker f = N$. [000937]

Exercice 1052

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions respectives n, p, q, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ telles que $g \circ f = 0$. Quelle relation existe-t-il entre le rang de f et celui de g ? [000938]

Exercice 1053

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans E ; montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

(1) $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$,

(2) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$,

(3) $\ker f = \ker f^2$.

[000939]

Exercice 1054

Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, alors $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$.

[000940]

Exercice 1055

Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap \mathrm{Im}\,(\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

Correction ▼ [000941]

Exercice 1056

Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2i_E = 0$. Etablir $\mathrm{Im}(f - i_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$; $\mathrm{Im}(f + 2i_E) \subset \mathrm{Ker}(f - i_E)$; $E = \mathrm{Ker}(f - i_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$. [000942]

Exercice 1057

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{im}(f)$.
2. $f^2 = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

Correction ▼ [000943]

Exercice 1058

Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

[000944]

Exercice 1059

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$. [000945]

Exercice 1060

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ une application linéaire de E dans lui-même. Posons $K_n = \mathrm{Ker}\,(\varphi^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}\,(\varphi^n)$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $K_n = K_{n_0}$. Déduiser en que pour tout $n \geq n_0$ on a également $I_n = I_{n_0}$. [000946]

Exercice 1061

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Indication ▼ Correction ▼ [000947]

Exercice 1062

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ (on remarquera que $f \circ (f^2 - f - id) = 0$). [000948]

Exercice 1063

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.

Indication ▼ Correction ▼ [000949]

Exercice 1064

Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. [000950]

Exercice 1065

Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\mathrm{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Correction ▼ [000951]

Exercice 1066

Soit $(u,v) \in (L(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que

$$Im(u+v) = Im(u) + Im(v).$$

[000952]

Exercice 1067

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \phi(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_2) & = & \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_3) & = & \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Ecrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ? [000953]

Exercice 1068

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et λ un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\begin{cases} \varphi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$ définit une application linéaire φ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Correction ▼ [000954]

Exercice 1069

E étant un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, f une application linéaire de E dans E, construire dans les trois cas suivants deux applications linéaires bijectives u et v de E dans E telles que $f = u - v$.

- f est bijective.
- $\mathrm{Ker} f + Im f = E$.
- f est quelconque.

[000955]

Exercice 1070

1. Dire si les applications $f_i, 1 \leqslant i \leqslant 6$, sont linéaires

$$\begin{aligned}
f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (2x+y, ax-y) \in \mathbb{R}^2,\\
f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, ax, y) \in \mathbb{R}^3,\\
f_3 : P \in \mathbb{R}[X] &\mapsto aP' + P \in \mathbb{R}[X],\\
f_4 : P \in \mathbb{R}_3[X] &\mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X],\\
f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] &\mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3,\\
f_6 : P \in \mathbb{R}[X] &\mapsto P - (X-2)P' \in \mathbb{R}[X].
\end{aligned}$$

2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer $\ker(f_i)$ et $\mathrm{Im}\,(f_i)$, en déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Correction ▼ [000956]

Exercice 1071

Soit $f \in L(E)$ non nul ; montrer que f est injective si et seulement si pour tout couple (E_1, E_2) de sous-espaces supplémentaires de E, la somme $f(E_1) + f(E_2)$ est directe (i.e. $f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont supplémentaires). [000957]

Exercice 1072

Soit $f \in L(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \mu \in K, f = \mu id.$$

[000958]

Exercice 1073

Soient $E = (x^2+1)^{n[X]}$ et A et B deux polynômes à coefficients complexes de degré $(n+1)$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Correction ▼ [000959]

Exercice 1074

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + id$. Montrer que f est un automorphisme. [000960]

Exercice 1075

Soit E un (x^2+1)–espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Déduire de 2. que si E est de dimension finie n, il existe une base $\beta = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, telle que $\forall i, f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ avec $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 2$.

[000961]

Exercice 1076

Montrer que si $p < q$ il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Montrer que si $q < p$ il n'existe pas non plus d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. [000962]

Exercice 1077

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et φ une application linéaire de E dans F. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si l'image par φ de toute base de E est une base de F.

Correction ▼ [000963]

Exercice 1078

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et φ une application linéaire bijective de E dans F. Montrer que la bijection réciproque φ^{-1} est linéaire. Une telle application est dite un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de E à valeurs dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

[000964]

Exercice 1079

Soit E un espace vectoriel de dimension finie φ et ψ deux applications linéaires de E dans lui-même telles que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. Montrer que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$. [000965]

Exercice 1080

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $u \circ v = 0$ si et seulement si l'image de v est contenue dans le noyau de u.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose dans cette question que u et v s'expriment dans cette base par
$$u(e_1) = e_1, \qquad u(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 1,$$
$$v(e_2) = e_2, \qquad v(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 2.$$
Trouver les matrices de u, v et $u \circ v$ dans cette base.
3. Si u est un endomorphisme quelconque non nul de E, quelle condition doit vérifier le noyau de u pour qu'il existe un endomorphisme non nul v tel que $u \circ v = 0$? Dans ce cas, u est-il bijectif ?

[002441]

Exercice 1081

1. Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
2. Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

[002743]

Exercice 1082

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A.
2. Déterminer une base de l'image de A.

[002744]

Exercice 1083

Soit la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de B.
2. Déterminer une base de l'image de B.

[002745]

Exercice 1084

Soit la matrice
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de C.
2. Déterminer une base de l'image de C.

[002746]

Exercice 1085

Pour chaque couple de matrices (A_i, b_i), $1 \leq i \leq 5$, ci-dessous

1. donner la nature de l'ensemble des solutions du système $A_iX = b_i$;
2. donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de $A_iX = b_i$;
3. donner une base de l'image et une base du noyau de A_i.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

[002770]

Exercice 1086

Calculer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+y+z, 2x+y+z, 2x+2y+z, y+z) \end{array}$$

Quel est le rang de f ?

[002771]

Exercice 1087 $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$.

Correction ▼

[003310]

Exercice 1088 $f^3 = \mathrm{id}$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) = E$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.

[003311]

Exercice 1089 Supplémentaire d'un hyperplan

Soit E un K-ev et $f : E \to K$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \mathrm{Ker} f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = K$.
2. Soit $\vec{u} \in E \setminus H$ et $F = \mathrm{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F \oplus H = E$.

[003313]

Exercice 1090 Commutants itérés

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathscr{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $c_i = \mathrm{Ker} \varphi^i$ ($c_0 = \{0\}$, c_1 est le commutant de u, c_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1. Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
2. Montrer que $c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} c_i$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

Correction ▼ [003316]

Exercice 1091 Applications du thm du rang

Soient E, F deux K-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que si H est un sev de E, alors
   $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \operatorname{Ker} f)$.
2. Montrer que si K est un sev de F, alors
   $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

[003327]

Exercice 1092 Application du thm du rang

Soient E, F deux ev de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u+v)) \leq \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.
(considérer $w = u_{|\operatorname{Ker}(u+v)}$)

[003328]

Exercice 1093 Rang de $f \circ g$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Établir :

1. $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
2. $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f)$.
3. $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim E \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

[003329]

Exercice 1094 CNS pour que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient supplémentaires

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
2. $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
3. $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.
4. $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$.
5. $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

[003330]

Exercice 1095 $fog = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ? [003331]

Exercice 1096 Rang de $f+g$

Soient E, F deux ev, E de dimension finie, et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Démontrer que $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
2. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}_F\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.

Correction ▼ [003332]

Exercice 1097 $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$

Soient E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$.
Montrer que les sommes sont directes.

[003333]

Exercice 1098 $f^3 = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} f^2 \leq \dim E$.
2. Montrer que $2\operatorname{rg} f^2 \leq \operatorname{rg} f$ (appliquer le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Im} f}$).

[003334]

Exercice 1099 $f\circ g=0$ et $f+g\in GL(E)$

Soit E de dimension finie et $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f\circ g=0 \\ f+g\in GL(E). \end{cases}$

Montrer que $\mathrm{rg} f+\mathrm{rg} g=\dim E$.

Correction ▼ [003335]

Exercice 1100 f tq $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont imposés

Soit E un K-ev de dimension finie et H,K deux sev fixés de E.

1. A quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im} f=H$ et $\mathrm{Ker} f=K$?
2. On note $\mathscr{E}=\{f\in\mathscr{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Im} f=H \text{ et } \mathrm{Ker} f=K\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un groupe pour $\circ$ si et seulement si $H\oplus K=E$.

Correction ▼ [003336]

Exercice 1101 Thms de factorisation

Soient E,F,G trois K-ev avec $\dim(G)$ finie.

1. Soient $u\in\mathscr{L}(F,E)$ et $v\in\mathscr{L}(G,E)$. Montrer qu'il existe $h\in\mathscr{L}(G,F)$ tel que $v=u\circ h$ si et seulement si $\mathrm{Im} v\subset\mathrm{Im} u$.
2. Soient $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(E,G)$. Montrer qu'il existe $h\in\mathscr{L}(G,F)$ tel que $u=h\circ v$ si et seulement si $\mathrm{Ker} v\subset\mathrm{Ker} u$.

[003337]

Exercice 1102 Noyaux itérés

Soit E un ev de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(E)$. On pose $N_k=\mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k=\mathrm{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.
2. Soit p tel que $N_p=N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1}=N_{p+2}=\dots=N_{p+k}=\dots$
3. Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.
4. Montrer que $N_p\oplus I_p=E$.
5. Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1})-\dim(N_k))$ est décroissante.

[003349]

Exercice 1103 Dimension des g tq $f\circ g=0$ et/ou $g\circ f=0$

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. On pose $K=\mathrm{Ker} f$, $I=\mathrm{Im} f$, $\mathscr{K}=\{g\in\mathscr{L}(E) \text{ tq } f\circ g=0\}$ et $\mathscr{I}=\{g\in\mathscr{L}(E) \text{ tq } g\circ f=0\}$.

1. Montrer que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{I}$ sont des sev de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit $g\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que : $g\in\mathscr{K} \iff \mathrm{Im} g\subset K$, et : $g\in\mathscr{I} \iff \mathrm{Ker} g\supset I$.
3. (a) Montrer que l' application $\Phi:\mathscr{K}\to\mathscr{L}(E,K), g\mapsto g^{|K}$ est un isomorphisme d'ev. En déduire $\dim\mathscr{K}$.
   (b) Chercher de même $\dim\mathscr{I}$ en introduisant un supplémentaire I' de I.
   (c) Chercher aussi $\dim(\mathscr{K}\cap\mathscr{I})$.

Correction ▼ [003350]

Exercice 1104 Rang de $f\mapsto u\circ f\circ v$

Soient $u,v\in\mathscr{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$: $f\mapsto u\circ f\circ v$.

Correction ▼ [003351]

Exercice 1105 Idéaux de $\mathscr{L}(E)$

Un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$ est un sev $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall\, f\in\mathscr{I}$, $\forall\, g\in\mathscr{L}(E)$, $f\circ g\in\mathscr{I}$.
Soit $\mathscr{I}$ un idéal à gauche.

1. Montrer que si $f\in\mathscr{I}$ et $\mathrm{Im} g\subset\mathrm{Im} f$, alors $g\in\mathscr{I}$.
2. Soient $f_1,f_2\in\mathscr{I}$. Montrer qu'il existe $g_1,g_2\in\mathscr{L}(E)$ tels que $\mathrm{Im}(f_1\circ g_1+f_2\circ g_2)=\mathrm{Im} f_1+\mathrm{Im} f_2$.
3. Soit $f\in\mathscr{I}$ tel que $\mathrm{rg}(f)$ soit maximal. Montrer que $\mathscr{I}=\{g\in\mathscr{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Im} g\subset\mathrm{Im} f\}=\{f\circ g \text{ tq } g\in\mathscr{L}(E)\}$.

[003353]

Exercice 1106 **I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $[\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}]$ et $[\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f]$ (où $f^2 = f \circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow Id - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(Id - p) \text{ et } \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}(Id - p) \text{ et } E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p].$$
3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p \circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}p$, $\mathrm{Ker}q$, $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}q$.

Correction ▼ [005171]

Exercice 1107 ****

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u,v) \in (\mathscr{L}(E))^2$.

1. Montrer que $[\mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ u = w \circ v]$.
2. En déduire que $[v \text{ injectif} \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ w \circ v = Id_E]$.

Correction ▼ [005181]

Exercice 1108 ***

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

– Soit $f:\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$.

– Mêmes questions avec $g:\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & \int_0^x P(t)\,dt \end{array}$.

Correction ▼ [005182]

Exercice 1109 **T

Soient $(e_i)_{1\leq i\leq 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$.

Correction ▼ [005187]

Exercice 1110 **I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\mathrm{rg}u - \mathrm{rg}v| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v$.

Correction ▼ [005190]

Exercice 1111 ****

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que, pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, on a :
   $$(\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathscr{L}(E)/\ f \circ g + g \circ f = Id_E).$$
2. On suppose $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1,...,u_p,v_1,...,v_p)$ de E telle que :
   $$\forall i \in \{1,...,p\},\ f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

Correction ▼ [005191]

Exercice 1112 ***I Le théorème des noyaux itérés

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E non injectif. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \mathrm{Ker}f^k$ et $I_k = \mathrm{Im}f^k$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$.
2. (a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2})$.

(b) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1}$ et $k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.

(c) Montrer que $p \leq n$.

3. Montrer que si $k < p$, $I_k = I_{k+1}$ et si $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.
4. Montrer que $E = I_p \oplus N_p$ et que f induit un automorphisme de I_p.
5. Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées I_k décroît de moins en moins vite).

Correction ▼ [005192]

Exercice 1113 ***I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.

Correction ▼ [005194]

Exercice 1114 ***

Soient E un espace de dimension finie et F et G deux sous-espaces de E. Condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $F = \mathrm{Ker} f$ et $G = \mathrm{Im} f$.

Correction ▼ [005582]

Exercice 1115 ***

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer que :

1. (f non injective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à gauche).
2. (f non surjective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à droite).

Correction ▼ [005583]

Exercice 1116 **I Noyaux itérés

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ puis $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. ($N$ est le nilespace de f et I le cœur de f)

1. (a) Montrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
   (b) Montrer que N et I sont stables par f.
   (c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.
2. On suppose de plus que $\dim E = n$ entier naturel non nul.
   (a) Soit $A = \{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N} / I_k = I_{k+1}\}$. Montrer qu'il existe un entier $p \leqslant n$ tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N} / k \geqslant p\}$.
   (b) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
   (c) Montrer que $f_{/N}$ est nilpotent et que $f_{/I} \in GL(I)$.
3. Trouver des exemples où
   (a) A est vide et B est non vide,
   (b) A est non vide et B est vide,
   (c) (****) A et B sont vides.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_k = \dim(I_k)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction ▼ [005586]

Exercice 1117 ***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. Montrer que $[(\forall g \in \mathscr{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f$ bijective$]$.
2. On pose $\dim E = p$, $\dim F = n$ et $\mathrm{rg} f = r$. Calculer la dimension de $\{g \in \mathscr{L}(F,E) / f \circ g \circ f = 0\}$.

Correction ▼ [005601]

Exercice 1118 **I

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ u(P) = P(X+1) - P$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
2. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005602]

38 107.03 Morphismes particuliers

Exercice 1119

Soient U et V deux ensembles non vides et f une application de U à valeurs dans V. Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $U \times V$ défini par $\mathscr{G}_f = \{(x,y) \in U \times V \text{ tels que } y = f(x)\}$.

1. On suppose maintenant que U et V sont des espaces vectoriels. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel de $U \times V$.
2. Montrer qu'une partie H de $U \times V$ est le graphe d'une application linéaire de U dans V si et seulement si les trois conditions qui suivent sont satisfaites :
   i) La projection canonique $H \to U$ définie par $(x,y) \mapsto x$ est surjective.
   ii) H est un sous-espace vectoriel de $U \times V$.
   iii) $H \cap (\{0_U\}) \times V) = \{0_{U \times V}\}$. ($0_U$ et $0_{U \times V}$ sont les éléments neutres respectifs de U et $U \times V$.)
3. On identifie $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme $(x,y,z,t) \mapsto ((x,y),(z,t))$. Enoncer des conditions nécéssaires et suffisantes pour que E soit le graphe d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.
4. Montrer que E est le graphe d'une application linéaire φ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Déterminer sa matrice dans une base que l'on définira au préalable.

[000966]

Exercice 1120 Projecteur et involution

Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. Un endomorphisme u de E est un **projecteur** si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\operatorname{Im} u = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.
   Un endomorphisme u de E est appelé *involutif* si $u \circ u = i_E$.
2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \operatorname{Im}(i_E + u) \oplus \operatorname{Im}(i_E - u)$.
   Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G. Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Montrer que u est involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

[000967]

Exercice 1121

Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. On désigne par ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base $\{e_1, e_2\}$ de P et $\{e_3\}$ une base de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer $\operatorname{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $A = \operatorname{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer $\operatorname{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $B = \operatorname{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

[000968]

Exercice 1122

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$. Montrer que l'intersection de deux hyperplans de E a une dimension supérieure ou égale à $n - 2$. Montrer que, pour tout $p \leq n$, l'intersection de p hyperplans a une dimension supérieure ou égale à $n - p$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application e_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e_y(P(X)) = P(y)$ (i.e. l'application e_y est l'évaluation en y) est linéaire. Calculer la dimension de son noyau.
3. Même question avec l'application e'_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e'_y(P(X)) = P'(y)$ (en désignant par P' le polynôme dérivé de P).

4. Démontrer, à l'aide de ces deux résultats, qu'il existe dans $\mathbb{R}_6[X]$ un polynôme P non nul et ayant les propriétés suivantes : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ et $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$.

[000969]

Exercice 1123

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y)$. Montrer que f est la bîîîîp par rapport à bîîîîp parallèlement à bîîîîp. [000970]

Exercice 1124

E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \bigoplus G$. On pose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grâce à $E = F \bigoplus G$. s est la symétrie par-rapport à F de direction G.

1. Montrer que $s \in L(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, donner $\mathrm{Ker}(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in L(E)$ vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f+id_E}{2}$. Calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. Vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

[000971]

Exercice 1125

Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p+q-pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :

$$Im(pq) = Imp \cap Imq,$$
$$Im(p+q-pq) = Imp + Imq.$$

[000972]

Exercice 1126

Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur de E ; donner alors $Im(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$.
Indication : on montrera que $Im(p+q) = Imp \bigoplus Imq$ et que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. [000973]

Exercice 1127

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Monter que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.
Indication ▼ Correction ▼ [000974]

Exercice 1128

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, que $E = Imf \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$ mais que $f^2 = -f$. Quel théorème cet exemple illustre t-il ? [000975]

Exercice 1129

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P^{'}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
Correction ▼ [000976]

Exercice 1130

Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \to E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

et $U(f)(0) = f(0)$. Montrer que $U \in L(E)$, déterminer $\mathrm{Ker}(U)$ et $Im(U)$. [000977]

Exercice 1131

On désigne par $\mathscr{P}_q$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à q, et $\mathscr{O}_q$ l'espace vectoriel des polynômes d'ordre supérieur ou égal à q, c'est-à-dire divisibles par x^q. P étant un polynôme, on note $T(P)$ le polynôme défini par :

$$T(P)(x) = xP(0) - \frac{1}{20}x^5P^{(4)}(0) + \int_0^x t^2[P(t+1) - P(t) - P'(t)]\,dt.$$

1. Montrer que T est linéaire. Déterminer $T(e_i)$ où $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, $e_3 = x^3$, $e_4 = x^4$, et vérifier que $T(\mathscr{P}_4) \subset \mathscr{P}_4$. Désormais, on considère T comme application linéaire de $\mathscr{P}_4$ dans $\mathscr{P}_4$. Écrire sa matrice par rapport à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$.
2. Déterminer soigneusement les espaces $T(\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_3)$ et $T(\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_2)$.
3. La restriction T' de T à $\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_2$ est-elle injective ? Sinon déterminer une base du noyau de T'.
4. Montrer que $\operatorname{Im} T = (\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{P}_1) \oplus (\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4)$. Quel est le rang de T ?
5. Montrer que $\operatorname{Ker} T$ peut s'écrire sous la forme $(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{P}_1) \oplus V$; expliciter un sous-espace V possible. Déterminer $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$.
6. On cherche un vecteur non nul $u = ae_3 + be_4$ de $\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4$, et un nombre réel λ, tels que $T(u) = \lambda u$. Écrire les équations que doivent vérifier a, b, λ. Montrer qu'il existe deux valeurs possibles de λ, λ_1 et λ_2, telles $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; les calculer. Trouver deux vecteurs non nuls u_3 et u_4 de $\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4$ tels que $T(u_3) = \lambda_1 u_3$ et $T(u_4) = \lambda_2 u_4$.
7. On pose $u_0 = e_1$, $u_1 = e_2 - 4e_3 + 3e_4$, $u_2 = e_0$. Montrer que $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de $\mathscr{P}_4$. Écrire la matrice de T dans cette base.

[000978]

Exercice 1132

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$ ($\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est fixé) :

$$f \mapsto f + \phi, \quad f \mapsto \phi f, \quad f \mapsto f \circ \phi, \quad f \mapsto \phi \circ f, \quad f \mapsto \int f, \quad f \mapsto f'.$$

Lesquelles sont des endomorphismes de $C^0(\mathbb{R})$?
Pour quelles valeurs de ϕ les endomorphismes $\Phi : f \mapsto f \circ \phi$ et $D : f \mapsto f'$ commutent-ils (c'est-à-dire vérifient $D(\Phi f) = \Phi(Df), \forall f$) ?
[002432]

Exercice 1133 Image d'une somme, d'une intersection

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous-dire de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1 + F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$? [003306]

Exercice 1134 Effet sur les familles libres et génératrices

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

[003307]

Exercice 1135 $f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. [003308]

Exercice 1136 Permutation de coordonnées dans K^n

Soit $\sigma \in S_n$ (groupe symétrique) et $f_\sigma : K^n \to K^n, (x_1, \dots x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$
On munit K^n de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit φ un automorphisme d'algèbre de K^n.
   (a) Montrer que la base canonique de K^n est invariante par φ (étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi(e_i \times e_j)$).
   (b) En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.
3. Montrer que $\{0\}$, $K(1, \dots, 1)$, $\{(x_1, \dots, x_n) \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et K^n sont les seuls sev stables par tous les endomorphismes f_σ.

[003314]

Exercice 1137 Isomorphisme $\circ$ projecteur

Soient E en ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.
2. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

[003338]

Exercice 1138 Centre de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un K-ev de dimension finie. Le centre de $\mathscr{L}(E)$ est : $Z = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\vec{x} \in E$. Si $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ telle que $g(\vec{x}) = \vec{x}$ et $g \circ f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$.
2. En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.
3. Déterminer $Z' = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

[003339]

Exercice 1139 Éléments réguliers dans $\mathscr{L}(E)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que : (f est injectif) $\iff$ $(\forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0)$.
2. Montrer que : (f est surjectif) $\iff$ $(\forall\, g \in \mathscr{L}(F),\ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0)$.

[003340]

Exercice 1140 $f^2 = -\mathrm{id}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$. Pour $z = x + iy \in (x^2+1)$ et $\vec{u} \in E$, on pose : $z\vec{u} = x\vec{u} + yf(\vec{u})$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une structure de (x^2+1)-ev sur E.
2. En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

[003341]

Exercice 1141 $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}$

1. Soit E un K-ev et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f^2 = 0 \\ f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E. \end{cases}$

   Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$, et F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$. Montrer que
   (a) $f^2 = 0$.
   (b) $\forall\, \vec{x} \in E$, il existe $\vec{y}, \vec{z} \in F$ uniques tels que $\vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$.
   (c) Il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Correction ▼ [003342]

Exercice 1142 Endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Soit $\vec{u} \in E \setminus \mathrm{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $\big(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u})\big)$ est libre.
2. En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.
3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$...
   (a) en dimension finie.
   (b) pour E quelconque.
4. Dans $\mathscr{L}(K^2)$, soient f, g de matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vérifier que f est nilpotent, $g \in GL(K^2)$, mais $f + g \notin GL(K^2)$.

Correction ▼ [003343]

Exercice 1143 Matexo

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie. [003344]

Exercice 1144 Mines P' 1995

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente d'indice n.
Soit $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), g \mapsto f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer que $\phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que ϕ est nilpotente.
2. Soit $a \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de ϕ.

[003345]

Exercice 1145 Endomorphisme cyclique

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que la famille $\left(f^k(\vec{u})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.

1. Montrer que $\left(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{n-1}(\vec{u})\right)$ est une base de E. (Considérer p maximal tel que $\mathscr{F} = \left(\vec{u}, \dots, f^{p-1}(\vec{u})\right)$ est libre, et prouver que $f^k(\vec{u})$ est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ pour tout entier k)
2. Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.

[003346]

Exercice 1146 $u^2 = 0$ en dimension 3

Soit E un ev de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ et $\vec{a} \in E$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ u(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{a}$.
[003347]

Exercice 1147 $(u,x,f(x))$ liée

Soit E un ev de dimension supérieure ou égale à 3 et $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Trouver tous les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E$, la famille $(\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée.

Correction ▼ [003348]

Exercice 1148 Automorphismes de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un ev de dimension n et $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ un automorphisme d'algèbre. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base fixée de E, (φ_{ij}) la base de $\mathscr{L}(E)$ associée $\left(\varphi_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{jk}\vec{e}_i\right)$ et $\psi_{ij} = \Phi(\varphi_{ij})$.

1. Simplifier $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell}$.
2. En déduire qu'il existe $\vec{u}_1 \in E \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $\psi_{11}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$.
3. On note $\vec{u}_i = \psi_{i1}(\vec{u}_1)$. Montrer que $\psi_{ij}(\vec{u}_k) = \delta_{jk}\vec{u}_i$ et en déduire que $(\vec{u}_i)$ est une base de E.
4. Soit $f \in GL(E)$ définie par : $f(\vec{e}_i) = \vec{u}_i$. Montrer que : $\forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ \Phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Correction ▼ [003354]

Exercice 1149 $f^2 = 0 \Rightarrow f = g \circ h$ avec $h \circ g = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g, h \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

Correction ▼ [003355]

Exercice 1150 Barycentre de projections

Soient p, q deux projections de même base H et de directions F, G. Soit $\lambda \in K$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection de base H.
[003485]

Exercice 1151 Valeurs propres d'une projection

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection. Montrer que pour tout $\lambda \in K \setminus \{-1\}$, $\mathrm{id}_E + \lambda p$ est un isomorphisme de E.
[003486]

Exercice 1152 Projections ayant même base ou même direction

Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projections.

1. Montrer que p et q ont même base si et seulement si : $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Donner une condition analogue pour que p et q aient même direction.

[003487]

Exercice 1153 Somme de deux projecteurs

Soient p, q deux projections. Montrer les équivalences :

$$p+q \text{ est une projection } \Leftrightarrow p\circ q+q\circ p=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Base}(p)\subset \mathrm{Dir}(q) \\ \mathrm{Base}(q)\subset \mathrm{Dir}(p). \end{cases}$$

Chercher alors la base et la direction de $p+q$. [003488]

Exercice 1154 $f\circ g=f$ et $g\circ f=g$

Soit E un K-ev. Trouver tous les couples (f,g) d'endomorphismes de E tels que : $\begin{cases} f\circ g=f \\ g\circ f=g. \end{cases}$

Correction ▼ [003489]

Exercice 1155 $f\circ g=\mathrm{id}$

Soit E un espace vectoriel et $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tels que $f\circ g=\mathrm{id}_E$. Montrer que $g\circ f$ est une projection et déterminer ses éléments.

Correction ▼ [003490]

Exercice 1156 Projection $p+q-q\circ p$

Soient p,q deux projections telles que $p\circ q=0$. Montrer que $p+q-q\circ p$ est une projection, et déterminer ses éléments.

Correction ▼ [003491]

Exercice 1157 Endomorphisme de rang 1

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda\in K$ tel que $f^2=\lambda f$.
Montrer que : $\lambda=1 \iff \mathrm{id}-f$ est non injective $\iff \mathrm{id}-f$ est non surjective (même en dimension infinie).

Correction ▼ [003492]

Exercice 1158 Relation d'ordre sur les projecteurs

On munit l'ensemble des projections d'un ev E de la relation : $p\ll q \iff p\circ q=q\circ p=p$.

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.
2. Soient p,q deux projections permutables. Montrer que $\sup(p,q)=p+q-p\circ q$ et $\inf(p,q)=p\circ q$.

[003493]

Exercice 1159 Expressions analytiques

Soit $E=K^3$, $F=\{\vec{X}=(x,y,z)$ tq $x+2y+z=0\}$ et $G=\mathrm{vect}\big(\vec{U}=(1,1,1)\big)$.

1. Vérifier que $F\oplus G=E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G et $\vec{X}=(x,y,z)$. Déterminer $s(\vec{X})$.

Correction ▼ [003494]

Exercice 1160 Trace nulle

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et A une partie finie de $GL(E)$ stable par composition. On pose $u=\sum_{f\in A} f$. Montrer que $\mathrm{tr}(u)=0\Rightarrow u=0$.

Correction ▼ [003495]

Exercice 1161 ***I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k\in\mathbb{N}^*/\ u^k=0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u, nilpotent d'indice 1 est 0).

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x,\ u(x),\dots,\ u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n=0$.
3. On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n. Déterminer $\mathrm{rg}u$.

Correction ▼ [005193]

Exercice 1162 *** I

Soient E un espace de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que $f^n=0$.

Correction ▼ [005584]

Exercice 1163 ***I

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Correction ▼ [005587]

Exercice 1164 ***I

Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E.

Correction ▼ [005588]

Exercice 1165 **I

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
Montrer que $(p+q$ projecteur$) \Leftrightarrow (p\circ q = q\circ p = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p))$.
Dans le cas où $p+q$ est un projecteur, déterminer $\mathrm{Ker}(p+q)$ et $\mathrm{Im}(p+q)$.

Correction ▼ [005589]

Exercice 1166 **I

Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction ▼ [005590]

Exercice 1167 ****

Soient p_1,..., p_n n projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. Montrer que $(p_1+...+p_n$ projecteur$) \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$.

Correction ▼ [005591]

Exercice 1168 ***

Soit E un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie n. Soient p_1,..., p_n n projecteurs non nuls de E tels que $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

1. Montrer que tous les p_i sont de rang 1.
2. Soient q_1,..., q_n n projecteurs vérifiant les mêmes égalités. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$.

Correction ▼ [005592]

Exercice 1169 ***

Soit E un espace vectoriel. Soit G un sous-groupe fini de $\mathscr{GL}(E)$ de cardinal n. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G et p un projecteur d'image F. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}$ est un projecteur d'image F.

Correction ▼ [005593]

Exercice 1170 ***

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme g de E tel que $f = g\circ p$.

Correction ▼ [005598]

Exercice 1171 **I

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

Correction ▼ [005599]

Exercice 1172 ***

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient f et g deux projecteurs distincts et non nuls de E tels qu'il existe deux complexes a et b tels que :

$$fg - gf = af + bg.$$

1. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. En déduire que $gf = f$ puis que $a+b = 0$ puis que $a = -1$.
2. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, on a $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que si f et g sont deux projecteurs qui ne commutent pas et vérifient de plus $fg - gf = af + bg$ alors (a,b) est élément de $\{(-1,1),(1,-1)\}$. Caractériser alors chacun de ces cas.

Correction ▼ [005600]

39 107.99 Autre

Exercice 1173 $\mathscr{L}(E\times F)$, Chimie P 1996

Est-il vrai que $\mathscr{L}(E\times F)$ et $\mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(F)$ sont isomorphes ? (E et F espaces vectoriels de dimensions finies).

Correction ▼ [003315]

Exercice 1174 Centrale MP 2001

Soit f un endomorphisme donné de E de dimension n et $F = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g\circ f = f\circ g = 0\}$. Trouver la dimension de F.

Correction ▼ [003356]

Exercice 1175 X MP* 2001

Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$ et $F = \bigcap_{g\in G}\operatorname{Ker}(g-\mathrm{id})$. Montrer que $\operatorname{Card}(G)\times\dim F = \sum_{g\in G}\operatorname{tr}(g)$.

Correction ▼ [003357]

40 108.01 Propriétés élémentaires, généralités

Exercice 1176

Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & b & a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & a & c\\ 1 & b & b\\ 1 & c & a\end{pmatrix}$$

[001040]

Exercice 1177

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5. [001041]

Exercice 1178

On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 1 & 3\\ 6 & -2 & -1 & 7\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2\\ -5 & 2\\ 3 & 1\\ 6 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.

2. Calculer BC puid $A(BC)$.

3. Que remarque-t-on ?

[001042]

Exercice 1179

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1\\ 5 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -6 & 7\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -5\\ 1 & 6 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

1. Calculer AB.

2. Calculer BA.

3. Que remarque-t-on ?

[001043]

Exercice 1180

Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. [001044]

Exercice 1181

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse. [001045]

Exercice 1182

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.
   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.
   (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
   (c) En déduire A^n Pour tout entier n.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

[001046]

Exercice 1183

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $A = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.
3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
   Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

[001047]

Exercice 1184

suivantes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[001048]

Exercice 1185

Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Montrer que A^n est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.

3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geq 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

[001049]

Exercice 1186

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}. [001050]

Exercice 1187

Rappeler la structure d'espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $M_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension. [001051]

Exercice 1188

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Correction ▼ [001052]

Exercice 1189

Déterminer deux éléments A et B de $M_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Correction ▼ [001053]

Exercice 1190

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(E)$.
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

[001054]

Exercice 1191

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On nomme commutant de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $C(A)$ et un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \in C(A)$.

[001055]

Exercice 1192

Soit F et G les sous-ensembles de $M_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} a,b,c \in \mathbb{R} \} \qquad G = \{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \}.$$

Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.
Correction ▼ [001056]

Exercice 1193

Montrer que $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}); tr(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $M_2(\mathbb{R})$.
Correction ▼ [001057]

Exercice 1194

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

1. Montrer (en calculant les coefficients) que AB est triangulaire supérieure.
2. Soit φ un endomorphisme bijectif de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.
3. En déduire une nouvelle démonstration de 1. Montrer que si A est inversible, A^{-1} est triangulaire supérieure.

[001058]

Exercice 1195

Soit $N \in M_n((x^2+1)^{)}$ une matrice nilpotente. Calculer $\det(I+N)$. Si $A \in M_n((x^2+1)^{)}$ commute avec N, montrer que $\det(A+N) = \det(A)$. (on pourra commencer par étudier le cas où A est inversible.) [001059]

Exercice 1196

Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un groupe multiplicatif. [001060]

Exercice 1197

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. [001061]

Exercice 1198

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. A est-elle inversible ?

[001062]

Exercice 1199

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telles que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$. [001063]

Exercice 1200

Que peut-on dire d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\operatorname{tr}(A{}^tA) = 0$? [001064]

Exercice 1201

Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$. [001065]

Exercice 1202

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. [001066]

Exercice 1203

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

[001067]

Exercice 1204

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M - I_n$ soit nilpotente (ie $\exists k \in \mathbb{N}, (M - I_n)^k = 0$). Montrer que M est inversible. [001068]

Exercice 1205

$M = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1,...,n\}, \left|a_{i,i}\right| > \sum_{j\neq i} \left|a_{i,j}\right|.$$

Montrer que M est inversible. [001069]

Exercice 1206

Montrer que si $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})$ et $AB = A+B$ alors $AB = BA$. [001070]

Exercice 1207

Soit $M = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$, montrer :

$$\min_j \max_i a_{i,j} \geq \max_i \min_j a_{i,j}.$$

[001071]

Exercice 1208

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $J^2 = I$ et

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2; A = aI + bJ\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication (Est-ce une algèbre ?). En déduire que :

   $$\forall A \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2; A^n = a_n I + b_n J$$

   et calculer les coefficients a_n et b_n.
2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Calculer (u_n, v_n) tel que $S_n = u_n I + v_n J$ en fonction de a et de b. Calculer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $e^A = uI + vJ$ où $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Calculer e^{-A} et le produit $e^{-A}\, e^A$.
3. Application :

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

   Calculer e^A.

[001072]

Exercice 1209

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), AXB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$. [001073]

Exercice 1210

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = I + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$ (*Indication* : voir d'abord que A est inversible). [001074]

Exercice 1211

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls, montrer que :

$$A^n = 0.$$

[001075]

Exercice 1212

Calculer les puissances de :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[001076]

Exercice 1213

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse. [001077]

Exercice 1214

Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[001078]

Exercice 1215

Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & \dots \\ \dots & 0 & 1 & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

[001079]

Exercice 1216 Examen

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.
3. Trouver le noyau de A, et en donner une base B_1. Calculer le rang de A.
4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2.
5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.
6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Donner les termes généraux x_n et y_n.

Correction ▼ [001080]

Exercice 1217

Pour toute matrice carrée A de dimension n, on appelle trace de A, et l'on note tr$A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. Montrer que si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\mathrm{tr}M = \mathrm{tr}M'$. On note $\mathrm{tr}u$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si v est un autre endomorphisme de E, $\mathrm{tr}(u \circ v - v \circ u) = 0$.

[002442]

Exercice 1218

On rappelle qu'une matrice carrée A d'ordre n est dite *symétrique* si $a_{i,j} = a_{j,i}, \forall i, j$, et *antisymétrique* si $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1. Combien y a-t-il de matrices antisymétriques diagonales ?
2. Montrer que A^tA est symétrique pour toute matrice carrée A.
3. Montrer que si A, B sont symétriques, leur produit $C = AB$ est symétrique si et seulement si $AB = BA$. Que dire si elles sont antisymétriques ? Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?
4. Soit P un polynôme. Montrer que si A est symétrique, $P(A)$ l'est aussi. Que dire si A est antisymétrique ?

[002443]

Exercice 1219

Soit A, B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $B = \lambda I$, alors $A = B$. [002444]

Exercice 1220

Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + |a_{i,2}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{i,n}|.$$

Montrer que A est inversible. [002445]

Exercice 1221

Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si $0 \leq a_{i,j} \leq 1, \forall i, j$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1, \forall j$.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastique est aussi une matrice stochastique.
2. Soit $B = A^2$, $A_i = \sup_j a_{i,j}$, $a_i = \inf_j a_{i,j}$. Montrer que $a_i \leq b_{i,j} \leq A_i, \forall j$.

[002446]

Exercice 1222

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer *lorsque cela est bien défini* les produits de matrices suivants : AB, BA, AC, CA, AD, AE, BC, BD, BE, CD, DE. [002747]

Exercice 1223

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer : $(A - 2B)C$, C^TA, C^TB, $C^T(A^T - 2B^T)$, où C^T désigne la matrice transposée de C. [002748]

Exercice 1224

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec successivement

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}.$$

[002749]

Exercice 1225

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002750]

Exercice 1226

Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002751]

Exercice 1227

L'*exponentielle* d'une matrice carrée M est, par définition, la limite de la série

$$e^M = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}.$$

On admet que cette limite existe en vertu d'un théorème d'analyse.

1. Montrer que si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$. On est autorisé, pour traiter cette question, à passer à la limite sans précautions.
2. Calculer e^M pour les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Chercher un exemple simple où $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

[002752]

Exercice 1228

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = AC$. La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices F de taille $(3,3)$ telles que $AF = 0$, (où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

[002772]

Exercice 1229

Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse. [002773]

Exercice 1230

Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$? [002774]

Exercice 1231

Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[002775]

Exercice 1232 Matrices en damier

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que M est *en damier* si $a_{ij} = 0$ pour $j - i$ impair. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ en damier. Montrer que $\mathscr{D}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$. Quelle est sa dimension ?

[003358]

Exercice 1233 Matrices stochastiques

Soit
$\mathscr{D} = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall\, i, j,\ a_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall\, i,\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par multiplication.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathscr{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathscr{D}$.

Correction ▼ [003359]

Exercice 1234 Matrices centrosymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que A est *centro-symétrique* si pour tous i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB. Montrer aussi que si A est centro-symétrique et inversible alors A^{-1} est aussi centro-symétrique.
[003360]

Exercice 1235 Équation $AX = B$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'équation en X : $AX = B$, $X, B \in \mathscr{M}_{3,n}(K)$, a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (traiter d'abord le cas $n = 1$).
2. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003393]

Exercice 1236 Équation $AX = B$

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice B telle que $BC = A$?

Correction ▼ [003394]

Exercice 1237 Calcul de A^n par la formule du binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [003395]

Exercice 1238 Calcul de A^n par polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$$P(6) = 6^n, \quad P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n, \quad \text{et } P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n.$$

Montrer que $A^n = P_n(A)$.

3. Même question pour $n \in \mathbb{Z}$.

[003396]

Exercice 1239 Calcul de A^k

Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003397]

Exercice 1240 **

Pour x réel, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif.

Correction ▼ [005258]

Exercice 1241 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour n entier relatif.

Correction ▼ [005262]

Exercice 1242 **

Montrer que $\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in]-1,1[\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

Correction ▼ [005263]

Exercice 1243 **

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices carrées de format n telles que $a_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r-1$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+s-1$ où r et s sont deux entiers donnés entre 1 et n. Montrer que si $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors $c_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r+s-1$.

Correction ▼ [005611]

---

41 108.02 Noyau, image

Exercice 1244

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chercher le noyau et l'image de u. Calculer son rang de deux manières. Calculer la matrice de u^2 dans la base e. Montrer que $u^2-3u=0$.

[002436]

Exercice 1245

Calculer le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

[002449]

Exercice 1246 **T

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i-3j+5k)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$.
3. Calculer M^2 et M^3.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}u^2$ et $\mathrm{Im}u^2$.
5. Calculer $(I-M)(I+M+M^2)$ et en déduire que $I-M$ est inversible. Préciser $(I-M)^{-1}$.

Correction ▼ [005257]

Exercice 1247 **

Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\to&\mathbb{R}_{n+1}[X]\\P&\mapsto&Q=e^{X^2}(Pe^{-X^2})'\end{array}.$

1. Vérifier que $f\in(\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{rg}f$.

Correction ▼ [005260]

Exercice 1248 ***T

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1)\ \begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&m\end{pmatrix}\quad 2)\ \begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}\quad 3)\ \begin{pmatrix}1&a&1&b\\a&1&b&1\\1&b&1&a\\b&1&a&1\end{pmatrix}\quad 4)\ (i+j+ij)_{1\leq i,j\leq n}$$

$$5)\ (\sin(i+j))_{1\leq i,j\leq n}\qquad 6)\ \begin{pmatrix}a&b&0&\dots&0\\0&a&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&&\ddots&\ddots&b\\b&0&\dots&0&a\end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [005269]

Exercice 1249 ***

Rang de la matrice $\begin{pmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)\\\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)\\\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)&\cos(5a)\\\cos(3a)&\cos(4a)&\cos(5a)&\cos(6a)\end{pmatrix}.$

Correction ▼ [005603]

Exercice 1250 **

Rang de la matrice $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction ▼ [005607]

Exercice 1251 ***

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et B l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005622]

Exercice 1252 ***

Soit H un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \lambda_A \in \mathbb{C} / \; HAH = \lambda_A H$. Montrer que $\mathrm{rg} H \leqslant 1$.

Correction ▼ [005623]

Exercice 1253 ***

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \text{ et } (2)\ \mathrm{rg} M \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{tr} M = 0.$$

Correction ▼ [005624]

42 108.03 Matrice et application linéaire

Exercice 1254

Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :
$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$
Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?
2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :
$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$
en conservant la base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

[001081]

Exercice 1255

Soit h une application linéaire de rang r, de E, espace vectoriel de dimension n, dans F, espace vectoriel de dimension m.

1. Préciser comment obtenir une base $(e_i)_{i=1}^n$ de E, et une base $(f_j)_{j=1}^m$ de F, telles que $h(e_k) = f_k$ pour $k = 1, \dots, r$ et $h(e_k) = 0$ pour $k > r$. Quelle est la matrice de h dans un tel couple de bases ?
2. Déterminer un tel couple de bases pour l'homomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini dans les bases canoniques par :
$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 &= x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_3 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$
3. Même question pour l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :
$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y).$$

[001082]

Exercice 1256

On désigne par $\mathscr{P}_2$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathscr{P}_2$ et on pose

$$p_0 = e_0, \quad p_1 = e_1 - \frac{1}{2}e_0, \quad p_2 = e_2 - e_1 + \frac{1}{2}e_0.$$

1. Montrer que tout polynôme de $\mathscr{P}_2$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $p = b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2$.
2. Écrire sous cette forme les polynômes : p'_0, p'_1, p'_2, p', Xp', p''.
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ définie par $\varphi(p) = Xp' - \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p''$ est une application linéaire. Préciser le noyau et l'image de cette application. Écrire les matrices de cette application par rapport à la base canonique (e_i) et par rapport à la base (p_i). Écrire la matrice de passage de la base (e_i) à la base (p_i) ; quelle relation lie cette matrice aux deux précédentes ?

[001083]

Exercice 1257

Soit $f : (x^2+1)^{\rightarrow}(x^2+1)$ l'application $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$. On considère (x^2+1) comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on fixe la base $\varepsilon = \{1, i\}$.

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Calculer $A = \mathrm{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon)$.
3. Existent-ils x et $y \in (x^2+1)^{-}\{0\}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$? Si c'est le cas déterminer un tel x et un tel y.
4. Décrire géométriquement f.
5. Soit $g : (x^2+1)^{\rightarrow}(x^2+1)$ l'application $z \mapsto e^{i\rho}\bar{z}$. Calculer $A = \mathrm{Mat}(g \circ f, \varepsilon, \varepsilon)$ et décrire géométriquement $g \circ f$.

[001084]

Exercice 1258

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + I) \neq \{0\}$.
2. Soit x un élément distinct de 0 de $\mathrm{Ker}(f^2 + I)$. Montrer qu'il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$. En déduire que $\{x, f(x)\}$ est libre.
3. Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + I))$.
4. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[001085]

Exercice 1259

Soient E un espace vectoriel de dimension n, f une application linéaire de E dans lui-même et x un élément de E tel que la famille $f(x), ..., f^n(x)$ soit libre.

1. Montrer que la famille $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ est une base de E. Déduiser-en que f est bijective.
2. On suppose maintenant que $f^n(x) = x$. Déterminer la matrice de f dans la base $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$.

[001086]

Exercice 1260

Déterminer la matrice de la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$ puis $(\vec{i}, \vec{j})$. [001087]

Exercice 1261

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $1, X, \ldots, X^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :
$$f(P(X)) = XP(X),$$
$$g(P(X)) = P'(X),$$
$$h(P(X)) = (P(X))^2.$$
Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas. f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f.
3. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Déterminer la matrice de g_n dans la base $1, X, ..., X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n de la base $1, X, ..., X^n$ dans la base $1, X, ..., X^{n+1}$. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n.

[001088]

Exercice 1262

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même $M \mapsto AM$. Montrer que f est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. [001089]

Exercice 1263

Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$.

1. Construire des exemples de telles applications.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

[001090]

Exercice 1264

Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. Soit $p \geq 1$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^p)$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^{p-1})$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ pour tout $p \geq 1$.
2. Montrer de même que si $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi^3)$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ pour tout $p \geq 2$.
3. On suppose désormais que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que $\varphi^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

[001091]

Exercice 1265

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi^2 = 0$ et $\varphi \neq 0$. Posons $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ (\varphi) \subset \mathrm{Ker}\ (\varphi)$. Déduiser-en que $r \leq 3 - r$. Calculer r.
2. Soit $e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = \varphi(e_1)$. Montrer qu'il existe $e_3 \in \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ tel que la famille $\{e_2, e_3\}$ soit libre. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

[001092]

Exercice 1266

Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^2 = \varphi$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ (\varphi) \oplus \mathrm{Im}\ (\varphi)$.
2. Supposons que E est de dimension finie n. Posons $q = \dim\ (\mathrm{Ker}\ (\varphi))$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que : $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_q) = 0$ et, pour tout $r > q$, $\varphi(e_r) = e_r$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

[001093]

Exercice 1267

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \ldots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

[001094]

Exercice 1268

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace E à trois dimensions sur un corps K. I_E désigne l'application identique de E. On considère l'application linéaire f de E dans E telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Étudier le sous-espace $\ker(f - I_E)$: dimension, base.
2. Étudier le sous-espace $\ker(f^2 + I_E)$: dimension, base.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

[001095]

Exercice 1269

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans le reste de l'exercice que $f^2 = 0$.
2. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker f$ dans E et soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de E_1. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_r, f(e_1), f(e_2), \ldots$ est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\ker f$ de façon à obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\operatorname{Im} f = \ker f$?
4. Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

[001096]

Exercice 1270

Soit trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T la transformation linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3, \quad T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application. Écrire la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application T.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

[001097]

Exercice 1271

Soit $M_{\alpha,\beta}$ la matrice : $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelles valeurs de α et de β l'application linéaire qui lui est associée est surjective.

Correction ▼ [001098]

Exercice 1272

1. Soit E un espace vectoriel et $\{e_1, \ldots e_p\}$ une famille génératrice de E. Montrer l'égalité $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p)\}$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$. Déterminer une base des noyaux et une base des images respectifs de f_A et de f_B.

[001099]

Exercice 1273

Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans E. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$. (On pourra utiliser le fait que $\mathscr{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$.)

Correction ▼ [001100]

Exercice 1274

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathscr{L}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$. [001101]

Exercice 1275

Même chose avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. [001102]

Exercice 1276

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)$.

[001103]

Exercice 1277

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = (-2,3)$ et $e_2 = (-2,5)$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{mat}(f,e)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.

[001104]

Exercice 1278

Soit $E = \mathrm{vect}(AB - BA, (A,B) \in M_n(\mathbb{Q})^2)$.

1. Montrer que $E = \ker \mathrm{tr}$ (pour l'inclusion non triviale, on trouvera une base de $\ker \mathrm{tr}$ formée de matrices de la forme $AB - BA$).
2. Soit $f \in M_n(\mathbb{Q})^*$ telle que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{Q})^2$ $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \mathrm{tr}$.

[001105]

Exercice 1279

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$. Montrer que Φ est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique et calculer $\ker \Phi$ et $\mathrm{Im}\Phi$. [001106]

Exercice 1280

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. Montrer le résultat pour $n = 2$.
2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geq 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne
$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$
Calculer les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrer que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geq 2$, on a
$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} |b_{ij}|.$$
3. Démontrer le résultat de Hadamard pour n quelconque.

Correction ▼ [002565]

Exercice 1281

Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A.B = 0$.

1. Démontrer que $\operatorname{Im} B \subset \ker A$.
2. On suppose que le rang de A est égal à $n-1$, déterminer le rang de B.

Correction ▼ [002585]

Exercice 1282

On désigne par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. À une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$u_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Soit $\tau = (i\,j)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Montrer que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathscr{S}_n$, $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma' \circ \sigma}$.
3. En déduire que $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

[002776]

Exercice 1283 Coefficients du binôme

Soit $A \in \mathscr{M} n+1(\mathbb{Q})$ telle que $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme simple de $\mathbb{Q}_n[X]$. En déduire la matrice A^{-1}.

[003406]

Exercice 1284 Coefficients du binôme

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $a_{ij} = (-1)^{n-j} C_{n-j}^{i-1}$.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $K_{n-1}[X]$.
2. En déduire A^3.

Correction ▼ [003407]

Exercice 1285 ***I

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice 2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005261]

---

43 108.04 Exemples géométriques

Exercice 1286 Homographies

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note $f_M : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$
Montrer que $M \mapsto f_M$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

[003364]

---

44 108.05 Inverse, méthode de Gauss

Exercice 1287 Conservation de l'inverse sur un sous-corps

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$. Comparer les énoncés :
1 : M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$.
2 : M est inversible dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$.

[003361]

Exercice 1288 Algèbre de matrices

On note $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A} = \{aU + bI,\ a, b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2)$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = aU + bI \in \mathscr{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathscr{A}$ si et seulement si $b(b+na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.
3. Montrer que si $b(b+na) = 0$, alors M n'est pas inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Trouver les matrices $M \in \mathscr{A}$ vérifiant : $M^n = I$.

Correction ▼ [003362]

Exercice 1289 Opérations par blocs

1. Soient $A_1 \in \mathscr{M}_{n,p_1}(K)$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n,p_2}(K)$, $B_1 \in \mathscr{M}_{p_1,q}(K)$, $B_2 \in \mathscr{M}_{p_2,q}(K)$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p_1+p_2}(K)$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p_1+p_2,q}(K)$. Montrer que $AB = A_1B_1 + A_2B_2$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A, B, 0, C$ sont des matrices de tailles $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ (matrice triangulaire par blocs). Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont. Le cas échéant, donner M^{-1} sous la même forme.
3. En déduire une nouvelle démonstration de la propriété : *L'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire.*

Correction ▼ [003365]

Exercice 1290 Décomposition d'une matrice en matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $U, V \in GL_n(K)$ telles que $A = U + V$.

[003366]

Exercice 1291 Tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ contient une matrice inversible

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $H = \{M \text{ tq } \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.
2. En déduire que H contient une matrice inversible.

Correction ▼ [003376]

Exercice 1292 M antisymétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I + M$ est inversible (si $MX = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I-M)(I+M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

[003380]

Exercice 1293 Équation $X^2 + X = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation dans $\mathscr{M}_2(K)$: $X^2 + X = A$.

Soit X une solution et ϕ_A, ϕ_X les endomorphismes de K^2 de matrices A et X dans la base canonique.

1. Montrer que X ou $X + I$ n'est pas inversible.
2. Si X n'est pas inversible, montrer que X est proportionnelle à A (on montrera que $\operatorname{Ker}\phi_X = \operatorname{Ker}\phi_A$ et $\operatorname{Im}\phi_X = \operatorname{Im}\phi_A$).
3. Résoudre l'équation.

Correction ▼ [003381]

Exercice 1294 Groupes de matrices

Soit $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}_n(K)$ tel que pour la multiplication, $\mathscr{G}$ soit un groupe. On note J l'élément neutre et pour $M \in \mathscr{G}$, ϕ_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.

1. Montrer que ϕ_J est une projection.
2. Montrer que : $\forall\, M \in \mathscr{G}$, $\phi_{M|\operatorname{Ker}\phi_J} = 0$ et $\phi_{M|\operatorname{Im}\phi_J}$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im}\phi_J$.
3. En déduire que $\mathscr{G}$ est isomorphe à un groupe $GL_k(K)$.

Correction ▼ [003382]

Exercice 1295 Inversion de matrices

Inverser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in (x^2+1)$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \dots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003398]

Exercice 1296 Effet des arrondis

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et B^{-1}.

Correction ▼ [003399]

Exercice 1297 ***

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ $(n \geq 2)$ définie par

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ a_{i,j} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Correction ▼ [005267]

Exercice 1298 ***I Théorème de HADAMARD

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \{1,...,n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Correction ▼ [005272]

Exercice 1299 ***I Matrice de VANDERMONDE des racines n-ièmes de l'unité

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$, $(n \geq 2)$. Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leq j,k\leq n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (calculer d'abord $A\overline{A}$).

Correction ▼ [005274]

Exercice 1300 ***I

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$ si $i \leq j$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse. (Indication : considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$).

Correction ▼ [005276]

Exercice 1301 ****

Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.

Correction ▼ [005597]

Exercice 1302 ***

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par $a_{i,j}=1$ si $i=j$, j si $i=j-1$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [005604]

Exercice 1303 ***

Soient a_1,..., a_n n réels tous non nuls et $A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$.

Inverse de A en cas d'existence ?

Correction ▼ [005610]

Exercice 1304 **I

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005612]

Exercice 1305 ***I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega=e^{2i\pi/n}$.
Soit $A=(\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [005613]

Exercice 1306 ***I Théorème de HADAMARD

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. Montrer que $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. (Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.)

Correction ▼ [005617]

45 108.06 Changement de base, matrice de passage

Exercice 1307 Conjugaison

1. Soit $P\in GL_n(K)$. Montrer que l'application $\phi_P:\mathscr{M}_n(K)\to\mathscr{M}_n(K), M\mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'algèbre.
2. Soit $\phi: A=(a_{ij})\longmapsto A'=(a_{n+1-i,n+1-j})$.
   (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$.
   (b) Trouver une matrice $P\in GL_n(K)$ telle que $\phi=\phi_P$.

[003367]

Exercice 1308 Chimie P' 1996

Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & -1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une autre base. Donner la matrice de passage.

Correction ▼ [003368]

Exercice 1309 Changement de base

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I},\vec{J},\vec{K},\vec{L})$ et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathscr{B} = (\vec{I},\vec{J},4\vec{I}+\vec{J}-3\vec{L},-7\vec{I}+\vec{K}+5\vec{L})$ et $\mathscr{B}' = (4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\vec{k})$.
Quelle est la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

Correction ▼ [003400]

Exercice 1310 Matrices semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.
(On cherchera P inversible telle que $PB = AP$)

Correction ▼ [003401]

Exercice 1311 Matrices semblables

Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction ▼ [003402]

Exercice 1312 Matrices non semblables

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Correction ▼ [003403]

Exercice 1313 Matrices non semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A-I)^2$ et $(B-I)^2$).
[003404]

Exercice 1314 Ensi Physique P 1995

Les matrices $\begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Correction ▼ [003405]

Exercice 1315 Comatrice

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Si A et B sont inversibles, démontrer que $\operatorname{com}(AB) = (\operatorname{com} A)(\operatorname{com} B)$.
2. Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.
3. En déduire que si A et B sont semblables, alors $\operatorname{com} A$ et $\operatorname{com} B$ le sont.

[003433]

Exercice 1316 Matrices réelles semblables sur (x^2+1)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur (x^2+1) : Il existe $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} P + iQ \in GL_n((x^2+1)^) \\ (P+iQ)A = B(P+iQ). \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ (P+\lambda Q)A = B(P+\lambda Q)$.
2. En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

[003577]

Exercice 1317 ***T

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i,j,k) à (e_1,e_2,e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.

Correction ▼ [005259]

Exercice 1318 **

Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles semblables ?

Correction ▼ [005626]

Exercice 1319 ***I

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [005627]

46 108.99 Autre

Exercice 1320

Soit A une matrice carrée qui commute avec toutes les matrices carrées. Montrer que c'est une matrice scalaire. [002434]

Exercice 1321

Soit A une matrice carrée.

1. Montrer que $A^2 = I$ si et seulement si $(I-A)(I+A) = 0$. Montrer que dans ce cas A est inversible.
2. Montrer que si A est idempotente ($A^2 = A$), alors $B = I - A$ l'est aussi et que $AB = BA = 0$.
3. Montrer que I est la seule matrice idempotente inversible.

[002437]

Exercice 1322

Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

[002475]

Exercice 1323

Un train qui ralentit avec une décélération constante met 20s pour parcourir le premier km et 30s pour parcourir le deuxième km. On veut calculer la distance qu'il devra parcourir pour parvenir à l'arrêt.

– En prenant pour origine la position initiale du train, écrire l'équation générale d'un mouvement uniformément décéléré.
– En déduire un système de deux équations dont les inconnues sont la décélération et la vitesse initiale du train, et résoudre ce système.
– Conclure.

[002693]

Exercice 1324 Quaternions

Montrer que $\mathscr{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$ est un corps isomorphe à (x^2+1).

Montrer que $\mathscr{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2((x^2+1)^) \right\}$ est un corps non commutatif.

[003363]

Exercice 1325 Centre de $GL_n(K)$

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$.

1. Montrer que $F_{ij} = I + E_{ij}$ est inversible.
2. En déduire que $\operatorname{vect}\big(GL_n(K)\big) = \mathscr{M}_n(K)$.
3. Quel est le centre de $GL_n(K)$?

[003369]

Exercice 1326 Centre de $GL_n(K)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Montrer que f est une homothétie.

[003370]

Exercice 1327 Centre des matrices triangulaires unipotentes

On note $\mathscr{G} = \{A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ tq $a_{ij} = 0$ si $i > j$ et $a_{ii} = 1\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$.
2. En utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$, déterminer le centre de $\mathscr{G}$, et montrer que c'est un groupe commutatif isomorphe à $(K,+)$.

Correction ▼ [003371]

Exercice 1328 Équation $aX + (trX)A = B$

Soit $\alpha \in K$, et $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Étudier l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(K)$: $\alpha X + (\operatorname{tr} X)A = B$.

Correction ▼ [003372]

Exercice 1329 Commutant d'une matrice diagonale

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(K)$ tq $AM = MA\}$ (*commutant de* A).

1. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.
   (a) Chercher $\mathscr{C}_A$.
   (b) Soit $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), M \mapsto MA - AM$
   Montrer que $\operatorname{Im}\phi$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

[003373]

Exercice 1330 Matrices de trace nulle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ *non scalaire* telle que $\operatorname{tr} M = 0$.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne X_1 telle que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.
2. En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(K)$ et $\operatorname{tr} M_1 = 0$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
4. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $M = AB - BA$.

[003374]

Exercice 1331 Forme bilinéaire trace

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ non nulle. Montrer que l'application $f_A : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K, X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_{p,n}(K)$.
2. Réciproquement : Soit $\phi : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K$ une forme linéaire quelconque. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que $\phi = f_A$ (on pourra considérer l'application $A \mapsto f_A$).

3. Soit $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to K$ une forme linéaire vérifiant : $\forall\, X,Y \in \mathscr{M}_n(K),\ \phi(XY) = \phi(YX)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\phi = \lambda \mathrm{tr}$.

[003375]

Exercice 1332 Matrices magiques

Une matrice carrée M est dite *magique* si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $s(M)$ leur valeur commune.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{M} = \{\text{matrices } n \times n \text{ magiques}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{M}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$ et $s : \mathscr{M} \to K$ est un morphisme d'algèbre (calculer MU et UM).
2. Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.
3. Montrer que $\mathscr{M}$ est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques antisymétriques.
4. Pour $M \in \mathscr{M}_n(K)$, on note ϕ_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.
Soit $\mathscr{H} = \{(x_1,\dots,x_n) \in K^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $\mathscr{K} = \{(x,\dots,x) \in K^n\}$.
   (a) Montrer que : $M \in \mathscr{M} \iff \mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont stables par ϕ_M.
   (b) En déduire $\dim(\mathscr{M})$.

[003377]

Exercice 1333 Matrices triangulaires nilpotentes

1. Soit A une matrice triangulaire à diagonale nulle. Montrer que A est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente d'indice n et ϕ l'endomorphisme de K^n associé.
On note $E_i = \mathrm{Ker}\phi^i$, et $\vec{e}_i$ un vecteur quelconque choisi dans $E_i \setminus E_{i-1}$ ($\vec{e}_1 \in E_1 \setminus \{\vec{0}\}$).
   (a) Justifier l'existence de $\vec{e}_i$.
   (b) Montrer que la famille $(\vec{e}_i)$ est une base de K^n.
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

[003378]

Exercice 1334 Matrice vérifiant $A^k = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $A^k = I$ ($k \neq 0$). On pose $B = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$. Soient u, v les endomorphismes de K^n matrices A et B dans la base canonique.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\, v$, $\quad \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker} v$, $\quad \mathrm{Ker} v \oplus \mathrm{Im}\, v = K^n$.
2. En déduire : $\mathrm{tr} B = k \mathrm{rg} B$.

Correction ▼ [003383]

Exercice 1335 $A > 0, X > 0$ et $A^k X = X$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A est positive si tous ses coefficients sont strictement positifs.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ positive. On suppose qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^k X = X$. Montrer qu'il existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif tel que $MY = Y$. [003384]

Exercice 1336 Suite récurrente linéaire matricielle

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Exprimer en fonction de k le terme général de la suite (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ définie par : $\begin{cases} M_0 \text{ est donnée,} \\ M_{k+1} = AM_k + B. \end{cases}$

Correction ▼ [003385]

Exercice 1337 A, A^2, A^3 données $\Rightarrow A^p$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On suppose qu'il existe $\lambda, \mu \in K$ et $U, V \in \mathscr{M}_n(K)$ tels que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \lambda^p U + \mu^p V$ (chercher une relation linéaire entre A, A^2, A^3).

2. On suppose ici $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Soit X un vecteur propre de A. Montrer que X est vecteur propre de U et de V avec les valeurs propres $0,0$ ou $1,0$, ou $0,1$.

Correction ▼ [003386]

Exercice 1338 Idéaux de $\mathscr{M}_n(K)$

Une partie $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}_n(K)$ est appelée *idéal à droite de* $\mathscr{M}_n(K)$ si c'est un sous-groupe additif vérifiant :

$$\forall A \in \mathscr{I},\ \forall B \in \mathscr{M}_n(K),\ AB \in \mathscr{I}.$$

Pour $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on note $\mathscr{H}_A$ le sev de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ engendré par les colonnes de A, et $\mathscr{I}_A$ l'idéal à droite engendré par A : $\mathscr{I}_A = \{AM \text{ tq } M \in \mathscr{M}_n(K)\}$.

1. Soient $A, M \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que : $M \in \mathscr{I}_A \iff \mathscr{H}_M \subset \mathscr{H}_A$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $\mathscr{H}_A + \mathscr{H}_B = \mathscr{H}_C$. Simplifier $\mathscr{I}_A + \mathscr{I}_B$.
3. Soit $\mathscr{I}$ un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(K)$. Montrer que $\mathscr{I}$ est un sev de $\mathscr{M}_n(K)$, puis qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $\mathscr{I} = \mathscr{I}_A$.
4. Que peut-on dire des idéaux *à gauche* de $\mathscr{M}_n(K)$?

[003387]

Exercice 1339 Classes d'équivalence dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ et d le pgcd de $x_1, \dots, x_n$. Montrer qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (par récurrence sur n).
3. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. CNS pour qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = Y$?

[003388]

Exercice 1340 Rayon spectral d'une matrice à coefficients positifs

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall\, i, j,\ a_{ij} > 0$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre :

$$(X \geq Y) \iff (\forall\, i,\ x_i \geq y_i),$$

et on pose pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \geq 0$, $X \neq 0$:

$$\begin{cases} R(X) &= \sup\{r \geq 0 \text{ tq } AX \geq rX\}, \\ R &= \sup\{R(X) \text{ tq } X \geq 0, X \neq 0\}. \end{cases}$$

1. Montrer que R est fini et qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $R(X_0) = R$.
2. Montrer que toutes les coordonnées de X_0 sont strictement positives.
3. On pose $AX_0 = RX_0 + Y$. Montrer que $Y = 0$.
4. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leq R$, et $(|\lambda| = R) \Leftrightarrow (\lambda = R)$.

Correction ▼ [003389]

Exercice 1341 INT ingénieurs 93

Soit $E = \{\text{matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisymétriques}\}$ et $f : E \to E, M \mapsto {}^tAM + MA$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Quelle est la trace de f ?

Correction ▼ [003390]

Exercice 1342 Ensam PSI 1998

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\mathscr{C}(A)$ son commutant.

Montrer que pour $M,N \in \mathscr{C}(A)$ on a : $M = N \Leftrightarrow M$ et N ont la même dernière colonne.
En déduire que $\mathscr{C}(A) = K_{n-1}[A]$. [003391]

Exercice 1343 ENS MP 2002

Que dire des morphismes de groupe $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
Correction ▼ [003392]

Exercice 1344 ***

1. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matirce triangulaire inférieure.

Correction ▼ [005264]

Exercice 1345 ***

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E et sa dimension.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3. Quels sont les inversibles de E ?
4. Résoudre dans E les équations suivantes :
$$a)\ X^2 = I \quad b)\ X^2 = 0 \quad c)\ X^2 = X.$$
5. Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel non nul.

Correction ▼ [005265]

Exercice 1346 ****

Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer l'existence d'au moins un couple (A,B) vérifiant les conditions de l'énoncé puis calculer BA. (Indication. Calculer $(AB)^2$ et utiliser le rang.)
Correction ▼ [005266]

Exercice 1347 ***I

Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (utiliser les matrices élémentaires).
Correction ▼ [005268]

Exercice 1348 ****

Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ contient au moins une matrice inversible.
Correction ▼ [005270]

Exercice 1349 ***

Soit f qui, à $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = X(X+1)P' - 2kXP$. Trouver k tel que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$ puis, pour cette valeur de k, trouver tous les polynômes P non nuls tels que la famille $(P, f(P))$ soit liée. [005271]

Exercice 1350 ***I

Calculs par blocs.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ avec $(A,A') \in (\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K}))^2$, $(B,B') \in (\mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K}))^2$, $(C,C') \in (\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}))^2$ et $(D,D') \in (\mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K}))^2$. Calculer $M+N$ en fonction de A, B, C, D, A', B', C' et D'.
2. Question analogue pour MN en analysant précisément les formats de chaque matrice.

Correction ▼ [005273]

Exercice 1351 ***

Soit $A=\begin{pmatrix}7&4&0&0\\-12&-7&0&0\\20&11&-6&-12\\-12&-6&6&11\end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs colinéaires à leurs images.
2. Ecrire les formules de changement de base correspondantes.
3. En déduire le calcul de A^n pour n entier naturel.

Correction ▼ [005275]

Exercice 1352 ***I

Soient $A\in\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$. Justifier l'existence de A et B puis calculer BA.

Correction ▼ [005585]

Exercice 1353 ***

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{M\in G}\mathrm{Tr}(M)=0$. Montrer que $\sum_{M\in G}M=0$.

Correction ▼ [005594]

Exercice 1354 ***

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ avec $\dim E=n$ et $\mathrm{card}G=p$. Soit $F=\{x\in E/\ \forall g\in G,\ g(x)=x\}$.
Montrer que $\dim F=\frac{1}{p}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}g$.

Correction ▼ [005595]

Exercice 1355 ***I

Soient $A_1,...,A_p$ p matrices distinctes et inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $G=\{A_1,...,A_p\}$ soit stable pour la multiplication. Soit $A=A_1+...+A_p$. Montrer que $\mathrm{Tr}A$ est un entier divisible par p.

Correction ▼ [005596]

Exercice 1356 ***

Soient n un entier naturel non nul puis $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice X associe $AX+XA$. Calculer $\mathrm{Tr}(f)$.

Correction ▼ [005605]

Exercice 1357 **

Soient a un réel non nul et A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $aM+\mathrm{Tr}(M)A=B$.

Correction ▼ [005606]

Exercice 1358 **

Soient $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Soit $E=\{M(x,y)=xI+yJ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3. Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$?
4. Résoudre dans E les équations :
   (a) $X^2=I$
   (b) $X^2=0$
   (c) $X^2=X$.
5. Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel et x et y réels.

Correction ▼ [005608]

Exercice 1359 ***

On appelle idéal bilatère de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ tout sous-ensemble I de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\text{a) } (I,+) \text{ est un groupe et b) } \forall A \in I, \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AM \in I \text{ et } MA \in I.$$

Déterminer tous les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Correction ▼ [005609]

Exercice 1360 *I

Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Correction ▼ [005618]

Exercice 1361 **I

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a\mathrm{Tr}$.

Correction ▼ [005619]

Exercice 1362 ***

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a réel donné). Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n^n$.

Correction ▼ [005620]

Exercice 1363 **

Soient A une matrice carrée de format n et f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe MA. Trouver la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ordonnée par l'ordre lexicographique).

Correction ▼ [005621]

Exercice 1364 ***I

Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB - BA = A$. Calculer la trace de A^{2010}.

Correction ▼ [005625]

Exercice 1365 **I Exponentielle d'une matrice nilpotente

Pour A matrice nilpotente donnée, on pose $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A+B$ est nilpotente et $\exp(A+B) = \exp A \times \exp B$.
2. Montrer que $\exp A$ est inversible.
3. Calculer $\exp A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005628]

47 120.01 Les rationnels

Exercice 1366

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Indication ▼   Correction ▼   Vidéo ■   [000451]

Exercice 1367

Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?
$a=1/3,\quad b=1/15,\quad c=1/25,\quad d=1/125,\quad e,\quad f=0,333\cdots3\cdots,\quad g=\sqrt{2},$
$h=0{,}123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\cdots,\quad i=0{,}123\,456\,789\,101\,112\,1314\cdots,\quad j=\pi,\quad k=13/7,\quad l=27/17.$ [000452]

Exercice 1368 Un procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$

Dans le plan xOy, on porte sur Ox une suite de points $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ et sur Oy une suite de points $b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots$, construites de la manière suivante :

(i) $a_1=2$ et $b_1=1$,

(ii) $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$,

(iii) $a_nb_n=2$ (le rectangle de côtés a_n et b_n a pour aire 2).

1. Représentez cette suite de rectangles de côtés a_n et b_n.
2. Démontrez successivement que : $\forall n,\ b_n<a_n$; $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante ; $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante.
3. Calculez a_n-b_n en fonction de $a_{n-1}-b_{n-1}$ et a_n. Montrez que l'on a l'inégalité :
$$a_n-b_n<\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{4}.$$
4. Calculez les premiers termes de la suite $a_1,a_2,\ldots,a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double *grosso modo* à chaque pas.

[000453]

Exercice 1369

Calculer avec une calculette : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ et $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$. Expliquer le résultat. [000454]

Exercice 1370

On considère les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$. Y a-t-il un nombre rationnel juste avant $\sqrt{2}$, plus grand que tous les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$?
Une suite de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?
Une suite de nombres décimaux a-t-elle pour limite un nombre décimal ? [000455]

Exercice 1371

Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel. [000456]

Exercice 1372

Soit $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

Indication ▼   Correction ▼   Vidéo ■   [000457]

Exercice 1373

Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les dévelopements décimaux périodiques sont donnés par :
$3,14\overset{\frown}{14}\ldots$; $\quad 0,99\overset{\frown}{9}\ldots$; $\quad 3,149\overset{\frown}{9}\ldots$ [000458]

Exercice 1374

1. Soit $N_n=0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$.
2. Soit $M=0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P=0,11111\ldots+0,22222\ldots+0,33333\ldots+0,44444\ldots+0,55555\ldots+0,66666\ldots+0,77777\ldots+0,88888\ldots+0,99999\ldots$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000459]

Exercice 1375

Montrer que l'ensemble $\{r^3 \ ; \ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. [000460]

Exercice 1376

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000461]

Exercice 1377

Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer :

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Indication : considérer les parties fractionnaires de $0, a, 2a, \ldots, qa$ et la partition $[0, \frac{1}{q}[, [\frac{1}{q}, \frac{2}{q}[, \ldots [\frac{q-1}{q}, 1[$ de $[0,1[$. [000462]

Exercice 1378

Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{ \frac{a}{2^k}, (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. [000463]

Exercice 1379

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000506]

Exercice 1380

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000507]

Exercice 1381

Étudier la suite $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

[000508]

Exercice 1382

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

[000509]

Exercice 1383

Soit l un nombre réel. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n > N, \ |u_n - l| < \varepsilon$$

converge vers l ? [000510]

Exercice 1384

Construire une suite $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que l'une au moins des suites (v_n) et (w_n) diverge. [000511]

Exercice 1385 Nombres irrationnels

Soit $a \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, on a : $\left|r - \sqrt{a}\right| \geq \frac{C}{q^2}$.

Correction ▼ [003066]

Exercice 1386 Nombres irrationnels

Soient $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a^2 - b$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Correction ▼ [003067]

Exercice 1387 Parties fractionnaires

Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ avec p, q entiers, $q \geq 1$, $p \wedge q = 1$. Calculer $\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{frac}(kx)$.

Correction ▼ [003144]

Exercice 1388 Dénominateurs dans un sous-anneau

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. On écrit les éléments de A sous forme irréductible ; soit P l'ensemble des dénominateurs. Montrer que $A = \left\{\frac{m}{p} \text{ tels que } m \in \mathbb{Z},\ p \in P\right\}$.

Correction ▼ [003145]

Exercice 1389 Les sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ sont principaux

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est principal (si I est un idéal de A, considérer $I \cap \mathbb{Z}$). [003146]

Exercice 1390 Décomposition en inverses

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence :

- $x_0 = x$,
- Si x_n existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\frac{1}{k_n} \leq x_n$. On pose $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_n}$,
- Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas, $x = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$.

1. Montrer que la suite est toujours finie.
2. Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.
3. Réciproquement, soit une décomposition : $x = \frac{1}{n_0} + \cdots + \frac{1}{n_p}$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.

Correction ▼ [003147]

Exercice 1391 Combinaison de fractions

Soient $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux rationnels avec $a, c \in \mathbb{Z}$, et $b, d \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que tout rationnel s'écrit : $x = \frac{ma+nc}{mb+nd}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, et $mb + nd \neq 0$.
2. Étudier l'unicité d'une telle écriture.
3. Montrer que $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ est compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ si et seulement si m et n ont même signe.

Correction ▼ [003148]

Exercice 1392 Équations algébriques

Déterminer $x \in \mathbb{Q}$ sachant que :

1. $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.
2. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$.
3. $2x^3 - x - 4 = 0$.

Correction ▼ [003149]

Exercice 1393 $x^y = y^x$

On cherche les couples $(x, y) \in \left(\mathbb{Q}^{+*}\right)^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$ ($x^y, y^x \in \mathbb{R}$).
On pose $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p'}{q'}$ (formes irréductibles), $d = pq' \wedge p'q$, $\quad pq' = ad$ et $p'q = bd$.

1. Montrer qu'il existe $m,n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p = m^a$, $p' = m^b$, $q = n^a$ et $q' = n^b$.
2. En déduire : $b-a = m^{b-a} - n^{b-a}$.
3. Montrer que $b-a \leq 1$ et conclure.

Correction ▼ [003150]

Exercice 1394 I

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

1. (**) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n-ième parfaite.
2. (**) $\log 2$.
3. (****) π (LAMBERT a montré en 1761 que π est irrationnel, LEGENDRE a démontré en 1794 que π^2 est irrationnel, LINDEMANN a démontré en 1882 que π est transcendant).
   Pour cela, supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Considérer alors $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que I_n vérifie
   (a) I_n est un entier relatif ;
   (b) $I_n > 0$;
   (c) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (voir devoir).
4. (***) e (HERMITE a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).
   Pour cela, établir que pour tout entier naturel n, $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel non nul n, $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.
5. (***) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle le théorème de GAUSS : soient a, b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).
6. (***) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Correction ▼ [005209]

Exercice 1395 ****

Soit u_n le chiffre des unités de C_n^k, k entier naturel fixé non nul et n entier naturel supèrieur ou égal à k. Montrer que le nombre $0,u_k u_{k+1} u_{k+2}\dots$ est rationnel.

Correction ▼ [005214]

Exercice 1396 ****

Soit $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel x. Montrer que les suites $(|p_n|)$ et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005243]

48 120.02 Maximum, minimum, borne supérieure

Exercice 1397

Le maximum de deux nombres x,y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x,y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000464]

Exercice 1398

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Indication ▼ Correction ▼ [000465]

Exercice 1399

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\,,\quad]0,1[\cap\mathbb{Q}\,,\quad \mathbb{N}\,,\quad \left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000466]

Exercice 1400

Soit

$$I=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x+\frac{1}{2x}\leq 2\right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

[000467]

Exercice 1401

Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$, (si la question se pose) ?

1. $[0,3[$,
2. $\{0\}\cup]1,2]$,
3. $\mathbb{D}\cap[0,1/3]$,
4. $\{x\mid\exists n\in\mathbb{N},\ x=1/n\}$,
5. $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$.

[000468]

Exercice 1402

On considère l'ensemble des nombres de la forme $1+\frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses. [000469]

Exercice 1403

Étant donné un ensemble $A\subset\mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A,
2. m est un minorant de A,
3. P n'est pas un majorant de A,
4. A est majoré,
5. A n'est pas minoré,
6. A est borné,
7. A n'est pas borné.

[000470]

Exercice 1404

Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ? [000471]

Exercice 1405

Soit $E=\{\frac{1}{n}\cos n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$. [000472]

Exercice 1406

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x\leq y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A\leq\inf B$. [000473]

Exercice 1407

Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

[000474]

Exercice 1408

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A\setminus\{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A\setminus\{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

[000475]

Exercice 1409

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Indication ▼ Correction ▼ [000476]

Exercice 1410

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A\subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A\subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A+B)$.

Indication ▼ Correction ▼ [000477]

Exercice 1411

Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble :

$$D = \left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} | n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Cet ensemble admet-il un maximum, un minimum ? [000478]

Exercice 1412

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, n nombres réels. Calculer :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |x-a_i|\,.$$

[000479]

Exercice 1413

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3-3x$. Tracer les graphes des fonctions $f, |f|, f_+, f_-$ où : $f_+ = \max(f,0), f_- = \min(f,0)$. [000480]

Exercice 1414

Si $a = \sup A$, montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Réciproque. [000481]

Exercice 1415

Soit $A = \mathbb{Q}\cap]0,1[$ et $a,b\in\mathbb{R}_+$. On considère les applications suivantes de A dans $\mathbb{R}_+$:

$$f:\ \frac{p}{q}\mapsto\frac{q-p}{q+p}\ ; \qquad g:\ \frac{p}{q}\mapsto\frac{aq+bp}{p+q}$$

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $f(A)$ et de $g(A)$. [000482]

Exercice 1416

Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ pour p et q entiers vérifiant $0 < p < q$.

1. Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ (pour la borne supérieure on pourra prendre $q = p+1$).

[000483]

Exercice 1417

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $A_p = \sup_{n>p} u_n$ et $B_p = \inf_{n>p} u_n$. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante bornée et que $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante bornée. Soit $L = \lim_{p\to\infty} A_p$ et $l = \lim_{p\to\infty} B_p$.

1. Dans le cas particulier où $u_n = \frac{n+2}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$, calculer L et l.
2. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n > l - \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geq p,\ u_n < l + \varepsilon$$
3. Interpréter ces propriétés. Énoncer des propriétés analogues pour L. Démontrez-les.
4. Que peut-on dire de (u_n) si $L = l$?

[000484]

Exercice 1418

Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{xy} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y. [000485]

Exercice 1419

Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A\cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A\cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A\cap B$?

[000486]

Exercice 1420 **IT

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, inf B, $\inf\,(A+B)$ existent et que l'on a $\sup\,(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf\,(A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005210]

Exercice 1421 **

Soit $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Correction ▼ [005211]

Exercice 1422 **IT

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Correction ▼ [005212]

Exercice 1423 ***IT

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A\cap B)$, $\sup(A\cup B)$, $\sup(A+B)$ et $\sup(AB)$? ($A+B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005213]

49 120.99 Autre

Exercice 1424

Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx]$$

est vraie. [000487]

Exercice 1425

Soient $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, les a_i n'étant pas tous nuls. Soit $p(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + xb_i)^2$. Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est ≤ 0. En déduire que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

et que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

[000488]

Exercice 1426

Deux entiers naturels distincts peuvent-ils vérifier la relation $a^b = b^a$? [000489]

Exercice 1427

Résoudre l'équation $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$, x étant un réel positif. [000490]

Exercice 1428

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000491]

Exercice 1429

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n}|x_i|$.
Montrer que dans les deux cas on a :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

[000492]

Exercice 1430

Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale.

1. Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto E(x)$ et $x \mapsto \{x\}$.
2. Montrer les relations suivantes : $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$, $E(x+n) = E(x) + n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer $\lim E(x)$ et $\lim\{x\}$ lorsque $x \to -1_+$ et $x \to -1_-$. Ces fonctions ont-elles une limites lorsque $x \to -1$?

[000493]

Exercice 1431

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ montrer que :

$$2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

[000494]

Exercice 1432

Soit deux nombres réels a et b vérifiant : $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a-b$ et de a/b. [000495]

Exercice 1433

On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$.
2. Calculer $E(x)+E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R} \ E(x) = E(\frac{E(nx)}{n})$.

[000496]

Exercice 1434

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = n \cdot f(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = n \cdot f(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = q \cdot f(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x \cdot f(1)$ si f est croissante.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000497]

Exercice 1435

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$. Montrer que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, x_i = 1.$$

[000498]

Exercice 1436

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in [0,1]^n$, montrer que :

$$\prod_{i=1}^n (1-x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

[000499]

Exercice 1437

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$A \neq \emptyset,$$
$$\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0,]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\subset A,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A.$$

Montrer que $A = \mathbb{R}$. [000500]

Exercice 1438

Montrer :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx).$$

[000501]

Exercice 1439

Soient A et B deux parties denses de $\mathbb{R}$, AB et $A+B$ sont-elles denses ? Étude de la réciproque. [000502]

Exercice 1440

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

[000503]

Exercice 1441 Morphismes de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
2. Montrer que f est une application croissante.
3. En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

[003061]

Exercice 1442 Parties denses

Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a,b \in A \text{ tq } a < x < b \\ \forall\, a,b \in A,\ \frac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$. [003062]

Exercice 1443 Parties denses

Soir A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A \cap]0,1[\neq \varnothing$. [003063]

Exercice 1444 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$. On pose $H^{++} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$, et $\alpha = \inf(H^{++})$.

1. Si $\alpha \in H^{++}$, montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
2. Si $\alpha \notin H^{++}$, montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

[003064]

Exercice 1445 Partie entière

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = a$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = [a]$.

Correction ▼ [003065]

Exercice 1446 **I Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose $m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Correction ▼ [005146]

Exercice 1447 ***

Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction ▼ [005151]

Exercice 1448 **I

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) \leq E(x+y)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Correction ▼ [005152]

Exercice 1449 **I

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^p a_p,$$

où p est un entier naturel et les a_i sont des entiers éléments de $\{0,\ldots,9\}$, a_p étant non nul. Déterminer p en fonction de n.

Correction ▼ [005153]

Exercice 1450 **I

Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n ? entre 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?
4. Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x ?
5. Combien l'équation $x+2y=n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?
7. (***) Combien l'équation $2x+3y=n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?

Correction ▼ [005155]

Exercice 1451 ****

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1}E(x+\frac{k}{n})=E(nx)$ (poser la division euclidienne de $E(nx)$ par n).

Correction ▼ [005156]

Exercice 1452 **

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $E(\frac{E(nx)}{n})=E(x)$.

Correction ▼ [005159]

Exercice 1453 ***

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n)\in[-1,1]^n$ tels que $x_1+x_2+...+x_n=0$.

Montrer que $|x_1+2x_2+...+nx_n|\leq E(\frac{n^2}{4})$.

Correction ▼ [005160]

Exercice 1454 ** Identité de CATALAN

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Correction ▼ [005215]

Exercice 1455 **I Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f\ :\ x\mapsto\sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2$, montrer que $|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
2. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$.
(l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

Correction ▼ [005216]

Exercice 1456 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$.

Correction ▼ [005217]

Exercice 1457 **** Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$

1. Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a=\text{Inf}\ (G\cap]0;+\infty[)$ puis envisager les deux cas $a=0$ et $a>0$.
(Definition : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $(\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ |y-x|<\varepsilon)$.
2. Application 1. Montrer que $\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).
   (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).

(b) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005218]

Exercice 1458 **

Montrer que $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005219]

Exercice 1459

Soit x un réel.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.
   Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$, qui utilise $\sum_{k=1}^{n} k$.
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005982]

50 121.01 Convergence

Exercice 1460

1. Dessiner les suites suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ (prendre 2 cm comme unité sur Oy)
   (b) $u_n = (-1)^n$
   (c) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n$ $\quad v_n = \dfrac{1}{n}|\cos n|$ (n en radians)
   (d) $u_n = \cos n$
   (e) $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = -1$; $u_n = 2$ pour $n \geq 5$.
   (f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (prendre 10 cm comme unité sur Oy)
   (g) $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$
   (h) $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (prendre 1 cm comme unité sur Oy)
   (i) $u_n = n^2+1$
   (j) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ (pour $n \geq 2$)
2. Classer les dessins par paquets en précisant vos critères.
3. Pour chaque suite, pouvez-vous trouver l et n tels que $|u_n - l| < \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$? Mettre en relation avec le classement précédent.
4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?
   (a) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
   (b) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

[000504]

Exercice 1461

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [000505]

Exercice 1462

Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que $(u_{n+1}-u_n)$ tend vers 0 et qui diverge. [000512]

Exercice 1463

Encadrer la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$. Que peut-on en déduire ? [000513]

Exercice 1464

1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?
2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

[000514]

Exercice 1465

Étant donné $k \in \mathbb{R}_+$, que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$? *Application* : Étudier $u_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 4\cdots (3n-2)}$. [000515]

Exercice 1466

Montrer qu'une partie D est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite de points de D. [000516]

Exercice 1467

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et x un réel.

1. Montrer que $x = \sup(A)$ ssi (x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x).
2. Énoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

[000517]

Exercice 1468

Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n}+(-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\Big)$$

Correction ▼ [000518]

Exercice 1469

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000519]

Exercice 1470

Soit $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n>0$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n)+1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000520]

Exercice 1471

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente. [000521]

Exercice 1472

Montrer que (u_n) converge ssi $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales). [000522]

Exercice 1473

Etudier la convergence de la suite $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$. [000523]

Exercice 1474

Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000524]

Exercice 1475

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle prenant toute les valeurs rationnelles. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. [000525]

Exercice 1476

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [000526]

Exercice 1477

1. Donner un exemple de suite bornée divergente, puis de suite divergente telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0.$$
2. Donner un exemple de suite divergente qui a une seule valeur d'adhérence (i.e. telle qu'il existe une seule extraction ϕ telle que $x_{\phi(n)}$ converge).
3. Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \geq 2, (x_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

[000527]

Exercice 1478

Que peut-on dire des nombres réels a et b si
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leq b \leq a + \frac{1}{n}\ ?$$
[000528]

Exercice 1479

Étudier la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est premier} \\ 67 + 1/n & \text{sinon .} \end{cases}$$
Si cette suite converge, montrer que sa limite est inférieure à 72. Étudier la convergence de cette suite. [000529]

Exercice 1480

On donne la suite (u_n) définie par :
$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$
En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente. [000530]

Exercice 1481

1. Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que pour n assez grand on ait $v_n \leq u_n \leq w_n$. On suppose que (v_n) et (w_n) sont convergentes, et on note $v = \lim v_n$ et $w = \lim w_n$. Montrer que pour tout ε positif, on a $v - \varepsilon \leq u_n \leq w + \varepsilon$ pour n assez grand (*théorème d'encadrement*). Que peut-on en déduire si $v = w$?
2. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Montrer que la suite
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$
est convergente et a pour limite l. Pour cela, encadrer u_n à ε près pour n assez grand, et en déduire un encadrement de v_n.

[000531]

Exercice 1482

Soit α un nombre irrationnel positif et (p_n) et (q_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telles que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n = +\infty.$$

[000532]

Exercice 1483

Étudier la suite $u_n = \ln(1+\ln(2+\ln(3+\cdots+\ln(n-1+\ln n)\cdots)))$. [000533]

Exercice 1484

Montrer que pour $n \geq 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ admet une unique racine positive ; on la note u_n. Étudier la suite (u_n). [000534]

Exercice 1485

Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son n-ième pas est :

1. $1/n$ mètre ?
2. $1/n^2$ mètre ?

[000535]

Exercice 1486

Soient $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 2}$.

[001193]

Exercice 1487

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que les valeurs d'adhèrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un intervalle de $\mathbb{R}$. [001194]

Exercice 1488

On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

[001195]

Exercice 1489

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $0 < u_1 < v_1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite. [001196]

Exercice 1490

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.

[001197]

Exercice 1491

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ converge.

[001198]

Exercice 1492

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, alors $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ. La réciproque est elle vraie ?
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2nk+k}$.
3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n) = \ell$. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement positive telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = \ell$.

[001199]

Exercice 1493

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$. On rappelle que $e = \lim_{n\to\infty} u_n$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

[001200]

Exercice 1494

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m,n \geq N$ alors $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2^p} \geq \frac{p+2}{2}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère $\mathscr{C}'$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$ alors $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. Une suite satisfaisant au critère $\mathscr{C}'$ est-elle de Cauchy ?
4. Montrer que les trois assertions qui suivent sont équivalentes :
   (a) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
   (b) Toute suite de Cauchy est convergente.
   (c) Deux suites adjacentes sont convergentes.

[001201]

Exercice 1495 Limite de la partie entière d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $([u_n])$ est-elle convergente ?

[004668]

Exercice 1496 Limites doubles différentes

Comparer $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$ et $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$. [004669]

Exercice 1497 Suites convergeant vers 0

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\frac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Même question avec $\begin{cases} \frac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (u_n) \text{ est bornée.} \end{cases}$

[004670]

Exercice 1498 $u_n v_n \to 1$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant : $\begin{cases} 0 \le u_n \le 1 \\ 0 \le v_n \le 1 \\ u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{cases}$ Que pouvez-vous dire de ces suites ?

[004671]

Exercice 1499 Série alternée

On pose $u_n = \frac{96\times(-1)^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Étudier les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) et montrer que la suite (v_n) est convergente.
2. Calculer $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$ à 10^{-5} près.

Correction ▼ [004672]

Exercice 1500 Croissance comparée

Montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.

[004673]

Exercice 1501 Limite de $n^{1/n}$

Démontrer, sans utiliser la fonction ln, que $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Chercher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. [004674]

Exercice 1502 Croissance logarithmique comparée

Soient (a_n), (b_n) deux suites strictement positives telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

[004675]

Exercice 1503 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\dots+[nx]}{n^2}$.
Correction ▼ [004676]

Exercice 1504 Divergence de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, \pi)$, les suites $(\cos(n\theta))$ et $(\sin(n\theta))$ sont toutes les deux divergentes (montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction).

[004677]

Exercice 1505 Somme des $1/k^{1/2}$

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Chercher $\lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_n)$, puis $\lim_{n\to\infty} u_n$.
2. Comparer $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, et $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. En déduire que la suite $\left(u_n - 2\sqrt{n}\right)$ est convergente.

[004678]

Exercice 1506 Limite de $(1+1/n)^n$

1. On pose $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) Calculer le nombre $e = \lim_{n\to\infty} u_n$ à 10^{-7} près.
2. On note $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$.

(a) Développer v_n et montrer que $v_n \leq e$.

(b) On fixe $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour n suffisament grand, $v_n \geq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} - \varepsilon$.

(c) Que pouvez-vous en déduire ?

[004679]

Exercice 1507 Étude de $C_{2n}^n/4^n$

On pose $u_n = \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times (2n)}$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que la suite (v_n) converge. Que pouvez-vous en déduire pour $\lim_{n\to\infty} u_n$?
4. On note $\alpha = \lim_{n\to\infty} v_n$. En étudiant la suite (nu_n^2), montrer que $\alpha > 0$.

Correction ▼ [004680]

Exercice 1508 Suite $a^n/\prod(1+a^k)$

Soit $a \in (x^2+1)\backslash\mathbb{U}$. Étudier la suite de terme général : $u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$.

Correction ▼ [004681]

Exercice 1509 Lemme de Césaro

Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$)
3. Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

[004682]

Exercice 1510 Lemme de Césaro

1. Soit (b_n) une suite réelle strictement croissante tendant vers $+\infty$, et (a_n) une suite réelle telle que : $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
2. Application : Quelle est la limite de $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}$) ?

[004683]

Exercice 1511 Césaro généralisé

Soit (u_n) une suite réelle convergente, et $S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Étudier la suite (S_n).

Correction ▼ [004684]

Exercice 1512 Produit de Cauchy

Soient (a_n), (b_n) deux suites convergeant vers a, b. Montrer que $\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.

[004685]

Exercice 1513 $x_n - ax_{n-1} \to 0$

Soit (x_n) une suite réelle et $\alpha \in]0,1[$. On pose

$$\begin{cases} y_0 = & x_0 \\ y_n = & x_n - \alpha x_{n-1} \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que : $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0) \Leftrightarrow (y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$.

[004686]

Exercice 1514 $x_n + x_{2n}/2 \to 1$

Soit (x_n) une suite bornée telle que $x_n + \frac{x_{2n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$. [004687]

Exercice 1515 Approximation d'un irrationnel

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites (p_n), (q_n) est bornée, alors l'autre l'est aussi, et $x \in \mathbb{Q}$.
2. En déduire que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

[004688]

Exercice 1516 Somme des chiffres de n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Encadrer $S(n+1)$ en fonction de $S(n)$. En déduire que la suite $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ est bornée.
2. Chercher $\inf\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et $\sup\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. La suite $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ est-elle convergente ?

Correction ▼ [004689]

Exercice 1517 Équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$

On considère l'équation : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Prouver qu'il existe une unique racine positive, a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ (calculer $a_n^{n+1} - 1$).

[004690]

Exercice 1518 Suite n'ayant qu'une valeur d'adhérence

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle *valeur d'adhérence* toute limite d'une sous-suite convergente extraite de (u_n).

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\pi/3))$?
3. Montrer que si la suite (u_n) est bornée et diverge, elle a au moins deux valeurs d'adhérence.

[004691]

Exercice 1519 Limites sup et inf

Soit (x_n) une suite bornée de réels. On pose : $\begin{cases} y_n = \sup\{x_p \text{ tq } p \geq n\} \\ z_n = \inf\{x_p \text{ tq } p \geq n\}. \end{cases}$

1. Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent.
2. Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) et (z_n) ont même limite.

[004692]

Exercice 1520 Convergence vers 0 et monotonie

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.

1. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = \max(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Correction ▼ [004693]

Exercice 1521 Convergence vers 0 et monotonie

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers 0 en décroissant.

[004694]

Exercice 1522 Fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective. Montrer que $f(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$. [004695]

Exercice 1523 Fonction $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective. Montrer que $\frac{f(1)}{1^2}+\frac{f(2)}{2^2}+\dots+\frac{f(n)}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$.

Correction ▼ [004696]

Exercice 1524 Radicaux itérés

Soit $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n-1+\dots+\sqrt{1}}}$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty}(u_n-\sqrt{n})$.

Correction ▼ [004697]

Exercice 1525 Ensae MP* 2000

Soit (a_n) une suite de réels supérieurs ou égaux à 1 telle que pour tous n,m, $a_{n+m}\le a_n a_m$. On pose $b_n=\frac{\ln a_n}{n}$. Montrer que (b_n) converge vers $\inf\{b_n\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$.

Correction ▼ [004698]

Exercice 1526 Polytechnique MP* 2000

Soit h croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, et telle que $h(x+1)-h(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Soit V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $e^{ih(n)}$ Montrer que V est exactement le cercle trigonométrique (i.e. $\{z\in(x^2+1)\text{'}\ |z|=1\}$).

Correction ▼ [004699]

Exercice 1527 $u_n^2+u_n-u_{n+1}\to 0$ (X MP* 2000)

Soit u_n une suite réelle bornée. On suppose que $u_n^2+u_n-u_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Montrer que $u_n\to 0$.

Correction ▼ [004700]

Exercice 1528 Point fixe (Ensae MP* 2003)

Soit une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathbb{R}$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $x_{n+1}=f(x_n)$. Montrer que si la suite (x_n) admet une unique valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Correction ▼ [004701]

Exercice 1529 Suite récurente

Soit $u_0\in\mathbb{N}^*$ et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1}=u_n^2+1$. Montrer qu'il exitste $a\in\mathbb{R}$ tel que $u_n=[a^{2^n}]$ pour tout n où [ ] désigne la partie entière.

Correction ▼ [004702]

Exercice 1530 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de CÉSARO et est monotone, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction ▼ [005221]

Exercice 1531 **IT

Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (série harmonique).

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1)<H_n<1+\ln(n)$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}H_n$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n=H_n-\ln(n)$ et $v_n=H_n-\ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Correction ▼ [005222]

Exercice 1532 ***

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à $\frac{b\sin(\text{Arccos}(\frac{a}{b}))}{\text{Arccos}(\frac{a}{b})}$.

Correction ▼ [005225]

Exercice 1533 **

Limite quand n tend vers $+\infty$ de

1. $\frac{\sin n}{n}$,
2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
3. $\frac{n!}{n^n}$,
4. $\frac{E\left((n+\frac{1}{2})^2\right)}{E\left((n-\frac{1}{2})^2\right)}$,
5. $\sqrt[n]{n^2}$,
6. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,
7. $\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$,
8. $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^{2^k}}$.

Correction ▼ [005226]

Exercice 1534 **

Etudier la suite (u_n) définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Correction ▼ [005227]

Exercice 1535 ***

Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n = |u_n|$. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif l. Montrer que si $0 \leq \ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$. Montrer que si $\ell = 1$, tout est possible.

Correction ▼ [005232]

Exercice 1536 ***

1. Soit u une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers un réel ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.
2. Etudier la réciproque.
3. Application : limites de
   (a) $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$,
   (b) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,
   (c) $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$.

Correction ▼ [005233]

Exercice 1537 *

Soient u et v deux suites de réels de $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Correction ▼ [005234]

Exercice 1538 **

Montrer que si les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent alors (u_n) converge.

Correction ▼ [005235]

Exercice 1539 ***T

Etudier les deux suites $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Correction ▼ [005236]

Exercice 1540 **T

Etudier les deux suites $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

Correction ▼ [005237]

Exercice 1541

Etudier les deux suites $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

Correction ▼ [005238]

Exercice 1542 ***

Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

Correction ▼ [005241]

Exercice 1543 ***

1. Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.
2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ et en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Correction ▼ [005242]

Exercice 1544 **

Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la suite (u_{kn}) converge.

Correction ▼ [005244]

Exercice 1545 ***I

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Correction ▼ [005245]

Exercice 1546 ****I

Etude des suites $(u_n) = (\cos na)$ et $(v_n) = (\sin na)$ où a est un réel donné.

1. Montrer que si $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel, les suites u et v sont périodiques et montrer dans ce cas que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose dans cette question que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel .
   (a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge .
   (b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre u_n et v_n, montrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) divergent.
3. On suppose toujours que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel. On veut montrer que l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) (ou (v_n)) est dense dans $[-1,1]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}/\ |u_n - x| < \varepsilon$ (et de même pour v).
   (a) Montrer que le problème se ramène à démontrer que $\{na+2k\pi,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $E = \{na+2k\pi,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (par l'absurde en supposant que $\inf(E \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$ pour en déduire que $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$).
   (c) Conclure.

Correction ▼ [005247]

Exercice 1547 **I

Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Correction ▼ [005250]

Exercice 1548 ***

Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0,1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005251]

Exercice 1549 ****I

1. Soient p un entier naturel et a un réel. Donner le développement de $(\cos a + i\sin a)^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$. En déduire alors $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (pour majorer u_n, on remarquera que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$).
3. Montrer que pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\operatorname{cotan} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.
4. En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).

Correction ▼ [005316]

Exercice 1550 **

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$1)\ u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x\, dx\ 2)\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx\ 3)\ \int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}\, dx.$$

Correction ▼ [005459]

51 121.02 Suite définie par une relation de récurrence

Exercice 1551

Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

[000536]

Exercice 1552

Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4)\ \forall n \geq 0.$$

[000537]

Exercice 1553

Étudier les suites :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

[000538]

Exercice 1554

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Indication ▼ Correction ▼ [000539]

Exercice 1555

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$ pour $n \geq 0$.

1. Étudier cette suite si $a = 0$.
2. Étudier cette suite si $a = -10$.
3. Étudier cette suite si $a = 3$.

4. Généraliser en discutant selon la valeur de a.

[000540]

Exercice 1556

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$ dans les cas suivants :

1. $u_0 = -4$.
2. $u_0 = -2$.
3. $u_0 = 2$.
4. $u_0 = 3$.

[000541]

Exercice 1557

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(u_n-3)^2}{4}$. [000542]

Exercice 1558

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = e^{-u_n}$ et $u_0 = 0$. [000543]

Exercice 1559

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ et $u_0 = -8$. [000544]

Exercice 1560

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^3+7}{3(u_n^2+1)}$ et $u_0 = 2$. En déduire une valeur approchée à 10^{-8} près de la racine réelle du polynôme X^3+3X-7. [000545]

Exercice 1561

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{-u_n^2-u_n+24}{6}$ pour $n \geq 0$. [000546]

Exercice 1562

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{3}{13}u_n^2 - \frac{1}{9}u_n + 3$ pour $n \geq 0$. [000547]

Exercice 1563

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n^2 - \frac{1}{6}u_n + \frac{33}{10}$ pour $n \geq 0$. [000548]

Exercice 1564

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(e-1+u_n)$. [000549]

Exercice 1565

Discuter suivant les valeurs de u_0 la nature de la suite $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$. [000550]

Exercice 1566

Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.
2. Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.

[000551]

Exercice 1567

Étudier suivant les valeurs données à u_0 appartenant à $\mathbb{C}$ les suites :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n-2}{u_n+4} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n+2}{u_n+1} \\ u_{n+1} &= \frac{-1}{u_n+1} \end{aligned}$$

[000552]

Exercice 1568

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f, alors f est continue en l.

[000553]

Exercice 1569

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = (1-u_n)^2$ (discuter suivant les valeurs de u_0). [000554]

Exercice 1570

Soit $f(x) = -x^3+x^2-x+1$ et $a \in [0,1]$. Étudier la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. [000555]

Exercice 1571

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n+\mathrm{E}(u_n))$ où E désigne la fonction « partie entière ». [000556]

Exercice 1572

1. Étudier la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \cos u_n$, où a est un nombre réel donné.
2. Étudier la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \underbrace{\cos(\cos(\cos(\cdots(\cos}_{n \text{ fois } \cos} n)\cdots)))$.

[000557]

Exercice 1573

1. Étudier dans $\mathbb{C}$ une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n^2$. Discuter suivant u_0.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ une suite (v_n) telle que $\forall n,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n+\frac{A}{v_n}\right)$ où A est un nombre complexe non nul donné. Étudier l'existence et la convergence de cette suite suivant les valeurs de v_0. On pourra noter a une des racines carrées de A et poser $w_n = \frac{v_n-a}{v_n+a}$.

[000558]

Exercice 1574

1. On donne $A \geq 0$, $B \geq 0$, $u_0 \geq 0$; étudier la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{A}{n+1}+Bu_n$.
2. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{\frac{4n}{n+1}-u_n}{2+u_n}$ (on pourra utiliser la question précédente pour terminer).

[000559]

Exercice 1575

On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1}.$$

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n.
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie
$$l = \sqrt{2l+1}.$$
3. l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0,1[$ tel que
$$|x_n - l| \leq k|x_{n-1} - l|.$$
Si oui en déduire que $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$. Conclure.

[000560]

Exercice 1576

En utilisant les méthodes de l'exercice précédent, étudier les suites définies par :
$$y_0 = 3\,; \quad y_{n+1} = \frac{4+3y_n}{3+2y_n},$$
$$z_0 = 1\,; \quad z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n}.$$

[000561]

Exercice 1577

Soit une suite qui vérifie une relation de récurrence
$$u_n \quad = \quad \frac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d} \tag{1}$$

1. Montrer que si la transformation homographique : $x \mapsto y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a deux points fixes distincts, α et β, on peut écrire la relation (1) sous la forme : $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k\frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta}$. Calculer $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ en fonction de $\frac{u_1-\alpha}{u_1-\beta}$.
2. Montrer que si la transformation homographique a un seul point fixe γ, on peut mettre la relation (1) sous la forme : $\frac{1}{u_n-\gamma} = \frac{1}{u_{n-1}-\gamma} + k$. Calculer $\frac{1}{u_n-\gamma}$ en fonction de u_1.
3. Utiliser la méthode précédente pour étudier les suites (u_n) définies par :
$$12\ 2\ \text{em} \quad \begin{array}{ll} \text{a) } u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+3}, & \text{b) } u_{n+1} = \dfrac{-3u_n-1}{u_n-3}, \\ \text{c) } u_{n+1} = \dfrac{5u_n-3}{u_n+1}, & \text{d) } u_{n+1} = \dfrac{2u_n-1}{u_n+4}. \end{array}$$
Discuter suivant les valeurs de u_1 ; préciser pour quelles valeurs de u_1 chaque suite est définie.

[000562]

Exercice 1578 Étude de suites

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1. $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.
2. $0 < u_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
3. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
4. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.
5. $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.
6. $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}}$.
7. $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.
8. $u_{n+1} = \sqrt{4-3u_n}$.
9. $u_{n+1} = \frac{u_n-\ln(1+u_n)}{u_n^2}$.
10. $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$.
11. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^\alpha$.
12. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Correction ▼ [004703]

Exercice 1579 Convergence quadratique

Soit $k \in (x^2+1)$ fixé. Étudier la convergence de la suite (a_n) définie par : $a_0 \in (x^2+1)$, $a_{n+1} = ka_n^2$.

Correction ▼ [004704]

Exercice 1580 $u_{n+1}(1-u_n) > 1/4$

Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier n : $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

[004705]

Exercice 1581 Radicaux itérés

Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$ (n radicaux).

Correction ▼ [004706]

Exercice 1582 Radicaux itérés

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0+\cdots+u_n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Correction ▼ [004707]

Exercice 1583 Radicaux itérés

On pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}}$.

1. Montrer que ces suites sont convergentes.
2. On note $\lambda = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que $\lambda - u_n \leq \frac{n}{2^n\sqrt{n!}}$.

Indication ▼ [004708]

Exercice 1584 Suites homographiques

Soient $a,b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n}. \end{cases}$

On suppose u_0 choisi de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

1. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
2. On suppose que l'équation $x^2 = ax+b$ possède deux racines réelles α, β avec $|\alpha| > |\beta|$.
   Étudier la suite $(v_n) = \left(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)$ et en déduire $\lim u_n$.

[004709]

Exercice 1585 Système d'ordre 1

Soient $0 < x_0 < y_0$ et (x_n), (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n+y_n} \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n+y_n}. \end{cases}$

Montrer qu'elles sont convergentes et calculer leurs limites.

Correction ▼ [004710]

Exercice 1586 Système d'ordre 1

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par : $0 < x_0 < y_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2x_n+y_n}{3} \\ y_{n+1} = \frac{2y_n+x_n}{3}. \end{cases}$

Correction ▼ [004711]

Exercice 1587 Système d'ordre 1

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par : $0 < y_0 < x_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}. \end{cases}$

Correction ▼ [004712]

Exercice 1588 Système d'ordre 1

Soient $0<a<b$ et $(x_n), (y_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}. \end{cases}$

1. Montrer que ces suites convergent vers la même limite.
2. On pose $a = b\cos\varphi$. Exprimer cette limite en fonction de b et φ.

Correction ▼ [004713]

Exercice 1589 Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique

1. Soient $x,y,z \geq 0$. Montrer que $x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$ (mettre $x+y+z$ en facteur).
2. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) définies par :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{3}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \\ 3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n. \end{cases}$$

Correction ▼ [004714]

Exercice 1590 Centrale MP 2000

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ et la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ Étudier la suite (u_n), puis la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [004715]

Exercice 1591 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue et la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $\lim(u_{n+1}-u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

Correction ▼ [004716]

Exercice 1592 **T Récurrences homographiques

Déterminer u_n en fonction de n quand la suite u vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4(u_n-1)}{u_n}$ (ne pas se poser de questions d'existence).

Correction ▼ [005228]

Exercice 1593 **

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Correction ▼ [005229]

Exercice 1594 **

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{v_n+w_n}{2}, \, v_{n+1} = \frac{u_n+w_n}{2} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$

Etudier les suites u, v et w puis déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u, v et w. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\lim_{n\to+\infty} v_n$et $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Correction ▼ [005230]

Exercice 1595 ***

Montrer que les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 réels tels que $0 < u_0 < v_0 < w_0$ et les relations de récurrence :

$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3},$$

ont une limite commune que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Correction ▼ [005231]

Exercice 1596 ****

On pose $u_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005240]

Exercice 1597 **I

On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
2. En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v, calculer directement u_n et v_n en fonction de n.

Correction ▼ [005277]

Exercice 1598 ***I

Etudier la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, 2) $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$
3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$, 4) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$,
5) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(2u_n)$, 6) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

Correction ▼ [005425]

Exercice 1599 ***I

Soit $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
   (b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n.

Correction ▼ [005435]

Exercice 1600 **I

Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Equivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005436]

---

52 121.03 Suites équivalentes, suites négligeables

Exercice 1601

Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000563]

Exercice 1602

Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :

$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\quad u_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$. [000564]

Exercice 1603

Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par :
$u_n = \dfrac{n+1}{n}$ $\qquad u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ $\qquad u_n = \frac{n}{n^2+1}$
admettent toutes des limites que l'on calculera. [000565]

Exercice 1604

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. [000566]

Exercice 1605

Etudier la limite des suites suivantes : $a_n = \cos(\dfrac{2^n}{n!})$; $b_n = \sqrt[n]{3-\sin n^2}$; $c_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$; $d_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$; $e_n = (\cos n)\sin\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
[000567]

Exercice 1606

Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $1\,;\ -\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \ldots\,;\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\,;\ \ldots$
2. $2/1\,;4/3\,;6/5\,;\ldots;2n/(2n-1)\,;\ldots$
3. $0{,}23\,;\ 0{,}233\,;\ \ldots\,;\ 0{,}233\cdots3\,;\ \ldots$
4. $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$ puis $\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2\sqrt{2}}\,;\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,;\ \ldots$
10. $\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Correction ▼ [000568]

Exercice 1607

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2-a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en fonction de $u_n-\sqrt{a}$.
5. Si $u_1-\sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000569]

Exercice 1608

On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \; ; n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \; ; n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000570]

Exercice 1609

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a,b] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. *Application.* Soit

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [000571]

Exercice 1610

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Indication ▼ Correction ▼ [000572]

Exercice 1611

Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

[000573]

Exercice 1612

Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution, notée a_n, dans $[0,1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000574]

Exercice 1613

Calculer suivant les valeurs de x :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2m}\right].$$

[000575]

Exercice 1614

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \dfrac{2a_n+b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant a_n+b_n, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0+b_0}{2}$.

[000576]

Exercice 1615

Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. On pose $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que (x_n) converge vers 0 (on pourra fixer ε puis séparer la somme en deux et enfin choisir N...). [000577]

Exercice 1616

Déterminer les limites de $\dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$ et $\sqrt[n]{n^2}$. [000578]

Exercice 1617

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. [000579]

Exercice 1618

Étudier la suite définie par récurrence :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

[000580]

Exercice 1619

Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2}).$$

[000581]

Exercice 1620

Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}.$$

[000582]

Exercice 1621

Soit $\phi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(n)}{n} = \ell$. Calculer ℓ. [000583]

Exercice 1622

Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective ; montrer que $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = +\infty$. [000584]

Exercice 1623

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$, et on suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, puis que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. [000585]

Exercice 1624

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ et ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$. [000586]

Exercice 1625

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

[000587]

Exercice 1626

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

Montrer que

$$E = \{u_n - v_m | (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. [000588]

Exercice 1627

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

[000589]

Exercice 1628

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et L. Étudier la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

[000590]

Exercice 1629

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1.$$

Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [000591]

Exercice 1630

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Étudier la suite définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ et on utilisera :

$$\sin\phi = 2^n \sin\frac{\phi}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\phi}{2^i}.$$

[000592]

Exercice 1631 ***I

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1) $\text{Arccos}\,\frac{n-1}{n}$ 2) $\text{Arccos}\,\frac{1}{n}$ 3) $\text{ch}(\sqrt{n})$ 4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 5) $\frac{\text{Argch}\,n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$

6) $(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$ 7) $\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln\sin\frac{1}{n})$ 8) $(\frac{\pi}{2})^{3/5}-(\text{Arctan}\,n)^{3/5}$ 9) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

Correction ▼ [005252]

Exercice 1632 ***I

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Correction ▼ [005253]

Exercice 1633 ***I

1. Soient u et v deux suites réelles strictement positives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, alors $U_n \sim V_n$.
2. Application. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$.

Correction ▼ [005254]

Exercice 1634 ****

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle. Montrer que si $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$. A-t-on : si $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$?

Correction ▼ [005255]

Exercice 1635 ***I

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante de limite nulle.
2. On admet que si u est une suite de limite nulle, alors, quand n tend vers $+\infty$, $\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$.
Déterminer un réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de CÉSARO à la suite (v_n), en déduire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005256]

53 121.04 Suite récurrente linéaire

Exercice 1636

Que penser-vous de l'énoncé suivant : si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$. Donner un énoncé correct. [000593]

Exercice 1637

1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ et si $(u_n) \to 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $(1+\dfrac{a}{n})^n$.

[000594]

Exercice 1638

Comparer les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n\ln n}$$

[000595]

Exercice 1639

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$. [000596]

Exercice 1640

Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$. [000597]

Exercice 1641

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0,1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$. [000598]

Exercice 1642

Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$) :

1. dans le cas où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$ et
$$u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n}),$$
2. dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

[000599]

Exercice 1643

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. En utilisant $v_n = \frac{u_n^2}{4}$, donner un équivalent de u_n. *Indication* : on montrera que $\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1} - v_n = 1$, on en déduira un équivalent de v_n puis de u_n. [000600]

Exercice 1644

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. L'étudier et, en utilisant $v_n = \frac{1}{u_n}$, en donner un équivalent dans le cas $u_0 \in]-1;0]$. Que dire dans le cas $u_0 \in]0;\infty[$? (On étudiera $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.) [000601]

Exercice 1645

Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que $fg = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$. En étudiant $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$, en donner un équivalent. [000602]

Exercice 1646

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, u_{n+1} = \sin u_n.$$

Donner $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$,(réponse : $\frac{1}{3}$) en déduire un équivalent de u_n^{-2} donc de u_n. [000603]

Exercice 1647

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [n, n+1[$ solution de $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$. Donner un équivalent de x_n puis faire un développement asymptotique de $x_n - n$ à l'ordre 5 en fonction de $\frac{1}{n}$. [000604]

Exercice 1648

Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{n^2}.$$

On montrera préalablement que :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

quand $n \to \infty$. [000605]

Exercice 1649

Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$.

Correction ▼ [001202]

Exercice 1650

Déterminer (u_n) telle que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = i$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

[001203]

Exercice 1651

Déterminer les suites bornées qui vérifient $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Correction ▼ [001204]

Exercice 1652

Déterminer les suites convergentes qui vérifient $2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$. [001205]

Exercice 1653

Montrer que la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ est bien définie et la déterminer. [001206]

Exercice 1654

Déterminer les suites (u_n) et (v_n) qui vérifient $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$ [001207]

Exercice 1655 Ensi Chimie P' 93

1. Résoudre $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \\ u_0 = a,\ u_1 = b. \end{cases}$
2. Si $a = 0$, trouver $\lim u_n$.
3. Résoudre : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$.

Correction ▼ [003068]

Exercice 1656 Équations de récurrence linéaire

1. Résoudre :
$$\begin{cases} u_{n+2} - u_n = n - 1 \\ u_0 = u_1 = 0. \end{cases}$$
2. Résoudre : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$.

Correction ▼ [003069]

Exercice 1657 Système récurrent

On donne u_0, v_0. Résoudre le système : $\begin{cases} 5u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ 5v_n = 2v_{n-1} + 3u_{n-1}. \end{cases}$

Correction ▼ [003070]

Exercice 1658 Caractérisation des suites polynomiales

Soit (u_n) une suite de réels. On définit les suites dérivées de (u_n) :

$$\begin{cases} (u'_n) = (u_{n+1} - u_n) \\ (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n) \\ \dots \\ \left(u_n^{(k+1)}\right) = \left(u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}\right). \end{cases}$$

1. Exprimer $u_n^{(k)}$ en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est polynomiale si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(u_n^{(k)}\right) = (0)$.

Correction ▼ [003071]

Exercice 1659 Nombre de nombres ne comportant pas 13

Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

1. Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.
2. Calculer T_n en fonction de n.

Correction ▼ [003072]

Exercice 1660 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

On note $x_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1}$, $y_n = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, et $z_n = [x_n]$.

1. Montrer que $z_n = x_n - y_n$.
2. En déduire que 2^{n+1} divise z_n.

[003073]

Exercice 1661 **T

Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
5. $\forall n \geq 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$.
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5$.

Correction ▼ [005239]

54 121.05 Suite de Cauchy

Exercice 1662

Montrer que la suite $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que la suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas. [001208]

Exercice 1663

Montrer que la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \dots + \frac{\cos n}{n!}$$

est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence. [001209]

Exercice 1664

Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.
Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) telle que :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \geq p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}.$$

[001210]

Exercice 1665

Une suite (x_n) est définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = a\sin x_n + b$ où a est un nombre réel de $]0,1[$ et b un nombre réel quelconque. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leq a^p |x_1 - x_0|$. En déduire que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.
Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ à 10^{-10} près si on suppose $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$?
[001211]

55 121.06 Suite dans Rn

Exercice 1666

Soit x_n une suite de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de x_n est fermé. Indication : prouver que le complément de A est ouvert. [001901]

Exercice 1667

Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que x_n converge si et seulement si A est un singleton. Indication : pour prouver la convergence, utiliser qu'une suite bornée de $\mathbb{R}^d$ a au moins une valeur d'adhérence. [001902]

Exercice 1668

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que si $a \in A$ alors $f(a) = a$.
Indication : appliquer la définition de la continuité de f en a en termes de limites. [001903]

Exercice 1669

Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que l'ensemble A est non-vide, compact, connexe.
Indication : pour la connexité, supposer que $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 non-vides, disjoints, fermés.
Si $d = 1$ conclure que $A = [a,b]$ avec $a \leq b$.
[001904]

Exercice 1670

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que x_n est bornée. Montrer que x_n converge si et seulement si

$$||x_n - x_{n+1}|| \to 0.$$

Indication. Montrer qu'il suffit de prouver que $a = b$ dans $[a,b] = A$. Si $a < b$ montrer que la suite est stationnaire. [001905]

Exercice 1671

Soit $s_n = \Sigma_{k=1}^{n} 1/k$ et $x_n = \cos(s_n)$. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Indication : montrer que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$ mais que x_n ne converge pas. [001906]

56 121.99 Autre

Exercice 1672 I

1. (*) Calculer $\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (***) Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k}$, $a \in]0,\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005145]

Exercice 1673 ***

On veut montrer de manière élémentaire (c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et en ne travaillant qu'avec les deux opérations $+$ et $\times$) que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.

Pour cela développer, puis majorer $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ en commençant par majorer $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$ par $\frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005148]

Exercice 1674 **I

Soient x un réel. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}$.

Correction ▼ [005154]

Exercice 1675 ***IT

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0+u_1+...+u_n}{n+1}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ. Réciproque ?
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Correction ▼ [005220]

Exercice 1676 ***I

Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Etudier la suite (u_n).

Correction ▼ [005246]

Exercice 1677 ****

Montrer que l'ensemble E des réels de la forme $u_n = \sin(\ln(n))$, n entier naturel non nul, est dense dans $[-1,1]$.

Correction ▼ [005248]

Exercice 1678 ***

Calculer $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$.

Correction ▼ [005249]

57 122.01 Série à termes positifs

Exercice 1679

Soient, pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1. Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n \geq 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.

   Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

[001930]

Exercice 1680

Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0,\ b > 0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b. [001932]

Exercice 1681 Comparaison à des séries de Riemann et équivalent

Etudier les séries de termes généraux

1.
$$u_n = cos(\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}) \text{ avec } a>0$$

2.
$$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$

3.
$$w_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$$

[001934]

Exercice 1682

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \ \ \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!}\sin 1 \sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[001935]

Exercice 1683

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\frac{n!}{n^n}$, $(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$, $n^{-(1+(1/n))}$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$, $n^{lnn}e^{-\sqrt{n}}$

[001936]

Exercice 1684

Etudier, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}.$$

[001937]

Exercice 1685

Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n\geq 0}(n+1)3^{-n}$
2. $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$
3. $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$

[001938]

Exercice 1686

Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \frac{u_n}{S_n})$. [001939]

Exercice 1687 Utilisation d'une série

Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi+x)^4 \sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure. [001941]

Exercice 1688

Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $(\sum u_n)$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} (nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{p+1}^n u_k$ pour $n > p$. Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons. [001942]

Exercice 1689

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge. [001943]

Exercice 1690 Examen 2000

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$
Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

[001945]

Exercice 1691

Soit $0ab$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ défini par $u_0 = 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ pour $n \geq 0$. Montrer que la limite de la suite $S_n = \log(n^{b-a}u_n)$ existe et est finie. En déduire les valeurs de a et b telles que la série $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge. Calculer alors sa somme : pour cela expliciter sa somme partielle s_n, en montrant d'abord que pour tout n on a

$$\sum_{j=0}^{n} [(j+1)+b-1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^{n} [j+a]u_j.$$

[001949]

Exercice 1692

Par un calcul direct, montrer que les sommes partielles de la série harmonique

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}, \qquad n \geq 1$$

ne forment pas une suite de Cauchy. En déduire que cette série diverge. [002718]

Exercice 1693

En discutant éventuellement selon la valeur des paramètres réels α et β, étudier les séries de termes généraux positifs $(n \geq 2)$:

$\frac{n+\alpha}{n+\beta}$, $\frac{1}{n(n^2-1)}$,

$\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+\alpha n}$, $\alpha \leq 2$, $\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln n^2+\frac{\sqrt{n}}{n^2-n}$,

$\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, $\frac{1}{(1+1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$,

$\frac{n^n\alpha^n}{n!}$, $\sqrt[n]{n}-1$,

$n^\alpha(\ln n)^\beta$, $\int_n^{n+1/2}\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$,

$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+k)!}$, $k\in\mathbb{Z}$, $n^\alpha\left[(n+1)^{(n+1)/n}-(n-1)^{(n-1)/n}\right]$,

$\int_1^\infty \exp(-x^n)\,dx$ (ind. : changer de variable $t=x^n$).

[002719]

Exercice 1694

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général n^α est de ce type ; rappeler pour quelles valeurs de α elle converge.
2. Montrer que si $\alpha>-1$, la série de terme général a_n diverge, et que si $\alpha<-1$ elle converge.
3. Application : étudier la série
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n+2)}.$$
4. Montrer que si l'on a au voisinage de $+\infty$,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$
alors la série de terme général a_n diverge.
5. Application : étudier la série
$$\sum_{n\geq 1}(1-\exp(-1/n)).$$

[002720]

Exercice 1695

Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in]0,1[$ donné et $u_{n+1}=u_n-{u_n}^2$. Montrer que cette suite converge et en donner la limite. Montrer que la série de terme général ${u_n}^2$ converge et en donner la limite. Montrer que les séries de terme généraux u_n et $\ln(u_{n+1}/u_n)$ divergent. [002721]

Exercice 1696

Montrer qu'il existe deux réels α, β, tels que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}.$$

En déduire la valeur de

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

[002722]

Exercice 1697

Soit (a_n) un suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Étudier les séries

$$\sum {a_n}^2,\qquad \sum\frac{a_n}{1+a_n},\qquad \sum a_na_{2n},\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

[002723]

Exercice 1698

Justifier la convergence et calculer les sommes des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+k)}\quad (k\in\mathbb{N}^*),\quad \sum \frac{9}{(3n+1)(3n+4)},$$
$$\sum \frac{n^2+n-3}{n!},\qquad \sum_{n\geq 2}\ln\frac{n^2}{n^2-1}.$$

[002725]

Exercice 1699 **T

Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe.

Correction ▼ [005108]

Exercice 1700 ***I

1. Montrer par récurrence que, pour tout naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$. En calculant la différence $(k+1)^2-k^2$, trouver une démonstration directe de ce résultat.
2. Calculer de même les sommes $\sum_{k=1}^{n}k^2$, $\sum_{k=1}^{n}k^3$ et $\sum_{k=1}^{n}k^4$ (et mémoriser les résultats).
3. On pose $S_p=\sum_{k=1}^{n}k^p$. Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les S_p de proche en proche.

Correction ▼ [005109]

Exercice 1701 Sommes télescopiques

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. (***) Calculer $S_p=\sum_{k=1}^{n}k^p$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\{1,2,3,4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1)-P_p(x)=x^p$).
3. (**) Calculer $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$ (aller relire certaines formules établies dans une planche précédente).
4. (**) Calculer $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2}$.

Correction ▼ [005143]

Exercice 1702 I

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{1\leq i<j\leq n}1$.
2. (**) $\sum_{1\leq i,j\leq n}j$ et $\sum_{1\leq i<j\leq n}j$.
3. (*) $\sum_{1\leq i,j\leq n}ij$.
4. (***) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(5h^4-18h^2k^2+5k^4)$. Déterminer$\lim_{n\to+\infty}u_n$ (utiliser les résultats de l'exercice 1701, 2)).

Correction ▼ [005144]

Exercice 1703 ***I

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.
Montrer que $(a_1+a_2+...+a_n)(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n})\geq n^2$ (développer et penser à $f(x)=x+\frac{1}{x}$).

Correction ▼ [005149]

Exercice 1704 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_ku_{k+1}}=\frac{n+1}{u_0u_{n+1}}$.

Correction ▼ [005223]

Exercice 1705 **

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+...+k^2}$.

Correction ▼ [005224]

Exercice 1706 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Correction ▼ [005697]

Exercice 1707 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$, $n \geqslant 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Correction ▼ [005698]

Exercice 1708 ****

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Etudier en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Correction ▼ [005699]

Exercice 1709 *

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005704]

Exercice 1710 **

Déterminer un équivalent simple de $\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ quand n tend vers l'infini (a réel positif donné).

Correction ▼ [005705]

58 122.02 Convergence absolue

Exercice 1711 Utilisation des règles de Cauchy et d'Alembert

Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = \sqrt{n!}\sin x \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$
2. $$v_n = e^{an^2}(1-\frac{a}{n})^{n^3}$$

[001933]

Exercice 1712 Séries à termes quelconques

Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$
2. $$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$
3. $$w_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent etre fructueux ... [001940]

Exercice 1713 Examen 2000

En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
– GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
– ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
– AC : celles qui convergent absolument ;
– SC : celles qui convergent, mais non absolument.
(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

[001944]

Exercice 1714

Déterminer, en fonction des paramètres réels α, β, la nature des séries de termes généraux ($n \geq 2$)

$$\begin{array}{ll} (-1)^n n^\alpha, & n^\beta\left(1-(-1)^n n^\alpha\right), \\ \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}, & \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}-1\right), \\ \ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right), & \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \\ \sin\left(2\pi\dfrac{n!}{e}\right) & \text{(on pourra utiliser que : } 1/e=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\text{).} \end{array}$$

[002724]

---

59 122.03 Séries semi-convergentes

Exercice 1715 Examen 2000

En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
- GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

[001944]

---

60 122.04 Séries alternées

Exercice 1716

Soit $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}. [001931]

Exercice 1717 Examen 2000

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2.$$

   Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$ et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.

4. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

[001945]

Exercice 1718 Permutation dans la série harmonique alternée : Pringsheim (1883)

Pour tout entier $n>0$, soit $u(n)=(-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers >0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que
(1) pour tout entier $p>0$ on a $\tau(2p-1)<\tau(2p+1)$ et $\tau(2p)<\tau(2p+2)$.
(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1\leq k\leq n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha=\lim_{n\infty} p(n)/n$ existe et est dans $]0,1[$.

1. Dans le cas particulier où σ est définie par
$$\sigma(3p)=2p,\ \sigma(3p+1)=4p+1,\ \sigma(3p+2)=4p+3$$
pour tout entier $p>0$, calculer explicitement τ, et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α.
2. On note $f(n)=\sum_{k=1}^n 1/k-\log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n\infty} f(n)=\gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ, on considère la série de terme général $v_n=u(\sigma(n))$ et on note $s_n=v_1+\cdots+v_n$.
3. Montrer par récurrence que $s_n=\sum_{k=1}^{p(n)}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n-p(n)}\frac{1}{2k-1}$ et que
$$s_n=\frac{1}{2}f(p(n))+\frac{1}{2}f(n-p(n))-f(2n-2p(n))+\frac{1}{2}\log\frac{p(n)}{n-p(n)}-\log 2.$$
En déduire que $\sum_{n=1}^\infty v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α.

[001948]

Exercice 1719 **

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.
Correction ▼ [005710]

---

61 122.05 Familles sommables

Exercice 1720 Dénombrabilité

A étant un ensemble infini dénombrable, les ensembles suivants sont-ils dénombrables :

1. $\mathscr{P}(A)$?
2. $\{$parties finies de $A\}$?
3. $\{$suites périodiques à valeurs dans $A\}$?
4. $\{$suites ultimement périodiques à valeurs dans $A\}$?
5. $\{$relations d'ordre total sur $A\}$?

[004487]

Exercice 1721 Discontinuités d'une fonction monotone

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable (pour $[a,b]\subset\mathbb{R}$, considérer la famille $(f(x^+)-f(x^-))_{x\in[a,b]}$).
2. Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante ayant une infinité dénombrable de discontinuités.
3. $(**)$ Trouver une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *strictement* croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est égal à $\mathbb{Q}$.

Correction ▼ [004488]

Exercice 1722 Ensemble non vide ?

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une énumération des rationnels. On note $I_n=\left]r_n-\frac{1}{n^2},r_n+\frac{1}{n^2}\right[$, $E=\bigcup_{n=1}^\infty I_n$ et $F=\mathbb{R}\setminus E$. Montrer que $F\neq\varnothing$ (ceci est choquant vu que les éléments de F sont, par définition, "loin" de chaque rationnel, pourtant c'est vrai) .
Correction ▼ [004489]

Exercice 1723 Étude de convergence

Étudier la finitude des sommes suivantes :

1. $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(i+j)^\alpha}$.

2. $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$.
3. $\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$.
4. $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p+b^q}$, $a > 1, b > 1$.

Correction ▼ [004490]

Exercice 1724 Série des restes

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Correction ▼ [004491]

Exercice 1725 Série des restes

Calculer $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

Correction ▼ [004492]

Exercice 1726 Non interversion des sommations

On pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

1. Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Correction ▼ [004493]

Exercice 1727 Identité remarquable

Montrer que pour $x \in (x^2+1)$, $|x| < 1$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Correction ▼ [004494]

Exercice 1728 Calcul de somme

Soit $z \in (x^2+1)$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n. [004495]

Exercice 1729 Centrale MP 2000

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

1. Pour quelles valeurs de t $S(t)$ a-t-elle un sens ?
2. Montrer que $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}$.
3. Soit $F_m(t) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{t^k(1-t)}{1-t^k}$. Montrer que $(F_m(t))$ converge uniformément vers $(1-t)S(t)$ sur $[0,1]$. En déduire la limite en 1 de $(1-t)S(t)$. On rappelle que $\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}$.
4. Calculer le développement en série entière de $S(t)$. Donner une interprétation arithmétique des coefficients de ce développement et préciser leur signe en fonction de n.

Correction ▼ [004496]

Exercice 1730 Centrale MP 2002

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

1. Étudier la convergence de la série et montrer qu'on peut intervertir b et c dans la formule.
2. Développer en série entière : $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{1-z^m}$.

Correction ▼ [004497]

Exercice 1731 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$, $B = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2; p|q} \frac{1}{p^2q^2}$ et $C = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2; p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$.

Correction ▼ [004498]

Exercice 1732 Série harmonique alternée

On réordonne les termes de la série harmonique alternée en prenant tour à tour p termes positifs puis q termes négatifs, $p,q \geq 1$. Calculer la somme de la série correspondante.

Correction ▼ [004499]

Exercice 1733 Familles de carrés sommable

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que : $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt + i\int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = 0$.
   En déduire : $\int_{t=0}^{1} P^2(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$.
2. Soient $2n$ réels positifs $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{a_k b_\ell}{k+\ell} \leq \pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2}$.
3. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.
   Montrer que la suite double $\left(\frac{a_k b_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

[004500]

Exercice 1734 Associativité générale

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de I, non nécéssairement finies, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$. Montrer que $\sum_{i\in I_n} a_i \to \sum_{i\in I} a_i$ lorsque $n\to\infty$. En déduire que si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de I alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in J_n} a_i$.
[004501]

Exercice 1735 Mines MP 2001

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine et la développer en série entière.

Correction ▼ [004502]

---

62 122.06 Fonction exponentielle complexe

Exercice 1736 $\cos z$

Quels sont les complexes z tels que $\cos z \in [-1,1]$?

Correction ▼ [004403]

Exercice 1737 $\lim((1+z/n)^n)$

Soit $z \in (x^2+1)$. Montrer que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to e^z$ lorsque $n\to\infty$.

Correction ▼ [004404]

Exercice 1738 Inégalité

Soit $z \in (x^2+1)$. Montrer que $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$.

Correction ▼ [004405]

Exercice 1739 Inégalité, Polytechnique MP* 2006

Soit $z = x+iy \in (x^2+1)$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$. Montrer que $\left|\frac{e^z-1}{z}\right| \leq \left|\frac{e^x-1}{x}\right|$. Que dire en cas d'égalité ?

Correction ▼ [004406]

Exercice 1740 Morphismes $(\mathbb{R},+)\to((x^2+1)^*,*)$

Soit $f:\mathbb{R}\to(x^2+1)^*$ telle que : $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Si f est dérivable, montrer qu'il existe $\lambda \in (x^2+1)$ tel que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x) = e^{\lambda x}$.
2. Obtenir le même résultat si f est seulement supposée continue (prendre une primitive, F, de f et montrer qu'elle est de classe $(x^2+1)^2$).

[004407]

Exercice 1741 $e^z = z$

Montrer qu'il existe une infinité de complexes z tels que $e^z = z$ (on calculera x en fonction de y, et on étudiera l'équation obtenue).

Correction ▼ [004408]

Exercice 1742 Équations trigonométriques

Résoudre dans (x^2+1) :

1. $\cos z = 2$.
2. $\operatorname{ch} z = -1$.
3. $\sin z + \sin jz + \sin j^2 z = 0$.
4. $8\cos z + 4i\sin z = 7+5i$.

Correction ▼ [004409]

Exercice 1743 $|\cos|$ et $|\sin|$ sur le cercle unité

Calculer $\sup\{|\cos z|$ tel que $|z| \leq 1\}$ et $\sup\{|\sin z|$ tel que $|z| \leq 1\}$.

Correction ▼ [004410]

Exercice 1744 Courbes

Soient M, M' deux points du plan d'affixes $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$.

1. On suppose que z et z' sont liés par la relation : $z' = e^z$. Étudier la courbe décrite par M' lorsque M décrit :
   (a) une droite $x =$ cste.
   (b) une droite $y =$ cste.
   (c) une droite quelconque.
2. Reprendre les questions 1a et 1b avec $z' = \cos z$.

[004411]

Exercice 1745 Centrale MP 2002

Résoudre dans $\mathscr{M}_2((x^2+1)^)$: $\exp(M) = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [004412]

63 122.99 Autre

Exercice 1746 Examen 2000

Soit $a > 0$ fixé. Pour n entier positif ou nul on dfinit $P_n(a)$ par $P_0(a) = 1$, $P_1(a) = a$, $P_2(a) = a(a+1)$ et, plus généralement $P_{n+1}(a) = (n+a)P_n(a)$. Montrer que

$$L(a) = \lim_{n\infty} \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$$

existe et est un nombre strictement positif. Méthode : considérer la série de terme général pour $n > 0$: $u_n = \log(n+a) - a\log(n+1) + (a-1)\log n$, comparer sa somme partielle d'ordre $n-1$ avec $\log \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$, et, ... l'aide d'un développement limité en $1/n$ d'ordre convenable, montrer que, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. [001946]

Exercice 1747

Soit α et β deux nombres réels ou complexes tels que $\alpha\beta = -1$ et $|\alpha| > 1 > |\beta|$. Pour n dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers positifs ou négatifs on pose $F_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ et $L_n = \alpha^n + \beta^n$ (si $\alpha+\beta = 1$ ces nombres sont appelés entiers de Fibonacci (1225) et de Lucas (1891)).

1. Montrer par le critère de D'Alembert que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge et calculer la limite de $Q_n = L_n/F_n$ si $n \to +\infty$. .
2. On admet (identité de Backstrom (1981)) que pour tous n et k de $\mathbf{Z}$ on a
$$\frac{1}{F_{4n-2k-1}+F_{2k+1}} + \frac{1}{F_{4n+2k+1}+F_{2k+1}} = \frac{1}{2L_{2k+1}}\left(Q_{2n+2k+1} - Q_{2n-2k-1}\right).$$
En faisant $k = 0$ dans cette identité, calculer la somme partielle d'ordre $2n$ de la série initiale, c'est à dire $s_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{F_{2j+1}+1}$ en montrant par récurrence sur n que $s_{2n} = \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_1)$. En déduire la somme de la série en termes de α et β. Donner une expression simple du terme général de la série et de sa somme si $\alpha = \exp t$ et $\beta = -\exp(-t)$ si t est réel.
3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$ converge et calculer sa somme.

[001947]

Exercice 1748

Indiquer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série
$$\sum_{n\geq 0} \alpha^n$$
converge, et calculer sa somme.

En déduire l'écriture en base 10 des nombres $1/9$ et $1/11$ et plus généralement en base k, du nombre $1/(k-1)$ et du nombre $1/(k+1)$.

[002656]

Exercice 1749

En comparant avec les intégrales de Wallis
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt,$$
déterminer la nature et calculer la somme de la série
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n 2^{-2n} C_{2n}^n.$$

[002726]

Exercice 1750 Étude de convergence

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.
2. $\operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$.
3. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.
4. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
5. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
6. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
7. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. $\frac{(-1)^n}{\ln n}$.
9. $\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.
10. $\frac{2.4.6\ldots(2n)}{n^n}$.
11. $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
12. $\frac{1!-2!+\cdots\pm n!}{(n+1)!}$.
13. $\frac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$.
14. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
15. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
16. $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.
17. $\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$.
18. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Correction ▼ [004413]

Exercice 1751 Centrale PC 1999

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme. A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Correction ▼ [004414]

Exercice 1752 Ensi PC 1999

Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

Correction ▼ [004415]

Exercice 1753 Mines MP 2000

Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Correction ▼ [004416]

Exercice 1754 Mines MP 2003

Si $\alpha > 0$, donner la nature des séries $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$, $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Correction ▼ [004417]

Exercice 1755 Ensi PC 1999

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \to a$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \to b$ lorsque $n \to \infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004418]

Exercice 1756 Encadrement

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n. Montrer que $\sum v_n$ converge.
[004419]

Exercice 1757 Calcul approché

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin(0.4/n)\right)^n$ converge. Calculer à la machine une valeur approchée à 10^{-8} près de sa somme.

Correction ▼ [004420]

Exercice 1758 Ensi MP 2002

On suppose que la série à termes positifs de terme général u_n est divergente et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue décroissante. Comparer les énoncés :
1. f est intégrable
2. La série de terme général $u_n f(S_n)$ converge.

Correction ▼ [004421]

Exercice 1759 Centrale P' 1996

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Correction ▼ [004422]

Exercice 1760 $C_{2n}^n / n4^n$

L'une au moins des deux séries : $\sum \frac{C_{2n}^n}{n4^n}$ et $\sum \frac{n4^n}{C_{2n}^n}$ diverge. Dire pourquoi et dire laquelle.
[004423]

Exercice 1761 $1/(1+n^2u_n)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit (u_n) une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge. Étudier le cas où $\sum u_n$ diverge.

Correction ▼ [004424]

Exercice 1762 $a_n/(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$

Soit (a_n) une suite réelle positive. On pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction ▼ [004425]

Exercice 1763 $1/a^{\text{nb de chiffres de } n}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n (sans zéros inutiles). Soit $a > 0$. Étudier la convergence et déterminer la somme éventuelle de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}}$.

Correction ▼ [004426]

Exercice 1764 Cauchy-Schwarz

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Montrer que $\sum (u_n+v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n+v_n)^2} \leq \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

[004427]

Exercice 1765 $(-1)^n/(n^{3/4}+\cos n)$

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. En écrivant $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004428]

Exercice 1766 Reste d'une série alternée

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [004429]

Exercice 1767 Calcul de sommes

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)$.
8. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.
10. $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

Correction ▼ [004430]

Exercice 1768

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Correction ▼ [004431]

Exercice 1769 Chimie P 90

1. Résoudre les équations différentielles : $y''+2y'+2y=0$, $y''+4y'+4y=2e^{-x}\cos x$.
2. Soit f la solution commune. On définit la série de terme général $u_n = \int_{x=n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Correction ▼ [004432]

Exercice 1770 $1/n^2(n+1)^2$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Correction ▼ [004433]

Exercice 1771 $1/(1^2+2^2+\dots+n^2)$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$ est convergente et calculer sa somme.
Correction ▼ [004434]

Exercice 1772 $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$

Pour quelles valeurs de $a,b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.
Correction ▼ [004435]

Exercice 1773 $\operatorname{Arctan}(1/(k^2+k+1))$

Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$. (On pourra calculer $\tan s_n$)
Correction ▼ [004436]

Exercice 1774 $\operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan} n$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série de terme général $\operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan} n$ est convergente.
2. On pose $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty}(\operatorname{Arctan}(k+a) - \operatorname{Arctan} k)$. Trouver $\lim_{a\to+\infty} S(a)$.

Correction ▼ [004437]

Exercice 1775 Pile en porte à faux

Peut-on empiler 100 pièces de 1F de sorte que la dernière soit complètement en porte à faux ? (c'est-à-dire que sa projection sur un plan horizontal ne rencontre pas la projection de la première pièce)
Correction ▼ [004438]

Exercice 1776 Recherche d'équivalents

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Correction ▼ [004439]

Exercice 1777 $\ln^2(k)$

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?
Correction ▼ [004440]

Exercice 1778 $k^{-2/3}$

Trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.
Correction ▼ [004441]

Exercice 1779 $(-1)^k\sqrt{k}$

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$. (Regrouper les termes deux par deux puis comparer à une intégrale)
Correction ▼ [004442]

Exercice 1780 Constante d'Euler

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante. On pose $u_n = f(n)$ et $s_n = u_0 + \cdots + u_n$.
Montrer que la suite de terme général $s_n - \int_{t=0}^{n+1} f(t)\,dt$ est convergente. Donner une interprétation graphique de ce fait.
Application : On pose $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$. Justifier l'existence de γ et montrer que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$. [004443]

Exercice 1781 Constante d'Euler (Centrale MP 2003)

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$. Les suites (S_n) et (T_n) sont-elles adjacentes ?
Correction ▼ [004444]

Exercice 1782 Constante d'Euler, Mines-Ponts MP 2005

Soit $u_{n,k}$ le reste de la division du n par k. Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n,k}}{k}$?

Correction ▼ [004445]

Exercice 1783 Mines MP 2003

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}$.

1. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.
2. Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.
3. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - \ell$.

Correction ▼ [004446]

Exercice 1784 Centrale MP 2001

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2-k^2}$.

Correction ▼ [004447]

Exercice 1785 $1/n\ln^2(n)$

1. Prouver la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$.
2. On note $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=2}^{\infty} u_k$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n+1)} \leq S - S_n \leq \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geq 2$.
3. Montrer que si S_n est une valeur approchée de S à 10^{-3} près alors $n > 10^{434}$.
4. On suppose disposer d'une machine calculant un million de termes de la série par seconde avec 12 chiffres significatifs. Peut-on obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près ? (Remarque : 1 an $\approx$ 32 millions de secondes)
5. Donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Correction ▼ [004448]

Exercice 1786 $(x-1)\zeta(x) \to 1$

Pour $x > 1$ on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale, trouver $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\zeta(x)$.

[004449]

Exercice 1787 $u_n/(1+u_n)$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Correction ▼ [004450]

Exercice 1788 Série des restes

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ et $\sum n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.
   (a) Montrer que $nv_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   (b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$.
2. Application : Calculer lorsque c'est possible : $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$.

Correction ▼ [004451]

Exercice 1789 X MP* 2001

Soit (u_n) une suite réelle positive, $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ et $\alpha > 0$ un réel donné. On suppose $\frac{U_n}{nu_n} \to \alpha$ lorsque $n \to \infty$. Étudier la suite de terme général $\frac{1}{n^2u_n}\sum_{k=0}^{n} ku_k$.

Correction ▼ [004452]

Exercice 1790 $\sum nu_n$ converge

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que la série $\sum_{n\geq 1} n u_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Correction ▼ [004453]

Exercice 1791 (u_n) décroit

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. $\left(\text{considérer } \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
3. Application : calculer pour $0 \leq r < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Correction ▼ [004454]

Exercice 1792 u_n/S_n

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si la série $\sum u_n$ converge, que dire de la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$?
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, montrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge aussi. On pourra considérer $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{u_k}{S_k}\right)$.

Correction ▼ [004455]

Exercice 1793 Polytechnique MP* 2000

On donne une suite de réels strictement positifs (a_n), décroissante et de limite nulle. Montrer que la série de terme général $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

Correction ▼ [004456]

Exercice 1794 $(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1})/n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}}{n}$. Montrer que $\sum v_n$ a même nature que $\sum u_n$.

Correction ▼ [004457]

Exercice 1795 $\sum ku_k/n(n+1)$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et éventuellement même somme.

Correction ▼ [004458]

Exercice 1796 $\sum ku_k/n^2$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} ku_k$.

Correction ▼ [004459]

Exercice 1797 Principe d'accumulation

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
Applications : Retrouver la convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Étudier la convergence des séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Correction ▼ [004460]

Exercice 1798 $u_{n+1} = 1/ne^{u_n}$. Ensi P 90

Soit (u_n) définie par : $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Correction ▼ [004461]

Exercice 1799 $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1. Montrer que $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.
2. On pose $u_n = 2^{-n}\ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$)
3. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

[004462]

Exercice 1800 $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
3. Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.
4. Montrer que $u_n < \frac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.
5. On pose $u_n = \frac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.
6. En déduire que u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$.

[004463]

Exercice 1801 $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1. Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On pose $v_n = (n+b-1)u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n) (on introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a-b+1 < 0$ et calculer sa somme en fonction de a, b, u_0.

Correction ▼ [004464]

Exercice 1802

On se donne u_1 et a deux réels strictement positifs et l'on définit par récurrence la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$· Étudiez la limite de la suite (u_n), et, quand $a \leq 1$, en donner un équivalent.

Correction ▼ [004465]

Exercice 1803 $1/k^\alpha (n-k)^\alpha$

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004466]

Exercice 1804 Produit de Cauchy de trois séries

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries absolument convergentes de sommes A, B, C.
On pose $u_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Montrer que $\sum u_n = ABC$.

[004467]

Exercice 1805 Produit de séries géométriques

Soient $a \in [0,1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^\infty ka^k$. Calculer par la même méthode $\sum_{k=0}^\infty k^2 a^k$.

Correction ▼ [004468]

Exercice 1806 Produit de séries géométriques

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note T_n le nombre de manières de décomposer n francs avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 francs ($T_0 = 1$). Montrer que :

$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}.$$

[004469]

Exercice 1807 $\sum u_k/2^{n-k}$

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On pose $v_n = \frac{u_n}{1} + \frac{u_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{u_0}{2^n}$.

1. Montrer que $v_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sum v_n$ converge et donner sa valeur.

Correction ▼ [004470]

Exercice 1808 $\sum a_n/n^p = 0$

Soit (a_n) une suite bornée telle que pour tout entier $p \geq 2$: $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^p} = 0$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0$.

Correction ▼ [004471]

Exercice 1809 $\sum x_{kn} = 0$

Soit $\sum_{n\geq 1} x_n$ une série absolument convergente telle que pour tout entier $k \geq 1$ on a $\sum_{n=1}^{\infty} x_{kn} = 0$.
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0$.

Correction ▼ [004472]

Exercice 1810 Césaro

1. Soient $k, p \in \mathbb{N}$ avec $k \leq p$. Montrer que $\sum_{n=k}^{p} \frac{C_n^k - C_n^{k+1}}{2^n} = \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}$.
2. Soit (u_n) une série convergente. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Montrer que la série (v_n) est convergente.

Correction ▼ [004473]

Exercice 1811 $nu_n \to 0$

Soit (u_n) une série convergente à termes positifs décroissants.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sum_{u_k \geq 1/n} \frac{1}{u_k} = \mathrm{o}(n^2)$.

Correction ▼ [004474]

Exercice 1812 u_n/R_n^p

Soit (a_n) une série positive convergente, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $p \in]0,1[$.

1. Montrer qu'il existe $C_p \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leq C_p A^{1-p}$.
2. Trouver la meilleure constante C_p.

Correction ▼ [004475]

Exercice 1813 $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$

Soit (a_n) une suite réelle positive et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Correction ▼ [004476]

Exercice 1814 Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$. [004477]

Exercice 1815 Stirling++

Montrer que $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. [004478]

Exercice 1816 Développement factoriel

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers (q_i) telles que $q_0 \geq 2$.

1. Si $s = (q_i) \in \mathscr{S}$, montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_0 \dots q_k}$ converge. On note $\Phi(s)$ sa somme.
2. Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{S} \to]0,1]$ est bijective.
3. Soit $s = (q_i) \in \mathscr{S}$. Montrer que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si s est stationnaire.

[004479]

Exercice 1817 Développement asymptotique

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + o(1)$.
2. Prouver : $\frac{\ln 2}{2} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,dt \leq C \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,dt$.
3. Prouver : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

[004480]

Exercice 1818

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $\frac{u_1+\dots+u_n}{n} \to \ell \in (x^2+1)$ lorsque $n\to\infty$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{u_1}{1}+\dots+\frac{u_n}{n}\right) \to \ell$ lorsque $n\to\infty$.

Correction ▼ [004481]

Exercice 1819

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge au sens de Césaro vers zéro.
Étudiez la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+k+1}$.

Correction ▼ [004482]

Exercice 1820 Centrale MP 2000

Soient deux suites de termes généraux u_n et v_n définies par la donnée de u_1 et v_1, tous deux réels, et les relations :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)}, \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Montrer que ces suites sont définies et bornées.

Correction ▼ [004483]

Exercice 1821 Produits infinis, Polytechnique 2000

On considère une suite (a_n) de réels et on définit $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

1. On suppose que pour tout n, $a_n \geq 0$.
   (a) Montrer que, pour tout N, $1+S_N \leq P_N \leq e^{S_N}$.
   (b) Comparer les convergences respectives des suites (S_N) et (P_N).
2. On suppose maintenant que pour tout n, $-1 \leq a_n \leq 0$.
   (a) La relation précédente est-elle encore vérifiée ?
   (b) Discuter de la convergence des suites (S_N) et (P_N).
3. On suppose que (a_n) est de signe quelconque et que pour tout n, $1+a_n > 0$. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que (P_N) a une limite et que cette limite est nulle si et seulement si $\sum a_n^2$ diverge.
4. Complément. On suppose que la suite (a_n) est complexe, que pour tout n $|a_n| < 1$ et que la série $\sum |a_n|$ est convergente.
   (a) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ existe, puis que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ existe $\left(\text{on pourra démontrer et utiliser l'inégalité } \left|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)-1\right| \leq \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)-1\right)$.
   (b) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ n'est pas nul.

Correction ▼ [004484]

Exercice 1822 Polytechnique MP 2002

Trouver les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall\, x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Correction ▼ [004485]

Exercice 1823 ENS Cachan MP* 2005

Soit $P(n) = \max\{p \text{ premier},\ p \mid n\}$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{nP(n)}$ converge.

Correction ▼ [004486]

Exercice 1824 IT

Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

1. (*) Calculer $\sum_{i=3}^{n} i$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$.
2. (*) Calculer le nombre $1,1111\ldots = \lim_{n\to+\infty} 1,\underbrace{11\ldots1}_{n}$ et le nombre $0,9999\ldots = \lim_{n\to+\infty} 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}$.
3. (*) Calculer $\underbrace{1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
4. (*) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.
5. (**) Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

6. (**) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
7. (***) Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$. Déterminer$\lim_{n\to+\infty} S_n$.
8. (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
   (a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Correction ▼ [005142]

Exercice 1825 ***I Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n, $2n$ réels. Montrer que

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.|b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

(Indication. Considérer le polynôme $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k x)^2$, développer puis ordonner suivant les puissances décroissantes puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré). Retrouver alors le résultat de l'exercice 1703.

Correction ▼ [005150]

Exercice 1826 **

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

Correction ▼ [005458]

Exercice 1827

Nature de la série de terme général

1) (*) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2)** (*) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **3)** (**) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ **4)** (**) $\frac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\, n)}$
5) (**) Arccos $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$ **6)** (*) $\frac{n^2}{(n-1)!}$ **7)** $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ **8)** (**) $\ln\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{n^2+1}{n}\right)$
9) (*) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ **10)** (**) $n^{-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$ **11)** (**) $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Correction ▼ [005688]

Exercice 1828

Nature de la série de terme général
1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. **2)** (**) $\frac{1}{n^\alpha} S(n)$ où $S(n) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$.
3) (**) u_n où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}}$.
4) (****) $u_n = \frac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier
(indication : considérer $\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(1+p_n+p_n^2+\ldots)$).
5) (***) $u_n = \frac{1}{n(c(n))^\alpha}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10.
6) (*) $\frac{(\prod_{k=2}^{n}\ln k)^a}{(n!)^b}$ $a > 0$ et $b > 0$. **7)** (**) Arctan$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right)$ − Arctan$\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^a\right)$.
8) (**) $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$. **9)** (***) $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)\right) - 1$.

Correction ▼ [005689]

Exercice 1829

Nature de la série de terme général
1) (***) $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ **2)** (**) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ **3)** (**) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **4)** (***) $\frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}$
5) (**) $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$
$(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls
7) (****) $(\sin(n!\pi e))^p$ p entier naturel non nul.

Correction ▼ [005690]

Exercice 1830

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$ **2)** (**) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ **3)** (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$
4) (*) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ **5)** (**) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **6)** (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
textbf7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{th}\,\frac{a}{2^n}}{2^n}$

Correction ▼ [005691]

Exercice 1831 *** I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Correction ▼ [005692]

Exercice 1832 ***

Soit σ une injection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Montrer que la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Correction ▼ [005693]

Exercice 1833 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Correction ▼ [005694]

Exercice 1834 ***

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Correction ▼ [005695]

Exercice 1835 ***

Nature de la série de terme général $u_n=\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Correction ▼ [005696]

Exercice 1836 **

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n=\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n\geqslant 1$.

Correction ▼ [005700]

Exercice 1837 ****

On sait que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$.
A partir de la série précédente, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs ... (Par exemple pour $p=3$ et $q=2$, on s'intéresse à $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$). Convergence et somme de cette série.

Correction ▼ [005701]

Exercice 1838 ***

Nature de la série de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$.

Correction ▼ [005702]

Exercice 1839

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

1) (**) $u_n=\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ **2)** (***) $u_n=\frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$, $n\geqslant 1$, $a\in\mathbb{R}^{+*}$ donné.

Correction ▼ [005703]

Exercice 1840 *

Nature de la série de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^p}$, $p\in]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005706]

Exercice 1841 *** I

Développement limité à l'ordre 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

Correction ▼ [005707]

Exercice 1842

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de

$$\textbf{1) (***) } \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} \qquad \textbf{2) (**) } \sum_{p=1}^{n} p^p.$$

Correction ▼ [005708]

Exercice 1843 ***

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p} \frac{1}{n^2-p^2}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\, p\neq n} \frac{1}{n^2-p^2}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Correction ▼ [005709]

Exercice 1844 **

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [005710]

Exercice 1845 ****

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$. Montrer que si la série de terme général $(u_n)^2$ converge alors la série de terme général $(v_n)^2$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ (indication : majorer $v_n^2 - 2u_nv_n$).

Correction ▼ [005711]

Exercice 1846 ***

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.

Correction ▼ [005712]

64 123.01 Continuité : théorie

Exercice 1847

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur I.

Indication ▼ Correction ▼ [000639]

Exercice 1848

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a,b]$ on ait : $|f(x)-f(x')| < |x-x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x)-x$).

[000640]

Exercice 1849

1. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que $f(]a,b[) \subset [a,b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x)-x$, qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.
3. Un mobile parcours, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

[000641]

Exercice 1850

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction ▼ [000642]

Exercice 1851

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

Correction ▼ [000643]

Exercice 1852

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

[000644]

Exercice 1853

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Indication ▼ Correction ▼ [000645]

Exercice 1854

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Indication ▼ Correction ▼ [000646]

Exercice 1855

Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x \in [0,1]\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]\ f(x) + m < g(x)$. [000647]

Exercice 1856

Soit f croissante sur $[a,b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue. [000648]

Exercice 1857

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante. [000649]

Exercice 1858

Soit f périodique croissante. Que dire de f ? [000650]

Exercice 1859

Donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ non lipschitzienne, puis de fonction continue en un seul point, puis de fonction discontinue sur les rationnels et continue sur les irrationnels, enfin de fonction continue telle que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou si $x = 0$, et $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Donner un exemple de bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$ discontinue en tout point. [000651]

Exercice 1860

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. Que dire de f ? [000652]

Exercice 1861

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe.

Indication : étudier
$$E = \{x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x], f(t) > t\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000653]

Exercice 1862

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \to \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante ; montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. [000654]

Exercice 1863

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x)e^{f(x)} = x.$$
Donner les variations de f puis comparer f et ln au voisinage de $+\infty$. [000655]

Exercice 1864

Soit $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ croissante. Construire $g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq g$. [000656]

Exercice 1865

Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$
On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante. [000657]

Exercice 1866

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0,1], f(a_n) = a_n^n.$$
On suppose f strictement décroissante. Montrer que a_n est unique et étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. [000658]

Exercice 1867

Existe-t-il une bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}$? [000659]

Exercice 1868

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. On note $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \varnothing$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f\circ = f$.
Correction ▼ [000660]

Exercice 1869

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, évaluer :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$
[000661]

Exercice 1870

Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?
Indication ▼ Correction ▼ [000662]

Exercice 1871

Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+}$ telle que $\forall x \geq 0$, la suite $(f(xn))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Montrer $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. [000663]

Exercice 1872

Soit $f \in C(\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$, montrer qu'alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+}$. [000664]

Exercice 1873

Soit f continue sur $[a,b]$, montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| + \varepsilon.$$

[000665]

Exercice 1874

Soit $(f,g) \in C([0,1],[0,1])^2$, tel que : $fg = gf$. On veut montrer que $f-g$ s'annulle par deux méthodes :
- par l'absurde, utiliser le fait que $(f-g)([0,1])$ est un segment ne contenant pas 0.
- par l'absurde, en examinant, si $f-g>0$ par exemple, $\min\{x \in [0,1] | f(x) = x\}$.

Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$? [000666]

Exercice 1875

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right], f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

[000667]

Exercice 1876

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que : $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$ l'image réciproque de toute partie bornée est bornée. [000668]

Exercice 1877

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$

1. Montrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) \leq \sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$
2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$.
3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que
$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leq x\leq 1} g(x).$$
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

Indication ▼ Correction ▼ [000669]

Exercice 1878 Fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique cad : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

1. Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue non constante, montrer que f a une plus petite période.
3. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

[003845]

Exercice 1879 Fonction ayant des limites à l'infini

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécéssairement les deux.
3. Montrer que f est uniformément continue.

[003846]

Exercice 1880 Permutation de décimales

Pour $x \in [0,1[$, on note $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ le développement décimal propre de x.

1. Soit $f : [0,1[\to [0,1[$ définie par : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{10^k}$. Montrer que f est continue par morceaux.
2. Soit $g : [0,1[\to [0,1[$ définie par : $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_{2k}}{10^{2k-1}} + \frac{x_{2k-1}}{10^{2k}}\right)$. Déterminer les points où g est continue.

[003847]

Exercice 1881 $\max(f,g)$

Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$. Montrer que h est continue.

[003849]

Exercice 1882 Prolongement d'inégalités

1. Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x,y \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $f \leq g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécéssairement : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

[003850]

Exercice 1883 Étude d'un sup

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On pose $g(x) = \sup\big(f([x,x+1])\big)$. Montrer que g est continue.
Même question en supposant seulement f continue. [003851]

Exercice 1884 Weierstrass

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On pose $h(t) = \sup\{f(x) + tg(x) \text{ tq } x \in [a,b]\}$.
Montrer que h est continue.

[003852]

Exercice 1885 Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\sup_{[a,b]} f = \sup_{]a,b[} f$. [003853]

Exercice 1886 Weierstrass

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b],\ f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f > kg$.

[003854]

Exercice 1887 TVI à l'infini

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

[003855]

Exercice 1888 $f(x) = g(x)$

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient $f,g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Correction ▼ [003856]

Exercice 1889 f continue décroissante $\Rightarrow$ point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$. [003857]

Exercice 1890 Mines MP 2002

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle qu'existe a vérifiant $f\circ f(a)=a$. f a-t-elle des points fixes ? Généraliser.
Correction ▼ [003858]

Exercice 1891 Cordes de longueur $1/n$

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)=f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, montrer qu'il existe $x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.
3. Trouver une fonction f telle que : $\forall\, x\in\left[0,\frac{3}{5}\right]$, $f(x)\neq f(x+\frac{2}{5})$.
4. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que : $\forall\, b\in\,]0,a]$, $\exists\, x\in[0,1-b]$ tq $f(x)=f(x+b)$.

[003859]

Exercice 1892

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x\in[a,b]$, $\exists\, y\in[a,b]$ tq $f(x)=g(y)$.
Montrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=g(x)$.

[003860]

Exercice 1893 TVI + injective $\Rightarrow$ continue

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R} \text{ avec } a<b, \forall\, y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b),\ \exists\, x\in[a,b] \text{ tq } f(x)=y.$$

1. Montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.
2. Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.

Correction ▼ [003861]

Exercice 1894 f uc $\Rightarrow$ f(intervalle borné) = intervalle borné

Soit I un intervalle borné et $f:I\to\mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle borné. [003862]

Exercice 1895 f uc $\Rightarrow |f(x)|\leq a+b|x|$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leq a+b|x|$.
(prendre $\varepsilon=1$ et majorer $|f(x)-f(0)|$)

[003863]

Exercice 1896 Composition

Soient $f:D\to\mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $g\circ f$ est uniformément continue. [003864]

Exercice 1897 $\sin(t^2)$

Montrer que $t\mapsto\sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

[003865]

Exercice 1898 f uc et $f(n)\to+\infty$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n)\to+\infty$ lorsque $n\to\infty$. Montrer que $f(x)\to+\infty$ lorsque $x\to\infty$.

[003866]

Exercice 1899 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$. On pose $a=f(1)$.

1. Montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{Q}$, $f(x)=ax$.
2. On suppose f continue. Montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.
3. On suppose que f est bornée au voisinage de 0. Montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

[003867]

Exercice 1900 $f(x^2)=f(x)$

Trouver toutes les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x\in[0,1],\ f(x^2)=f(x)$.

[003868]

Exercice 1901 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)f^2(y)$

Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y)=f^2(x)f^2(y)$.

Correction ▼ [003869]

Exercice 1902 Polytechnique MP* 2000

Soit f continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et δ un réel positif. On note $\omega(\delta)=\sup\{|f(x)-f(y)| \text{ tq } |x-y|\leq\delta\}$. Montrer que $\omega(\delta)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0, puis que ω est continue.

Correction ▼ [003870]

Exercice 1903 Ensae MP* 2003

Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $f\circ g=g\circ f$. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=g(x)$.

Correction ▼ [003871]

Exercice 1904 Plus grande fonction lipschitzienne minorant f (Ens Lyon MP* 2003)

1. Existe-t-il toujours φ lipschitzienne telle que $\varphi\leq f$ où $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est une application continue donnée ?
2. Soit $k>0$. Trouver une CNS sur f pour qu'il existe $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ k-lipschitzienne minorant f.
3. On suppose cette CNS vérifiée pour $k_0>0$. Montrer que si $k\geq k_0$ alors il existe φ_k, k-lipschitzienne minorant f et maximale pour l'ordre usuel des fonctions.

Correction ▼ [003872]

Exercice 1905 Suite $(f(nx))$ ENS Cachan MP* 2004

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x>0$ la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Que peut-on dire de f ?

Correction ▼ [003873]

Exercice 1906 ***I

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un voisinage de $+\infty$. On suppose que la fonction $f(x+1)-f(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Etudier l'existence et la valeur eventuelle de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Correction ▼ [005382]

Exercice 1907 ***

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim_{x\to0}f(x)=0$ et $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$. Montrer que $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. (Indication. Considérer $g(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$.)

Correction ▼ [005383]

Exercice 1908 **I

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que $\text{Min}\{f,g\}$ et $\text{Max}\{f,g\}$ sont continues en x_0.

Correction ▼ [005384]

Exercice 1909 ***I Distance d'un point à une partie

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\text{Inf}\{|y-x|,\ y\in A\}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005385]

Exercice 1910 **T

Montrer en revenant à la définition que $f(x)=\frac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Correction ▼ [005386]

Exercice 1911 **IT

Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.
Correction ▼ [005387]

Exercice 1912 ****

Etudier l'existence d'une limite et la continuité éventuelle en chacun de ses points de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=0$ si x est irrationnel et $f(x)=\frac{1}{p+q}$ si x est rationnel égal à $\frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible.
Correction ▼ [005388]

Exercice 1913 **IT

Etudier en chaque point de $\mathbb{R}$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction f définie par $f(x)=xE(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ et 1 si $x=0$.
Correction ▼ [005389]

Exercice 1914 **

Trouver f bijective de $[0,1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.
Correction ▼ [005390]

Exercice 1915 ***

Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.
Correction ▼ [005391]

Exercice 1916 **I

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose $f(x)=d(x,A)=\text{Inf}\{|y-x|,\ y\in A\}$. Montrer que f est Lipschitzienne.
Correction ▼ [005392]

Exercice 1917 ***

Soit f croissante de $[a,b]$ dans lui-même. Montrer que f a un point fixe.
Correction ▼ [005395]

Exercice 1918 ****

Soit f croissante sur $[a,b]$ telle que $f([a,b])=[f(a),f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
Correction ▼ [005396]

Exercice 1919 ***IT

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
Correction ▼ [005398]

Exercice 1920 ***

Soit f périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Correction ▼ [005401]

65 123.02 Continuité : pratique

Exercice 1921

Soit $f:\mathbb{R}\setminus\{1/3\}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon>0$ déterminer δ tel que, $(x\neq 1/3$ et $|x|\leq\delta)\Rightarrow|f(x)+3|\leq\varepsilon$.
Que peut-on en conclure ?
Indication ▼ Correction ▼ [000670]

Exercice 1922

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ [000671]

Exercice 1923

Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ [000672]

Exercice 1924

1. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1-x$ sinon. En quels points de $\mathbb{R}$ f est elle continue ?

[000673]

Exercice 1925

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

1. Montrer que $x \mapsto \sin x$ est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. En déduire que $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

[000674]

Exercice 1926

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

[000675]

Exercice 1927

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in \ ]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

[000676]

Exercice 1928

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}\ ; \quad b)\ g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$c)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Indication ▼ Correction ▼ [000677]

Exercice 1929

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = E(x)\sin(x)$,
2. $g(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

[000678]

Exercice 1930

Etudier la continuité de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.
2. $g(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

[000679]

Exercice 1931

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Indication ▼ Correction ▼ [000680]

Exercice 1932

La fonction $\dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0,+\infty[$? sur $[1,+\infty[$? [000681]

Exercice 1933

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0,1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2,1[$ et $f(1) = 1$.

1. Tracer le graphe de f. Étudier sa continuité.
2. Démontrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

[000682]

Exercice 1934

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ et $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

[000683]

Exercice 1935

En étudiant la suite $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de l'unique réel solution de $\cos(x) = x$.
[000684]

Exercice 1936

Soit f définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, où E désigne la partie entière. Donner le domaine de définition de f, puis une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. f est-elle monotone ? f est-elle $k-$lipschitzienne sur $[a,1] (a > 0)$? Et sur $[0,1]$? Étudier la continuité de f sur $[0,1]$ en utilisant la définition. Déduisez en la continuité sur $\mathbb{R}$. [000685]

Exercice 1937

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et pour tout couple (x,y) de $[0,1] \times [0,1]$ on ait $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.

1. Soit x un élément de $[0,1]$. On pose $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
2. En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(0) = 0$?

[001212]

66 123.03 Limite de fonctions

Exercice 1938

Écrire les définitions des limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$. (On précisera sur quel type d'intervalle la fonction f doit être définie.) [000606]

Exercice 1939

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geq \frac{u}{2}$. [000607]

Exercice 1940

Montrer que si une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0. Montrer que la réciproque est fausse. [000608]

Exercice 1941

1. Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000609]

Exercice 1942

Soit f une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel α il existe X_α tel que $f(x) - |\alpha x| \geq |x|$ si $|x| \geq X_\alpha$. En déduire que pour tout α réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$. [000610]

Exercice 1943

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

[000611]

Exercice 1944

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [000612]

Exercice 1945

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles définies sur $\dot{I} := I - \{x_0\}$. Montrer que si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que de plus ces deux limites coïncident, alors f admet une limite en x_0 dont la valeur est la valeur commune des limites à droite et à gauche. [000613]

Exercice 1946

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degré respectif d et d'. Etudier suivant les valeurs de d et d', et éventuellement de certains des coefficients de P et Q,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)/Q(x).$$

[000614]

Exercice 1947

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (on pourra utiliser des ε, sommer des inégalités et utiliser la monotonie de f pour montrer qu'elle est bornée sur un segment).
Comment généraliser ce résultat ?

[000615]

Exercice 1948

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$d)\ \lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $\quad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad f)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

$g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Indication ▼ Correction ▼

[000616]

Exercice 1949

1. Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon.$$
2. En déduire :
$$\lim_{x\to 1} x^2+x-1 \text{ et } \lim_{x\to 1} (x^2+x-2)\cos x.$$

[000617]

Exercice 1950

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x,y) appartenant à $]-\infty,-a]$ ou à $[a,\infty[$, on a :
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x-y|.$$
2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

[000618]

Exercice 1951

1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x,y), établir la formule :
$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x,y) tel que $|x| \leq a$ et $|y| \leq a$,
$$|x^n - y^n| \leq na^{n-1}|x-y|.$$
3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |x^n - x_0^n| < \varepsilon.$$
Conclure.
4. Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par
$$f(x) := \frac{1-x^n}{1-x}$$
est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

[000619]

Exercice 1952

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n\pi} &< \varepsilon \\ \frac{1}{(2n+1)\pi} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que :

$$|\sin\frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.
4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

[000620]

Exercice 1953

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \qquad \text{d)} \quad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \qquad \text{f)} \quad \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$$

[000621]

Exercice 1954

On rappelle les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Calculer les limites suivantes :

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \qquad \text{d)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x\to 0} x\frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} \qquad \text{f)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$$

[000622]

Exercice 1955

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x\to(-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$

10. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Correction ▼ [000623]

Exercice 1956

Soient a,b des réels positifs. $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}E\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

[000624]

Exercice 1957

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1};\ \lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}\ (a>0, m,p\in\mathbb{N}^*);\ \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h}\ (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right);\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{4x+\pi};\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}.$$

[000625]

Exercice 1958

En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

$$a)\ \lim_{x\to -\frac{2}{3}} (3x+2)\sin\left(\frac{1}{3x+2}\right) = 0\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 2.$$

[000626]

Exercice 1959

Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\quad b)\ \lim_{x\to +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\quad c)\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right)\ ;$$

$$d)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}\ ;\quad e)\ \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}).$$

[000627]

Exercice 1960

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to \alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000628]

Exercice 1961

Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6} \quad \text{en } 1$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1} \quad \text{en } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} \quad \text{en } 0$$

[000629]

Exercice 1962

Étudier les asymptotes de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$. [000630]

Exercice 1963

Montrer que

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}} \text{ où } \alpha > 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

[000631]

Exercice 1964

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^6-1}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \quad n,m\in\mathbb{N}^*$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} \quad a,b>0$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ i) $\lim_{x\to \alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$.

[000632]

Exercice 1965

Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} \ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

[000633]

Exercice 1966

Calculer :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{(\sinh x)^2}\right).$$

Correction ▼ [000634]

Exercice 1967

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to +\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000635]

Exercice 1968

Trouver :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$$

Correction ▼ [000636]

Exercice 1969

Trouver pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000637]

Exercice 1970

Trouver pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000638]

Exercice 1971 $f(x+1)-f(x)\to a$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1)-f(x)\to a\in\overline{\mathbb{R}}$ lorsque $x\to+\infty$.

1. Montrer que $\frac{f(n)}{n} \to a$ lorsque $n\to\infty$.
2. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to a$ lorsque $x\to\infty$.

[003848]

Exercice 1972 **

Trouver $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Correction ▼ [005101]

67 123.04 Etude de fonctions

Exercice 1973

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}\ ;\quad g(x)=\sqrt{x^2-2x-5}\ ;\quad h(x)=\ln(4x+3)\,.$$

Correction ▼ [000686]

Exercice 1974

Montrer que l'équation $x^7-3x^2+4x-1=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Même question pour l'équation $x^{29}+14x^{17}-7x^5+2=0$. [000687]

Exercice 1975

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $d\in\mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X)=X^n-d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$. [000688]

Exercice 1976

En étudiant les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, trouver le plus grand élément de l'ensemble $f(\mathbb{N}^*)$.
En déduire que quels soient m et n appartenant à $\mathbb{N}^*$, l'un des nombres $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ est inférieur ou égal à $\sqrt[3]{3}$. [000689]

Exercice 1977

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.
Correction ▼ [000690]

Exercice 1978

1. Soit la fonction $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.
2. Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x)=\tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).

[000691]

Exercice 1979

Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x\to e^x,\quad x\to\ln x,\quad x\to\sqrt{x^2+1},\quad x\to\cos x.$$

[000692]

Exercice 1980 f croissante et $f\circ f=\mathrm{id}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f\circ f(x)=x$. Montrer que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$. [003874]

Exercice 1981 f croissante et $x\mapsto f(x)/x$ est décroissante

Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ croissante telle que $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue. [003875]

Exercice 1982 Étude de $x(2+\sin(1/x))$

On pose :

$$\begin{cases} f(x)=|x|\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x\neq 0,\\ f(0)=0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon>0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone. [003876]

Exercice 1983 Borne supérieure de fonctions croissantes

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bornée.
On note $\mathscr{E}=\{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissantes tq $g\leq f\}$, et pour $x\in\mathbb{R}$: $\tilde{f}(x)=\sup\{g(x)$ tq $g\in\mathscr{E}\}$.

1. Montrer que $\tilde{f} \in \mathscr{E}$.
2. On suppose f continue. Montrer que $\tilde{f}$ est aussi continue.
(S'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to x_0^-} \tilde{f}(x) < \lim_{x\to x_0^+} \tilde{f}(x)$, construire une fonction de $\mathscr{E}$ supérieure à $\tilde{f}$)

[003877]

Exercice 1984 L'ensemble des points de discontinuité est dénombrable

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Pour $x \in]a,b[$, on pose $\delta(x) = \left|\lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y)\right|$ (saut de f en x).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $E_n = \left\{x \in]a,b[\text{ tq } \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

[003878]

Exercice 1985 Fonction localement croissante

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est localement croissante si : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0$ tq $f_{|]x-\varepsilon,x+\varepsilon[}$ est croissante.
Montrer que : (f est localement croissante) $\Rightarrow$ (f est croissante).
(Étudier $E = \{x \geq 0 \text{ tq } f_{|[0,x]} \text{ est croissante}\}$ et $F = \{x \leq 0 \text{ tq } f_{|[x,0]} \text{ est croissante}\}$)

[003879]

Exercice 1986 Prolongement d'une fonction uniformément continue

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Pour $x \in]0,1]$ on pose : $\begin{cases} g(x) = \sup\big(f(]0,x])\big) \\ h(x) = \inf\big(f(]0,x])\big). \end{cases}$

1. Montrer que g et h sont monotones.
On note $\ell = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $m = \lim_{x\to 0^+} h(x)$.
2. En utilisant la continuité uniforme de f, montrer que $\ell = m$.
3. En déduire que $f(x) \to \ell$, si $x \to 0^+$.

[003880]

Exercice 1987 f continue, croissante sur $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathbb{Q}}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante. [003881]

Exercice 1988 Morphismes de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y). \end{cases}$

Montrer que f est croissante, puis $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. [003882]

Exercice 1989 Point fixe pour une application croissante

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
(Étudier $A = \{x \in [0,1] \text{ tq } f(x) \leq x\}$)
Correction ▼ [003883]

Exercice 1990 Fonction localement monotone à droite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \delta > 0,$ tq $\forall\, y \in [x, x+\delta],\ f(y) \geq f(x)$. Montrer que f est croissante.
Correction ▼ [003884]

Exercice 1991 Fonction affine

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R},\ |x-y| < |x-z| \Rightarrow |f(x)-f(y)| < |f(x)-f(z)|$. Montrer successivement que f est injective, monotone, continue, et enfin affine.
Correction ▼ [003885]

Exercice 1992 Calcul de limite

Montrer que : $\forall\, x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
En déduire $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

[003886]

Exercice 1993 Dérivées de $\exp(-1/x)$

On pose $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ ($n\geq 1$).
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0^+.
3. Montrer que le polynôme P_n possède $n-1$ racines dans $\mathbb{R}^{+*}$.

[003887]

Exercice 1994 $(1+1/t)^t$

1. Montrer que : $\forall\, t>1,\ \left(1+\frac{1}{t}\right)^t<e<\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$.
2. Montrer que : $\forall\, x,y>0,\ \left(1+\frac{x}{y}\right)^y<e^x<\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Correction ▼ [003888]

Exercice 1995 $\ln(1+ax)/\ln(1+bx)$

Soient $0<a<b$. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est croissante.
Correction ▼ [003889]

Exercice 1996 Inégalité

Soient $0<a<b$. Montrer que : $\forall\, x>0,\ ae^{-bx}-be^{-ax}>a-b$.

[003890]

Exercice 1997 Formules d'addition pour les fonctions hyperboliques

Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{th}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch}a$, $\operatorname{sh}a$, $\operatorname{th}a$, $\operatorname{ch}b$, $\operatorname{sh}b$, $\operatorname{th}b$. [003891]

Exercice 1998 Simplification de $a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ non tous deux nuls.

1. Peut-on trouver $A,\varphi\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x)+b\operatorname{sh}(x)=A\operatorname{ch}(x+\varphi)$?
2. Peut-on trouver $A,\varphi\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x)+b\operatorname{sh}(x)=A\operatorname{sh}(x+\varphi)$?

Correction ▼ [003892]

Exercice 1999 Somme de ch

Calculer $\sum_{k=0}^n\operatorname{ch}(kx)$.
Correction ▼ [003893]

Exercice 2000 Somme de sh

Soit $a\in\mathbb{R}$. Résoudre : $\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}(a+x)+\operatorname{sh}(a+2x)+\operatorname{sh}(a+3x)=0$.
Correction ▼ [003894]

Exercice 2001 Somme de th

Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Vérifier que $\operatorname{th}x=2\coth 2x-\coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
Correction ▼ [003895]

Exercice 2002 Somme de $1/\operatorname{sh}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Vérifier que $\frac{1}{\operatorname{sh}x}=\coth\frac{x}{2}-\coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{\operatorname{sh}(2^n x)}$.
Correction ▼ [003896]

Exercice 2003 ch(nx) et sh(nx)

Montrer que les fonctions : $x \mapsto \text{ch}(n\,\text{Argch}(x))$ et $x \mapsto \frac{\text{sh}(n\,\text{Argch}(x))}{\sqrt{x^2-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont polynomiales. [003897]

Exercice 2004 $\text{ch}\,x + \text{ch}\,y = a$, $\text{sh}\,x + \text{sh}\,y = b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de solutions pour le système : $\begin{cases} \text{ch}\,x + \text{ch}\,y & = a \\ \text{sh}\,x + \text{sh}\,y & = b. \end{cases}$

Correction ▼ [003898]

Exercice 2005 Relation entre les fonctions hyperboliques et circulaires

Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Montrer que $\text{th}\,\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\quad \text{th}\,x = \sin y$, $\quad \text{ch}\,x = \frac{1}{\cos y}$. [003899]

Exercice 2006 $\text{Argth}((1+3\,\text{th}\,x)/(3+\text{th}\,x))$

Simplifier $\text{Argth}\left(\frac{1+3\,\text{th}\,x}{3+\text{th}\,x}\right)$.

Correction ▼ [003900]

Exercice 2007 Équations diverses

Résoudre $\text{Argch}\,x = \text{Argsh}(x - \frac{1}{2})$.

Correction ▼ [003901]

Exercice 2008 Calcul de primitives

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$.

Correction ▼ [003902]

Exercice 2009 Racine d'une somme d'exponentielles

Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $a > a_p$ il existe un unique réel $x_a > 0$ solution de l'équation : $a_1^x + \cdots + a_p^x = a^x$.
2. Pour $a < b$, comparer x_a et x_b.
3. Chercher $\lim_{a \to +\infty} x_a$ puis $\lim_{a \to +\infty} x_a \ln a$

Correction ▼ [003903]

Exercice 2010 Centrale MP 2000

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\forall\, x, y > 0,\ f(xf(y)) = yf(x)$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$

1. Montrer que f est involutive.
2. Montrer que f conserve le produit. Que peut-on dire de la monotonie de f, de sa continuité ?
3. Trouver f.

Correction ▼ [003904]

Exercice 2011 Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\theta + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\theta = 2$.
2. $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$.
3. $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$.
4. $\cos\theta - \cos 2\theta = \sin 3\theta$.
5. $\cos\theta + \cos 7\theta = \cos 4\theta$.
6. $\cos 2\theta + \cos 12\theta = \sqrt{3}\cos 5\theta$.

7. $\sin 7\theta - \sin\theta = \sin 3\theta$.
8. $\cos^3\theta \sin 3\theta + \cos 3\theta \sin^3\theta = \frac{3}{4}$.
9. $\sin\theta \sin 3\theta = \sin 5\theta \sin 7\theta$.
10. $3\tan\theta = 2\cos\theta$.
11. $\tan 4\theta = 4\tan\theta$.
12. $\mathrm{cotan}\theta - \tan\theta = \cos\theta + \sin\theta$.
13. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan(x+y) = 4/3. \end{cases}$

Correction ▼ [003905]

Exercice 2012 Inéquations

1. Résoudre : $\cos\theta + \cos(\theta + \pi/3) > 0$.
2. Résoudre : $2\cos\theta + \sin\theta < 2$.

Correction ▼ [003906]

Exercice 2013 Linéarisation

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$.
$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$.
$4\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta$.
$4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$.

$8\cos^4\theta = 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$.
$8\sin^4\theta = 3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$.
$32\cos^6\theta = 10 + 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta + \cos 6\theta$.
$32\sin^6\theta = 10 - 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta - \cos 6\theta$.

$32\cos^4\theta \sin^2\theta = 2 + \cos 2\theta - 2\cos 4\theta - \cos 6\theta$.
$32\sin^4\theta \cos^2\theta = 2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta$.
$16\cos\theta \sin^4\theta = \cos 5\theta - 3\cos 3\theta + 2\cos\theta$.
$16\sin\theta \cos^4\theta = \sin 5\theta + 3\sin 3\theta + 2\sin\theta$.

$4\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin 3\theta$. [003907]

Exercice 2014 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1. Démontrer que : $1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
2. Simplifier $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

Correction ▼ [003908]

Exercice 2015 $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2\theta, \sin^2(\theta + \alpha)$ en progression arithmétique

Montrer qu'il existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les nombres $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2\theta, \sin^2(\theta + \alpha)$ soient en progression arithmétique. [003909]

Exercice 2016 Calcul de somme

Calculer $\tan p - \tan q$. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Correction ▼ [003910]

Exercice 2017 Calcul de somme

Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$.
Correction ▼ [003911]

Exercice 2018 Calcul de somme

Calculer $\cotan x - 2\cotan 2x$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{\alpha}{2^k}$.

Correction ▼ [003912]

Exercice 2019 Heptagone régulier

Soit $ABCDEFG$ un heptagone (7 côtés) plan régulier. On pose $\alpha = AB$, $\beta = AC$, $\gamma = AD$ (distances).
Montrer que $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Correction ▼ [003913]

Exercice 2020 **I

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire, f' est impaire et si f est impaire, f' est paire.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième de f, montrer que si f est paire, $f^{(n)}$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.
3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de f ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition « f est paire (ou impaire) » par la condition « f est T-périodique ».

Correction ▼ [005097]

Exercice 2021 **

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005098]

Exercice 2022 **I

1. Etudier brièvement la fontion $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Correction ▼ [005099]

Exercice 2023

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $(**)$ $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$,
2. $(*)$ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
3. $(**)$ $2\,\mathrm{Argsh}\,x = \mathrm{Argch}\,3 - \mathrm{Argth}\,\frac{7}{9}$,
4. $(**)$ $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$,
5. $(**)$ $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Correction ▼ [005100]

Exercice 2024

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1. (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
2. (**) $f_2(x) = \ln(\mathrm{ch}\,x)$.
3. (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
4. (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
5. (***) $f_5(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0,+\infty[$).
6. (**) $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.

Correction ▼ [005102]

Exercice 2025 **

Soit f de $[0,1]$ dans lui-même telle que $\forall (x,y) \in ([0,1])^2$, $|f(y) - f(x)| \geq |x-y|$. Montrer que $f = Id$ ou $f = 1 - Id$.

Correction ▼ [005404]

Exercice 2026

Etude complète des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(\text{Arctan}\, x - \frac{x}{1+x^2})$.
2. $f_2(x) = |\tan x| + \cos x$.
3. $f_3(x) = x - \ln\left|\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\right|$.
4. $4_(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
6. $f_6(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
7. $f_7(x) = e^{/\ln x}$.
8. $f_8(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
9. $f_9(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.
10. $f_{10}(x) = E(x) + (x - E(x))^2$.
11. $f_{11}(x) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1}{2} - x} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1}{2} + x}$.
12. $f_{12}(x) = \frac{\text{Arcsin}\, x}{x}$.
13. $f_{13}(x) = e^{1/x}\sqrt{x+4}$.
14. $f_{14}(x) = \text{Arccos}(\frac{1}{\text{ch}\, x})$.
15. $f_{15}(x) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) - \ln(\frac{1+x}{1-x})$ où $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.
16. $f_{16}(x) = \ln|\text{sh}\, x - 1|$.
17. $f_{17}(x) = x^{(x^x)}$.
18. $f_{18}(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}$.
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2-1}$.
20. $f_{20}(x) = \text{Arcsin}(2x-1) + 2\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f_{21}(x) = \ln(\text{ch}\, x)$.
22. $f_{22}(x) = 3^{2x-1} - 5.3^{x-1} - x\ln 3$.
23. $f_{23}(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$.

Correction ▼ [005443]

68 123.05 Fonction continue par morceaux

Exercice 2027

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in CM([a,b],\mathbb{R}), \forall x \in [a,b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que l'on peut choisir $\phi \in E([a,b],\mathbb{R})$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in E([a,b],\mathbb{R}), \forall x \in [a,b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

NB : CM pour continue par morceaux et E pour escalier. [000693]

Exercice 2028

Donner un exemple de fonction qu'on ne puisse approcher à ε près par des fonctions en escaliers. [000694]

Exercice 2029

On dit qu'un ensemble A de fonctions définies sur un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un ensemble B si :

$$\forall f \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A, \forall x \in I, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Le cours dit par exemple que l'ensemble des fonctions en escaliers est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux si $I = [a,b]$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$. [000695]

Exercice 2030

On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $I=[a,b]$ converge uniformément vers f si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\mathbb{N}\in\mathbb{N},\forall n\geq\mathbb{N},\forall x\in I,|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$, et que toutes les f_n sont continues. Montrer que $\forall x\in[a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite. Montrer que f est bornée et continue.
On ne suppose plus que $(f_n)_n$ converge uniformément mais seulement point par point (ie, $\forall x\in[a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$) ; de plus toutes les f_n sont lipschitziennes de rapport k ; montrer que f est lipschitzienne de rapport k et qu'il y a converge uniforme. [000696]

Exercice 2031

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si :

$$\exists\mu\in\mathbb{R}^+,\forall d=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}\text{ subdivision de }[a,b],\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sigma(d)\leq\mu.$$

On appelle alors $V(a,b)=\sup_{d\text{ subdivision}}\sigma(d)$ et on définit une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$: $x\to V(a,x)$.
Montrer que toute fonction monotone est à variation bornée puis que $x\to V(a,x)$ est croissante ainsi que $x\to V(a,x)-f(x)$. En déduire que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes (d'où la nature de ses discontinuités). Une fonction continue, une fonction lipschitzienne sont-elles à variation bornée ? [000697]

69 123.06 Fonctions équivalentes, fonctions négligeables

Exercice 2032

À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f\underset{a}{\sim}e^g$? [001213]

Exercice 2033

Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f\underset{a}{\sim}\ln g$. [001214]

Exercice 2034

Montrer que si f tend vers 0 en a alors $\ln(1+f)\underset{a}{\sim}f$ et $e^f-1\underset{a}{\sim}f$. [001215]

Exercice 2035

Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt{x^2+x+1}$.
Correction ▼ [001216]

Exercice 2036

Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Correction ▼ [001217]

Exercice 2037

Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^x-1$. [001218]

Exercice 2038

$$\text{Limite en }+\infty\text{ de }\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)}$$

$$\text{Équivalent en 0 de } \frac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$$

$$\text{Équivalent en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(\tan(2x)+\tan(x+\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2$$

$$\text{Limite en 0 de } x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$$

$$\text{Limite en } \frac{1}{2} \text{ de } \left(2x^2-3x+1\right)\tan(\pi x)$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$$

Correction ▼ [001219]

Exercice 2039

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, f_n(t)=o(f(t))$ si $t\to\infty$. [001220]

70 123.99 Autre

Exercice 2040 ***I

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n\geq 3\Rightarrow \sqrt{n}<\sqrt[n]{n!})$.
(commencer par vérifier que pour $k=2,3,...,n$, on a : $(n-k+1)k>n$).

Correction ▼ [005161]

Exercice 2041 **I

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(nx)|\leq n|\sin x|$.

Correction ▼ [005163]

Exercice 2042 **I

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005393]

Exercice 2043 **I

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell\in[0,1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005394]

Exercice 2044 ***

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout réel positif x, on ait $f(x^2)=f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$. Trouver un exemple où f n'est pas constante.

Correction ▼ [005397]

Exercice 2045 ***I

Trouver tous les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$.

Correction ▼ [005399]

Exercice 2046 ***

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$. Montrer que $\bigcup_{k\geq 1}]ka,kb[$ contient un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ puis déterminer la plus petite valeur possible de A.

Correction ▼ [005400]

Exercice 2047 *** Théorème d'homéomorphie

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone et que dans ce cas $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé).

Correction ▼ [005402]

Exercice 2048 ***

Trouver un exemple de fonction pèriodique dont le groupe des pèriodes est dense dans $\mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005403]

Exercice 2049 ***

Trouver les fonctions bijectives de $[0,1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x\in[0,1],\ f(2x-f(x))=x$.

Correction ▼ [005405]

Exercice 2050 ***I

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a=\frac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x+a)=f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0,1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x+a)=f(x)$ n'ait pas de solution.
3. Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
   (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

Correction ▼ [005406]

71 124.01 Calculs

Exercice 2051

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=x^2\cos\frac{1}{x},\ \text{ si } x\neq 0 \quad ; \quad f_1(0)=0;$$

$$f_2(x)=\sin x\cdot\sin\frac{1}{x},\ \text{ si } x\neq 0 \quad ; \quad f_2(0)=0;$$

$$f_3(x)=\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1},\ \text{ si } x\neq 1 \quad ; \quad f_3(1)=1.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000698]

Exercice 2052

Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}\quad \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x)=ax^2+bx+1\quad \text{si } x>1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication ▼ Correction ▼ [000699]

Exercice 2053

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Indication ▼ Correction ▼ [000700]

Exercice 2054

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f,g,h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000701]

Exercice 2055

Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} \qquad g(x) = \ln(1+x).$$

[000702]

Exercice 2056 Formule de Leibnitz

Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1}\ln x.$$

[000703]

Exercice 2057

Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h :\mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

[000704]

Exercice 2058

Calculer les dérivées des fonctions :

1. $x \mapsto \sqrt{1+x^2\sin^2 x}$, $\qquad x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$.
2. $x \mapsto \log(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$, $\qquad x \mapsto (x(x-2))^{1/3}$.

[000705]

Exercice 2059

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et de $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
2. On suppose $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \log(|f(x)|)$.

[000706]

Exercice 2060

Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

[000707]

Exercice 2061

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$

Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?). [000708]

Exercice 2062

Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = 0$.

Correction ▼ [000709]

Exercice 2063

Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$. [000710]

Exercice 2064

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0.$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées en 0. [000711]

Exercice 2065

Calculer la dérivée de $x \to \ln\cos(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1})$. [000712]

Exercice 2066

La fonction $x \to \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? [000713]

Exercice 2067

En quels points la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

est-elle dérivable ? [000714]

Exercice 2068

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$. [001221]

Exercice 2069

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. [001222]

Exercice 2070

Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

[001223]

Exercice 2071

Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[, g(x) \geq 0$. [001224]

Exercice 2072

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ et $f''(x) \geq 0$. Étudier $\lim_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

[001225]

Exercice 2073

Soit f une application continue de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $]a,b]$. Montrer que si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, f est dérivable en a.

[001226]

Exercice 2074

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction bornée deux fois dérivable et telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $\alpha f(x) \leq f''(x)$.

1. (a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite ?
   (b) Montrer que f est décroissante et que $\lim_{+\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Soit $g : x \mapsto \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Montrer que g est croissante et a pour limite 0 en ∞.
   (b) En posant $f(x) = h(x)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) \leq f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.

[001227]

Exercice 2075

Montrer que

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, && |\sin x| \leq |x|, \\ &\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], && 1 - \cos x \leq x \sin x, \\ &\forall x \in [-1,1], && |\arcsin x| \leq \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right|. \end{aligned}$$

[002689]

Exercice 2076 **

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée n-ème de la fonction proposée :

$$1)\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)\ 2)\ x \mapsto \cos^3 x \sin(2x)\ 3)\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\ 4)\ x \mapsto (x^3+2x-7)e^x.$$

Correction ▼ [005413]

72 124.02 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 2077

Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à $[-1,1]$.

Indication ▼ Correction ▼ [000715]

Exercice 2078

Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles. [000716]

Exercice 2079

Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Indication ▼ Correction ▼ [000717]

Exercice 2080

Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [000718]

Exercice 2081

Étant donné y un réel positif et n un entier naturel pair, montrer que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si et seulement si $x = 0$. Cas n impair ? [000719]

Exercice 2082

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a,+\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. [000720]

Exercice 2083

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a,b]$ préciser le nombre "c" de $]a,b[$. Donner une interprétation géométrique.

Correction ▼ [000721]

Exercice 2084

Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$$

(où a,b,c,α sont réels, et c et α sont non nuls) sur l'intervalle $[0,X]$.

1. Calculer "θ" en fonction de X.
2. En déduire que
$$x \mapsto \frac{1}{\alpha x} \ln \frac{e^{2x}-1}{\alpha x}$$
est bornée sur $\mathbb{R}$.

[000722]

Exercice 2085

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,a+2h]$. Par introduction de la fonction

$$g(t) = f(a+t+h) - f(a+t)$$

montrer qu'il existe α dans $]0,2[$ tel que

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a+\alpha h).$$

[000723]

Exercice 2086

Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0,1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Indication ▼ Correction ▼ [000724]

Exercice 2087

Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n,n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Indication ▼ Correction ▼ [000725]

Exercice 2088

Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geq (n+1)^{\alpha}-n^{\alpha} \geq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^{\alpha}}.$$

[000726]

Exercice 2089

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|e^x-1-x|\leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000727]

Exercice 2090

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=f(a).$$

Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$. [002688]

Exercice 2091 *** Formule de TAYLOR-LAGRANGE

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction élément de $C^n([a,b],\mathbb{R})\cap D^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à la fonction $g(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Correction ▼ [005408]

Exercice 2092 *** Formule des trapèzes

Soit $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})\cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b))-f^{(3)}(c).$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à g' puis g où $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$? Interprétez géométriquement.

Correction ▼ [005409]

Exercice 2093 ***I Polynômes de LEGENDRE

Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n=((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. En étudiant le polynôme $A_n=(X^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

Correction ▼ [005412]

Exercice 2094 **

Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Correction ▼ [005415]

Exercice 2095 **

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a non nul. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Correction ▼ [005416]

Exercice 2096 ** Généralisation du théorème des accroissements finis

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$.

1. Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.

Correction ▼ [005421]

73 124.03 Applications

Exercice 2097

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction $x \mapsto f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$.

1. On suppose $g_n(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1-\frac{1}{n}[$. Montrer que $f(1) > f(0)$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n s'annule en au moins un point de l'intervalle $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

[001228]

Exercice 2098

Pour tout n entier supérieur où égal à 2, on considère le polynôme de degré n à coefficients réels :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera λ_n. (On pourra étudier l'application $X \mapsto P_n(X)$.)
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.
3. Montrer que ℓ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

Correction ▼ [001229]

Exercice 2099

Soit f une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement croissante sur I.
2. f' est positive ou nulle sur I et $\{x \in I; f'(x) > 0\}$ est dense dans I.

[001230]

Exercice 2100

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0. Montrer qu'il existe une application ε de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donner une interprtation géométrique de ce résultat.
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ et $v_n = (1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. Construire un exemple de suite $(w_n)_{n\geq 1}$ avec, $u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$ et telle que $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$. (On pourra s'inpirer de l'exemple de $(v_n)_{n\geq 1}$ ci-dessus.)

[001231]

Exercice 2101

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log(n)$.
3. Posons $u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)$ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroisante et convergente.

[001232]

Exercice 2102

1. Soit f une application continue d'un intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $c\in]a,b[$. Montrer qu'il existe une (unique) application continue ε de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(c)=0$ et, pour tout $x\in]a,b[$ distinct de c, on ait :
$$f(x) = f(c)+(x-c)f'(c)+(x-c)\varepsilon(x)$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général :
$$S_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$$
est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera S.
3. Pourquoi peut on dire, *a priori*, que $\frac{1}{2}\leq S\leq 1$?
4. Soit $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0)=0$. Montrer que la suite $(\sigma_n(f))_{n\geq 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)$$
converge vers $f'(0)S$ (utiliser 1.).
5. Montrer que $\sigma_n(f)=\log\,(2)$ lorsque f est l'application $x\mapsto\log\,(1+x)$ et en déduire la valeur de S.
6. Calculer la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ de terme général :
$$\sigma_n = \sin\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n+1}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}.$$
7. Plus généralement, quelle est la valeur pour $p\in\mathbb{N}^*$ donné, de la limite S_p de la suite $(\sigma_n(p))_{n\geq 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(p) = \sum_{k=0}^{pn}\frac{1}{n+k}?$$

Correction ▼ [001233]

Exercice 2103

Soit f une fonction dérivable et a un réel. Soit $h>0$ un nombre réel strictement positif fixé.

1. Montrer qu'il existe $\theta\in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h).$$
2. Pour tout $h\neq 0$ on note : $\varphi(h)=\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Montrer que si $f''(a)$ existe, alors $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=f''(a)$.

[001234]

Exercice 2104

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et 1 et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $p=f(1)-f(0)$.

1. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0)=f'(0)$ et $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$ sinon. Montrer que si u est un réel compris entre $f'(0)$ et p alors il existe $a\in[0,1]$ tel que $u=f'(a)$.
2. Soit $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $h(1)=f'(1)$ et $h(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ sinon. Montrer que si v est un réel compris entre $f'(1)$ et p alors il existe $b\in[0,1]$ tel que $v=f'(b)$.
3. Soit w un réel compris entre $f'(0)$ et $f'(1)$. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $w=f'(c)$.

[001235]

Exercice 2105

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré 3 ayant trois racines distinctes. Montrer que les racines de P' sont dans le triangle ayant pour sommet les racines de P [001236]

---

74 124.04 Fonctions convexes

Exercice 2106 Déterminant

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et $x<y<z$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0$. [003981]

Exercice 2107 Somme de fractions

Soient $x_1,x_2,\dots,x_n>0$. Montrer que $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\dots+\frac{x_n}{x_1}\geq n$.

Correction ▼ [003982]

Exercice 2108 Monotonie

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :
– soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
– soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
– soit il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty,a]$, puis croissante sur $[a,+\infty[$.

[003983]

Exercice 2109 Fonction convexe bornée

1. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

[003984]

Exercice 2110 f convexe majorée par g affine

Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ convexe et $g:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ affine. On suppose : $\begin{cases}\forall\, x>0,\ f(x)\leq g(x),\\ f(1)=g(1).\end{cases}$

Montrer que $f=g$. [003985]

Exercice 2111 Position par rapport à une asymptote

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe telle que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=mx+p$ en $+\infty$.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

[003986]

Exercice 2112 Fonction convexe dérivable

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

[003987]

Exercice 2113 Étude à l'infini

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f\geq 0$, $f'\geq 0$, $f''\geq 0$.

1. Étudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\frac{f(x)}{x}$.
2. Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.

Correction ▼ [003988]

Exercice 2114 Zéro de f''

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x)\to f(0)$ lorsque $x\to+\infty$. Montrer qu'il existe $c\in]0,+\infty[$ tel que $f''(c)=0$.
[003989]

Exercice 2115 $f((x+y)/2)\leq(f(x)+f(y))/2$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x,y\in[a,b]$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

[003990]

Exercice 2116 Suites adjacentes

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ convexe, bijective, croissante. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$a \leq u_0 \leq v_0 \leq b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

[003991]

Exercice 2117 Polygone inscrit dans un cercle de périmètre maximum

Soit $n \geq 3$ et $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.
Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier. [003992]

Exercice 2118 Fonctions logarithmiquement convexe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : ($\ln f$ est convexe) $\iff$ ($\forall\ \alpha > 0$, f^α est convexe). [003993]

Exercice 2119 Limite de $f(x) - xf'(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $p = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - xf'(x))$ existe.
2. On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.
3. Montrer alors que $f(x) - mx - p \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction ▼ [003994]

Exercice 2120 Fonction positive concave

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ concave.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall\ x,y \geq 0,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Correction ▼ [003995]

Exercice 2121 Constante d'Euler

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1. Montrer que : $\forall\ x \geq 1,\ f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
2. On pose : $\begin{cases} u_n = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n) \\ v_n = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n+1). \end{cases}$ Montrer que ces suites convergent.
3. On prend $f(x) = \ln x$. Soit $\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

[003996]

Exercice 2122 Tangentes passant par un point

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier le nombre maximal de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par A.

[003997]

Exercice 2123 Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$, $\exists!\ c \in]a,b[$ tq $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \longmapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est monotone sur $]-\infty,a[$ et sur $]a,+\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

[003998]

Exercice 2124 Pseudo-dérivée seconde

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ D^2f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, calculer $D^2f(x)$.

2. Soit f quelconque et $a<b<c$ tels que $f(a)=f(b)=f(c)$.
   Montrer qu'il existe $x \in]a,c[$ tq $D^2f(x) \leq 0$.
   On suppose à présent que : $\forall x \in \mathbb{R}, D^2f(x) \geq 0$.
3. Soient $a<b<c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a,b,c. Montrer que $P'' \geq 0$.
4. Calculer P'' en fonction de a,b,c et $f(a),f(b),f(c)$. En déduire que f est convexe.

Correction ▼ [003999]

Exercice 2125 Fonction convexe non dérivable sur un sous ensemble dénombrable

Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{3^n}$.
Montrer que f est convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n.

Correction ▼ [004000]

Exercice 2126 Convergence simple + convexité => convergence uniforme sur un compact

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction f supposée continue.
Soit $\varepsilon>0$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall x,y \in [a,b],\ |x-y| \leq \frac{b-a}{p} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
   On choisit un tel p, et on fixe une subdivision (a_k) de $[a,b]$ telle que $a_k = a+k\frac{b-a}{p}$.
2. Soit $t \in [0,1]$. Encadrer $f_n\big(ta_k+(1-t)a_{k+1}\big)$ par deux fonctions affines de t en utilisant la convexité de f_n.
3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

[004001]

Exercice 2127 DL d'une fonction convexe

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(x)=a+bx+\frac{cx^2}{2}+o_{x\to 0}(x^2)$.
Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0)=c$
(encadrer $f'(x)$ par les taux d'accroissements de f entre $x-\varepsilon x$, x et $x+\varepsilon x$). [004002]

Exercice 2128 DL d'une fonction convexe

Soit f continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x)=\int_0^x f$, et l'on suppose que $F(x)=x^2+o(x)$. Montrer que $f(x)=2x+o(\sqrt{x})$.

Correction ▼ [004003]

75 124.99 Autre

Exercice 2129

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(1-k)^3x^2+(1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.

Correction ▼ [000728]

Exercice 2130

Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\ (1-\cos x)\mathrm{cotan}\, x.$$

[000729]

Exercice 2131

Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^4)-1}{x^4e^x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};$$

$$\lim_{x\to 0}\ x^2\left(\exp\frac{1}{x}-\exp\frac{1}{x+1}\right).$$

[000730]

Exercice 2132

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$. [000731]

Exercice 2133

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$. [000732]

Exercice 2134

Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Correction ▼ [000733]

Exercice 2135

Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums locaux) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda e^x + x^2.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000734]

Exercice 2136

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

[000735]

Exercice 2137

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\omega) = \omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si $|f'(\omega)| < 1, \exists \varepsilon > 0, \forall x_0 \in]\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon[, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w, et que si $|f'(\omega)| > 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si et seulement si elle est stationnaire (i.e. $x_n = \omega$ à partir d'un certain rang). Que dire dans le cas $|f'(\omega)| = 1$? [000736]

Exercice 2138

Soit $f \in C^1([0;1], \mathbb{R})$,telle que $f(0) = 0$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}).$$

[000737]

Exercice 2139

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. *Application.* Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000738]

Exercice 2140

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :
   $$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
   $$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Correction ▼ [000739]

Exercice 2141

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
   $$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
   où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Correction ▼ [000740]

Exercice 2142 Limite double

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, h,k \in]0,\delta[,\ \left|\frac{f(h)-f(-k)}{h+k} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

[003932]

Exercice 2143 Propriétés de parité et de périodicité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

[003933]

Exercice 2144 Propriété de parité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que la fonction $t \mapsto 2f(t) - tf'(t)$ est paire. f est-elle paire ?

Correction ▼ [003934]

Exercice 2145 Injectivité locale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\, x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.

2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

[003935]

Exercice 2146 Dérivabilité de $|f|$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. [003936]

Exercice 2147 $f'(x) \to \ell$ et f est bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\ell = 0$. [003937]

Exercice 2148 $\lim_\infty f'(x) = \lim_\infty f(x)/x$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$.
Chercher un contrexemple pour la réciproque.

[003938]

Exercice 2149 Centrale MP 2006

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \to \ell \in \mathbb{R}^*$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) \sim \frac{\alpha}{x^\beta}$ en $+\infty$.

Correction ▼ [003939]

Exercice 2150 Propriété des valeurs intermédiaires pour f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.
2. Dans le cas général, montrer que $f'([a,b])$ est un intervalle.

[003940]

Exercice 2151 Propriété des valeurs intermédiaires pour f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On note $E = \{(x,y) \in [a,b]^2 \text{ tq } x < y\}$ et pour $(x,y) \in E$: $\varphi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Montrer que $\varphi(E)$ est un intervalle.
2. En déduire que $f'([a,b])$ est un intervalle.

[003941]

Exercice 2152 Règle de l'Hospital

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\, x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
(Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi)
2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ lorsque $x \to a^+$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$ lorsque $x \to a^+$ (règle de l'Hospital).
3. Application : déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

[003942]

Exercice 2153 Recherche de limite

Trouver $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Correction ▼ [003943]

Exercice 2154 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0 \Rightarrow$ il existe un autre zéro

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leq 0$. [003944]

Exercice 2155 $f'(a) = f'(b)$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

[003945]

Exercice 2156 Tangentes passant par un point donné

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $(d,0)$.

[003946]

Exercice 2157 Rolle itéré

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. Si f s'annule en $n+1$ points distincts dans $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

[003947]

Exercice 2158 Rolle à l'infini

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $x \in]a,+\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

[003948]

Exercice 2159 Formule des accroissements finis avec $\theta = 1/2$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Correction ▼

[003949]

Exercice 2160 Fonction $\mathscr{C}^\infty$ bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ bornée.

1. Montrer que si une dérivée, $f^{(k)}$, $k \geq 2$, admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes, $f^{(p)}$, $1 \leq p < k$, tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. En déduire que pour tout $k \geq 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

[003950]

Exercice 2161 Distance à la corde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
(Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)
2. Cas général : Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

[003951]

Exercice 2162 Écart à un polynôme interpolateur

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i. On pose $Q(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (x - a_i)$.
Montrer que : $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $f(b) = P(b) + Q(b) f^{(n)}(c)$
(considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$).

[003952]

Exercice 2163 Polynômes de Legendre

On pose $f(t) = (t^2-1)^n$.

1. Montrer que : $\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

2. Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

Correction ▼ [003953]

Exercice 2164 Racines de x^n+ax+b

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, et $a,b\in\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n+ax+b=0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

[003954]

Exercice 2165 Racines de $P(x)-e^x$

Soit P un polynôme. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de réels x tels que $P(x)=e^x$.

[003955]

Exercice 2166 Limite de $1/(n+1)+\cdots+1/2n$

On veut calculer $\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

1. Montrer l'existence de ℓ.
2. Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=0$. Montrer que $f\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)\to\ell f'(0)$ lorsque $n\to\infty$.
3. On prend $f(x)=\ln(1+x)$. Déterminer ℓ.

[003956]

Exercice 2167 Calcul de limite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=0$. Chercher $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Correction ▼ [003957]

Exercice 2168 Somme $1/k\ln k$

Pour $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, appliquer le théorème des accroissements finis à $x\mapsto\ln(\ln x)$ sur $[k,k+1]$. En déduire que la série de terme général $\frac{1}{k\ln k}$ est divergente. [003958]

Exercice 2169 $f'(x)f'(f(x))=1$

Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que : $\begin{cases}\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x))=1\\ f(0)=0 \text{ et } f'(0)>0.\end{cases}$

Correction ▼ [003959]

Exercice 2170 $f\circ f=f$

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ dérivable telle que $f\circ f=f$. Montrer que f est constante ou bien $f=\mathrm{id}_{[0,1]}$. [003960]

Exercice 2171 Dérivabilité uniforme

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0 \text{ tq } \forall\, x,y\in[a,b],\ \text{si } 0<|x-y|<\delta,\ \text{alors } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|\leq\varepsilon.$$

[003961]

Exercice 2172 Formes indéterminées

Soient $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que : $\begin{cases}\forall\, x\in\mathbb{R},\ u(x)\neq v(x)\\ \lim_{x\to0}u(x)=\lim_{x\to0}v(x)=a>0.\end{cases}$

1. Chercher $\lim_{x\to0}\frac{u^v-v^v}{u-v}$.
2. Chercher $\lim_{x\to0}\frac{u^v-v^u}{u^u-v^v}$.

Correction ▼ [003962]

Exercice 2173 $(1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$

1. Montrer que : $\forall\, x \geq -1,\ \ln(1+x) \leq x$.
2. Soit $k \in]-1,1[$. On pose $u_n = (1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (traiter séparément les cas $k \geq 0$, $k < 0$).

Correction ▼ [003963]

Exercice 2174 Dérivée n-ème de $\cos^3 x$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

[003964]

Exercice 2175 Dérivée n-ème de $\arctan x$ et e^{x^3}

Établir une formule de récurrence pour les dérivées successives des fonctions :
$f : x \mapsto \arctan x$ et $g : x \mapsto e^{x^3}$.

Correction ▼ [003965]

Exercice 2176 Dérivée n-ème de $(x^3+2x^2-5)e^{-x}$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto (x^3+2x^2-5)e^{-x}$.

Correction ▼ [003966]

Exercice 2177 Ensi Chimie P 94

Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [003967]

Exercice 2178 Dérivée n-ème de $x^n(1-x)^n$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Correction ▼ [003968]

Exercice 2179 Dérivées n-èmes de $t^{n-1}\ln(t)$ et $t^{n-1}e^{1/t}$

Calculer $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\ln t\right)$, et $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\exp(1/t)\right)$ (essayer $n = 1,2,3$).

Correction ▼ [003969]

Exercice 2180 Dérivée n-ème de $f(x^2)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On pose $g(x) = f(x^2)$.

1. Montrer qu'il existe des entiers $a_{n,k}$ tels que : $\forall\, x,\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=[(n+1)/2]}^{n} a_{n,k} f^{(k)}(x^2)(2x)^{2k-n}$.
2. Calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et k.

Correction ▼ [003970]

Exercice 2181 Dérivée n-ème de $f(1/x)$

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I ne contenant pas 0, et $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Établir : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

[003971]

Exercice 2182 Dérivées de e^{-1/x^2}

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$.

[003972]

Exercice 2183 $(f(2t)-f(t))/t$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\frac{f(2t)-f(t)}{t} \to a$ (si $t \to 0$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

[003973]

Exercice 2184 $\sin x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geq 0$

On pose $f(x) = \sin x - \frac{3x}{\pi} + \frac{4x^3}{\pi^3}$. Montrer que : $\forall\, x \geq 0,\ f(x) \geq 0$ (chercher le signe de $f^{(4)}$).

[003974]

Exercice 2185 Courbes homothétiques

Soit $a > 0,\ a \neq 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation : $y = \ln x$, et $\mathscr{C}'$ celle d'équation : $y = a\ln x$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont une et une seule tangente commune.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont homothétiques.

Correction ▼ [003975]

Exercice 2186 Matexo

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x)f'(x) \geq 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.

Correction ▼ [003976]

Exercice 2187 Mines MP 2000

Montrer que pour tout x réel, il existe $a(x)$ unique tel que $\int_{t=x}^{a(x)} e^{t^2}\,dt = 1$. Montrez que a est indéfiniment dérivable, et que son graphe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

Correction ▼ [003977]

Exercice 2188 $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ (Centrale MP 2003)

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Correction ▼ [003978]

Exercice 2189 $f' = f^{-1}$ (Ens Cachan MP* 2003)

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ bijectives de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.

1. Trouver un élément de E du type $x \mapsto cx^m$, où c et m sont réels.
2. Quelle est la limite en 0 de f ?
3. Montrer que f est un $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que f admet un unique point fixe.
5. Soit g un deuxième élément de E. Montrer que g admet le même point fixe que f.

Correction ▼ [003979]

Exercice 2190 $f^2 + (1+f')^2 \leq 1$, Polytechnique MP* 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leq 1$. Montrer que f est nulle.

Correction ▼ [003980]

Exercice 2191 ***

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$. Montrer que f est affine.

Correction ▼ [005407]

Exercice 2192 **

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur I et même dérivable à droite et à gauche en tout point de I.

Correction ▼ [005410]

Exercice 2193 *** Inégalités de convexité

1. Soient x_1, x_2,..., x_n, n réels positifs ou nuls et α_1,..., α_n, n réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Montrer que $x_1^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. En déduire que $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.
2. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Montrer que, pour tous réels a et b positifs ou nuls, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

(b) Soient $a_1,..., a_n$ et $b_1,..., b_n$, $2n$ nombres complexes. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Inégalité de HÖLDER).}$$

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de HÖLDER.

(d) Trouver une démonstration directe et simple dans le cas $p = q = 2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

Correction ▼ [005411]

Exercice 2194 ***I

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005414]

Exercice 2195 **** Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.

1. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.
2. Montrer qu'il existe y dans $[a,b]$ tel que $m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$ puis qu'il exsite x tel que $f'(x) = m$.

Correction ▼ [005417]

Exercice 2196 *IT

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f \ : \ x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Correction ▼ [005419]

Exercice 2197 **

Soit P un polynôme réel de degré supèrieur ou égal à 2.

1. Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P'.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

Correction ▼ [005420]

Exercice 2198 **

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction ▼ [005422]

Exercice 2199 ***

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

Correction ▼ [005423]

Exercice 2200 ***I

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = e^x f(x)$).

Correction ▼ [005424]

---

76 125.01 Formule de Taylor

Exercice 2201

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [001267]

Exercice 2202

Soit a un nombre réel et f une application de classe C^2 de $]a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f' et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup_{x\geq a}|f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\geq a}|f''(x)|$.

1. En appliquant la formule de Taylor en x et $x+2h$, montrer que, pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a : $|f'(x+h)| \leq hM_2 + \frac{1}{h}M_0$.
2. En déduire que f' est bornée sur $]a,+\infty[$.
3. Établir le résultat suivant : soit g :$]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$.

[001268]

Exercice 2203

Soient $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tels que : $ae^2+be+c = 0$.

1. En appliquant la formule de Taylor sur $[0,1]$ à l'application $\varphi : x \mapsto ae^x+ce^{-x}$ démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $\theta_n \in]0,1[$ tel que :
$$-b = \frac{ae^{\theta_n}+(-1)^n ce^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a+(-1)^k c}{k!}.$$
2. En déduire que pour n assez grand $ae^{\theta_n}+(-1)^n ce^{-\theta_n} = 0$ puis que $a = b = c = 0$. (On rappelle que $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.)

[001269]

Exercice 2204

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right| = o(\frac{n!}{a^n}), a$ constante fixée. Montrer que $\forall x \in [-a,a], f(x) = 0$, puis que $f = 0$. [001270]

Exercice 2205

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \geq 0$. On pose $Q = P+P'+\dots+P^{(n)}$. Montrer que $Q \geq 0$. [001271]

Exercice 2206

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a)+(b-a)f'(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$ (on pourra utiliser Taylor-Lagrange entre $a, \frac{a+b}{2}, b$). [001272]

Exercice 2207

Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que
$$\forall x \in [-a,a], \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2a}|f(a)-f(-a)| + \frac{a^2+x^2}{2a}\sup_{t\in[-a,a]}|f''(t)|.$$

Application : montrer que si $0 \leq x \leq \pi/2$, on a $\sin x \geq x\cos x - x^2$.

[002690]

Exercice 2208 Déterminant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable en a. Étudier $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4}\begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [004004]

Exercice 2209 Dérivées nulles en 0

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0,$$
$$\exists\, \lambda > 0 \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}\right| \leq \lambda^n n!.$$

Montrer que f est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

[004005]

Exercice 2210 Fonctions absolument monotones

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x)>0$.
Montrer que pour tout entier n, $\frac{f(x)}{x^n}\to+\infty$ lorsque $x\to+\infty$.

[004006]

Exercice 2211 Fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0)=1$, et : $\forall\, x\geq\frac{1}{2},\ f(x)=0$.

1. Montrer que $\sup\limits_{\mathbb{R}^+}\left|f^{(n)}\right|\geq 2^n n!$.
2. Montrer que pour $n\geq 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+}\left|f^{(n)}\right|>2^n n!$.

Correction ▼ [004007]

Exercice 2212 Formule de Simpson

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$, impaire, telle que $f'(0)=0$ et : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ |f^{(5)}(x)|\leq M$.
Montrer qu'il existe une constante λ telle que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \left|f(x)-\frac{x}{3}f'(x)\right|\leq\lambda M|x^5|$.
2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$ telle que :
$$f'(a)=f'(b)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0,\qquad\text{et}\quad\forall\, x\in[a,b],\ |f^{(5)}(x)|\leq M.$$
Montrer que $\left|f(b)-f(a)\right|\leq\frac{M(b-a)^5}{2880}$.

Correction ▼ [004008]

Exercice 2213 $f'(x)-(f(b)-f(a))/(b-a)$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On note $M=\sup|f''|$ et on suppose $M>0$.

1. Montrer que : $\forall\, x\in\,]a,b[$, on a $\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|<M\frac{b-a}{2}$.
2. Si $\left|f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=M\frac{b-a}{2}$, montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Correction ▼ [004009]

Exercice 2214 Matexo

Soit $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que :
$$\forall\, x\in[-a,a],\ |f'(x)|\leq\frac{1}{2a}|f(a)-f(-a)|+\frac{a^2+x^2}{2a}\sup|f''|.$$
Application. Montrer que si $0\leq x\leq\pi/2$ on a $\sin x\geq x\cos x-x^2$.

Correction ▼ [004010]

Exercice 2215 Limite de θ

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Pour a fixé, on écrit la formule de Taylor-Lagrange :
$$f(a+h)=f(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+h\theta_h).$$
Montrer que si $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, alors pour h suffisament petit, θ_h est unique et $\theta_h\to\frac{1}{n+1}$ lorsque $h\to 0$.

Correction ▼ [004011]

Exercice 2216

Différences finies Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $h>0$. On pose :
$$\Delta_h f(x)=\frac{f(x+h/2)-f(x-h/2)}{h}\qquad\text{et}\quad\Delta_h^p=\underbrace{\Delta_h\circ\Delta_h\circ\cdots\circ\Delta_h}_{p\text{ fois}}.$$
Par exemple, $\Delta_h^2 f(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

1. (a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta \in]-1,1[$ tq $\Delta_h f(x) = f'\left(x+\frac{\theta h}{2}\right)$.

   (b) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta' \in]-1,1[$ tq $\Delta_h f(x) = f'(x) + \frac{h^2}{24} f^{(3)}\left(x+\frac{\theta' h}{2}\right)$.

2. Montrer par récurrence sur p que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta_p \in]-p,p[\text{ tq } \Delta_h^p f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{ph^2}{24} f^{(p+2)}\left(x+\frac{\theta_p h}{2}\right).$$

[004012]

Exercice 2217 f et f'' sont bornées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \le \alpha$ et $|f''(x)| \le \beta$.

1. Montrer que : $\forall\, h > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \le \frac{2\alpha}{h} + \frac{h\beta}{2}$.
2. Pour quelle valeur de h obtient-on la meilleure inégalité ?

Correction ▼ [004013]

Exercice 2218 Inégalité sur f'

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| \le M$.

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \ge 0$.
2. En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \le \sqrt{2Mf(x)}$.
3. On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| = \sqrt{2Mf(x)}$. Que pouvez-vous dire de f ?

Correction ▼ [004014]

Exercice 2219 Majoration des dérivées de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que les dérivées intermédiaires sont aussi bornées sur $\mathbb{R}$.

1. Cas $n = 2$: Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
2. Cas général : Utiliser l'exercice 2216.

[004015]

Exercice 2220 $f''(x) \ge -\frac{k}{x^2}$

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$, et : $\forall\, x > 0,\ f''(x) \ge -\frac{k}{x^2}$.
Montrer que $xf'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^+$ (écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + \varepsilon x$).

Correction ▼ [004016]

Exercice 2221 Ens PC* 2001

Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, non constants, de coefficients dominants positifs.
On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ les racines de P' de multiplicités $m_1, \dots, m_p$ et $y_1 < y_2 < \cdots < y_q$ celles de Q' de multiplicités $n_1, \dots, n_q$.
Montrer qu'il existe f, $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, tel que $P \circ f = Q$ si et seulement si :

$$p = q, \qquad \forall\, i,\ P(x_i) = Q(y_i), \qquad \forall\, i,\ m_i = n_i.$$

Correction ▼ [004017]

Exercice 2222 ****

Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) \le (f(x))^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f''(x) \le (f'(x))^2$
(Indication. Appliquer la formule de TAYLOR-LAPLACE entre x et $x+y$ puis entre x et $x-y$).

Correction ▼ [005418]

Exercice 2223 ***

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

Correction ▼ [005457]

77 125.02 Calculs

Exercice 2224

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 7).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 7).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Correction ▼ [001237]

Exercice 2225

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

[001238]

Exercice 2226

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Correction ▼ [001239]

Exercice 2227

Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\ln \cos x$ $n = 6$ $a = 0$.
2. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
3. $\ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ $n = 3$ $a = 0$.
4. $\ln \sin x$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ $n = 4$ $a = +\infty$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.
7. $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$ $n = 2$ $a = +\infty$.

Correction ▼ [001240]

Exercice 2228

Développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$ à l'ordre 6.
4. $\dfrac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 4.
5. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

[001241]

Exercice 2229

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur $\varepsilon(x)$ pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1. $f_1(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$

3. $f_3(x)=(x-2)+\frac{(x-2)^2}{5}+(x-2)^3\varepsilon(x)$
4. $f_4(x)=x^2-x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)$
5. $f_5(x)=x^3+3x^2-x+1+(x-1)^2\varepsilon(x)$
6. $f_6(x)=(x-2)^2+(x-2)-2+(x-2)\varepsilon(x)$
7. $f_7(x)=\{2x+x^2+1+x^2\varepsilon(x)\}\{-x+3+x^2-x^3\varepsilon(x)\}$

[001242]

Exercice 2230

1. Développements limités en 1 à l'ordre 3 de $f(x)=\sqrt{x}$ et de $g(x)=e^{\sqrt{x}}$
2. Développement limité à l'ordre 3 en $x_0\in]0;\pi[$ de $h(x)=\ln(\sin x)$. En déduire un développement limité en $\frac{\pi}{2}$.

[001243]

Exercice 2231

Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$. [001244]

Exercice 2232

Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de :

1. $x\longmapsto\int_0^x\cos t^2dt$.
2. $x\longmapsto\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt=F(x^2)-F(x)$ où F est une primitive de $t\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

[001245]

Exercice 2233

Donner le DL2 en $+\infty$ de :

$$x\to\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}e^{\frac{x}{x-1}}.$$

[001246]

Exercice 2234

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\right)\ln x$.

Correction ▼ [002657]

Exercice 2235

A 1. Soient a et z deux réels. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur le segment d'extrémités a et z et ϕ un polynôme de degré n. Prouver que pour tout t compris dans l'intervalle $[0,1]$,

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))$$
$$=-(z-a)\phi^{(n)}(t)f'(a+t(z-a))+(-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))$$

2.a. Montrer que la fonction $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$ est prolongeable par continuité en zéro, que son prolongement est indéfiniment dérivable et admet des développements limités en zéro de la forme :

$$1-t/2+\frac{b_1t^2}{2!}+\frac{b_2t^4}{4!}+\cdots+\frac{b_nt^{2n}}{(2n)!}+o(t^{2n+1}),$$

où les b_i sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.
Montrer que la dérivée $n^{ième}$ en zéro, notée $\phi_n(z)$, de la fonction $t\mapsto t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$ est un polynôme en z de degré n et que

$$\phi_n(z)=z^n-\frac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2b_1z^{n-2}+C_n^4b_2z^{n-4}+\cdots+C_n^{2N}b_Nz^{n-2N}$$

où $N=E(\frac{n-1}{2})$, E désignant la fonction partie entière.

2.b. Prouver que $nz^{n-1} = \phi_n(z+1) - \phi_n(z)$

3. Prouver que

$$\begin{array}{llll}
(i) & \phi_n^{(n-k)}(1) = \phi_n^{(n-k)}(0)\ \ (2 \le k \le n) & (ii) & \phi_n^{(n-2k-1)}(0) = 0\ \ (1 \le k \le N) \\
(iii) & \phi_n^{(n-2k)}(0) = \frac{n! b_k}{(2k)!}\ \ (1 \le k \le N) & (iv) & \phi_n^{(n-1)}(0) = -\frac{1}{2} n! \\
(v) & \phi_n^{(n-1)}(1) = +\frac{1}{2} n! & (vi) & \phi_n^{(n)} = n!
\end{array}$$

4.a. On suppose f de classe C^{2n+1}. Prouver que

$$\begin{aligned}
0 = f(z) - f(a) - \frac{z-a}{2}\left[f'(z) + f'(a)\right] \\
+ \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m)}(z) - f^{(2m)}(a)\right] \\
- \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t) f^{(2n+1)}\Big(a + (z-a)t\Big)dt
\end{aligned}$$

4.b. En déduire que si F est de classe C^{2n} sur $[a, a+r\omega]$ où $r \in \mathbb{N}$ et $\omega > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+r\omega} F(x)dx = \omega\left[\frac{1}{2}F(a) + F(a+\omega) + \cdots + F(a+(r-1)\omega) + \frac{1}{2}F(a+r\omega)\right] \\
- \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{\omega^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+r\omega) - F^{(2m-1)}(a)\right] + R_n
\end{aligned}$$

où

$$R_n = \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t) \sum_{m=0}^{r-1} F^{(2n)}(a + m\omega + \omega t)dt$$

B 1. Soit $u_k : x > 0 \mapsto \ln(x+k) - \ln(k) + x\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$
Montrer que pour tout x strictement positif, la série $\sum_{k\ge1} u_k(x)$ est convergente. On pose pour la suite $G(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

2. Prouver que G vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall x > 0 \quad G(x+1) = G(x) - \ln(x).$$

3. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exp(-G(m+1)) = m!$

4. Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que la série
$$\textstyle\sum_{k\ge1}\left[\ln(y+k) - \ln(x+k) + (y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$$
est convergente et que sa somme est $G(y) - G(x) - \ln y + \ln x$.

5. Prouver à l'aide de A que pour tous entiers strictement positifs n et p

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(y+k) - \ln(x+k) = \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}\big(f(0) + f(n)\big) + \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(0)\big) + T_{p,n}(x,y)$$

où $f : t \mapsto \ln(y+t) - \ln(x+t)$ et $T_{p,n}(x,y)$ est une expression que l'on précisera.

6. Prouver que $R_p(x,y) = \lim_{n\to+\infty} T_{p,n}(x,y)$ existe.

7. On pose $g(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)} \frac{1}{z^{2h-1}}$. Montrer que $G(y) + g(y) = G(x) + g(x) + R_p(x,y)$

8. Montrer que $R_p(x,y) = O\left(\frac{1}{[\inf(x,y)]^{2p-1}}\right)$ quand $\inf(x,y) \to +\infty$.

9. Prouver à l'aide de la formule de Stirling que $G(m) + g(m) \to \frac{1}{2}\ln 2\pi$ quand $m \to +\infty$.

10. Montrer que

$$G(y) = -y\ln y + y + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)} \frac{1}{y^{2h-1}} + O\left(\frac{1}{y^{2p-1}}\right)$$

11. Donner un développement asymptotique de $\ln(m!)$ quand m tend vers $+\infty$ à un $O(\frac{1}{m^7})$ près.

Correction ▼ [002683]

Exercice 2236 Calculs de DL

Fonctions trigonométriques

$$x/\sin x = 1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$$
$$1/\cos x = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$$
$$\ln(\sin x/x) = -x^2/6 - x^4/180 - x^6/2835 + o(x^6)$$
$$\exp(\sin x/x) = e(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$$
$$\sqrt{\tan x} = 1 + h + h^2/2 + o(h^2), h = x - \pi/4$$
$$\sin(x + x^2 + x^3 - x^4) = x + x^2 + 5x^3/6 - 3x^4/2 + o(x^4)$$
$$\ln(x\tan(1/x)) = x^{-2}/3 + 7x^{-4}/90 + o(1/x^4)$$
$$(1-\cos x)/(e^x - 1)^2 = 1/2 - x/2 + x^2/6 + o(x^2)$$
$$\sin((\pi\cos x)/2) = 1 - \pi^2x^4/32 + \pi^2x^6/192 + o(x^6)$$
$$\cos x\ln(1+x) = x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^4)$$
$$(\sin x - 1)/(\cos x + 1) = -1/2 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$$
$$\ln(2\cos x + \tan x) = \ln 2 + x/2 - 5x^2/8 + 11x^3/24 - 59x^4/192 + o(x^4)$$
$$e^{\cos x} = e(1 - x^2/2 + x^4/6) + o(x^5)$$

Fonctions circulaires inverses

$$\arcsin^2 x = x^2 + x^4/3 + 8x^6/45 + o(x^6)$$
$$1/\arcsin^2 x = x^{-2} - 1/3 - x^2/15 + o(x^2)$$
$$\arctan\sqrt{(x+1)/(x+2)} = \pi/4 - x^{-1}/4 + 3x^{-2}/8$$
$$\arccos(\sin x/x) = |x|/\sqrt{3}(1 - x^2/90) + o(1/x^3)$$
$$1/\arctan x = x^{-1} + x/3 - 4x^3/45 + 44x^5/945 + o(x^5)$$
$$\arcsin\sqrt{x} = \pi/6 + 1/\sqrt{3}(2h - 4h^2/3 + 32h^3/9) + o(h^3), h = x - 1/4$$
$$\arcsin(\sin^2 x) = x^2 - x^4/3 + 19x^6/90 - 107x^8/630 + o(x^8)$$
$$\arctan(1+x) = \pi/4 + x/2 - x^2/4 + x^3/12 + o(x^4)$$
$$\arcsin x/(x - x^2) = 1 + x + 7x^2/6 + o(x^2)$$
$$e^{\arcsin x} = e^{\pi/6}(1 + 2h/\sqrt{3} + 2(1+\sqrt{3})h^2/(3\sqrt{3})) + o(h^2), h = x - 1/2$$
$$e^{1/x}\arctan x = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)x^{-1} + (\frac{\pi}{4} - 1)x^{-2} + (\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6})x^{-3} + o(1/x^3)$$

Exponentielle et logarithme

$$x/(e^x - 1) = 1 - x/2 + x^2/12 + o(x^2)$$
$$\ln x/\sqrt{x} = h - h^2 + 23h^3/24 + o(h^3), h = x - 1$$
$$\ln((2-x)/(3-x^2)) = \ln(2/3) - x/2 + 5x^2/24 + o(x^2)$$
$$\ln(1+x)/(1 - x + x^2) = x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$$
$$\mathrm{ch}\,x/\ln(1+x) = x^{-1} + 1/2 + 5x/12 + o(x)$$
$$\ln(\ln(1+x)/x) = -x/2 + 5x^2/24 - x^3/8 + o(x^3)$$
$$\ln(a^x + b^x) = \ln 2 + x\ln\sqrt{ab} + x^2\ln^2(a/b)/8 + o(x^2)$$
$$\exp(1/x)/x^2 = e(1 - 3h + 13h^2/2 - 73h^3/6) + o(h^3), h = x - 1$$

Fonctions hyperboliques inverses

$$\mathrm{Argth}(\sin x) = x + x^3/6 + x^5/24 + o(x^5)$$
$$\mathrm{Argsh}(e^x) = \ln(1+\sqrt{2}) + 1/\sqrt{2}(x + x^2/4) + o(x^2)$$

Formes exponentielles

$$(1-x+x^2)^{1/x} = e^{-1}(1+x/2+19x^2/24)+o(x^2)$$
$$((1+x)/(1-x))^{\alpha} = 1+2\alpha x+2\alpha^2x^2+2\alpha(2\alpha^2+1)x^3/3+o(x^3)$$
$$(\sin x/x)^{2/x^2} = e^{-1/3}(1-x^2/90)+o(x^3)$$
$$(\sin x/x)^{3/x^2} = e^{-1/2}(1-x^2/60-139x^4/151200)+o(x^4)$$
$$(1+\sin x)^{1/x} = e(1-x/2+7x^2/24)+o(x^2)$$
$$(1+\sin x+\cos x)^x = 1+x\ln 2+x^2(\ln^2 2+1)/2+o(x^2)$$
$$(\sin x)^{\sin x} = 1-h^2/2+7h^4/24+o(h^4), h=x-\pi/2$$
$$(\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}(1+2h^2/3+4h^4/5)+o(h^4), h=x-\pi/4$$

Développer d'abord $\ln((1+x)/(1-x))$

Radicaux

$$x\sqrt{(x-1)/(x+1)} = 1/\sqrt{3}(2+5h/3+h^3/54)+o(h^3), h=x-2$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}(1-x/8-5x^2/128-21x^3/1024)+o(x^3)$$
$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = |x|/\sqrt{2}(1+x^2/8+7x^4/128)+o(x^5)$$
$$e^x-\sqrt{1+2x} = x^2-x^3/3+2x^4/3-13x^5/15+o(x^5)$$
$$(\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[3]{x^3-x^2})/x = 2-2x^{-2}/9+o(1/x^3)$$

[004018]

Exercice 2237 EIT 1999

Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

Correction ▼ [004019]

Exercice 2238 IT

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim_{x\to\pi/2}|\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos(\frac{n\pi}{3n+1})+\sin(\frac{n\pi}{6n+1})\right)^n$
4. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim_{x\to\pi/2}\cos x.e^{1/(1-\sin x)}$
6. $\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$
7. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x}$
8. $\lim_{x\to e,\, x<e}(\ln x)^{\ln(e-x)}$
9. $\lim_{x\to 1,\, x>1}\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(\operatorname{ch} x-1)}{x^2+1}$
11. $\lim_{x\to 0,\, x>0}\frac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$
12. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$
13. $\lim_{x\to 1/\sqrt{2}}\frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$
14. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(a+\frac{1}{x})}{\cos a}\right)^x$ (où $\cos a\neq 0$)

Correction ▼ [005426]

Exercice 2239 IT

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0)
2. $\frac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0)
3. $\mathrm{Arccos}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
5. $(\mathrm{ch}\,x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0)
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0)
7. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1)
8. $\mathrm{Arctan}(\cos x)$ (ordre 5 en 0)
9. $\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)
10. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\mathrm{Arcsin}^2 x}$ (ordre 5 en 0)
11. $\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ (ordre 10 en 0)
12. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π)

Correction ▼ [005427]

Exercice 2240 ***

Soit $0<a<b$. Etude complète de la fonction $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Correction ▼ [005428]

Exercice 2241 **

Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1}$.

Correction ▼ [005429]

Exercice 2242 **

Soit $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x|\neq 1$ en à peine plus de temps).

Correction ▼ [005430]

Exercice 2243 IT

1. Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1$.
2. Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2-6x$
3. Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x}$.
4. Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\mathrm{th}\,x}$.
5. Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

Correction ▼ [005431]

Exercice 2244 **IT

Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$.

Correction ▼ [005432]

Exercice 2245 **IT

1. Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$.
2. Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Correction ▼ [005433]

Exercice 2246 **

Soient $a>0$ et $b>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n}$.

Correction ▼ [005434]

Exercice 2247 ***I

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.
2. Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Correction ▼ [005437]

Exercice 2248

1. Montrer que l'équation $x + \ln x = k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_k.
2. Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k = ak + b\ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Correction ▼ [005438]

Exercice 2249 **

Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Correction ▼ [005439]

Exercice 2250 **IT

Etude au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{Arcsin}\, x}$ (existence d'une tangente ?)

Correction ▼ [005440]

Exercice 2251 **I

1. La fonction $x \mapsto \text{Arccos}\, x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
2. Equivalent simple de $\text{Arccos}\, x$ en 1.

Correction ▼ [005441]

Exercice 2252 ***

1. Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p + 2q = k$.

Correction ▼ [005442]

78 125.03 Applications

Exercice 2253

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

[001247]

Exercice 2254

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}$.

Correction ▼ [001248]

Exercice 2255

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1. [001249]

Exercice 2256

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. [001250]

Exercice 2257

Établir pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'inégalité :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{3/2} - x^{3/2} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

[001251]

Exercice 2258

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2}e^x$. [001252]

Exercice 2259

Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f.

[001253]

Exercice 2260

Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

[001254]

Exercice 2261

Soit (1) l'équation $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $x_n \in [n, n+1[$ solution de (1).
2. Déterminer un équivalent de x_n.
3. Faire un DAS de $x_n - n$ en $+\infty$ en fonction de $\frac{1}{n}$ à l'ordre 5.

[001255]

Exercice 2262

Calculer pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \lim_{n\to\infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$

[001256]

Exercice 2263

Calculer :

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x}\right)^{x \ln x}$$

et donner un équivalent de $\ell - \left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ quand $x \to \infty$. [001257]

Exercice 2264

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2}, v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)}, u_0(x) = 1, v_0(x) = x.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite ℓ_x.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ell_x$. Calculer $f(1), f(0)$, donner $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$ si $x > 0$. Montrer que f est croissante, en déduire le sens de variations de $x \to \frac{f(x)}{x}$.
3. Montrer que f est dérivable en 1 (on utilisera $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$) puis que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est continue en 0.
5. Donner l'allure du graphe de f, préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

[001258]

Exercice 2265

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, on définit :
$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + \ldots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$
Déterminer $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0} u_n(x)$. [001259]

Exercice 2266

Déterminer :
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}.$$

[001260]

Exercice 2267

Soient u, v, f définies par :
$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}},\ v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1},\ f(x) = u(x) - v(x).$$
1. Donner un équivalent de f au voisinage de $-\infty$, en déduire $\lim\limits_{-\infty} f$.
2. Déteminer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) - x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) + x$. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par-rapport à cette asymptote.
3. Même étude en $+\infty$.

[001261]

Exercice 2268

Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.
1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Correction ▼ [001262]

Exercice 2269

Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto (x+1)\exp(\dfrac{1}{x-1})$ deux fonctions. Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci. [001263]

Exercice 2270

Montrer que, pour tout x réel vérifiant $|x| \leq 1$:
$$\left|\frac{x + \sin 2x}{x^9 + x^2 - 3}\right| \leq 2.$$

[001264]

Exercice 2271

Déterminer :
1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$.

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$.

2. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{Arctan} x)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1-\cos x}$.

[001265]

Exercice 2272

1. Soit g la fonction définie par :
$$g(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \operatorname{Arctan} x.$$
   (a) Quel est le domaine de définition de g ?
   (b) Etudier ses variations.
   (c) Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un point α compris entre -1 et 0 (on ne demande pas de préciser la valeur de α).
   (d) Dessiner le graphe de g.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan} x.$$
   (a) Calculer la dérivée de f et établir son tableau de variation.
   (b) Le graphe de f a-t-il des points d'inflexion ? Si oui, donner les coordonnées de ce (ou ces) point(s).
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abcisse $x = 0$ au graphe de f et la position de ce graphe par rapport à cette tangente (au voisinage de ce point).
4. En utilisant les résultats de l'exercice **? ? ?**, montrer que :
   (a) $\dfrac{f(x)}{x} = (1+\dfrac{1}{x})(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x})$ si $x > 0$.
   (b) $\dfrac{f(x)}{x} = (1+\dfrac{1}{x})(-\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x})$ si $x < 0$.
5. En déduire l'existence d'une fonction ε telle que $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ et, pour tout $x > 0$, on ait :
$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + (\frac{\pi}{2} - 1) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$
   Etablir un résultat analogue pour $x < 0$.
6. Quelles sont les asymptotes au graphe de f ? Préciser la position de ce graphe par rapport à ces asymptotes.
7. Dessiner le graphe de f.

[001266]

Exercice 2273 Fonctions circulaires et hyperboliques

1. $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \to \frac{2}{3}$ lorsque $x \to 0$.
2. $\frac{\sin x \operatorname{sh} x - \tan x \operatorname{th} x}{\operatorname{sh}^4 x - \operatorname{th}^4 x} \to - > -\frac{1}{12}$ lorsque $x \to 0$.
3. $(\operatorname{ch} x)^\alpha - (\operatorname{sh} x)^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha < 2. \end{cases}$ lorsque $x \to +\infty$
4. $\frac{\exp(x^2) - \operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{(\operatorname{ch} x - \cos x)(\operatorname{ch} 2x - \cos 2x)} \to \frac{1}{12}$ lorsque $x \to 0$.
5. $(2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x \to \frac{1}{\pi}$ lorsque $x \to 1/2$.
6. $\frac{\cos \pi x}{4x^2 - 9} \to - > \frac{\pi}{12}$ lorsque $x \to 3/2$.
7. $\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} \to -\sqrt{3}$ lorsque $x \to \pi/3$.
8. $\frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.
9. $\frac{1}{x} \ln \operatorname{ch} x \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

[004020]

Exercice 2274 Logarithme et exponentielle

1. $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \to \frac{1}{2}$. lorsque $x \to 0$

2. $\frac{x^x-1}{\ln x-x+1} \to \pm\infty$ lorsque $x \to 1$.
3. $\frac{x^a-a^x}{\log_a(x)-\log_x(a)} \to \frac{a^{a+1}\ln a(1-\ln a)}{2}$ lorsque $x \to a$.
4. $\left(\frac{a^x+b^x}{1+c^x}\right)^{1/x} \to \exp\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$ lorsque $x \to 0$.
5. $\frac{x^{x^x}}{x^x-1} \to 0$ lorsque $x \to 0^+$.

[004021]

Exercice 2275 Exposants variables

1. $x^{\arcsin x} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$.
2. $\frac{(\sin x)^{\sin x}-1}{x^x-1} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$.
3. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)} \to e^{2/\pi}$ lorsque $x \to 1$.
4. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)} \to -> 1$ lorsque $x \to 2^-$.
5. $(\sin x+\cos x)^{1/x} \to e$ lorsque $x \to 0$.
6. $(\cos 2x-2\sin x)^{1/x} \to e^{-2}$. lorsque $x \to 0$
7. $(\sin x)^{\tan x} \to 1$. lorsque $x \to \pi/2$
8. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to e^{-1/\sqrt{2}}$ lorsque $x \to \pi/4$.
9. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to 1$ lorsque $x \to (\pi/2)^-$.
10. $(\sin x)^{1/\ln x} \to e$ lorsque $x \to 0^+$.
11. $(\ln x)^{x-1} \to 1$ lorsque $x \to 1^+$.
12. $(\ln x)^{\ln(e-x)} \to -> 1$ lorsque $x \to e^-$.

[004022]

Exercice 2276 Radicaux

1. $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan(\pi x/4)} \to 0$ lorsque $x \to 1$.
2. $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.
3. $\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.

[004023]

Exercice 2277 Sommes de cotangentes

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. CNS pour que $\sum_{k=1}^n a_k \operatorname{cotan}(kx)$ ait une limite finie en 0 ?

Correction ▼ [004024]

Exercice 2278 $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$

On pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$. Trouver : $v_p = \lim_{n\to\infty} u_{n,p}$, $v = \lim_{p\to\infty} v_p$, $w_n = \lim_{p\to\infty} u_{n,p}$ et $w = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Correction ▼ [004025]

Exercice 2279 Ensi P 91

Calculer $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2}$ puis $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$.

Correction ▼ [004026]

Exercice 2280 Recherche de tangentes

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente pour $x=0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

1. $y = \frac{e^{\sin x}-1}{x}$.
2. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} x}-\frac{1}{x}$.
3. $y = \frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}$.
4. $y = (2e^x-e^{-x})^{1/x}$.
5. $y = \frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}$.

6. $y = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Correction ▼ [004027]

Exercice 2281 Comparaison de fonctions

On pose : $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$.
Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{C}_k$ au voisinage de 0.

Correction ▼ [004028]

Exercice 2282 Recherche d'asymptotes

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$.
2. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
3. $y = (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
4. $y = (x+1)\arctan(1+2/x)$.
5. $y = x.\arctan x.e^{1/x}$.
6. $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$.
7. $y = \sqrt{x^2-x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Correction ▼ [004029]

---

79 125.04 Développements limités implicites

Exercice 2283 $\tan(x) = x$

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n \to \infty$.
4. En reportant dans la relation trouvée en 2, obtenir un DL de x_n à l'ordre 2.

Correction ▼ [004037]

Exercice 2284 maximum de $x\cos^n x$

On note $f_n(x) = x\cos^n x$. Soit $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n)$ soit maximal.

1. Existence et unicité de x_n ?
2. Chercher $\lim_{n\to\infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n^2 \sim \frac{1}{n}$ $(n \to \infty)$.
4. Trouver un équivalent de $f_n(x_n)$.

Correction ▼ [004038]

Exercice 2285 Développement asymptotique

Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x}e^x$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si λ est assez grand, la droite d'équation $y = \lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points d'abscisses $a < b$.
   (a) Montrer que $a \sim \frac{1}{\lambda}$, et $e^b \sim \lambda$ pour $\lambda \to +\infty$.
   (b) Chercher la limite de b^a quand λ tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [004039]

Exercice 2286 Polytechnique MP* 2000

Soit $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n vérifiant $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Trouver la limite et un équivalent de la suite (x_n) en $+\infty$.

Correction ▼ [004040]

Exercice 2287

Soit u_n une suite réelle telle que pour tout n on ait $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Correction ▼ [004041]

Exercice 2288 Mines MP 2001

Montrez que pour n entier ($n > 0$) l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive x_n. Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n.

Correction ▼ [004042]

Exercice 2289 Centrale MP 2001

Pour tout n entier naturel non nul, on donne $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

Correction ▼ [004043]

80 125.05 Equivalents

Exercice 2290 Recherche d'équivalents

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$. en 0
2. $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$. en 0
3. $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$. en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$. en $+\infty$
5. $\operatorname{Argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$. en 0

Correction ▼ [004044]

Exercice 2291 Approximation de cos

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1+ax^2}{1+bx^2} - \cos x$ soit infiniment petit d'ordre maximal.

Correction ▼ [004045]

Exercice 2292 Approximation de sin

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\sin x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$ soit infiniment petit d'ordre maximal.

Correction ▼ [004046]

Exercice 2293 Equivalent de $\arccos x$ en 1

Simplifier $\arccos(1-2x^2)$, en trouver un équivalent pour $x \to 0$, puis donner un équivalent de $\arccos(u)$ pour $u \to 1^-$.

[004047]

Exercice 2294 $\arcsin \circ \arctan - \arctan \circ \arcsin$

1. Soient $P(X) = X + aX^3 + bX^5 + cX^7$ et $Q(X) = X + \alpha X^3 + \beta X^5 + \gamma X^7$. Chercher la partie de degré inférieur ou égale à 7 de $P \circ Q - Q \circ P$.
2. Application : Donner le DL à l'ordre 7 en 0 de $\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)$.

Correction ▼ [004048]

Exercice 2295 $(u^v - v^u)/(u-v)$

Soient u, v deux fonctions positives, $u \sim v$, $u \to 0$. Montrer que $\frac{u^v - v^u}{u-v} \sim -\ln(v)$.
(Écrire $u = v + w$ avec $w/v \to 0$)

[004049]

Exercice 2296 Développement asymptotique d'une réciproque

Soit $f : [-1,+\infty[\to [-e^{-1},+\infty[, x \mapsto xe^x$. Montrer que f est bijective et $f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

[004050]

Exercice 2297 Équivalent de $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$

Chercher un équivalent simple en 0^+ de $f_k(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$ (k fois x).

Correction ▼ [004051]

Exercice 2298 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$

Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$ pour $n \to \infty$.

[004052]

Exercice 2299 $(1+a_n/n)^n$

1. Soit $f(x) = \ln(1+x) - x$.
   (a) Étudier f.
   (b) Chercher un équivalent simple de f en 0.
   (c) Soit (x_n) une suite de réels telle que $f(x_n) = o(1/n)$. Montrer que $nx_n^2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Application : Soit (a_n) une suite de réels. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $a_n = o(\sqrt{n})$.
   (b) $\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \sim e^{a_n}$.

[004053]

81 125.99 Autre

Exercice 2300 DL de $(\mathrm{ch}\,x)^(1/x)$

1. Montrer que $\frac{1}{x}\ln(\mathrm{ch}\,x)$ admet en $+\infty$ un développement limité généralisé à tout ordre.
2. En déduire le développement limité de $(\mathrm{ch}\,x)^{1/x}$ en $+\infty$ à un ordre n quelconque.

Correction ▼ [004030]

Exercice 2301 Théorème de division

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On pose $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. On suppose que $f(x) = o(x^n)$.
   (a) Démontrer que : $\forall\ p \leq n,\ f^{(p)}(x) = o(x^{n-p})$, et : $\forall\ p < n,\ g^{(p)}(x) = o(x^{n-p-1})$.
   (b) En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0.
2. Démontrer le même résultat dans le cas général.
3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$. Montrer que f/g se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

[004031]

Exercice 2302 DL de f^{-1}

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de valuation 1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes Q_n et R_n uniques tels que :

$$\begin{cases} X = Q_n \circ P + R_n \\ \deg Q_n \leq n < \mathrm{v}(R_n). \end{cases}$$

Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective telle que $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, avec $a_1 \neq 0$. Démontrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à l'ordre n, et donner les deux premiers termes.

Correction ▼ [004032]

Exercice 2303 DL de $(1-e^x)^n$

Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$.
En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$ pour $p = 0, 1, \ldots, n+2$.

Correction ▼ [004033]

Exercice 2304 Approximation de f''

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Chercher $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$.

[004034]

Exercice 2305 Dérivation d'un DL d'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h^2)$.
Démontrer que f est deux fois dérivable en a et $f''(a) = 0$ (comparer $f'(a+h)$ aux taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, et entre $a+h$ et $a+2h$).
Étudier le cas où $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{Lh^2}{2} + o(h^2)$.

[004035]

Exercice 2306 $f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$.
Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t)f''(t) \leq f'^2(t)$. [004036]

---

82 126.01 Fonctions circulaires inverses

Exercice 2307

Écrire sous la forme $\frac{m}{n}\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas : $\alpha = \frac{59}{5}\pi$; $\alpha = \frac{84}{5}\pi$; $\alpha = \frac{76}{5}\pi$. [000741]

Exercice 2308

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

[000742]

Exercice 2309

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

[000743]

Exercice 2310

Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

[000744]

Exercice 2311

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Indication ▼ Correction ▼ [000745]

Exercice 2312

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$
$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000746]

Exercice 2313

Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3\operatorname{Arctan} x).$$

Indication ▼ Correction ▼ [000747]

Exercice 2314

Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x), \qquad x \mapsto f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

[000748]

Exercice 2315

Résoudre les équation suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4},$$
$$\operatorname{Arctan} x = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000749]

Exercice 2316

Calculer

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.$$

[000750]

Exercice 2317

Simplifier les expressions suivantes :

$$\operatorname{Arctan}(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}), \quad \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (0 < x < 2\pi),$$
$$\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

[000751]

Exercice 2318

Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000752]

Exercice 2319

Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (on montrera que $0 \leq \arctan(\frac{1}{5}) \leq \frac{\pi}{8}$ et $0 \leq \arctan(\frac{1}{239}) \leq \frac{\pi}{2}$). [000753]

Exercice 2320

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2-k+1}.$$

On montrera qu'elle converge (vers ℓ) et on évaluera $\lim_{n\to\infty} n(u_n - \ell)$.
Indication : que vaut $\arctan a - \arctan b$? [000754]

Exercice 2321

Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

[000755]

Exercice 2322

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

[000756]

Exercice 2323 arcsin et arccos à partir de arctan

Le langage "Pascal" ne dispose pas des fonctions arcsin et arccos. Définir $\arcsin x$ et $\arccos x$ à l'aide de la fonction arctan.
Correction ▼ [003914]

Exercice 2324 Formules d'addition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan a + \arctan b$.
Correction ▼ [003915]

Exercice 2325 $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$

Résoudre l'équation : $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$.
Correction ▼ [003916]

Exercice 2326 $\arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Soit $x = \arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer $\cos 4x$ et en déduire x.
Correction ▼ [003917]

Exercice 2327 arctangentes

1. Simplifier $\arctan \frac{1-x}{1+x}$.
2. Simplifier $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
3. Simplifier $\arctan \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.
4. Simplifier $\arctan \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + \arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.
5. Simplifier $\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x}$.

Correction ▼ [003918]

Exercice 2328 $2\arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$

Existe-t-il une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in D,\ 2\arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$?
Correction ▼ [003919]

Exercice 2329 $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Simplifier $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Correction ▼ [003920]

Exercice 2330 $\arccos(\cos x) - \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$

Simplifier $\arccos(\cos x) - \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [003921]

Exercice 2331 Équation

Résoudre : $2\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Correction ▼ [003922]

Exercice 2332 $\frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$

Simplifier $\frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [003923]

Exercice 2333 $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$

Simplifier $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$.

Correction ▼ [003924]

Exercice 2334 Équations aux arctan

Résoudre :

1. $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.
4. $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

Correction ▼ [003925]

Exercice 2335 Sommes remarquables

1. Montrer que : $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.
2. Montrer que : $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

[003926]

Exercice 2336 Sommes remarquables

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, x \in \left]0, 1\right],\ 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$.

[003927]

Exercice 2337 $\arctan((x-\sin a)/\cos a)$

Soit $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2(x-\sin a)\cos a}{x^2-2x\sin a+1}\right)$ et $g(x) = \arctan\left(\frac{x-\sin a}{\cos a}\right)$.
Vérifier que f est bien définie, calculer $\sin\big(2g(x)\big)$ et comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Correction ▼ [003928]

Exercice 2338 Polynômes de Chebicheff

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales. [003929]

Exercice 2339 Équivalent de $\arccos(1-x)$

A l'aide d'un changement de variable judicieux, trouver $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$. [003930]

Exercice 2340 Matexo

Montrer que : $\forall\, x \in]-1,1[,\ |\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$. [003931]

Exercice 2341 ***IT

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$,
2. $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$,
3. $x \mapsto \cos(\operatorname{Arccos} x)$,
4. $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos x)$,
5. $x \mapsto \tan(\operatorname{Arctan} x)$,
6. $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

Correction ▼ [005084]

Exercice 2342 ***IT

1. Calculer $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$ pour x élément de $[-1,1]$.
2. Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.
3. Calculer $\cos(\operatorname{Arctan} a)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} a)$ pour a réel donné.
4. Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de $\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Correction ▼ [005085]

Exercice 2343 ***I

Existence et calcul de $\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, dt$.

Correction ▼ [005087]

Exercice 2344 **

Simplifier les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
2. $f_2(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
3. $f_3(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.
4. $f_4(x) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2x^2} - \operatorname{Arctan}\frac{x}{x+1} + \operatorname{Arctan}\frac{x-1}{x}$.

Correction ▼ [005088]

Exercice 2345 **I

Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Correction ▼ [005089]

Exercice 2346 ***I

Calculer $u_n = \operatorname{Arctan}\frac{2}{1^2} + \operatorname{Arctan}\frac{2}{2^2} + \ldots + \operatorname{Arctan}\frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. (Utiliser l'exercice 2342 4))

Correction ▼ [005090]

Exercice 2347 ** Mines de DOUAI 1984

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2-1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2. Exprimer, sur $\mathscr{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Correction ▼ [005092]

Exercice 2348 **

Simplifier les expressions suivantes

1. $\sin(2\,\mathrm{Arcsin}\,x)$,
2. $\cos(2\,\mathrm{Arccos}\,x)$,
3. $\sin^2\left(\frac{\mathrm{Arccos}\,x}{2}\right)$,
4. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
5. $\mathrm{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$,
6. $\mathrm{Argch}(2x^2-1)$,
7. $\mathrm{Argth}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}\right)$,
8. $\frac{\mathrm{ch}(\ln x)+\mathrm{sh}(\ln x)}{x}$.

Correction ▼ [005095]

Exercice 2349 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{ch}\,x = 2$,
2. $\mathrm{Arcsin}(2x) = \mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arcsin}(x\sqrt{2})$,
3. $2\,\mathrm{Arcsin}\,x = \mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

Correction ▼ [005096]

Exercice 2350 ***

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) = n(n-1)$. (Indication. Poser $x_k = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$ puis trouver un polynôme dont les x_k sont les racines.)

Correction ▼ [005315]

Exercice 2351 *** I

Donner un développement à la précision $\frac{1}{n^2}$ de la n-ième racine positive x_n de l'équation $\tan x = x$.

Correction ▼ [005852]

Exercice 2352 *** I

Soit z un nombre complexe. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Correction ▼ [005853]

83 126.02 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 2353

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\cos x + \mathrm{ch}\,y, \cos x\,\mathrm{ch}\,y).$$

Discuter et déterminer selon $p \in \mathbb{R}$ l'image réciproque de $(4,p)$. On exprimera y à l'aide d'un logarithme. Déterminer numériquement cette image réciproque si $p = -2$. [000757]

Exercice 2354

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(\mathrm{ch}\,x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^{+}$?

Indication ▼ Correction ▼ [000758]

Exercice 2355

Calculer :
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Indication ▼ Correction ▼ [000759]

Exercice 2356

Donner un expression plus simple de :
$$y = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

[000760]

Exercice 2357

Calculer pour $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+bk).$$

[000761]

Exercice 2358

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y = b \end{cases}$. [000762]

Exercice 2359

Montrer que : $\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y + \operatorname{argth} z = \operatorname{argth} u$ et déterminer u. [000763]

Exercice 2360

Les réels x et y étant liés par
$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$
calculer $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y.

Indication ▼ Correction ▼ [000764]

Exercice 2361

Montrer que $\operatorname{ch} nx$ et $\operatorname{sh} nx$ peuvent s'exprimer comme polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. Calculer $\operatorname{ch} 3x$ et $\operatorname{sh} 3x$ en fonctions de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. En déduire $\operatorname{th} 3x$ en fonction de $\operatorname{th} x$. [000765]

Exercice 2362

Exprimer $\operatorname{ch}^n x$ et $\operatorname{sh}^n x$ au moyen de $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px \,;\, 1 \leq p \leq n\}$. Expliciter $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^5 x$. [000766]

Exercice 2363

Calculer les sommes
$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \text{et} \quad 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

[000767]

Exercice 2364

Simplifier

$$\operatorname{Argth} \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

[000768]

Exercice 2365

Vérifier les égalités

$$2\operatorname{Argth}\tan x = \operatorname{Argth}\sin 2x, \qquad \operatorname{Argsh}(3x+4x^3) = 3\operatorname{Argsh} x.$$

[000769]

Exercice 2366

Expliciter au moyen de la fonction logarithme $\operatorname{Argch}\frac{1}{x}$ et $\operatorname{Argsh}\frac{1}{x}$. [000770]

Exercice 2367

Résoudre

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x;$$

$$xy = a^2 \text{ et } \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2}\ln^2 a.$$

[000771]

Exercice 2368

Préciser les comportements

de $x \mapsto \dfrac{x^2-e^x}{x-e}$ quand $x \to e$,

de $x \mapsto \sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}$ quand $x \to +\infty$,

de $x \mapsto \dfrac{a^x-b^x}{x}$ quand $x \to 0$. [000772]

Exercice 2369

Démontrer les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \text{ pour } x > 0 \quad \text{et} \quad 1+x \leq e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Correction ▼ [000773]

Exercice 2370

Déterminer $\lim\limits_{+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x))$. [000774]

Exercice 2371

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$. En déduire un équivalent de $\operatorname{ch} x - 1$ en 0. [000775]

Exercice 2372

Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Indication ▼ Correction ▼ [000776]

Exercice 2373

Résoudre l'équation $\tan(3\arcsin x) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux. [000777]

Exercice 2374 *IT

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

Correction ▼ [005086]

Exercice 2375 *

Etudier $f : x \mapsto \ln(\text{ch}x) - x$.

Correction ▼ [005091]

Exercice 2376 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(2+x) + \text{sh}(2+2x) + \ldots + \text{sh}(2+100x) = 0$.

Correction ▼ [005093]

Exercice 2377 **I

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\text{th}x = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}x}$.
2. En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \text{th}(2^0 x) + 2^1 \text{th}(2^1 x) + \ldots + 2^{n-1} \text{th}(2^{n-1} x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Correction ▼ [005094]

84 126.99 Autre

85 127.01 Théorie

Exercice 2378

Déterminer les fonctions f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$. [000778]

Exercice 2379

Soient $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$.
2. Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

[000779]

Exercice 2380

Soient $0 < a \leq b$. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. [000780]

Exercice 2381

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$. [000781]

Exercice 2382

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

[000782]

Exercice 2383

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$. [000783]

Exercice 2384

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

[000784]

Exercice 2385

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, n'admettant qu'un nombre fini de zéros sur $[0,1]$, et telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 e^{nt} f(t)dt \right| = +\infty.$$

[000785]

Exercice 2386 Irrationnalité de π

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.
2. Montrer que :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$
3. Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

[000786]

Exercice 2387

Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\int_0^\pi f(u)\cos(u)du = \int_0^\pi f(u)\sin(u)du = 0$, montrer que f s'annulle au moins deux fois sur $]0,\pi[$.
[000787]

Exercice 2388

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in E\left([0,1],\mathbb{R}\right), \int_0^1 fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$. [000788]

Exercice 2389

Soit f une fonction C^1 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b f^2(u)du \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du.$$

[000789]

Exercice 2390

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$. On suppose $a < 0 < b$ et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leq -ab.$$

[000790]

Exercice 2391

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

[000791]

Exercice 2392

Calculer sans utiliser de primitive, pour $a < b$:

$$\int_a^b e^t \, dt.$$

[000792]

Exercice 2393

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand n décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f = -1$ ou $f = 0$ ou $f = 1$. [000793]

Exercice 2394

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt.$$

Éventuellement, en donner un DL en $\frac{1}{n}$. [000795]

Exercice 2395

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx.$$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x) dx.$$

[000796]

Exercice 2396

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, continue en 0, trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)g_n(t)dt = f(0).$$

[000797]

Exercice 2397

Dire (avec justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.
2. Si f est intégrable sur $[a,b]$, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ pour tout x de $[a,b]$.
3. Soit f une fonction sur $[a,b]$ vérifiant la propriété : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g_ε intégrable sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$; alors f est intégrable.
4. Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$.
5. Si $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
6. Si f et g sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors la fonction fg est intégrable sur $[a,b]$.
7. Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, alors la fonction fg est continue sur $[a,b]$, et $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \cdot \int_a^b g(t)\,dt$.
8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\begin{cases} f \equiv \lambda_n & \text{sur }]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \text{ pour tout entier } n \geq 1 \\ f(0) = \mu & \end{cases}$$

   où (λ_n) est une suite bornée de nombres réels, et μ un nombre réel. Alors f est intégrable.
9. Soit f bornée sur $[0,1]$, continue sauf au point $1/3$; alors f est intégrable sur $[0,1]$.
10. Il existe $f \geq 0$ continue sur $[0,1]$, avec $f(1/2) > 0$, et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
11. Soit f intégrable sur $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)\,dt > 0$ alors $f \geq 0$ sur $[a,b]$.
12. Si f est croissante sur $[a,b]$, elle est intégrable sur $[a,b]$ et de plus $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante.
13. Si $f \leq 0$ est continue sur $[a,b]$, alors $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$.
14. Si f est continue sur $[0,1]$, $H(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$, et $\forall x \in [0,1]$, $H'(x) = f(x^2)$.

[000798]

Exercice 2398

Soit φ une fonction bornée sur $[a,b]$; comparer les assertions suivantes[1] :

1. φ a une primitive sur $[a,b]$.
2. φ est intégrable sur $[a,b]$.
3. φ est continue sur $[a,b]$.
4. φ est dérivable sur $[a,b]$.

[000799]

Exercice 2399

Soit f une fonction continue et strictement croissante de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$. On note g la fonction réciproque de f. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = b\beta - a\alpha$$

[000800]

Exercice 2400

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que f est monotone sur $[a,b]$ et que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt$$

(considérer $\varphi(x) = f(a)\int_a^x g(t)\,dt + f(b)\int_x^b g(t)\,dt$). [000801]

Exercice 2401

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, vérifiant :

i) $0 \leq f' \leq 2$;

ii) f' est décroissante ;

iii) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Trouver le plus grand nombre m et le plus petit nombre M tels qu'on soit sûr d'avoir $m \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq M$. Peut-il y avoir égalité ? [000802]

Exercice 2402

Soit f définie et continue sur $[0,+\infty[$, vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l$ (étant donné $\varepsilon > 0$, choisir A assez grand pour que sur $[A,+\infty[$ on ait $l-\varepsilon \leq f(t) \leq l+\varepsilon$; puis encadrer $\frac{1}{x}\int_A^x f(t)\,dt$, pour $x > A$; estimer l'erreur... et faire un dessin !).

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{1+t^2}}\,dt$. Étudier la branche infinie du graphe de F quand $x \to +\infty$. [000803]

Exercice 2403 Méthode des trapèzes

1. Soit f deux fois dérivable sur $[a,b]$, vérifiant $|f''| \leq M$ sur $[a,b]$. Soit

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - A(b-t)(t-a)$$

Soit $x \in]a,b[$; on choisit $A = A(x)$ pour que $\varphi(x) = 0$ (dessiner !). Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $c_1 < c_2$ et $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$, puis qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\varphi''(c) = 0$. En déduire une majoration de $|A|$ pour $x \in [a,b]$. On convient de poser $A(a) = A(b) = 0$.

2. On note E l'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire du trapèze défini par l'axe des x, les droites $x = a$ et $x = b$ et la corde du graphe joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (dessiner !). Montrer que $E = \int_a^b A(x)(b-x)(x-a)\,dx$, et vérifier que l'intégrale a un sens. En déduire que $|E| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$ (utiliser 1)).

[1] L'une des implications à étudier est très difficile ; on pourra admettre après avoir traité toutes les autres que celle qui reste est fausse.

3. Pour $n \geq 1$ on pose $I_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right]$ où $x_p = a + p\frac{b-a}{n}$ pour $p = 1, 2, \ldots, n-1$. Montrer que I_n est la somme des aires des trapèzes construits sur les points d'abscisses $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ et les cordes correspondantes du graphe de f (dessiner !). Montrer que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - In\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$
4. On prend $[a,b] = [0,1]$ et $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $M = \sup_{[0,1]} |f''|$. Déterminer n pour que la méthode des trapèzes avec n intervalles donne un nombre qui approche $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à moins de 10^{-2} près. En déduire un encadrement de cette intégrale.

[000804]

Exercice 2404

Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

Correction ▼ [002081]

Exercice 2405

Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,
$$f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$
sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Indication ▼ Correction ▼ [002082]

Exercice 2406

Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$,
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = aq^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a,b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b-a).\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002083]

Exercice 2407

Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

1. $f(x) = [x]$ sur $[0,2]$
2. $g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $h : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

Correction ▼ [002084]

Exercice 2408

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, que f est continue en un point $x_0 \in [a,b]$ et que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle.
2. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, et que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Indication ▼ Correction ▼ [002085]

Exercice 2409

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, positive ; on pose $m = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = m.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002086]

Exercice 2410

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002087]

Exercice 2411

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Correction ▼ [002091]

Exercice 2412

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002092]

Exercice 2413

Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$

1. Quel est l'ensemble de définition de F. F est-elle continue, dérivable sur son ensemble de définition ?
2. Déterminer $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ en comparant F à $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt$.

Indication ▼ Correction ▼ [002093]

Exercice 2414

1. Soit f une fonction continue définie sur un intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$, telle que
$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a) \min_{x\in[a,b]} f(x).$$
Montrer que f est constante.
2. Soient u, v, deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\int_a^b |u(t)v(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |u(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |v(t)|^2\right)^{1/2}.$$
Indication : poser, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitraire, $f_\lambda(t) = |\lambda u(t) + v(t)|^2$ et appliquer la question précédente.

3. Dans quels cas cette inégalité est-elle une égalité ?
4. Soit $C([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Montrer que

$$u \in C([a,b]) \mapsto \left(\int_a^b u(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

est une norme sur $C([a,b])$.

[002315]

Exercice 2415

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,+\infty[$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt \geq (b-a)^2.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ? (On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

[002316]

Exercice 2416

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. En utilisant la formule de la moyenne, montrer que

$$\forall a \in [0,1[, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^a f(t^n)\,dt = af(0).$$

2. Montrer qu'il existe $M > 0$, tel que

$$\forall a \in [0,1[, \qquad \left|(a-1)f(0) + \int_a^1 f(t^n)\,dt\right| \leq 2M(1-a).$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0).$$

[002317]

Exercice 2417

Soient f et g deux fonctions réelles périodiques de période T continues sur $\mathbb{R}$. On appelle *produit de convolution* de f et g la fonction h notée $f \star g$ et définie par

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(x-t)\,dt.$$

1. Montrer que h est une fonction périodique de période T.
2. Montrer

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)g(x-t)\,dt, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que $f \star g = g \star f$.

[002324]

Exercice 2418 Densité des fonctions en escalier

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, $\int_{t=a}^b f(t)g(t)\,dt = 0$. Démontrer que $f = 0$.

[004220]

Exercice 2419 Changements de signe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que : $\forall\, k \in \{0,1,\ldots,n-1\},\ \int_{t=a}^b t^k f(t)\,dt = 0$.
Démontrer, par récurrence, que f change au moins n fois de signe sur $]a,b[$ (raisonner par l'absurde).

[004221]

Exercice 2420 Formule de la moyenne généralisée

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_{t=a}^b f(t)\,dt$.
2. Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.

3. Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_{t=0}^{x} t f(t)\,dt$.

Correction ▼ [004222]

Exercice 2421 Inégalité de Jensen

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right) \le \frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} g(f(t))\,dt$. [004223]

Exercice 2422 $\sqrt{1+f^2}$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue positive. On pose $A = \int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$.
Montrer que $\sqrt{1+A^2} \le \int_{t=0}^{1}\sqrt{1+f^2(t)}\,dt \le 1+A$.

[004224]

Exercice 2423 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t\,\ln(1+t^2)}{\sin^2 t\,\operatorname{sh} t}\,dt$. [004225]

Exercice 2424 Calcul de limite

Pour $0 < a < b$, déterminez $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=ax}^{bx} \frac{1-\cos u}{u^3}\,du$.
Correction ▼ [004226]

Exercice 2425 $\int f + \int f^{-1}$

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ continue, bijective, strictement croissante.
Calculer $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt + \int_{u=c}^{d} f^{-1}(u)\,du$ (faire un dessin, et commencer par le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$).

[004227]

Exercice 2426 Maximum-minimum

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \min(x,b_n)\,dx,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \max(x,a_n)\,dx.$$

Correction ▼ [004232]

Exercice 2427 Intégrale de $|f|$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{t=a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt\right|$ où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Montrer que $I_n \to \int_{t=a}^{b} |f(t)|\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

[004234]

Exercice 2428 Usage de symétrie

Soit $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$, et en déduire la valeur de I.
Correction ▼ [004235]

Exercice 2429 Usage de symétrie

Calculer $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t}{1+\sin t}\,dt$.
Correction ▼ [004236]

Exercice 2430 Usage de symétrie

Calculer $\int_{t=0}^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,dt$. On remarquera que $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$. [004237]

Exercice 2431 ****

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}$.

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

Correction ▼ [005444]

Exercice 2432 ***T

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a,b]$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right) \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \text{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne infèrieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

Correction ▼ [005449]

Exercice 2433

En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes :

1. Si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
2. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
3. Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
4. Une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005917]

Exercice 2434

Montrer qu'une fonction *monotone* sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005918]

Exercice 2435

Montrer qu'une fonction *continue* sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005919]

Exercice 2436

1. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.
2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$
est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction ▼ [005920]

Exercice 2437

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ telle que :
$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.
2. Montrer qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble des points où f n'est pas continue est *négligeable*.

Correction ▼ [005921]

Exercice 2438

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \ :]0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement vers une fonction f sur $]0,1]$ mais que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \quad \neq \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Vérifier que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas *uniforme* sur $]0,1]$.

Correction ▼ [005922]

Exercice 2439

Montrer que, si $f \ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

En déduire les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} \qquad b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad c) \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Correction ▼ [005923]

Exercice 2440

1. Montrer que si $f \ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$
2. Calculer (en utilisant 1.) les intégrales suivantes :
$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx.$$
$$\textit{Rappel :} \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Correction ▼ [005924]

86 127.02 Somme de Riemann

Exercice 2441

Soient f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ croissantes. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\int_0^x f\right)\left(\int_0^x g\right) \leq x\int_0^x fg.$$

Indication : on établira d'abord que, si $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Remarquer que :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

[000794]

Exercice 2442

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

[000840]

Exercice 2443

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \ ; \ \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \ ; \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} \ ; \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

et donner un équivalent de $u_n - \ell$.

[000841]

Exercice 2444

Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

[000842]

Exercice 2445

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

[000843]

Exercice 2446

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \ln \frac{(3n+6p-4)(n+2p)^2}{3n^3}$.

[000844]

Exercice 2447

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $\displaystyle u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$;
2. $\displaystyle v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002100]

Exercice 2448 Sommes de Riemann

1. Trouver $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.
3. Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.
4. Trouver $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.
5. Donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.
6. Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Correction ▼ [004228]

Exercice 2449 Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$.

[004229]

Exercice 2450 Moyenne géométrique

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \to \exp\int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.
(On pourra utiliser : $\forall\, x \geq -\frac{1}{2},\ x - x^2 \leq \ln x \leq x$) [004230]

Exercice 2451

1. Montrer que : $\forall\, x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Correction ▼ [004231]

Exercice 2452 Intégrale de $\ln|x-e^{it}|$

Pour $x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm 1$, on pose $I = \int_{t=0}^{2\pi} \ln|x-e^{it}|\,dt$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer I.
[004233]

Exercice 2453 ***IT

Limites de

1) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$ 2) $\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)\right)^{1/n}$ ($a > 0$ donné) 3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$ 4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$
5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$ 6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$ 7) $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$ 8) $n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2}$

Correction ▼ [005446]

Exercice 2454 ***I

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction ▼ [005447]

87 127.03 Longueur, aire, volume

Exercice 2455

Construire la courbe paramétrée $C \left\{ 11.2 \quad \begin{array}{l} x = \frac{\cos t}{1+\lambda\cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1+\lambda\cos t} \end{array} \right.$ où λ est un paramètre appartenant à $[0,1[$.
Calculer l'aire S limitée par C de deux façons :
– En se ramenant au calcul de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\lambda\cos t)^2}$.
– En reconnaissant la nature géométrique de C.

Correction ▼ [000805]

Exercice 2456

Représenter la courbe définie par son équation polaire $\rho = a\sin^3\frac{\theta}{3}$. Calculer sa longueur L et les aires A_1 et A_2 limitées par les deux boucles qu'elle forme.

Correction ▼ [000806]

Exercice 2457

On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon r autour d'une droite de son plan passant à distance R de son centre (on suppose $r < R$). Calculer l'aire A du tore, et son volume V.

Correction ▼ [000807]

Exercice 2458

On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}$ Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

Correction ▼ [000808]

Exercice 2459

On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y &= r\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{cases}$$

Représenter la courbe pour $n = 1,2,3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

Correction ▼ [000809]

Exercice 2460

Soit C un cercle fixe de rayon R. Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C. Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ. Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= R(\cos t + \sin^2 t) \\ y &= R\sin t(1-\cos t) \\ z &= R(1-\cos t) \end{cases}$. En déduire la longueur L de Γ. Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.

Correction ▼ [000810]

Exercice 2461

Calculer $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx$ (on posera $\theta = \arcsin \frac{x}{R}$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

Correction ▼ [002098]

Exercice 2462

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Correction ▼ [002099]

Exercice 2463 Approximation des rectangles pour une fonction lipchitzienne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, K-lipchitzienne.

Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \frac{K(b-a)^2}{2n}$.

[004241]

Exercice 2464 Approximation des tangentes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \frac{a_k+a_{k+1}}{2}$.

Soit $I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1. Donner une interprétation géométrique de I_n.
2. Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt - I_n\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \sup\limits_{[a,b]}|f''|$.

[004242]

Exercice 2465 Approximation des trapèzes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_{t=a}^{b} \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,dt$.
2. Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $I = \int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$, et I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles. Démontrer que $|I-I_n| \leq \frac{\sup|f''|(b-a)^3}{12n^2}$.

[004243]

Exercice 2466 Aire sous une corde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M' = \|f'\|_\infty$.

1. En majorant f par une fonction affine par morceaux, démontrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right| \leq M' \frac{(b-a)^2}{4}$.
2. Quand y a-t-il égalité ?

[004245]

88 127.04 Intégration à l'aide d'une fonction auxiliaire

Exercice 2467

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2+5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x)dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x}dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx,\ m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x}dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

[000811]

89 127.05 Changement de variables

Exercice 2468

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Résultat : $I = 2 - \pi/2$. [000812]

Exercice 2469

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1.
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

[000813]

Exercice 2470

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x})\ ;$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx, \quad (\frac{x-1}{2} = \operatorname{th} u \text{ ou } \coth u)\ ;$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx \quad ; \quad \int x^2\sqrt{1+x^3}dx.$$

[000814]

Exercice 2471

Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

[002318]

Exercice 2472

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$
$$\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt,$$
$$\int_0^\pi t^2\sin t\,dt,$$
$$\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\sqrt{1-t}\,dt.$$

[002321]

Exercice 2473

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(2+\cos^2 t)^2},$$
$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 t\cos 3t\sqrt{\cos 2t}\,dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}.$$

[002322]

Exercice 2474

Soit f une fonction continue dans $[0,\pi]$. Montrer, en utilisant un changement de variables, que l'on a

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

[002323]

Exercice 2475

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e t^n\ln^4 t\,dt, \qquad n\neq 1,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2},$$
$$\int_a^b \sqrt{(t-a)(t-b)}\,dt,$$
$$\int_0^1 2^t\cdot 3^{2t}\cdot 5^{3t}\,dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$
$$\int_{-\pi}^\pi \sqrt{1+\cos t}\,dt,$$
$$\int_0^1 t^7\arctan t\,dt.$$

[002326]

Exercice 2476

Soit $x>0$ un réel. Calculer les valeurs de

$$I(x)=\int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2}dt \qquad \text{et} \qquad J(x)=\int_0^x \frac{\arctan t}{(1+t)^2}dt.$$

Quelles sont leurs limites quand $x \to +\infty$? [002329]

Exercice 2477

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad (4x^2+4x+5)^{-1/2}, \qquad \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{\arctan x}{1+x^2}, \qquad \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

[002335]

Exercice 2478

Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés)

1) $\int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}$ $(0 < a)$ 2) $\int_0^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx)\,dx$ et $\int_0^{\pi} 2\cos(px)\sin(qx)\,dx$ et $\int_0^{\pi} 2\sin(px)\sin(qx)\,dx$
3) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$ 4) $\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\,dx$
5) $\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan} x\,dx$ 6) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx$
7) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ 8) $\int_1^x (\ln t)^n\,dt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Correction ▼ [005470]

90 127.06 Intégration par parties

Exercice 2479

Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

[000815]

Exercice 2480

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

[000816]

Exercice 2481

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx$.
2. En déduire un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$ si $\forall x \in [a,b]\ m \leq f''(x) \leq M$.

[000817]

Exercice 2482 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

[000818]

Exercice 2483

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

[000819]

Exercice 2484

Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

[000820]

Exercice 2485

Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

[000821]

Exercice 2486

Pour tous n, p dans $\mathbb{N}$, on définit

$$J_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^p t \, dt.$$

Trouver des relations de récurrence liant $J_{n,p}$ et $J_{n,p-2}$, ainsi que $J_{n,p}$ et $J_{n-2,p}$. En déduire la valeur de $J_{n,p}$. [002336]

---

91 127.07 Polynme en sin, cos ou en sh, ch

Exercice 2487

Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x) dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x dx.$$

[000822]

Exercice 2488

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$x \cos^2 x$$

$$\cos(2x) \cos^2 x$$

[000823]

Exercice 2489

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$ **b)** $\int \cos^4 x dx$ **c)** $\int \cos^{2003} x \sin x dx$ **d)** $\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx$

e) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ **f)** $\int \frac{1}{\cos x} dx$ **g)** $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx$ **h)** $\int \frac{1}{7+\tan x} dx$

Correction ▼ [002090]

Exercice 2490

Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n, en déduire $\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$
4. A l'aide de $(n+1) I_n I_{n+1}$ montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. En déduire $\frac{1.3...(2n+1)}{2.4...(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002096]

Exercice 2491 Intégrales de WALLIS

Pour n entier naturel, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

1. Calculer W_0 et W_1. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} et en déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.
2. Etudier les variations de la suite (W_n) et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. En déduire $\lim_{n\to+\infty} W_n$, puis un équivalent simple de W_n. En écrivant $\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} 2$, retrouver directement $\lim_{n\to+\infty} W_n$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{1.3....(2n-1)}{2.4....(2n)}\right)^2 = \frac{1}{\pi}$. (Formule de WALLIS)

[005474]

Exercice 2492

Pour n entier naturel, on pose $In = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_n en fonction de n.
2. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Correction ▼ [005475]

92 127.08 Fraction rationnelle

Exercice 2493

Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.

14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Correction ▼ [000824]

Exercice 2494

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a\in\mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a\to+\infty$?
12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

Correction ▼ [000825]

Exercice 2495

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x^4+1)^2} \quad ; \quad \int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}.$$

[000826]

Exercice 2496

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$
$$\frac{2x}{(1-x+x^2)^2}$$
$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$
$$\frac{1}{(1+x^3)^3}$$

[000827]

Exercice 2497

Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002097]

Exercice 2498 Fractions rationnelles

$\frac{1}{x^3-1}$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\frac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert + \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x}{3(x^3-1)}$
$\frac{1}{x^3(1+x^3)}$	$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$
$\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$
$\frac{1}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}(1+x\sqrt{2}) - \operatorname{Arctan}(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x^2}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}(1+x\sqrt{2}) - \operatorname{Arctan}(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x}{(x^4+1)^2}$	$\frac{\operatorname{Arctan} x^2}{4} + \frac{x^2}{4(x^4+1)}$
$\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$	$\frac{7}{10}\ln\lvert x-2\rvert + \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{10}\operatorname{Arctan}(x+1)$
$\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$	$\frac{4}{x} + \frac{3x}{2(x^2-1)} + \frac{11}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\frac{1}{x^{20}-1}$	$\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1) - \sin k\alpha\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos k\alpha}{\sin k\alpha}\right)\right] + \frac{1}{20}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}$
$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)}$	$\frac{1}{(b-a)^n}\ln\left\lvert\frac{x-b}{x-a}\right\rvert + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

[004263]

93 127.09 Fraction rationnelle en sin, cos ou en sh, ch

Exercice 2499

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx \quad ; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} \quad ; \quad \int \frac{\cos x}{1+\sin 2x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\tan x - \tan a}{\tan x + \tan a}dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}dx.$$

[000828]

Exercice 2500

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{1+\tan x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}$$

[000829]

Exercice 2501

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx \quad \text{et} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002089]

Exercice 2502

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Correction ▼ [002095]

Exercice 2503 Fonctions trigonométriques

$\frac{1}{\sin x \sin 4x}$	$-\frac{1}{4\sin x}+\frac{1}{8}\ln\left\lvert\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\rvert-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\rvert$
$\frac{\tan x}{1+\tan x}$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\sin x\rvert$
$\cos x\sqrt{\cos 2x}$	$\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}\sin x)$
$\frac{1}{\sin x+\sin 2x}$	$\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$
$\frac{1}{\cos x \cos 2x}$	$\sqrt{2}\operatorname{Argth}(\sqrt{2}\sin x)-\operatorname{Argth}(\sin x)$
$\frac{1}{\sin x\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}$	$-2\sqrt{\frac{1-\sin x}{\sin x}}+\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-\sin x}{2\sin x}}$ (poser $u=1/\sin x$)
$\frac{a\sin x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}$	$-\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}{a}\right)$

[004264]

94 127.10 Intégrale abélienne

Exercice 2504

Calculer les primitives suivantes :

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}\quad;\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}\quad;\quad\int\frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}dx\quad;$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}dx\quad;\quad\int\frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx.$$

[000830]

Exercice 2505

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}$$

[000831]

Exercice 2506 Radicaux

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{2}\ln\left\lvert 2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\rvert$
$\frac{4x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}$	$-\sqrt{-4x^2+12x-5}+\frac{3}{2}\operatorname{Arcsin}(x-3/2)$
$\frac{1}{2x-x^2+\sqrt{2x-x^2}}$	$\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
$\frac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-1}{2}\right)$ (poser $x=1+2\cos\varphi$)
$\frac{2+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+4}}$	$(\sqrt{x+3}+4)(\sqrt{x+4}-2)-4\ln(1+\sqrt{x+4})+\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})$
$x+\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}{4}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$(x+\sqrt{a^2+x^2})^n$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)}+a^2\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$ $(n\neq 1)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$\frac{1}{6}\ln\left[\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2u+1}{\sqrt{3}},u=\sqrt[3]{1+1/x^3}$ (poser $v=1/x^3$)

[004265]

95 127.11 Primitives diverses

Exercice 2507

Calculer les primitives suivantes.

1. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx.$

2. $\int \cos^5 t\,dt$; $\int \cosh^3 t\,dt$; $\int \cos^4 t\,dt$; $\int \sinh^4 t\,dt$.
3. $\int x^3 e^x\,dx$.
4. $\int \ln x\,dx$; $\int x\ln x\,dx$; $\int \arcsin x\,dx$.
5. $\int \cosh t \sin t\,dt$.
6. $\int \frac{dx}{\sin x}$.
7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.
8. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.
9. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$; $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.
10. $\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$ pour $0<x<1$.
11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
12. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.
13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$ avec $0<x<a$.
14. $\int \frac{\cosh x}{\cosh x+\sinh x}\,dx$.

Correction ▼ [000832]

Exercice 2508

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad ; \quad \int \frac{1+\cos 2x}{1-\tan^2 x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sin ax+\cos bx}{e^x}dx \quad ; \quad \int \frac{x(2+\cos x)}{\sin^2 x}dx.$$

[000833]

Exercice 2509

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\operatorname{ch} x\sin(2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$$

$$(x^2+2x+2)\cos(2x)$$

$$x^2\cos x \text{ et } x^2\sin x \text{ en utilisant les complexes}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \text{ et } \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$$

[000834]

Exercice 2510

Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)$. [000835]

Exercice 2511

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right)$.

[000836]

Exercice 2512

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

[000837]

Exercice 2513

Soient $I=\int_0^\pi x\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^\pi x\sin^2 x dx$.

1. Calculer I et $I+J$.
2. En déduire J.

[000838]

Exercice 2514

Soit $a_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Calculer $a_0,\dots,a_4$.
2. Etudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[000839]

Exercice 2515

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\int \arctan x dx$ **b)** $\int \tan^2 x dx$ **c)** $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **d)** $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

e) $\int \arcsin x dx$ **f)** $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$ **g)** $\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ **h)** $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx$ **j)** $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ **k)** $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$ **l)** $\int \cos x \exp x dx$

Correction ▼ [002088]

Exercice 2516

Calculer les intégales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **b)** $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

d) $\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 dx$ **e)** $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ **f)** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

g) $\int_1^2 x^2\ln x dx$ **h)** $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx$ **i)** $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$

Correction ▼ [002094]

Exercice 2517

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
t &\mapsto t^2\exp(t^3),\\
t &\mapsto \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t},\\
t &\mapsto \frac{1}{1-t^2+2\sqrt{1-t^2}},\\
t &\mapsto \frac{\sinh^2 t}{\cosh t},\\
t &\mapsto \frac{\cos t}{\cos 2t},\\
t &\mapsto \frac{1}{1+\text{th}^2 t}.
\end{aligned}$$

[002319]

Exercice 2518

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} t & \mapsto & \dfrac{\sin t}{\sin^2 t - \cos t}, \\ t & \mapsto & \dfrac{t^2}{(\cos t + t\sin t)^2}, \\ t & \mapsto & \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}, \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t^8+t^4+1}. \end{array}$$

[002320]

Exercice 2519

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} t & \mapsto & \tan t, \\ t & \mapsto & \operatorname{arg\,sinh} t, \\ t & \mapsto & \dfrac{\tan^3 t}{\cos^6 t}, \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}, \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{t}+\sqrt{t+2}}, \\ t & \mapsto & t\sqrt[n]{1+t}, \\ t & \mapsto & \cosh^3 t, \\ t & \mapsto & \dfrac{t^3}{(a^2-t^2)^{3/2}}, \\ t & \mapsto & \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}}, \\ t & \mapsto & \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}, \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t^2}\sqrt[4]{\dfrac{t+1}{t-1}}. \end{array}$$

[002325]

Exercice 2520

Fonction Gamma - Pour tout $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

(on admettra que l'intégrale converge). Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Calculer la valeur de $\Gamma(1)$. En déduire celle de $\Gamma(n)$, pour tout entier $n > 0$.

Soit $a > 0$ un réel, et $n > 0$ un entier. Montrer que

$$\int \frac{dt}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}\theta d\theta \qquad \text{où} \qquad \theta = \arctan\frac{x}{a}.$$

En déduire la primitive de $\dfrac{x+4}{(x^2+2x+2)^3}$.

Soient x et y deux réels vérifiant $1 > y > x > 0$. Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \int_x^y \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Soit f une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$. On pose pour tout $x > 0$ et tout entier $n > 0$

$$u_n(x) = \left[\int_0^x f(t)^n\, dt\right]^{1/n}$$

et

$$M(x) = \sup_{t\in[0,x]} |f(t)|.$$

1. Montrer que $u_n(x) \leq M(x)x^{1/n}$.
2. En utilisant la continuité de f, montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $u_n(x) \geq \delta^{1/n}[M(x) - \varepsilon]$.
3. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = M(x).$$

[002330]

Exercice 2521 Diverses primitives

$x^k \ln x$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right)$
$\ln(1+x^2)$	$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan} x$
$\frac{x^2+a}{x^2+1}\operatorname{Arctan} x$	$\frac{1}{2}\left((2x+(a-1)\operatorname{Arctan} x)\operatorname{Arctan} x - \ln(1+x^2)\right)$
$\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1/x}$	$xe^{1/x}$
$\frac{x}{\cos^2 x}$	$x\tan x + \ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$	$2\operatorname{Arctan}\sqrt{e^x-1}$
$\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$	$(x+2)\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} - \ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)$
$\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$	$x\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{Arctan}\sqrt{x}$
$e^{\operatorname{Arcsin} x}$	$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\operatorname{Arcsin} x}$
$x(\cos^2 x)e^{-x}$	$\frac{e^{-x}}{50}\left((3-5x)\cos 2x + (4+10x)\sin 2x - 25(x+1)\right)$
$(x^2+x+1)e^{2x}\cos x$	$(\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{25}+\frac{39}{125})e^{2x}\cos x + (\frac{x^2}{5}-\frac{3x}{25}+\frac{27}{125})e^{2x}\sin x$

[004266]

Exercice 2522 Intégrales définies

$\int_{t=0}^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = \frac{3\pi}{16}$

$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\cos^3 t\,dt = \frac{4}{15}$

$\int_{t=0}^{\pi/2} t^2\cos t\,dt = \frac{\pi^2}{4} - 2$

$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} t^2\sin t\cos^2 t\,dt = 0$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{\pi}{4}$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin t} = 1$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{1-a\sin t}}\,dt = \frac{4(2-(a+2)\sqrt{1-a})}{3a^2}$

$\int_{t=0}^{1} t\ln t\,dt = -\frac{1}{4}$

$\int_{t=0}^{1} \operatorname{Arcsin} t\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$

$\int_{t=0}^{3} \frac{2t}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

$\int_{t=0}^{1} \frac{t^2\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \ln\sqrt{2}$

$\int_{t=0}^{\ln 2} \sqrt{e^t-1}\,dt = 2 - \frac{\pi}{2}$

$\int_{t=4}^{9} \frac{dt}{\sqrt{t}-1} = 2+2\ln 2$

$\int_{t=0}^{1} \frac{te^t}{\sqrt{e^t+1}}\,dt = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{e+1} + 4\ln\left[\frac{\sqrt{e+1}+1}{\sqrt{2}+1}\right] - 2$

$\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-a^2t^2)}{t^2}\,dt = a\ln\left|\frac{1-a}{1+a}\right| - \ln(1-a^2)$

$\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{2+\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6}(3-\frac{4}{\sqrt{3}})$

$\int_{t=-1}^{1} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

$\int_{t=-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\,dt = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

[004267]

Exercice 2523 ***

Etude complète de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt$.

Correction ▼ [005450]

Exercice 2524 ***

Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.
4. Soit $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et que g admet sur $]0,+\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Correction ▼ [005451]

Exercice 2525 ****

Soit $f(t) = \frac{t^2}{e^t-1}$ si $t \neq 0$ et 0 si $t = 0$.

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$.

Correction ▼ [005465]

Exercice 2526

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\begin{array}{lllll}
1)\ \frac{1}{x^3+1} & 2)\ \frac{x^2}{x^3+1} & 3)\ \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1} & 4)\ \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5} & 5)\ \frac{1}{x(x^2+1)^2}\\
6)\ \frac{x^2+x}{x^6+1} & 7)\ \frac{1}{x^4+1} & 8)\ \frac{1}{(x^4+1)^2} & 9)\ \frac{1}{x^8+x^4+1} & 10)\ \frac{x}{(x^4+1)^3}\\
11)\ \frac{1}{(x+1)^7-x^7-1} & & & &
\end{array}$$

Correction ▼ [005466]

Exercice 2527

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\begin{array}{lllll}
1)\ \frac{1}{\cos x} \text{ et } \frac{1}{\operatorname{ch} x} & 2)\ \frac{1}{\sin x} \text{ et } \frac{1}{\operatorname{sh} x} & 3)\ \frac{1}{\tan x} \text{ et } \frac{1}{\operatorname{th} x} & 4)\ \frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x} & 5)\ \frac{1}{2+\sin^2 x}\\
6)\ \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} & 7)\ \frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)} & 8)\ \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x} & 9)\ \frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1} & 10)\ \frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\\
11)\ \frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x} & 12)\ \frac{\sin x}{\cos(3x)} & 13)\ \frac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x} & 14)\ \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x} & 15)\ \sqrt{\operatorname{ch} x-1}\\
16)\ \frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x} & 17)\ \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x} & 18)\ \frac{1}{1-\operatorname{ch} x} & &
\end{array}$$

Correction ▼ [005467]

Exercice 2528

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\begin{array}{lllll}
1)\ \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} \text{ et } \sqrt{x^2+2x+5} & 2)\ \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} & 3)\ \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} & 4)\ \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} & 5)\ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\\
6)\ \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}} & 7)\ \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} & 8)\ \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} & 9)\ \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2} \text{ et } \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} & \\
10)\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} & & & &
\end{array}$$

Correction ▼ [005468]

Exercice 2529

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\begin{array}{lllll}
1)\ \frac{1}{x\ln x} & 2)\ \operatorname{Arcsin} x & 3)\ \operatorname{Arctan} x & 4)\ \operatorname{Arccos} x & 5)\ \operatorname{Argsh} x\\
6)\ \operatorname{Argch} x & 7)\ \operatorname{Argth} x & 8)\ \ln(1+x^2) & 9)\ e^{\operatorname{Arccos} x} & 10)\ \cos x\ln(1+\cos x)\\
11)\ \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}} & 12)\ \frac{xe^x}{(x+1)^2} & 13)\ (\frac{x}{e})^x\ln x & 14)\ x^n\ln x\ (n\in\mathbb{N}) & 15)\ e^{ax}\cos(\alpha x)\ ((a,\alpha)\in(\mathbb{R}^*)^2)\\
16)\ \sin(\ln x) \text{ et } \cos(\ln x) & 17)\ \frac{\sqrt{x^n+1}}{x} & 18)\ x^2e^x\sin x & &
\end{array}$$

Correction ▼ [005469]

Exercice 2530

Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que les primitives de $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ soient rationnelles (a, b, c et d réels donnés).

Correction ▼ [005471]

96 127.12 Intégrale impropre

Exercice 2531

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(bile)} d(bile).$$

Correction ▼ [001280]

Exercice 2532

1. Montrer que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leq x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0,n] \ (1-\frac{x}{n})^n \leq e^{-x} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n}$.
3. En déduire que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$
Rappel (intégrales de Wallis) : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n \, d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ existe et vaut I_{2n-2}.
5. Montrer que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[001281]

Exercice 2533

Étude de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$. [001282]

Exercice 2534

Soit f une application C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f+f'' \geq 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)+f(x+\pi) \geq 0.$$

[001283]

Exercice 2535

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F a aussi la limite ℓ en $+\infty$.

2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.
3. Montrer que si $f \to \infty$ quand $x \to \infty$, alors $F \to \infty$ quand $x \to \infty$.

[001284]

Exercice 2536

Étudier la fonction :

$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

[001285]

Exercice 2537

Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe mais telle qu'on n'ait pas :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Donner un exemple de fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe mais telle que :

$$\int_0^\infty f^2(u)du$$

n'existe pas.

[001286]

Exercice 2538

Soit f une fonction positive décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$f(x) = o(\frac{1}{x})$$

quand $x \to \infty$.

[001287]

Exercice 2539

Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\int_0^\infty f$ existe ; montrer que $\ell = 0$.
Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

[001288]

Exercice 2540

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2$ existe. Montrer que quand $x \to \infty$:

$$\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x}).$$

[001289]

Exercice 2541

Étudier la nature de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

selon $\alpha \in \mathbb{R}$.

[001290]

Exercice 2542

Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2},$$
$$\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,$$
$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n}dt.$$

Correction ▼ [001291]

Exercice 2543

Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que
$$\int_1^\infty f(t)dt$$
converge. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x tf(t)dt = 0.$$

[001292]

Exercice 2544

Soit $f \in C([1,\infty[,\mathbb{R}^+)$ décroissante, on pose :
$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ a une limite quand $n\to\infty$ si et seulement si $\int_1^\infty f$ converge, et que dans ce cas :
$$\int_{n+1}^\infty f \leq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^m f(k) \leq \int_n^\infty f.$$
3. Montrer que si $\int_1^\infty f$ diverge on a : $S_n \backsim \int_1^n f$ quand $n\to\infty$.

[001293]

Exercice 2545

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue et monotone, telle que $\int_0^1 f$ existe. Calculer
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

[001294]

Exercice 2546

Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors
$$\int_0^\infty \exp(if(t))dt$$
n'existe pas. [001295]

Exercice 2547

Nature de :
$$\int_0^\infty \sin t \sin\frac{1}{t}dt,\ \int_0^\infty \frac{e^{\sin t}}{t}dt,\ \int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}dt,\ \int_0^1 \cos\ln t dt,\ \int_0^\infty \cos\exp t dt.$$

[001296]

Exercice 2548

Nature et calcul de :
$$\int_0^\infty \ln t \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt, a>0\ ;\ \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right)dt, n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \int_0^1 \left(\frac{1}{t}-E(\frac{1}{t})\right)dt.$$

[001297]

Exercice 2549

Convergence et calcul de :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\cosh^2 x},\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sinh x},\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\cosh t}.$$

[001298]

Exercice 2550

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \geq 0, g \geq 0, g = o(f)$ en $+\infty$, et $\int_0^\infty f$ n'existe pas. Montrer alors :

$$\int_0^x g(u)du = o\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

quand $x \to \infty$. [001299]

Exercice 2551

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, tendant vers ℓ en $+\infty$, montrer alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{f(t)n}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\ell.$$

[001300]

Exercice 2552

Calculer :

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan t}{t^2}dt\ ,\ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}dx.$$

[001301]

Exercice 2553

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos tx dt$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. [001302]

Exercice 2554

Sans les calculer, dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}},$$
$$\int_0^{\pi/2} \tan t\ dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\arcsin t}\ln(1-t)}.$$

[002331]

Exercice 2555

Sans les calculer, dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$\int_0^\infty \frac{t^3-5t^2+1}{2t^5-2t^3+t^2+1}\ dt,$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\ln\frac{t-1}{t+1}\ dt,$$
$$\int_0^\infty \frac{dt}{t\operatorname{arg\,cosh} t},$$
$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\ dt,$$

[002332]

Exercice 2556

Soit $n \geq 0$ un entier. Montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^\infty t^n \exp(-t^2)dt$$

est convergente. La calculer en fonction de n, sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}/2$.

[002333]

Exercice 2557

On définit

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si $k \geq 1$, alors
$$\frac{2}{(2k+1)\pi} < u_{2k} < \frac{1}{k\pi}.$$
Trouver une inégalité similaire pour u_{2k+1}, puis pour $u_{2k} + u_{2k+1}$.
3. Montrer que la suite de terme général $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ admet une limite finie. En déduire que
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$
est convergente.

[002334]

Exercice 2558

Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Montrer que $\varphi(x)$ a une limite quand x tend vers 1 et la calculer. (Indication : comparer à $\int_x^{x^2} 1/(t \ln t)\, dt$). [002337]

Exercice 2559

Dire si les intégrales suivantes sont convergentes (en discutant éventuellement suivant la valeur des paramètres) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt[3]{1-t}}, \quad \int_0^{\pi/2} \tan t\, dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}, \quad \int_0^1 \cos(\ln t)\, dt, \quad \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\, dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^2+t-1}{\sqrt{t}\,(t^3-2t^2+3t-6)}\, dt, \quad \int_0^\infty t^\alpha\,[1-e^{-1/\sqrt{t}}]\, dt, \quad \int_0^\infty \frac{\ln t - \ln(1-e^{-t})}{t} e^{-\alpha t}\, dt.$$

[002338]

Exercice 2560

Montrer la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos\alpha \cos t + 1}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}, \quad \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{e^{2t}+e^t-6}, \quad \int_a^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+a^2}},\ (a>0), \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^3-t^2-1}{t^6+2t^4+t^2}\, dt.$$

[002339]

Exercice 2561 Étude de convergence

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$ (cv)
$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\, dt$ (dv)
$\int_0^1 \frac{t^\alpha-1}{\ln t}\, dt$ (cv ssi $\alpha > -1$)
$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$ (dv)
$\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) dt$ (dv)
$\int_0^{+\infty} \left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$ (cv)
$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, dt$ (cv ssi $\alpha > 1$)

$\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ (dv)
$\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,dt$ (cv ssi $0<\beta-\alpha<1$ ou $\alpha=0$)
$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ (cv)
$\int_0^1 \frac{dt}{\arccos t}$ (cv)
$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{Arctan} t)}{t^\alpha}\,dt$ (dv)
$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\,dt}{(t^2-1)^\alpha}$ (cv ssi $0<\alpha<1$)
$\int_0^1 \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,dt$ (cv ssi $\alpha<\beta+1$)
$\int_0^{+\infty} t^\alpha\left(1-e^{-1}\sqrt{t}\right)dt$ (cv ssi $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$)
$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1}tt^{-k}\,dt$ (cv)

[004268]

Exercice 2562 Fractions rationnelles

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \pi$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-2t\cos\alpha+1)} = \frac{\pi}{2|\sin\alpha|}$
$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{3\pi}{4}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)(t^2+a^2)} = \frac{\pi}{1+|a|}$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^6(1+t^{10})} = \frac{4-\pi}{20}$

[004269]

Exercice 2563 Fonctions trigonométriques

$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2dt}{2+\sin t+\cos t} = 2\pi\sqrt{2}$
$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,dt = \int_0 +\infty \frac{2t^2\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{3\tan t+2} = \frac{\pi+3\ln(3/2)}{13}$
$\int_0^{\pi} \frac{dt}{(a\sin^2 t+b\cos^2 t)^2} = \frac{\pi(a+b)}{2\sqrt{ab}^3}$
$\int_0^{\pi/4} \cos t\ln(\tan t)\,dt = -\ln(1+\sqrt{2})$

[004270]

Exercice 2564 Radicaux

$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \frac{\pi}{2}$
$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}} = \frac{9}{2}$
$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \pi$
$\int_0^1 \frac{t^5\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{8}{15}$
$\int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$\int_0^1 \frac{dt}{(4-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
$\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$
$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t^2-t^3}} = \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
$\int_0^1 \operatorname{Arctan}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^{10}+t^5+1}} = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

[004271]

Exercice 2565 Exponentielles

$\int_2^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(e^{2t}-5e^t+6)(e^t-1)} = \ln\left(\frac{e^2-2}{\sqrt{e^4-4e^2+3}}\right)$

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^4 t+\mathrm{sh}^4 t} = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$

[004272]

Exercice 2566 Divers

$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt = 12$

$\int_0^1 \mathrm{Arcsin}\,t\,dt = \frac{\pi}{2}-1$

$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = -2\ln 2$

$\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,dt = -\frac{1}{32}$

$\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = -\frac{\pi\ln 2}{2}$

$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = 4\ln 2-4$ $(u=\sqrt{1-t})$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0$ $(u=1/t)$

$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,dt = \ln 2-\frac{\pi}{2}$ $\left(u=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$

$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)$

$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt = a\pi$

$\int_0^{+\infty} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{t\,dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{2|a|(a^2+1)}$

[004273]

Exercice 2567 Centrale PC 1999

Soit (a_k) une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^n a_k = 0$. Étudier la convergence de $\int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k\cos(a_k t)\frac{dt}{t}$. [004274]

Exercice 2568 Chimie P 91

Existence et calcul de $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1-x\cos t}$.

Correction ▼ [004275]

Exercice 2569 Chimie P 1996

Convergence et calcul de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t\,dt}{\mathrm{sh}\,t}$ (on pourra décomposer l'intégrande en somme d'une série de fonctions).

Correction ▼ [004276]

Exercice 2570 Calcul par récurrence

On pose $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos(2nt)\ln(\sin t)\,dt$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Calculer $2nI_n-(2n+2)I_{n+1}$ et en déduire I_n en fonction de n.

Correction ▼ [004277]

Exercice 2571 Calcul par récurrence

Soit $\alpha\in]0,\pi[$ et $I_n = \int_{t=0}^{\pi} \frac{\cos nt\,dt}{1-\sin\alpha\cos t}$.

Calculer I_n+I_{n+2} en fonction de I_{n+1} puis exprimer I_n en fonction de α et n.

Correction ▼ [004278]

Exercice 2572 Calcul par récurrence

Calculer par récurrence : $I_n = \int_{t=0}^1 \frac{t^n\,dt}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}$.

Correction ▼ [004279]

Exercice 2573 Mines-Ponts 1999

Calculer $I_n = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$.

Correction ▼ [004280]

Exercice 2574 Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t\,dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.
2. Montrer que $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,dt$ est comprise entre $A_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$ et $B_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \mathrm{cotan}^2 t\sin^2 nt\,dt$.

3. Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ et $A_n - B_n$. En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.
4. Lorsque $n \to \infty$ montrer que $\frac{I_n}{n} \to J = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et donner la valeur de cette dernière intégrale.

Correction ▼ [004281]

Exercice 2575 $\int_0^\infty$ périodique$/t\,dt$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, périodique de période $T > 0$. On note $m = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\,dt$. Montrer que $\int_{t=T}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge si et seulement si $m = 0$. [004282]

Exercice 2576 $\int_0^\infty f(t)/t\,dt$

Soit f une application continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$. On pourra introduire la fonction $F(x) = \int_{t=1}^{x} f(t)\,dt$. [004283]

Exercice 2577 Polynôme$\times e^{-t}$

Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto (a_0,\dots,a_n)$ avec $a_k = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^k P(t)\,dt$.

1. Justifier l'existence de φ.
2. Montrer que φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

[004284]

Exercice 2578 Constante d'Euler

Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^2}\,dt$ en fonction de la constante d'Euler.

Correction ▼ [004285]

Exercice 2579 Constante d'Euler

Soit γ la constante d'Euler. Montrer que …

1. $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = -\gamma$.
2. $\int_{t=0}^{1} \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt = \gamma$.
3. $\int_{t=0}^{1} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right)dt = \gamma$.

Correction ▼ [004286]

Exercice 2580 Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continue croissante. On pose $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

1. Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ converge, montrer que $S_n \to \int_{t=a}^{b} f(t)dt$ lorsque $n \to \infty$.
2. Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ diverge, montrer que $S_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.

[004287]

Exercice 2581 Sommes de Riemann

Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.

Correction ▼ [004288]

Exercice 2582 Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer le reste : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.
2. Application : Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

[004289]

Exercice 2583 Comparaison série-intégrale

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On pose, sous réserve de convergence, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt)$ pour $t > 0$.

1. Si f est monotone et intégrable, montrer que $g(t)$ existe pour tout $t>0$ et que l'on a $tg(t) \to \int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,du$ lorsque $t \to 0^+$.
2. Même question en supposant f de classe $\mathscr{C}^1$ et f, f' intégrables.
3. On suppose maintenant f de classe $\mathscr{C}^2$ et f, f', f'' intégrables.
   Montrer que $g(t) = \frac{1}{t}\int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,du + \frac{f(0)}{2} + O_{t\to 0^+}(t)$.

Correction ▼ [004290]

Exercice 2584 Valeur moyenne d'une variable aléatoire à densité

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge. On pose $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t)\,dt$.

1. Justifier l'existence de $F(x)$, et montrer que $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \to +\infty$.
2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} F(t)\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} tf(t)dt$.

[004291]

Exercice 2585 $\int_0^\infty f(t)/t^2\,dt$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\forall\, x \geq 0,\ f'(x) \geq \alpha$. Montrer que $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ diverge.
[004292]

Exercice 2586 $x(f(x)-f(x+1))$

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Montrer que $xf(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, puis que $\int_{t=1}^{+\infty} t(f(t)-f(t+1))\,dt$ converge, et calculer la valeur de cette intégrale.
Correction ▼ [004293]

Exercice 2587 $f(|t-1/t|)$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{u=0}^{+\infty} f\left(\left|u-\frac{1}{u}\right|\right)du$.

[004294]

Exercice 2588 $(f(ax)-f(x))/x$

1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\begin{cases} f(x) \to \ell \\ f(x) \text{ si } x \to 0^+ \to L \text{ si } x \to +\infty. \end{cases}$
   Pour $a>0$, établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt$.
2. Application : Calculer $\int_{t=0}^{1} \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Correction ▼ [004295]

Exercice 2589 $f(t+a)-f(t)$, Ensi PC 1999

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty}(f(t+a)-f(t))\,dt$ converge.
2. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty}(\operatorname{Arctan}(t+1)-\operatorname{Arctan}(t))\,dt$.

Correction ▼ [004296]

Exercice 2590 Valeur moyenne

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. On pose $F(x) = \frac{1}{2}\int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.
Montrer que $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.
Démontrer le même résultat en supposant seulement la convergence de $\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.
Correction ▼ [004297]

Exercice 2591 $(\int tf(t)\,dt)/x$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,dt \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
Correction ▼ [004298]

Exercice 2592 f uniformément continue

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que $f(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$(raisonner par l'absurde).
2. Si f est positive, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge.
3. Donner un contre-exemple si f n'est pas de signe constant.

[004299]

Exercice 2593 f décroissante $\Rightarrow xf(x) \to 0$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Si $f(x) \to L$ lorsque $x \to +\infty$, combien vaut L ?
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Si f est décroissante, montrer que $xf(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

[004300]

Exercice 2594 $\int e^{-t}/t, dt$

On pose $f(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Chercher $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0^+$.

Correction ▼ [004301]

Exercice 2595 Intégrale de Gauss

1. Montrer que pour $0 \le x \le \sqrt{n}$ on a : $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \le e^{-x^2}$ et pour x quelconque : $e^{-x^2} \le \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
2. Calculer les intégrales $I_n = \int_{t=0}^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $J_n = \int_{t=0}^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ en fonction des intégrales : $K_p = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^p t\,dt$.
3. On admet que $K_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$ quand $p \to \infty$. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004302]

Exercice 2596 Intégrales de Gauss

On admet que $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer les intégrales : $I_n = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [004303]

Exercice 2597 Mines-Ponts MP 2005

Nature et calcul de $\int_{x=0}^{+\infty} \exp\left(-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right) dx$?

Correction ▼ [004304]

Exercice 2598

Existence de $\int_{x=0}^{+\infty} \sin(x^4+x^2+x)\,dx$.

Correction ▼ [004305]

Exercice 2599 $\cos(P(t))$

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \cos(P(t))\,dt$ converge.

Correction ▼ [004306]

Exercice 2600 Ensi PC 1999

Soient $I = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ et $J = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^n\,du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

Correction ▼ [004307]

Exercice 2601 f et f'' de carrés sommables

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f^2(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} f''^2(t)\,dt$ convergent. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f'^2(t)\,dt$ converge. [004308]

Exercice 2602 $f'\leq 1$, Ulm 1999

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrable.

1. On suppose $f'\leq 1$. Montrer que $f(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.
2. Est-ce encore vrai si on suppose seulement $f'\leq 1+g$ avec g intégrable ?

[004309]

Exercice 2603 Intégrales emboitées

Établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{x=0}^{+\infty}\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,dx$.

Correction ▼ [004310]

Exercice 2604 Centrale MP 2001

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que ff'' et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, que f est uniformément continue et qu'elle tend vers zéro en $+\infty$.

Correction ▼ [004311]

Exercice 2605 X MP* 2000

Donnez un équivalent pour $x\to+\infty$ de $\int_{t=0}^{x}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$.

Correction ▼ [004312]

Exercice 2606

Etudier l'existence des intégrales suivantes

1) (**) $\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)dx$ **2) (**)** $\int_1^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)dx$ **3) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x+e^x}\,dx$

4) (***) $\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}dx$ **5) (**)** $\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ **6) (**)** $\int_0^{+\infty}x^{-\ln x}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}\,dx$ **8) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ **9) (**)** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}\,dx$

10) (**) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **11) (**)** $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,dx$ **12) (***)** $\int_0^1\frac{1}{\mathrm{Arccos}(1-x)}\,dx.$

Correction ▼ [005713]

Exercice 2607

Etudier l'existence des intégrales suivantes.

1) (***) I $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^a\ln^b x}\,dx$ (Intégrales de BERTRAND) **2) (**)** $\int_0^{\pi/2}(\tan x)^a\,dx$

3) (**) $\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right)dx$ **4) (***)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x^b)}\,dx$

Correction ▼ [005714]

Exercice 2608

(Hors programme) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1) (I)** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ **2) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx$ **3) (**)** $\int_0^{+\infty}e^{ix^2}\,dx$

4) (**) $\int_0^{+\infty}x^3\sin(x^8)\,dx$ **5) (**)** $\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$ **6) (****)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx.$

Correction ▼ [005715]

Exercice 2609

Existence et calcul de :

1) (** I) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ 2) (très long) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$
3) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ 8) (***) $\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{Arctan}x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 10) (I très long) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (calcul pour $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ 12) (*** I) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Correction ▼ [005716]

Exercice 2610

Deux calculs de $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$.

1) (** I) En utilisant $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$, calculer I (et J).

2) (*** I) Calculer $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I.

Correction ▼ [005717]

Exercice 2611 ** I

En utilisant un développement de $\frac{1}{1-t}$, calculer $\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt$.

Correction ▼ [005718]

Exercice 2612 *** I

Calculer $\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt$ (en écrivant $\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\int_0^x\frac{t}{\ln t}\,dt-\int_0^x\frac{1}{\ln t}\,dt$).

Correction ▼ [005719]

Exercice 2613

1) (** I) Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.

2) (***) Montrer que $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx\underset{a\to 0}{\sim}-\ln a$.

3) (*) Montrer que $\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx\underset{a\to+\infty}{\sim}\frac{1}{a^2}$.

Correction ▼ [005720]

Exercice 2614 ***

Etude complète de $f\ :\ x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt$.

Correction ▼ [005721]

Exercice 2615 ***

(Hors programme) Convergence et calcul de $\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$.

Correction ▼ [005722]

Exercice 2616 ***

Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

1. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Existence et calcul de $\int_1^{+\infty}x(f(x+1)-f(x))dx$.

Correction ▼ [005723]

Exercice 2617 ***

1. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx$ converge en $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. (a) On suppose que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' admettent des limites réelles quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f' tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que si les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f''(x)\,dx$ convergent alors f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005724]

Exercice 2618 ***

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005725]

Exercice 2619

1. *Le but de cette question est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$
Montrer que pour $n \geq 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ est divergente.
2. *Deuxième formule de la moyenne.* Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, admettant des primitives notées F et G respectivement. Supposons que F est positive et décroissante. Montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(a)\int_a^y g(x)\,dx.$$
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.
4. *Le but de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale.* Pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$, on pose :
$$\begin{cases} f(t,\lambda) &= e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t} \quad \text{pour} \quad t>0 \\ f(0,\lambda) &= 1. \end{cases}$$
   (a) Pour $0 < x \leq y$, démontrer que l'on a :
$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \frac{2}{x}e^{-\lambda x}.$$
   (b) En déduire que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ sont convergentes, uniformément pour $\lambda \geq 0$. On pose, pour $\lambda \geq 0$,
$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$
   Démontrer que la fonction F est continue pour $\lambda \geq 0$.
   (c) Démontrer que la fonction F est dérivable pour $\lambda > 0$ et que sa dérivée est égale à l'intégrale généralisée convergente
$$F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt.$$
   (d) Calculer cette dernière intégrale généralisée, par exemple en intégrant par parties sur $[0,x]$ et en calculant la limite quand $x \to +\infty$.
   (e) En déduire la valeur de $F(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$ à une constante additive près. Démontrer que $F(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. En déduire la valeur de la constante additive, puis la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Correction ▼ [005925]

97 127.99 Autre

Exercice 2620

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos(nt) f(t)dt = 0$. [001273]

Exercice 2621

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0.$$

Généraliser au cas où $f(0)$ est quelconque. [001274]

Exercice 2622

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que f est bornée. On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
2. Soient x et $y \in [a,b]$ Montrer que $|\int_x^y f(t)dt| \leq M|x-y|$. En déduire que l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a,b]$.
3. Soit $x_0 \in [a,b]$. Montrer que si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0.

[001275]

Exercice 2623

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nt^n f(t^n)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

(On pourra faire le changement de variable $u = t^n$). [001276]

Exercice 2624

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Montrer que $|\int_a^b f(t)dt| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

(Indication : faire des développements limités de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$). [001277]

Exercice 2625

Soit f continue sur $[0,1]$ avec $f(1) \neq 0$, montrer :

$$\int_0^1 x^n f(t)dt \sim \frac{f(1)}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-2t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

On posera $u = 1 - \frac{1}{n}$ puis $v = ue^{2(u-1)}$. [001278]

Exercice 2626

Donner un développement :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = a + \frac{b}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

[001279]

Exercice 2627

Calculer les intégrales

$$I = \int_0^x \exp 2t \cos 3t \; dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^x \exp 2t \sin 3t \; dt.$$

[002327]

Exercice 2628

Soient $a \neq 0$ un réel, et $y > x > 0$.

1. Calculer la valeur de
$$I(x,y) = \int_x^y \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) dt.$$
2. Montrer que $I(x,y)$ a une limite $I_0(y)$ quand x tend vers zéro et la calculer.
3. Montrer que $I_0(y)$ a une limite quand y tend vers $+\infty$ et la calculer.

[002328]

Exercice 2629 École de l'air 94

On note $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\,dx$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n + (-1)^n K_n$ et $I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1}$. En déduire I_n en fonction de n.
Correction ▼ [004238]

Exercice 2630 Calcul d'intégrale

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2(nx)}$.
Correction ▼ [004239]

Exercice 2631 Arcsin et Arccos

Simplifier $\int_{t=0}^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_{t=0}^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.
Correction ▼ [004240]

Exercice 2632 Calcul de limite

Étudiez la limite de la suite définie par $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.
Correction ▼ [004244]

Exercice 2633 Échange de décimales

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$ (échange des deux $1^{\text{ères}}$ décimales).
Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$. [004246]

Exercice 2634 $\int f(t)\cos(t)\,dt$

Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathscr{C}^2$. Quel est le signe de $I = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos t\,dt$?
Correction ▼ [004247]

Exercice 2635 Convexité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $g(x) = \int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Montrer que g est convexe. [004248]

Exercice 2636 Expression d'une primitive n-ème de f

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g(x) = \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$. Montrer que $g^{(n)} = f$. [004249]

Exercice 2637 Théorème de division

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+p}$ telle que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale.
2. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^p$ et $|g^{(p)}(x)| \le \frac{p!}{(p+n)!}\sup\{|f^{(n+p)}(tx)| \text{ tel que } 0 \le t \le 1\}$.

[004250]

Exercice 2638 Fonction absolument monotone

Soit $f : [0,a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont positives sur $[0,a[$.

1. Montrer que la fonction $g_n : x \longmapsto \frac{1}{x^n}\left(f(x) - f(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)\right)$ est croissante.
2. On fixe $r \in]0,a[$. Montrer que la série de Taylor de f converge vers f sur $[0,r[$.

Correction ▼ [004251]

Exercice 2639 Deuxième formule de la moyenne

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, f positive décroissante.
On note $G(x)=\int_{t=a}^{x}g(t)\,dt$, et

$$M=\sup\{G(x),\ x\in[a,b]\}\qquad m=\inf\{G(x),\ x\in[a,b]\}.$$

1. On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $mf(a)\le\int_{t=a}^{b}f(t)g(t)\,dt\le Mf(a)$.
2. Démontrer la même inégalité si f est seulement continue, en admettant qu'elle est limite uniforme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ décroissantes.
3. Démontrer enfin qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b}f(t)g(t)\,dt=f(a)\int_{t=a}^{c}g(t)\,dt$.

[004252]

Exercice 2640 Inégalité de la moyenne

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, f décroissante, et $0\le g\le 1$. On note $G(x)=a+\int_{t=a}^{x}g(t)\,dt$.
Démontrer que $\int_{t=a}^{b}fg(t)\,dt\le\int_{t=a}^{G(b)}f(t)\,dt$.

[004253]

Exercice 2641 Une inégalité

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a)=0$ et $\forall\,t\in[a,b],\ 0\le f'(t)\le 1$. Comparer $\int_{t=a}^{b}f^3(t)\,dt$ et $\left(\int_{t=a}^{b}f(t)\,dt\right)^2$.
On introduira les fonctions : $F(x)=\int_{t=a}^{x}f(t)\,dt$, $G(x)=\int_{t=a}^{x}f^3(t)\,dt$, et $H=F^2-G$.
Correction ▼ [004254]

Exercice 2642 Intégrales de Wallis

On note $I_n=\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^n t\,dt$.

1. Comparer I_n et $\int_{t=0}^{\pi/2}\sin^n t\,dt$.
2. En coupant $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en $[0,\alpha]$ et $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que $I_n\to0$ pour $n\to\infty$.
3. Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
4. Démontrer que $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$.
5. Démontrer que $I_n\sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de C_{2n}^{n} pour $n\to\infty$.

[004255]

Exercice 2643 Norme L^∞

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continue non identiquement nulle. On pose $I_n=\int_{t=a}^{b}f^n(t)\,dt$ et $u_n=\sqrt[n]{I_n}$.
Soit $M=\max\{f(x)$ tel que $a\le x\le b\}$ et $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=M$.

1. Comparer M et u_n.
2. En utilisant la continuité de f en c, démontrer que : $\forall\,\varepsilon\in\,]0,M[$ il existe $\delta>0$ tel que $I_n\ge\delta(M-\varepsilon)^n$.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty}u_n$.

[004256]

Exercice 2644 Lemme de Lebesgue

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b}f(t)\cos(nt)\,dt\to0$, (lorsque $n\to\infty$) ...

1. si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. si f est en escalier.
3. si f est continue.

[004257]

Exercice 2645 Plus grande fonction convexe minorant f

1. Soit (f_i) une famille de fonctions convexes sur un intervalle I.
   On suppose que : $\forall\,x\in I,\ f(x)=\sup(f_i(x))$ existe. Montrer que f est convexe.
2. Soit $f:I\to\mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. On la note $\tilde{f}$.

3. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que $\int_{t=0}^1 \tilde{f}(t)dt \geq \frac{1}{2}\int_{t=0}^1 f(t)dt$ (commencer par le cas où f est en escalier).

[004258]

Exercice 2646 Centrale PC 1998

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{+*}$ continue.

1. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ telle que :
   $\forall\, k\in[[0,n-1]],\ \int_{t=x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_{t=a}^b f(t)\,dt.$
2. Étudier $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Correction ▼ [004259]

Exercice 2647 Mines MP 2000

Soit $f:\mathbb{R}\to(x^2+1)$
declasseC^1, 2π périodique, ne s'annulant pas. Montrer que $I(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f'}{f}$ est un entier.

Correction ▼ [004260]

Exercice 2648 Fonctions affines

Soit $E=\mathscr{C}([a,b])$, et $F=\{f\in\mathscr{C}^2([a,b]),\text{ tel que } f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0\}$.

1. Soit $f\in E$. Montrer qu'il existe $g\in F$ vérifiant $g''=f$ si et seulement si $\int_{x=a}^b f(x)\,dx=\int_{x=a}^b xf(x)\,dx=0$.
2. Soit $f\in E$ telle que $\int_{x=a}^b f(x)g''(x)\,dx=0$ pour toute fonction $g\in F$. Montrer que f est affine.

Correction ▼ [004261]

Exercice 2649 Mines MP 2001

Soit $a<0<b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\int_0^1 f=0$. Montrer que $\int_0^1 f^2\leq -ab$.

Correction ▼ [004262]

Exercice 2650 **I

1. Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(1)\neq 0$.
   Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim_{n\to+\infty} nu_n$).
2. Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0,1]$ et que $f(1)=0$ et $f'(1)\neq 0$.

Correction ▼ [005445]

Exercice 2651 **I Le lemme de LEBESGUE

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt=0$.
2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Correction ▼ [005448]

Exercice 2652 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\,dt\leq\int_0^1 f'^2(t)\,dt$.

Correction ▼ [005452]

Exercice 2653 ***

Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,a]$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $\forall x\in[0,a],\ \forall y\in[0,f(a)],\ xy\leq\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^y f^{-1}(t)\,dt$.

Correction ▼ [005454]

Exercice 2654 **

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Correction ▼ [005455]

Exercice 2655 **

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0,1]$ telles que
$\forall x \in [0,1],\ f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $(\int_0^1 f(t)\,dt)(\int_0^1 g(t)\,dt) \geq 1$.

Correction ▼ [005456]

Exercice 2656 ***

Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$.

Correction ▼ [005461]

Exercice 2657 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $M = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a,b]\}$. Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Correction ▼ [005462]

Exercice 2658 **

Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Correction ▼ [005463]

98 200.01 Forme multilinéaire

Exercice 2659

On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On rappelle que la *trace* $\mathrm{tr}(A)$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.
Pour une matrice M donnée, on note α_M l'application définie par

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M(X) = \mathrm{tr}(MX).$$

1. Vérifier que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$.

   On note ϕ l'application suivante :
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ M & \mapsto & \alpha_M \end{array}$$
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ϕ.
3. En déduire que pour toute forme linéaire $\alpha \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$, il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha(X) = \mathrm{tr}(AX).$$
4. Déterminer toute les formes linéaires $\alpha \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$ telles que
$$\forall (X,Y) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \alpha(XY) = \alpha(YX).$$

[001107]

Exercice 2660

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour chaque $i \in \{0,\dots,n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_i) \end{array}$$

1. Vérifier que chaque α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. On note G l'espace engendré par $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Déterminer G°. En déduire que la famille $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Montrer que la famille $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

4. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tels que
$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X]\ \ \int_0^1 P(t)dt=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)$$
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_0,\dots,P_n)$ de $R_n[X]$ telle que $\forall(i,j)\in\{0,\dots,n\}^2\ \ P_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } j=i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
6. En déduire que pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré n, qui interpole f en chaque point x_i, c'est à dire qui satisfait :
$$\forall i\in\{!,...,n\}\quad P(x_i)=f(x_i).$$

[001108]

Exercice 2661

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

$$\begin{aligned}
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=x_1+y_2+z_3\\
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=x_1y_3+y_2z_1+z_3x_2\\
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2\\
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=x_1x_2x_3+y_1y_2y_3+z_1z_2z_3\\
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3\\
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)(z_1+z_3)\\
\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right)&=(x_1+2x_2)(z_1+z_3)
\end{aligned}$$

[001109]

Exercice 2662

Montrer que l'espace des formes bi-linéaires sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base. [001110]

Exercice 2663

Donner toutes les formes tri-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace de dimension n lorsque $m>n$? [001111]

Exercice 2664

Soit $A\in\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On considère l'application Φ_A suivante :
$$\Phi_A\ :\ \begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n)^n & \to & \mathbb{R}\\ M=(C_1,...,C_n) & \mapsto & \det(AM)\end{array}$$
Montrer que Φ_A est n-linéaire.

Calculer $A\times\left(\begin{array}{c|c}\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix} & 0\\ \hline 0 & \mathrm{id}_{n-2}\end{array}\right)$. En déduire que $\Phi_A(e_2,e_1,e_3...e_n)=-\Phi_A(e_1,e_2,e_3...e_n)$.

Plus généralement, montrer que Φ_A est alternée.

Montrer que $\Phi_A(M)=\det(A)\det(M)$.

En déduire que :
$$\forall(A,B)\in\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\qquad \det(AB)=\det(BA)=\det(A)\det(B)$$

[001112]

Exercice 2665

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les applications ω et α suivantes :
$$\omega\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} & \mapsto & x_1y_2-x_2y_1\end{array}\quad\text{et}\quad \alpha\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \mapsto & x_3\end{array}$$

1. Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.
A l'aide de ω et α, on définit une nouvelle application, notée $\omega\wedge\alpha$, de la façon suivante :

$$\omega\wedge\alpha\ :\ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y,Z) & \mapsto & \omega(X,Y)\alpha(Z)+\omega(Y,Z)\alpha(X)+\omega(Z,X)\alpha(Y) \end{array}$$

2. Montrer que $\omega\wedge\alpha$ est alternée.
3. Montrer que $\omega\wedge\alpha$ est trilinéaire.
4. Calculer $\omega\wedge\alpha(e_1,e_2,e_3)$. En déduire que $\forall(X,Y,Z)\in(\mathbb{R}^3)^3$ $\omega\wedge\alpha(X,Y,Z)=\det(X,Y,Z)$

[001113]

Exercice 2666 Changements de signe

Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(K)$ et $A'=((-1)^{i+j}a_{ij})$. Comparer $\det A$ et $\det A'$.
Correction ▼ [003427]

Exercice 2667 Somme des colonnes, Matexo

Soit M une matrice carrée d'ordre n, et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la somme des colonnes de M d'indices différents de j. Comparer les déterminants de M et M'. [003428]

Exercice 2668 Trace d'un endomorphisme

Soit E un ev de dimension n, $f\in\mathscr{L}(E)$, et $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$, n vecteurs de E. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que :

$$\det(f(\vec{u}_1),\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)+\det(\vec{u}_1,f(\vec{u}_2),\vec{u}_3,\dots,\vec{u}_n)+\cdots+\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,f(\vec{u}_n))=\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)\mathrm{tr}(f).$$

Correction ▼ [003438]

Exercice 2669 **

Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $b_{i,j}=(-1)^{i+j}a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.
Correction ▼ [005635]

Exercice 2670 ***I

On définit par blocs une matrice A par $A=\begin{pmatrix} B & D\\ 0 & C\end{pmatrix}$ où A, B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n, p et q avec $p+q=n$. Montrer que $\det(A)=\det(B)\times\det(C)$.
Correction ▼ [005636]

---

99 200.02 Calcul de déterminants

Exercice 2671

Calculer les déterminants des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} a&c&c&b\\ c&a&b&c\\ c&b&a&c\\ b&c&c&a\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c&a&b&c\\ a&c&c&b\\ b&c&c&a\\ c&b&a&c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a&x&y&z\\ b&x&y&z\\ c&x'&y'&z'\\ d&x'&y'&z'\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1+a&b&a&b\\ b&1+a&b&a\\ a&b&1+a&b\\ b&a&b&1+a\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a&a&a^2&b+c+d\\ a&b&b^2&c+d+a\\ a&c&c^2&d+a+b\\ a&d&d^2&a+b+c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&a&a^2\\ 0&1&b&b^2\\ 1&0&c&c^2\\ 0&1&d&d^2\end{pmatrix}$ [001114]

Exercice 2672

Calculer, pour tout $t\in\mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t=\begin{pmatrix} 1&t&1\\ t&1&1\\ 1&t&1\end{pmatrix}$ et $N_t=\begin{pmatrix} 1&1&t\\ 1&t&1\\ t&1&1\end{pmatrix}$. [001115]

Exercice 2673

---

1. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_q(\mathbb{R})$. Calculer (en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$) le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra pour cela décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_q(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra généraliser la méthode de 1.)

[001116]

Exercice 2674

Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17. [001117]

Exercice 2675

Soit $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de taille $n = 2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.
2. Calculer $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

[001118]

Exercice 2676

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice. [001119]

Exercice 2677

La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ? [001120]

Exercice 2678

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. [001121]

Exercice 2679

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$ [001122]

Exercice 2680

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes C_i sont donnés par $C_i = e_i + e_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $C_n = e_1 + e_2 + e_n$. Calculer alors son déterminant. [001123]

Exercice 2681

On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de D_2 à un déterminant $n \times n$ du même type. [001124]

Exercice 2682

On note $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

[001125]

Exercice 2683

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{a-c}{2}$$

[001126]

Exercice 2684

Soient a, b deux réels distincts. Calculer le déterminant suivant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

[001127]

Exercice 2685

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice. [001128]

Exercice 2686

Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \ddots & \\ -4 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

en fonction de n. (vérifier que -1 est racine de $X^3 - 3X^2 + 4$) [001129]

Exercice 2687

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

[001130]

Exercice 2688

Soit $(a,x,y) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note A_n le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ y & & & a \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3,\ A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2}$. En déduire une expression de A_n en fonction de n, a, x et y. [001131]

Exercice 2689

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

[001132]

Exercice 2690

On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \qquad (\star)$$

1. Déterminer toutes les suites complexes satisfaisant la relation $(\star)$.
2. Déterminer toutes les suites réelles satisfaisant la relation $(\star)$.
   On considère maintenant le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. Calculer Δ_{n+2} en fonction de Δ_{n+1} et Δ_n pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose $\Delta_0 = 1$).
   En déduire la valeur de Δ_n en fonction de n.

[001133]

Exercice 2691

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

[001134]

Exercice 2692

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

[001135]

Exercice 2693

Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17. [001136]

Exercice 2694

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

[001137]

Exercice 2695

Pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on note $A_{(a_0 \dots a_n)}$ la matrice

$$A_{(a_0 \dots a_{n-1})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

et à $\lambda \in \mathbb{R}$, on associe $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda) = \det(A_{(a_0, \dots, a_{n-1})} - \lambda \mathrm{id})$. Calculer $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ en fonction de $\Delta_{(a_1 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ et a_0. En déduire $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$. [001138]

Exercice 2696

Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p & q & & 0 \\ 1 & p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q \\ 0 & & 1 & p \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

[001139]

Exercice 2697

Soit $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{m,m}(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array}$$

Etudier la multi-linéarité de ϕ par rapport aux colonnes de A. Calculer $\phi(\mathrm{id})$. En déduire que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. Montrer que $\det(M) = \det(A_1) \cdots \det(A_k)$ [001140]

Exercice 2698

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{45} \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

Comment généraliser ce résultat en dimension plus grande ? [001141]

Exercice 2699

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t \\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[001142]

Exercice 2700

Soit $(a_0,...,a_{n-1}) \in (x^2+1)^n$, $x \in (x^2+1)$. Calculer

$$\Delta_n(a_0,...,a_n,x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & & 1 & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

[001143]

Exercice 2701

Soit $(a_1,a_2,a_3) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$. [001144]

Exercice 2702

Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \qquad \Delta_n = a^{n-2}\left(a^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)$ [001145]

Exercice 2703

Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en foncion de D_{n-1} et D_{n-2}. Monter que $D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$. Combien vaut D_n si $a = 1$? [001146]

Exercice 2704

Soient a,b,c trois réels et Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (n+1)\frac{a^n}{2^n}$$

[001147]

Exercice 2705

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

[001148]

Exercice 2706

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$

[001149]

Exercice 2707

Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.
[001150]

Exercice 2708

Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}.$$

[002448]

Exercice 2709

Calculer par récurrence le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

[002452]

Exercice 2710

Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n} (t_i - t_j)$$

[002453]

Exercice 2711

Soit M une matrice carrée d'ordre n, et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la somme des colonnes de M d'indices différents de j. Montrer que $\det M' = (-1)^{n-1}(n-1)\det M$. [002454]

Exercice 2712

Calculer le déterminant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[002455]

Exercice 2713

Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+2 \end{vmatrix}.$$

[002456]

Exercice 2714

Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n réelles, et $A \in E$ fixée. On définit une application u_A de E sur lui-même par $u_A(B) = AB$. Montrer que c'est un endomorphisme de E et que $\det u_A = (\det A)^n$. [002458]

Exercice 2715

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A$.
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Pour quelles valeurs de m est-ce un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. On pose $m = 1$. Trouver une base du noyau de u.

[002466]

Exercice 2716

Soient a, b, c des réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de P.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ et $\operatorname{Im} P$.
3. Soit $Q = I - P$, calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
4. Caractériser géométriquement P et Q.

Correction ▼ [002578]

Exercice 2717

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction ▼ [002582]

Exercice 2718

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

[002753]

Exercice 2719

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[002754]

Exercice 2720

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

[002755]

Exercice 2721

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002756]

Exercice 2722

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & k & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

[002757]

Exercice 2723

Soit $M=(m_{ij})$ une matrice carrée de taille n. On construit à partir de M la matrice $N=(n_{ij})$ de la manière suivante : pour tout couple d'indices i,j, on appelle M_{ij} la matrice obtenue à partir de M en rayant la ligne i et la colonne j ; alors $n_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ji})$. Démontrer que $MN=NM=\det(M)I$, où I désigne la matrice identité. En déduire une méthode d'inversion de matrices passant par le calcul de déterminants, et l'appliquer à la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002758]

Exercice 2724

Calculer les inverses des matrices suivantes de deux manières différentes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002759]

Exercice 2725

En utilisant le déterminant montrer que chacun des systèmes suivants admet une solution unique. Résoudre chacun de ces système en inversant la matrice de ses coefficients :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ y+4z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x-y-z+t=2 \\ x-y+z-t=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y-z=-1 \\ x+y-3z=1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

[002760]

Exercice 2726 Calcul de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.
4. $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.
6. $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^p \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+p}^0 & C_{n+p}^1 & \dots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \dots & a_1-b_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n-b_1 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geq 3)$.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Pour 6 : Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans (x^2+1) de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β.

Correction ▼ [003451]

Exercice 2727 Factorisation de polynômes

Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

1. $\begin{vmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & z \\ b & b & c & & z \\ c & c & c & & z \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \dots & z \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [003452]

Exercice 2728 Calcul par dérivation

1. Soient $a,b,c,d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

   Montrer que f est dérivable et que : $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.
3. Application : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [003453]

Exercice 2729 $\det(A+(\alpha))$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\det(A+\alpha U) = \det A + \alpha \sum \text{cofacteurs de } A$.
2. En déduire la valeur de $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,
   (a) pour $b \neq c$.
   (b) pour $b = c$.

Correction ▼ [003454]

Exercice 2730 Déterminant tridiagonal, Matexo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(b_1,b_2,\dots,b_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ et $(c_1,c_2,\dots,c_{n-1}) \in (\mathbb{R}_-^*)^{n-1}$. Montrer que le déterminant de la matrice suivante est strictement positif :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & 0 & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

[003455]

Exercice 2731 Déterminants de Vandermonde

Soient $a_1,\dots,a_n \in K$. Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1,\dots,a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1. Calculer et factoriser $V(a,b)$ et $V(a,b,c)$.
2. Pour $x \in K$, montrer que $V(a_1,\dots,a_n,x) = V(a_1,\dots,a_n)\prod_{i=1}^n (x-a_i)$.
3. En déduire l'expression générale de $V(a_1,\dots,a_n)$.

[003456]

Exercice 2732 Racines de l'unité

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ et D le déterminant $n \times n$: $D = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)$.

1. Calculer D^2.
2. Montrer que $D = \prod_{k<\ell}(\omega^\ell - \omega^k) = \prod_{k<\ell}\left(\alpha^{k+\ell} \cdot 2i\sin\frac{\ell-k}{n}\pi\right)$.
3. Exprimer D sous forme trigonométrique.

Correction ▼ [003457]

Exercice 2733 Cosinus

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$. Mettre le déterminant : $\det\left(\cos((j-1)\alpha_i)\right)$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Correction ▼ [003458]

Exercice 2734 $(x_i+y_j)^k$

Soit $k \leq n-1$ et $M = \left((x_i+y_j)^k\right)$. Écrire M comme produit de deux matrices et calculer $\det M$.

Correction ▼ [003459]

Exercice 2735 $P(i+j)$

Soit $P \in K_{n-1}[X]$ et $A = \left(P(i+j)\right) \in \mathscr{M}_n(K)$. Développer $P(i+j)$ par la formule de Taylor et écrire A comme produit de deux matrices. En déduire $\det A$.

Correction ▼ [003460]

Exercice 2736 **

Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Correction ▼ [005362]

Exercice 2737 **

Pour a, b et c deux à deux distincts donnés, factoriser $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005363]

Exercice 2738 ***

Calculer :

1. $\det(|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}$
2. $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leq i,j\leq n}$ (a_1,...,a_n étant n réels donnés)
3. $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & a \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
5. $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1\leq i,j\leq p+1}$
6. $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$

Correction ▼ [005364]

Exercice 2739 **** Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT

Soit $A=\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ où a_1,..., a_n, b_1,...,b_n sont $2n$ réels tels que toutes les sommes a_i+b_j soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i=b_i=i$.

Correction ▼ [005365]

Exercice 2740 ****

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où, pour tout i et tout j, $a_{i,j}\in\{-1,1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Correction ▼ [005366]

Exercice 2741 **I

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $b_{i,j}=(-1)^{i+j}a_{i,j}$. Montrer que $\det B=\det A$.

Correction ▼ [005369]

Exercice 2742 **** Déterminant circulant

Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P=(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leq k,l\leq n}$ où $\omega=e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA. En déduire $\det A$.

Correction ▼ [005371]

Exercice 2743 ***I

Calculer $\det(\mathrm{com}A)$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}A$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005372]

Exercice 2744 ***I Dérivée d'un déterminant

Soient $a_{i,j}$ ((i,j) élément de $\{1,...,n\}^2$) n^2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $A=(ai,j)_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto\det(A(x))$.

Applications. Calculer

1. $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$

Correction ▼ [005373]

Exercice 2745 ***I

Calculer

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$
2. $\det((i+j-1)^2)$

3. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ b, c complexes distincts

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005374]

Exercice 2746

Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{array}\right. .$$

Correction ▼ [005376]

Exercice 2747 ***I Déterminants de VANDERMONDE

Soient x_0,..., x_{n-1} n nombres complexes. Calculer $\mathrm{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction ▼ [005637]

Exercice 2748 ****I Déterminant de CAUCHY

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes tels que toutes les sommes a_i+b_j, $1\leqslant i,j\leqslant n$, soient non nulles. Calculer $C_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Cas particulier : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_i=b_i=i$ (déterminant de HILBERT).

Correction ▼ [005638]

Exercice 2749 **

Calculer $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n sont n réels donnés ($n\geqslant 2$).

Correction ▼ [005640]

Exercice 2750 **

Calculer $\det(a_i+b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n, $b_1,\dots, b_n$ sont $2n$ complexes donnés.

Correction ▼ [005641]

Exercice 2751 **

Calculer $\det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a est un complexe donné.

Correction ▼ [005642]

Exercice 2752 ****

Soient x_1,..., x_n n entiers naturels tels que $x_1<\dots<x_n$. A l'aide du calcul de $\det(C_{x_j}^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i}$ est un entier naturel.

Correction ▼ [005643]

Exercice 2753 **** Déterminants circulants

Soient $a_0,...,a_{n-1}$ n nombres complexes. Calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det A$. Pour cela, on calculera d'abord $A\Omega$ où $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Correction ▼ [005644]

Exercice 2754 **I

1. Soient $a_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $d = \det(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d'.
2. Application : calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005645]

Exercice 2755 ***

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n. Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

Correction ▼ [005646]

Exercice 2756 ***

Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n. Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

Correction ▼ [005647]

Exercice 2757 **I

Soient a_0, ... , a_{n-1} n nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A - xI_n)$.

Correction ▼ [005649]

Exercice 2758 **

Calculer les déterminants suivants :

1. $\det A$ où $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$

4. (I) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$.

Correction ▼ [005650]

100 200.03 Système linéaire, rang

Exercice 2759

Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & -y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +z & = & c \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -z & = & 1 \\ x & & +z & = & 3 \end{array}\right.$$

[001163]

Exercice 2760

Sans chercher à résoudre les systêmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +y & +z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +y & +z & = & 3 \end{array}\right.$$

[001164]

Exercice 2761

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ réels distincts, et $y_0, y_1, \dots, y_n$, $n+1$ réels (distincts ou non).
Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) = y_i$$

[001165]

Exercice 2762

Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$(S_1) \left\{\begin{array}{rcl} x+(m+1)y & = & m+2 \\ mx+(m+4)y & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_2) \left\{\begin{array}{rcl} mx+(m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x-my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001166]

Exercice 2763

Écrire les conditions, portant sur les réels a, b, c, pour que les systèmes suivants admettent des solutions non nulles ; expliciter ces solutions.

$$(S_1) \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z & = & 0 \\ bcx+acy+abz & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2) \left\{\begin{array}{rcl} x-a(y+z) & = & 0 \\ y-b(x+z) & = & 0 \\ z-c(x+y) & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001167]

Exercice 2764

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t & = & b_1 \\ x+3y+4z+5t & = & b_2 \\ x+3y+3z+2t & = & b_3 \\ x+y+z+t & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ x+4y+7z+3t & = & b_2 \\ y+2z & = & b_3 \\ x+2y+3z+2t & = & b_4 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t & = & b_1 \\ -x+3y+t & = & b_2 \\ 2x-2y+2z-2t & = & b_3 \\ 2y+z & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+2t & = & b_1 \\ -2x-4y-2z-4t & = & b_2 \\ -x-2y-z-2t & = & b_3 \\ 3x+6y+3z+6t & = & b_4 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001168]

Exercice 2765

Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} (1+\lambda)x+y+z+t & = & a \\ x+(1+\lambda)y+z+t & = & b \\ x+y+(1+\lambda)z+t & = & c \\ x+y+z+(1+\lambda)t & = & d \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001169]

Exercice 2766

Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z+t & = & \lambda \\ 2x+y-z & = & \lambda-1 \\ 5x+4y-2z & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z & = & 3\lambda+a \\ 3x-z+3t & = & -\lambda^2 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001170]

Exercice 2767

Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 3 \\ 3x-y-2z & = & 0 \\ x+y-z & = & -2 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ x-y+2z-3t & = & 2 \\ 2x+4z+4t & = & 3 \\ 2x+2y+3z+8t & = & 2 \\ 5x+3y+9z+19t & = & 6 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 1 \\ x+2y+3z+4t & = & 2 \\ 3x-y-3z+2t & = & 5 \\ 5y+9z-t & = & -6 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t & = & 5 \\ 2x+3y+4z+5t & = & 8 \\ 3x+y-z+t & = & 7 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 0 \\ 3x+y+2z & = & 0 \end{array}\right.$

[001171]

Exercice 2768

Calculer les déterminants suivants.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} D_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[001172]

Exercice 2769

Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 &=& b_1\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 &=& b_2\\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 &=& b_3\\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 &=& b_4 \end{array}\right.$$

[001173]

Exercice 2770

On considère l'application f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à un élément $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ associe l'élément $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, défini par :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 &=& y_1\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 &=& y_2\\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 &=& y_3\\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 &=& y_4 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. On considère A l'ensemble des solutions de (S_H).

$$(S_H)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 &=& 0\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 &=& 0\\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 &=& 0\\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 &=& 0 \end{array}\right.$$

   Quelle est la nature de A ? Que représente A pour l'application f ? Donner une base de A ; quelle est la dimension de A ? Donner un système minimal d'équations qui définissent A.
3. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs : $V_1=(1,1,1,1)$, $V_2=(1,2,3,4)$, $V_3=(3,1,4,2)$, $V_4=(10,4,13,7)$, $V_5=(1,7,8,14)$. Que représentent ces vecteurs pour l'application f ? Trouver une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On considère le système (S) où les inconnues sont les x_i, et où les y_j sont des paramètres. Comment interpréter les conditions de possibilité de ce système du point de vue de f ?
5. Donner une interprétation du théorème du rang relativement à ce système. Quel est le lien entre le rang de f et le rang du système ?

[001174]

Exercice 2771

Pour tout a réel, on considère la matrice A et le système linéaire (S) définis par :

$$A=\begin{pmatrix} a&1&1&1\\ 1&a&1&1\\ 1&1&a&1\\ 1&1&1&a \end{pmatrix} \qquad (S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax&+&y&+&z&+&t&=&1\\ x&+&ay&+&z&+&t&=&1\\ x&+&y&+&az&+&t&=&1\\ x&+&y&+&z&+&at&=&1 \end{array}\right.$$

aux inconnues réelles x,y,z,t.

1. Discuter le rang de A suivant les valeurs de a.
2. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
3. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre (S) avec un minimum d'opérations (on pourra montrer d'abord que l'on a nécessairement $x=y=z=t$.).
4. Retrouver 3. par application des formules de Cramer.

[001175]

Exercice 2772

Déterminer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 0&1&1\\ 2&3&7 \end{pmatrix}$ [001176]

Exercice 2773

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ tel que $AX = \lambda X$. Pour chaque λ déterminer $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\}$. [001177]

Exercice 2774

Donner une base de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$. [001178]

Exercice 2775

Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ a^2x+y+az=0 \\ ax+a^2y+z=0 \end{cases}$. [001179]

Exercice 2776

Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=\mu \\ x+y+az+t=\mu^2 \\ x+y+z+at=\mu^3 \end{cases}$. [001180]

Exercice 2777

Inverser en utilisant un système linéaire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. [001181]

Exercice 2778

Résoudre $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$. [001182]

Exercice 2779

Résoudre $\begin{cases} -cy+bz=\alpha \\ cx-az=\beta \\ -bx+ay=\gamma \end{cases}$. [001183]

Exercice 2780

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ des éléments (x,y,z,t) qui satisfont :

$$\begin{cases} x+y+z+3t &= 0 \\ 2x+3y+4t &= 0 \\ 2x+5y-4z &= 0 \end{cases}$$

Donner une base de F et sa dimension. [001184]

Exercice 2781

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y-2z+2t &= 0 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) puis indiquer son rang.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, indiquer sa dimension et en donner une base.

Exercice 2782

L'objectif de ce problème est de résoudre l'énigme du berger :
Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ? On montre, dans un premier temps, un résultat utile pour la démonstration finale.

1. (a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.

   (b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

2. L'objectif de cette question est de résoudre l'énigme du berger. On note B la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante :
   On numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B) et de même poids. On note alors $B_{i,j}$ les coefficients de la ième ligne de la matrice B obtenu de la façon suivante

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau A} \\ 2 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau B .} \end{cases}$$

   On note X la matrice de taille 101×1 constituée des poids des moutons

$$X = \begin{pmatrix} \text{poids du monton 1} \\ \text{poids du mouton 2} \\ \vdots \\ \text{poids du mouton 100} \\ \text{poids du mouton 101} \end{pmatrix}.$$

   On note M le poids total du troupeau.

   (a) Calculer
$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculer
$$BX.$$

   (c) Montrer que B est inversible.

   (d) En déduire X et résoudre l'énigme du berger.

[001186]

Exercice 2783

Pour quelles valeurs de a la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$
est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse. [001187]

Exercice 2784

Soient a et b deux réels, et A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$? [001188]

Exercice 2785

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$. Donner, sous forme d'équation, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartienne à l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Même question pour un plan engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. [001189]

Exercice 2786

Soit u un endomorphisme de E, et $\mathscr{B}$ une base de E. Discuter dans chacun des cas ci-dessous la dimension du noyau de u.

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 12-\lambda & -6 & 3 \\ -9 & -5-\lambda & 3 \\ -12 & -8 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

[001190]

Exercice 2787

Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[001191]

Exercice 2788

Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

[001192]

Exercice 2789

Systèmes linéaires.

1. Résoudre le système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

2. Le système suivant admet-il des solutions sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

3. On considère le système précédent, mais dont coefficients et inconnues sont dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Résoudre ce système.

[002462]

Exercice 2790

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le système suivant admet des solutions différentes de $x = y = z = t = 0$:

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 0 \\ x + (1+m)y + z + t = 0 \\ x + y + (2+m)z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

[002463]

Exercice 2791

Soit a,b deux réels différents. Montrer que le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ bx_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & c_1 \\ bx_1 & + & bx_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & c_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ bx_1 & + & bx_2 & + & bx_3 & + & \dots & + & ax_n & = & c_n \end{array}\right.$$

admet une solution unique que l'on calculera.

[002464]

Exercice 2792

Soit A une matrice carrée d'ordre n tridiagonale, c'est-à-dire telle que $a_{i,j}=0$ si $|i-j|>1$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L vérifiant $l_{i,j}=0$ si $j>i+1$ et une triangulaire supérieure U vérifiant $u_{i,i}=1$ et $u_{i,j}=0$ si $i>j+1$ telles que $A=LU$, et que ces matrices sont uniques. En déduire la solution du système linéaire $Ax=b$, où b est un vecteur donné dans $\mathbb{R}^n$. [002465]

Exercice 2793

Résoudre

$$S_1\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \cosh a\, y & + & \cosh 2a\, z & = & \cosh 3a \\ \cosh a\, x & + & \cosh 2a\, y & + & \cosh 3a\, z & = & \cosh 4a \\ \cosh 2a\, x & + & \cosh 3a\, y & + & \cosh 4a\, z & = & \cosh 5a \end{array}\right.$$

et

$$S_2\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + \dots + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + \dots + & nx_n & = & 0 \\ x_1 & + & 2^2x_2 & + \dots + & n^2x_n & = & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + \dots + & n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [002478]

Exercice 2794

Décider, pour chacun des systèmes d'équations aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ et aux paramètres s, t, s'il est linéaire :

$$a)\left\{\begin{array}{ccccc} x_1\sin(t) & + & x_2 & = & 3 \\ x_1e^t & + & 3x_2 & = & t^2 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{x_1} & +\frac{2}{x_2} & +\dots & +\frac{n}{x_n} & = & n! \\ x_1 & +\frac{x_2}{2} & +\dots & +\frac{x_n}{n} & = & \frac{1}{n!} \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{ccc} \sqrt{(x_1+sx_2+t)^2-4sx_2(x_1+t)} & = & 0 \\ x_1\ln s-\pi x_2+e^tx_n & = & 0 \end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{ccc} (1+sx_1)(3+tx_2)-(2+tx_1)(5+sx_2) & = & 8 \\ (x_3+s)^2-(x_3-s)^2+x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

[002731]

Exercice 2795

En appliquant l'algorithme de Gauss, résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathscr{S}\ :\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

[002732]

Exercice 2796

Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[002733]

Exercice 2797

Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[002734]

Exercice 2798

Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$\mathscr{S}_a : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathscr{S}_a$ peut :
   (i) n'admettre aucune solution ;
   (ii) admettre exactement une solution ;
   (iii) admettre une infinité de solutions.
2. Résoudre le système $\mathscr{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

[002735]

Exercice 2799

Les vecteurs complexes (z,w) et (z',w') sont liés par la formule $(z',w') = (z+iw,(1+i)z+(1-2i)w)$. Un étudiant qui n'aime pas les nombres complexes pose $z = x+iy$, $w = u+iv$, $z' = x'+iy'$ et $w' = u'+iv'$.

1. Exprimer (x',y',u',v') en fonction de (x,y,u,v).
2. Résoudre le système $(x',y',u',v') = (1,2,3,4)$.

[002736]

Exercice 2800

Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas horizontal : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres à l'heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat, quelle est la plus haute de ces deux villes, et quelle est leur différence d'altitude ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres à l'heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les trois longueurs : de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est à plat.

[002737]

Exercice 2801

Soient a, b, et c trois nombres réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?
$$\mathscr{S}_{abc} : \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$
2. Est-ce que le système $\mathscr{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

[002738]

Exercice 2802

Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases}$$

$$\mathscr{S}_2 : \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

[002739]

Exercice 2803

1. Résoudre de 4 manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (a+1)x & + & (a-1)y & = & 1 \\ (a-1)x & + & (a+1)y & = & 1 \end{array}\right.$$

[002768]

Exercice 2804

Résoudre le système suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} 2x & + & y & + & z & - & 2u & + & 3v & - & w & =1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & - & 3u & + & 5v & - & 3w & =4 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 2u & + & 4v & - & 4w & =6 \\ x & + & y & + & z & - & u & + & 2v & - & 2w & =3 \\ 3x & & & & & - & 3u & + & 3v & + & 3w & =-6 \end{array}\right.$$

[002769]

Exercice 2805 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003408]

Exercice 2806 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003409]

Exercice 2807 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & 2y & + & (m-3)z & = & -1 \\ (m-1)x & & & - & 3z & = & -1. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003410]

Exercice 2808 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3mx & + & (3m-7)y & + & (m-5)z & = & m-1 \\ (2m-1)x & + & (4m-1)y & + & 2mz & = & m+1 \\ 4mx & + & (5m-7)y & + & (2m-5)z & = & 0. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003411]

Exercice 2809 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a(a-1)x & + & b(b-1)y & + & c(c-1)z & = & d(d-1). \end{cases}$$

Correction ▼ [003412]

Exercice 2810 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & - & y & - & z & + & t & = & b \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & c \\ -3x & + & y & - & 3z & - & 7t & = & d. \end{cases}$$

Correction ▼ [003413]

Exercice 2811 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} 4x & + & 3y & + & 2z & + & t & = & a \\ x & + & 4y & + & 3z & + & 2t & = & b \\ 2x & + & y & + & 4z & + & 3t & = & c \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 4t & = & d. \end{cases}$$

Correction ▼ [003414]

Exercice 2812 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x\cos 2\alpha & + & y\cos\alpha & + & z & = & a \\ x\cos 2\beta & + & y\cos\beta & + & z & = & b \\ x\cos 2\gamma & + & y\cos\gamma & + & z & = & c. \end{cases}$$

Correction ▼ [003415]

Exercice 2813 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r. \end{cases}$$

Correction ▼ [003416]

Exercice 2814 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003417]

Exercice 2815 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{x}{1+a} & + & \frac{y}{1+2a} & + & \frac{z}{1+3a} & = & 1 \\ \frac{x}{2+a} & + & \frac{y}{2+2a} & + & \frac{z}{2+3a} & = & 1 \\ \frac{x}{3+a} & + & \frac{y}{3+2a} & + & \frac{z}{3+3a} & = & 1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003418]

Exercice 2816 Système incompatible

Soit $(S) \iff AX = B$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.

[003419]

Exercice 2817 Combinaison de formes linéaires

Soient $f, f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur K^n linéairement indépendantes. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_p$.
Indication : Étudier le système

$$\begin{cases} f_1(x) & = & 0 \\ \vdots & & \\ f_p(x) & = & 0 \\ f(x) & = & 1. \end{cases}$$

Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(f_1, \dots, f_p)$ libre ? [003420]

Exercice 2818 Base antiduale

Soient $f_1, \dots, f_n$, n formes linéaires indépendantes sur un ev E de dimension n. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_i)$ de E telle que $f_i = \vec{e}_i^{\,*}$.
[003421]

Exercice 2819 Orthogonal d'un sev

Soit E un K-ev de dimension n et F un sev de E^* dimension p.
On note $F^\perp = \{\vec{x} \in E \text{ tq } \forall\, f \in F \text{ on a } f(\vec{x}) = 0\}$. Chercher $\dim F^\perp$. [003422]

Exercice 2820 Système de Vandermonde

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n scalaires distincts et M la matrice $\left(\alpha_i^{j-1}\right)$ (matrice de Vandermonde).
Montrer que M est inversible en interprétant le système $MX = 0$ dans $K_{n-1}[x]$. [003423]

Exercice 2821 Formule d'intégration numérique

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré ≤ 3 on ait :

$$\int_{t=2}^{4} P(t)\,dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Correction ▼ [003424]

Exercice 2822 Système non linéaire

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 & = & 1 \\ x^4 y^5 z^{12} & = & 2 \\ x^2 y^2 z^5 & = & 3. \end{cases}$$

1. Lorsque x, y, z sont réels strictement positifs.
2. Lorsque $x, y, z \in (x^2+1)$.

Correction ▼ [003425]

Exercice 2823 Comatrice, Ensi P 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de $\operatorname{com}(A)$ en fonction du rang de A.
Correction ▼ [003431]

Exercice 2824 Comatrice

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}A)$ dans le cas où A est inversible.
2. Si $\mathrm{rg}A \leq n-2$, démontrer que $\mathrm{com}A = 0$.
3. Si $\mathrm{rg}A = n-1$, démontrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = 1$.
4. Dans le cas général, démontrer que $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}A) = (\det A)^{n-2}A$.

[003432]

Exercice 2825 Calcul de rang

Chercher les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003461]

Exercice 2826 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in (x^2+1)$. [003462]

Exercice 2827 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et le cas échéant, donner une relation de dépendance linéaire entre les lignes.

Correction ▼ [003463]

Exercice 2828 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Correction ▼ [003464]

Exercice 2829 Matrice à trou

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(K)$, $B \in \mathscr{M}_{2,2}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{2,3}(K)$ telles que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.

Correction ▼ [003465]

Exercice 2830 Factorisation, Centrale P' 1996

Soit la matrice carrée d'ordre n, I_p ($p \leq n$), telle que le i-ème terme diagonal vaut 1 si i est compris entre p et n, tous les autres coefficients étant nuls. Quelle sont les conditions sur A (matrice carrée d'ordre n) pour qu'il existe B telle que $AB = I_p$?

Correction ▼ [003466]

Exercice 2831 Échange de lignes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ inversible et B la matrice obtenue en échangeant dans A les colonnes i et j. Montrer que B est aussi inversible. Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?

Correction ▼ [003467]

Exercice 2832 Matrices de rang 1

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que : $\mathrm{rg}(M) = 1 \iff$ il existe C, colonne et L, ligne, non nulles, telles que $M = CL$. [003468]

Exercice 2833 Matrices de projection de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ de rang 1. Montrer que A est une matrice de projection si et seulement si $\mathrm{tr}A = 1$. [003469]

Exercice 2834 Calcul de rang

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots y_p \in K$. On note A, B les matrices de termes généraux $x_i + y_j$ et $(x_i + y_j)^2$.
Chercher les rangs de A et B.

Correction ▼ [003470]

Exercice 2835 Juxtaposition de matrices

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{n,q}(K)$. On considère $C = (A\ B) \in \mathscr{M}_{n,p+q}(K)$.
Montrer que : $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) \Leftrightarrow \exists\, P \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ tq $B = AP$. [003471]

Exercice 2836 $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^tAA$.

1. Montrer que : $\forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYY = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.
3. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
4. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2((x^2+1)^{)}$ telle que $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}({}^tAA)$.

Correction ▼ [003472]

Exercice 2837 Rang de $\mathrm{Re}(M)$

Soit $M \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(P) \leq 2$. [003473]

Exercice 2838 Calcul de rang

Soit $M = \Big(\cos(i+j-1)\theta\Big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{rg}M$ en fonction de θ.

Correction ▼ [003474]

Exercice 2839 Décomposition en blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée décomposée en blocs. On suppose que A est inversible.
Montrer que $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B)$. [003475]

Exercice 2840 $MA = 0$, Chimie P' 90

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $MA = 0\}$. Quelle est la structure de E, sa dimension ?

Correction ▼ [003476]

Exercice 2841 Rang des applications $X \mapsto AX, XB, AXB$

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(K)$. Chercher le rang des applications :

$$f : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,q}(K), X \mapsto AX \qquad g : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{p,r}(K) X \mapsto XB$$

$$h : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,r}(K) X \mapsto AXB$$

(on transformera A et B en matrices canoniques équivalentes)

[003477]

Exercice 2842 Rang de $X \mapsto AX - XA$

Soit $A \in \mathscr{M}_2(K)$. Chercher le rang de l'application $\mathscr{M}_2(K) \to \mathscr{M}_2(K), M \mapsto AM - MA$ [003478]

Exercice 2843 Matrice antisymétrique 3×3

Soit $M \in \mathscr{M}_3(K)$ antisymétrique. Quel est le rang de M ?

Correction ▼ [003479]

Exercice 2844 Matrices antisymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ antisymétrique.

1. On suppose $a_{12} \neq 0$, et on décompose A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.

   Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P existe et est inversible.

   (b) Calculer AP.

   (c) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.

2. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

[003480]

Exercice 2845 Matrice à diagonale dominante

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. On dit que M est *à diagonale dominante* si : $\forall\ i,\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. On transforme M en $M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot. Montrer que M_1 est à diagonale dominante.

2. En déduire que M est inversible.

[003481]

Exercice 2846 Rang par blocs, Matexo

Soit une matrice M de rang r telle que :

$$M = \begin{pmatrix} M_r & M_2 \\ M_1 & M_3 \end{pmatrix},$$

où la matrice M_r est carrée de rang r et de taille r. Montrer que $M_3 = M_1 M_r^{-1} M_2$. [003482]

Exercice 2847 $\mathrm{rg}(BC)$, Centrale MP 2006

1. Soient deux matrices $B \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ de même rang r. Montrer que $A = BC$ est de rang r.
2. Réciproquement, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \geq 1$. Montrer qu'il existe des matrices B et C comme précédemment telles que $A = BC$.
3. Déterminer explicitement une telle décomposition pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
4. Supposons de plus A symétrique. Montrer que CB est aussi de rang r.

Correction ▼ [003483]

Exercice 2848 PA nilpotente

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que A est non inversible si et seulement s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que PA est nilpotente. [003484]

Exercice 2849 ***

Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005367]

Exercice 2850

Résoudre (en discutant en fonction des différents paramètres) les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+my+z=3m \\ x-(2m+1)y+2z=4 \\ 5x-y+4z=3m-2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y+3z+mt=m-1 \\ 2x+y+mz+3t=1 \\ 3x+my+z+2t=0 \\ mx+3y+2z+t=0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} mx+y+z=m+2 \\ -x-y+mz=m-2 \\ -mx+y+mz=-m \\ x-y-mz=m-4 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{m} \end{cases}$

7) $\begin{cases} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1 \\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} ax+by+cz=p \\ cx+ay+bz=q \\ bx+cy+az=r \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=3 \end{cases}$ (où a, b, et c sont les racines de l'équation $t^3-t+1=0$).

Correction ▼ [005375]

Exercice 2851

Résoudre le système : $x_1+x_2=0$, $x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=0$ pour $k=2,\dots,n-1$, $x_{n-1}+x_n=0$.

Correction ▼ [005378]

Exercice 2852

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes deux à deux distincts tels que les sommes a_i+b_j soient toutes non nulles. Résoudre le système $\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{a_i+b_j}=1$, pour tout $i=1,\dots,n$ (en utilisant la décomposition en éléments simples de $R=\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X+b_j}$).

Correction ▼ [005381]

Exercice 2853 **

Résoudre le système $MX = U$ où $M = (j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$, $U = (\delta_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et X est un vecteur colonne inconnu.

Correction ▼ [005639]

101 200.04 Applications

Exercice 2854

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $n=2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si n est pair.

Correction ▼ [001151]

Exercice 2855

Inverser les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que leurs produits. [001152]

Exercice 2856 Résultant

Soient $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, et $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$, avec $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$.

Le résultant de P et Q est : $\operatorname{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & \ddots & \ddots & a_0 & b_{q-1} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_1 & b_q & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots & b_{q-1} \\ & & & a_p & & & b_q \\ \multicolumn{4}{c}{\longleftarrow q \longrightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\longleftarrow p \longrightarrow} \end{vmatrix}$ les positions non remplies correspondent à des zéros.

En considérant l'application $\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X], (U,V) \mapsto UP+VQ$,
montrer que : $\operatorname{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$.
Application : CNS pour que le polynôme $P = X^4 + aX + b$ ait une racine multiple ?
Correction ▼ [003443]

Exercice 2857 Système unisolvent

Soient E un ensemble quelconque et $f_1, \dots, f_n : E \to K$ des fonctions.
Montrer par récurrence sur n que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans K^E si et seulement s'il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de E tels que $\det\big(f_i(x_j)\big) \neq 0$. [003444]

Exercice 2858 $\prod a_{i\sigma(i)} = \text{cste}$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ telle qu'il existe $a \neq 0$ tel que : $\forall\ \sigma \in S_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = a$. Montrer que $\operatorname{rg} A = 1$. [003445]

Exercice 2859 Combinaison linéaire des solutions

Soit $(S) \iff AX = B$ un système linéaire de n équations à n inconnues de Cramer. Montrer que pour tous scalaires $c_1, \dots, c_n$, on a :

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n = -\frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ c_1 & \dots & c_n & 0 \end{vmatrix}.$$

[003446]

Exercice 2860 Problème d'interpolation de Lagrange

Soit A un *anneau* commutatif, $x_1, \dots, x_n \in A$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
a. Le déterminant de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$ est un élément inversible de A ;
b. Pour tous $y_1, \dots, y_n \in A$, il existe un unique polynôme $P \in A_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \dots, n$.
Donner un exemple d'anneau A et un problème d'interpolation dans A (en des points x_i distincts) n'ayant pas de solution.
Correction ▼ [003447]

Exercice 2861 Polytechnique MP 2002

Soit p un nombre premier et $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$. Montrer que le déterminant de la matrice $A = (a_{j-i \bmod p}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$ vérifie : $\det(A) \equiv a_0 + \dots + a_{p-1} \bmod p$.
Indication : écrire $A = \sum_{k=0}^{p-1} a_k J^k$ et calculer A^p.
Correction ▼ [003448]

Exercice 2862 Centrale MP 2002

Soit un déterminant symétrique réel d'ordre impair dont les coefficients sont entiers, les diagonaux étant de plus pairs. Montrer que ce déterminant est pair.
Correction ▼ [003449]

Exercice 2863 Formule de Cauchy-Binet

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{np}(K)$ et $q \in [[1, \min(n,p)]]$.
Pour $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ avec $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_q \leq n$ et $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_q \leq p$ on note $\Delta_{X,Y}(M)$ le déterminant de la matrice $q \times q$ de terme général a_{x_i,y_j}.

1. Soient $M \in \mathscr{M}_{np}(K)$ et $N \in \mathscr{M}_{pn}(K)$ avec $n \leq p$. Montrer que $\det(MN) = \sum_{X \subset [[1,p]]; \operatorname{Card} X = n} \Delta_{[[1,n]],X}(M) \Delta_{X,[[1,n]]}(N)$ (considérer les deux membres comme des fonctions des colonnes de N).

2. Donner une formule pour $\det(MN)$ quand $n > p$.
3. Soient $M \in \mathscr{M}_{np}(K), N \in \mathscr{M}_{pq}(K)$ et $r \in [[1, \min(n,q)]]$. Montrer, pour $X \subset [[1,n]]$ et $Y \subset [[1,q]]$ avec $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) = r$: $\Delta_{X,Y}(MN) = \sum_{Z \subset [[1,p]]; \mathrm{Card}(Z)=r} \Delta_{X,Z}(M)\Delta_{Z,Y}(N)$.

[003450]

Exercice 2864

Dans le plan, on donne n points A_1, ... , A_n. Existe-t-il n points M_1,..., M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3]$,..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$.

Correction ▼ [005377]

---

102 200.99 Autre

Exercice 2865

Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer. [001153]

Exercice 2866

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure lorsque pour tout $i > j$: $a_{ij} = 0$.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Démontrer que $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.
3. Soit E un espace vectoriel, $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On note E_i l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_i\}$, pour tout $1 \le i \le n$. Montrer que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon)$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\varphi(E_i) \subset E_i$ pour tout $1 \le i \le n$.
4. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

[001154]

Exercice 2867

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = I + N.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\det(A^n)$.
2. Calculer N^2 et N^3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner le rang de N^n et celui de A^n.
4. En utilisant 1., donner, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice $M(n) = A^n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Expliquer et justifier l'écriture : $A^n = M(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

[001155]

Exercice 2868

Soit S la matrice 5×5 à coefficients réels : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(S)$. Déterminer (de préférence sans calcul) S^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimension respective 2 et 3 tels que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E_2$ tels que $Sx = x$. En déduire que la décomposition qui précéde n'est pas unique.

[001156]

Exercice 2869

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in M_2(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [001157]

Exercice 2870

Soient $n=2$ ou 3 et $A \in M_n(\mathbb{Q})$.

1. Montrer que si $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A+X)=\det(X)$ alors $A=0$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A+X)=\det(B+X)$. Montrer que $A=B$.

[001158]

Exercice 2871

Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A^2+B^2=AB$ et $AB-BA$ inversible. Montrer que 3 divise n. [001159]

Exercice 2872

Montrer que si $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}, A \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

[001160]

Exercice 2873

Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{rg}(A)=n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A))=n;$$
$$\mathrm{rg}(A)=n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A))=1;$$
$$\mathrm{rg}(A)\leq n-2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A))=0.$$

[001161]

Exercice 2874

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq 1, \\ \forall (i,j) &\in \{1,\dots,n\}^2, a_{i,j} \in [0,1[. \end{aligned}$$

Montrer que $|\det(A)|<1$. [001162]

Exercice 2875

Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice complexe dont les coefficients vérifient $|a_{i,j}| \leq 1$. Montrer que $|\det A| \leq 1$. [002451]

Exercice 2876

Soit A,B deux matrices carrées d'ordre n, A inversible.

1. Montrer que $\det(A+\lambda B)$ est un polynôme en λ de degré n. Quels sont ses termes de plus haut et de plus bas degré ?
2. En déduire que si A est une matrice inversible, pour toute matrice B, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que $A+\varepsilon B$ soit aussi inversible, $\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

[002457]

Exercice 2877 $\det(I-AB)=\det(I-BA)$

Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$. Montrer que $\det(I_p-AB)=\det(I_q-BA)$. (Commencer par le cas où A est la matrice canonique de rang r) [003426]

Exercice 2878 $\det(A^2+B^2)$

1. Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2) \geq 0$.
2. Chercher A,B ne commutant pas telles que $\det(A^2+B^2)<0$.

Correction ▼ [003429]

Exercice 2879 Déterminant par blocs

Soient $A,B,C,D \in \mathscr{M}_n(K)$ avec A inversible et $AC = CA$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(K)$. Montrer que $\det M = \det(AD - CB)$.

[003430]

Exercice 2880 Système linéaire homogène

On considère un système linéaire homogène : $(S) \iff AX = 0$, avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$, $n < p$ et $\mathrm{rg} A = n$.

1. Montrer qu'on peut compléter A en une matrice $B = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ inversible.
2. Montrer que les colonnes $n+1$ à p de ${}^t\mathrm{com}\, B$ constituent une base des solutions de (S).
3. Considérer l'exemple suivant :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0. \end{cases}$$

Correction ▼ [003434]

Exercice 2881 Inégalité

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que : $|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
Quand y a-t-il égalité ?
Correction ▼ [003435]

Exercice 2882 Déterminants 2×2 imposés

Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ quatre vecteurs d'un ev E de dimension 2. On note det le déterminant dans une base fixée de E.

1. Démontrer que : $\det(\vec{a},\vec{b})\det(\vec{c},\vec{d}) + \det(\vec{a},\vec{c})\det(\vec{d},\vec{b}) + \det(\vec{a},\vec{d})\det(\vec{b},\vec{c}) = 0$.
   (Commencer par le cas où $(\vec{a},\vec{b})$ est libre)
2. On donne six scalaires : $d_{ab}, d_{ac}, d_{ad}, d_{cd}, d_{db}, d_{bc}$ tels que $d_{ab}d_{cd} + d_{ac}d_{db} + d_{ad}d_{bc} = 0$.
   Montrer qu'il existe des vecteurs $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ tels que : $\forall\, x,y,\ d_{xy} = \det(\vec{x},\vec{y})$.

Correction ▼ [003436]

Exercice 2883 Décomposition d'un vecteur en dimension 3

Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ quatre vecteurs d'un ev E de dimension 3. On note : det le déterminant dans une base fixée de E.
Démontrer que : $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} + \det(\vec{a},\vec{d},\vec{c})\vec{b} + \det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})\vec{a}$.
Correction ▼ [003437]

Exercice 2884 $\det(u+n)$

Soient $u,n \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes d'un (x^2+1)-ev de dimension finie, u inversible, n nilpotent, avec $u \circ n = n \circ u$.

1. Démontrer que $\det n = 0$.
2. Chercher le polynôme caractéristique de n. En déduire que $\det(\mathrm{id}_E + n) = 1$.
3. Démontrer que $\det(u+n) = \det u$.

[003439]

Exercice 2885 Sev stables

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe deux sev F, G supplémentaires et stables par f.
Démontrer que $\det f = (\det f_{|F})(\det f_{|G})$.

[003440]

Exercice 2886 Groupe $SL_n(K)$

On note $SL_n(K) = \{M \in \mathscr{M}_n(K) \text{ tq } \det M = 1\}$.

1. (a) Démontrer que $SL_n(K)$ est un groupe pour le produit matriciel.

(b) Démontrer que $SL_n(K)$ est engendré par les matrices : $I+\lambda E_{ij}$, $(j \neq i)$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$, et $\lambda \in K$ (transformer une matrice $M \in SL_n(K)$ en I par opérations élémentaires).

2. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que M a une inverse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.

   (b) Démontrer que le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $I+E_{ij}$, $(j \neq i)$.

Correction ▼ [003441]

Exercice 2887 Déterminant de $X \mapsto AX$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $f_A : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), X \mapsto AX$. Calculer $\det f_A$.

Correction ▼ [003442]

Exercice 2888 ***I

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \geq 0$.

Correction ▼ [005368]

Exercice 2889 ***I

Déterminer les matrices A, carrées d'ordre n, telles que pour toute matrice carrée B d'ordre n on a $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Correction ▼ [005370]

Exercice 2890

Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et $(f_1, f_2 ..., f_n)$ un n-uplet de fonctions de E dans $\mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre ;
2. il existe n éléments a_1, a_2,..., a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.

Correction ▼ [005379]

Exercice 2891

Déteminer l'inverse de $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Correction ▼ [005380]

Exercice 2892 **I

Soit A une matrice carrée de format n. Calculer le déterminant de sa comatrice.

Correction ▼ [005614]

Exercice 2893 ***I

Soit A une matrice carrée de format n. Etudier le rang de com$A$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005615]

Exercice 2894 ***

Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \mathrm{com} M$ $(n \geqslant 2)$.

Correction ▼ [005616]

Exercice 2895 ***

Soit A une matrice carrée complexe de format n $(n \geqslant 2)$ telle que pour tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$, on ait $\det(A+M) = \det A + \det M$. Montrer que $A = 0$.

Correction ▼ [005648]

---

103 201.01 Valeur propre, vecteur propre

Exercice 2896

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.

2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.

[001597]

Exercice 2897

Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si -1 n'est pas valeur propre de A, alors il existe une matrice Q antisymétrique (i.e. ${}^tQ = -Q$) telle que $A = (I+Q)^{-1}(I-Q) = (I-Q)(I+Q)^{-1}$ et qu'on a $A \in \mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$. Réciproque ? [001598]

Exercice 2898

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$). [001599]

Exercice 2899

1. Soient f et g deux endomorphisme s d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que
$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$
2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   - Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
   - Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

[001600]

Exercice 2900

Soient $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Uniquement* en examinant la matrice A, trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A, puis deux sous-espaces $f-$stables.
2. Que représente la matrice B ?

[001601]

Exercice 2901

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On note $\chi_u = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer que
$$a_0 = \det(u) \qquad \text{et} \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(u)$$

[001602]

Exercice 2902

Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres. [001603]

Exercice 2903

Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On suppose que v admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E, formée de vecteurs propres communs à u et à v.
En déduire qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = a_0\mathrm{id} + a_1 v + \cdots + a_{n-1}v^{n-1}$ [001604]

Exercice 2904

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&-1&0&1\\-2&0&0&2\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&1&3\\-1&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\-1&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible,

1. montrer que $\{0\}\subset \mathrm{Ker}A\subset \mathrm{Ker}A^2\subset \mathrm{Ker}A^3=\mathbb{R}^4$ et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}A^2\oplus\mathrm{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1,Ae_1,A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1\in\mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2=\mathrm{Ker}A\oplus\mathrm{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1\in\mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Vect}(A^2e_1)\oplus\mathrm{Vect}(e_2)$,
6. montrer que (e_1,Ae_1,A^2e_1,e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1,Ae_1,e_1,e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C [001605]

Exercice 2905

Soit J la matrice

$$J=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J.

[001606]

Exercice 2906

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB-BA=A$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente, c'est à dire

$$\exists k\in\mathbb{N}, A^k=0.$$

On note E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application :

$$\psi\ \begin{array}{ccc}E&\to&E\\M&\mapsto&MB-BM\end{array}$$

1. Montrer que ψ est linéaire de E dans E.
2. Montrer par récurrence que : $\forall k\in\mathbb{N}\quad \psi(A^k)=kA^k$.
3. On suppose que $\forall k\in\mathbb{N}, A^k\neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.
4. Conclure.

[001607]

Exercice 2907

Soit M la matrice suivante : $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire M^{-1}. [001608]

Exercice 2908

Soit f un endomorphisme de $E=(x^2+1)^n$. Soit $\pi_1,\ldots,\pi_N$ des endomorphismes tous non nuls de E et $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ N nombres complexes distincts. On suppose que :

$$\forall m\in\mathbb{N}\quad f^m=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^m\pi_k.$$

1. Montrer que $\forall P \in (x^2+1)^{[}X]$, $\quad P(f) = \sum_{k=1}^{N} P(\lambda_k)\pi_k$

   On considère le polynôme $Q = \prod_{1\leq k\leq N}(X-\lambda_k)$ et pour chaque $p \in \{1,\dots,N\}$ les polynômes suivants :

$$Q_p = \prod_{\substack{1\leq k\leq N\\ k\neq p}} (X-\lambda_k) \qquad \text{et} \qquad \tilde{Q}_p = \frac{1}{Q_p(\lambda_p)}\, Q_p$$

2. Calculer $Q(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?
3. Montrer que $Sp(f) \subset \{\lambda_1,\dots,\lambda_N\}$
4. Montrer que $\tilde{Q}_p(f) = \pi_p$. Vérifier alors que $\pi_p \circ \pi_q = \begin{cases} 0 \text{ si } p\neq q \\ \pi_p \text{ si } p=q \end{cases}$
5. Calculer $f\circ\pi_p$. En déduire que $Sp(f) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_N\}$.

   On note E_p l'espace propre associé à la valeur propre λ_p.
6. Montrer que $Im\pi_p \subset E_p$. Réciproquement, pour $x \in E_p$, montrer que $x \in \mathrm{Ker}\pi_q$ pour $q \neq p$ (on calculera par exemple $\pi_q \circ f(x)$ de deux façons différentes) puis que $x = \pi_p(x)$. En déduire que $E_p \subset Im\pi_p$.
7. En déduire que $Im\pi_p = E_p$ et que $\mathrm{Ker}\pi_p = \bigoplus_{q\neq p} E_q$. Décrire géométriquement π_p.

[001609]

Exercice 2909

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2(nX+a)P \end{array}$$

Vérifier que cette application est bien définie.
Déterminer ses valeurs propres, et les espaces propres associés. [001610]

Exercice 2910

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Com} = \{v \in \mathscr{L}(E,E) / uv = vu\}$ des endomorphismes de E qui commutent avec u est un espace vectoriel.
2. (a) Soit v un élément de Com. Montrer que v préserve les espaces propres de u (c'est à dire que si E_λ est un espace propre de u associé à la valeur propre λ, on a $\forall x \in E_\lambda, v(x) \in E_\lambda$).
   (b) Donner la dimension des espaces propres de u et montrer que si x est un vecteur propre de u alors c'est aussi un vecteur propre de v.
   (c) A l'aide d'une base convenablement choisie, décrire tous les éléments de Com, et montrer que Com est de dimension n.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, \dots, u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$.
4. On veut maintenant étudier l'indépendance linéaire de la famille $\{\mathrm{id}, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$. Pour cela, on considère n réels $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i = 0$.
   (a) Montrer que les (α_i) sont solution du système :

$$(*)\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

   (b) On rappel que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i)$. En déduire l'ensemble des solutions du système $(*)$ et conclure.
5. Montrer que $\mathrm{Com} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, \dots, u^{n-1})$.

Correction ▼ [001611]

Exercice 2911

Donner les valeurs propres, vecteurs propres et matrice de diagonalisation éventuelle des matrices suivantes dans $(x^2+1)^2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

[002467]

Exercice 2912

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes, et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ ayant pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étudier, dans les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = (x^2+1)$, si u est diagonalisable. En donner une forme diagonalisée dans une base dont on donnera la matrice de passage par rapport à la base canonique.

[002468]

Exercice 2913

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$; on suppose qu'il existe un entier p tel que $M^p = I$. Montrer que si ω est une racine p-ième de l'unité, c'est une valeur propre de M ou alors M vérifie

$$M^{p-1} + \omega M^{p-2} + \cdots + \omega^{p-2} M + \omega^{p-1} I = 0.$$

[002470]

Exercice 2914

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, u un endomorphisme de E et $P \in K[X]$. On suppose que u vérifie l'équation $P(u) = 0$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$.
2. On suppose que P est de la forme
$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i), \quad \text{avec } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j.$$
Montrer que les seules matrices vérifiant $P(M) = 0$ sont de la forme $Q^{-1}DQ$, avec Q matrice inversible quelconque et D matrice diagonale que l'on précisera. Combien y a-t-il de matrices diagonales de ce type ?

[002471]

Exercice 2915

Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E. On suppose qu'il existe a, b complexes tels que $u \circ v = au + bv$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun. [002472]

Exercice 2916

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'application qui à tout polynôme P de E fait correspondre $u(P) = P(X-1)$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E. Est-il injectif ou surjectif ?
2. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de u ainsi qu'une base dans laquelle u est diagonalisable.

[002473]

Exercice 2917

Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes qui commutent ($AB = BA$). On suppose en outre que toutes les valeurs propres de B sont distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A.
2. Montrer que A est de la forme $A = P(B)$, où P est un polynôme de $(x^2+1)^[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.

[002474]

Exercice 2918

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Étant donné deux réels a, b, on note u l'application qui à tout polynôme P de E fait correspondre

$$u(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de u.

3. Trouver le noyau de u, ainsi que l'ensemble des polynômes qui vérifient $u(P) = 1$.

[002476]

Exercice 2919

On considère la matrice $N \times N$

$$M = \begin{pmatrix} b & c & 0 & .. & 0 & 0 \\ a & b & c & .. & 0 & 0 \\ 0 & a & b & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & b & c \\ 0 & 0 & 0 & .. & a & b \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois nombres complexes, avec $c \neq 0$. On note V un vecteur propre associé à la valeur propre λ de M.
Ecrire les relations reliant les composantes de V.
Déterminer toutes les valeurs propres de M.

Correction ▼ [002479]

Exercice 2920

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Correction ▼ [002570]

Exercice 2921

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. Vérifier que pour tout $\vec{x} \in E$, on a
$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$
et en déduire que f admet toujours une valeur propre.
3. Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.
4. Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas $n = 2$.

Correction ▼ [002571]

Exercice 2922

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou (x^2+1)), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Correction ▼ [002579]

Exercice 2923

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002580]

Exercice 2924

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.
3. Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [002594]

Exercice 2925

Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A.
2. On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. Déterminer une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \in E_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.
3. Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$A^n \vec{x} = \alpha \lambda_1^n \vec{\varepsilon}_1 + \beta \lambda_2^n \vec{\varepsilon}_2$$
4. Notons $A^n \vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.

Correction ▼ [002595]

Exercice 2926

Soit $P(X)$ un polynôme de $(x^2+1)^{[}X]$, soit A une matrice de $M_n((x^2+1)^{)}$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n((x^2+1)^{)}$.

1. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.
2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A.
Soit $\mu \in (x^2+1)$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :
$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r).$$
   (a) Démontrer que
   $$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n) \cdots \det(A - \alpha_r I_n).$$
   (b) En déduire que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.
3. On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A, démontrer que
$$S_B = \{P(\lambda) / \ \lambda \in S_A\}.$$
4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme :
$$Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r),$$
on note C la matrice $C = Q(A)$.
   (a) Démontrer que $S_C = \{0\}$.
   (b) En déduire que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.

Correction ▼ [002596]

Exercice 2927

1. (a) Soit $f \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}.$$
   (b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la notera A.
   (c) Montrer que le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
   (d) Montrer que le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

(e) Calculer graphiquement l'image du vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat par le calcul.

(f) Montrer que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

(g) Quelle est la matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$? On la notera D.

(h) Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur $\vec{v}_1$ et dont la deuxième colonne est le vecteur $\vec{v}_2$. Calculer P^{-1}.

(i) Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?

(j) Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Même exercice avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

[002761]

Exercice 2928

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002762]

Exercice 2929

Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

[002763]

Exercice 2930

Trouver une matrice carrée inversible P telle que $B = PAP^{-1}$ soit diagonale, et écrire la matrice B obtenue, pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002764]

Exercice 2931 DS mai 2008

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathscr{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

   (b) En déduire que l'on peut diagonaliser A.

2. (a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs propres tels que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Préciser la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$; quelle relation lie les matrices A, P, P^{-1} et D ?

3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Après avoir donné D^n, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[002765]

Exercice 2932 DS mai 2008

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. (a) Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.
   (b) A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaliser A.

[002766]

Exercice 2933

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les inconnue doivent-elles satisfaire pour que cette matrice soit diagonalisable ? Ces conditions étant remplies, fournir une base de vecteurs propres pour A. [002767]

Exercice 2934

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[002777]

Exercice 2935 Valeurs propres de AB et BA

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.
(I_n, I_p = matrices unité d'ordres n et p)

1. Montrer que si C est inversible, alors D l'est aussi (résoudre $DX = 0$).
2. Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.
3. En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.

Correction ▼ [003379]

Exercice 2936 Calcul de valeurs propres

Chercher les valeurs propres des matrices :

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003499]

Exercice 2937 Calcul de valeurs propres

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Chercher les valeurs et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On distinguera les cas :

1. $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
2. $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

Correction ▼ [003500]

Exercice 2938 Polynômes de Chebychev

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + (2\cos\theta)I)$ par récurrence.
2. En déduire les valeurs propres de A.

Correction ▼ [003501]

Exercice 2939 Matrice tridiagonale

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [003502]

Exercice 2940 Esem 91

Soit $C_{pq} = \begin{pmatrix} U_{pq} & (0) & U_{pq} \\ (0) & (0) & (0) \\ U_{pq} & (0) & U_{pq} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où U_{pq} est la matrice $p \times q$ dont tous les coefficients valent 1. Chercher les éléments propres de $C_{p,q}$.

Correction ▼ [003506]

Exercice 2941 Sommes par lignes ou colonnes constantes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que la somme des coefficients par ligne est constante ($= S$). Montrer que S est une valeur propre de A.
Même question avec la somme des coefficients par colonne. [003508]

Exercice 2942 Matrices stochastiques

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall\, i, j,\ m_{ij} \geq 0 \\ \forall\, i,\ m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = 1. \end{cases}$ (*matrice stochastique*)

1. Montrer que 1 est valeur propre de M.
2. Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leq 1$ (si $(x_1, \dots, x_n) \in (x^2+1)^n$ est un vecteur propre associé, considérer le coefficient x_k de plus grand module). Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

[003509]

Exercice 2943 $(X-a)P'$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto (X-a)P'$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u. [003511]

Exercice 2944 $X(X-1)P' - 2nXP$

Soit $E = K_{2n}[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X(X-1)P' - 2nXP$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction ▼ [003512]

Exercice 2945 $X^3P \bmod (X-a)(X-b)(X-c)$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in K$ distincts, et $\varphi : K_2[X] \to K_2[X], P \mapsto R$ où R est le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.
Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ.

Correction ▼ [003513]

Exercice 2946 $P(2-X)$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\theta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(2-X)$.

Correction ▼ [003514]

Exercice 2947 $P(X+1)-P'$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\theta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1)-P'$.

Correction ▼ [003515]

Exercice 2948 Eivp 91

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ qui à P associe $(X-a)P'+P-P(a)$. Donner la matrice de f dans la base $(X^k)_{0\leq k\leq n}$. Chercher $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ et les éléments propres de f.

Correction ▼ [003516]

Exercice 2949 ***

Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A=X^4-1$ et $B=X^4-X$.
Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f.

Correction ▼ [005655]

Exercice 2950 ****

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2/\ uv-vu=\alpha u+\beta v$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Correction ▼ [005660]

Exercice 2951 ***

$E=C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour f élément de E, $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ (\varphi(f))(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \text{ si } x\neq 0 \text{ et } (\varphi(f))(0)=f(0).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Correction ▼ [005674]

104 201.02 Diagonalisation

Exercice 2952

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1)=T(e_3)=e_3$ et $T(e_2)=-e_1+e_2+e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.
2. On pose $f_1=e_1-e_3$, $f_2=e_1-e_2$, $f_3=-e_1+e_2+e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.
4. On pose $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

[001612]

Exercice 2953

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base (e_1,e_2,e_3). On désigne par I_E l'application identité de E. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f(e_1)=2e_2+3e_3, f(e_2)=2e_1-5e_2-8e_3, f(e_3)=-e_1+4e_2+6e_3$.

1. Donner la matrice de f dans la base (e_1,e_2,e_3).
2. Donner la dimension et une base de $Ker(f-I_E)$.
3. Donner la dimension et une base de $Ker(f^2+I_E)$.

4. Montrer que la reunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? Et celle de f^2 ?

[001613]

Exercice 2954

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans E.

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $Imf \subset Kerf$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans la suite que $f^2 = 0$.
2. Soit F un supplémentaire de $Kerf$ dans E et soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre. Montrer comment la compléter si nécessaire par des vecteurs de $Kerf$ pour obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $Imf = Kerf$?
4. Exemple. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

[001614]

Exercice 2955

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. [001615]

Exercice 2956

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. [001616]

Exercice 2957

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ? [001617]

Exercice 2958

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire. [001618]

Exercice 2959

Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^{n-1}x_0 \neq 0$. Montrer que $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \cdots, A^{n-1}x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comment s'écrit la matrice A dans cette base ?

Application : on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A a une forme simple. [001619]

Exercice 2960

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier. Écrire alors M sous une forme plus simple. [001620]

Exercice 2961

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner un base de Ker T et ImT.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de T, puis ses valeurs propres.
   (b) Justifier, sans calcul, que T soit diagonalisable et écrire une matrice diagonale semblable à A .
   (c) Calculer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de T.
3. Soient $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3).
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice D de T dans la base (f_1, f_2, f_3) .
4. Quelle relation relie A^3, D^3, P et P^{-1} ? En déduire A^3.

[001621]

Exercice 2962

Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

[001622]

Exercice 2963

Pour quelles valeurs de $(a,b,c) \in (x^2+1)^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On ne cherchera pas à réduire explicitement A.

[001623]

Exercice 2964

Soit u l'application suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

[001624]

Exercice 2965

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. De même, montrer que si x est un vecteur propre complexe de A, alors $\bar{x}$ (où $\bar{x}$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de x) est aussi un vecteur propre complexe de A.

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[001625]

Exercice 2966

Soit A_t la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$. Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$? En déduire le spectre de A_t. A_t est-elle diagonalisable ?

[001626]

Exercice 2967

Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & 0 & b\\ a & b & c\end{pmatrix}$$

[001627]

Exercice 2968

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, qui commutent (c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$). On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \dots, \mu_q$) les valeurs propres de u (resp. de v), et $F_1, \dots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \dots, G_q$).

1. Montrer que chaque G_j (resp. F_i) est stable par u (resp. v) (c'est à dire que $u(G_j) \subset G_j$).
2. On pose $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que F_i est la somme directe des espaces $(H_{ij})_{1 \leq j \leq q}$.
3. En déduire l'énoncé suivant : *Lorsque deux endomorphismes diagonalisables u et v commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v (en d'autres termes, u et v sont diagonalisables simultanément dans la même base).*

[001628]

Exercice 2969

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix}13 & -5 & -2\\ -2 & 7 & -8\\ -5 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

[001629]

Exercice 2970

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable. [001630]

Exercice 2971

Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & R = \text{ reste de la division euclidienne de } P \text{ par } P_0 \end{array}$$

A l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable. [001631]

Exercice 2972

Soit α et β deux réels, et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix}1 & -\alpha & -\alpha & 1\\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta\\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta\\ 0 & \alpha & \alpha & 0\end{pmatrix}$$

A quelle condition sur α et β, A est-elle diagonalisable ?
On suppose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Vérifier que $A(A-I) = 0$. En déduire A^n et $(A+I)^{-1}$.

[001632]

Exercice 2973

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables, sur $\mathbb{R}$ et sur (x^2+1) ?
Lorsqu'elles sont diagonalisables, donner une matrice diagonale semblable.

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -2\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -4 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Réduire explicitement A et C.

[001633]

Exercice 2974

On considère un endomorphisme f d'un (x^2+1) espace vectoriel E de dimension finie n, tel que f^2 est diagonalisable. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$$

1. On suppose que f est diagonalisable. On note $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ les valeurs propres (distinctes) de A, et $E_1,\dots,E_r$ les espaces propres associés.
   (a) Montrer que si $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ alors $\mathrm{Ker} f^2 = \{0\}$.
   (b) On suppose maintenant que $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$. On note $\alpha_{\alpha_1},\dots,\alpha_{\alpha_r}$ les autres valeurs propres de f, et $E_0,\dots,E_r$ ses espaces propres. En utilisant que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, montrer que si $f^2(x) = 0$ alors $f(x) = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
2. On suppose que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (a) Montrer que si μ est une valeur propre de f, alors μ^2 est une valeur propre de f^2.
      i. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2, et μ et $-\mu$ ses deux racines complexes. Montrer que
      $$\mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\lambda\mathrm{id}) \quad \text{et que} \quad \mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\lambda\mathrm{id}).$$
      ii. Montrer que
      $$\mathrm{Ker}(f^2-\lambda\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id})$$
      (remarquer que $\forall y \in \mathrm{Ker} f^2 \;\; y = \frac{1}{2\mu}((f+\mu\mathrm{id})(y) - (f-\mu\mathrm{id})(y)))$.
   (b) Montrer (avec soin) que f est diagonalisable.

[001634]

Exercice 2975

La matrice suivante est-elle diagonalisable, triangularisable ? Effectuer explicitement la réduction.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [001635]

Exercice 2976

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$. Calculer A^2, puis A^3. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, montrer que A est diagonalisable. Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs valeurs propres elles mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Correction ▼ [001636]

Exercice 2977

On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_{nn}((x^2+1)^)$ et l'application ϕ_A définie par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{nn}((x^2+1)^) & \rightarrow & \mathscr{M}_{nn}((x^2+1)^) \\ B & \mapsto & AB \end{array}$$

1. Montrer que ϕ_A est linéaire.
   Le but de l'exercice est de montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
2. Calculer $\phi_A^2(B)$, puis $\phi_A^k(B)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que si P est un polynôme, alors $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$.
3. En déduire que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si P est un polynôme annulateur de ϕ_A.
4. Montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

[001637]

Exercice 2978

A n nombres complexes $(a_1,\dots,a_n) \in (x^2+1)^n$ avec $a_2 \neq 0$, on associe la matrice $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A_n. Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique χ_n de A_n ?
2. Calculer χ_2, χ_3.
3. On pose $b_n = a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Par récurrence, montrer que $\chi_n = (-X)^{n-2}(X^2 - a_1X - b_n)$.

4. Si $b_n = 0$, A_n est-elle diagonalisable ?
5. Si $b_n \neq 0$, à quelle condition A_n est-elle diagonalisable ?

[001638]

Exercice 2979

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
Trouver une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. [001639]

Exercice 2980

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que $u^p = 0$ pour un certain entier p. Quelles sont les valeurs propres de u. A quelle condition u est-il diagonalisable ? Montrer que $u^n = 0$. [001640]

Exercice 2981

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de B, calculer B^{-1}.
Correction ▼ [001641]

Exercice 2982

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Diagonaliser A.
3. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$).

Correction ▼ [001642]

Exercice 2983

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique. Calculer A^2.
2. u est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}^3[X]$ formée de vecteurs propres de u.

[001643]

Exercice 2984

On considère un réel α et l'application T_α suivante :

$$T_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P' \end{array}$$

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, la restriction de T_α à $\mathbb{R}_n[X]$ défini un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose pour cette question que $n = 3$.
   (a) Ecrire la matrice de T_α dans la base $(1, X, X^2, x^3)$.
   (b) Déterminer les valeurs propores de T_α. On les note $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α a des valeurs propres multiples.
   (d) Donner un vecteur propre de T_α pour chaque valeur propre, lorsque $\alpha = -1$, puis $\alpha = -4$. L'endomorphisme T_{-4} est-il diagonalisable ?
3. On suppose maintenant $n > 3$.

(a) Ecrire la matrice de T_α dans la base $(1,X,X^2,...,X^n)$.

(b) Déterminer les valeurs propores de T_α. On les note $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$.

(c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α a des valeurs propres multiples. Dans chaque cas, donner la liste des valeurs propres avec leurs multiplicités

(d) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}T_\alpha$ et de ImT_α lorsque $\alpha \notin \{1-n,...,-1,0\}$.

(e) Déterminer $\mathrm{Ker}T_\alpha$ pour $\alpha=-1$, puis $\alpha=0$. L'endomorphisme T_0 est-il diagonalisable ?

(f) Lorsque $\alpha = p-1$ avec $p\in\{1,...,n\}$, donner un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $T_\alpha(P)=0$. En déduire $\mathrm{Ker}T_\alpha$. Préciser sa dimension.

(g) Soit λ_k une valeur propre simple de T_α. Donner un vecteur propre de T_α associé à λ_k.

[001644]

Exercice 2985

Soient $\mathbb{R}^n$ euclidien, $f\in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale. [001645]

Exercice 2986

Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1}\\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n\end{pmatrix}, a_i\in\mathbb{R}; B=\begin{pmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b\\ & & b & a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}.$$

Peut-on déterminer a,b tels que B soit la matrice d'un produit scalaire ? [001646]

Exercice 2987

Montrer que si A est une matrice symétrique réelle, alors $A+iI$ est inversible. [001647]

Exercice 2988

Soit f un endomorphisme de $(x^2+1)^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & k & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \text{ où } k\in(x^2+1)^{\cdot}$$

(a) Déterminer, suivant les valeurs de k, la dimension du noyau de f.
(b) Montrer que M admet une valeur propre réelle entière indépendante de k, et calculer toutes les valeurs propres de M.
(c) Indiquer toutes les valeurs de k pour lesquelles on obtient des valeurs propres multiples. Pour quelles valeurs de ces k la matrice M est-elle semblable à une matrice diagonale ? [001648]

Exercice 2989

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I$.

1. Montrer que n est pair, $n=2p$.
2. Calculer $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et montrer $Sp_{(x^2+1)}$

(A)= { i,-i} .*Pourquelleraison* A *estellediagonalisablesur* (x$^2+1$) ?

3. Montrer que si $\{y_1,\dots y_k\}$ est une base de E_i, alors $\{\overline{y_1},\dots\overline{y_k}\}$ est une base de E_{-i}. Quelle est donc la valeur de k ?
4. Démontrer que A est semblable (dans $M_n(\mathbb{R})$) à une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs diagonaux est $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. (on pourra utiliser la question 3.)

[001649]

Exercice 2990

Soient M et $N\in M_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi_M\in\mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N\mapsto MN-NM$.

1. Soient $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Diagonaliser A et montrer que B n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que si N est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle λ de φ_M alors N est nilpotente. (on pourra établir que pour tout $k\in\mathbb{N}$: $MN^k-N^kM=k\lambda N^k$.)

3. Montrer que l'identité n'appartient pas à l'image de φ_M. (utiliser la trace.)
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser φ_D puis φ_A. Montrer que φ_B n'est pas diagonalisable.
5. Montrer que si M est diagonalisable, φ_M est diagonalisable.
6. Etablir la réciproque lorsque M a au moins une valeur propre.

[001650]

Exercice 2991

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p \in \mathscr{L}(E)$ est nommée projecteur lorsque $p^2 = p$.

1. Montrer que si p est un projecteur $1 - p$ est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient p et q deux projecteurs tels que $p+q$ soit aussi un projecteur. Montrer que :
   (a) $pq = qp = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

   On suppose désormais E de dimension finie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que tout projecteur est diagonalisable et que deux projecteurs sont semblables si et seulement si ils ont même trace.
4. Montrer que toute matrice diagonalisable est combinaison linéaire de projecteurs.

[001651]

Exercice 2992

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $P(Sp(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in Sp(u)\}$.

1. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que $P(Sp(u)) = Sp(P(u))$.
2. Montrer, dans le cas général, $P(Sp(u)) \subset Sp(P(u))$.
3. Lorsque $\mathbb{K} = (x^2+1)$ montrer que $Sp(P(u)) \subset P(Sp(u))$. Ce résultat est-il vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

[001652]

Exercice 2993

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. [001653]

Exercice 2994

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ déterminée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que la restriction de f a tout sous-espace stable est diagonalisable.
3. En déduire tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

[001654]

Exercice 2995

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_M \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN$. Montrer que φ_M est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable. (utiliser le polynôme minimal.) [001655]

Exercice 2996

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $\{id, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$ est libre.

(ii) Il existe $x \in E$: $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ engendre E.

(iii) Les valeurs propres de f sont simples. [001656]

Exercice 2997

Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.

2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

[001657]

Exercice 2998

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propores de A. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. En déduire A^n, en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
   En remarquant que $P(A) = 0$ (on dit alors que P est un polynôme annulateur de A) et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace de dimension 1, dont on désignera une base par ε_2. Déterminer ensuite un vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Soit enfin ε_1, un vecteur propre de f, non colinéaire à ε_2. Ecrire $\tilde{A}$, la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, ainsi que la matrice de passage P et son inverse P^{-1}. Retrouver A^n.

[001658]

Exercice 2999

Soit f un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable. [001659]

Exercice 3000

Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f un endomorphisme de E.

1. Quels sont les valeurs propres de l'endomorphisme nul de E ?
2. On suppose que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) 2 est-il valeur propre de f ?
   (b) Le vecteur $2e_1 + e_2 + e_3$ est-il un vecteur propre de f ?
3. Pourquoi un vecteur de E ne peut-il être vecteur propre relativement à deux valeurs propres distinctes ?
4. (a) Est-il vrai que si λ est une valeur propre de f et si P est un polynôme annulateur de f alors λ est racine de P ?
   (b) Est-il vrai que si λ est une racine d'un polynôme annulateur de f alors λ est une valeur propre de f ?
5. Montrer que si $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$ alors 1 est valeur propre de f.
6. Montrer qu'il existe toujours au moins un scalaire α tel que $f - \alpha \mathrm{Id}_E$ est bijectif.
7. Donner un exemple d'endomorphisme f de E avec $n = 2$ tel que la somme de deux vecteurs propres de f n'est pas un vecteur propre de f.
8. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ et que si $x \in E$ s'écrit $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ alors $f(x) = 2x_1 - 3x_2$.
   (a) Quel résultat assure l'existence d'un tel endomorphisme ?
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
9. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
10. Si l' endomorphisme f admet 0 pour valeur propre et est diagonalisable, que peut-on dire de la dimension du noyau de f ?

[001660]

Exercice 3001

Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes et le cas échéant, les diagonaliser :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$,

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}), k \in \mathbb{C}$.

[001661]

Exercice 3002

Soient $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathscr{T} = \{M \in \mathscr{M}_n(K) : \text{tr}(M) = 0\}$ et $\text{vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice réduite de f.

[001662]

Exercice 3003

Montrer que si le polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un K-espace vectoriel de dimension finie admet une racine $\lambda \in K$ alors λ est valeur propre de f. [001663]

Exercice 3004

Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$,

[001664]

Exercice 3005

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $\text{tr}(f) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que le polynôme cararactéristique de f s'écrive

$$\chi_f = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$

3. (a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(f) \neq 0$.
   (b) Réduire sans calcul la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sans calcul les sous-espaces vectoriels propres.

[001665]

Exercice 3006

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = D$.
   (a) Montrer que Y et D commutent.
   (b) En déduire que Y est diagonale puis déterminer Y.
2. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) En déduire les solutions $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

[001666]

Exercice 3007

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable et $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$.
2. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\ker(f^2 - \mu^2 \text{Id}_E) = \ker(f - \mu \text{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu \text{Id}_E)$.
3. On suppose $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$.

(a) Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

(b) On suppose en outre que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

[001667]

Exercice 3008

On considère la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Calculer A^2.
2. Rechercher les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

[001668]

Exercice 3009

On désigne par E l'espace vectoriel des polynôme s à coefficients réels, et par E_n, le sous-espace des polynôme s de degré au plus n.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\Delta P(x) = (x+1)P'(x) + 2P(x)$ définit une application linéaire de E dans E. Quel est le degré de ΔP lorsque P appartient à E_n ?
2. On considère Δ_2, la restriction de Δ au sous-espace E_2. Déterminer les valeurs propres de Δ_2. L'endomorphisme Δ_2 est-il diagonalisable ? Est-ce que Δ_2 est un isomorphisme ?
3. En utilisant la définition des valeurs propres, calculer les valeurs propres et les polynôme s propres de Δ.

[001669]

Exercice 3010

Pour tout élément non nul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ est la matrice $A = \left(\alpha_{i,j}\right)$ où $\alpha_{i,j} = a_i a_j$.

1. Déterminer le noyau et l'image de u.
2. En déduire les sous-espaces propres de u. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

[001670]

Exercice 3011

Soit B une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit son rayon spectral par

$$\rho(B) = \max\left\{|\lambda| \text{ avec } \lambda \text{ est une valeur propre de } B\right\}.$$

1. Montrer que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k = 0$.
2. En déduire que $I - B$ est inversible et que $(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$.

[001671]

Exercice 3012 Endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$

On considère l'endomorphisme a de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative $A = [a]_e^e$ dans la base canonique e est $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$.
Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de a. Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ de vecteurs propres ? Choisir ensuite f telle que $[\mathrm{id}_E]_f^e$ et $[\mathrm{id}_E]_e^f$ soient à coefficients entiers. Dessiner $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs $\vec{x}$ et leurs images $a(\vec{x})$ à l'aide de f.
Trouver deux matrices P et D carrées d'ordre 2 telles que D soit diagonale, P inversible et $A = PDP^{-1}$. Calculer $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ et A^{50}.
Calculer $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$.

Correction ▼ [001672]

Exercice 3013 Endomorphisme d'un espace de matrices

Soit K un corps commutatif quelconque, et soit $F = \mathscr{M}_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Si i et j sont des entiers compris entre 1 et n, on note par F_{ij} l'élément de F dont le coefficient (i,j) est 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Montrer que les F_{ij} forment une base de F. Dimension de F ? Soit D dans F et diagonale. Soient α et β dans K et soit l'endomorphisme Φ de F qui à la matrice X fait correspondre la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$. Calculer $\Phi(F_{ij})$. Φ est il un endomorphisme diagonalisable ? Donner son polynôme caractéristique en fonction des coefficients de D et de α et β.

Correction ▼ [001673]

Exercice 3014

Soit $\theta \in]0,\pi[$. On considère les deux matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\det B = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que $\det B$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0,\pi[$, et les déterminer. Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. Montrer que les valeurs propres des matrices $2I_n + A$ et $2I_n - A$ sont strictement positives.

Correction ▼ [001674]

Exercice 3015

Soit a,b,c trois réels et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Discuter la possibilité de le diagonaliser selon les valeurs de a,b,c. [002469]

Exercice 3016

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n non nulle et nilpotente.

1. Montrer que $I - A$ n'est pas diagonalisable.
2. Généraliser en montrant que si B est une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont égales, alors $B + A$ n'est pas diagonalisable.
3. Montrer qu'il existe A, B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ nilpotente et B diagonalisable, telles que $A + B$ soit diagonalisable.

[002477]

Exercice 3017

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002563]

Exercice 3018

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002566]

Exercice 3019

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans (x^2+1) ?

Correction ▼ [002567]

Exercice 3020

Soit
$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$
Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002568]

Exercice 3021

(*9 points*) Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est
$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
En déduire la décomposition de Dunford de B.
5. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' = x+z \\ y' = -x+2y+z \\ z' = x-y+z \end{cases}$$

[002572]

Exercice 3022

(*7 points*) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et par la relation de récurrence
$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n\geq 1$ on ait
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$
Justifier.
2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X)=a_nX+b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n=a_nA+b_nI_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 3023

(*5 points*) Soit A une matrice carrée, $A\in M_n(K)$ ($K=\mathbb{R}$ ou (x^2+1)). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(BAB^{-1})=\mathrm{tr}A$.
Démontrer que $\det(\exp A)=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

Exercice 3024

(*4 points*) On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S)\quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Exprimer le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
3. Représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy).
4. Discuter graphiquement l'évolution de la population des lapins en fonction des conditions initiales.

Correction ▼ [002575]

Exercice 3025

(*9 points*) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - mathrmId$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.
   (b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.
   (d) Retrouver A^n.

Correction ▼ [002576]

Exercice 3026

(*7 points*) Soient M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ, montrer que $MAx = \lambda Ax$, en déduire que les vecteurs x et Ax sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A.
2. On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.
   (a) Montrer par récurrence sur n l'égalité suivante :
   $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j).$$
   En déduire que le système suivant
   $$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$
   admet une unique solution $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :
   $$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

et en déduire qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Correction ▼ [002577]

Exercice 3027

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont -1 et 2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002581]

Exercice 3028

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction ▼ [002583]

Exercice 3029

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient (x_1,x_2), (y_1,y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1+y_2 = x_1+x_2.$$
2. Soit le vecteur $\varepsilon = (1,-1)$, montrer que c'est un vecteur propre de A. On notera λ sa valeur propre.
3. Montrer que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.
4. Soit $e_1 = (1,0)$. Montrer que la matrice, dans la base (e_1,ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002584]

Exercice 3030

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.

3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

Seconde partie :
On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Démontrer que f admet un plan stable (c'est-à-dire f-invariant).
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

II

On rappelle qu'une matrice $N \in M_n((x^2+1)^)$ est dite nilpotente d'ordre m si $N^m = 0$, et si pour tout k dans $\mathbb{N}$, $k < m$, on a $N^k \neq 0$. Soient $N \in M_n((x^2+1)^)$ une matrice nilpotente d'ordre m et $A \in M_n((x^2+1)^)$ une matrice telle que $AN = NA$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de N. En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de N.
2. Déterminer les valeurs propres de N.
3. Démontrer que $\det(I+N) = 1$.
4. On suppose A inversible. Démontrer que les matrices AN et NA^{-1} sont nilpotentes. En déduire que
$$\det(A+N) = \det A.$$
5. On suppose A non inversible. En exprimant $(A+N)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer que
$$\det(A+N) = 0.$$

Correction ▼ [002586]

Exercice 3031

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002587]

Exercice 3032

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.

Correction ▼ [002591]

Exercice 3033

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Correction ▼ [002592]

Exercice 3034

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}-8&-3&-3&1\\6&3&2&-1\\26&7&10&-2\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
2. Déterminer les vecteurs propres de f.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que
$$f(\vec{v})=2\vec{v}+\vec{u} \text{ et } f(\vec{w})=2\vec{w}+\vec{v}.$$
4. Soit $\vec{e}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Démontrer que $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de f dans cette base.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [002593]

Exercice 3035

Soit $m\in\mathbb{R}$, et A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1+m&1+m&1\\-m&-m&-1\\m&m-1&0\end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ? (justifier). Déterminer suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A (justifier).

Correction ▼ [002599]

Exercice 3036

1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur (x^2+1) mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (justifier).
2. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur (x^2+1), ni sur $\mathbb{R}$ (justifier).

Correction ▼ [002600]

Exercice 3037

Soit A la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Exprimer les solutions du système différentiel $X'=AX$ dans une base de vecteurs propres et tracer ses trajectoires.

Correction ▼ [002601]

Exercice 3038

Soit $a\in\mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0\\a&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction ▼ [002603]

Exercice 3039

Soit $\theta\in\mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
2. Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle. Quel est le sous-espace propre associé ? Que se passe-t-il si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

Correction ▼ [002604]

Exercice 3040

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et -2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002605]

Exercice 3041

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? (Justifier).
2. Calculer $(A-I)^2$. Démontrer que $A^n = nA + (1-n)I$.

Correction ▼ [002606]

Exercice 3042

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer, sans calculs, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.
3. Soit $\vec{e}$ tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrer que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier.)

Correction ▼ [002607]

Exercice 3043

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [002608]

Exercice 3044

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
   Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A.
2. Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Lorsque A est diagonalisable, donner une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A. Ecrire la solution générale du système.
   (b) Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrer directement le système $x' = Ax$.
3. Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t\to+\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E. (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a.
4. Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0,+\infty[$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E. (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a.

Correction ▼ [002609]

Exercice 3045

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

I

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

II

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\ker(A+I)^2$ est un plan stable par f.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ ($AP = PB$).
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

1. Vérifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Donner les solutions du système différentiel $X' = A.X$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Trigonaliser la matrice A.

Correction ▼ [002610]

Exercice 3046

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a+c = b+d = 1$ et $a-b \neq 1$.

1. Soient (x_1,x_2), (y_1,y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que
$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1+y_2=x_1+x_2.$$
2. Soit le vecteur $\vec{x}=(1,-1)$, vérifier que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, et déterminer sa valeur propre.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A et calculer ses racines.
4. Déterminer un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$ et exprimer la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base $(\vec{x},\vec{y})$.

Correction ▼ [002611]

Exercice 3047

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par
$$\begin{aligned}f:E&\longrightarrow E\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\longmapsto\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y-z\\2x+2z\\4x-2y+4z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soient $\vec{u}_1=(1,0,-1)$, $\vec{u}_2=(1,2,0)$ et $\vec{u}_3=(0,1,1)$. Démontrer que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base de E.
4. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.
5. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.

Correction ▼ [002612]

Exercice 3048

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. Démontrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.
2. On suppose maintenant que $n=4$.
   (a) Démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, $\vec{x}\neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.
   (b) Soit $\vec{x}_1\neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.
      i. Démontrer que F est stable par f.
      ii. Soit $\vec{x}_2\in E$, on suppose que $\vec{x}_2\notin F$, démontrer que $\mathscr{B}=(\vec{x}_1,f(\vec{x}_1),\vec{x}_2,f(\vec{x}_2))$ est une base de E.
   (c) Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (d) Calculer $\det f$ et $\det(\lambda \mathrm{id}_E-f)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.
   (e) L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?

Correction ▼ [002613]

Exercice 3049

Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et A la matrice
$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&b\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}$$
2. On suppose dans la suite que $b=1$ et $a\neq 0$
   (a) Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.
   (b) Trouver D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et
$$A=D+N.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminer les solutions de $\mathscr{E}$.

Correction ▼ [002614]

Exercice 3050

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ. Démontrer que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Enoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. Donner une base de vecteurs propres de A et diagonaliser A.
2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.

   (b) Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.

   (c) Ecrire le polynôme caractéristique de B.

   (d) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Correction ▼ [002615]

Exercice 3051 Diagonalisation en dimension 2

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [003496]

Exercice 3052 Diagonalisation en dimension 3

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & -2\\ 3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 6\\ -4 & 10 & 6\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}$

Correction ▼ [003497]

Exercice 3053 Diagonalisation en dimension 4

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}0 & 2 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 5 & 0\\ 0 & 7 & -9 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -7\\ 9 & -3 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -2 & -3\\ 2 & -2 & 0 & -1\\ 3 & -3 & -1 & -3\end{pmatrix}$

Correction ▼ [003498]

Exercice 3054 Diagonalisation

Diagonaliser $M=\begin{pmatrix}(0) & & 1\\ & \cdots & \\ 1 & & (0)\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(K)$.

Correction ▼ [003503]

Exercice 3055 Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$.

Correction ▼ [003504]

Exercice 3056 Engees 93

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [003505]

Exercice 3057 Matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. A quelle condition A est-elle diagonalisable ? [003507]

Exercice 3058 $(X^2-1)P''+(2X+1)P'$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto (X^2-1)P''+(2X+1)P'$.

1. Chercher la matrice de u dans la base canonique de $K_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Correction ▼ [003510]

Exercice 3059 $\mathrm{tr}(A)M+\mathrm{tr}(M)A$

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. L'endomorphisme f de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ défini par $f(M) = \mathrm{tr}(A)M+\mathrm{tr}(M)A$ est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [003517]

Exercice 3060 ***

Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2-1)P'-2nXP$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [005654]

Exercice 3061 ****

Soient A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et M l'élément de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.
Calculer $\det M$. Déterminer les éléments propres de M puis montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Correction ▼ [005663]

Exercice 3062 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable.

Correction ▼ [005667]

Exercice 3063 ***

Soit A une matrice carrée de format 2 telle que A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Tr}A \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [005673]

Exercice 3064 ***I

Sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On donne trois endomorphismes f, u et v tels qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour $k \in \{1,2,3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Montrer que f est diagonalisable.

Correction ▼ [005675]

Exercice 3065 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où a_1,..., a_n sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$). A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [005682]

105 201.03 Polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 3066 Formules pour une matrice 3×3

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\mathrm{tr}A)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det(A)$.
2. Soit λ une valeur propre de A et L_1, L_2 deux lignes non proportionnelles de $A - \lambda I$ (s'il en existe). On calcule $L = L_1 \wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X = {}^tL$. Montrer que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

[003524]

Exercice 3067 Recherche de vecteurs propres pour une valeur propre simple

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de A telle que $\mathrm{rg}(A - \lambda I) = n - 1$.

1. Quelle est la dimension du sous espace propre E_λ ?
2. Montrer que les colonnes de ${}^t\mathrm{com}(A - \lambda I)$ engendrent E_λ.
3. Exemple : diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003525]

Exercice 3068 Éléments propres de C^tC

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = C^tC$.

1. Chercher le rang de M.
2. En déduire le polynôme caractéristique de M.
3. M est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003526]

Exercice 3069 Ensi Chimie P 94

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \frac{i}{j}$. A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003527]

Exercice 3070 Ensi Chimie P 93

On considère le polynôme défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$ avec $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

1. Montrer qu'il existe une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ pour P_n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Correction ▼ [003528]

Exercice 3071 Ensi Physique 93

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in (x^2+1)$. Calculer $\Delta_n = \det(I + (x_i y_j))$.

Correction ▼ [003529]

Exercice 3072 Centrale MP 2000

On considère la matrice de $M_n((x^2+1)^{)}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq b$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\frac{(-1)^n}{a-b}(a(X+b)^n - b(X+a)^n)$.
2. Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

Correction ▼ [003530]

Exercice 3073 Centrale MP 2000

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \vdots & b_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A_n$.
2. Calculer χ_A le polynôme caractéristique de A.
3. On suppose $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et, pour tout i, $b_i > 0$. Montrer que A_n est diagonalisable $\left(\text{on pourra utiliser } \chi_A(t)/\prod_{i=1}^n (a_i - t)\right)$.
4. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et, pour tout i, $b_i > 0$?

Correction ▼ [003531]

Exercice 3074 Polynômes caractéristiques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B et χ_C en fonction de χ_A.

Correction ▼ [003532]

Exercice 3075 Matrice compagnon

Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in K_n[X]$. La matrice compagnon de P est $M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit E un K-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathscr{B}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leq k \leq n$.
3. En déduire que $P(M) = 0$.

[003533]

Exercice 3076 Matexo

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$. Montrer que $\mathrm{spec}(A) \cap \mathrm{spec}(B) = \varnothing$ si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

Application : Soient A,B,P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur popre commune.
[003534]

Exercice 3077 Matrices à spectres disjoints

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$. Montrer l'équivalence entre :
(a) : $\forall\, C \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$, il existe un unique $X \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ tel que $AX - XB = C$.
(b) : $\forall\, X \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ on a $AX = XB \Rightarrow X = 0$.
(c) : $\chi_B(A)$ est inversible.
(d) : A et B n'ont pas de valeur propre en commun.
Correction ▼ [003535]

Exercice 3078 AB et BA ont même polynôme caractéristique

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
2. Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
3. Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ $(M,N,P \in \mathscr{M}_{2n}(K))$.
   Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

[003536]

Exercice 3079 $\det(I + A\overline{A}) \geq 0$

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$.

1. Soit $\lambda \in (x^2+1)$ une valeur propre non nulle de $A\overline{A}$, et X un vecteur propre associé. Montrer que $A\overline{X}$ est aussi vecteur propre de $A\overline{A}$.
2. Lorsque $\lambda \notin \mathbb{R}^+$, montrer que X et $A\overline{X}$ sont linéairement indépendants.
3. En déduire que $\det(I + A\overline{A}) \in \mathbb{R}^+$.

[003537]

Exercice 3080 Centrale PC 1999

Soit l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM$. Calculer sa trace par un moyen simple.
Correction ▼ [003538]

Exercice 3081 Multiplicité d'une valeur propre

Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Montrer que la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u est égale au nombre de facteurs invariants de u ayant λ pour racine.
[003539]

Exercice 3082 Fermat pour la trace, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit p premier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod p$.
Correction ▼ [003540]

Exercice 3083 ***

Soit A une matrice rectangulaire de format (p,q) et B une matrice de format (q,p). Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.
Correction ▼ [005656]

Exercice 3084 *** I

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent. Montrer que $\det(u+v) = \det u$.
Correction ▼ [005657]

Exercice 3085 **

Soit A une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.
Correction ▼ [005666]

Exercice 3086 **

Soient A et B deux matrices carrées complexes de format n. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

Correction ▼ [005678]

Exercice 3087 **

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Correction ▼ [005679]

106 201.04 Sous-espace stable

Exercice 3088

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le plan P d'équation $y+z=0$ est-il stable par f ? La droite vect$\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par f ? [001675]

Exercice 3089

que $f^3+f^2+f=0$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $F=\operatorname{Im} f$.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f.
   (b) Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   (c) En déduire que la restriction g de f à F est un automorphisme de F.
2. (a) Montrer que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ alors $\lambda = 0$.
   (b) En déduire que le rang de f est pair (raisonner par l'absurde et étudier les racines réelles du polynôme caractéristique de g).

[001676]

Exercice 3090

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $a \in E$.

1. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant a et stable par f est $F_a = \operatorname{vect}\left\{f^k(a) : k \in \mathbb{N}\right\}$.
2. Montrer que si $\dim(E)=n$ alors $F_a = \operatorname{vect}\left\{f^k(a) : k=0,\dots,n-1\right\}$.
3. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $F_a = \mathbb{R}^3$. Généraliser à un endomorphisme diagonalisable.

[001677]

Exercice 3091

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme de G induit par f.

1. Montrer que si $P \in K[X]$ vérifie $P(f)=0$ alors $P(g)=0$.
2. En déduire que si f est diagonalisable alors g est diagonalisable.
3. Application : trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

[001678]

Exercice 3092

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est trigonalisable. A est-elle diagonalisable ? Réduire A et déterminer son polynôme minimal.
2. Même question pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

[001679]

Exercice 3093

Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ? [001680]

Exercice 3094

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Exprimer $\operatorname{tr}(A^p)$ où $p \in \mathbb{N}$ en fonction des λ_j, $j = 1, ..., n$. [001681]

Exercice 3095

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $fg = gf$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = g(x)$ alors $f^n(x) = g^n(x)$.
   Dans toute la suite, on suppose g nilpotent.
2. (a) Déduire de 1. que si f est inversible alors $f+g$ est inversible.
   (b) Déduire de (a) que si $f+g$ est inversible alors f est inversible.
3. (a) Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\det(h + \mathrm{Id}_E) = 1$.
   (b) Montrer que $\det(f+g) = \det(f)$ (on distinguera selon que f est inversible ou non et on utilisera les questions précédentes.

[001682]

Exercice 3096

Soient E un K-espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$ et P un polynôme de $K[X]$.

1. Montrer que $P(g)$ et f commutent.
2. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme $P(g)$ sont stables par f. Donner des cas particuliers de cette situation.

[001683]

Exercice 3097

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On désigne par g l'endomorphisme de F induit par f sur F.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subseteq \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que si $P(f) = 0$ alors $P(g) = 0$. En déduire que le polynôme minimal de g divise celui de f.

[001684]

Exercice 3098

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E. Montrer que si f admet un sous-espace vectoriel propre de dimension $p \geq 2$ alors il admet une infinité de sous-espaces vectoriels stables par f. [001685]

Exercice 3099 Droites et hyperplans stables

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u.
2. Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u (considérer $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ où λ est une valeur propre de u).
3. Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-ev.

[003609]

Exercice 3100 Plan stable pour une valeur propre non réelle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M.

1. Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M.
2. Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $(x^2+1)^n$.
3. Soient $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Montrer que (U, V) est libre dans $\mathbb{R}^n$.

[003610]

Exercice 3101 Plans stables

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in K_2[x]$ non nul tel que $F \subset \mathrm{Ker} P(f)$.
2. Réciproquement, si $P \in K_2[x]$ est irréductible, montrer que $\mathrm{Ker} P(f)$ contient un plan stable par f.
3. Si $K = \mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

[003611]

Exercice 3102 Recherche de sev stables

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sev de $\mathbb{R}^3$ stables pour l'endomorphisme associé à A.
2. Quelles sont les matrices réelles commutant avec A ?

Correction ▼ [003612]

Exercice 3103 u diagonalisable $\Rightarrow$ diagonalisable dans un sev stable

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que si F est un sev stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

[003613]

Exercice 3104 Plan affine stable

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H : x + 2y + 3z = 1$ un plan *affine* de E. Montrer que si H est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ alors 1 est valeur propre de f.

Correction ▼ [003614]

Exercice 3105 Endomorphisme cyclique

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que $f_{|F}$ est aussi cyclique. [003615]

Exercice 3106 Endomorphismes semi-simples.

Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f. Montrer qu'un endomorphisme d'un (x^2+1)-ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable. [003616]

Exercice 3107 χ_u irréductible

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n sur le corps K. Montrez que seuls $\{0\}$ et E sont stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur K.

Correction ▼ [003617]

Exercice 3108 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f. Que peut-on dire de f ? Réciproque ?

Correction ▼ [003618]

Exercice 3109 Sous-espaces stables (Centrale MP 2003)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Correction ▼ [003619]

Exercice 3110 ***

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005683]

Exercice 3111 **

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Correction ▼ [005686]

---

107 201.05 Trigonalisation

Exercice 3112

Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

1. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,
2. $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[001686]

Exercice 3113

Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

[001687]

Exercice 3114

Soient les matrices à coefficients réels suivantes

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trigonaliser les matrices A, B et C.
2. Déterminer le polynôme minimal de A, B et C.

[001688]

Exercice 3115

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3=\ker f^2 \oplus \ker(f-2\mathrm{Id})$.
2. Trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$\mathrm{mat}(f,\mathscr{B}')=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2=f$. Montrer que $\ker f^2$ est stable par g. En déduire qu'un tel endomorphisme g ne peut exister.

[001689]

Exercice 3116

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Trouver une base $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)^2$ sont laissés stables par g.
   En déduire que la matrice de g dans ε' est de la forme $\mathrm{Mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Préciser les valeurs possibles de a, b, c et d.
4. Soit $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).

[001690]

Exercice 3117

Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f. un endomorphisme de E.

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(K)$ non trigonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_n(K)$ à la fois non diagonalisable et trigonalisable.
3. Déterminer sans calculs les valeurs propres complexes de f s i sa matrice dans $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On suppose que $n = 3$ et que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que le plan d'équation $x + 2z = 0$ est stable par f.
5. Que peut-on dire d'un vecteur générateur d'une droite stable par f ?
6. Montrer que si l'endomorphisme f est trigonalisable alors il admet au moins un sous-espace vectoriel stable par f et de dimension $k \in [0, n]$ fixée.

[001691]

Exercice 3118 Trigonalisation de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
3. Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice de φ dans cette base.
5. Résoudre le système différentiel : $X' = AX$.

Correction ▼ [003578]

Exercice 3119 $AB = 0$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables. [003620]

Exercice 3120 Produit de matrices nilpotentes

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{M}_n(K)$ nilpotentes et commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \dots A_n = 0$. [003621]

Exercice 3121 Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Correction ▼ [003622]

Exercice 3122 Mines MP 2003

Soit E un ev de dimension finie et (u_n) une suite d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers $u \in \mathscr{L}(E)$.
u est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [003623]

Exercice 3123 Mines-Ponts MP 2005

On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n. Soient α,β les multiplicités de zéro dans χ_M et μ_M. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}M) = \alpha$ si et seulement si $\beta = 1$.

Correction ▼ [003624]

Exercice 3124 ***

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle qui commutent. Montrer que f et g sont simultanément trigonalisables.

Correction ▼ [005677]

---

108 201.06 Réduction de Jordan

Exercice 3125

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base canonique de E.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangularisable ?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Pour $k = 1,2$, donner l'ordre β_k du nilpotent $(u-\lambda_k.\mathrm{id}_E)|_{F_k}$ ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$).
3. Si $v \in F_2$ et $v \notin \ker(u-2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2-1}$, montrer que $f_1 = (u-2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2-1}(v)$, $f_1 = (u-2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2-2}(v)$, $\dots$, $f_{\beta_2} = v$ forment une base de F_2.
4. On note $f = \{f_1,\dots,f_4\}$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que $T = [u]_f^f$ est triangulaire. Décomposer T sous la forme $D+N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $DN = ND$. Calculer T^5.

[001692]

Exercice 3126

Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ? [001693]

Exercice 3127

Donner toutes les réduites de Jordan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des endomorphismes nilpotents pour $1 \leq n \leq 4$. [001694]

Exercice 3128

Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par (X^2-1).

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

[001695]

Exercice 3129

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4((x^2+1)^)$ ont-elles une racine carrée ? [001696]

Exercice 3130

Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

[001697]

Exercice 3131

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice N (le plus petit entier p tel que $f^p = 0$). Montrer que

$$N = n \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = n-1.$$

[001698]

Exercice 3132

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

Correction ▼ [002589]

Exercice 3133

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Calculer $\exp B$.

Correction ▼ [002602]

Exercice 3134 Décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer qu'il existe deux matrices D,N telles que $A = D+N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$.
[003581]

Exercice 3135 M et ${}^tM$ sont semblables

Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée. En déduire que pour toute $M \in \mathscr{M}_n(K)$ les matrices M et ${}^tM$ sont semblables. [003582]

Exercice 3136 Réduction de Jordan (Mines MP 2003)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{Spec}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})) = 2$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $\operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003583]

Exercice 3137 *** Décomposition de DUNFORD

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d,n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent n et $f = d+n$.

Correction ▼ [005670]

109 201.07 Applications

Exercice 3138

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible. En déduire A^{-1}, A^3, et A^5. [001703]

Exercice 3139

Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \frac{dx}{dt} & = & 4x & + & 6y & & \\ \frac{dy}{dt} & = & -3x & - & 5y & & \\ \frac{dz}{dt} & = & -3x & - & 6y & - & 5z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \frac{dx}{dt} & = & 2x & + & y & + & z \\ \frac{dy}{dt} & = & 3x & + & 3y & + & 4z \\ \frac{dz}{dt} & = & -3x & - & y & - & 2z \end{array}\right.$$

[001704]

Exercice 3140

Déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0 \end{cases}$$

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f''' + f'' + f' + f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0 \end{cases}$$

[001705]

Exercice 3141

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \frac{dx}{dt} & = & 2x(t) & + & 2y(t) & + & 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} & = & x(t) & + & 3y(t) & + & 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} & = & -x(t) & - & y(t) & - & z(t) \end{array}\right.$$

Donner toutes les solutions qui satisfont $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$. [001706]

Exercice 3142

Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(c'est à dire étudier la diagonalisabilité ou la triangularisabilité de A, et donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit aussi simple que possible)

Application : Déterminer toutes les fonctions dérivables x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} x' = y+z \\ y' = x+y \\ z' = x-3y+4z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

(on rappelle qu'il n'est pas utile de calculer P^{-1}...) [001707]

Exercice 3143

Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur complexes telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}+2u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0.$$

Montrer que les suites réelles satisfaisant cette relation sont les suites de la forme :

$$u_n=A(-1)^n+B\cos(\frac{2n\pi}{3}+\phi)$$

où A,B et ϕ sont des réels. [001708]

Exercice 3144

Etant donnés quatre nombres réels (u_0,v_0,w_0,x_0), on définit quatre nouveaux nombres (u_1,v_1,w_1,x_1) en calculant les moyennes suivantes : $u_1=\frac{2u_0+v_0+w_0+x_0}{5}$, $v_1=\frac{u_0+2v_0+w_0+x_0}{5}$, $w_1=\frac{u_0+v_0+2w_0+x_0}{5}$, et $x_1=\frac{u_0+v_0+w_0+2x_0}{5}$. En itérant ce procédé, on définit quatre suites (u_n), (v_n), (w_n), et (x_n) telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on ait :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{5}(2u_n+v_n+w_n+x_n)\\ v_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n+2v_n+w_n+x_n)\\ w_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n+v_n+2w_n+x_n)\\ x_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n+v_n+w_n+2x_n)\end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A associée à cette relation de récurrence, et la matrice $B=5A$. Que dire de la diagonalisabilité de B ?
2. Sans calculer le polynôme caractéristique de B, montrer que 1 est valeur propre de B. Quelle est la dimension de l'espace propre associé ? Que dire de la multiplicité de 1 comme valeur propre de B ?
3. En utilisant la trace de B, déterminer toutes les valeurs propres de B.
4. Donner un polynôme annulateur de B de degré 2.
5. En déduire l'existence de deux réels a_n et b_n, que l'on calculera, tels que $B^n=a_nB+b_nI$.
6. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{5^n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{5^n}$. En déduire que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
   (On rappelle qu'une suite de matrices M_n est dite convergente si chaque suite de coefficient est convergente. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des opérations élémentaires sur les matrices pour cette notion de limite, c'est à dire que :
   - si (λ_n) est une suite convergente alors pour toute matrice M, la suite (λ_nM) est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_nM)=(\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n)M$
   - si (M_n) est une suite de matrices convergente alors pour tout vecteur X, la suite de vecteurs (M_nX) est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty}(M_nX)=(\lim\limits_{n\to\infty}M_n)X$.)
7. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et donner leur limite.

[001709]

Exercice 3145

Donner toutes les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que : *(on notera $\omega=e^{\frac{i\pi}{3}}$)*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1}=x_n+y_n\\ y_{n+1}=y_n+z_n\\ z_{n+1}=z_n+x_n\end{cases}$$

Parmi les solutions de ce système, donner celle qui satisfait $x_0=2$ et $y_0=z_0=1$.

Correction ▼ [001710]

Exercice 3146

Soit a un réel. On considère le système à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} ax_1-x_2=0\\ -x_{p-1}+ax_p-x_{p+1}=0 \quad (2\le p\le n-1)\\ -x_{n-1}+ax_n=0\end{cases}$$

Écrire la matrice A_n associée à ce système. On note $D_n=\det A_n$. Calculer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2} [001711]

Exercice 3147

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a\end{pmatrix}$, avec $(b,c,d)\neq(0,0,0)$.

1. Calculer A^tA. Que vaut $\det A$ au signe près ?
2. En étudiant le signe du terme en a^4 dans le déterminant de A, montrer que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Sans calcul supplémentaire, en déduire que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
3. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? (justifier)
4. On se place maintenant dans le cas où $a=1$, $b=c=d=-1$. Vérifier que $(i\sqrt{3},1,1,1)$ et $(-1,i\sqrt{3},-1,1)$ sont des vecteurs propres de A, puis diagonaliser A sur (x^2+1).
5. Application : résoudre le système récurent suivant (il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de la matrice de passage de la question précédente). On notera $\omega = 1/2+i\sqrt{3}/2 = e^{i\pi/3}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n+v_n+w_n+h_n \\ v_{n+1} & = & -u_n+v_n-w_n+h_n \\ w_{n+1} & = & -u_n+v_n+w_n-h_n \\ h_{n+1} & = & -u_n-v_n+w_n+h_n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 0 \\ w_0 & = & 0 \\ h_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001712]

Exercice 3148

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

[001713]

Exercice 3149

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Par différentes méthodes, calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la formule obtenue a un sens pour $n \in \mathbb{Z}$ et donner plusieurs méthodes pour établir sa validité dans ce cas. [001714]

Exercice 3150

Soit l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer toutes les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f.
2. Déterminer toutes les plans vectoriels P de $\mathbb{R}^3$ stables par f (on commencera par étudier le polynôme caractéristique de la restriction de f à P).
3. Donner la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

[001715]

Exercice 3151

Calculer les puissances et l'exponentielle ($e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[001716]

Exercice 3152

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Dans le cas d'existence de g, donner le nombre exact de g tel que $g^2 = f$.

Application Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$. Déterminer une N. [001717]

Exercice 3153

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et ${}^tM$ sont semblables.
Indication : le montrer d'abord pour des blocs de Jordan n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale. [001718]

Exercice 3154

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M et $2M$ soient semblables. [001719]

Exercice 3155

Soit $a \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes. On pose

$$\mathscr{C} = \{u \in \mathscr{L}(E) : au = ua\}.$$

1. Soit $u \in \mathscr{C}$.
   (a) Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de a est stable par u.
   (b) En déduire que u est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et que $\dim \mathscr{C} = n$.
   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, a, ..., a^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$ (raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme minimal de a.)
   (c) En déduire que $\mathscr{C} = \{P(u) : P \in K[X]\}$.

[001720]

Exercice 3156

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $a \in E$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E.

1. Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$ un polynôme annulateur de f. Montrer que $\deg(P) \geq n$ (raisonner par l'absurde).
2. En déduire que le polynôme minimal de f est (au signe près) le polynôme caractéristique de f.

[001721]

Exercice 3157

Donner un exemple de deux matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et pourtant non semblables. Qu'en est-il pour deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? [001722]

Exercice 3158

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\mathscr{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 3, u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}\right\}.$$

1. Montrer que l'application
$$f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^3, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$$
est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
2. Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et, pour $n \geq 2$, $U_n = (u_{n-2}, u_{n-1}, u_n) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\sigma(U_{n-1}) = U_n$ et en déduire une base de $\mathscr{S}$.

[001723]

Exercice 3159

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0. [001724]

Exercice 3160

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = f$. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f_t = id + tf$ est inversible ? Calculer f_t^{-1}. [001725]

Exercice 3161

Etudier les solutions (suivant A) dans $M_2((x^2+1)^)$ de l'équation $X^2 = A$. [001726]

Exercice 3162

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}); AB = BA\}$.

1. On suppose que A a des valeurs propres simples. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $B \in C(A)$.

   ii) B a une base de vecteurs propres en commun avec A.

   iii) Il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

   iv) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

2. On suppose que $n = 3$ (pour simplifier) et que A est diagonalisable avec une valeur propre double. Déterminer $C(A)$.

[001727]

Exercice 3163

Les parties I, II, III et IV peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soient $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice dépendant d'un paramètre réel a et f_a l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On nomme *racine carrée* d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ toute matrice $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

On désigne par I la matrice identité et, pour toute base ε de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Mat}(f_a, \varepsilon)$ la matrice représentant l'endomorphisme f_a dans la base ε.

I

1. Calculer les valeurs propres de M_a en fonction de a. Pour quelle raison la matrice M_a est-elle triangularisable ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

II

On pose maintenant (questions 3 et 4) $a = 2$.

3. Diagonaliser M_2. Déterminer une racine carrée A de M_2.
4. (a) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g^2 = f_2$. Montrer que g est diagonalisable (on pourra déterminer le polynôme minimal de f_2). Montrer que les sous-espaces propres de f_2 sont laissés stables par g.

   (b) Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a une infinité de racines carrées. En déduire l'existence d'une infinité de racines carrées de M_2.

III

5. On pose $a = 1$. Montrer que $M_1 = 2I + N$ avec N nilpotente (telle que $N^2 = 0$). En déduire la valeur de $(M_1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha I + \beta N$ soit une racine carrée de M_1.

IV

On pose désormais (questions 6 et 7) $a = 0$.

6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_0^2) \oplus \mathrm{Ker}(f_0 - 2I)$. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que l'on ait : $\mathrm{Mat}(f_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $g^2 = f_0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_0^2)$ est laissé stable par g. En déduire que f_0 n'a pas de racine carrée.

[001728]

Exercice 3164

La suite de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ est la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$, avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. Trouver des vecteurs propres ε_1 et ε_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on les note x_1 et x_2.
5. Montrer que $\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$. En déduire que
$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} .$$
6. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [002590]

Exercice 3165

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

Correction ▼ [002597]

Exercice 3166

1. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$
Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
2. On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.
   (a) Montrer que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.
   (b) En déduire que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B.
   (c) Déterminer toutes les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\exp B = A$. Justifier.
3. Soit la matrice C,
$$C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.
4. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C.
5. Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C.
   (a) Montrer que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.
   (b) En déduire que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.
6. Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.

Correction ▼ [002598]

Exercice 3167 Ensi PC 1999

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n.
2. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) défini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.
3. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Correction ▼ [003585]

Exercice 3168 Puissances de A

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$, et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
2. On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.
3. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Correction ▼ [003586]

Exercice 3169 Suites récurrentes linéaires

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Correction ▼ [003587]

Exercice 3170 Centrale P' 1996

Soit f, endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. On suppose que pour tout sous-ev D de dimension 1 il existe $x \in D$ tel que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Que dire de E et f ?
2. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Montrer que si f est diagonalisable alors ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que si f est nilpotente alors $f^{n-1} \neq 0$.

Correction ▼ [003588]

Exercice 3171 Chimie P' 1996

Soit (M_n) une suite de points dans le plan, de coordonnées (x_n, y_n) définies par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= -3x_n + 4y_n. \end{cases}$$

1. Montrer que, quelque soit M_0, les points M_n sont alignés.
2. Étudier la suite (M_n) quand n tend vers l'infini.
3. Quelle est la limite de y_n/x_n (utiliser une méthode géométrique) ?

Correction ▼ [003589]

Exercice 3172 Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

1. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
   (b) Montrer que pour toute matrice M diagonale, il existe un polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en A.

[003590]

Exercice 3173 $XY = YX = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver toutes les matrices $X, Y \in \mathscr{M}_2(K)$ telles que $XY = YX = A$.

Correction ▼ [003591]

Exercice 3174 Racine carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Correction ▼ [003592]

Exercice 3175 Ensi Physique 93

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B différente de A et $-A$ telle que $B^2 = A$.

Correction ▼ [003593]

Exercice 3176 Esigelec 91

Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003594]

Exercice 3177 Centrale MP 2000

Si $A \in M_n((x^2+1)^)$, on note $C(A)$ le commutant de A.

1. Pour $n = 2$, montrer que $C(A)$ est de dimension 2 ou 4, en donner une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $C(A)$ est de dimension $\geq n$ (traiter d'abord le cas où A est diagonalisable).

Correction ▼ [003595]

Exercice 3178 Ulm MP* 2001

En se déplaçant uniquement sur les arêtes d'un cube de côté 1, combien y a-t-il de chemins de longueur n pour aller d'un point à un autre ?

Correction ▼ [003596]

Exercice 3179 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour n entier relatif donné, calculer A^n par trois méthodes différentes.

Correction ▼ [005651]

Exercice 3180 **

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005652]

Exercice 3181 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(A-I)^2$.

3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Correction ▼ [005653]

Exercice 3182 ***

Soient a et b deux réels tels que $|a| \neq |b|$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de A sont cocycliques. (Indication : pour calculer χ_A, considérer $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.)

Correction ▼ [005664]

Exercice 3183 ***I Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in [0,1]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A.
   (a) Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel ω de $[0,1]$ tel que $|\lambda - \omega| \leqslant 1-\omega$. Conséquence géométrique ?

Correction ▼ [005665]

Exercice 3184 ***I Déterminant circulant

1. Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (de format $n \geqslant 3$). Diagonaliser J_n.

2. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005668]

Exercice 3185 ***I Matrices de permutations

Pour $\sigma \in S_n$, $n \geqslant 2$, on définit la matrice P_σ par $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Calculer $\det(P_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.
2. (a) Montrer que $\forall (\sigma,\sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.
   (b) On pose $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. Montrer que $(G,\times)$ est un groupe isomorphe à S_n.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer AP_σ.
4. Trouver les valeurs propres d'une matrice de pemutation (on pourra utiliser le résultat hors programme : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).

Correction ▼ [005669]

Exercice 3186 **

Trouver une matrice carrée A vérifiant $A^4-3A^3+A^2-I=0$.

Correction ▼ [005671]

Exercice 3187 **I

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005672]

Exercice 3188 **I

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005676]

Exercice 3189 ** (ESTP1994)

Soit $M_{a,b}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ et $M_{1,1}$?

Correction ▼ [005680]

Exercice 3190 ***

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005684]

Exercice 3191

Commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005685]

110 201.08 Polynôme annulateur

Exercice 3192

Soit $A\in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5. [001574]

Exercice 3193

Soit $P\in(x^2+1)^[X]$ tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$. Soit E un (x^2+1)-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(E)$ telle que $P(f)=0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$; en déduire $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$. [001575]

Exercice 3194

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f-id)=1$. On note $H=\mathrm{Ker}(f-id)$.

1. Soit $\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que le polynôme $(X-1)(X-\det(f))$ annule f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

[001576]

Exercice 3195

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E nilpotent, c'est à dire tel que $\exists m \in \mathbb{N}, u^m = 0$. Montrer que $u^n = 0$ [001577]

Exercice 3196

Déterminer toutes les matrices A de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 - 3A + 2\mathrm{id} = 0$$

Même question pour

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18\mathrm{id} = 0$$

[001578]

Exercice 3197

Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Le démontrer dans le cas particulier où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Correction ▼ [001579]

Exercice 3198

1. Réduire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. En déduire qu'il existe des coefficients a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_n$ et les calculer en fonction de n.

[001580]

Exercice 3199

Soit $A \in \mathscr{M}_2((x^2+1)^)$ de trace non nulle. Montrer que toute matrice $M \in \mathscr{M}_2((x^2+1)^)$ qui commute avec A^2 commute aussi avec A. (*Indication :* utiliser Cayley-Hamilton.) [001581]

Exercice 3200

Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie annulé par les polynômes $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$? [001582]

Exercice 3201

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal de f est $P = (X-2)(X-1)^2$. Quel est le polynôme minimal de $f + \mathrm{Id}_E$? [001583]

Exercice 3202

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice diagonale. Si $P \in K[X]$, calculer $P(M)$ et en déduire le polynôme minimal de M. [001584]

Exercice 3203

En appliquant la méthode utilisée en cours pour démontrer l'existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, déterminer le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. [001585]

Exercice 3204

Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme d'une droite vectorielle ? [001586]

Exercice 3205

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que le polynôme minimal de f est de la forme $X(X-\lambda)$. [001587]

Exercice 3206

Déterminer les endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n dont le polynôme minimal est de degré 1. [001588]

Exercice 3207

1. Montrer que $P=(X-1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$ et en déduire le polynôme minimal de la matrice A.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer explicitement $B^2-\operatorname{tr}(B)B+\det(B)I_2$. En déduire le polynôme minimal de la matrice $B=\begin{pmatrix} 3&1\\ -1&1 \end{pmatrix}$.

[001589]

Exercice 3208

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et P son polynôme minimal. Montrer que f est bijective si et seulement si $P(0) \neq 0$. [001590]

Exercice 3209

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. Montrer que f admet un plan stable (on discutera en fonction du caractère trigonalisable de f). [001591]

Exercice 3210

Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\ker(f^3-f-\mathrm{Id}) \oplus \ker f = E$.
2. (a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subseteq \ker(f^3-f-\mathrm{Id})$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} f = \ker(f^3-f-\mathrm{Id})$.

[001592]

Exercice 3211

Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A=\begin{pmatrix} 7&3&-4\\ -6&-2&5\\ 4&2&-1 \end{pmatrix}$. [001593]

Exercice 3212

Soient $J=\begin{pmatrix} 1&1\\ 1&1 \end{pmatrix}$ et la matrice par blocs à coefficients réels suivante

$$M=\begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}J\\ \frac{1}{2}J & O \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 et M^3 et en déduire que M est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caract eristique et le polynôme minimal de M.

[001594]

Exercice 3213

On considére la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 3&-2&-1\\ 2&-1&1\\ 6&3&-2 \end{bmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de A. [001595]

Exercice 3214

On se place dans $E = (x^2+1)^{\ 4}$ muni de sa base canonique $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans b est la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4((x^2+1)^).$$

1. Déterminer l'image de b par j, j^2, j^3, et j^4.
2. En déduire J^2, J^3 et J^4.
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
4. Montrer que si $P \in (x^2+1)^[X]$ avec $\deg(P) \leq 3$ vérifie $P(J) = 0$ alors $P = 0$.
5. En déduire le polynôme minimal de J.
6. Montrer que J est diagonalisable.
7. Déterminer les valeurs propres de J.

[001596]

Exercice 3215

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.

Correction ▼ [002569]

Exercice 3216

Soit N une matrice nilpotente, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = 0$. Montrer que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Correction ▼ [002588]

Exercice 3217 Étude d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & (0) \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_n & (0) & & 0 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des réels positifs ou nuls, avec $a_1 a_n > 0$.

1. Quel est le polynôme caractérique de A ?
2. Montrer que A admet une unique valeur propre $r > 0$ et que l'on a $r < 1 + \max(a_1, \dots, a_n)$.
3. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leq r$ et $|\lambda| = r \Rightarrow \lambda = r$.
4. Montrer qu'il existe un entier k tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs.

Correction ▼ [003518]

Exercice 3218 Matrice bitriangulaire

Donner une CNS sur $a, b \in (x^2+1)$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Correction ▼ [003541]

Exercice 3219 $A^2 = A$ et $tr(A) = 0$

Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. [003542]

Exercice 3220 Matexo

Soient E un ev de dimension finie sur (x^2+1) et u un endomorphisme de E.
On suppose que $u^3 = u^2, u \neq \mathrm{id}, u^2 \neq 0, u^2 \neq u$.

1. Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.

2. Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u.
3. Montrer que u *n'est pas* diagonalisable.
4. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.
5. Monter que $u|_F$ avec $F = \mathrm{Im}(u^2)$ est l'identité.

[003543]

Exercice 3221 INT gestion 94

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$.
2. Calculer $(A - xI)({}^tA - xI)$ et en déduire $\chi_A(x)$.
3. Montrer que A est (x^2+1)-diagonalisable.

Correction ▼ [003544]

Exercice 3222 $X^n P(1/X)$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X^n P(1/X)$.

1. Déterminer $u \circ u$. En déduire que u est diagonalisable.
2. Donner une base de vecteurs propres de u.

[003545]

Exercice 3223 TPE 93

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ telle que $A = A^{-1}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer e^A. ($e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$)

Correction ▼ [003546]

Exercice 3224 Ensi Physique 93

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker} u \Leftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Correction ▼ [003547]

Exercice 3225 u^2 diagonalisable

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable. [003548]

Exercice 3226 Ensi PC 1999

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ inversible diagonalisable et $B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $B^p = A$.

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?

Correction ▼ [003549]

Exercice 3227 Ensi P 90

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ? Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Correction ▼ [003550]

Exercice 3228 $A^3 = A + I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Correction ▼ [003551]

Exercice 3229 Mines-Ponts PC 1999

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg} A$ est pair. [003552]

Exercice 3230 Esem 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer qu'alors on a $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Correction ▼ [003553]

Exercice 3231 $A^p = I$ et $\mathrm{spec}(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow A^2 = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont réelles et qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Correction ▼ [003554]

Exercice 3232 $P(u) = \sum P(\lambda_i) u_i$

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.
   (a) Montrer qu'il existe des endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que pour tout polynôme $P \in K[X]$, on ait : $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P_i tel que $u_i = P_i(u)$.
2. Réciproquement, soit $u, u_1, \dots, u_p \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tels que pour tout $P \in K[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$. Montrer que u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

[003555]

Exercice 3233 Mines PSI 1998

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un ev E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en f.

Correction ▼ [003556]

Exercice 3234 Endomorphismes anticomutant (Centrale MP 2003)

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ $(p \geq 2)$ des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall\, k,\ u_k^2 = -\mathrm{id}_E, \quad \forall\, k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1. Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.
2. Montrer que n est pair.
3. Donner le spectre de chaque u_k.
4. Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k.
5. Calculer $\det(u_k)$.

Correction ▼ [003557]

Exercice 3235 Ensi PC 1999

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$.

1. Quelle relation y a-t-il entre $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}\,u$? Montrer que $2\mathrm{rg}u \leq \dim E$.
2. On suppose ici $\dim E = 4$ et $\mathrm{rg}u = 2$. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ de E telle que : $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $u(\vec{e}_2) = \vec{0}$, $u(\vec{e}_3) = \vec{e}_4$, $u(\vec{e}_4) = \vec{0}$.
3. On suppose $\dim E = n$ et $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Ker}u$. Est-ce que u est diagonalisable ?

[003558]

Exercice 3236 Réduction de M tq $M^3 = I$

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I$, et $M^3 = I$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de M ? (On vérifiera que ce sont effectivement des valeurs propres de M)
2. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

[003559]

Exercice 3237 Centrale PSI 1998

Soient u, v, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

1. Cas particulier, $n = 3$, $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si v et h existent et si oui, les donner.
2. Cas général.
   (a) Que peut-on dire de $\mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{tr}(v)$?
   (b) Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\mathrm{Ker} u$ et $\mathrm{Ker} v$ sont stables par h.
   (c) Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (d) Quel est le polynôme minimal de u ?

Correction ▼ [003560]

Exercice 3238 Indépendance du polynôme minimal par rapport au corps

Soient $K \subset L$ deux corps et $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On note $\mu_K(A)$ et $\mu_L(A)$ les polynômes minimaux de A en tant que matrice à coefficients dans K ou dans L. Montrer que ces polynômes sont égaux. [003561]

Exercice 3239 Polynôme minimal et caractéristique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que χ_A et μ_A ont les mêmes facteurs irréductibles. [003562]

Exercice 3240 X MP* 2004

Caractériser les polynômes P tels que : $\forall A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, $(P(A) = 0) \Rightarrow (\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Correction ▼ [003563]

Exercice 3241 TPE MP 2005

Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telles que $AC = CB$ et $\mathrm{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes.

Correction ▼ [003564]

Exercice 3242 Polynôme minimal imposé, Centrale MP 2005

Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [003565]

Exercice 3243 $\mathrm{Ker} u^p \oplus \mathrm{Im} u^p$, Polytechnique MP* 2006

Soit E un K-ev de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P.

1. Si $p = 0$, que dire de u ?
2. Si $p = 1$, montrer que $E = \mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u$.
3. Dans le cas général, montrer que $E = \mathrm{Ker} u^p \oplus \mathrm{Im} u^p$.

Correction ▼ [003566]

Exercice 3244 ****

Soit A une matrice carrée de format n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

Correction ▼ [005658]

Exercice 3245 *** I

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $fg - gf = f$. Montrer que f est nilpotent.

Correction ▼ [005659]

111 201.99 Autre

Exercice 3246

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques F_i.
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de u se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections p_i de $\mathbb{R}^4$ sur F_i.

[001699]

Exercice 3247

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$ et $A \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. [001700]

Exercice 3248

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

[001701]

Exercice 3249

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et u un endomorphisme de E.
Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. On note $x_k = u^k(x_0)$ et F le sous espace vectoriel engendré par la famille $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de $x_k, k \in \mathbb{N}$:

$$F = \left\{ x \in E \;/\; \exists N \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_0 \dots \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1},\; x = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i x_i \right\}$$

1. Montrer que F est stable par u, c'est à dire que $\forall x \in F, u(x) \in F$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k \leq n$ tel que $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ soit libre et $(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})$ soit liée. Montrer alors qu'il existe des scalaires $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ tels que
$$x_{k+1} = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$$
3. En déduire que le polynôme $P_0 = X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ satisgfait $\big(P_0(u)\big)(x_0) = 0$.
4. Montrer que pour tout x de F, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $x = \big(P(u)\big)(x_0)$.
5. A l'aide des questions (3) et (4), montrer que $\forall x \in F, \exists R \in \mathbb{R}_k[X], x = \big(R(u)\big)(x_0)$.
   (on pourra effectuer la division eulidienne de P par P_0)
6. En déduire que $(x_0 \dots x_k)$ est une base de F.
7. Ecrire la matrice de la restriction $u_{|_F}$ de u à F dans cette base. Quel est le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$?
8. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans la quelle
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix}$$
   où les matrices C_i sont des matrices Compagnon.

Correction ▼ [001702]

Exercice 3250 $f \mapsto f(2x)$

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues tq $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty\}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ et $u : E \to E, f \mapsto f \circ \varphi$.
Montrer que u n'a pas de valeurs propres (si $u(f) = \lambda f$, étudier les limites de f en 0 ou $\pm\infty$). [003519]

Exercice 3251 Ensi Physique P 94

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite finie en $+\infty$. Soit $T \in \mathscr{L}(E)$ défini par $T(f)(x) = f(x+1)$.
Trouver les valeurs propres de T.
Correction ▼ [003520]

Exercice 3252 Équation intégrale

Soit $E = \mathscr{C}([0, +\infty[\to \mathbb{R})$ et $u : E \to E, f \mapsto \tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$.

1. Montrer que $\tilde{f}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction ▼ [003521]

Exercice 3253 Endomorphisme sur les suites

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$(f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}.$$

Quelles sont les valeurs propres de f ?
Correction ▼ [003522]

Exercice 3254 Opérateur intégral

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $f : E \to E, u\tilde{u}$ avec $\tilde{u}(x) = \int_{t=0}^{1} \min(x,t)u(t)\,dt$.
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
Correction ▼ [003523]

Exercice 3255 Somme de projecteurs

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe des projecteurs $p_1, \ldots, p_k \in \mathscr{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que : $\begin{cases} u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k \\ \forall\, i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0. \end{cases}$ [003579]

Exercice 3256 A^3 est semblable à A^4

Quelles sont les matrices $A \in \mathscr{M}_3((x^2+1)^)$ telles que A^3 est semblable à A^4 ? On étudiera séparément les cas :

1. A a 3 valeurs propres distinctes.
2. A a 2 valeurs propres distinctes
3. A a une seule valeur propre.

Correction ▼ [003580]

Exercice 3257 A et $2A$ sont semblables

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ nilpotente. Montrer que A et $2A$ sont semblables.
Correction ▼ [003584]

Exercice 3258 Matrice bloc

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2N}(K)$.

1. Comparer les valeurs propres de A et M.
2. Soit $P \in K[X]$ et $Q = XP'$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.
3. A quelle condition sur A, M est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003597]

Exercice 3259 Ensi P 90

Soit $M \in \mathcal{M}_n((x^2+1)^)$ diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}((x^2+1)^)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003598]

Exercice 3260 Matrice bloc

Soit $A \in GL_n((x^2+1)^)$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}((x^2+1)^)$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est. (Chercher les sous-espaces propres de M en fonction de ceux de A)

Correction ▼ [003599]

Exercice 3261 Matrice bloc

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable avec A carrée d'ordre p.
Soit λ une valeur propre de M de multiplicité m. Montrer que si $p > n-m$, alors λ est valeur propre de A. [003600]

Exercice 3262 Réduction par blocs (Centrale MP 2003)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{Spec}(B)$ et fonction de $\mathrm{Spec}(A)$.

Correction ▼ [003601]

Exercice 3263 $A^m \to 0$ lorsque $m \to \infty$ (Mines MP 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Représenter dans un plan l'ensemble des couples (a,b) tels que $A^m \to 0$ lorsque $m \to \infty-$.

Correction ▼ [003602]

Exercice 3264 Chimie P 1996

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Est-il vrai que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$? [003603]

Exercice 3265 u diagonalisable $\Rightarrow Ker(u-\lambda \mathrm{id}) + Im(u-\lambda \mathrm{id})$ est directe

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Pour $\lambda \in \mathrm{spec}(u)$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id})$ et $F_\lambda = \mathrm{Im}(u-\lambda \mathrm{id})$. Montrer que $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$. [003604]

Exercice 3266 $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$.

Correction ▼ [003605]

Exercice 3267 $rg(f-\lambda \mathrm{id})$

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in (x^2+1)$ on a $rg(f-\lambda \mathrm{id}) = rg(f-\lambda \mathrm{id})^2$. [003606]

Exercice 3268 Nombre de noyaux et d'images

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les ensembles $\mathcal{K} = \{\mathrm{Ker}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ et $\mathcal{I} = \{\mathrm{Im}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ sont finis et ont même cardinal.

Correction ▼ [003607]

Exercice 3269 $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = 2\dim(\mathrm{Ker} f)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = 2\dim(\mathrm{Ker} f) = 2d$. Montrer que s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $g^k = f$ alors k divise d.

Correction ▼ [003608]

Exercice 3270 ***

Soit $E = SL_2(\mathbb{Z}) = \{$matrices carrées de format 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant 1$\}$.

1. Montrer que $(E, \times)$ est un groupe
2. Soit A un élément de E tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Correction ▼ [005661]

Exercice 3271 ****

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Correction ▼ [005662]

Exercice 3272 ****

Trouver A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la comatrice de A soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005681]

Exercice 3273 **I

Soit A une matrice carrée réelle de format $n \geqslant 2$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est un entier pair.

Correction ▼ [005687]

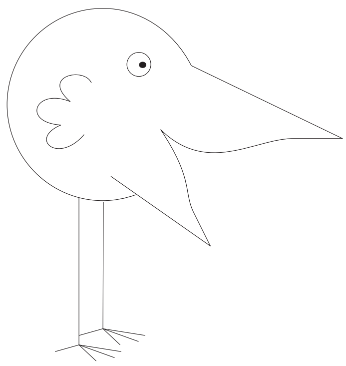
112 202.01 Endomorphisme du plan

Exercice 3274

Dessiner l'allure du Shadock ci dessous après qu'il ait subi l'action de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

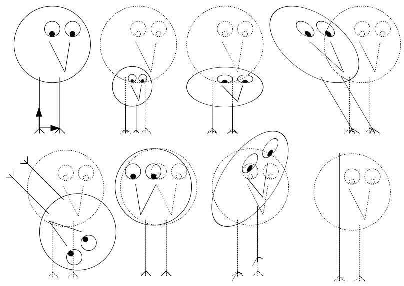
Ecrire la matrice de la dernière transformation dans la base $((2,1),(-1,1))$.



[001517]

Exercice 3275

Retrouver la matrice (dans la base indiquée sur le premier dessin) de la transformation subie par chacun des Shadocks ci-dessous.



[001518]

Exercice 3276

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou (x^2+1)), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur, calculer $p \circ (\mathrm{Id}_E - p)$ et $(\mathrm{Id}_E - p) \circ p$.
2. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
3. En déduire que $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.
4. Montrer que le rang de p est égal à la trace de p. (On rappelle que la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime cette matrice.)

Correction ▼ [002564]

113 202.02 Endomorphisme auto-adjoint

Exercice 3277

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $p = p^*$. [001525]

Exercice 3278

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\varphi(F) \subset F$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.
2. Soit F un espace propre de φ. Montrer que si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.

[001526]

Exercice 3279

Soient A et B deux matrices symétriques positives. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Si $A^k = B^k$ alors $A = B$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A et B symétriques positives ?

[001527]

Exercice 3280

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\varphi^* \circ \varphi$ est symétrique et que $\operatorname{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$.

2. On note respectivement λ et μ la plus grande et la plus petite valeur propre de $\varphi^* \circ \varphi$. Montrer, pour tout $x \in E$, l'inégalité :

$$\mu \|x\|^2 \leq \|\varphi(x)\|^2 \leq \lambda \|x\|^2.$$

[001528]

Exercice 3281

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\forall x \in E : \langle x, \varphi(x)\rangle = 0$ alors $\varphi = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.

   ii) $\forall x, y \in E : \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x)\rangle$.

   iii) $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.
3. Si $\dim(E) = 2$ et si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors la matrice de φ dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.
4. On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   (a) Montrer que φ a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ. Montrer que E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont laissés stables par φ et φ^*.
   (b) Montrer que si φ n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée ε de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

[001529]

Exercice 3282

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y\rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$).
2. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ sa plus petite valeur propre et λ' sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E, les inégalités :

   $$\lambda \|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda' \|x\|^2.$$

   (On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \dfrac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint. Soient μ une valeur propre de v, λ la plus petite valeur propre de u et λ' la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda \leq \mu \leq \lambda'$.

[001530]

Exercice 3283

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tA \cdot A$ est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$.
2. Soit $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Existe-t-il une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tA \cdot A$? Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible. Application à $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[001531]

Exercice 3284

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension p. A chaque n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E on associe le nombre (déterminant de Gram)

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}(< x_i, x_j >)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

1. Montrer que $x_1, \ldots, x_n$ sont liés si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$; montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants, on a $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
2. Montrer que, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a $G(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \ldots, x_n)$, et que la valeur de $G(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas modifiée si l'on rajoute à un des vecteurs, soit x_i, une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_j (j \neq i)$. Calculer $G(\alpha x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

3. On suppose $x_1,\dots,x_n$ indépendants. Soit $x\in E$, et soit $d(x,H)$ la distance de x à l'hyperplan $H=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. Montrer que $d(x,H)^2=\dfrac{G(x,x_1,\dots,x_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}$.

[001532]

Exercice 3285

Diagonaliser très rapidement la matrice

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

[001533]

Exercice 3286

Montrer que l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$C=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&1&-8\\7&4&4\\4&-8&1\end{pmatrix}$$

est un automorphisme orthogonal. [001534]

Exercice 3287

Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x\in E, \|f(x)\|\leq\|x\|.$$

1. (a) Soit $x\in E$ tel que $f^*(x)=x$. Montrer que $\|f(x)-x\|^2=\|f(x)\|^2-\|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^*-\mathrm{Id})\subseteq\ker(f-\mathrm{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{Im}\,h)^{\perp}\subseteq\ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f-\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

[001535]

Exercice 3288

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit (e_1,e_2,e_3) une base orthonormée de E. Soient $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ et $y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x,y\rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i\in\{1,2,3\}$).
2. On considère $u\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ_1 sa plus petite valeur propre et λ_2 sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E les inégalités :
$$\lambda_1\|x\|^2\leq\langle u(x),x\rangle\leq\lambda_2\|x\|^2.$$
(On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u=\frac{1}{2}(v+v^*)$ est auto-adjoint. Soient λ une valeur propre de v, λ_1 la plus petite valeur propre de u et λ_2 la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2$.

[001536]

Exercice 3289

1. Soient E un espace vectoriel euclidien, $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Montrer que si $x\in E$ alors $(f(x)|x)\geq 0$.
2. Soit $M=\left(m_{i,j}\right)_{i,j}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrer que pour tout $i=1,..,n$, $m_{ii}\geq 0$ et $\mathrm{tr}(M)\geq 0$
3. Soient A, $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
   (a) Montrer qu'il existe $D\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(DM)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{tr}(AB)\leq\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

[001537]

Exercice 3290

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x\in E, \langle f(x),x\rangle\geq 0$.

2. Il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = g^* g$.
3. Il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h = h^*$ et $f = h^2$.

[001538]

Exercice 3291

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que $\|f\| = \|f^*\|$.

[001539]

Exercice 3292

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien (de dimension finie) et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On note $X = \{x \in E ; \langle f(x), x \rangle \leq 1\}$. Montrer que X est compacte si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.

[001540]

---

114 202.03 Autres endomorphismes normaux

Exercice 3293

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est dit antisymétrique lorsque $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que φ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E, \langle \varphi(x), x \rangle = 0$. (on pourra remarquer que $\varphi + \varphi^*$ est autoadjoint.)
2. Montrer que si φ est antisymétrique alors $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathrm{Im}(\varphi)$ puis que $\mathrm{rg}(\varphi)$ est pair.

[001541]

Exercice 3294

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique c'est-à-dire tel que $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que si $\lambda \in Sp(\varphi)$ alors $\lambda = 0$. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$ est stable par φ.
2. (a) Montrer que φ^2 est symétrique.
   (b) Montrer que si x est un vecteur propre associé à une valeur propre μ de φ^2 alors $E_x = \mathrm{vect}\{x, \varphi(x)\}$ et $E_x^\perp$ sont laissés stables par φ.
   (c) Montrer que $\mu > 0$. Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de E_x telle que la matrice de la restriction de φ E_x dans $\{e_1, e_2\}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que E est somme directe orthogonale de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et de plans stables.

[001542]

---

115 202.04 Endomorphisme orthogonal

Exercice 3295

Soit f une transformation orthogonal d'un espace euclidien E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = Im(f - \mathrm{id})^\perp$$

En déduire que si $(f - \mathrm{id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}$. [001543]

Exercice 3296

Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[001544]

Exercice 3297

Diagonaliser dans une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$) la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement la transformation de $\mathbb{R}^3$ représentée par cette matrice. [001545]

Exercice 3298

Diagonaliser les matrices suivantes dans des bases orthonormées :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3i \\ 3i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[001546]

Exercice 3299

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$$

[001547]

Exercice 3300

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonal d'un espace euclidien E. On dit qu'un endomorphisme f de E conserve l'orthogonalité de $\mathscr{B}$ si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthogonale.

Montrer que f conserve l'orthogonalité de $\mathscr{B}$ si et seulement si $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de ${}^t f f$.

Montrer que pour tout endomorphisme f de E, il existe une base orthogonale dont f conserve l'orthogonalité. [001548]

Exercice 3301 Décomposition polaire

1. Soit r un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On dit que r est positif, si toutes ses valeurs propres sont positives. Montrer que si r est défini positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique s positif tel que $s^2 = r$. On appelle s racine carrée positive de r.

   On dit que r est défini positif si et seulement si toutes ses racines sont strictement positives. Montrer que si r est défini positif, alors sa racine positive aussi.
2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que ${}^t f f$ est symétrique et positif. Montrer que si en plus f est bijective, ${}^t f f$ est défini positif.
3. On suppose maintenant que f est une bijection. Soit s la racine carrée positive de ${}^t f f$. Montrer que $u = f \circ s^{-1}$ est une transformation orthogonale. En déduire que tout endomorphisme bijectif de E peut s mettre sous la forme :

   $$f = u \circ s$$

   où u et une transformation orthogonale, et s est symétrique défini positif.

   Montrer que cette décomposition, appelée décomposition polaire de f est unique.
4. Que se passe-t-il si f n'est pas bijective ?

[001549]

Exercice 3302

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{(attention au } \tfrac{1}{7}\textit{...)}$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.

6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

[001550]

Exercice 3303

A — Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent (c'est à dire qui satisfont $u \circ v = v \circ u$). On note $\lambda_1 ... \lambda_k$les valeurs propres de u et $E_1 ... E_k$ les espaces propres associés.

1. Montrer que $v(E_i) \subset E_i$.
2. On note $v_i = v_{|E_i}$ la restriction de v à E_i. Soit $P \in (x^2+1)^{[}X]$, montrer que $P(v_i) = P(v)_{|E_i}$.
3. En déduire que v_i est diagonalisable. Soit B_i une base de E_i formée de vecteurs propres de v_i.

   Montrer que $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ est une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v.
4. En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base. Montrer que $u - v$ est diagonalisable.

B — *Application :* On considère maintenant une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, et on lui associe l'endomorphisme $w_A \in \mathrm{End}(M_{n,n}(\mathbb{R}))$ suivant :

$$w : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Le but de l'exercice est de montrer que si A est diagonalisable, w_A l'est aussi.
On note

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \qquad \text{et} \qquad v_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array}$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, (u_A)^k = u_{A^k}$. En déduire que $\forall P \in (x^2+1)^{[}X], P(u_A) = u_{P(A)}$, puis que tout polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de u_A.
2. Montrer que

   $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow u_A \text{ diagonalisable}$$

   On admet sans démonstration que le même résultat est vrai pour v_A :

   $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow v_A \text{ diagonalisable}$$
3. Montrer que $u_A \circ v_A = v_A \circ u_A$.
4. En déduire que

   $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow w_A \text{ diagonalisable}$$

[001551]

Exercice 3304

Dans un espace euclidien $(E, < \cdot, \cdot >)$, on considère un vecteur v non nul, un scalaire λ et l'endomorphisme :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \lambda < x, v > v \end{array}$$

1. Pour $x \in E$, calculer $\|u(x)\|^2$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit une transformation orthogonale.
3. Lorsque u est orthogonale, dire a priori quelles sont les valeurs propres possibles de u, puis dire si elles sont effectivement valeur propre en étudiant les espaces propres associés.
4. Lorsque u est orthogonale, donner une interprétation géométrique de u.

[001552]

Exercice 3305

On considère un espace euclidien $(E, <>)$. On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de E si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$u^* u = \lambda \mathrm{id}$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une similitude

(ii) u est colinéaire à une transformation orthogonale, c'est à dire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists v \in O(E) \ / \ u = \alpha v$$

(iii) u conserve l'orthogonalité, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, < x,y >= 0 \Rightarrow < u(x), u(y) >= 0$$

Pour (i)⇔(ii), on pourra commencer par montrer que (ii)⇒(i).
Pour (i)⇒(iii), on commencera par montrer que x et $u^*u(x)$ sont toujours colinéaires, c'est à dire que

$$\forall x \in E \exists \lambda_x / u^*u(x) = \lambda_x x$$

puis on montrera que λ_x est indépendant de x.

[001553]

Exercice 3306

Dans un espace euclidien E, on considère un vecteur unitaire a, et à un réel $k \neq -1$ on associe l'endomorphisme u_k de E défini par :

$$u_k(x) = k < x,a > a + x$$

1. Montrer que u_k est un isomorphisme. Déterminer u_k^{-1}. *(on pourra commencer par calculer $< u_k(x), a >$)*
2. Rappeler la caractérisation de l'adjoint d'un endomorphisme, et montrer que u est auto adjoint.
3. Pour quelles valeurs de k u est-il orthogonal ? Interpréter alors géométriquement cette transformation.
4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de u_k.

Correction ▼ [001554]

Exercice 3307

1. Soient E un espace vectoriel euclidien, f un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base orthonormale donnée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, exprimer a_{ij} en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j.
2. Soient $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}$.
   (a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $S = (u|f(u))$.
   (b) En déduire que $|S| \le n$.

[001555]

Exercice 3308

Soient $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et A_{ij} le cofacteur (i,j) de A. Montrer que $\det A > 0$ si et seulement si a_{ij} et A_{ij} sont de même signe.
[001556]

Exercice 3309

Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. [001557]

Exercice 3310

Quelles sont les isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien qui sont diagonalisables. [001558]

Exercice 3311

Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \le \|x\|.$$

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^* - \mathrm{Id}) \subseteq \ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

[001559]

Exercice 3312

Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. [001560]

Exercice 3313

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $u^* = u^{-1}$.

ii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

iii) $\forall x,y \in E, \langle u(x),u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$.

iv) L'image par u d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

v) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E. [001561]

Exercice 3314

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{O}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi(F) \subset F$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$. A-t-on égalité ? [001562]

Exercice 3315

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et $u \in \mathscr{O}^-(E)$. On pose $F = \mathrm{Ker}(u+id)$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$. Montrer que F et $f^\perp$ sont stables par u. Pour quelle raison $\dim(F) \neq 2$?
2. On suppose $E \neq F$. Montrer que la restriction de u à $F^\perp$ est une rotation.
3. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base ε de E tels que :

$$\mathrm{Mat}(u,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[001563]

Exercice 3316

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 4 et $\varepsilon = \{e_1,\cdots,e_4\}$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme déterminé par $\mathrm{Mat}(u,\varepsilon) = A$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{O}^+(E)$.
2. Montrer que l'espace vectoriel F engendré par e_1 et $u(e_1)$ est stable par u. Montrer que la restriction de u à F est une rotation.
3. Montrer que $F^\perp$ est stable par u et est engendré par e_4 et $u(e_4)$. La restriction de u à $F^\perp$ est-elle une rotation ?

[001564]

Exercice 3317

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{O}(n,\mathbb{R})$. Montrer pour tout $j \in \{1,\cdots,n\}$ l'égalité : $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. En déduire que si A est triangulaire supérieure elle est diagonale. [001565]

Exercice 3318

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{O}(E)$. On pose $v = id - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)^\perp$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} u^p(x)$ est la projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.

[001566]

Exercice 3319

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathscr{L}(E)$ telle que $s^2 = id$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s-Id) \oplus \mathrm{Ker}(s+Id)$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $s \in \mathscr{O}(E)$.

   ii) $\mathrm{Ker}(s-Id) \perp \mathrm{Ker}(s+Id)$.

   iii) $s = s^*$.
3. On note désormais s_F l'unique symétrie $s \in \mathscr{O}(E)$ telle que $F = \mathrm{Ker}(s+Id)$. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{O}(E)$ on a : $us_F u^{-1} = s_{u(F)}$.
4. Montrer que si f est une application de E dans lui-même laissant stables toutes les droites vectorielles (c'est à dire que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$) alors f est linéaire.
5. En déduire que $Z(\mathscr{O}(E)) = \{id, -id\}$ et que si $n \geq 3$ alors $Z(\mathscr{O}^+(E)) = \{id, -id\} \cap \mathscr{O}^+(E)$. (on pourra appliquer 3.) dans le cas où F est une droite ou un plan.)
6. Que se passe-t-il lorsque $n = 1$ et $n = 2$?

[001567]

Exercice 3320

Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$ telle que $\ker(u-id) \neq E$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. On pose $y = u(x)$. Alors on sait qu'il existe une unique réflexion r telle que $r(y) = x$.

1. Montrer que $\ker(u-id) \subset \ker(r-id)$.
2. Montrer que $\dim\ker(r \circ u - id) > \dim\ker(u-id)$.
3. Montrer par récurrence que toute isométrie vectorielle est la composée de réflexions.

[001568]

Exercice 3321

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (i,j)\ \left|a_{i,j}\right| \leq 1$ et que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leq n$. [001569]

Exercice 3322

Soit E euclidien, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in E^{2n}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \left(x_i|x_j\right) = \left(y_i|y_j\right).$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal f de E tel que :

$$\forall i \in \{1,...,n\}, f(x_i) = y_{i.}$$

[001570]

---

116 202.99 Autre

Exercice 3323

On considère l'application suivante :

$$\alpha\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

Montrer que α est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $i \in \{0,...,n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(i/n) \end{array}$$

Montrer que α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et montrer que la famille $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
En déduire que :

$$\exists (\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(i/n)$$

[001519]

Exercice 3324

On considère l'application u suivante :

$$u\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Calculer ${}^t u(\alpha)$ lorsque :

$$\alpha\ : P \mapsto P(0) \qquad\qquad \alpha\ : P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$$

[001520]

Exercice 3325

On appelle *trace* d'une matrice A, et on note $\operatorname{tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}\\ A & \mapsto & \operatorname{tr}(A)\end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.
3. Existe-t-il deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I$?

[001521]

Exercice 3326

Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que $(Imf)^{\perp} = \operatorname{Ker}^t f$.
En déduire que f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.
Lorsque E et F sont de dimension finies, montrer que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}({}^t f)$. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on a $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^t(A))$. [001522]

Exercice 3327

Soit $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in (\mathbb{R}^3)^*$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3\ \ f(x) = \alpha(x)\,v.$$

(Indication : commencer par montrer que $\operatorname{rg}(f) \leq 1$*)* [001523]

Exercice 3328

On considère un espace euclidien $(E, <>)$. On rappelle que l'adjoint u^* d'un endomorphisme u est l'endomorphisme caractérisé par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y > = < x, u^*(y) >$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de E si et seulement si u est la composée d'une homotétie et d'une isométrie, c'est à dire si et seulement si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists v \in O(E)\ /\ u = \alpha v.$$

1. Redémontrer l'équivalence entre les trois caractérisations suivantes des isométries :

$$\begin{aligned} v \text{ est une isométrie} &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \|v(x)\| = \|x\| \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \quad < v(x), v(y) > = < x, y > \\ &\Leftrightarrow v^* v = \mathrm{id} \end{aligned}$$

On veut montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) u est une similitude

(ii) il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$u^* u = \lambda \mathrm{id}$$

(iii) u conserve l'orthogonalité, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, < x, y > = 0 \Leftrightarrow < u(x), u(y) > = 0$$

2. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, puis que $(ii) \Rightarrow (i)$.
3. Montrer que $(i) \Rightarrow (iii)$.
4. On suppose (iii).
   (a) Soit $x \in E$, $x \neq 0$.Montrer que
   $$\forall y \in E \quad x \perp y \Leftrightarrow u^* u(x) \perp y$$
   (b) En déduire que $u^* u(x)$ appartient à la droite engendrée par x. On note λ_x le réel tel que $u^* u(x) = \lambda_x x$.
   (c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_{tx} = \lambda_x$
   (d) Montrer que, pour tout couple (x,y) de vecteurs linéairement indépendants de E, on a : $\lambda_x = \lambda_y$.

(e) En déduire que l'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante. Conclure.

[001524]

Exercice 3329 Équation $AM = \lambda M$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Déterminer les scalaires λ et les matrices $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AM = \lambda M$. [003567]

Exercice 3330 $v \mapsto v \circ u$ (Centrale MP 2003)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v \in \mathscr{L}(E)$ associe $v \circ u$.

1. Montrer que $\Phi_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
2. Montrer l'équivalence : (u est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (Φ_u est diagonalisable)...
   (a) en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u.
   (b) en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u.

Correction ▼ [003568]

Exercice 3331 Matexo

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, (F,G) deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G. Soit $E_p = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } f \circ p = p \circ f\}$. Quelle est la dimension de E_p ? [003569]

Exercice 3332 $f \mapsto p \circ f \circ p$

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection et $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto p \circ f \circ p$.
Déterminer les éléments propres de Φ.

Correction ▼ [003570]

Exercice 3333 $f \mapsto u \circ f$ et $f \mapsto f \circ u$

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
On considère les applications$\mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ $\varphi : f \mapsto u \circ f$ $\psi : f \mapsto f \circ u$

1. Montrer que φ et ψ sont diagonalisables.
2. Montrer que $\varphi - \psi$ est diagonalisable.

[003571]

Exercice 3334 $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$

Soient u, v deux endomorphisme d'un espace vectoriel E non nul tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$.

1. Simplifier $u^k \circ v - v \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour $P \in K[X]$.
2. Montrer que u et v n'ont pas de polynômes minimaux.

Correction ▼ [003572]

Exercice 3335 Ensi PC 1999

Soit E un ev réel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Montrer pour tout entier naturel n : $f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$).

[003573]

Exercice 3336 X MP* 2001

Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur K) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ n'est de rang un.

Correction ▼ [003574]

Exercice 3337 $\frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$ (Mines MP 2003)

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie, p un projecteur de rang r et $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), u \mapsto \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$.

1. Est-ce que φ est diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres de φ et les dimensions des sous-espaces propres.

Correction ▼ [003575]

Exercice 3338 Crochet de Lie (Ens Cachan MP* 2003)

Soit $\Phi : \mathscr{M}_n((x^2+1)^) \to \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ un automorphisme d'ev tel que : $\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, $\Phi([A,B]) = [\Phi(A),\Phi(B)]$ où $[X,Y] = XY-YX$. Montrer : $\forall\, D \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, ($D$ est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\Phi(D)$ est diagonalisable).

Indication : considérer $\phi_D : X \mapsto [D,X]$ et montrer que (D est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (ϕ_D est diagonalisable).

Correction ▼ [003576]

Exercice 3339 Base de $(K^3)^*$

Dans K^3 on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x+y-z$, $f_2(\vec{x}) = x-y+z$, $f_3(\vec{x}) = x+y+z$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(K^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

[003625]

Exercice 3340 Base de $(K^3)^*$

Dans K^3 on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x+2y+3z$, $f_2(\vec{x}) = 2x+3y+4z$, $f_3(\vec{x}) = 3x+4y+6z$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(K^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

Correction ▼ [003626]

Exercice 3341 Base de $(K^n)^*$

Pour $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in K^n$ on pose $f_i(\vec{x}) = x_i + x_{i+1}$ et $f_n(\vec{x}) = x_n + x_1$. Déterminer si $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$ est une base de $(K^n)^*$ et, le cas échéant, déterminer la base duale.

Correction ▼ [003627]

Exercice 3342 Bases duale des polynômes

Soit $E = K_n[X]$. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (f_0,\dots,f_n)$ est une base de E^* et donner la base duale lorsque ...

1. $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0,\dots,x_n$ sont des scalaires distincts.
2. $f_i(P) = P^{(i)}(0)$.
3. $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$ où $x_0,\dots,x_n$ sont des scalaires quelconques. (Ne pas chercher la base duale pour cet exemple)

[003628]

Exercice 3343 Base duale des polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :

$$\phi_i : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(x_i); \qquad \psi_i : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P'(x_i)$$

1. Montrer que $(\phi_1,\dots,\phi_n,\psi_1,\dots,\psi_n)$ est une base de E^*.
2. Chercher la base duale. On notera $P_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.

Correction ▼ [003629]

Exercice 3344 Intégrale

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto \int_{t=-1}^{1} t^i P(t)\,dt$.

1. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
2. Trouver la base duale.

Correction ▼ [003630]

Exercice 3345 Évaluations et intégrale

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E :

$$f_a : P \mapsto P(a), \quad f_b : P \mapsto P(b), \quad f_c : P \mapsto P(c), \quad \varphi : P \mapsto \int_{t=a}^{b} P(t)\,dt.$$

Étudier la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).
Correction ▼ [003631]

Exercice 3346 Base duale de $(1, X, X(X-1), \dots)$

Soit $E = K_n[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)\cdots(X-i+1)$ pour $i \geq 1$, et $f_i : P \mapsto P(i)$.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E et $\mathscr{B} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^*.
2. Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathscr{B}$. (On pourra utiliser les polynômes : $Q_i = \prod_{1 \leq j \leq n; j \neq i}(X-j)$)
3. Décomposer de même les autres formes linéaires P_k^*.

Correction ▼ [003632]

Exercice 3347 Base duale de $((X-a)^k(X-b)^{n-k})$

Soit $E = K_n[X]$ et $a, b \in K$ distincts. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.
2. On suppose $n = 2$ et on prend comme base de E^* : $\mathscr{B} = (f_a, f_c, f_b)$ où $f_x(P) = P(x)$ et $c = \frac{a+b}{2}$. Exprimer les formes linéaires (P_0^*, P_1^*, P_2^*) dans $\mathscr{B}$.

Correction ▼ [003633]

Exercice 3348 Formes linéaires liées

Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur K^n telles qu'il existe $\vec{x} \in K^n$ non nul tel que $f_1(\vec{x}) = \cdots = f_n(\vec{x}) = 0$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée. [003634]

Exercice 3349 $(P(X), \dots, P(X+n))$ est une base des polynômes

Soit $E = K_n[X]$, $Q \in E$ de degré n et $Q_i = Q(X+i)$ $(0 \leq i \leq n)$.

1. Montrer que $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est libre.
2. Montrer que toute forme linéaire sur E peut se mettre sous la forme :
$f : P \mapsto \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \cdots + \alpha_n P^{(n)}(0)$.
3. Soit $f \in E^*$ telle que $f(Q_0) = \cdots = f(Q_n) = 0$. Montrer que $f = 0$.
(considérer le polynôme $P = \alpha_0 Q + \cdots + \alpha_n Q^{(n)}$)
4. Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E.

[003635]

Exercice 3350 $\varphi((X-a)P) = 0$

Soit $E = K_n[X]$. Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\, P \in K_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que : $\forall\, P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a)$.

[003636]

Exercice 3351 Forme linéaire sur les polynômes

Montrer l'existence et l'unicité d'une forme linéaire Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\Phi(1) = 0$, $\Phi(X) = 1$ et $\Phi(P) = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$. [003637]

Exercice 3352 Système unisolvent

Soient $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fonctions linéairement indépendantes. On pose $E = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$.

1. Montrer que la famille $(\delta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ engendre E^*.
2. En déduire qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det M \neq 0$ où M est la matrice de terme général $f_i(x_j)$.

[003638]

Exercice 3353 Polynômes à deux variables

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est polynomiale si elle est de la forme : $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$, la somme portant sur un nombre fini de termes. Le degré de f est alors $\max(i+j \text{ tq } a_{ij} \neq 0)$.
On note E_k l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à k.

1. Montrer que E_k est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.

2. Soient $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$. Montrer que les formes linéaires $f \mapsto f(A)$, $f \mapsto f(B)$, $f \mapsto f(C)$ constituent une base de E_1^*.
3. Chercher de même une base de E_2^*.
4. Soit T le triangle plein ABC et $f \in E_1$. Montrer que $\int\int_T f(x,y)\,dxdy = \frac{f(A)+f(B)+f(C)}{6}$.
5. Chercher une formule analogue pour $f \in E_2$.

Correction ▼ [003639]

Exercice 3354 Polynômes trigonométriques

On note $f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).
Soit E_n l'espace engendré par la famille $\mathscr{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1. Montrer que pour $k \geq 1$, (f_k, g_k) est libre.
2. Soit $\varphi : E_n \to E_n, f \mapsto f''$. Chercher les sous-espaces propres de φ. En déduire que $\mathscr{F}_n$ est libre.
3. On note $a_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ et $\varphi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(a_k)$.
   Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ est une base de E_n^*. (On utilisera la fonction $f : x \mapsto \prod_{k=1}^n (\cos x - \cos a_k)$)
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $b_k = \frac{2k\pi}{N}$ et $\psi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(b_k)$. Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ est libre si et seulement si $N \leq 2n+1$, et engendre E_n^* si et seulement si $N \geq 2n+1$.

Correction ▼ [003640]

Exercice 3355 trace sur $\mathscr{M}_n(K)$

Soit $E = \mathscr{M}_n(K)$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on note $\phi_A : E \to K, M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$.

1. Montrer que $E^* = \{\phi_A \text{ tq } A \in E\}$.
2. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathscr{S}^\circ = \{\phi_A \text{ tq } A \in \mathscr{A}\}$ et $\mathscr{A}^\circ = \{\phi_A \text{ tq } A \in \mathscr{S}\}$.

[003641]

Exercice 3356 Suites de Fibonacci

Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ à termes réels telles que pour tout n : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.
2. Soient $f_0 : E \to \mathbb{R}, u \mapsto u_0$ et $f_1 : E \to \mathbb{R}, u \mapsto u_1$. Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Correction ▼ [003642]

Exercice 3357 Combinaison de formes linéaires

Soit E un K-ev de dimension finie et f, $f_1, \dots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\mathrm{Ker} f \supset \mathrm{Ker} f_1 \cap \dots \cap \mathrm{Ker} f_p$. [003643]

Exercice 3358 Combinaison de formes linéaires

Soit E un K-ev de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$. On considère l'application :

$$\Phi : E \to K^p, \vec{x} \mapsto \left(f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x})\right)$$

Montrer que Φ est surjective si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. [003644]

Exercice 3359 Orthogonaux d'une somme directe

Soit E un K-ev de dimension finie et F, G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$.

1. Montrer que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.
2. Montrer que F° est naturellement isomorphe à G^* et G° à F^*.

[003645]

Exercice 3360 $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$

Soit E un K-ev de dimension finie et $f, g \in E^*$ toutes deux non nulles. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) \neq 0$ et $g(\vec{u}) \neq 0$.
[003646]

Exercice 3361 p formes linéaires

Soit E un K-ev. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que :

$$\forall\, \vec{x} \in E,\ (f_1(\vec{x}) = \cdots = f_p(\vec{x}) = 0) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{0}).$$

Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p. [003647]

Exercice 3362 $\det(f_i(u_j)) \neq 0$

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E$ et $f_1, \dots, f_n \in E^*$.
Soit M la matrice de terme général $f_i(\vec{u}_j)$. Montrer que si $\det M \neq 0$, alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^*. [003648]

Exercice 3363 e_n^* imposé

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\mathscr{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ une famille libre de E et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Montrer qu'on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ telle que $f = e_n^*$ si et seulement si $f(\vec{e}_1) = \cdots = f(\vec{e}_{n-1}) = 0$.
Y a-t-il unicité de $\vec{e}_n$? [003649]

Exercice 3364 Modification élémentaire

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1{}', \dots, \vec{e}_n{}')$ déduite de $\mathscr{B}$ par une opération élémentaire (échange de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul, addition à un vecteur d'un multiple d'un autre).
Étudier comment on passe de la base duale $\mathscr{B}^*$ à $\mathscr{B}'^*$ en fonction de l'opération effectuée.
Correction ▼ [003650]

Exercice 3365 Séparation

Soit E un K-ev de dimension finie.

1. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in E$ avec $\vec{x} \neq \vec{y}$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ telle que $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.
2. Soit V un sev de E^* ayant la propriété : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow \exists\, f \in V$ tq $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.
   Montrer que $V = E^*$.

[003651]

117 203.01 Groupe, sous-groupe

Exercice 3366

Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant $\{A, B, C\}$.
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
3. Faire de même avec un carré.

[001303]

Exercice 3367 Entiers modulo n

Étant donné un entier naturel n, on appelle classe d'un entier relatif p modulo n l'ensemble $\overline{p} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des classes modulo n est noté $\mathbb{Z}_n$.

1. Écrire la liste des éléments distincts de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ et $\mathbb{Z}_5$.
2. Montrer que si $x \in \overline{p}$ et $y \in \overline{q}$, alors $x + y \in \overline{p+q}$ et $xy \in \overline{pq}$.
3. En posant $\overline{p} + \overline{q} = \overline{p+q}$ et $\overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{pq}$, on définit deux lois de composition, addition et multiplication sur $\mathbb{Z}_n$.
   Écrire la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}_4$.

Même question pour $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, et $\mathbb{Z}_5$. [001304]

Exercice 3368

1. Montrer que les transformations géométriques qui conservent globalement un rectangle forment un groupe. Faire l'étude de ce groupe.

2. Étudier le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il n'existe que deux sortes de groupes à quatre éléments.

[001305]

Exercice 3369

1. Étudier le groupe des isométries du carré.
2. Écrire la liste des éléments du groupe $\mathfrak{S}_4$ des permutations de quatre lettres. Trouver des sous-groupes de ce groupe isomorphes aux groupes du rectangle, du triangle équilatéral, du carré.

[001306]

Exercice 3370 Permutations d'un ensemble de n éléments

1. Une permutation de l'ensemble de n éléments $\{1,2,\dots,n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. Il est commode de désigner une telle permutation s par le tableau de valeurs suivant : $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de ces permutations pour n donné.
2. Écrire les éléments de $\mathfrak{S}_2$ et de $\mathfrak{S}_3$.
3. Établir les tables de composition de ces deux ensembles.
4. De la table de $\mathfrak{S}_3$ on peut extraire des parties *stables* ne faisant intervenir que certains éléments ; lesquelles ? Peut-on les trouver toutes.
5. Voyez-vous des analogies (totales ou partielles) entre ces tables et des situations rencontrées plus haut ?
6. On peut obtenir tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ à partir de la composition de certains d'entre-eux ; lesquels ?
7. Combien d'éléments possède $\mathfrak{S}_n$? Combien de cases contient la table de composition de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5,\dots$? Pourrait-on étudier $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$ à partir de ces tables ?

[001307]

Exercice 3371

Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. [001308]

Exercice 3372

Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3. Est-ce vrai pour 4 ? [001309]

Exercice 3373

Montrer que si X contient au moins trois éléments alors $\sigma(X)$ n'est pas abélien. [001310]

Exercice 3374

Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $]-1,1[$ muni de la loi définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pour la multiplication usuelle ;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle ;
4. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b : a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

Correction ▼ [001311]

Exercice 3375

Soit $K = \{\mathrm{Id}, f_1, f_2, f_3\}$ où f_1, f_2, et f_3 sont les permutations de $E = \{1,2,3,4\}$ définies par

$$f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{smallmatrix}\right), f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{smallmatrix}\right), f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&3&2&1 \end{smallmatrix}\right).$$

Montrer que K est un sous-groupe de $\mathscr{S}_4$. [001312]

Exercice 3376

Soit l'ensemble
$$\mathscr{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$
Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathscr{J}$ est un groupe abélien. [001313]

Exercice 3377

Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :
$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\} \text{ ?}$$
Correction ▼ [001314]

Exercice 3378

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à droite et tel que chaque élément de G admette un symétrique à droite. Montrer que G est un groupe. [001315]

Exercice 3379

Soient $(G,.)$ un groupe et $a,b \in G$. On suppose que
$$(1) : ab^2 = b^3a \quad \text{ et } (2) : ba^2 = a^3b.$$
1. Montrer, en utilisant seulement (1), que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$ puis que $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.
2. En déduire, en utilisant (2), que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$ et enfin que $a = b = 1$.

[001316]

Exercice 3380

1. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ muni de la loi $\star$ définie par $\forall a,b \in \mathbb{R}, a \star b = a+b+ab$ est-il un groupe ?
2. L'ensemble $E = \{-1,1,i,-i\} \subseteq \mathbb{C}$ muni de la loi usuelle de multiplication dans $\mathbb{C}$ est-il un groupe ?
3. L'ensemble $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?
4. L'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre 2 muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?

[001317]

Exercice 3381

Soient $(G,\star)$ et $(H,\triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\heartsuit$ par $(x,y)\heartsuit(x',y') = (x\star x', y\triangle y')$.
1. Montrer que $(G \times H, \heartsuit)$ est un groupe.
2. Si G est de cardinal 2, dresser la table de $G \times G$ et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

[001318]

Exercice 3382

Montrer que si H et K sont des sous-groupes de G alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G. Est-ce vrai pour $H \cup K$? [001319]

Exercice 3383

Si G est un groupe, on appelle centre de G et on note $Z(G)$ l'ensemble $\{x \in G / \forall y \in G, xy = yx\}$.
1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que G est commutatif ssi $Z(G) = G$.
3. Calculer $Z(\sigma_3)$.

[001320]

Exercice 3384

On nomme $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients entiers relatifs.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que pour que M admette un inverse élément de $M_n(\mathbb{Z})$ il faut et il suffit que $\det(M) \in \{-1,1\}$.
- Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z}) \,; \det(M) \in \{-1,1\}\}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$. [001321]

Exercice 3385

1. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad-bc \neq 0$ et $a^2-b^2-c^2-d^2 \leq 1$ est il un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est-il un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
3. Existe-t-il une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad-bc \neq 0$ et $a \leq M$ forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [001322]

Exercice 3386

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Correction ▼ [001323]

Exercice 3387

Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les entiers 24, 36 et -54. [001324]

Exercice 3388

Les questions sont indépendantes. Soit j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer le sous-goupe du groupe additif $\mathbb{C}$ engendré par i et j.
2. Déterminer le sous-goupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ engendré par i et j.

[001325]

Exercice 3389

Soit G un groupe engendré par a et b. Montrer que $<a> \cap <b> \subseteq Z(G)$ où $Z(G)$ désigne le centre de G.

Correction ▼ [001326]

Exercice 3390

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ avec $G \neq \{0\}$.

1. Montrer l'existence de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$.
2. Si $\alpha > 0$ montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$ montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

[001327]

Exercice 3391

Soit G un groupe. Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$, et $\pi : G \to \wp(G)$ définie par : $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Montrer que $\pi(G)$ est une partition de G. [001328]

Exercice 3392

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$. On appelle translation à droite (resp. à gauche) par $a \in E$, l'application d_a (resp. g_a) de E dans E définie par $d_a(x) = a \star x$ (resp. $g_a(x) = x \star a$).

1. Montrer que dans un groupe les translations à droite et à gauche sont des bijections.
2. Réciproquement, si la loi $\star$ de E est associative, et que les translations à droite et à gauche sont des bijections, on va montrer que $(E,\star)$ est un groupe.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $e_x \in E$ (resp. $f_x \in E$) tel que $e_x \star x = x$ (resp. $x \star f_x = x$).
   (b) Si $x,y \in E$, montrer que $e_x = e_y$ (noté e dorénavant) et $f_x = f_y$ (noté f dorénavant).
   (c) Montrer que $e = f$ (noté e dorénavant).
   (d) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $\bar{x} \in E$ (resp. $\bar{\bar{x}} \in E$) tel que $\bar{x} \star x = e$ (resp. $x \star \bar{\bar{x}} = e$).
   (e) Montrer que $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.
   (f) Conclure.

[001329]

Exercice 3393

Si K est un sous-groupe de H et H un sous-groupe de G, montrer que K est un sous-groupe de G. [001330]

Exercice 3394

1. Soit $(G,.)$ un groupe. Montrer l'équivalence de :
   i) G est abélien.
   ii) Pour tout $a,b \in G$, on a : $(ab)^2 = a^2b^2$.
   iii) Pour tout $a,b \in G$, on a : $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
   iv) L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$ est un automorphisme.
2. En déduire que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

[001331]

Exercice 3395

1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ? Quand c'est le cas, chercher des sous-groupes non triviaux.
2. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b : a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

[001332]

Exercice 3396

Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ (resp. de $(\mathbb{R}^*,\times)$) contenant 1 ? Contenant 2 ? [001333]

Exercice 3397

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Montrer que $S_\lambda = \{\exp(i\lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},\times)$. Pour quelles valeurs de λ retrouve-t-on des sous-groupes bien connus ? A quoi ressemblent les courbes S_λ ? Que peut-on dire, en terme de morphisme, de l'application $t \mapsto \exp(i\lambda t)$?
[001334]

Exercice 3398

Décrire tous les homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.
Correction ▼ [001343]

Exercice 3399

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on pose la matrice $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{S} = \left\{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\}$. Soit l'application $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}, M_{a,b} \mapsto a^2+b^2$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.
2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathscr{S},\times)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$.

[001344]

Exercice 3400

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective ?
Correction ▼ [001345]

Exercice 3401

Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $\det(MM') = \det(M)\det(M')$;
3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;
5. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
6. $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$.

[001346]

Exercice 3402

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\mathscr{S} = \left\{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $\mathscr{S}^* = \mathscr{S} \setminus \left\{M_{0,0}\right\}$. Soit l'application $f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}, M_{a,b} \mapsto a+ib$.

1. (a) Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-groupe du groupe additif usuel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathscr{S}^*$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est un isomorphisme du groupe $(\mathscr{S},+)$ sur le groupe additif $\mathbb{C}$.
3. (a) Montrer que f définit un homomorphisme du groupe $(\mathscr{S}^*,\times)$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de cet homomorphisme.
4. Montrer que $\Omega = \left\{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2+b^2 = 1\right\}$ est un sous-groupe distingué du groupe multiplicatif $\mathscr{S}^*$.

[001347]

Exercice 3403

Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \to x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est commutatif. On suppose G fini ; soit ϕ un morphisme involutif de G dont le seul point fixe est e, montrer que :

$$\forall z \in G, \exists t \in G, z = t(\phi(t))^{-1}.$$

En déduire ϕ puis que G est commutatif. [001348]

Exercice 3404

Montrer que les groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ sont isomorphes. [001349]

Exercice 3405

Montrer que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ est isomorphe à $\mathbb{U}_6$. Est-ce que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ est isomorphe est $\mathbb{U}_4$? Pouvez-vous conjecturer à quelle condition $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$ est isomorphe à $\mathbb{U}_{nm}$? [001350]

Exercice 3406

Soit G un groupe.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de G muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Vérifier que l'application $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ qui associe à $g \in G$ l'application $\phi_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau $Z(G)$, dit *centre* de G.
3. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

[001351]

Exercice 3407

Soit $(G,.)$ un groupe. On appelle conjugaison par $a \in G$, l'application f_a de G dans G définie par $f_a(x) = a.x.a^{-1}$.

1. Montrer que f_a est un automorphisme de G.
2. Soit $\Gamma = \{f_a : a \in G\}$. Montrer que $(\Gamma,\circ)$ est un groupe.
3. Soit $\Phi : G \to \Gamma, a \mapsto f_a$. Vérifier que Φ est un morphisme. Est-il injectif ? (indication : préciser ce morphisme lorsque G est abélien).

[001352]

Exercice 3408

1. Les sous-groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Z},+)$ sont-ils isomorphes ?
2. Les sous-groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q} \setminus \{0\},\times)$ sont-ils isomorphes ?

[001353]

Exercice 3409

Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne sont pas isomorphes.

Correction ▼ [001354]

Exercice 3410

1. On suppose que φ est un isomorphisme de $(G,*)$ sur $(G',\diamond)$. Si e est l'élément neutre de G, que peut-on dire de $\varphi(e)$? Si x' est l'inverse de x dans G, que peut-on dire de $\varphi(x')$? Si G est d'ordre n, que peut-on dire de l'ordre de G' ?
2. Pouvez-vous citer des exemples de groupes ? de groupes isomorphes ?
3. Si $(G,*)$ est un groupe fini et si on établit la table de la loi $*$, peut-on rencontrer deux fois le même élément dans la même ligne, dans la même colonne ? Établir les tables de composition possibles pour des groupes à 2, 3, 4 éléments. Pouvez-vous donner des exemples de groupes correspondant à ces tables. Retrouver éventuellement des groupes isomorphes.

[001385]

Exercice 3411

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique et donner la liste des générateurs de G.

Correction ▼ [001386]

Exercice 3412

Soit G un groupe d'ordre pn avec p premier.

1. On considère deux sous-groupes H et H' de G d'ordre p avec $H \neq H'$. Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
2. En déduire que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est un multiple de $p-1$.

Correction ▼ [001387]

Exercice 3413

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4. [001388]

Exercice 3414

1. Soit G un groupe dans lequel tout élément (distinct de l'élément neutre) est d'ordre 2. Montrer que G est commutatif.
2. Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 2.

Correction ▼ [001389]

Exercice 3415

Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans un groupe fini G est trivial. [001390]

Exercice 3416

Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G. On suppose que H est stable pour la loi de G. Montrer H est un sous-groupe de G. [001391]

Exercice 3417

Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ($n \geq 2$), possédant 2 sous-groupe H et H' tels que :

$$\mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(H') = n$$

et

$$H \cap H' = \{e\}.$$

1. Montrer que $G - (H \cup H')$ est un singleton, noté $\{a\}$.
2. Soit $h \in H - \{e\}$, montrer que $hH' \subset \{h,a\}$, en déduire que $hH' = \{h,a\}$ puis que $n = 2$.
3. On écrit $G = \{a,e,h,h'\}$, donner la table de G (puis un exemple d'un tel groupe).

[001392]

Exercice 3418

Soit G l'ensemble des matrices d'ordre 2 inversibles.

1. Montrer que G est un groupe pour le produit matriciel. Est-il commutatif ?
2. Montrer que si $A \in G, B \in G$ vérifient $A^2 = B^2 = ABAB = I$, alors $A = A^{-1}, B = B^{-1}$ et $AB = BA$.
3. Trouver deux éléments de G vérifiant $A^2 = B^2 = I$ et $AB \neq BA$.

[002438]

Exercice 3419

Soit G l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que c'est un groupe multiplicatif isomorphe au groupe additif réel. [002439]

Exercice 3420

Soit G le groupe multiplicatif des matrices complexes d'ordre n. Parmi les sous-ensembles suivants de G, lesquels sont des sous-groupes ?
— les matrices à coefficients réels ;
— les matrices inversibles ;
— les matrices réelles inversibles à coefficients positifs ;
— les matrices diagonales inversibles ;
— les matrices vérifiant $a_{i,i} \neq 0, \forall i$, et triangulaires supérieures ($a_{i,j} = 0$ si $i > j$).
— les matrices vérifiant $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}, \forall i, j$.

[002440]

Exercice 3421

On munit l'ensemble $G = \{a, b, c, d\}$ d'une loi de composition interne dont la table de Pythagore est

$\star$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

(La première ligne se lit $a \star a = a$, $a \star b = a$, $a \star c = c$,....)

1. Cette loi possède-t-elle un élément neutre ?
2. Cette loi est-elle commutative ?
3. Cette loi est-elle associative ?
4. Est-ce une loi de groupe ?

[002727]

Exercice 3422

On définit une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 15\}$ par la suite finie des entiers $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(15)$. Par exemple

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 7 & 1 & 14 & 3 & 12 & 8 & 9 & 6 & 15 & 13 & 4 & 10 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

signifie $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 7$, etc...Soient

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 3 & 2 & 15 & 4 & 11 & 13 & 10 & 12 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 15 & 2 & 14 & 3 & 13 & 4 & 12 & 5 & 11 & 6 & 10 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour $i = 1, \dots, 4$,
   – décomposer σ_i en cycles à supports disjoints.
   – déterminer l'ordre de σ_i.
   – déterminer la signature de σ_i.
2. Calculer les puissances successives du cycle $\sigma = (10\ 15\ 11\ 13)$. Quel est l'inverse de σ_1 ?
3. Calculer σ_2^{2008}.
4. Déterminer, sans fatigue excessive, la signature de

$$\sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-4} \circ \sigma_4^3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-1} \circ \sigma_4^{-6}.$$

5. Combien y a-t-il de permutations g de $\{1, \dots, 15\}$ telles que $\sigma_1 \circ g = g \circ \sigma_1$?

[002728]

Exercice 3423

1. Montrer que les ensembles G suivants, munis des lois $\star$ données, sont des groupes. Préciser quel est l'élément neutre de G et quel est l'inverse d'un élément quelconque $x \in G$.
   (a) $G = \mathbb{Z}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (b) $G = \mathbb{Q}^*$ (ensemble des rationnels non nuls), $\star =$la multiplication des nombres ;
   (c) $G = \mathbb{Q}^{+*}$ (ensemble des rationnels strictement positifs), $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (d) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (e) $G = \mathbb{R}^{+*}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (f) $G = \mathbb{C}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (g) $G = \mathbb{C}^*$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (h) $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (i) $G = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres (n est un entier fixé) ;
   (j) $G =$ l'ensemble des bijections d'un ensemble non vide E, $\star =$ la composition des applications ;
   (k) G = l'ensemble des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire standard), $\star =$ la composition des applications ;
   (l) G = l'ensemble des isométries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire standard) qui préservent une figure donnée, $\star =$ la composition des applications.
2. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$;
3. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$;
4. Donner un morphisme de groupes surjectif entre $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

[002729]

Exercice 3424

Dire pour quelle(s) raison(s) les opérations $\star$ suivantes ne munissent pas les ensembles G donnés d'une structure de groupe ?

(a) $G = \mathbb{N}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
(b) $G = \mathbb{N}^*$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
(c) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

[002730]

Exercice 3425 Groupe produit

Soient G, H deux groupes multiplicatifs. On munit $G \times H$ de l'opération :

$$\forall\, g, g' \in G,\ \forall\, h, h' \in H, \qquad (g,h) \cdot (g',h') = (gg', hh').$$

Montrer que $\cdot$ définit une loi de groupe sur $G \times H$. [002965]

Exercice 3426 Essai de tables

Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

2.

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

3.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Correction ▼ [002966]

Exercice 3427 Translations surjectives

Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\, a,b \in G,\ \exists\, x,y \in G \text{ tq } a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G,\cdot)$ est un groupe. [002967]

Exercice 3428 Transport de structure

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble, et $\phi : G \to E$ une bijection.
On définit une opération $\star$ sur E par :

$$\forall\, x,y \in E,\ x \star y = \phi\left(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\right).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes. [002968]

Exercice 3429 Transport de structure

Pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, on pose $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

1. Vérifier que $\sqrt{1+(x\star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$.
2. Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe.
3. Montrer que l'application sh est un isomorphisme entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R},\star)$.

[002969]

Exercice 3430 Transport de structure

Pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, on pose $x \star y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$. [002970]

Exercice 3431 Loi associative régulière

Soit E un ensemble fini muni d'une opération interne $*$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que E est un groupe. [002971]

Exercice 3432 Partie finie stable par produit

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G. [002972]

Exercice 3433 Centre d'un groupe et commutant

Soit G un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G \text{ tq } \forall\, b \in G, \text{ on a } ab = ba\}$ (*centre de* G), et pour $a \in G$: $C(a) = \{b \in G \text{ tq } ab = ba\}$ (*commutant de* a).
Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de G. [002973]

Exercice 3434 Loi Δ

Soit E un ensemble et $G = \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que (G,Δ) est un groupe commutatif.
2. Pour $a \in E$, on note $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\begin{cases} X & \dot{0} \text{ si } a \notin X \\ X & \dot{1} \text{ si } a \in X \end{cases}$.

   Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes.
3. On prend $E = \{1,\dots,n\}$ et on note

$$\begin{aligned}\Phi : G &\to \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n,\\ X &\mapsto (\phi_1(X),\dots,\phi_n(X)).\end{aligned}$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme de groupes.

[002974]

Exercice 3435 Sous-groupes emboîtés

Soit G un groupe additif, et H,K,L trois sous-groupes de G vérifiant : $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$, $H + L = K + L$. Démontrer que $H = K$.
[002975]

Exercice 3436 Card(HK)

Soit G un groupe fini et H,K deux sous-groupes de G. On considère l'application $\phi : H \times K \to G, (h,k) \mapsto hk$

1. Est-ce que ϕ est un morphisme de groupes ?
2. Soit $z \in HK$, $z = h_0k_0$ avec $h_0 \in H$ et $k_0 \in K$.
   Montrer que les antécédents de z par ϕ sont les couples $(h_0t, t^{-1}k_0)$ avec $t \in H \cap K$.
3. En déduire que : Card(HK)Card$(H \cap K) =$ Card(H)Card(K).
4. Montrer que : (HK est un sous-groupe de G) $\iff$ $(HK \subset KH)$ $\iff$ $(HK = KH)$.

[002976]

Exercice 3437 Sous-groupes d'un groupe cyclique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = k \wedge n$.

1. Déterminer l'ordre de $\dot{k}$ dans G.
2. Montrer que $\dot{k}$ et $\dot{d}$ engendrent le même sous-groupe de G.
3. Quels sont tous les sous-groupes de G ?

[002978]

---

118 203.02 Ordre d'un élément

Exercice 3438

On appelle *ordre d'un élément* d'un groupe fini $(G,*)$ l'ordre du sous-groupe engendré dans G par cet élément.

1. Montrer que si x est d'ordre p, p est le plus petit entier tel que $x^p = e$.
2. Déterminer les ordres des éléments des groupes rencontrés au **I**.
3. Soit $(G,*)$ un groupe fini, a un élément de G, H un sous-groupe d'ordre p de G ; on note aH l'ensemble $\{a*y \mid y \in H\}$.
   a) Montrer que pour tout $a \in G$, aH a p éléments.
   b) Montrer que si $a \in G$ et $b \in G$, $(aH = bH)$ ou $(aH \cap bH = \emptyset)$.
   c) En déduire que l'ordre de H divise l'ordre de G.
4. Montrer que si G est un groupe fini d'ordre n, les ordres de tous ses éléments divisent n.
5. Trouver des sous-groupes de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$.
6. Si G est un groupe d'ordre 5, que peut-on dire de l'ordre de ses éléments ? En déduire les tables de composition possibles pour un groupe d'ordre 5. Que peut-on dire de deux groupes quelconques d'ordre 5 ? Mêmes questions pour les groupes d'ordre 23. Généraliser.

[001335]

Exercice 3439

Soit H un groupe abélien. Un élément $x \in H$ est dit d'ordre fini lorsque il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la somme $x + ... + x$ (n-fois) soit égale à 0. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de H est un sous-groupe abélien de H.

Correction ▼ [001336]

Exercice 3440

Soit G un groupe, e son élément neutre. Un élément g de G est dit *d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ si $g^n = e$ et $g^k \neq e$ pour tout entier $k < n$. g est dit *d'ordre fini* si il est d'ordre n pour un n quelconque.

1. Montrer que $Gl_2(\mathbb{R})$ contient des éléments d'ordre 2 et des éléments qui ne sont pas d'ordre fini.
2. Soit φ un homomorphisme de G à valeurs dans H et g un élément de G d'ordre n. Montrer que :
   - $\varphi(g)$ est d'ordre fini inférieur ou égal à n.
   - Si φ est injectif, l'ordre de $\varphi(g)$ est égal à n.
3. Montrer que si G n'a qu'un nombre fini d'éléments, tous ses éléments ont un ordre fini.

Correction ▼ [001337]

Exercice 3441

Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$ et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G.
3. Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

[001338]

Exercice 3442

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. On considère les endomorphismes de E définis par

$$s(e_1) = e_1, \quad s(e_2) = -e_2,$$
$$r(e_1) = e_2, \quad r(e_2) = -e_1.$$

1. Montrer que r et s sont des automorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
2. Déterminer l'ordre de s et l'ordre de r.
3. (a) Montrer que $sr = -rs$.
   (b) En déduire que $G := \{\mathrm{Id}_E, s, r, sr, -\mathrm{Id}_E, -s, -r, -s\}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E.
   (c) Montrer que G est le sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ engendré par s et t.

[001339]

Exercice 3443

Soient G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Correction ▼ [001340]

Exercice 3444

1. Soient G un groupe et $x, y \in G$ des éléments qui commutent et d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn. Montrer que l'hypothèse m et n *premiers entre eux* est indispensable.
2. Montrer que $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ d'ordres finis et que AB n'est pas d'ordre fini.

Correction ▼ [001341]

Exercice 3445

Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Correction ▼ [001342]

Exercice 3446 Sous groupes finis de $(x^2+1)^*$

Déterminer tous les sous-groupes finis de $((x^2+1)^{*,\times})$. [002982]

Exercice 3447 Ordre d'un élément

1. Soient G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.
2. Soient $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.
3. Soient $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

[002983]

Exercice 3448 Ordre de ab

Soient a, b deux éléments d'un groupe multiplicatif G tels que : $\begin{cases} a \text{ est d'ordre } \alpha \\ b \text{ est d'ordre } \beta \\ \alpha \wedge \beta = 1 \\ ab = ba. \end{cases}$

Déterminer l'ordre de ab. [002984]

Exercice 3449 Décomposition d'un élément d'ordre fini

Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$ d'ordre np avec $n \wedge p = 1$.
Montrer qu'il existe $b, c \in G$ uniques tels que b est d'ordre n, c est d'ordre p, $a = bc = cb$.

Indication ▼ [002985]

119 203.03 Morphisme, isomorphisme

Exercice 3450 Groupe des automorphismes

Soit G un groupe multiplicatif. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des isomorphismes $\phi : G \to G$.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.
2. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Pour $a \in G$ on note $\phi_a : G \to G, x \mapsto axa^{-1}$
   Montrer que $\phi_a \in \mathrm{Aut}(G)$, et que l'application $a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes.

[002977]

Exercice 3451 Images directes et réciproques

Soit G un groupe additif et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a : $f^{-1}(f(H)) = H + \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \operatorname{Im} f$.

[002979]

Exercice 3452 Morphismes entre deux groupes cycliques

Soit G un groupe cyclique engendré par a d'ordre n, G' un deuxième groupe, et $a' \in G'$.
Montrer qu'il existe un morphisme $\phi : G \to G'$ tel que $\phi(a) = a'$ si et seulement si a' est d'ordre fini divisant n.
Application : déterminer tous les morphismes : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to (x^2+1)^*$, $\quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [002980]

Exercice 3453 Morphismes de $\mathbb{Q}$ additif

Déterminer tous les morphismes de

1. $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q},+)$.
2. $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$.
3. $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}^*,\times)$.

Correction ▼ [002981]

120 203.04 Anneau

Exercice 3454

Soient $a,b \in \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz - \bar{z}$ est-elle un (endo)morphisme...

1. ...du groupe $\mathbb{C}$?
2. ...de l'anneau $\mathbb{C}$?
3. ...du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

[001355]

Exercice 3455

Soient les ensembles

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L et M sont des anneaux, des corps. [001356]

Exercice 3456

1. Soit $D = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = 0\}$. Montrer que D n'est pas un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $E = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que D n'est pas un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera un générateur.

[001357]

Exercice 3457

On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par $x \oplus y = x+y-1$ et $x \otimes y = x+y-xy$. Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps. [001358]

Exercice 3458

Soit $(G,+)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f+g : G \to G, x \mapsto f(x)+g(x)$.
Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau. [001359]

Exercice 3459

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $1-x$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

[001360]

Exercice 3460

Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
On appelle centre de A l'ensemble $C = \{x \in A / \forall y \in A, xy = yx\}$.
Montrer que C est un sous-anneau de A. [001361]

Exercice 3461

Soient A et B deux anneaux. On définit sur $A \times B$ les lois

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$$
$$(x,y)(x',y') = (xx', yy')$$

1. Montrer que $A \times B$ est alors un anneau.
2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

[001362]

Exercice 3462

Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-anneaux de A alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ est un sous-anneau de A. [001363]

Exercice 3463

Soit $\mathbb{Z}[i] = \left\{a+ib, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

[001364]

Exercice 3464

Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On pose $\mathscr{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$.

1. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{6} \in \mathscr{N}(A)$ puis que $\mathscr{N}(A) = \left\{\lambda \overline{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Que peut-on dire de $\mathscr{N}(A)$ si A est intègre ?
3. Montrer que $\mathscr{N}(A)$ est un idéal de A

[001365]

Exercice 3465 Extrait de l'examen de juin 1994

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par

$$(x_1,x_2) \star (y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1).$$

1. (a) Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif noté A.
   (b) Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau A.

2. On considère l'application
$$f : \mathbb{R}[X] \to A, P \mapsto (P(0), P'(0)).$$
   (a) Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) f est-il surjectif ?
   (c) Déterminer le noyau de f.

[001366]

Exercice 3466 Extrait de l'examen de janvier 1994

On définit $A = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathscr{U}(A)$ le groupe des éléments inversibles de A et enfin, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.
2. (a) Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in \mathscr{U}(A)$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   (c) Soient a et b des entiers. Montrer que si $N(a + jb) = 1$ alors $a, b \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Décrire le groupe $\mathscr{U}(A)$ et en déterminer les éléments d'ordre 3.
4. Soit $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}, P \mapsto P(j)$.
   (a) Montrer que Φ est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) Déterminer le noyau de Φ (on pourra remarquer que $j^2 + j + 1 = 0$).
   (c) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Q}\}$ et que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

[001367]

Exercice 3467 D'après examen juin 94

1. Montrer que $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si les entiers k et n sont premiers entre eux.
2. On pose $n = 10$ et soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Donner la liste des éléments de G.
   (b) Quel est l'ordre de $\overline{3}$? G est-il cyclique ?

[001369]

Exercice 3468 Bac 1978

Soit l'anneau $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau A.
2. Résoudre dans A l'équation $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

[001370]

Exercice 3469

Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau principal. [001372]

Exercice 3470

Soit A un anneau fini commutatif intègre (i.e. $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$). Montrer que c'est un corps, i.e. que tout élément non nul est inversible. [001373]

Exercice 3471

Soit A un anneau, on dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $(1 - x)$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

[001374]

Exercice 3472 Anneau de Boole

Soit E un ensemble fini et $A = \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

2. Soit I un idéal de A. Montrer que : $\begin{cases} \forall\, X \in I,\ \forall\, Y \subset X, \text{ on a } Y \in I \\ \forall\, X,Y \in I, \text{ on a } X \cup Y \in I. \end{cases}$
3. En déduire que $I = \mathscr{P}(E')$ avec $E' \subset E$.
4. Étudier la réciproque.
5. Si E est infini, montrer que $I = \{\text{parties finies de } E\}$ est un idéal qui n'est pas de la forme $\mathscr{P}(E')$.

[003005]

Exercice 3473 Idéaux triviaux

Soit A un anneau commutatif non nul dont les seuls idéaux sont $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps. [003006]

Exercice 3474 Idéaux premiers

Un idéal I d'un anneau A est dit premier si : $\forall\, x,y \in A,\ xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.

1. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?
2. Montrer que si A est commutatif non nul et si tous les idéaux de A sont premiers alors A est un corps.

Correction ▼ [003007]

Exercice 3475 Théorème de Gauss

Soit A un anneau commutatif et $a,b \in A$. On dit que : $\begin{cases} a \text{ divise } b \text{ si } b \in aA \\ a \text{ est premier à } b \text{ si } aA + bA = A. \end{cases}$

Montrer que si a est premier à b et a divise bc, alors a divise c. [003008]

Exercice 3476 Caractéristique

Soit A un anneau. On appelle *caractéristique de* A l'ordre de 1 dans le groupe additif $(A,+)$. On suppose A de caractéristique finie, n.

1. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ nx = 0$.
2. Si A est intègre, montrer que n est un nombre premier.
3. Si A est intègre et commutatif, montrer que $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.

[003009]

Exercice 3477 Anneau de caractéristique 2

Soit A un anneau non nul tel que : $\forall\, x \in A,\ x^2 = x$.

1. Exemple d'un tel anneau ?
2. Quels sont les éléments inversibles de A ?
3. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ x + x = 0$. En déduire que A est commutatif.
4. Pour $x,y \in A$ on pose : $x \leq y \iff \exists\, a \in A$ tel que $x = ay$. Montrer que c'est une relation d'ordre.

Correction ▼ [003010]

Exercice 3478 Eléments nilpotents

Soit A un anneau commutatif, et $a \in A$. On dit que a est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Exemple : Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
2. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents est un idéal de A.
3. Soit a nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible (remarquer que $1 = 1^n - a^n$).
4. Soient a nilpotent et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

[003011]

Exercice 3479 $1 - ab$ et $1 - ba$

Soit A un anneau et $a,b \in A$. Montrer que $1 - ab \in A^* \Leftrightarrow 1 - ba \in A^*$.

Correction ▼ [003012]

Exercice 3480 Radical d'un idéal

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.
On note $\sqrt{I} = \{x \in A \text{ tq } \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tq } x^n \in I\}$ (radical de I).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I+J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Exemple : $A = \mathbb{Z}$, $I = 3648\mathbb{Z}$. Trouver $\sqrt{I}$.

Correction ▼ [003013]

Exercice 3481 Produit de deux idéaux

Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.
On note $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ tel que $a_i \in I,\ b_i \in J\}$.

1. Montrer que IJ est un idéal de A.
2. Montrer que $I(J+K) = IJ + IK$.
3. On suppose $I + J = A$. Montrer que $IJ = I \cap J$.
4. Pour $A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $J = p\mathbb{Z}$, qu'est-ce que IJ ?

[003014]

Exercice 3482 Relation d'équivalence compatible avec les opérations d'anneau

Soit A un anneau commutatif.

1. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication dans A. On note I la classe de 0. Montrer que I est un idéal de A.
2. Réciproquement, soit J un idéal de A. On pose $x \sim y \iff x - y \in J$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec $+$ et $\times$.

[003015]

Exercice 3483 Étude de l'anneau $\mathbb{Z}^2$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose
$$A_d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } x \equiv y (\operatorname{mod} d)\}$$
($x = y$ pour $d = 0$). Montrer que A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que l'on obtient ainsi tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$.
3. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$. On note : $\begin{cases} I_1 = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } (x,0) \in I\} \\ I_2 = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tq } (0,y) \in I\}. \end{cases}$
Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathbb{Z}$, et que $I = I_1 \times I_2$.
4. En déduire que I est un idéal principal.

[003016]

Exercice 3484 Idéaux de K^E

Soit K un corps, E un ensemble fini, et $A = K^E$. Pour $e \in E$, on pose :
$$I_e = \{f \in A \text{ tq } f(e) = 0\}, \qquad \chi_e \ : \ x \mapsto \begin{cases} 1 & six = e \\ 0 & \text{si } x \neq e. \end{cases}$$

1. Montrer que I_e est un idéal principal de A.
2. Soit $f \in A$. Vérifier que $f = \sum_{e \in E} f(e)\chi_e$.
3. Soit I un idéal quelconque de A, et $F = \{e \in E \text{ tq } \exists\, f \in I \text{ tq } f(e) \neq 0\}$.
Montrer que I est un idéal principal engendré par $\sum_{e \in F} \chi_e$.

[003017]

Exercice 3485 Fonctions trigonométriques

On pose
$A = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de la forme } f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Soit $f \in A$. Montrer que si $f = 0$, alors les coefficients a_k sont tous nuls $\left(\text{calculer } \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)$.
3. En déduire que A est intègre.

[003018]

Exercice 3486 Suites croissantes d'idéaux

Soit A un anneau commutatif et (I_n) une suite croissante d'idéaux de A. On pose $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

1. Montrer que I est un idéal de A.
2. On suppose que A est principal. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I = I_{n_0}$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas principal.

[003019]

Exercice 3487 Endomorphismes d'un groupe commutatif

Soit G un groupe additif et $A = \{\text{morphismes } f : G \to G\}$.

1. Montrer que $(A, +, \circ)$ est un anneau.
2. On prend $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Montrer que A est l'ensemble des applications $G \to G, x \mapsto kx$ avec $k \in G$, et que A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[003020]

Exercice 3488 Entiers 2-adiques

Soit $A = \{m/n \in \mathbb{Q} \text{ tel que } n \text{ est impair}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Chercher les éléments inversibles dans A.
3. Montrer que les idéaux de A sont tous principaux engendrés par les nombres de la forme 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

[003021]

Exercice 3489 Morphismes $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

Chercher les morphismes d'anneaux : $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [003022]

Exercice 3490 Suites stationnaires

Soit $A = \{\text{suites stationnaires d'entiers relatifs}\}$ muni des opérations usuelles.

1. Montrer que A est un anneau.
2. Chercher les morphismes d'anneaux : $A \to \mathbb{Z}$.
3. Soit $I = \{\text{suites presque nulles}\}$. Montrer que c'est un idéal non principal.

Correction ▼ [003023]

Exercice 3491 Entiers de Gauss

Soit $A = \{a + bi \text{ tq } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(x^2 + 1)$. Quels sont les éléments inversibles ?
2. Soient $u, v \in A$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
3. Montrer que A est principal.

Correction ▼ [003024]

121 203.05 Idéal

Exercice 3492

1. $\mathscr{J} = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}^2$?
2. $\mathscr{J} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\right\}$ est-il un idéal de $\mathbb{R}[X]$?

[001368]

Exercice 3493

Soit $\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X] : P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

1. (a) Montrer que $\mathscr{J}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathscr{J}$ est engendré par les polynômes 2 et X.
2. En remarquant que $2 \in \mathscr{J}$, montrer que l'hypothèse "$\mathscr{J}$ est un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$" est absurde.

[001371]

Exercice 3494

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif, on dit que $I \subset A$ est un idéal de A si et seulement si : I est un sous-groupe de $(A,+)$ et de plus : $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$?
2. On appelle radical de I, l'ensemble :
$$\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$
   Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de Acontenant I. Étudier le cas $A = Z$.
3. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A tels que $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.En déduire $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
4. Montrer que si I et Jsont deux idéaux de A, $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

[001375]

Exercice 3495

A est nommé idéal de A lorsque pour tout $x \in J$ et tout $a \in A$ le produit ax appartient à J.

1. Trouver tous les idéaux d'un corps $\mathbb{K}$.
2. Montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{Z}$.
3. On note D l'ensemble des rationnels x tels que il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x10^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que tout idéal de D est de la forme aD où $a \in D$.

[001376]

Exercice 3496

Montrer qu'un idéal de $K[X]$ est distinct de $K[X]$ si et seulement s'il ne contient aucun polynôme constant non nul. [001571]

Exercice 3497

Soient les polynômes $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer pgcd(P,Q) puis la somme et l'intersection des idéaux principaux (P) et (Q) de $\mathbb{R}[X]$. [001572]

Exercice 3498

Les parties $\mathscr{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ et $\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ sont-elles des idéaux de $\mathbb{R}[X]$? Dans l'affirmative, en donner un générateur. [001573]

---

122 203.06 Algèbre, corps

Exercice 3499

Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$. [001377]

Exercice 3500

Soit σ un automorphisme de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $x \geq 0$ alors $\sigma(x) \geq 0$.
2. Montrer que σ est croissante.
3. Déterminer σ.

[001378]

Exercice 3501

Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$.

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
2. Montrer que, pour les lois usuelles, C est une $\mathbb{R}$-algèbre.

[001379]

Exercice 3502

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit

$$\mathbb{R}[u] := \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

1. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathscr{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.
2. Montrer que cette algèbre est de dimension finie et discuter de sa dimension en fonction de u.
3. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ?

[001380]

Exercice 3503

Soit $M = \{aI_2 + bJ \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : a,b \in \mathbb{R}\}$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et montrer que si $a,b \in \mathbb{R}$ et $aI_2 + bJ = O$ alors $a = b = 0$.
2. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, M est un anneau. Cet anneau est-il commutatif, intègre ?
3. M est-il un corps, une $\mathbb{R}$-algèbre ?

[001381]

Exercice 3504

Montrer que l'ensemble S des suites réelles convergentes est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'application $S \to \mathbb{R}, u \mapsto \lim u$ est-elle un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres ? L'anneau S est-il intègre ? [001382]

Exercice 3505

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit

$$\mathbb{R}[u] = \{a\mathrm{Id}_E + bu : a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathscr{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ? [001383]

Exercice 3506

Un automorphisme d'un corps $\mathbb{K}$ est une application bijective φ de $\mathbb{K}$ dans lui-même telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $a,b \in \mathbb{K}$, on ait $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

1. Soit φ un automorphisme de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \mapsto \varphi(x)$ est croissante. En déduire que l'identité est le seul automorphisme de $\mathbb{R}$.
2. Soit ψ un automorphisme *continu* de $\mathbb{C}$. Montrer $\psi(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire tous les automorphismes *continus* de $\mathbb{C}$.

[001384]

Exercice 3507 Anneau intègre fini

Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1. Montrer que si A est fini, alors c'est un corps.
2. Montrer que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, alors c'est un corps (considérer les idéaux $I_n = x^n A$ pour $x \in A$ non nul).

[003025]

Exercice 3508 Corps $\mathbb{F}_4$

Chercher les structures de corps à 4 éléments.
Correction ▼ [003026]

Exercice 3509 Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit K un corps fini. Pour $x \in K^*$ on note $O(x)$ l'ordre multiplicatif de x et n le ppcm des ordres des éléments de K^*.

1. Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a',b' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a'|a$, $b'|b$, $a' \wedge b' = 1$ et $a'b' = a \vee b$.
2. Soient $x,y \in K^*$ d'ordres a et b. Montrer qu'il existe u,v entiers tels que $O(x^u y^v) = a \vee b$. En déduire qu'il existe $z \in K^*$ d'ordre n.

3. Montrer que $n = \mathrm{Card}(K^*)$ (ceci prouve que K^* est cyclique).

[003027]

Exercice 3510 Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit K un corps fini de cardinal n. Si $a, b \in \mathbb{N}$ sont tels que $ab = n-1$, on considère l'application $f_a : K^* \to K^*, x \mapsto x^a$ (remarquer que f_a est un morphisme de groupe). On note $N_a = \mathrm{Card}(\mathrm{Ker} f_a)$.

1. Expliquer pourquoi $N_a \leq a$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f_a) \subset \mathrm{Ker} f_b$. En déduire que $N_a = a$ et $N_b = b$.
3. Soit φ l'indicateur d'Euler. Montrer par récurrence sur a, diviseur de $n-1$, que le nombre d'éléments de K^* d'ordre a est égal à $\varphi(a)$ (ceci prouve que K^* est cyclique).

[003028]

Exercice 3511 Théorème de Wedderburn

On dit que K est un corps gauche si $(K, +, \times)$ est un anneau et si $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe (non nécessairement commutatif). On vérifiera rapidement que la théorie des espaces vectoriels est inchangée si on remplace le corps de base par un corps gauche. L'objet de l'exercice est de démontrer le théorème de Wedderburn : *tout corps gauche fini est commutatif.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des racines n-èmes primitives de l'unité dans (x^2+1). On pose $\Phi_1(X) = X - 1$ et $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathscr{P}_n}(X - \zeta)$. Φ_n est appelé *le n-ème polynôme cyclotomique* (son degré est $\phi(n)$ où ϕ est l'indicateur d'Euler).

1. Démontrer : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$. En déduire, par récurrence, que $\Phi_n(X)$ a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Calculer explicitement $\Phi_n(X)$ pour $n \leq 16$.
3. Démontrer que, pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{\alpha-1}}$.
4. Calculer le terme constant de chaque Φ_n.
5. Montrer que, si $d < n$ et d divise n, alors $X^d - 1$ divise $X^n - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$, puis que $\Phi_n(X)$ divise $X^n - 1$ et $\frac{X^n-1}{X^d-1}$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
On considère K un corps gauche fini et $Z(K)$ son centre, de cardinal q.
6. Montrer que $Z(K)$ est un corps commutatif.
7. Montrer que K est un $Z(K)$-espace vectoriel de dimension finie, notée n. Donner alors le cardinal de K en fonction de q et n.
8. Soit $a \in K \setminus \{0\}$. On note $C_a = \{x \in K \,|\, ax = xa\}$.
Montrer que C_a est un corps gauche, puis que c'est un $Z(K)$-espace vectoriel de dimension finie d divisant n (on montrera pour cela que K est un C_a-espace vectoriel et l'on étudiera sa dimension).
9. On fait opérer le groupe multiplicatif K^* sur lui-même par automorphismes intérieurs.
En considérant les orbites selon cette opération montrer que l'on a :
$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{q^n - 1}{q^{d_i} - 1} \text{ avec, pour tout } i,\ d_i | n.$$
10. En déduire que $\Phi_n(q)$ divise $q - 1$.
11. En étudiant $|\Phi_n(q)|$ montrer que $n = 1$.

[003029]

Exercice 3512 Éléments algébriques

Soient $K, \mathbb{L}$ deux corps avec $K \subset \mathbb{L}$.
Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur K s'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Montrer que α est algébrique sur K si et seulement si $K[\alpha]$ est un K-ev de dimension finie.
2. On suppose que α et β sont algébriques sur K. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur K (étudier $K[\alpha, \beta]$).

[003324]

Exercice 3513 Corps emboîtés

Soient $H \subset K \subset L$ trois sous-corps de (x^2+1).

1. Montrer que K et L sont des H-ev et L est un K-ev.
2. Montrer que L est de dimension finie sur H si et seulement si K est de dimension finie sur H et L est de dimension finie sur K.
3. Application : Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$, la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans (x^2+1), est un corps algébriquement clos (si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, considérer le sous-corps de (x^2+1) engendré par les coefficients de P).

[003325]

Exercice 3514 Surcorps de $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie.

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.
2. Si $\dim \mathbb{A} > 1$ montrer que tout élément de $\mathbb{A}$ est algébrique de degré 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à (x^2+1).

[003326]

Exercice 3515 Sous algèbres

Soit E un ev de dimension finie et $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que si $f \in \mathscr{A}$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{A}$.
On pourra étudier l'application $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}, g \mapsto f \circ g$. [003352]

---

123 203.07 Groupe de permutation

Exercice 3516

1. Déterminer $\text{card}(S_3)$ et écrire tous les éléments de S_3, puis écrire la table de S_3 et en déduire tous les sous-groupes de S_3.
2. On considère T un triangle équilatéral du plan, de sommets A, B, C.
   (a) Montrer que les isométries du plan qui préservent T forment un groupe pour la loi $\circ$, que l'on note G.
   (b) Montrer qu'un élément de G induit une permutation de l'ensemble $\{A, B, C\}$. On construit ainsi une application ϕ de G dans S_3.
   (c) Montrer que ϕ est un isomorphisme.

[001402]

Exercice 3517

On considère le groupe symétrique S_n.

1. Déterminer $\text{card}(S_n)$.
2. Calculer $(34)(45)(23)(12)(56)(23)(45)(34)(23)$.
3. Rappel : la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur k, que l'on note $(a_1\ a_2 \dots a_k)$.
   Si $\tau \in S_n$, montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \dots \tau(a_k))$.
4. Rappel : toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints, et cette décomposition est unique à l'ordre près.
   Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
5. Rappel : il existe un unique morphisme de S_n dans $(\{-1, 1\}, \times)$ non trivial, appelé signature, et noté ε. Une manière de calculer $\varepsilon(\tau)$ (où $\tau \in S_n$) consiste à décomposer τ en produit de p transpositions (ie cycles de longueur 2) : alors $\varepsilon(\tau) = (-1)^p$.
   Montrer que la signature d'un cycle de longueur k vaut $(-1)^{k-1}$. En déduire comment se calcule la signature d'une permutation à partir de sa décomposition en produit de cycles disjoints.

[001403]

Exercice 3518

Comment passer de 1234 à 2314 en échangeant seulement deux chiffres à chaque étape ? Y a-t-il plusieurs façons d'y parvenir ? Même question pour 1234 et 4312.
Peut-on obtenir n'importe quelle permutation des chiffres 1234 par ce procédé ? [001404]

Exercice 3519

Représenter graphiquement les permutations suivantes. Les décomposer en produit de cycles à supports disjoints, puis en produits de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1425376 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2471635 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3261547 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7146253 \end{pmatrix}$$

Calculer la signature des permutations ci-dessus. Calculer le produit $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ et sa signature. Comparer ce résultat aux précédents.
[001405]

Exercice 3520

Soient a, b, c trois éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Calculer le produit $(ab)(bc)(ab)$.

En déduire que $\mathscr{S}_n$ est engendré par les permutations $\{(1,i)\}_{2\leq,i\leq n}$, c'est à dire que toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de cette forme.
Montrer que $\mathscr{S}_n$ est engendré par (12) et $(123...n)$. [001406]

Exercice 3521

Décrire tous les morphismes de groupe de $(\mathscr{S}_n,\circ) \to (\{+1,-1\},\cdot)$, c'est les applications $\phi\ :\mathscr{S}_n \to \{+1,-1\}$ satisfaisant :

$$\forall(\sigma,\sigma')\in\mathscr{S}_n^2,\quad \phi(\sigma\sigma')=\phi(\sigma)\phi(\sigma')$$

Indication : Commencer par montrer que toutes les transpositions ont même image. [001407]

Exercice 3522

Dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $(e_1,...,e_n)$ la base canonique. A une permutation $\sigma\in\mathscr{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$u_\sigma\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Soit $\tau=(ij)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau)=-1$.
2. Montrer que $\forall\sigma,\sigma'\in\mathscr{S}_n,\ u_\sigma\circ u_{\sigma'}=u_{\sigma\circ\sigma'}$.
3. En déduire que $\forall\sigma\in\mathscr{S}_n,\ \det u_\sigma=\varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

[001408]

Exercice 3523

On note $\mathscr{S}_n$ le groupe symétrique des permutations sur n éléments.
Soit ρ un *morphisme de groupes* de $(\mathscr{S}_n,\circ)$ dans $(\{-1,1\},\cdot)$, c'est à dire une application de $\mathscr{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ satisfaisant

$$\forall(\sigma,\tau)\in\mathscr{S}_n\ \rho(\sigma\tau)=\rho(\sigma)\rho(\tau)$$

1. Calculer $\rho(\mathrm{id})$. Pour tout cycle γ de longueur p, calculer γ^p. En déduire que lorsque p est impair, $\rho(\gamma)=1$.
2. On suppose que pour toute transposition τ, $\rho(\tau)=1$. Montrer que $\forall\sigma\in\mathscr{S}_n,\ \rho(\sigma)=1$
3. On suppose maintenant qu'il existe une transposition $\tau_0=(a,b)$ pour laquelle $\rho(\tau_0)=-1$.
   (a) Pour un élément $c\in\{1,\dots,n\}\setminus\{a,b\}$, calculer $(a,b)(a,c)$. En déduire que $\rho(a,c)=-1$.
   (b) Pour deux éléments distincts c et d de $\{1,\dots,n\}$, calculer $(a,c)(a,d)(a,c)$. En déduire que $\rho(c,d)=-1$.
   (c) En déduire que pour toute transposition τ, $\rho(\tau)=-1$ puis montrer que pour toute permutation $\sigma\in\mathscr{S}_n$, $\rho(\sigma)$ est la signature de σ.
4. Quels sont tous les morphismes de groupes de $(\mathscr{S}_n,\circ)$ dans $(\{-1,1\},\cdot)$?
5. On considère l'application φ suivante :

$$\varphi:\ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_n & \to & \{-1,1\} \\ \sigma & \mapsto & \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \end{array}$$

   Montrer que $\forall(\sigma,\tau)\in\mathscr{S}_n,\ \varphi(\sigma\tau)=\varphi(\sigma)\varphi(\tau)$.
   En déduire que

$$\forall\sigma\in\mathscr{S}_n,\ \varepsilon(\sigma)=\prod_{i=1}^n\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j},$$

   où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

[001409]

Exercice 3524

Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (H est donc d'indice deux dans G).

1. Montrer que si $g\in G$ et $g\notin H$, on a $H\cap gH=\emptyset$ puis que $G=H\cup gH$.
2. En déduire que pour tout $g\in G, g^2\in H$.
3. On suppose désormais $G=\mathscr{A}_4$ le groupe des permutations paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Soit $\sigma=(a,b,c)$ un 3-cycle. Montrer que σ peut s'écrire comme le carré d'une permutation paire c'est à dire qu'il existe $\varphi\in\mathscr{A}_4$ telle que $\varphi^2=\sigma$. En déduire que $\mathscr{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

[001410]

Exercice 3525

Déterminer tous les éléments $\sigma \in S_n$ tels que $\sigma^2 = \sigma$. [001411]

Exercice 3526

1. Rappeler $|S_3|$. Montrer que S_3 ne contient pas d'élément d'ordre 6.
2. Montrer que S_3 contient un unique sous-groupe d'ordre 3. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 2 de S_3.
3. Déduire de ce qui précède tous les sous-groupes de S_3.

Correction ▼ [001412]

Exercice 3527 examen juin 1999

Soit $GL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles 2×2 à cœfficients réels. $GL_2(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une structure de groupe par la multiplication usuelle des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B appartiennent à $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Quels sont les ordres de A et B ?
3. Montrer que $AB = -BA$ et en déduire que :
   (a) $G = \{I, A, B, AB, -I, -A, -B, -AB\}$ est un groupe (pour la loi multiplicative des matrices ; I esl la matrice identité) ;
   (b) G est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{A, B\}$.
4. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
   (a) Montrer que G est inclus dans $O_2(\mathbb{R})$ (le groupe orthogonal).
   (b) Déterminer l'intersection de G et de $SO_2(\mathbb{R})$ (le groupe spécial orthogonal).
   (c) Déterminer la nature géométrique des 8 éléments de G.

[001413]

Exercice 3528 examen juin 1999

I

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On définit le centre $\mathscr{Z}(G)$ de G par :

$$\mathscr{Z}(G) = \{x \in G \,/\, \forall a \in G \;\; ax = xa\}.$$

Montrer que $\mathscr{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.
Que peut-on dire de $\mathscr{Z}(G)$ si G est abélien ?

II

On désigne par $\mathscr{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n (rappel : c'est le sous-groupe de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ formé des permutations de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ de signature $+1$.)
On se propose de déterminer le centre de $\mathscr{A}_n$ pour $n \geq 3$.

1. Donner la liste des éléments de $\mathscr{A}_3$ et de $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_3)$.
2. On suppose désormais $n \geq 4$. Dans cette question on fixe i, j, k trois éléments distincts de E_n.
   (a) Vérifier que le 3-cycle (i, j, k) est dans $\mathscr{A}_n$.
   (b) Soit $s \in \mathscr{S}_n$, montrer que $s \circ (i, j, k) = (s(i), s(j), s(k)) \circ s$.
   (c) En déduire que si $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$ alors l'image de $\{i, j, k\}$ par s est $\{i, j, k\}$.
3. Pour $n = 4$, on note $E_4 = \{i, j, k, \ell\}$. Si $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_4)$ montrer que $s(\ell) = \ell$. En déduire $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_4) = \{\mathrm{id}\}$.
4. Pour $n \geq 5$, soit $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$, soit i, j, k, ℓ, m cinq éléments distincts de E_n. En considérant les ensembles $\{i, j, k\}$ et $\{i, \ell, m\}$ montrer que $s = \mathrm{id}$ et déterminer $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$

[001414]

Exercice 3529

Quel est l'ordre maximal d'un élément de S_4? De S_5? De A_5? [001415]

Exercice 3530

On désigne par K le sous-ensemble $\{id,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ de S_4.

1. Montrer que K est un sous-groupe distingué de S_4 et de A_4.
2. Pour quelle raison K est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Calculer le quotient A_4/K.
3. Montrer que le quotient S_4/K est isomorphe à S_3.
4. Donner un exemple de sous groupe distingué de K et non de S_4. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

[001416]

Exercice 3531

Calculer $Z(S_n)$ suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}$. [001417]

Exercice 3532

Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de $\mathscr{S}_{10}$:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&7&1&4&2&6&9&8&5&10\end{pmatrix},$$

$$\varphi=(10,3,4,1)\,(8,7)\,(4,7)\,(5,6)\,(2,6)\,(2,9)\,.$$

Calculer σ^{1998} et φ^{1998}.

Correction ▼ [001418]

Exercice 3533

$\mathscr{A}_4$ désigne le groupe des permutations paires sur l'ensemble $E=\{1,2,3,4\}$.

1. Quels sont les ordres des éléments de $\mathscr{A}_4$? En déduire la liste de ces éléments sous forme décomposée en produit de cycles à supports disjoints.
2. Montrer que les permutations $s=(1\ 2)(3\ 4)$ et $r=(1\ 2\ 3)$ engendrent $\mathscr{A}_4$.
3. Montrer que $\mathscr{A}_4$ admet un unique sous-groupe H d'ordre 4 (on examinera d'abord les ordres des éléments d'un tel sous-groupe) et que ce sous-groupe est un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_4$.

[001419]

Exercice 3534

Le groupe $G=\mathscr{S}_3\times\mathscr{S}_3$ est-il abélien ? Déterminer tous les sous-groupes de G d'ordre 4. [001420]

Exercice 3535

Quel est le nombre de k-cycles dans $\mathscr{S}_k$ puis dans $\mathscr{S}_n$ où $k\leq n$? [001421]

Exercice 3536

Soit G un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.

1. Montrer que si G est d'ordre impair alors G ne contient aucune permutation impaire.
2. Montrer que si G contient au moins une permutation impaire, alors G contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

[001422]

Exercice 3537

Soient $a=(1,2)(3,4), b=(1,3)(2,4), c=(1,4)(2,3)\in\mathscr{A}_4$, $X=\{a,b,c\}$, $V=\{a,b,c,\mathrm{Id}\}$ et $\Phi:\mathscr{S}_4\to\mathscr{S}(X), g\in G\mapsto\Phi_g=\left[x\mapsto gxg^{-1}\right]$.

1. (a) Montrer que V est un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_4$ (on pourra étudier l'ordre des élements de $\mathscr{A}_4$).
   (b) Montrer que $< a >$ est un sous-groupe distingué de V et n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_4$.

2. Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.
3. (a) Calculer $\Phi(g)$ pour $g = (1,2)$ puis $g = (1,2,3)$.
   (b) En déduire que Φ est surjectif.
4. Montrer que $\mathscr{S}_4/V$ est isomorphe à $\mathscr{S}_3$.
5. Ecrire la décomposition de $\mathscr{A}_4$ suivant les classes modulo V.

[001423]

Exercice 3538

1. Déterminer le centre du groupe $\mathscr{S}_n$.
2. (a) Montrer qu'un groupe $G_1 \times G_2$ contient un sous-groupe distingué isomorphe à G_1.
   (b) Montrer que les groupes $\mathscr{S}_n$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathscr{A}_n$ ne sont pas isomorphes si $n \geq 3$.

[001424]

Exercice 3539

1. Montrer que dans $\mathscr{S}_n$ on a $f \circ (a,b) \circ f^{-1} = (f(a), f(b))$.
2. Montrer que les permutations $(1,...,n)$ et $(1,2)$ engendrent $\mathscr{S}_n$ (on rappelle que les transpositions engendrent $\mathscr{S}_n$).

[001425]

Exercice 3540

1. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_4$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_5$.
3. Montrer que $\mathscr{S}_5$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_6$.

Correction ▼ [001426]

Exercice 3541

Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de S_n (groupe symétrique) pour un certain n. [001427]

Exercice 3542 Générateurs de $\mathscr{S}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est engendré par les sous-ensembles suivants :

1. $A = \{(i, i+1) \text{ tq } 1 \leq i < n\}$.
2. $B = \{(1\ i) \text{ tq } 2 \leq i \leq n\}$.
3. $C = \{(1\ 2), (1\ 2\ \cdots\ n)\}$.

[003074]

Exercice 3543 Générateurs de $\mathscr{S}_n$

Montrer que toute permutation de $\mathscr{S}_n$ s'écrit de manière unique : $\sigma = c_2^{\alpha_2} \circ c_3^{\alpha_3} \circ \cdots \circ c_n^{\alpha_n}$ où $c_i = (1\ 2\ \cdots\ i)$ et $0 \leq \alpha_i < i$. [003075]

Exercice 3544 $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles

1. Calculer $(a\,b\,c) \circ (b\,c\,d)$.
2. Montrer que le sous-groupe alterné $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles ($n \geq 3$).

Correction ▼ [003076]

Exercice 3545 $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

1. Soit $i, j \in \{3, \ldots, n\}$,$i \neq j$.
   Décomposer en cycles à supports disjoints la permutation : $\sigma = (1\ i\ 2) \circ (1\ 2\ j) \circ (1\ i\ 2)$.
2. On note $\mathscr{H}$ le sous-groupe de $\mathscr{A}_n$ engendré par les 3-cycles $(1\ 2\ k)$, $\quad 3 \leq k \leq n$.
   (a) Montrer que : $\forall\, i, j \geq 3$, avec $i \neq j$, $\mathscr{H}$ contient $(1\ 2) \circ (i\ j)$ et $(i\ j) \circ (1\ 2)$.
   (b) Montrer que : $\forall\, j \geq 3$, $\mathscr{H}$ contient $(1\ 2) \circ (1\ j)$ et $(1\ 2) \circ (2\ j)$.

(c) Montrer que : $\forall\, i \neq j, \forall\, k \neq l, \quad (i\ j) \circ (k\ l) \in \mathscr{H}$.

(d) Montrer que $\mathscr{H} = \mathscr{A}_n$.

Correction ▼ [003077]

Exercice 3546 Signature en fonction du nombre d'orbites

Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. On note c le nombre de cycles à supports disjoints constituant σ, et f le nombre de points fixes.
Calculer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, c, et f.

Correction ▼ [003078]

Exercice 3547 Nombre de transposition pour engendrer un cycle

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle *orbite de* σ toute partie X de $\{1,\dots,n\}$ sur laquelle σ induit une permutation circulaire. (Les orbites sont les supports des cycles de σ, et les singletons constitués de points fixes)
On note $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

1. Montrer que si τ est une transposition, alors $N(\tau \circ \sigma) = N(\sigma) \pm 1$.
2. Application : Quel est le nombre minimal de transpositions nécéssaires pour obtenir un n-cycle ?

[003079]

Exercice 3548 Conjugaison

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathscr{S}_n$. On dit que σ et σ' sont conjuguées s'il existe $\rho \in \mathscr{S}_n$ tel que $\sigma' = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.

1. Montrer que tout conjugué d'un k-cycle est encore un k-cycle.
2. Montrer que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si les cycles à supports disjoints de σ et σ' ont deux à deux mêmes longueurs.

[003080]

Exercice 3549 Caractérisation de la signature

Soit E un ensemble fini et $f : \mathscr{S}_E \to (x^2+1)^*$ un morphisme de groupes.

1. Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?
2. Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f.
3. En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

[003081]

Exercice 3550 Calcul de signature

Soit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$
Calculer $\varepsilon(\sigma)$.

Correction ▼ [003082]

Exercice 3551 Centre de $\mathscr{S}_E$

Soit E un ensemble ayant au moins trois éléments.

1. Pour $a, b \in E$ distincts et $\sigma \in \mathscr{S}_E$, simplifier $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$.
2. Quelles sont les permutations σ qui commutent avec $(a\ b)$?
3. En déduire que le centre de $\mathscr{S}_E$ est réduit à $\{\mathrm{id}_E\}$.

[003083]

Exercice 3552 Commutant d'un n-cycle

Soit $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n) \in \mathscr{S}_n$. Trouver toutes les permutations $\rho \in \mathscr{S}_n$ commutant avec σ. (Reconnaître $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$)

Correction ▼ [003084]

Exercice 3553 Commutant d'un produit de 5-cycles

Dans $\mathscr{S}_{10}$, quelles sont les permutations qui commutent avec $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$?

Correction ▼ [003085]

Exercice 3554 Puissances d'un k-cycle

Soit σ un k-cycle de $\mathscr{S}_n$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur $\frac{k}{p}$.
2. Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).
3. Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

[003086]

Exercice 3555 Ordre maximal

Trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathscr{S}_{10}$.

Correction ▼ [003087]

Exercice 3556 Sous-groupe d'indice 2 dans $\mathscr{S}_n$

Soit H un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ d'ordre $\frac{n!}{2}$. On note $K = \mathscr{S}_n \setminus H$.

1. Pour $\sigma \in H$, montrer que $\sigma H = H$ et $\sigma K = K$.
2. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer les ensembles σH, σK, $H\sigma$, $K\sigma$ suivant que $\sigma \in H$ ou $\sigma \in K$.
3. En déduire que si deux permutations sont conjuguées, alors elles sont toutes deux dans H ou toutes deux dans K.
4. Montrer enfin que $H = \mathscr{A}_n$.

[003088]

Exercice 3557 Dénombrement

Combien y a-t-il de permutations de $\mathscr{S}_{26}$ comportant trois points fixes, deux 3-cycles, un 5-cycle, et deux 6-cycles ?

Correction ▼ [003089]

Exercice 3558 **IT

Soit σ l'élément de S_{12} : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.
3. Déterminer les orbites de σ.
4. Déterminer σ^{2005}.

Correction ▼ [005353]

Exercice 3559 ***IT

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$,...,$\tau_{1,n}$.

Correction ▼ [005354]

Exercice 3560 ***IT

Démontrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3 (pour $n \geq 3$).

Correction ▼ [005355]

Exercice 3561 ***I

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$ et le cycle $(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$.

Correction ▼ [005356]

Exercice 3562 ***I

Soit $(G, \times)$ un groupe. Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(S(G), \circ)$ et que, en particulier, tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (théorème de CAYLEY). (Indication : montrer que pour chaque x de G, l'application $y \mapsto xy$ est une permutation de G.)

Correction ▼ [005357]

Exercice 3563 ***

Soit σ une permutation de $\{1,\dots,n\}$ et k le nombre d'orbites de σ. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Correction ▼ [005358]

Exercice 3564 ***I

σ étant une permutation de $\{1,...,n\}$ donnée, on définit la matrice notée P_σ, carrée d'ordre n dont le terme ligne i colonne j est $\delta_{i,\sigma(j)}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbôle de KRONECKER. On note G l'ensemble des P_σ où σ décrit S_n.

1. (a) σ et σ' étant deux éléments de S_n, calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
   (b) En déduire que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorphe à $(S_n,\circ)$ (les matrices P_σ sont appelées « matrices de permutation »).
2. (Une utilisation des P_σ) A étant une matrice carrée donnée, calculer AP_σ et $P_\sigma A$. Que constate-t-on ?

Correction ▼ [005359]

Exercice 3565 ***I

A_1, A_2,...,A_p sont p matrices carrées d'ordre n, deux à deux distinctes et inversibles. On suppose que $\{A_1,...,A_p\}$ est stable pour $\times$. Montrer que $\{A_1,...,A_p\}$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Correction ▼ [005360]

Exercice 3566 ***

Dans $E=\mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan H d'équation $x_1+...+x_n=0$ dans la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Pour $\sigma\in S_n$ donnée, on considère l'endomorphisme f_σ de E défini par : $\forall i\in E,\ f_\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$.
On pose alors $p=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est une projection dont on déterminera l'image et la direction.

Correction ▼ [005361]

124 203.99 Autre

Exercice 3567 $x+y-xy$

1. Sur $E=[0,1]$, on définit l'opération : $x*y=x+y-xy$. Vérifier que $*$ est interne, et étudier ses propriétés (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables, éléments réguliers).
2. Mêmes questions avec $E=]-\infty,1[$.

Correction ▼ [002960]

Exercice 3568 $x\mapsto axa$ surjective

Soit $*$ une opération associative sur E, et $a\in E$ tel que l'application$E\to E, x\mapsto a*x*a$ soit surjective.
Montrer qu'il existe un élément neutre, et que a est symétrisable.

Correction ▼ [002961]

Exercice 3569 Opération induite sur les parties

Soit $*$ une opération sur E. Pour $A,B\subset E$, on pose $A*B=\{a*b \text{ tq } a\in A,\ b\in B\}$.

1. Étudier les propriétés de $*$ sur $\mathscr{P}(E)$ en fonction de celles de $*$ sur E (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables).
2. Est-ce que $*$ est distributive par rapport à $\cup$?

Correction ▼ [002962]

Exercice 3570 Loi sur $\mathbb{Z}^2$

On définit l'opération dans $\mathbb{Z}^2$: $(a,b)*(a',b')=(aa',ab'+b)$.

1. Étudier les propriétés de cette opération.
2. Pour $z\in\mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}(z)=az+b$.
   Montrer que $\phi:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, (a,b)\mapsto f_{a,b}$ est un morphisme pour $*$ et $\circ$.
3. Est-ce un isomorphisme ?

Correction ▼ [002963]

Exercice 3571 Composition de relations

Soit E un ensemble, et $\mathscr{F}$ l'ensemble des relations binaires sur E. Pour $R, S \in \mathscr{F}$, on définit la relation $R * S$ par :

$$x(R*S)y \iff \exists\, z \in E \text{ tq } xRz \text{ et } zSy.$$

A toute fonction $f : E \to E$, on associe la relation : $yR_f x \iff y = f(x)$.

1. Montrer que $*$ est associative, mais non commutative en général.
2. Simplifier $R_f * R_g$.
3. Est-ce que $*$ admet un élément neutre ?

[002964]

Exercice 3572 Groupe sans sous-groupe non trivial

Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène, fini, et que $\operatorname{Card} G$ est un nombre premier. [002986]

Exercice 3573 Groupe diédral

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On note $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n}$ et :

$$f_k : (x^2+1)$$

$\to (x^2+1)$
, z $\mapsto \omega^k z$ $\quad g_k : (x^2+1)$
$\to (x^2+1)$
, z $\mapsto \omega^k \overline{z}$ $\quad (0 \leq k < n)$

Montrer que $G = \{f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{n-1}\}$ est un groupe pour la composition des applications.

Soit $a > 0$ et A_k le point du plan d'affixe $a\omega^k$. Montrer que G représente le groupe des isométries du polygone $A_0 \dots A_{n-1}$.

G est-il cyclique ?

Montrer que G est engendré par les applications f_1 et g_0 et que l'on a : $f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}$.

Soit H un groupe quelconque engendré par deux éléments ρ et σ tels que $\begin{cases} \rho \text{ est d'ordre } n \\ \sigma \text{ est d'ordre } 2 \\ \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}. \end{cases}$

Montrer que G et H sont isomorphes.

[002987]

Exercice 3574 Groupe d'ordre pair

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.

Indication ▼ [002988]

Exercice 3575 Groupe d'ordre impair

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que : $\forall\, x \in G,\ \exists!\, y \in G$ tq $x = y^2$. [002989]

Exercice 3576 Groupe d'exposant 2

Soit G un groupe fini tel que : $\forall\, x \in G,\ x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).
2. Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$.
   Montrer que $\operatorname{Card} K = 2 \operatorname{Card} H$.
3. En déduire que $\operatorname{Card} G$ est une puissance de 2.

[002990]

Exercice 3577 Groupes d'ordre 6

Déterminer tous les groupes finis de cardinal 6 (on admettra que dans un tel groupe, il existe un élément a d'ordre 2, et un élément b d'ordre 3). [002991]

Exercice 3578 Groupe d'homographies

Soit $E=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, et $f:E\to E, x\mapsto\frac{1}{x}$, $\qquad g:E\to E, x\mapsto 1-x$

Vérifier que f et g sont des bijections et déterminer le groupe engendré par f et g pour la loi $\circ$. [002992]

Exercice 3579 Groupes de similitudes

Pour $\alpha\in(x^2+1)^*$ et $\beta\in(x^2+1)$, on note $f_{\alpha,\beta}:(x^2+1)$

$\to(x^2+1)$

, z $\mapsto\alpha z+\beta$

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il commutatif ?
2. A quelle condition sur α,β, $f_{\alpha,\beta}$ est-elle d'ordre fini ?

[002993]

Exercice 3580 Théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par :

$$\forall\, x,y\in G,\ x\sim y \iff \exists\, h\in H \text{ tel que } x=hy.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de e ?
2. Soit $a\in G$. Montrer que $\dot{a}$ est équipotent à H.
3. En déduire que $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G$ (*Théorème de Lagrange*).

[002994]

Exercice 3581 Relation d'équivalence avec deux sous-groupes

Soient H,K deux sous-groupes d'un groupe G. Pour $x,y\in G$, on pose :

$$x\sim y \iff \exists\, h\in H,\ \exists\, k\in K \text{ tq } y=hxk.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Pour $x\in G$, soit $G_x=\{(h,k)\in H\times K \text{ tq } hxk^{-1}=x\}$. Montrer que G_x est un sous-groupe de $H\times K$.
3. Si H et K sont finis, montrer que chaque classe d'équivalence est finie de cardinal divisant $\operatorname{Card}(H)\operatorname{Card}(K)$.

[002995]

Exercice 3582 Groupe d'ordre *ab*

Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n=ab$ avec $a\wedge b=1$.

On pose $A=\{x\in G \text{ tq } x^a=e\}$ et $B=\{x\in G \text{ tq } x^b=e\}$.

1. Montrer que A et B sont des sous-groupes de G.
2. Montrer que $A\cap B=\{e\}$ et $AB=G$.

Correction ▼ [002996]

Exercice 3583 Sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}$

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments. Montrer que H est monogène.
2. Trouver un sous-groupe non trivial de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas engendré par une famille finie.

[002997]

Exercice 3584 $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ ne sont pas isomorphes

Montrer que les groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ ne sont pas isomorphes (penser à $\sqrt{2}$). [002998]

Exercice 3585 Sous-groupe infini de $(x^2+1)^*$

Soit p un entier naturel premier. On appelle G l'ensemble des $z\in(x^2+1)$ pour lesquels existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $z^{p^n}=1$.

1. Montrer que G est un groupe multiplicatif infini où tout élément est d'ordre fini.
2. Montrer que tout sous-groupe H de G, distinct de G, est cyclique (on pourra considérer un élément z_0 de $G\setminus H$ et montrer que l'ordre des éléments de H n'excède pas celui de z_0).

[002999]

Exercice 3586 Théorème du rang

Soit $f:G\to G'$ un morphisme de groupes où G est un groupe fini.

Montrer que $\operatorname{Card}(\operatorname{Ker} f)\times\operatorname{Card}(\operatorname{Im} f)=\operatorname{Card}(G)$. [003000]

Exercice 3587 Centre d'un p-groupe

Soit G un groupe fini de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k\in\mathbb{N}^*$. On note Z le centre de G.

1. En considérant l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs montrer que $\operatorname{Card}(Z)\equiv 0 \bmod p$.
2. En déduire que tout groupe d'ordre p^2, p premier, est commutatif et est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ soit à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

[003001]

Exercice 3588 Sous groupes et générateurs de $\mathbb{Z}^2$

On considère le groupe $G=\mathbb{Z}^2$. Une *base* de G est une famille $(\alpha=(a,a'),\beta=(b,b'))$ engendrant G.

1. (a) Montrer que (α,β) est une base de G si et seulement si $\det(\alpha,\beta)=\pm1$.
   (b) Montrer que $\alpha=(a,a')$ appartient à une base de G si et seulement si $a\wedge a'=1$.
2. Soit H un sous-groupe non trivial de G. On note $H'=\{ux+vy \text{ tq } u\in\mathbb{Z},\ v\in\mathbb{Z}, (x,y)\in H\}$, n le plus petit élément de H' strictement positif et $u\in\mathbb{Z},\ v\in\mathbb{Z},\ (x,y)\in H$ tels que $ux+vy=n$.
   (a) Montrer que $u\wedge v=1$ et que x et y sont divisibles par n.
   (b) On pose $\alpha=(x/n,y/n)$ et $\beta=(-v,u)$. Montrer que (α,β) est une base de G et qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $(n\alpha,np\beta)$ engendre H.

[003002]

Exercice 3589 Partie génératrice d'un groupe fini

Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer qu'il existe une partie génératrice de G de cardinal inférieur ou égal à $\log_2(n)$.

Correction ▼ [003003]

Exercice 3590 Groupe fini ?

Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Correction ▼ [003004]

125 204.01 Produit scalaire, norme

Exercice 3591

A deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P,Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire. [001450]

Exercice 3592

Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

[001451]

Exercice 3593

Vérifier que l'application $\phi\ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique qui lui est associée :

$$\phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = xx' + 2yy' + 2yz' + 2y'z + zz'.$$

S'agit-il d'un produit scalaire ?

Vérifier que l'application $q\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée :

$$q\big((x,y,z)\big) = x^2 + 3(x+y-z)^2 + (z-y)^2.$$

S'agit-il d'une norme euclidienne ?

[001452]

Exercice 3594

Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

[001453]

Exercice 3595

Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

[001454]

Exercice 3596

Soient $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ l'application $f(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$? [001455]

Exercice 3597

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+2y^2+3z^2 \leq 1$. Montrer l'inégalité : $(x+y+z)^2 \leq \frac{11}{6}$. (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.) [001456]

Exercice 3598

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$. [001457]

Exercice 3599

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, φ un produit scalaire sur E, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\psi(x,y) = a\varphi(x,x)+b\varphi(x,y)+c\varphi(y,y)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c) pour que ψ soit un produit scalaire sur E.

[001458]

Exercice 3600

1. Soient $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1,\dots,v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\|\sum_{i=1}^n v_i\|^2 \leq n\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.

[001459]

Exercice 3601

Montrer que

$$\forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etudier le cas d'égalité.

Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall (f,g) \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.

Soit f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité. [001460]

Exercice 3602

Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? [001461]

Exercice 3603

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique$\}$. Montrer que $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E. [001462]

Exercice 3604

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur E. [001463]

Exercice 3605

Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E qui vérifient : $\forall (x,y) \in E^2\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$. Montrer que f et g sont linéaires. [001464]

Exercice 3606

Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n$ des réels positifs.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k$. [001465]

Exercice 3607

Soit E un espace euclidien de dimension n et $x_1,\dots,x_p$ des vecteurs de E tels que si $i \neq j$ alors $\langle x_i|x_j\rangle < 0$. Montrer par récurrence sur n que $p \leq n+1$. [001466]

Exercice 3608

Soit E un espace euclidien, et $(e_1,...,e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormale (i.e. une base qui est aussi une famille orthonormale). (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.) [001467]

Exercice 3609

1. Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$ l'application :
$$(A,B) \to tr({}^tAB)$$
est un produit scalaire.
2. Soit N la norme associée, montrer que :
$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$
3. Montrer que :
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}N(A).$$

[001468]

Exercice 3610

Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle .$$

Montrer que f et g sont linéaires. [001469]

Exercice 3611

Soit E un espace euclidien, montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 + 1 \leq 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

[001470]

Exercice 3612

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f est linéaire. [001471]

Exercice 3613

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) \ ?$$

[001472]

Exercice 3614

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E, tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Montrer :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha (x|y).$$

[001473]

Exercice 3615

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\forall x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$, on ait $\langle f(x), f(y)\rangle = 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = k\|x\|$.

[001474]

Exercice 3616

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), et $p \geq 1$ un nombre réel. On définit l'application

$$N_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que N_p est une norme sur $\mathbb{R}_n$; on la note aussi $\|\cdot\|_p$. Dans les cas où $p \neq 1$, $p \neq 2$, on pourra s'aider de la relation suivante (admise) :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

2. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(x) = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$. Montrer que cette limite existe pour tout x, et que $N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Démontrer qu'il s'agit aussi d'une norme sur $\mathbb{R}^n$; on la note aussi $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dessiner les “boules” $\{x \in \mathbb{R}^2, \ N_p(x) \leq 1\}$ dans les cas où $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. À quoi ressemblent les cas des valeurs intermédiaires ?

[002426]

Exercice 3617

IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. On suppose que la norme de E vérifie la relation
$$\forall x,y \in E, \qquad 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) = \|x+y\|^2+\|x-y\|^2. \tag{2}$$
On définit $p : E\times E \to \mathbb{R}$ par
$$p(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right).$$
Montrer que p est un produit scalaire sur E.
2. Réciproquement, si E est un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle x,y\rangle$, montrer que la norme euclidienne (définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$) vérifie (5), et que $\langle x,y\rangle = p(x,y)$.
3. Dans le cas où $E=\mathbb{R}^n$, pour quelles valeurs de $q\geq 1$ les normes $\|\cdot\|_q$ vérifient-elles (5) ?

[002460]

Exercice 3618

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On définit $p : E\times E \to \mathbb{R}$ par
$$p(u,v) = \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\,dt.$$

1. Montrer que p est un produit scalaire sur E, et que $u\mapsto\sqrt{p(u,u)}$ est une norme sur E.
2. Soit $E_2\subset E$ le sous-espace des polynômes de degré ≤ 2, et $u\in E$ défini par $u(t)=t^4$. Déterminer la projection orthogonale u_0 de u sur E_2. En déduire la valeur de
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^{1}(t^4-at^2-bt-c)^2\,dt.$$

[002461]

Exercice 3619

1. Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, définir une distance d, telle que $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, on a $d(x,y)\leq 1$. Est-il possible de choisir d de sorte que, en plus, $x\mapsto\sqrt{d(x,0)}$ soit une norme ?
2. On considère l'ensemble S constitué des points de $\mathbb{R}^3$ de norme euclidienne égale à 1 ("sphère unité"). Si x, y, sont deux éléments de S, il existe au moins un cercle de rayon 1 tracé sur S et passant par ces points (dans quels cas en existe-t-il plusieurs ?) ; on note $d(x,y)$ la longueur du plus court arc de ce cercle joignant x et y ("distance géodésique" — comparer avec la distance sur la sphère terrestre). Montrer que d est une distance sur S ; pourquoi $x\mapsto\sqrt{d(x,0)}$ n'est-elle pas une norme ?

[002671]

Exercice 3620 Produits scalaires ?

Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :

1. $E=\mathbb{R}^2$, $(x,x')\mid(y,y') = axy+bxy'+cx'y+dx'y'$ (étudier $(1,t)\mid(1,t)$, $t\in\mathbb{R}$).
2. $E=\mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_n)\mid(y_1,\dots,y_n) = a\sum_i x_iy_i + b\sum_{i\neq j}x_iy_j$ $\left(\text{On montrera que } (\sum x_i)^2\leq n\sum x_i^2\right)$.
3. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $(P\mid Q)=\sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$.

Correction ▼ [003660]

Exercice 3621 Base de Schmidt

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire : $(P\mid Q)=\int_{t=-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Correction ▼ [003661]

Exercice 3622 Base de Schmidt

Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P\mid Q)=\sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$. Chercher une base orthonormée de E.

Correction ▼ [003662]

Exercice 3623 Inversion

Soit E un espace vectoriel euclidien. On pose pour $\vec{x} \neq \vec{0}$: $i(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Montrer que i est une involution et conserve les angles de vecteurs.
2. Vérifier que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x}) - i(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
3. Déterminer l'image par i :
   (a) d'un hyperplan affine ne passant pas par $\vec{0}$.
   (b) d'une sphère passant par $\vec{0}$.
   (c) d'une sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

Correction ▼ [003663]

Exercice 3624 Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien.

1. Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
2. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que $\|\vec{a}-\vec{c}\|\,\|\vec{b}-\vec{d}\| \leq \|\vec{a}-\vec{b}\|\,\|\vec{c}-\vec{d}\| + \|\vec{b}-\vec{c}\|\,\|\vec{a}-\vec{d}\|$.
   Indication : se ramener au cas $\vec{a} = \vec{0}$ et utiliser l'application f.

Correction ▼ [003664]

Exercice 3625 Calcul de distance

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P \mid Q) = \sum_i a_i b_i$.

Soit $H = \{P \in E \text{ tq } P(1) = 0\}$.

1. Trouver une base orthonormale de H.
2. Calculer $d(X, H)$.

Correction ▼ [003665]

Exercice 3626 Expression analytique

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x+2y+3z+4t = 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(\vec{e}_1, F)$.

Correction ▼ [003666]

Exercice 3627 Projection sur un hyperplan

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Correction ▼ [003667]

Exercice 3628 Caractérisation des projections orthogonales

Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection. Montrer que :

p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (\vec{x} \mid p(\vec{y})) = (p(\vec{x}) \mid \vec{y})$

$\Leftrightarrow \forall\, \vec{x} \in E,\ \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

(Pour la deuxième caractérisation, considérer $\vec{x} \in (\mathrm{Ker}\, p)^{\perp}$ et faire un dessin) [003668]

Exercice 3629 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (de dimension éventuellement infinie) et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille orthonormée de E. On note $F = \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

1. Démontrer que $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F^{\perp\perp} = F$ (on utilisera la projection associée aux $\vec{u}_i$).
2. Soit $\vec{x} \in E$. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{u}_i)^2 \leq \|\vec{x}\|^2$. Quand a-t-on égalité ?
3. Application : Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *coefficients de Fourier de f* les réels :

$$c_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \qquad \text{et} \qquad s_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt.$$

   Démontrer l'inégalité de Bessel : $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\, dt \geq \frac{c_0(f)^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)^2 + s_k(f)^2}{\pi}$.

[003669]

Exercice 3630 Composition de projecteurs

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F^{\perp} \perp G^{\perp}$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$. [003670]

Exercice 3631 Projecteurs commutant

Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)^{\perp} \cap \mathrm{Im}\, p$ et $(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)^{\perp} \cap \mathrm{Im}\, q$ sont orthogonaux.

Correction ▼ [003671]

Exercice 3632 Caractérisation des bases orthonormales

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall\, \vec{x} \in E, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)^2$.

1. Démontrer que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormale de E.
2. On remplace l'hypothèse : $\vec{e}_i$ unitaire par : $\dim E = n$.
   (a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E.
   (b) Démontrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)(\vec{y} \mid \vec{e}_i)$.
   (c) On note G la matrice de Gram de $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

Correction ▼ [003672]

Exercice 3633 Matrice de Gram

Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E, et G leur matrice de Gram.

1. Montrer que $\mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.
2. Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace $\vec{x}_k$ par $\vec{x}_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i \vec{x}_i$.
3. Soit $F = \mathrm{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $\vec{x} \in E$. On note $d(\vec{x}, F) = \min(\|\vec{x} - \vec{y}\|, \vec{y} \in F)$.
   Montrer que $d(\vec{x}, F)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})}{\mathrm{Gram}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$.

[003673]

Exercice 3634 $\mathrm{Gram}(u(e_i))$

Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de E. On note G le déterminant de Gram. Montrer que $G(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)) = (\det u)^2 G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. [003674]

Exercice 3635 Équation du second degré

Soient E espace vectoriel euclidien, $\vec{a} \in E$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\alpha(\vec{x} \mid \vec{x}) + \beta(\vec{x} \mid \vec{a}) + \gamma = 0$.

Correction ▼ [003675]

Exercice 3636 Vecteur défini par ses produits scalaires

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.

Existe-t-il $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, i,\ \int_{t=0}^{1} f(t) f_i(t)\, dt = 1$? [003676]

Exercice 3637 Décomposition QR

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.
2. Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs quelconques.
   Démontrer que $|\det_{(\vec{e}_i)}(\vec{u}_j)| \le \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

[003677]

Exercice 3638 Coefficients diagonaux dans la méthode de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathscr{B}$ par la méthode de Schmidt. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Montrer que $P_{ii} \times d(\vec{u}_i, \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1})) = 1$. [003678]

Exercice 3639 Coordonnées des vecteurs de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathscr{B}$ par la méthode de Schmidt.

On note G_n le déterminant de Gram de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, et $\Delta_{i,n}$ le cofacteur de $(\vec{u}_i \mid \vec{u}_n)$ dans G_n.

Montrer que $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1} G_n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,n} \vec{u}_i$.

Correction ▼ [003679]

Exercice 3640 $\det({}^tAA)$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det({}^tAA) \ge 0$. [003680]

Exercice 3641 Angles $> 2\pi/3$

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Existe-t-il trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ unitaires faisant entre eux deux à deux des angles strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$?

Correction ▼ [003681]

Exercice 3642 Polynômes orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} P(t) Q(t)\, dt$

1. Démontrer que $(\ \mid\ )$ est un produit scalaire sur E.
2. Démontrer qu'il existe une unique famille $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i = i \\ \text{le coefficient dominant de } P_i \text{ est strictement positif} \\ \text{la famille } (P_i) \text{ est orthonormée.} \end{cases}$$

[003682]

Exercice 3643 Centrale PSI 1997

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que E, muni de $(\ \mid\ )$, est un espace euclidien.
2. Soit $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ et $P \in K \setminus \{0\}$. Quel est le degré de P ?
3. Soit $\Phi\ :\ x \mapsto \int_{t=0}^{1} P(t)t^x\,dt$. Montrer que Φ est une fonction rationnelle.
4. Trouver Φ à une constante multiplicative près.
5. En déduire les coefficients de P.
6. En déduire une base orthogonale de E.

Correction ▼ [003683]

Exercice 3644 Réduction en carrés d'une forme quadratique

Soient $f_1, \dots, f_p$ p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\operatorname{rg}(f_1, \dots, f_p) = n$.

En considérant le produit scalaire : $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{p} f_i(\vec{x})f_i(\vec{y})$, démontrer qu'il existe n formes linéaires $g_1, \dots, g_n$ telles que :

$$\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{p} f_i(\vec{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i(\vec{x})^2.$$

Exemple : réduire $x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2$

Correction ▼ [003684]

Exercice 3645 Famille de vecteurs unitaires équidistants

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \vec{u}_i \text{ est unitaire} \\ \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1 \\ \operatorname{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i) = \operatorname{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i). \end{cases}$$

Démontrer que toute famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ vérifiant les deux premières propriétés est libre. [003685]

Exercice 3646 Famille obtusangle

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille de vecteurs vérifiant : $\forall\, i \neq j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) < 0$.

1. On suppose $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ libre. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la famille de Schmidt associée et M la matrice de passage de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ à $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Montrer que M est à coefficients positifs.
2. Dans le cas général, démontrer par récurrence sur n que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \geq n-1$.
3. Si $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = n-1$, démontrer que toute famille de $n-1$ vecteurs extraite de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.

[003686]

Exercice 3647 $F + F^{\perp} \neq E$

Soit $E = \mathscr{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \int_{t=0}^{1} fg(t)\,dt$, et $F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.

Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.

Correction ▼ [003687]

Exercice 3648 Forme linéaire sur les polynômes

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} PQ(t)\,dt$.

1. Vérifier que c'est effectivement un produit scalaire.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$. Trouver le polynôme A tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (A \mid P)$.

Correction ▼ [003688]

Exercice 3649 Norme uniforme sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $\int_{t=-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$.

Montrer que $\sup\{|P(x)| \text{ tq } -1 \le x \le 1\} \le 2\sqrt{2}$.

Indications : Pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(a) = \int_{t=-1}^{1} P(t)P_a(t)\,dt$. Calculer explicitement P_a, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction ▼ [003689]

Exercice 3650 Centrale MP 2000

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(f,g) = \int_{[0,1]} fg + f'g'$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf\limits_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

Correction ▼ [003690]

Exercice 3651 Polytechnique MP* 2000

Soit H un espace euclidien, $(y_j)_{j\in I}$ une famille de vecteurs de H telle qu'il existe A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall\, x \in H,\ A\|x\|^2 \le \sum_{j\in I} (x \mid y_j)^2 \le B\|x\|^2.$$

1. Montrer que $(y_j)_{j\in I}$ engendre H.
2. On choisit $H = \mathbb{R}^2$. Montrer que $y_1 = \binom{0}{1}$, $y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $y_3 = y_2$ conviennent.
3. Si $A = B = 1$ et $\|y_j\| = 1$ pour tout j, montrer que $(y_j)_{j\in I}$ est une base orthonormale.
4. Si $A = B$, montrer que pour tout $x \in H$, $x = \frac{1}{A}\sum_{j\in I}(x \mid y_j)y_j$.

Correction ▼ [003691]

Exercice 3652 $\|u(x)\| \le \|x\|$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \le \|x\|$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$.

Correction ▼ [003692]

Exercice 3653 X MP* 2000

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. Trouver toutes les fonctions f de E dans $\mathbb{R}$ continues telles que $u \perp v \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Correction ▼ [003693]

Exercice 3654 ***

Pour $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \operatorname{Tr}({}^tAA)$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \le N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B. N est-elle associée à un produit scalaire ?

Correction ▼ [005482]

Exercice 3655 ***

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $|| \ ||$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$. On se propose de démontrer que $|| \ ||$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (x,y) de E^2 on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $|| \ ||$ est une norme euclidienne.

Correction ▼ [005483]

Exercice 3656 **

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P|A = P(0)$?

Correction ▼ [005485]

Exercice 3657 ***

Soit $(e_1,...,e_n)$ une base quelconque de E euclidien. Soient a_1,..., a_n n réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \{1,...,\},\ x|e_i = a_i$.

Correction ▼ [005495]

Exercice 3658 ****

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Une famille de p vecteurs $(x_1,...,x_p)$ est dite obtusangle si et seulement si pour tout (i,j) tel que $i \neq j$, $x_i|x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leq n+1$.

Correction ▼ [005496]

Exercice 3659 **I

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par : $\forall P \in E,\ \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E$, $\varphi_a \in E^*$.
2. Soient a_0, a_1,..., a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0},\dots,\varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

Correction ▼ [005629]

Exercice 3660 **

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E$, $\varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$ est une base de E^* et trouver la base dont elle est la duale.

Correction ▼ [005630]

Exercice 3661 **

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ et ψ deux formes linéaires sur E. On suppose que pour tout x de E, on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Correction ▼ [005631]

Exercice 3662 ***

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis φ_1,..., φ_n et φ $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que : $\left(\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \ \varphi = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi\right)$.
2. Signification du résultat précédent : dans $\mathbb{R}^3$, équation d'un plan P contenant D : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{array}\right.$ et le vecteur $u=(1,1,1)$?

Correction ▼ [005632]

Exercice 3663 ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis φ_1,..., φ_n n formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace E de dimension n.
Montrer que la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est liée si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x)=0$.

Correction ▼ [005633]

Exercice 3664 **

Rang du système de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{l} f_1 = x_1+2x_2-x_3-2x_4 \\ f_2 = x_1+x_2+mx_3+x_4 \\ f_3 = x_1+x_3+(m+4)x_4 \\ f_4 = x_2-3x_3-mx_4 \end{array} \ ?$$

Correction ▼ [005634]

Exercice 3665 *** I

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
   (b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E,φ).

Correction ▼ [005773]

Exercice 3666 ** I Polynômes de TCHEBYCHEV

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Correction ▼ [005774]

Exercice 3667 ** I

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $(u,v) \in E^2$, on pose $\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Correction ▼ [005775]

Exercice 3668 * I

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\mathrm{Tr}({}^tA \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼ [005776]

Exercice 3669 ****

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\| \ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Correction ▼ [005777]

Exercice 3670 **

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1,...,e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Correction ▼ [005778]

Exercice 3671 **** I

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille de p vecteurs de E ($p \geqslant 2$) . On dit que la famille $(x_1,...,x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $(i<j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1,...,x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n+1$.

Correction ▼ [005788]

126 204.02 Forme quadratique

Exercice 3672

Soient E un K-espace vectoriel (où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n > 0$ et q une forme quadratique sur E.

1. q peut-elle être injective ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur q pour qu'elle soit surjective.

[001509]

Exercice 3673 examen juin 1999

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

pour $v = (x,y,z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

[001510]

Exercice 3674

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2&1&1\\1&1&1\\1&1&2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression analytique de q dans $\mathscr{B}$ et expliciter sa forme polaire f.
2. Vérifier que $\mathscr{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de q dans cette base. Expliciter q dans cette base.
3. Trouver le rang et la signature de q.

[001511]

Exercice 3675

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. (a) Montrer que q est une forme quadratique sur E.
   (b) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.
   (c) La forme q est-elle positive, négative ?
2. Soit $P := X^2 + X + 1$ et $V = $vect$(P)$. Déterminer $V^{\perp}$ et $V^{\perp\perp}$.
3. Déterminer le rang de q puis son noyau.
4. Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q et constuire une base de E formée de vecteurs isotropes. $C(q)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
5. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

[001512]

Exercice 3676

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, que l'on suppose définie (*i.e.* son cône isotrope est $\{0\}$). Montrer que q garde un signe constant sur E (on pourra raisonner par l'absurde et considérer $q(a+tb)$ où a et b sont des vecteurs bien choisis et $t \in \mathbb{R}$). [001513]

Exercice 3677

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale, déterminer la signature de q et une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

[001514]

Exercice 3678

Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y-z)^2 - (3x-y+2z)^2 + (5y-7z)^2.$$

[001515]

Exercice 3679

Soit la forme quadratique q définie par

$$q : (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \mapsto x_1x_2 + x_2x_4 - x_3x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - x_1x_3.$$

1. Montrer, sans réduire q, qu'il existe une base q-orthonormale de $\mathbb{C}^4$.
2. En expliciter une.

[001516]

Exercice 3680 Étude de signe

Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives :

1. $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.
2. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$.
3. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Correction ▼ [003713]

Exercice 3681 Ensi PC 1999

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle une matrice de produit scalaire ?

Correction ▼ [003714]

Exercice 3682 Calcul de signature

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

Correction ▼ [003715]

Exercice 3683 Signature de ${}^tAA$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.
2. Déterminer sa signature en fonction de $\mathrm{rg}A$.

[003716]

Exercice 3684 Décomposition en carrés

Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le i\le j\le n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\ge 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\ge 1} x_i\right)^2$. On posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \dots + x_n)/(i+1)$.

Correction ▼ [003717]

Exercice 3685 Rang d'une décomposition en carrés

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1,\dots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \dots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\mathrm{rg}(f_1,\dots,f_p) \ge \mathrm{rg}(q)$. [003718]

Exercice 3686 Différentielle d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.

Montrer que : $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x},\vec{y})$. [003719]

Exercice 3687 $q(a)q(x) - f^2(a,x)$

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée.

On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.

1. Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
2. Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.
3. Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.

Correction ▼ [003720]

Exercice 3688 $\mathrm{tr}(A^2)$

Soit pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature (indication : étudier les restrictions de q aux sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques). [003721]

Exercice 3689 Adjoint

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall\, x,y \in\ E,\ f(u(x),y) = f(x,v(y)).$$
On note $v = u^*$.
2. Montrer que l'application $u \mapsto u^*$ est un anti-isomorphisme involutif de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire tel que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ et $u^{**} = u$).

[003722]

Exercice 3690 Restriction d'une forme quadratique à un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et q une forme quadratique sur E de signature $(n-1,1)$. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $d \geq 1$.

1. On suppose qu'il existe $x \in\ H$ tel que $q(x) < 0$. Montrer que la signature de $q_{|H}$ est $(d-1,1)$.
2. On suppose que $q_{|H}$ est positive, quelle est sa signature ?

Correction ▼ [003723]

Exercice 3691 Mineurs principaux

Soit $n \geq 2$ et A une matrice réelle symétrique $n \times n$ représentant une forme quadratique q. On appelle mineurs principaux de A les déterminants :
$$\Delta_k(A) = \det\big((a_{i,j})_{i,j \leq k}\big).$$
On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, montrer que la signature de q est (r,s) où s est le nombre de changements de signe dans la suite $(1,\Delta_1,\dots,\Delta_n)$ et $r = n-s$.

Correction ▼ [003724]

Exercice 3692 Diagonale dominante

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On dit que A est à diagonale faiblement dominante si pour tout i on a $a_{ii} \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ et que A est à diagonale fortement dominante si pour tout i on a $a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.

Montrer que si A est à diagonale fortement dominante alors A est définie positive et si A est à diagonale faiblement dominante alors A est positive. Indication : utiliser l'exercice 3691.

Correction ▼ [003725]

Exercice 3693 Formes quadratiques de signature donnée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, on note :
$\mathrm{Quad}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E ;
$\mathrm{Quad}^*(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de rang n ;
$\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (p,q).

1. Montrer que $\mathrm{Quad}^*(E)$ est dense dans $\mathrm{Quad}(E)$.
2. Montrer que si $p+q = n$ alors $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{Quad}(E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [003726]

Exercice 3694 $1/(\lambda_i + \lambda_j)$

1. Soit $f_1,\dots,f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues de carrés intégrables sur l'intervalle I. On pose $a_{i,j} = \int_I f_i f_j$. Montrer que la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive ssi la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.

2. En déduire que si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts alors la matrice de terme général $1/(\lambda_i+\lambda_j)$ est définie positive.

[003727]

Exercice 3695 Matrice des inverses

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous non nuls. On note A' la matrice de coefficient général $1/a_{i,j}$.

1. Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques définies positives (examiner les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = n$).
2. Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques positives (examiner les cas $n = 2$, $n = 3$, $n = n$).

Correction ▼ [003728]

Exercice 3696 Centrale MP 2000

Soit S une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, symétrique définie positive. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $q : X \mapsto \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ est définie négative.

Correction ▼ [003729]

Exercice 3697 Polytechnique MP* 2000

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la forme quadratique : $q(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x|a)^2$ où $\alpha > 0$, β réel et $a \in \mathbb{R}^n$. Discuter de la signature et du rang de q.

Correction ▼ [003730]

Exercice 3698 Ensae MP* 2000

Soit q une forme quadratique non nulle sur $M_2((x^2+1)^)$ telle que $q(AB) = q(A)q(B)$. Déterminer q.

Correction ▼ [003731]

Exercice 3699 Déterminant de Gram, X MP* 2005

Soit E un espace vectoriel réel de dimension quelconque, $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux familles de vecteurs de E et ϕ une forme bilinéaire symétrique positive.

Montrer que $(\det[\phi(x_i,y_j)])^2 \leq \det[\phi(x_i,x_j)] \times \det[\phi(y_i,y_j)]$.

Correction ▼ [003732]

Exercice 3700 **

Soit $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2),\ Q(f) = \lambda \mathrm{Tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1. Vérifier que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de Q. Analyser en particulier les cas $(\lambda,\mu) = (1,0)$ et $(\lambda,\mu) = (0,1)$.

Correction ▼ [005807]

Exercice 3701 **

Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note φ sa forme polaire.

On suppose que φ est non dégénérée mais non définie. Montrer que Q n'est pas de signe constant.

Correction ▼ [005808]

Exercice 3702 *** I

Soient f_1, f_2,..., f_n n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt$ puis pour $(x_1,...x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}x_ix_j$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2. Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre.
3. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in [a,b]$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

Correction ▼ [005809]

Exercice 3703 ***

Soit S une matrice symétrique réelle, définie positive. Pour $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Q((x_1,...,x_n)) = -\det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est une forme quadratique définie positive.

Correction ▼ [005810]

127 204.03 Espace orthogonal

Exercice 3704

Montrer que l'application $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques. [001475]

Exercice 3705

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
4. Si $\dim(E)$ est finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

[001476]

Exercice 3706 **

On munit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Correction ▼ [005792]

128 204.04 Projection, symétrie

Exercice 3707

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-3z=0$.

En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension n, on considére un sous-espace F de dimension r et $(f_1,...,f_r)$ une base de orthonormée de cet espace. On not p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E=F\oplus F^{\perp}$. Montrer que :

$$\forall v\in F, \qquad p_F(v) = < v,f_1 > f_1 + < v,f_2 > f_2 + \cdots + < v,f_r > f_r$$

[001477]

Exercice 3708

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y+z=0$ de $(1,0,0)$, et plus généralement d'un vecteur (x,y,z) quelconque.

Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension n, on considère un sous-espace F de dimension r et $(f_1,...,f_r)$ une base de orthonormée de cet espace. On not p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E=F\oplus F^{\perp}$. Montrer que :

$$\forall v\in F, \qquad p_F(v) = < v,f_1 > f_1 + < v,f_2 > f_2 + \cdots + < v,f_r > f_r$$

[001478]

Exercice 3709

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $p\in\mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p)\perp\mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x\in E : \|p(x)\|\leq\|x\|$. [001479]

Exercice 3710

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p la projection orthogonale sur F et on pose, pour tout $x\in E : d(x,F)=\inf_{y\in F}\|x-y\|$. Soit $z\in F$.

1. Montrer que pour tout $x\in F$, les trois conditions sont équivalentes :
   (i) $d(x,F)=\|x-z\|$.
   (ii) $z=p(x)$.
   (iii) $\forall y\in F, y\perp(x-z)$.
2. En déduire $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1(x^2-ax-b)^2dx$.

[001480]

Exercice 3711

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y\in E$. Montrer que :

1. Si $\|x\|=\|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y=s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Si $\langle x,y\rangle=\|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y=p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

[001481]

Exercice 3712

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-3z=0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan. [001482]

Exercice 3713

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale $(e_1,\dots,e_m)$. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que $\forall x \in E, p(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i$.
2. Donner de même l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à F et la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

[001483]

Exercice 3714

Quelle est la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

[001484]

Exercice 3715

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.
[001485]

Exercice 3716

Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul et $H = u^{\perp}$. Soient p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer que $\forall x \in E \qquad p(x) = x - \frac{\langle x|u \rangle}{\|u\|^2} u$.
2. Montrer que $\forall x \in E \qquad s(x) = x - 2\frac{\langle x|u \rangle}{\|u\|^2} u$.
3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $(\Pi : x - y + z = 0)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Π.

[001486]

Exercice 3717

Soit $(E, |\ )$ un espace vectoriel de dimension n.

1. Soient F et G des sous-espace vectoriels de E. Montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
2. Soient $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ dans $\mathscr{B}$.
   (a) Déterminer l'orthogonale de H.
   (b) Déterminer la distance du vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ de E au sous-espace vectoriel H.
3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ défini par
$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$
   (a) Déterminer une base de $P^{\perp}$ puis une base orthonormale de $P^{\perp}$.
   (b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur P.

[001487]

Exercice 3718

Soient E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E et p le projecteur de E d'axe F et de direction G.

1. On suppose que $F \perp G$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
   (a) Soient $a \in F$ et $b \in G$. Montrer que $\|a + b\| \geq \|a\|$.
   (b) En déduire que $F \perp G$.

[001488]

Exercice 3719

Soit $\alpha = \inf\left\{\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c - |x|\ \right)^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, \mid)$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et α.

[001489]

Exercice 3720

Soit E un espace euclidien (de dimension finie), F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer $(F+G)^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$. [001490]

Exercice 3721

Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax+b))^2 dx$. [001491]

Exercice 3722

Calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|\ln x - ax - b\right|^2 dx.$$

[001492]

Exercice 3723 Isométries affines

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1. On suppose que f conserve le produit scalaire. Démontrer que f est linéaire.
2. On suppose que f conserve les distances, c'est à dire : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Démontrer que $f = f(\vec{0}) + g$, avec $g \in \mathscr{O}(E)$.

[003733]

Exercice 3724 Projection sur vect(u)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathscr{B}$.

1. Montrer que U^tU est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(\vec{u})$.
2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

[003734]

Exercice 3725 $\vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$

Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.

Déterminer λ pour que $f \in \mathscr{O}(E)$. Reconnaître alors f.

Correction ▼ [003735]

Exercice 3726 Composition de symétries

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F\oplus G)^\perp}$. [003736]

Exercice 3727 Composition de symétries

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F\oplus G^\perp}$. [003737]

Exercice 3728 Condition pour que deux symétries commutent

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient H, K deux hyperplans de E, et s_H, s_K les symétries associées.

Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$. [003738]

Exercice 3729 Similitudes

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall \vec{x} \in E,\ \|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\|$.

1. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall \vec{x},\vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})) = \lambda^2(\vec{x} \mid \vec{y})$.
2. Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.
3. Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall \vec{x},\vec{y} \in E,\ \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.

[003739]

Exercice 3730 Similitudes

On définit l'application $\varphi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j}^2$. Trouvez les matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout A on ait $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$.

Correction ▼ [003740]

Exercice 3731 Sous-espaces stables

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par u. [003741]

Exercice 3732 Projection sur le sous-espace invariant

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u \in \mathscr{O}(E)$. On note $v = \mathrm{id}_E - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker} v = (\mathrm{Im}\, v)^\perp$.
2. Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker} v$. Montrer que : $\forall \vec{x} \in E,\ \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k(\vec{x}) \to p(\vec{x})$ lorsque $m \to \infty$.

[003742]

Exercice 3733 Endomorphismes orthogonaux diagonalisables

Quels sont-ils ? [003743]

Exercice 3734 Valeurs propres d'une isométrie

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$.

1. On suppose n impair et $f \in \mathscr{O}^+(E)$. Montrer que 1 est valeur propre de f. (comparer $\det(f - \mathrm{id})$ et $\det(f^{-1} - \mathrm{id})$)
2. Que peut-on dire quand n est pair ?
3. Soit n quelconque, $f \in \mathscr{O}^-(E)$. Montrer que -1 est valeur propre de f.

[003744]

Exercice 3735 Caractérisation des symétries orthogonales

Soit $M \in \mathscr{O}(n)$.

1. Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si M est symétrique.
2. Dans ce cas, déterminer la base et la direction de cette symétrie en fonction des matrices $I + M$ et $I - M$.

[003745]

Exercice 3736 f orthogonal antisymétrique

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E \iff \forall\, \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) \perp \vec{x} \iff \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(\vec{x} \mid f(\vec{y})).$$

[003746]

Exercice 3737 Centre de O(E)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$, et s une réflexion par rapport à un hyperplan H. Soit $\vec{u} \in H^{\perp}, \vec{u} \neq \vec{0}$.

1. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.
2. En déduire que f et s commutent si et seulement si $\vec{u}$ est vecteur propre de f.
3. Quel est le centre de $O(E)$?

[003747]

Exercice 3738 Nombre de réflexions nécessaires pour engendrer une application donnée

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. On note $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $p = \mathrm{codim}(F)$.

1. Montrer qu'on peut décomposer f en produit d'au plus p réflexions.
2. Inversement, si f est un produit de k réflexions, démontrer que $p \leq k$.
3. Application : trouver $f \in \mathscr{O}(E)$ qui se décompose en n réflexions et pas moins.

[003748]

Exercice 3739 Prolongement d'une transformation orthogonale

Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to E$ une application orthogonale. Démontrer qu'on peut prolonger f en une application orthogonale de E dans E.
2. Soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall\, i, j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) = (\vec{v}_i \mid \vec{v}_j)$.
   (a) Si $\sum \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}$, démontrer que $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$.
   (b) En déduire qu'il existe $f \in \mathscr{O}(E)$ telle que : $\forall\, i,\ f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

[003749]

Exercice 3740 Action de $\mathscr{O}(E)$ sur les sous-espaces vectoriels

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. $(*)$ Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Correction ▼ [003750]

Exercice 3741 Transformations orthogonales sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que les applications $\begin{cases} \phi_P : A \longmapsto AP \\ \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP \end{cases}$ sont orthogonales.
3. Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathscr{O}(n)$?

Correction ▼ [003751]

Exercice 3742 $A = \mathrm{com}(A)$

Quelles sont les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

Correction ▼ [003752]

Exercice 3743 $A^tA + A + {}^tA = 0$

1. Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^tA + A + {}^tA = 0$.
2. Montrer que pour une telle matrice, $|\det A| \leq 2^n$.

Correction ▼ [003753]

Exercice 3744 Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\left|\sum_{i,j} P_{ij}\right| \leq n$.
Quand a-t-on égalité ? [003754]

Exercice 3745 Groupe engendré par les réflexions

Soit E un espace vectoriel hermitien et G le sous-groupe de $U(E)$ engendré par les réflexions.

1. On suppose ici $\dim E \geq 2$. Soient $u, v \in E$. Montrer qu'il existe une réflexion σ échangeant u et v si et seulement si $\|u\| = \|v\|$ et $(u \mid v) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $G = \{f \in U(E) \ \text{ tq } \det(f) \in \{-1, 1\}\}$.

Correction ▼ [003755]

Exercice 3746 Orthotrigonalisation

Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien est trigonalisable en base orthonormale. [003756]

Exercice 3747 Réduction des endomorphismes orthogonaux et unitaires

1. Soit G un sous groupe compact de $GL_n((x^2+1)^))$. Si $M \in G$ montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. En déduire que tout élément de G est diagonalisable.
2. Soit $M \in U_n((x^2+1)^))$. Montrer que M est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de $(x^2+1)^n$ propre pour M.
3. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale par blocs :
$P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1, R_1, \dots, R_k)$ où chaque R_i est une matrice de la forme : $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

[003757]

Exercice 3748 Groupes orthogonaux égaux

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ deux normes euclidiennes telles que les groupes orthogonaux associés sont égaux. Que peut-on dire de ces normes ? [003758]

Exercice 3749 Calcul de norme

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - x_n, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$. Avec la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, calculer la norme de f.

Correction ▼ [003759]

Exercice 3750 Densité (Ens Ulm MP* 2003)

$\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$ est-il dense dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [003760]

Exercice 3751 Centrale MP 2003

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. Déterminer a,b,c de sorte que f soit une isométrie, et la préciser.

Correction ▼ [003761]

Exercice 3752 ***I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p sur $\mathbb{R}$ ($p \geq 2$). Pour $(x_1,...,x_n)$ donné dans E^n, on pose $G(x_1,...,x_n) = (x_i|x_j)_{1\leq i,j\leq n}$ (matrice de GRAM) et $\gamma(x_1,...,x_n) = \det(G(x_1,...,x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1,...,x_n)) = \mathrm{rg}(x_1,...,x_n)$.
2. Montrer que $(x_1,...,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n) = 0$ et que $(x_1,...,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n) > 0$.
3. On suppose que $(x_1,...,x_n)$ est libre dans E (et donc $n \leq p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)$.
   Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d_F(x) = ||x - p_F(x)||$). Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}}$.

Correction ▼ [005486]

Exercice 3753 **I

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite. De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a,b,c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax+by+cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [005488]

Exercice 3754 **I

Existence, unicité et calcul de a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\, dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

Correction ▼ [005494]

Exercice 3755 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe (i,j,k), déterminer l'image du plan d'équation $x+y = 0$ par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x-y+z = 0$,
2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1,1,1)$,
3. par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1,1,1)$.

Correction ▼ [005504]

Exercice 3756 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z = 1 \\ x-2y-z = 0 \end{array}\right.$ et (Δ) : $6x = 2y = 3z$ puis (P) : $x+3y+2z = 6$. Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ).

Correction ▼ [005509]

Exercice 3757 **

Soient (D) la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ et (P) le plan d'équation cartésienne $x+3y+2z=6$. Déterminer la projetée (orthogonale) de (D) sur (P).

Correction ▼ [005520]

129 204.05 Orthonormalisation

Exercice 3758

Résoudre l'équation $(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2=\frac{1}{4}$ pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. [001493]

Exercice 3759

1. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u=(1,2,3,-1,2)$ et $v=(2,4,7,2,-1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.
2. Trouver une base orthonormale du sous-espace E de $(x^2+1)^3$ engendré par $v_1=(1,i,0)$ et $v_2=(1,2,1-i)$.

[001494]

Exercice 3760

Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormale de F qui est inclue dans une base orthonormale de E. [001495]

Exercice 3761

1. Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A définit un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour φ.
2. Considérons une base $\{v_1=(1,1,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1)\}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer $\{v_i\}$ en une base orthonormale.

[001496]

Exercice 3762

Soient $E=\mathbb{R}_n[X], I_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1} ?

   Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. On suppose $n=2$. Ecrire la matrice associée à φ dans la base $(1,X,X^2)$. Construire une base orthonormale (P_0,P_1,P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à $(1,X,X^2)$.

[001497]

Exercice 3763

Réduire en somme de carrés indépendants les formes suivantes :

1. $9x^2-6y^2-8z^2+6xy-14xz+18xw+8yz+12yw-4zw$
2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_2x_3-4x_2x_4$

[001498]

Exercice 3764

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt. [001499]

Exercice 3765

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_1 = (1,-1,1,-1)$ et $F = \mathrm{vect}(e_1,e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(1,1,1,1)$ au sous-espace vectoriel F.

[001500]

Exercice 3766

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

[001501]

Exercice 3767

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$ alors

$$f(u,u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.
   (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.
   (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.

[001502]

Exercice 3768

Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $x_1 = (1,-2,2)$, $x_2 = (-1,0,-1)$, $x_3 = (5,-3,7)$. [001503]

Exercice 3769

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. [001504]

Exercice 3770

On considère la forme bilinéaire b de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$$

où x_1,x_2,x_3 et y_1,y_2,y_3 sont les coordonnées de x et y dans la base canonique.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Ecrire la matrice de b dans la base canonique.
3. Trouver une base orthonormée pour b.

[001505]

Exercice 3771

On considère un espace euclidien $(E, <>)$.

1. **Théorème de Pythagore :**
   Soient u et v deux vecteurs orthogonaux de E. Calculer $||u+v||^2$. Illustrer le résultat obtenu à l'aide d'un dessin.
2. **Projection orthogonale et distance à un sous-espace :**
   Soit F un sous-espace de E. On rappelle que $E = F \oplus F^\perp$, et donc que tout vecteur x de E se décompose de manière unique en une somme $x = x_1 +_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Le vecteur x_1 s'appelle alors la projection orthogonale de x sur F.
   (a) Montrer que l'application p qui à un vecteur asocie sa projection orthogonale sur E est une application linéaire. Vérifier que : $\forall y \in F, < x - p(x), y >= 0$.
   (b) On considère maintenant un vecteur x de E. On appelle distance de x à F le nombre $\text{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$. Pour $y \in F$, vérifier que $x - p(x)$ et $y - p(x)$ sont orthogonaux. Utiliser alors la question 1 pour montrer que $||x-y||^2 \geq ||x-p(x)||^2$. Illustrer sur un dessin.
   En déduire que $\text{dist}(x,F) = ||x-p(x)||$.
   (c) Soit $(e_1,\dots,e_r)$ une base orthonormée de F. Montrer que $p(x) = \sum_{i=1}^r < x, e_i > \ e_i$.
3. **Espace de polynômes :**
   Sur l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la forme bilinéaire définie par :
   $$< P,Q >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$
   (a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire (on admet que l'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction f continue et positive est nulle si et seulement si f est nulle sur $[-1,1]$)
   (b) A l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base $(1,X,X^2)$, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) On considère le polynôme $P_0 = X^3$. Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que pour ce produit scalaire, on a :
   $$\text{dist}(X^3, \mathbb{R}^2[X]) = \frac{2}{5\sqrt{7}}\ .$$

[001506]

Exercice 3772

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, x_0 un point de E et F un sous espace vectoriel de E. On note π la projection orthogonale de E sur F. On rappelle que pour $x \in E$, $\pi(x)$ est caractérisé par les relations :

$$\pi(x) \in F \qquad \text{et} \qquad x - \pi(x) \in F^\perp$$

Le but de cette partie est de montrer que la projection orthogonale de x_0 sur F est le point de F le plus proche de x_0.

1. En utilisant que $x_0 - y = (x_0 - \pi(x_0)) + (\pi(x_0) - y)$, montrer que
   $$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2 + \|y - \pi(x_0)\|^2.$$
2. En déduire que $\inf\limits_{y\in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$, c'est à dire que :
   $$\forall y \in F,\ \|x_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$$
   A quelle condition a-t-on égalité dans la relation ci-dessus ?
3. Soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base orthonormée de F. Montrer que $\pi(x_0) = \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 > e_i$
4. Déduire des deux questions précédentes que
   $$\inf_{y\in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 > e_i\|^2 = \|x_0\|^2 - \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 >^2$$

   Application : Le but est maintenant de déterminer
   $$\alpha = \inf_{a,b\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt.$$
   On considère à cet effet l'espace $F = \mathbb{R}_1[X]$, comme sous espace de $E = F \oplus \mathbb{R}f_0$ où f_0 est la fonction définie par $f_0(t) = e^t$. On admettra sans démonstration que $< f,g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.
5. Donner une base orthonormée (P_1,P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

6. Calculer $< f_0, P_1 >$, $< f_0, P_2 >$, et $\|f_0\|^2$. En déduire que
$$\alpha = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - (2e^{-1})^2 - \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2.$$
7. Même question avec le calcul de $\alpha' = \inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at^2 - bt - c)^2 dt.$: commencer par chercher une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le même produit scalaire, et en déduire α'.

[001507]

Exercice 3773

A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre
$$\phi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$
1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

[001508]

Exercice 3774 **IT

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1,2,-1,1)$ et $V_2 = (0,3,1,-1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Correction ▼ [005484]

Exercice 3775 ****I

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.
1. Montrer que $(E, |)$ est un espace euclidien.
2. Pour p entier naturel compris entre 0 et n, on pose $L_p = ((X^2-1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0 \le p \le n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E.
   Déterminer $||Lp||$.

Correction ▼ [005500]

Exercice 3776 *** I Polynômes de LEGENDRE

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |\ )$.
   (b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E.

Correction ▼ [005772]

Exercice 3777 ***

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P,Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\, dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Correction ▼ [005779]

Exercice 3778 **I Inégalité de HADAMARD

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1,...x_n)$, on a : $|\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005789]

Exercice 3779 **

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Correction ▼ [005790]

Exercice 3780 **

Rang et signature des formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x,y,z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
2. $Q((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
3. $Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$.
4. $Q((x,y,z,t)) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$.
5. $Q((x_1,...,x_5)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.
6. $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ijx_i x_j$.
7. $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{i} x_i x_j$.
8. $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Inf}(i,j) x_i x_j$.

Correction ▼ [005806]

Exercice 3781 **

Sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x,y)) = x^2 + 10xy + y^2$.
2. $Q((x,y)) = 6x2 + 4xy + 9y2$.
3. $Q((x,y,z)) = 4x^2 + 9y^2 - z^2 + 2\sqrt{6}xy + 10\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz$.

Correction ▼ [005811]

Exercice 3782 ***

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer sa signature.

Correction ▼ [005812]

130 204.06 Espace vectoriel euclidien de dimension 3

Exercice 3783 Propriétés du produit vectoriel

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$\begin{aligned}
&(\vec{u}\wedge\vec{v}) \mid (\vec{w}\wedge\vec{t}) = (\vec{u}\mid\vec{w})(\vec{v}\mid\vec{t}) - (\vec{u}\mid\vec{t})(\vec{v}\mid\vec{w})\\
&(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{w}\wedge\vec{t}) = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\vec{t} + [\vec{u},\vec{v},\vec{t}]\vec{w}\\
&[\vec{t},\vec{v},\vec{w}]\vec{u} + [\vec{u},\vec{t},\vec{w}]\vec{v} + [\vec{u},\vec{v},\vec{t}]\vec{w} = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\vec{t}.
\end{aligned}$$

[003694]

Exercice 3784 Division vectorielle

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{a},\vec{b}$ deux vecteurs donnés, $\vec{a}\neq\vec{0}$. Étudier l'équation : $\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b}$. On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x}=\vec{a}\wedge\vec{y}$.

Correction ▼ [003695]

Exercice 3785 $a\wedge b$, $b\wedge c$, $c\wedge a$ donnés

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Trouver $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ connaissant $\vec{u}=\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{b}\wedge\vec{c}$ et $\vec{w}=\vec{c}\wedge\vec{a}$ (calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$).

Correction ▼ [003696]

Exercice 3786 $f(u)\wedge v+u\wedge f(v)=g(u\wedge v)$

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $f\in\mathscr{L}(E)$.

1. Prouver que : $[f(\vec{u}),\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u},f(\vec{v}),\vec{w}]+[\vec{u},\vec{v},f(\vec{w})]=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\mathrm{tr}(f)$.
2. Montrer qu'il existe $g\in\mathscr{L}(E)$ telle que : $\forall\,\vec{u},\vec{v}$, on a $f(\vec{u})\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge f(\vec{v})=g(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
3. Dans une *bond*, exprimer la matrice de g en fonction de celle de f.

Correction ▼ [003697]

Exercice 3787 Applications bilinéaires antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\phi : E\times E\to\mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique.

Montrer qu'il existe $f\in E^*$ unique telle que : $\forall\,\vec{x},\vec{y},\ \phi(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{x}\wedge\vec{y})$.

[003698]

Exercice 3788 Volume d'un parallélépipède

Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On donne $\|\vec{u}\|=a$, $\|\vec{v}\|=b$, $\|\vec{w}\|=c$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha$, $\overline{(\vec{v},\vec{w})}\equiv\beta$, $\overline{(\vec{w},\vec{u})}\equiv\gamma$.

Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$?

Correction ▼ [003699]

Exercice 3789 Applications conservant le produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Trouver les applications $f\in\mathscr{L}(E)$ vérifiant :

1. $f(\vec{u}\wedge\vec{v})=f(\vec{u})\wedge f(\vec{v})$.
2. $f(\vec{u}\wedge\vec{v})=-f(\vec{u})\wedge f(\vec{v})$.

[003700]

Exercice 3790 Expression d'une rotation

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\vec{u}\in E$ unitaire, $\alpha\in\mathbb{R}$ et f la rotation autour de $\vec{u}$ d'angle de mesure α.

1. Exprimer $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{x}$ et α.

2. On donne les coordonnées de $\vec{u}$ dans une base orthonormée : a, b, c. Calculer la matrice de f dans cette base.

Correction ▼ [003701]

Exercice 3791 Conjuguée d'une rotation

Soit ρ une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et $f \in \mathscr{O}(E)$. Reconnaître $f \circ \rho \circ f^{-1}$.

Application : Déterminer le centre de $\mathscr{O}^+(E)$. [003702]

Exercice 3792 Conjugaison dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$

Soient $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ ayant même polynôme caractéristique.

Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Si f et g sont positifs, a-t-on h positif ?

Correction ▼ [003703]

Exercice 3793 Décomposition des rotations

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une *bond* d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 E, et $f \in \mathscr{O}^+(E)$.

1. On suppose $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$. Montrer qu'il existe r, r' rotations autour de $\vec{j}$ et $\vec{i}$ telles que $r' \circ r = f$.
2. En déduire que tout $f \in \mathscr{O}^+(E)$ se décompose de deux manières sous la forme : $f = r'' \circ r' \circ r$ où r, r'' sont des rotations autour de $\vec{j}$ et r' est une rotation autour de $\vec{i}$.
3. Décomposer $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha, z)$.

Correction ▼ [003704]

Exercice 3794 Sous-groupes finis de $\mathscr{O}^+(3)$

Déterminer les sous-groupes de $\mathscr{O}^+(3)$ de cardinal 2,3, ou 4. [003705]

Exercice 3795 Applications antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ antisymétrique.

1. Montrer que $\mathrm{id}_E + f \in GL(E)$.
2. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1} \in \mathscr{O}^+(E)$ et $\mathrm{id} + g$ est inversible.
3. Réciproquement, soit $h \in \mathscr{O}^+(E)$ tq $\mathrm{id} + h$ soit inversible. Montrer qu'il existe f antisymétrique tel que $h = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$.

Correction ▼ [003706]

Exercice 3796 Applications antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice dans $\mathscr{B}$:
$M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconaître f.
2. Montrer que $\mathrm{id}_E + f$ est une bijection et calculer la bijection réciproque.
3. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

Correction ▼ [003707]

Exercice 3797 Exponentielle d'une application antisymétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{a} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. On note $\alpha = \|\vec{a}\|$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$.

1. Vérifier que $f^3 = -\alpha^2 f$.
2. On pose $g(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(\vec{x})}{k!}$. Simplifier $g(\vec{x})$ et en déduire que g est une rotation.

Correction ▼ [003708]

Exercice 3798 Matrice à trou

1. Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.
2. Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [003709]

Exercice 3799 Matrice circulante

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

Correction ▼ [003710]

Exercice 3800 Expressions analytiques

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1. $\begin{cases} 3x' = 2x+2y+z \\ 3y' = -2x+y+2z \\ 3z' = x-2y+2z \end{cases}$
2. $\begin{cases} 9x' = 8x+y-4z \\ 9y' = -4x+4y-7z \\ 9z' = x+8y+4z \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x' = -2x+2y-z \\ 3y' = 2x+y-2z \\ 3z' = -x-2y-2z \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x' = -2x-y\sqrt{6}+z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6}+y+3z \\ 4z' = -x\sqrt{6}+3y+z \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x' = x+2y+2z \\ 3y' = 2x+y-2z \\ 3z' = 2x-2y+z \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7x' = -2x+6y-3z \\ 7y' = 6x+3y+2z \\ 7z' = -3x+2y+6z \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x' = 2x-2y+z \\ 3y' = -2x-y+2z \\ 3z' = x+2y+2z \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3x' = 2x+y+2z \\ 3y' = 2x-2y-z \\ 3z' = -x-2y+2z \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x' = -x+3y-z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x-y-z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6}+y\sqrt{6}+2z \end{cases}$

11. $\begin{cases} 15x' = 5x-10z \\ 15y' = -8x+5y+6z \\ 15z' = 6x-10y+8z \end{cases}$

Correction ▼ [003711]

Exercice 3801 Ensi Physique 92

Déterminer la matrice de la rotation $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ telle que $\mathscr{R}(\vec{u}) = \vec{u}$ avec $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\mathscr{R}(\vec{i}) = \vec{k}$. Donner son angle de rotation.

Correction ▼ [003712]

Exercice 3802 **

$\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ donnée. Montrer que $\det_{\mathscr{B}}(u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u) = (\det_{\mathscr{B}}(u,v,w))^2$ pour tous vecteurs u, v et w.

Correction ▼ [005491]

Exercice 3803 **

Montrer que $u\wedge v|w\wedge s = (u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$ et $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s) = [u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Correction ▼ [005493]

Exercice 3804 **

Soit (e_1,e_2,e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de e_1+e_2.

Correction ▼ [005793]

Exercice 3805 ***

Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$.

Correction ▼ [005797]

Exercice 3806 **

Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté défini par

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ f(x) = a\wedge(a\wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

Correction ▼ [005801]

Exercice 3807 ** I

Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{array}\right.$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Correction ▼ [005803]

---

131 204.07 Endomorphismes auto-adjoints

Exercice 3808 Esem 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$. [003762]

Exercice 3809 Comatrice d'une matrice symétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\mathrm{com}M$ est aussi symétrique. La réciproque est-elle vraie ? [003763]

Exercice 3810 Base non orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E, G la matrice de Gram des $\vec{e}_i$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathscr{B}$.

1. Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.
2. Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

[003764]

Exercice 3811 autoadjoint $\Rightarrow$ linéaire

Soit $u : E \to E$ telle que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u(\vec{y}))$. Montrer que u est linéaire.

[003765]

Exercice 3812 Diagonalisation de matrices symétriques

Diagonaliser dans une base orthonormée :

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
2. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003766]

Exercice 3813 Diagonalisation de C^tC

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $M = (a_i a_j) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Correction ▼ [003767]

Exercice 3814 Décomposition en projections orthogonales

Soit φ l'endomorphisme de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe des projections orthogonales p, q et des réels λ, μ tels que :

$$\varphi = \lambda p + \mu q, \qquad p \circ q = 0, \qquad p + q = \mathrm{id}_E.$$

Correction ▼ [003768]

Exercice 3815 Ensi Physique 93

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$. On pose pour $P, Q \in E$: $< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ et on considère

$$u : E \to \mathbb{R}[x], P(x) \mapsto 2xP'(x) + (x^2 - 1)P''(x).$$

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire et que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et que si P_k, P_ℓ sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes, alors $<P_k, P_\ell>=0$.
3. Éléments propres de u pour $n = 3$?

Correction ▼ [003769]

Exercice 3816 $(X^2-1)P''+(2X+1)P'$

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\,dt$ et $\Phi(P) = (X^2-1)P''+(2X+1)P'$.

1. Vérifier que $(P \mid Q)$ existe et qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour ce produit scalaire, Φ est auto-adjoint $\left(\text{calculer } \int_{t=-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,dt \text{ par parties}\right)$.
3. Déterminer les valeurs propres de Φ et montrer qu'il existe une base propre de degrés étagés.

Correction ▼ [003770]

Exercice 3817 $\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u = E$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, u = E$. [003771]

Exercice 3818 $u \circ v$ autoadjoint ?

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$. [003772]

Exercice 3819 Composée de projecteurs

Soient p, q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
2. Montrer que $(\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) = E$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Correction ▼ [003773]

Exercice 3820 Autoadjoint et orthogonal

Quels sont les endomorphismes de E à la fois auto-adjoints et orthogonaux ? [003774]

Exercice 3821 Spectre et rang d'une matrice antisymétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures.
2. Montrer que $\mathrm{Ker} f \perp \mathrm{Im} f$. En déduire que $g = f_{|\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im} f$.
3. Montrer que g^2 est diagonalisable. En déduire que $\mathrm{rg}(M)$ est pair.

[003775]

Exercice 3822 Racine carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Calculer B lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. [003776]

Exercice 3823 $A = {}^tBB$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$. [003777]

Exercice 3824 Mineurs principaux positifs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Pour $1 \le p \le n$, on note Δ_p le déterminant de la sous-matrice $(a_{ij})_{1\le i\le p; 1\le j\le p}$.

1. Montrer que si A est définie positive, alors tous les déterminants Δ_p sont strictement positifs.
2. Réciproque : on suppose $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B triangulaire supérieure inversible telle $A = {}^tBB$. En déduire que A est définie positive.

Correction ▼ [003778]

Exercice 3825 q positive $\Rightarrow q(x) = \|u(x)\|^2$

Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme u auto-adjoint tel que : $\forall\, \vec{x} \in E$, $q(\vec{x}) = \|u(\vec{x})\|^2$. [003779]

Exercice 3826 A symétrique et $A^k = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$. [003780]

Exercice 3827 $\sum_{i,j} a_{ij}^2$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$. [003781]

Exercice 3828 u autoadjoint et $\mathrm{tr}(u) = 0$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tel que $u(\vec{x}) \perp \vec{x}$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_i)$ telle que : $\forall\, i,\ (u(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = 0$.

Correction ▼ [003782]

Exercice 3829 Matrices symétriques commutant

Soit (A_i) une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.

Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que : $\forall\, i,\ A_i = P_i(A)$. [003783]

Exercice 3830 Valeurs propres de AB

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, B définie positive. Montrer que les valeurs propres de AB sont réelles.

Correction ▼ [003784]

Exercice 3831 $\mathrm{tr}(AB) \le \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Montrer que $0 \le \mathrm{tr}(AB) \le \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Correction ▼ [003785]

Exercice 3832 $\det(A+B) \ge \det(A) + \det(B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que $\det(A+B) \ge \det(A) + \det(B)$.

Correction ▼ [003786]

Exercice 3833 f quelconque, il existe une BON dont l'image est orthogonale

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ dont l'image par f est une famille orthogonale.

Correction ▼ [003787]

Exercice 3834 Quotients de Rayleigh

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leq (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leq \lambda_n \|\vec{x}\|^2$.
2. Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f.
3. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$.
   Montrer que : $\forall\, i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

[003788]

Exercice 3835 $\mathrm{Spec}(A+B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, λ, λ' leurs plus petites valeurs propres et μ, μ' leurs plus grandes valeurs propres. Montrer que toute valeur propre de $A+B$ est comprise entre $\lambda + \lambda'$ et $\mu + \mu'$. [003789]

Exercice 3836 Comparaison de valeurs propres

Soient $h \in \mathscr{L}(E)$ autoadjoint, $\vec{x}_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(\vec{x}_0)$, et $f = h + p$.

On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ celles de f.

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

Correction ▼ [003790]

Exercice 3837 Mines P' 1996

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \Rightarrow f + f^* \in GL(E)$.
2. Montrer la réciproque lorsque l'on a $f^2 = 0$.

Correction ▼ [003791]

Exercice 3838 Rayon spectral

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f^* \circ f)\}$. [003792]

Exercice 3839 Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. En considérant l'endomorphisme $f^* \circ f$, montrer que si f est inversible alors f se décompose de manière unique sous la forme $f = u \circ h$ avec u unitaire et h hermitien positif.
2. Si f est non inversible, montrer qu'une telle décomposition existe mais n'est pas unique (on rappelle que $U(E)$ est compact).
3. Montrer que l'application $f \mapsto (u, h)$ est continue sur $GL(E)$.

[003793]

Exercice 3840 Endomorphismes normaux

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1. Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^{\perp}$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable en base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
   (1) u est normal.
   (2) $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   (3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
   (4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.
   (5) Il existe $P \in (x^2+1)^{[}X]$ tel que $u^* = P(u)$.

[003794]

Exercice 3841 $\|u(x)\| = \|v(x)\|$

Soit E un espace hermitien non nul et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\Big(\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists\, w \in\ U(E) \text{ tq } u = w \circ v\Big).$$

[003795]

Exercice 3842 $(u(x) \mid x)$ est réel

Soit E un espace vectoriel hermitien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $u = u^*$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $(u(x) \mid x)$ est réel.
2. On suppose u autoadjoint positif. Montrer : $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|^4 \leq (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x))$.

Correction ▼ [003796]

Exercice 3843 Série d'autoadjoints positifs

Soit H un espace de Hilbert et (u_n) une suite d'endomorphismes de H autoadjoints positifs continus telle que la suite $(u_0 + \cdots + u_n)$ est bornée dans $\mathscr{L}_c(H)$. Montrer que pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est convergente.

Correction ▼ [003797]

Exercice 3844 Mines MP 2000

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = {}^tAA$. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, dans $M_n((x^2+1)^{)}$?

Correction ▼ [003798]

Exercice 3845 Centrale MP 2000 (avec Maple)

Soit E un espace euclidien, u et v deux endomorphismes auto-adjoints de E, u étant défini positif.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w tel que $u \circ w + w \circ u = v$. Que peut-on dire de w ?
2. On suppose E de dimension 3, rapporté à une base orthonormale dans laquelle u et v ont pour matrices respectives $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer w.
3. On revient au cas général. Si v est défini positif, que dire de w ? Si w est défini positif, que dire de v ?

Correction ▼ [003799]

Exercice 3846 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace euclidien et s une symétrie de E.

1. Que dire de $s^* \circ s$?
2. Un polynôme P est dit réciproque si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$, pour P de degré n.
   Montrer que : $P(X) = \det(X\mathrm{id} + s^* \circ s)$ est un polynôme réciproque.

3. Montrer que $P(1) \geq 2^n$. A quelle condition y a-til égalité ? Y a-t-il des conditions sur s ?
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, carrée, d'ordre n, symétrique définie positive, où A_1 et A_4 sont carrées d'ordres respectifs p et q. Montrer que $\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_4)$.

Correction ▼ [003800]

Exercice 3847 Cachan MP* 2000

On note P l'ensemble des fonctions f polynomiales par morceaux, continues sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Si f et g sont des fonctions de P, on note $(f \mid g) = \int_{t=0}^{1} f'(t)g'(t)\,dt$.

1. Que dire de P muni de cette application ?
2. Montrer que si $x \in [0,1]$, il existe $g_x \in P$ telle que $\forall\, f \in P,\ (g_x \mid f) = f(x)$.
3. On considère n réels vérifiant : $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ et on donne n réels $(\alpha_i)_{i \in [[1,n]]}$. On pose $\varphi(f) = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \alpha_i)^2$ et on demande de trouver le minimum de φ sur P.

Correction ▼ [003801]

Exercice 3848 Centrale MP 2002

1. Que peut-on dire de l'adjoint d'un projecteur orthogonal d'un espace euclidien ? Réciproque ?
2. Soit p un projecteur d'un espace euclidien tel que $p \circ p^* = p^* \circ p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Correction ▼ [003802]

Exercice 3849 IIE MP 2004

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_0^1 fg$.

Soient u, v les endomorphismes de E définis par $u(f)(x) = \int_0^x f$ et $v(f)(x) = \int_x^1 f$.

1. Montrer que $(u(f) \mid g) = (f \mid v(g))$.
2. Déterminer les valeurs propres de $u \circ v$.

Correction ▼ [003803]

Exercice 3850 Centrale MP 2004

Soit E un espace euclidien de dimension n et p endomorphismes autoadjoints $u_1, \dots, u_p$. Soit q_i la forme quadratique associée à u_i ($q_i(x) = (u_i(x) \mid x)$). On suppose :

$$\forall\, x \in E,\ q_1(x) + \cdots + q_p(x) = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_p) = n.$$

1. Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{id}_E$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p) = E$.
3. Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

Correction ▼ [003804]

Exercice 3851 Mines MP 2005

Soit A matrice réelle ; montrer que A est diagonalisable ssi il existe S symétrique réelle définie positive telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Correction ▼ [003805]

Exercice 3852 Rayon spectral, Centrale MP 2006

Soient A, B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A + tB))$. Montrer que f est convexe.

Correction ▼ [003806]

132 204.08 Espaces vectoriels hermitiens

Exercice 3853 Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que pour $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Montrer que la somme $F_1+\dots+F_n$ est directe. [003823]

Exercice 3854 Espace ℓ^2

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u,v \in E$, on pose : $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(u \mid v)$ existe.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
4. Montrer que E, muni de la norme associée, est complet.

[003824]

Exercice 3855 $f(x) \perp x \Rightarrow f = 0$

Soit E un espace vectoriel préhilbertien complexe et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x}) \perp \vec{x}$.

1. Montrer que pour tous vecteurs $\vec{x},\vec{y} \in E$, on a $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = 0$.
2. Montrer que $f = 0$.
3. Comparer avec le cas réel.

Correction ▼ [003825]

Exercice 3856 Hanh-Banach pour une boule

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas $\vec{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall\, \vec{x} \in B,\ f(\vec{x}) > 0$. [003826]

Exercice 3857 Calcul de minimums

Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto \int_{x=0}^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2\,dx$.

Correction ▼ [003827]

Exercice 3858 Calcul de minimums

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \int_{t=0}^{1} (1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2\,dt$. Montrer que φ admet un minimum absolu et le calculer lorsque $n = 3$.
2. Même question avec $\psi(x_1,\dots,x_n) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}(1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2\,dt$.

Correction ▼ [003828]

Exercice 3859 Trouvez le produit scalaire

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés étagés ($\deg P_n = n$). Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille P_n est orthonormée.

[003829]

Exercice 3860 Décomposition de Cholesky

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\ i,\ T_{ii} > 0$.
2. Application : Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

[003830]

Exercice 3861 Changement de base unitaire

Soit E un espace vectoriel hermitien et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Montrer que ${}^t\overline{P}P = I$. Que peut-on dire de $\det P$? [003831]

Exercice 3862 Déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ la matrice de Gram de ces vecteurs ($g_{ij} = (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j)$).

1. On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.
2. En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_i$ sont liés.
3. Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.
4. Examiner le cas particulier $n = 2$.
5. Application : Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

Correction ▼ [003832]

Exercice 3863 Congruence des matrices de Gram

Soit E un espace vectoriel hermitien et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

[003833]

Exercice 3864 Normes euclidiennes

1. Montrer que les applications :
$$N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2} \quad \text{et} \quad N_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$$
sont des normes.
2. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha N_2(x,y) \leq N_1(x,y) \leq \beta N_2(x,y)$.
3. Trouver les meilleures constantes α, β (étudier si $N_1(x,y)^2 - \lambda N_2(x,y)^2$ est positive, négative).

Correction ▼ [003834]

Exercice 3865 Famille duale de $1, X, X^2, \dots$

1. Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall\ i, j \leq n,\ \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t)\, dt = \delta_{ij}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes $(P_0, \dots, P_n, \dots)$ telle que : $\forall\ i, j \in \mathbb{N},\ \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t)\, dt = \delta_{ij}$.

Correction ▼ [003835]

Exercice 3866 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E l'ensemble des fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues et $\Phi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f \times \int_a^b 1/f$.

Montrer que $\min\limits_{f \in E} \Phi(f) = (b-a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

Correction ▼ [003836]

Exercice 3867 Intégrale double

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace E des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ nulles sur le bord, C, de D.

Pour $f,g \in E$, on pose $(f \mid g) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy$. Montrer que c'est un produit scalaire.

[003837]

Exercice 3868 Forme quadratique associée à la matrice de Gram

Soit E un espace euclidien, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.

Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \sum_{i,j} a_{ij}(\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.

Correction ▼ [003838]

Exercice 3869 Orthogonal des polynômes

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

1. Montrer que $g \notin F$.
2. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.
3. En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

[003839]

Exercice 3870 Orthogonal d'un hyperplan

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et, pour $f \in E$: $\varphi(f) = \int_{t=0}^{1/2} f(t)\,dt$.

1. Montrer que φ est continue.
2. Montrer que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.
3. Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Correction ▼ [003840]

Exercice 3871 Produit scalaire

Soit $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f,g \in E$: $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} u(t)f(t)g(t)\,dt$.

1. A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?
2. Soient u,v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Correction ▼ [003841]

Exercice 3872 Produit scalaire ?

Soit $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a,b]$.

Pour $f,g \in E$, on pose : $(f \mid g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$.

1. A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?
2. Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.
3. Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?
4. Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Correction ▼ [003842]

Exercice 3873 Ulm MP* 2000

V est un espace hermitien et u, v, w trois vecteurs unitaires. Montrer que :

$$\sqrt{1-|(u \mid v)|^2} \leq \sqrt{1-|(u \mid w)|^2}+\sqrt{1-|(v \mid w)|^2}.$$

Correction ▼ [003843]

Exercice 3874 Ulm MP* 2000

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer qu'elle admet une décomposition $A = UT\,{}^tU$ avec U unitaire et T triangulaire supérieure si et seulement si le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [003844]

---

133 204.09 Problèmes matriciels

Exercice 3875 $I + a(X^tY - Y^tX)$ inversible

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ indépendantes, $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice $n \times n$ telle que $m_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$.

A quelle condition $I + aM$ est-elle inversible ?

Correction ▼ [003807]

Exercice 3876 Matrice orthogonale pour une forme (p,q)

Soit $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ telle que ${}^tMJM = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Correction ▼ [003808]

Exercice 3877 Calcul d'inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, avec a, b, c, d non tous nuls.

Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [003809]

Exercice 3878 Matrices normales

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \iff \operatorname{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

Correction ▼ [003810]

Exercice 3879 f normal, $f^2 = -\mathrm{id}$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.

Correction ▼ [003811]

Exercice 3880 Chimie P 1996

Soit S, matrice orthogonale d'ordre impair, de coefficients fonction de t dérivables. Montrer que $\frac{dS}{dt}$ n'est pas inversible.

[003812]

Exercice 3881 Chimie P 1996

Déterminer a, b, c, réels non nuls pour que la matrice $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{c} & \frac{a}{b} \\ \frac{c}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{c}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{a}{c} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une isométrie.

Correction ▼ [003813]

Exercice 3882 Noyaux de A et ${}^tA$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{tr}({}^tXAX) \geq 0$. Comparer les noyaux de A et ${}^tA$.

Correction ▼ [003814]

Exercice 3883 Matrice orthogonale ?

1. Peut-on définir sur $\mathbb{R}^2$ une structure euclidienne telle que l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ soit une rotation ?
2. Généraliser à une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque.
3. Généraliser à une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Correction ▼ [003815]

Exercice 3884 Valeurs propres d'une matrice complexe

Soit $M \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ et $\lambda \in \mathrm{spec}(M)$. Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda)$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur propre de $\frac{1}{2}(M+M^*)$.
[003816]

Exercice 3885 Centrale MP 2001

1. Montrer que toute matrice symétrique réelle positive a ses coefficients diagonaux positifs. Montrer que si l'un des coefficients diagonaux u_{ii} est nul, alors pour tout j on a $u_{ij} = 0$.
2. U est une matrice symétrique réelle positive de la forme $U = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$ avec A et B carrées. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Correction ▼ [003817]

Exercice 3886 Centrale MP 2001

1. Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ montrer l'existence de deux matrices orthogonales U et V telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.
2. Même question pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer U et V pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003818]

Exercice 3887 X MP* 2001

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose $A \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que A est semblable à la matrice A' précédente avec une matrice de passage orthogonale.

Correction ▼ [003819]

Exercice 3888 X MP* 2001

Soient A et B deux matrices hermitiennes et $C = A+B$. On note $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ les valeurs propres de la première, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ celles de la deuxième, $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$ celles de la troisième. Montrez que pour tout i on a $c_i \geq a_i + b_n$. *Indication :* se ramener au cas $b_n = 0$.

Correction ▼ [003820]

Exercice 3889 Centrale MP 2002

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n\times n$ symétriques à coefficients réels, $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives et $\phi \in \mathscr{L}(S_n(\mathbb{R}))$. On suppose que $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall\, M \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists\, A \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall\, \lambda > A,\ M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\phi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ et que $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $n = 2$ et $\phi(I_2) = I_2$. Montrer que : $\forall\, M \in S_2(\mathbb{R}),\ \chi_{\phi(M)} = \chi_M$. Montrer que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. ϕ conserve le déterminant).

Correction ▼ [003821]

Exercice 3890 Mines MP 2002

Déterminer $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $M({}^tMM)^2 = I_n\}$.

Correction ▼ [003822]

Exercice 3891 **

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. Etudier les endomorphismes de matrice A dans $\mathscr{B}$ suivants :

$$1)\ A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2/\ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3/\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [005489]

Exercice 3892 ***

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels. Montrer que M est la matrice dans la base canonique orthonormée directe de R^3 d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$. En posant $k = \frac{4\sin^2\varphi}{27}$, déterminer explicitement les matrices M correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

Correction ▼ [005490]

Exercice 3893 *** I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_i|x_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1,\ldots,x_n) = \det(G(x_1,\ldots,x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1,\ldots,x_n)) = \mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,\ldots,x_n) = 0$ et que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,\ldots,x_n) > 0$.
3. On suppose que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x,F) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)}{\gamma(x_1,\ldots,x_n)}}$.

Correction ▼ [005780]

Exercice 3894 *** I

Montrer que la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.

Correction ▼ [005786]

Exercice 3895 *** I

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S)$.
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
   Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Correction ▼ [005787]

Exercice 3896 ***

Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Correction ▼ [005791]

Exercice 3897 ***

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

Correction ▼ [005794]

Exercice 3898 **

Déterminer $\mathrm{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Correction ▼ [005795]

Exercice 3899 **

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

Correction ▼ [005798]

Exercice 3900 *** I

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

Correction ▼ [005799]

Exercice 3901 *** I

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A + \det B \leqslant \det(A + B)$.

Correction ▼ [005800]

Exercice 3902 **

La matrice $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie ?

Correction ▼ [005804]

Exercice 3903 ***

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

Correction ▼ [005805]

Exercice 3904 ** I

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A = {}^tTT$.

Correction ▼ [005813]

Exercice 3905 *** I

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux (utiliser l'exercice 3904).

Correction ▼ [005814]

---

134 204.99 Autre

Exercice 3906 **I

Soit a un vecteur non nul de l'espce euclidien $\mathbb{R}^3$. On définit f de $\mathbb{R}^3$ dans lui même par : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Montrer que f est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par f.

Correction ▼ [005487]

Exercice 3907 ***I Inégalité de HADAMARD

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, espace euclidien de dimension n. Montrer que : $\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n$, $|\text{det}_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)| \leq ||x_1||...||x_n||$ en précisant les cas d'égalité.

Correction ▼ [005492]

Exercice 3908 ***

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} P^2(t)\, dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ |x| \leq 1\} \leq 2$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005497]

Exercice 3909 **IT

Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$, euclidien orienté, dont l'axe est orienté par k unitaire et dont une mesure de l'angle est θ. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(k \wedge x) + 2(x.k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$. Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$) de la rotation autour de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005498]

Exercice 3910 **

Soit f continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\, dt$. Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Correction ▼ [005499]

Exercice 3911

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linéaire.

1. Montrer qu'il existe deux complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Calculer $\mathrm{Tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de a et b.
3. C.N.S. pour que f soit autoadjoint dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Correction ▼ [005796]

Exercice 3912 *** I

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction ▼ [005802]

135 205.01 Arithmétique de Z

Exercice 3913

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\forall n \geq 3 \quad \pi(2n+1) \geq \ln 2 \times \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

a) Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ pour p et q entiers naturels.

b) Soit D_n le ppmc de $n+1,\ n+2, \dots,\ 2n+1$. A l'aide de $I_{n,n}$, établir l'inégalité $D_n \geq \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

c) Montrer que $D_n \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}$ et en déduire la minoration de $\pi(2n+1)$ annoncée au début de l'exercice.

Correction ▼ [002658]

Exercice 3914 **

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Correction ▼ [005291]

Exercice 3915 ***T

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6|5n^3+n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n}+2^{2^n}+1$.

Correction ▼ [005292]

Exercice 3916 ***IT

Un entier de la forme $8n+7$ ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

Correction ▼ [005293]

Exercice 3917 **IT

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

Correction ▼ [005294]

Exercice 3918 ****

Montrer que, pour tout entier naturel n, 2^{n+1} divise $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$.

Correction ▼ [005295]

Exercice 3919 ***IT

Soient A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres de B. (Commencer par majorer la somme des chiffres de $n = a_0 + 10a_1 \dots + 10^p a_p$.)

Correction ▼ [005296]

Exercice 3920 **

Montrer que si p est premier et $8p^2+1$ est premier alors $8p^2-1$ est premier.

Correction ▼ [005297]

Exercice 3921 **I

1. Montrer que $\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[k \wedge n = 1 \Rightarrow n | C_n^k]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)|C_{2n}^n$.

Correction ▼ [005298]

Exercice 3922 **T

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=56 \\ x\vee y=105 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{l} x\wedge y=x-y \\ x\vee y=72 \end{array}\right. \qquad 3)\ x\vee y - x\wedge y = 243.$$

Correction ▼ [005299]

Exercice 3923 ***

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Correction ▼ [005300]

Exercice 3924 ***IT

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n}+1$ (nombres de FERMAT). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Correction ▼ [005301]

Exercice 3925 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de FIBONACCI).

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \wedge u_{n+1} = 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1}u_n$ et en déduire que $u_m \wedge u_n = u_{m\wedge n}$ pour m et n non nuls.

Correction ▼ [005302]

Exercice 3926 ***I

On veut résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $x^2+y^2=z^2$ (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple $(3,4,5)$).

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $x \wedge y \wedge z = 1$. Montrer alors que dans ce cas, x, y et z sont de plus deux à deux premiers entre eux.
2. On suppose que x, y et z sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres x, y et z sont impairs le troisième étant pair puis que z est impair.
   On suppose dorénavant que x et z sont impairs et y est pair. On pose $y = 2y'$, $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$.

3. Montrer que $X \wedge Z = 1$ et que X et Z sont des carrés parfaits.
4. En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

$$(d(u^2 - v^2),\ 2duv,\ d(u^2 + v^2))$$

où $d \in \mathbb{N}$, $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, à une permutation près des deux premières composantes.

Correction ▼ [005303]

Exercice 3927 **

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$.

Correction ▼ [005304]

Exercice 3928 ***

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation d'inconnue (x, y) : $\sum_{k=1}^{x} k! = y^2$.

Correction ▼ [005305]

Exercice 3929 ***

Montrer que $n = 4...48...89$ (p chiffres 4 et $p-1$ chiffres 8 et donc $2p$ chiffres) (en base 10) est un carré parfait.

Correction ▼ [005306]

Exercice 3930 ***I

Montrer que tout nombre impair non divisible par 5 admet un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1 (par exemple, $37.1 = 37$, $37.2 = 74$, $37.3 = 111$).

Correction ▼ [005307]

Exercice 3931 ***

Soit $u_n = 10...01_2$.(n chiffres égaux à 0). Déterminer l'écriture binaire de :

1. u_n^2,
2. u_n^3,
3. $u_n^3 - u_n^2 + u_n$.

Correction ▼ [005308]

Exercice 3932 **I

1. Déterminer en fonction de n entier non nul, le nombre de chiffres de n en base 10.
2. Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10.
   (a) Montrer que la suite $\left(\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n \geq 1}$ est bornée. Cette suite converge-t-elle ?
   (b) Montrer que pour tout naturel non nul n, $1 \leq \sigma(n) \leq 9(1 + \log n)$.
   (c) Montrer que la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Correction ▼ [005309]

Exercice 3933 ***I

1. (Formule de LEGENDRE) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Etablir que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$E(\frac{n}{p}) + E(\frac{n}{p^2}) + E(\frac{n}{p^3}) + \dots$$

2. Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de 1000! ?

Correction ▼ [005310]

Exercice 3934 ***I Petit théorème de FERMAT

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$ (par récurrence sur a).

Correction ▼ [005311]

Exercice 3935 ***I Théorème de WILSON

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que : $(p-1)! \equiv -1\ (p) \Rightarrow p$ est premier (en fait les deux phrases sont équivalentes mais en Sup, on sait trop peu de choses en arithmétique pour pouvoir fournir une démonstration raisonnablement courte de la réciproque).

Correction ▼ [005312]

136 205.02 Anneau Z/nZ, théorème chinois

Exercice 3936

Donner la liste des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. [001393]

Exercice 3937

Soit le groupe G (additif) $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par $\overline{12}$ et $\overline{20}$. Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et trouver son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G. Combien en compte-t-on ?
3. Déterminer l'ordre de $\overline{15}$.

[001394]

Exercice 3938

1. Montrer qu'il n'existe aucun élément d'ordre 3 dans le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

[001395]

Exercice 3939

Soit f un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. Montrer que f est caractérisé par $f(\overline{1})$.
2. Déterminer les ordres possibles de $f(\overline{1})$.
3. En déduire la liste des morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

[001396]

Exercice 3940

Soit G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

1. Donner la liste des éléments de G et déterminer l'ordre de chacun d'entre eux. G est-il cyclique ?
2. Donner la liste des sous-groupes de G et en constuire le treillis.

[001397]

Exercice 3941

1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (\overline{n}, \widetilde{n})$.
   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer le noyau de f.
2. En déduire que les groupes $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

[001398]

Exercice 3942

Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ? [001399]

Exercice 3943

On note R_n la rotation du plan de centre O, d'angle $2\pi/n$, S la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

1. Montrer que $S^2 = id$, $(R_n)^n = id$ et $R_n S = S R_n^{-1}$.
2. Montrer que le sous-groupe des isométries du plan engendré par R_n et S (ie le plus petit sous-groupe des isométries du plan qui contient R_n et S) est de cardinal $2n$. On le note D_n : c'est le groupe dihédral d'ordre $2n$.
3. Montrer que D_n préserve un polygone régulier à n côtés, centré en O.
4. En vous aidant de ce qui précède, construire un isomorphisme entre D_3 et S_3.

[001400]

Exercice 3944

Soit $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ l'ensemble des quaternions. $\mathbb{H}^*$ désigne $\mathbb{H}$ privé de la matrice nulle. On note $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{H}^*$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} == \mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
3. En déduire que le sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ engendré par $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ est d'ordre 8. On le note H_8.
4. Ecrire la table de H_8.
5. Vérifier que les groupes (tous de cardinal 8) H_8, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et D_4 sont 2 à 2 non isomorphes.

[001401]

Exercice 3945 Équations linéaires

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

1. $$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{7}y = \dot{3} \\ \dot{6}x - \dot{7}y = \dot{0}. \end{cases}$$
2. $x^2 - \dot{\overline{31}}x + \dot{\overline{18}} = \dot{0}$.

Indication ▼ Correction ▼ [003151]

Exercice 3946 Équation algébrique

1. Dresser la liste des cubes dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$. Montrer que 13 divise x, y, z.
3. L'équation : $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ a-t-elle des solutions entières ?

Correction ▼ [003152]

Exercice 3947 Ordre d'un entier modulo n

1. Soient $n,p \geq 2$. Montrer que : $n \wedge p = 1 \iff \exists\, k > 0$ tel que $n^k \equiv 1 (\bmod p)$.
2. Soit n un entier impair non divisible par 5. Montrer qu'il existe un multiple de n qui s'écrit $1\dots1$ en base 10.

[003153]

Exercice 3948 Théorème chinois

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge p = 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ on note $\bar{x}^n$, $\bar{x}^p$ et $\bar{x}^{np}$ les classes d'équivalence de x modulo n, p et np.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Z}/(np\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \bar{x}^{np} \mapsto (\bar{x}^n, \bar{x}^p)$ est un morphisme d'anneaux.
2. En déduire que $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$ (φ = fonction d'Euler).
3. Vérifier que l'hypothèse $n \wedge p = 1$ est nécéssaire.

[003154]

Exercice 3949 Théorème de Wilson

Soit $n \geq 2$. Montrer que n est premier si et seulement si $(n-1)! \equiv -1 (\bmod n)$.

Correction ▼ [003155]

Exercice 3950 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$

1. Montrer que pour tout entier a impair et tout $n \geq 3$: $a^{2^{n-2}} \equiv 1 (\bmod 2^n)$.
2. Le groupe $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?

[003156]

Exercice 3951 Équation algébrique

1. Démontrer que f est une permutation de E.
2. Chercher l'ordre de f pour $\circ$.
3. En déduire que le nombre de points fixes de f est congru à $\operatorname{Card} E$ modulo 3.
4. Démontrer que ce nombre est inférieur ou égal à 2.
5. Combien l'équation $x^2 - x + \dot{1} = \dot{0}$ a-t-elle de racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en fonction de p ?
6. Pour $p = 37$, résoudre l'équation.

Correction ▼ [003157]

Exercice 3952 Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\dot{k}$ est un carré dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $k^{(p+1)/2} \equiv k (\bmod p)$. [003158]

Exercice 3953 Test de primalité de Rabin-Miller

Soit n un entier premier impair supérieur ou égal à 3 : $n = q2^p + 1$ avec p impair et soit $a \in \mathbb{Z}$ premier à n. On considère la suite $(b_0, b_1, \dots, b_p)$ d'entiers compris entre 0 et $n-1$ définie par :

$$b_0 \equiv a^q (\bmod n), \quad b_1 \equiv b_0^2 (\bmod n), \quad \dots, \quad b_p \equiv b_{p-1}^2 (\bmod n).$$

1. Montrer que $b_p = 1$.
2. Si $b_0 \neq 1$ montrer qu'il existe un indice i tel que $b_i = n-1$.

[003159]

Exercice 3954 Coefficients du binôme

Soit p un nombre premier. Montrer que $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k \equiv 2^p + 1 (\bmod p^2)$.

Correction ▼ [003160]

Exercice 3955 Suite récurrente (Mines MP 2003)

On considère la suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ telle que pour tout n on ait $x_{n+3} = 4(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)$. Déterminer les différents comportements possibles de (x_n).

Correction ▼ [003161]

Exercice 3956 -3 est-il un carré ?

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer qu'une équation du second degré : $x^2 + ax + b = \dot{0}$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si son discriminant : $a^2 - 4b$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $p \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$: $p = 3q + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $a^q \neq \dot{1}$.
   (b) En déduire que $-\dot{3}$ est un carré.
3. Réciproquement, on suppose que $-\dot{3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $p \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$.

Correction ▼ [003162]

Exercice 3957 Indicateur d'Euler

Soit $n \geq 3$. Montrer que $\varphi(n)$ est pair et que $\sum_{x \wedge n = 1, 1 \leq x \leq n} x = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

Correction ▼ [003163]

137 205.03 Groupe fini commutatif

138 205.04 Arithmétique de K[X]

139 205.05 Corps fini

140 205.06 Applications

141 205.99 Autre

142 220.01 Convergence normale

143 220.02 Critères de Cauchy et d'Alembert

144 220.03 Rayon de convergence

Exercice 3958 Vrai ou faux ?

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^-.
5. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p, $\frac{f(x)}{x^p} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

[004564]

Exercice 3959 Calculs de rayons

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

1. $a_n \to \ell \neq 0$ lorsque $n \to \infty$
2. (a_n) est périodique non nulle.
3. $a_n = \sum_{d|n} d^2$.
4. $a_n = \frac{n^n}{n!}$.
5. $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$,
   $0 < a < b$.
6. $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
7. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
8. $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
9. $a_n = \frac{1.4.7...(3n-2)}{n!}$.
10. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
11. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
12. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,
    $a_0 = a_1 = 1$.
13. $a_n = C_{kn}^n$.
14. $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
15. $a_n = \int_{t=0}^{1} (1+t^2)^n \, dt$.
16. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
17. $a_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Correction ▼ [004565]

Exercice 3960 Centrale P' 1996

Comment peut-on trouver le rayon de convergence d'une série entière dont la suite des coefficients admet une infinité de zéros ?
[004566]

Exercice 3961 Mines MP 2003

Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right) x^k$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?

Correction ▼ [004567]

Exercice 3962 Ensi MP 2003

Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$ et étude pour $x = \pm R$.

Correction ▼ [004568]

Exercice 3963 Centrale MP 2003

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}$, $b_n = \sin(a_n)$.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.
2. Déterminer la nature de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ en fonction de x.

Correction ▼ [004569]

Exercice 3964 Transformation de rayons

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

1. $\sum a_n^2 z^n$.
2. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
3. $\sum \frac{n!a_n}{n^n} z^n$.

Correction ▼ [004570]

Exercice 3965 Séries paire et impaire

On suppose que les séries $\sum a_{2n}z^n$ et $\sum a_{2n+1}z^n$ ont pour rayons de convergence R et R'. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Correction ▼ [004571]

Exercice 3966 Division par $z-\rho$

Soit $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et $\rho > 0$.

On définit la série entière $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de sorte que $(z-\rho)b(z) = a(z)$ en cas de convergence de $b(z)$.

1. Prouver l'existence et l'unicité des coefficients b_n.
2. Quel est le rayon de convergence de $b(z)$?

Correction ▼ [004572]

Exercice 3967 Développer peut être dangereux

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.
2. On développe $u_n(x)$ par la formule du binôme : $u_n(x) = \sum_{4^n \leq k \leq 2.4^n} a_k x^k$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 1} a_k x^k$ est égal à 1 (en convenant que les a_k non définis valent zéro).

Correction ▼ [004573]

Exercice 3968 **

Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n z^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(n!))^2 z^n$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n^n} z^n$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{n!^b} z^n$
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} z^n$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Correction ▼ [005745]

---

145 220.04 Propriétés de la somme d'une série entière

146 220.05 Calcul de la somme d'une série entière

Exercice 3969 Sommation de séries entières

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1}$, $x \geq 0$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \operatorname{ch}(na)$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n!}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n+1} x^n$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t=1}^{x} \ln^n t \, dt$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Correction ▼ [004581]

Exercice 3970 Suite récurrente linéaire

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Correction ▼ [004582]

Exercice 3971 Série matricielle, Centrale MP 2000

1. Montrer l'existence de $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ pour $z \in (x^2+1)$, $|z| < 1$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} k A^k$ converge si et seulement si les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.
3. La somme $S = \sum_{k=1}^{\infty} k A^k$ est-elle inversible ?

Correction ▼ [004583]

Exercice 3972 Série des traces (Centrale MP 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.
2. On pose $t_n = \operatorname{tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

Correction ▼ [004584]

Exercice 3973 Centrale MP 2000

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [004585]

Exercice 3974 $\sum P(n)x^n$, Ensi P 91

Rayon et somme de $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme de degré p.

Correction ▼ [004586]

Exercice 3975 $\sum e^{in\theta}/2^n$, Ensi P 91

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n2^n}$.

Correction ▼ [004587]

Exercice 3976 Ensae MP* 2000

Soit (u_n) définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{n-k}}{k!}=1$. Trouver la limite de (u_n).

Correction ▼ [004588]

Exercice 3977

Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

1) (**) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ **2) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n$ **3) (** I)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ **4) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^n$

5) (*) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ **6) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{ch}\,n)x^n$ **7) (** I)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ **7)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n$

9) (I)** $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n$ **10) (*)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$ **11) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$ **12) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$

13) (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où $a_0=a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

14) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où a_n est le nombre de couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x+5y=n$.

Correction ▼ [005746]

Exercice 3978 ***

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n$ pour x dans $]-1,1[$.

Correction ▼ [005752]

Exercice 3979 *** I

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{4n^2-1}$ pour x dans $]-1,1[$ et en déduire les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Correction ▼ [005753]

Exercice 3980 ****

Pour n entier naturel, on pose $u_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}$. Convergence et somme de la série (numérique) de terme général u_n.

Correction ▼ [005754]

Exercice 3981 **

On pose $a_0=1$ et $b_0=0$ puis pour tout entier naturel n, $\left\{\begin{array}{l}a_{n+1}=-a_n-2b_n\\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\end{array}\right.$. Rayons et sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$.

Correction ▼ [005757]

Exercice 3982 *** I

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nC_{2n}^{n}}x^n$.

Correction ▼ [005758]

Exercice 3983 ***

Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction ▼ [005763]

147 220.06 Développement en série entière

Exercice 3984 Développements en série entière

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x+x^2)$.
2. $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$.
3. $x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
4. $\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
5. $\frac{1}{1+x-2x^3}$.
6. $\frac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.
7. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
8. $\operatorname{Arctan}(x+1)$.
9. $\operatorname{Arctan}(x+\sqrt{3})$.
10. $\int_{t=0}^{x}\frac{\ln(t^2-5t/2+1)}{t}\,dt$.
11. $\left(\frac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$.
12. $\int_{t=x}^{2x}e^{-t^2}\,dt$.
13. $e^{-2x^2}\int_{t=0}^{x}e^{2t^2}\,dt$.
14. $\frac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.
15. $\sin\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arcsin}x\right)$.

Correction ▼ [004574]

Exercice 3985 Ensi PC 1999

Développer en série entière : $\ln(\sqrt{1-2x\operatorname{ch}a+x^2})$.

Correction ▼ [004575]

Exercice 3986 $e^{x^2}/(1-x)$

Développer en série entière $\frac{e^x}{1-x}$ puis $\frac{e^{x^2}}{1-x}$.

Correction ▼ [004576]

Exercice 3987 Mines-Ponts MP 2004

Développer en série entière $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

Correction ▼ [004577]

Exercice 3988 DSE d'une fraction rationnelle par récurrence linéaire

Développer $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1-x-x^2)f(x)=x$.

Correction ▼ [004578]

Exercice 3989 Produit de polynômes

Quel est le coefficient de x^n dans $\left(1+x+\cdots+x^n\right)\left(1+2x+\cdots+(n+1)x^n\right)\left(1+4x+\cdots+(n+1)^2x^n\right)$?

Correction ▼ [004579]

Exercice 3990 Développement en série entière de $\zeta(1+x)-1/x$

1. Vérifier que pour $x\in\,]0,+\infty[$ on a : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1+x}}-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)\right)$.
2. Pour $p\in\mathbb{N}$ on pose $\gamma_p=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln^p(1)}{1}+\cdots+\frac{\ln^p(k)}{k}-\frac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\right)$. Justifier l'existence de γ_p et montrer que $|\gamma_p|\leq(p/e)^p$.
3. Montrer alors que pour $x\in\,]0,1[$ on a : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\gamma_p}{p!}x^p$.

[004580]

Exercice 3991 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx)$

Soit $q\in\,]-1,1[$ et $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx)$.

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$ et que f est développable en série entière au voisinage de 0. On admettra que si une fonction g est DSE alors e^g l'est.
2. A l'aide de la relation : $f(x)=(1-qx)f(qx)$, calculer les coefficients du développement de f et le rayon de convergence.

Correction ▼ [004589]

Exercice 3992 Fonction non DSE

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n+n^2ix}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière autour de 0.

Correction ▼ [004590]

Exercice 3993 Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003

Soit $\alpha>0$. On considère la fonction $f_\alpha : x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^\alpha}e^{inx}$. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$. Donner une CNS sur α pour que f soit développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004591]

Exercice 3994 Théorème de réalisation de Borel

Soit (a_n) une suite complexe donnée, on construit dans cet exercice une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout entier n on ait $f^{(n)}(0)=n!\,a_n$.

Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant : $\forall\, x\in[-1,1],\ \varphi(x)=1$ et $\forall\, x\notin[-2,2],\ \varphi(x)=0$ (l'existence de φ fait l'objet de la question 2.). On pose $\varphi_n(x)=x^n\varphi(x)$, $M_n=\max(\|\varphi_n'\|_\infty,\dots,\|\varphi_n^{(n)}\|_\infty)$ et $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\varphi(\lambda_nx)$ où (λ_n) est une suite de réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$ et telle que $\sum|a_n|M_n/\lambda_n$ converge.

1. Montrer que f est bien définie, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0)=n!\,a_n$.
2. Construction de φ : à l'aide de fonctions du type $x\mapsto\exp(-1/x)$ construire une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ nulle sur $[0,1]\cup[2,+\infty[$ et strictement positive sur $]1,2[$.

   Vérifier alors que $\varphi(x)=\int_{t=|x|}^{+\infty}\psi(t)\,dt\Big/\int_{t=0}^{+\infty}\psi(t)\,dt$ convient.

Correction ▼ [004592]

Exercice 3995

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1) (*) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$	**2)** (*** I) $\frac{1}{x^2-2tx+1}$, $t\in\mathbb{R}$	**3)** (*) $\ln(x^2-5x+6)$
4) (**) $\mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)$, $a\in\,]0,\pi[$	**5)** (**) $\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-p)}$	**6)** (*** I) $(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$
7) (*) $\int_0^x\cos(t^2)\,dt$	**8)** (*** I) $\int_{-\infty}^x\frac{dt}{t^4+t^2+1}$	**9)** (**) $\cos x\,\mathrm{ch}\,x$.

Correction ▼ [005747]

Exercice 3996 * I

Pour x réel, on pose $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$. Montrer que f est ce classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005748]

Exercice 3997 ***

Pour x réel, on pose $F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$. En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!}=(-1)^n\frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}.$$

Correction ▼ [005756]

Exercice 3998 **** I Développement en série entière de la fonction $x\mapsto \tan x$

Pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x)=\tan x$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}=P_n\circ f$ et que les P_n sont à coefficients entiers naturels. (Utiliser $\tan'=1+\tan^2$).
2. En utilisant la formule de TAYLOR-LAPLACE, montrer que la série de TAYLOR à l'origine de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.
3. On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$. En déduire que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=g(x)$ et que $R=\frac{\pi}{2}$.
4. Calculer a_0, a_1, a_2,..., a_7.
5. Vérifier que la fonction $x\mapsto \operatorname{th}x$ est développable en série entière. Préciser le rayon et la valeur des coefficients en fonction des a_n.

Correction ▼ [005761]

Exercice 3999 ***

Développer en série entière $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt$ et en déduire que pour tout réel x, $F(x)=\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt$.

Correction ▼ [005762]

148 220.07 Etude au bord

Exercice 4000 Étude sur le cercle de convergence

Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.
2. Étudier la convergence de f pour $x=\pm R$.
3. Déterminer $\lim_{x\to R^-}f(x)$.

Correction ▼ [004593]

Exercice 4001 Coefficients équivalents $\Rightarrow$ séries équivalentes

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ est 1 et que la série diverge pour $x=1$.

1. Montrer que $A(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^-$.
2. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \to 1^-$.

Correction ▼ [004594]

Exercice 4002 Produit de Cauchy

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). Montrer que si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent vers A,B,C, alors $C = AB$ (considérer les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$).

Correction ▼ [004595]

Exercice 4003 Produit de Cauchy

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). On suppose que la série $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R > 0$ et que $b_n/b_{n+1} \to \lambda$ lorsque $n \to \infty$ avec $|\lambda| < R$. Montrer que $c_n/b_n \to A(\lambda)$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004596]

149 220.08 Equations différentielles

Exercice 4004 Équation différentielle

Montrer que l'équation $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de 0. Calculer $y(1)$ à 5.10^{-5} près.

Correction ▼ [004597]

Exercice 4005 DSE de tan

1. En utilisant la relation : $\tan' = 1 + \tan^2$, exprimer $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan, \dots, \tan{(n-1)}$. En déduire que : $\forall\, x \in [0, \pi/2[$, $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.
2. Montrer que la série de Taylor de tan en 0 converge sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
3. Soit f la somme de la série précédente. Montrer que $f' = 1 + f^2$ et en déduire que $f = \tan$.
4. Prouver que le rayon de convergence est exactement $\pi/2$.

Correction ▼ [004598]

Exercice 4006 DSE de $(\operatorname{Arcsin} x)^2$

On pose $f(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.
2. Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.
3. Donner le développement en série entière de $\operatorname{Arcsin}^2 x$.

Correction ▼ [004599]

Exercice 4007 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et montrer que f vérifie l'équation : $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.
2. Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ (utiliser le DL de f en 0 à l'ordre 1 pour fixer la constante) et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$.

Correction ▼ [004600]

Exercice 4008 Calcul de somme

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^{2n+1}}{1.3.5...(2n+1)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence.
2. Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
3. Calculer $f(x)$.

Correction ▼ [004601]

Exercice 4009 Fonction génératrice du nombre de partitions

On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Montrer que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.
2. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$.

Correction ▼ [004602]

Exercice 4010 Suite récurrente

Soit (a_n) la suite réelle définie par : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence est non nul.
2. Calculer $f(x)$.
3. En déduire a_n en fonction de n.

Correction ▼ [004603]

Exercice 4011 Fonction ζ

Pour $|x| < 1$ on pose : $Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^n$.

Montrer que Z vérifie l'équation différentielle : $2xZ'(x) - 2Z^2(x) + Z(x) = 3x\zeta(2)$ (écrire $Z(x)$ comme somme d'une série double, intervertir les sommations, remplacer et ... simplifier).

En déduire la relation de récurrence : $\forall\, n \geq 2,\ (n + \frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

Correction ▼ [004604]

Exercice 4012 DSE de tan

On note $\zeta_i(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}$ et $Z_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_i(2n) x^n$. En s'inspirant de l'exercice 4011 montrer que Z_i vérifie l'équation différentielle : $2xZ_i'(x) - 2Z_i^2(x) - Z_i(x) = x\zeta_i(2)$.

Déterminer alors deux réels α et β tels que $T(x) = Z_i(x^2)/x$ soit égal à $\alpha \tan \beta x$ sur $]-1, 1[$.

Correction ▼ [004605]

Exercice 4013 DSE de $\tan x$.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, \pi)$, vérifier l'identité suivante : $\frac{(1+ia) - e^{ib}(1-ia)}{1 - e^{ib}} = 1 - \frac{a}{\tan(b/2)}$.
2. Pour $a, b \in (x^2+1)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité suivante : $a^n + b^n = \prod_{k=0}^{n-1} (a - be^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}})$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité suivante : $\frac{\left(1+\frac{ix}{2p}\right)^{2p} + \left(1-\frac{ix}{2p}\right)^{2p}}{2} = \prod_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{x^2}{4p^2 \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4p}}\right)$.
4. Démontrer alors : $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \ln(\cos x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$.
5. En déduire : $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, vérifier l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{2^n-1}{2^n}\zeta(n)$.
7. Démontrer enfin : $\forall\, x \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4^n-1)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}$.

[004606]

---

150 220.09 Intégrales

Exercice 4014 $\int_{t=0}^{1} t^t\, dt$

---

1. A l'aide d'un développement en série entière, montrer que $\int_{t=0}^{1} t^t\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.
2. Calculer la valeur commune des deux membres à 10^{-5} près.

Correction ▼ [004607]

Exercice 4015 $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\, dt$

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\, dt$.

Correction ▼ [004608]

Exercice 4016 Centrale PSI 1997

Établir la convergence puis calculer la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\, dt$.

Correction ▼ [004609]

Exercice 4017 $\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$

Montrer que pour $x \in\,]-1,1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$. [004610]

Exercice 4018 Intégrale elliptique

Montrer que la longueur d'une ellipse de demi-axes a, b est : $L = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2p} \frac{C_{4p}^{2p} C_{2p}^{p}}{4^{3p}(1-4p)}$. [004611]

Exercice 4019 Norme L^2

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$. Montrer, pour $0 \leq r < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta$. [004612]

Exercice 4020 *** I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction ▼ [005751]

---

151 220.10 Analycité

Exercice 4021 Série à valeurs réelles

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ telle que pour tout $z \in \mathring{D}(0,R)$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [004613]

Exercice 4022 Formules de Cauchy

Soit U un ouvert de (x^2+1) contenant 0 et $f : U \to (x^2+1)$ analytique. On note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0, R son rayon et d la distance de 0 à $\mathrm{fr}(U)$ ($d = +\infty$ si $U = (x^2+1)$).

1. Montrer, pour $0 < r < \min(R,d)$ et $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} \, d\theta$.
2. Montrer que l'application $r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}} \, d\theta$ est analytique sur $[0,d[$ (minorer le rayon de convergence du DSE de f en $r_0 e^{i\theta}$ et majorer en module les coefficients lorsque θ décrit $[0,2\pi]$ et r_0 est fixé dans $[0,d[$ à l'aide d'un recouvrement ouvert de $[0,2\pi]$). En déduire que l'égalité de la question 1. a lieu pour tout $r \in [0,d[$.
3. Pour $0 < r < d$ et $|z| < r$ on pose $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} re^{i\theta} \, d\theta$. Montrer que g est la somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à r et que g coïncide avec f sur $\mathring{D}(0,r)$.

   Applications :
4. $R \geq d$.
5. Si $U = (x^2+1)$ et f est bornée alors f est constante (théorème de Liouville).
6. Si $P \in (x^2+1)^{[}X]$ ne s'annule pas alors P est constant (théorème de d'Alembert-Gauss).
7. Si (f_n) est une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur U vers une fonction f alors f est analytique sur U (théorème de Weierstrass, comparer avec le cas réel).
8. La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Correction ▼ [004614]

Exercice 4023 Formule des résidus

Soit $P \in (x^2+1)^{[}X]$ ayant pour racines $z_1, \dots, z_k$ de multiplicités $m_1, \dots, m_k$ et $r \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{|z_1|, \dots, |z_k|\}$.

Montrer : $\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta} \, d\theta = \sum_{|z_j|<r} m_j$. [004615]

Exercice 4024 Croissance de f en fonction des coefficients

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

1 : Pour tout $a > 0$, la fonction $z \mapsto f(z)e^{-a|z|}$ est bornée sur (x^2+1).

2 : $\sqrt[n]{n!\,|a_n|} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

On utilisera les formules de Cauchy (cf. exercice 4022).

Correction ▼ [004616]

Exercice 4025 Centrale MP 2000

Soit (a_n) une suite réelle avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On suppose que f est injective et que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On considère $\Omega^+ = \{z \in (x^2+1) \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ et $D = \{z \in (x^2+1) \mid |z| < 1\}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in D$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(D \cap \Omega^+) \subset \Omega^+$.
3. Montrer que, pour tout $|r| < 1$, $a_n = \frac{2}{\pi r^n} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) \, d\theta$.
4. Montrer que $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$. En déduire que $|a_n| \leq n$.

Correction ▼ [004617]

152 220.99 Autre

Exercice 4026 Anneau des séries entières

Soit A l'ensemble des suites (a_n) de complexes telles que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon non nul. On munit A de l'addition terme à terme et du produit de Cauchy noté $*$.

1. Vérifier que A est un anneau intègre. Quels sont les éléments de A inversibles ?

2. Soit $I_k = \{a = (a_n) \in A$ tel que $a_0 = \dots = a_k = 0\}$. Montrer que les idéaux de A sont $\{0\}$, A et les I_k, $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ alors la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $2u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k u_{n+1-k}$.
4. Soit $a = (a_n) \in A$ avec $a_0 = 1$ et $|a_n| \leq 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une unique suite $b = (b_n) \in A$ telle que $b_0 = 1$ et $b * b = a$. Pour prouver que le rayon de convergence de b est non nul on établira par récurrence que $|b_n| \leq u_n$.
5. Pour $a \in A$ quelconque, étudier l'équation $b * b = a$ d'inconnue $b \in A$.

[004618]

Exercice 4027 Ulm MP* 2000

Soit $z_1, \dots, z_p \in (x^2+1)$, $p_1, \dots, p_p \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$, et $\omega \in \mathbb{R}$. Pour $n > p$ on pose $z_n = e^{i\omega} \sum_{j=1}^{p} z_{n-j} p_j$. Étudier la suite (z_n).

Correction ▼ [004619]

Exercice 4028 X MP* 2001

Soit D le disque ouvert de (x^2+1) de centre 0 et rayon 1.

1. Soit $\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 1$ et $r \in]0, 1[$. Montrer que
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta.$$
2. Soit E l'ensemble des fonctions de $\overline{D}$ dans (x^2+1) continues et dont la restriction à D est somme d'une série entière. Montrer que $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{D}\}$ définit une norme sur E et que pour cette norme E est complet.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est dense dans E.

Correction ▼ [004620]

Exercice 4029 Centrale MP 2002

1. Développer en série entière $f : z \mapsto z(1-z)^{-2}$. Montrer que f est injective sur $\mathring{D}(0,1)$.
2. Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins 1 à coefficients réels. On suppose f injective sur $\mathring{D}(0,1)$ et on veut prouver : $\forall\, n \geq 1, |a_n| \leq n$.
   (a) Montrer pour $|z| < 1$ que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et en déduire : $\mathrm{Im}(z) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$.
   (b) Pour $0 < r < 1$ calculer $\int_{t=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it})) \sin nt \, dt$. En déduire $|a_n| r^n \leq n|a_1| r$ et conclure.

Correction ▼ [004621]

Exercice 4030 *** I

Soient $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donné. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Correction ▼ [005749]

Exercice 4031 **** Inverse d'une série entière

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$ (ou plus généralement $a_0 \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.
2. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

Correction ▼ [005750]

Exercice 4032 ***

Soit A une matrice carrée complexe de format $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme en fonction de χ_A de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^n) z^n$.

Correction ▼ [005755]

Exercice 4033 *** I

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite réelle k. (En particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ si $k=0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ si $k=1$).On suppose de plus que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série de terme général a_n diverge.

1. Montrer que $\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.
2. **Applications.**
   (a) Equivalent simple quand x tend vers 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to 1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n$ où p est un entier naturel non nul donné.

Correction ▼ [005759]

Exercice 4034

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$. Pour x réel on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

On suppose que pour tout entier naturel p et tout réel positif x, $|f^{(p)}(x)| \leqslant 1$. Déterminer f.

Correction ▼ [005760]

Exercice 4035 *** I Dénombrement de parenthésages

1. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne et a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléménts de E (($a_1 = 1$ conventionnellement), $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, ...). Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
2. Soit f la série entière associée à la suite (a_n). On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout x de $]-R,R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.
3. Calculer R et f.
4. En déduire a_n.

Correction ▼ [005764]

153 221.01 Calcul de coefficients

Exercice 4036

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ si $|x| \leq \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. Montrer que $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

[001951]

Exercice 4037

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ si $|x| \leq \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.

2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3. Montrer que $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$. En déduire $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

[001952]

Exercice 4038

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : xf(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{(1+t^2)^2} dt$.
2. Montrer que f est de classe C^2 puis, en dérivant l'expression ci-dessus, que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f''(x) = f(x)$.
3. Donner une expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

[001955]

Exercice 4039 Développements

Calculer le développement des fonctions f 2π-périodiques telles que :

1. $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$.
2. $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.
3. $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.
4. $f(x) = \max(0, \sin x)$.
5. $f(x) = |\sin x|^3$.

Correction ▼ [004622]

Exercice 4040 Chimie P' 1996

Établir la convergence puis calculer $\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt$.

En déduire les coefficients de Fourier de $f : f(t) = \ln|\tan(t/2)|$.

Correction ▼ [004623]

Exercice 4041 Chimie P 1996

Développer en série de Fourier $f : t \mapsto \frac{1}{1-\cos\alpha\cos t}$ avec $0 < \alpha < \pi$. Indication : on pourra utiliser une relation de récurrence entre les coefficients à partir de $(1-\cos\alpha\cos t)f(t) = 1$.

Correction ▼ [004624]

Exercice 4042 Mines MP 2002

Soit $a \in]-1,1[$ et $g : x \mapsto \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$.

1. Prouver : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$.
2. Quel est le mode de convergence de la série ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ continue par morceaux et 2π-périodique. Montrer que $h : x \mapsto \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\,dt$ est somme d'une série trigonométrique uniformément convergente. Que peut-on déduire pour h ?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ continues par morceaux et 2π-périodiques telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004625]

Exercice 4043 Usage d'une série entière

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les coefficients de Fourier soient : $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = 0$?
2. Application : calculer $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}$.

Correction ▼ [004626]

Exercice 4044 $1/(\cos x + \operatorname{ch} a)$

Soit $a > 0$.

1. Développer en série entière : $f(x) = \frac{1}{x+e^a}$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Correction ▼ [004627]

Exercice 4045 Décomposition en $\sin^2$

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$. [004628]

Exercice 4046 DSF de $f * g$, Mines PSI 1998

Soient $f, g : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ continues 2π-périodiques. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que h est 2π-périodique, continue, et calculer les coefficients de Fourier exponentiels de h en fonction de ceux de f et de g.
2. Pour g fixée, déterminer les valeurs et vecteurs propres de $f \mapsto h$.

Correction ▼ [004629]

Exercice 4047 DSF d'une série

On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer sa série de Fourier.

Correction ▼ [004630]

Exercice 4048 Calcul de séries

Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi[,\ f(x) = e^x$.

1. Chercher le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les sommes des séries : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Correction ▼ [004631]

Exercice 4049 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ (Centrale MP 2003)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique valant e^{ax} sur $]0, 2\pi]$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I(a) = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \sin(au)\,du$.
2. Exprimer $I(a)$ sous forme d'une série sans intégrale.
3. Calculer $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \sin(au)\,du$.
4. Conclure.

Correction ▼ [004632]

Exercice 4050 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ (Centrale MP 2000)

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.
2. Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

3. Que vaut $\lim_{a\to+\infty}\sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2}$?

Correction ▼ [004633]

Exercice 4051 Calcul de séries, Matexo

On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin\frac{x}{2}$ si $0 \leq x < 2\pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

Correction ▼ [004634]

Exercice 4052 $\sin(\pi a)/\pi a$

Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

1. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $[-\pi,\pi]$ par : $f(x) = \cos(ax)$.
2. Soit $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)$. Justifier l'existence et la dérivabilité de g et la calculer.

Correction ▼ [004635]

Exercice 4053 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$

1. Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique telle que $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ pour $0 \leq x < 2\pi$.
2. Donner les développements en série de Fourier de $f(x+1)$ et $f(x-1)$.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Correction ▼ [004636]

Exercice 4054 $f(x+\pi)$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a :

1. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x)$?
2. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi) = -f(x)$?

Correction ▼ [004637]

Exercice 4055 f est-elle π-périodique ?

Soit $f \in \mathscr{D}$. On note c_k les coefficients de Fourier exponentiels de f. Montrer que f est π-périodique si et seulement si c_k est nul pour tout k impair (noter que la série de Fourier de f peut ne pas converger vers f). [004638]

Exercice 4056 DSF de f'

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On note a_k, b_k les coefficients de Fourier de f. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. En déduire que $ka_k \to 0$ et $kb_k \to 0$ lorsque $k\to\infty$.

Correction ▼ [004639]

Exercice 4057 DSF de f'

Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On considère la fonction g, 2π-périodique coïncidant avec f sur $[0,2\pi[$. Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de g.

1. Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Donner le développement en série de Fourier de g'.

Correction ▼ [004640]

Exercice 4058 DSF d'une primitive de f

Soit f continue 2π-périodique, $F(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$, a_n,b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de f et $C=\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(\pi-t)f(t)\,dt$. Montrer :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ F(x)=\frac{a_0x}{2}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

[004641]

Exercice 4059 Concavité, ENS

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue 2π-périodique paire dont la restriction à $[0,2\pi]$ est concave. Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient : $a_k\leq 0$ pour $k\geq 1$.

Correction ▼ [004642]

Exercice 4060

Développer en série de FOURIER les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

1) (**) $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique paire telle que $\forall x\in[0,\pi],\ f(x)=1-\frac{2x}{\pi}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

2) (**) $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique impaire telle que $\forall x\in[0,\pi],\ f(x)=x(\pi-x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

3) (**) $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x\in]-\pi,\pi],\ f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.

4) (***) $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x\in[-\pi,\pi],\ f(x)=\mathrm{ch}(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.

5) (**) $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sup(0,\sin x)$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}$.

Correction ▼ [005782]

Exercice 4061 ***

Soit $a\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

1. (a) Développer en série trigonométrique la fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{1}{a-\cos t}$ (utiliser la racine de plus petit module, notée b, de l'équation $z^2-az+1=0$).
   (b) La série obtenue est-elle la série de FOURIER de f ?
2. Déduire de 1) la valeur des intégrales $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt$, $n\in\mathbb{N}$.

Correction ▼ [005783]

Exercice 4062 *** I

(un développement en série de fonctions de $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ et $\cot(\pi z)$).

Soit $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telles que $\forall x\in[-\pi,\pi],\ f(x)=\cos(\alpha x)$.

1. Développer la fonction f en série de FOURIER.
2. En déduire que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}\ \text{et}\ \pi\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Correction ▼ [005784]

Exercice 4063 **

Développer en série de FOURIER la fonction $f\ :\ x\mapsto x-E(x)-\frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005785]

154 221.02 Convergence, théorème de Dirichlet

Exercice 4064 Phénomène de Gibbs pour $\sin kx/k$

Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$.

1. Calculer l'abscisse, x_n, du premier maximum positif de f_n.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Correction ▼ [004650]

Exercice 4065 Convergence uniforme

Soit $\sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle $[\alpha, \beta]$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Correction ▼ [004651]

Exercice 4066 Convergence uniforme

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n=1}^\infty a_n \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $na_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour le sens direct : utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy et l'inégalité : $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$.

Correction ▼ [004652]

Exercice 4067 Fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0

1. Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ paire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$.
   Pour $\nu \in \mathbb{N}$, on pose $a_{0,\nu} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\left((2\nu+1)\frac{t}{2}\right)dt$ et $a_{n,\nu} = \int_0^\pi \cos(nt)\sin\left((2\nu+1)\frac{t}{2}\right)dt$.
   Pour $q \in \mathbb{N}$, on note $s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^q a_{i,\nu}$. Montrer que si ν est fixé, $s_{n,\nu} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$. En déduire que, pour tout q, pour tout ν, $s_{q,\nu} > 0$, et prouver que $\max_{q\in\mathbb{N}}(s_{q,\nu}) = s_{\nu,\nu}$.
3. Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $\nu \geq 1$, $s_{\nu,\nu} \geq B\ln\nu$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^2} a_{n,2^{p^3}-1}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^n A_k$. Vérifier que $T_n = \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^2} s_{n,2^{p^3}-1}$. Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que, pour tout $p \geq 1$, $T_{2^{p^3}-1} \geq Dp$, et constater que la série de Fourier de f diverge au point 0.

[004653]

Exercice 4068 $\sum_{n=-\infty}^\infty R(n)e^{inx}$, $R =$ fraction rationnelle

Soit R une fraction rationnelle à coefficients complexes, de degré strictement négatif, n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{Z}$. On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^\infty R(n)e^{inx}$.

1. Étudier l'existence et la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [004654]

Exercice 4069 $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{P(n)}$, $P =$ polynôme

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que $f(x) = (\pi - x)^2$ sur $]0, 2\pi[$.
2. Soit P un polynôme de degré 2 sans racines dans $\mathbb{N}^*$. On pose $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{P(n)}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Correction ▼ [004655]

Exercice 4070 Noyau de Féjer

Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ 2π-périodique continue, f_n sa n-ème somme de Fourier et $g_n = \frac{f_0+\dots+f_n}{n+1}$.

1. Exprimer g_n à l'aide d'un produit de convolution, $g_n = f * k_n$.
2. Montrer que la suite (k_n) constitue une suite d'approximations de la mesure de Dirac sur $]-\pi,\pi[$. Ceci montre que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f *pour toute f continue*.

Correction ▼ [004656]

155 221.03 Formule de Parseval

Exercice 4071

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, C^2 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et, $\forall t \in [0,2\pi], |f(t)| \geq |f''(t)|$.On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de f et f''.

1. Calculer c_0 puis calculer c''_n en fonction de c_n.
2. A l'aide du théorème de Parseval, en déduire que $c_n = 0$ pour $|n| \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe $\varphi \in [0,2\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(t) = \rho\cos(t+\varphi)$ pour tout $t \in [0,2\pi]$.

[001953]

Exercice 4072

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, C^1 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de f et f'.

1. Calculer c_0 puis donner une relation entre c_n et c'_n.
2. En déduire que que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.
3. Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ?

[001954]

Exercice 4073 ENS MP 2002

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire et 2-périodique.
2. En déduire l'existence de $c > 0$ indépendant de f tel que $\|f\|_\infty \leq c\|f''\|_2$.

Correction ▼ [004643]

Exercice 4074 Inégalité de Wirtinger

Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.

Montrer que $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_{t=0}^{2\pi} f'^2(t)\,dt$ et déterminer les cas d'égalité.

Correction ▼ [004644]

Exercice 4075 Inégalité isopérimétrique

1. Soient f,g deux applications 2π-périodiques réelles de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que : $2\int_0^{2\pi} fg' \leq \int_0^{2\pi} f'^2 + \int_0^{2\pi} g'^2$.
2. Soit Γ un arc $\mathscr{C}^1$, fermé, simple, de longueur 2π. Montrer que l'aire du domaine limité par Γ est inférieure ou égale à π.

Correction ▼ [004645]

Exercice 4076 $|f''| \leq |f|$

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodiques de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ et $|f''| \leq |f|$. [004646]

Exercice 4077 Calcul de $(f \mid g)$

Soient $f, g : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ 2π-périodiques, continues par morceaux. On note $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier exponentiels de f et g. Montrer que : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt$.

[004647]

Exercice 4078 Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\lim_{a \to 0^+} \int_{t=a}^{\pi-a} f(t)\sin(pt)\,dt$ et en déduire que f n'a pas de développement en série de Fourier (et donc n'est pas continue en 0).

[004648]

Exercice 4079 X MP* 2001

Soit $a > 0$ et f continue sur $[0,a]$ à valeurs réelles. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_{t=0}^{a} f(t)\cos(xt)\,dt = 0$. Montrer que f est nulle.

Correction ▼ [004649]

156 221.99 Autre

Exercice 4080

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann périodique de période 2π. On désigne par : $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ sa série de Fourier et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.
2. Etablir que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{(x-t)}{2}} f(t)dt$.
3. En déduire $S_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta) \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta$.
4. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta$.

[001950]

Exercice 4081 Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $f(x) = O(1/|x|^a)$ et $f'(x) = O(1/|x|^a)$ lorsque $|x| \to \infty$, et on pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$.

Montrer que F est bien définie, $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

[004657]

Exercice 4082 Formule d'échange

Soient $f,g:\mathbb{R}\to(x^2+1)$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que f,f',g,g' sont intégrables. Montrer :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)g(t)\,dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{g}(t)\,dt.$$

[004658]

Exercice 4083 $\int_{t=a}^{b}f(t)|\sin nt|\,dt$

1. Développer en série de Fourier la fonction : $x\mapsto|\sin x|$.
2. Application : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b}f(t)|\sin nt|\,dt\to\frac{2}{\pi}\int_{t=a}^{b}f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.

Correction ▼ [004659]

Exercice 4084 Équation différentielle

Montrer que l'équation : $y^{(4)}+y''+y=|\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Correction ▼ [004660]

Exercice 4085 Équation différentielle

Soit $k\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y''+k^2y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004661]

Exercice 4086 Équirépartition modulo 1

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ 1-périodique, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $x\in\mathbb{R}$.
   Montrer que $\frac{f(x)+f(x+\alpha)+\cdots+f(x+n\alpha)}{n+1}\to\int_{t=0}^{1}f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai en supposant seulement f continue.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$.

Correction ▼ [004662]

Exercice 4087 Cachan MP* 2000

Soit un réel $\beta>1$ et $a_k=\iint_{[0,1]^2}e^{-|x-x'|^{\beta}}e^{2i\pi k(x-x')}\,dx\,dx'$. Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de $\sum_{|k|>n\text{ ou }|\ell|>n}a_k a_\ell$, k et ℓ étant des entiers relatifs.

Correction ▼ [004663]

Exercice 4088 Algèbre de séries trigonométriques

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans (x^2+1) de la forme : $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{2i\pi nx}$ où $\sum|c_n|$ converge. On pose pour $f\in E$: $\|f\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|$.

1. Justifier la définition de $\|f\|$ et montrer que E est un espace vectoriel normé complet.
2. Montrer que E est une (x^2+1)-algèbre et que $\|fg\|\le\|f\|\,\|g\|$.
3. Soit $\varphi:E\to(x^2+1)$ un morphisme d'algèbres.
   (a) On suppose φ continu, montrer qu'il existe $z_0\in\mathbb{U}$ tel que $\forall\ f\in E,\ \varphi(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz_0^n$.
   (b) Vérifier que la formule précédente définit effectivement un morphisme continu de E dans (x^2+1).

Correction ▼ [004664]

Exercice 4089 Mines MP 2002

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_{t=0}^{1} \cos(nt^2)\,dt$.

Correction ▼ [004665]

Exercice 4090 Ens Lyon MP* 2003

On note : $E = \{$fonctions continues 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)\}$;

$E^1 = \{f \in E$ de classe $\mathscr{C}^1\}$;

$E_n = \{f \in E$ tel que $\forall\, k \in [\![-n,n]\!],\ \int_{t=0}^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = 0\}$;

$E_n^1 = E_n \cap E^1$.

On considère sur E la norme $\|\ \|_2$ $\left(\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int |f|^2}\right)$.

1. Montrer que $D : E_0^1 \to E_0, f \mapsto f'$ est une bijection.
2. D est-elle continue ?
3. Montrer que D^{-1} est continue.
4. Montrer que $D^{-1}(E_n) = E_n^1$ et calculer $|\!|\!|D^{-1}_{|E_n}|\!|\!|$.

Correction ▼ [004666]

Exercice 4091 Quatre racines, ENS Cachan MP* 2005

Soit f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^2$, 2π-périodique, de moyenne nulle. Montrer que $g = f + f''$ s'annule au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$.

Correction ▼ [004667]

Exercice 4092 **

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire telle que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

Correction ▼ [005781]

157 222.01 Convergence simple, uniforme, normale

Exercice 4093

A 1. Soient a et z deux réels. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur le segment d'extrémités a et z et ϕ un polynôme de degré n. Prouver que pour tout t compris dans l'intervalle $[0,1]$,

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))$$
$$= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f'(a+t(z-a)) + (-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))$$

2.a. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est prolongeable par continuité en zéro, que son prolongement est indéfiniment dérivable et admet des développements limités en zéro de la forme :

$$1 - t/2 + \frac{b_1t^2}{2!} + \frac{b_2t^4}{4!} + \cdots + \frac{b_nt^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1}),$$

où les b_i sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Montrer que la dérivée $n^{ième}$ en zéro, notée $\phi_n(z)$, de la fonction $t \mapsto t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$ est un polynôme en z de degré n et que

$$\phi_n(z) = z^n - \frac{1}{2}nz^{n-1} + C_n^2 b_1 z^{n-2} + C_n^4 b_2 z^{n-4} + \cdots + C_n^{2N} b_N z^{n-2N}$$

où $N = E(\frac{n-1}{2})$, E désignant la fonction partie entière.

2.b. Prouver que $nz^{n-1} = \phi_n(z+1) - \phi_n(z)$

3. Prouver que

$$\begin{array}{llll}
(i) & \phi_n^{(n-k)}(1) = \phi_n^{(n-k)}(0) \ \ (2 \leq k \leq n) & (ii) & \phi_n^{(n-2k-1)}(0) = 0 \ \ (1 \leq k \leq N) \\
(iii) & \phi_n^{(n-2k)}(0) = \frac{n!b_k}{(2k)!} \ \ (1 \leq k \leq N) & (iv) & \phi_n^{(n-1)}(0) = -\frac{1}{2}n! \\
(v) & \phi_n^{(n-1)}(1) = +\frac{1}{2}n! & (vi) & \phi_n^{(n)} = n!
\end{array}$$

4.a. On suppose f de classe C^{2n+1}. Prouver que

$$\begin{aligned}
0 = f(z) - f(a) - \frac{z-a}{2}\left[f'(z) + f'(a)\right] \\
+ \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m)}(z) - f^{(2m)}(a)\right] \\
- \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t) f^{(2n+1)}\Big(a + (z-a)t\Big)dt
\end{aligned}$$

4.b. En déduire que si F est de classe C^{2n} sur $[a, a+r\omega]$ où $r \in \boldsymbol{N}$ et $\omega > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+r\omega} F(x)dx = \omega\Big[\frac{1}{2}F(a) + F(a+\omega) + \cdots + F(a+(r-1)\omega) + \frac{1}{2}F(a+r\omega)\Big] \\
- \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{\omega^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+r\omega) - F^{(2m-1)}(a)\right] + R_n
\end{aligned}$$

où

$$R_n = \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t)\sum_{m=0}^{r-1} F^{(2n)}(a + m\omega + \omega t)dt$$

B 1. Soit $u_k : x > 0 \mapsto \ln(x+k) - \ln(k) + x\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$

Montrer que pour tout x strictement positif, la série $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ est convergente. On pose pour la suite $G(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

2. Prouver que G vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall x > 0 \quad G(x+1) = G(x) - \ln(x).$$

3. En déduire que $\forall m \in \boldsymbol{N} \quad \exp(-G(m+1)) = m!$

4. Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que la série

$$\textstyle\sum_{k\geq 1}\left[\ln(y+k) - \ln(x+k) + (y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$$

est convergente et que sa somme est $G(y) - G(x) - \ln y + \ln x$.

5. Prouver à l'aide de A que pour tous entiers strictement positifs n et p

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \ln(y+k) - \ln(x+k) = \\
\int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}\big(f(0) + f(n)\big) + \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(0)\big) + T_{p,n}(x,y)
\end{aligned}$$

où $f : t \mapsto \ln(y+t) - \ln(x+t)$ et $T_{p,n}(x,y)$ est une expression que l'on précisera.

6. Prouver que $R_p(x,y) = \lim_{n\to+\infty} T_{p,n}(x,y)$ existe.

7. On pose $g(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{z^{2h-1}}$. Montrer que $G(y) + g(y) = G(x) + g(x) + R_p(x,y)$

8. Montrer que $R_p(x,y) = O\left(\frac{1}{\left[\inf(x,y)\right]^{2p-1}}\right)$ quand $\inf(x,y) \to +\infty$.

9. Prouver à l'aide de la formule de Stirling que $G(m)+g(m) \to \frac{1}{2}\ln 2\pi$ quand $m \to +\infty$.

10. Montrer que

$$G(y) = -y\ln y + y + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{y^{2h-1}} + O(\frac{1}{y^{2p-1}})$$

11. Donner un développement asymptotique de $\ln(m!)$ quand m tend vers $+\infty$ à un $O(\frac{1}{m^7})$ près.

Correction ▼ [002683]

Exercice 4094 Étude de convergence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.

1. Trouver la limite simple des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme ?

Correction ▼ [004503]

Exercice 4095 Étude de convergence

On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n\sin(\pi x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. En déduire qu'il en est de même pour la suite (g_n). (On utilisera la concavité de sin sur $[0,\pi]$)

[004504]

Exercice 4096 Non interversion limite-intégrale

Soit $f_n(x) = n\cos^n x\sin x$.

1. Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.
2. Vérifier que $\int_{t=0}^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty}\int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

[004505]

Exercice 4097 Non interversion limite-intégrale

1. Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. (On admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)
2. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Correction ▼ [004506]

Exercice 4098 Étude de convergence

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\begin{cases} x \le n & (1-x/n)^n \\ x > n & 0. \end{cases}$

1. Déterminer la limite simple, f, des fonctions f_n.
2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \le f_n(x) \le f(x)$.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[0,a]$.
4. Démontrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [004507]

Exercice 4099 Étude de convergence

Étudier la convergence simple, uniforme, de la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$.

Correction ▼ [004508]

Exercice 4100 Étude de convergence

Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[\alpha, +\infty[$, pour $\alpha > 0$.

[004509]

Exercice 4101 $f(nx)$, $f(x/n)$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Donner un exemple de fonction f.
2. Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, chercher $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

[004510]

Exercice 4102 Équation différentielle dépendant d'un paramètre

Soit y_n la solution de l'équation : $(*_n) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)y'' - \left(2+\frac{1}{n}\right)y' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1. Calculer explicitement y_n.
2. Déterminer la limite simple, y, des fonctions y_n.
3. Vérifier que y est solution de l'équation limite de $(*_n)$ avec les mêmes conditions initiales.

Correction ▼ [004511]

Exercice 4103 $f \circ f \circ \ldots \circ f$

Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction continue vérifiant : $\forall\, x \neq 0, \quad |f(x)| < |x|$.

On pose $f_0(x) = x$, puis $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Étudier la convergence simple des f_n.

Correction ▼ [004512]

Exercice 4104 Étude de convergence

On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geq 0$.

1. Déterminer la limite simple, ℓ, des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Démontrer que : $\forall\, t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. (Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geq 1$)

Correction ▼ [004513]

Exercice 4105 Approximation de la racine carrée par la méthode de Newton

On définit une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ par récurrence : $\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right). \end{cases}$

Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n $\left(\text{considérer } g_n(x) = \frac{f_n(x)-\sqrt{x}}{f_n(x)+\sqrt{x}}\right)$.

[004514]

Exercice 4106 Approximation polynomiale de la racine carrée

On considère la suite (f_n) de fonctions sur $[0,1]$ définie par les relations : $f_0 = 0$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{t-f_n^2(t)}{2}$.

Étudier la convergence simple, uniforme, des fonctions f_n.

Correction ▼ [004515]

Exercice 4107 Suite ayant deux limites

Trouver une suite de polynômes (P_n) convergeant simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$.

Remarque : une telle suite a donc des limites distinctes dans $\mathbb{R}[x]$ pour les normes de la convergence uniforme sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$.

Correction ▼ [004516]

Exercice 4108 Limite simple de polynômes de degrés bornés

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p convergeant simplement vers f sur un intervalle $[a,b]$.

1. Démontrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que les coefficients des P_n convergent vers ceux de f.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction ▼ [004522]

Exercice 4109 Polynômes à coefficients entiers, ENS Lyon MP* 2005

On considére $f : x \mapsto 2x(1-x)$ définie sur $[0,1]$.

1. Étude de la suite de fonction g_n, avec $g_n = f^n = f \circ \ldots \circ f$.
2. Soit $[a,b] \subset]0,1[$ et h continue sur $[a,b]$. Montrer que h est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Correction ▼ [004523]

Exercice 4110 Théorèmes de Dini

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.
2. On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

[004524]

Exercice 4111 Théorème d'Ascoli

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-Lipchitizennes (avec le même k).

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a,b]$. On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)| \text{ tel que } 0 \le i \le N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de M_n.
2. Montrer que f_n converge uniformément vers f.

[004525]

Exercice 4112

Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

1) (**) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ **2) (**)** $f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ **3) (**)** $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Correction ▼ [005726]

Exercice 4113 *** I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n] \\ 0 \text{ si } x \geqslant n \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Correction ▼ [005727]

Exercice 4114 ** I

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Correction ▼ [005729]

Exercice 4115 **

Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

1. $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}^*_+$
3. $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

Correction ▼ [005732]

Exercice 4116 ** I

Montrer que pour tout réel $a > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.

Correction ▼ [005733]

158 222.02 Continuité, dérivabilité

Exercice 4117 Fonction orthogonale aux polynômes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier k on a $\int_{t=a}^{b} f(t)t^k\,dt = 0$. Que peut-on dire de f ? [004517]

Exercice 4118 Approximation de f et f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que P_n converge uniformément vers f et P_n' converge uniformément vers f'.
2. Si f est $\mathscr{C}^\infty$, peut-on trouver une suite de polynômes (P_n) telle que pour tout k la suite $(P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$?

Correction ▼ [004518]

Exercice 4119 Limite de $f_n(x_n)$

Soient $f_n : D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant vers une fonction continue f et (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers $x \in D$.

1. Si les fonctions f_n convergent uniformément, montrer que $f_n(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$.
2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

[004519]

Exercice 4120 Compositon et convergence

Soit f_n convergeant uniformément vers f, et g une fonction continue. Démontrer que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformément.

[004520]

Exercice 4121 $f_n \circ g_n$

Soit $f_n : [a,b] \to [c,d]$ et $g_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant uniformément vers les fonctions f et g. Montrer que $g_n \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Correction ▼ [004521]

Exercice 4122 Équicontinuité

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que les fonctions f_n sont *équi-continues* c'est à dire :

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in]x-\delta, x+\delta[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

[004526]

Exercice 4123 Limite simple de fonctions convexes

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction ▼ [004527]

Exercice 4124 *** I Polynômes de Bernstein. Théorème de Weierstrass

Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour n entier naturel non nul, on définit le n-ème polynôme de Bernstein associé à f par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. (a) Calculer $B_n(f)$ quand f est la fonction $x \mapsto 1$, quand f est la fonction $x \mapsto x$, quand f est la fonction $x \mapsto x(x-1)$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.
2. En séparant les entiers k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$ et les entiers k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha$ ($\alpha > 0$ donné), montrer que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer le théorème de Weierstrass : soit f une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

Correction ▼ [005728]

Exercice 4125 **

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

Correction ▼ [005730]

Exercice 4126 **

Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1,+\infty[$.
2. Continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Correction ▼ [005731]

Exercice 4127 **

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n(t)=(-1)^n\ln\left(1+\frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général f_n puis la continuité de la somme f.
2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty}f(t)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ à l'aide de la formule de STIRLING.

Correction ▼ [005734]

Exercice 4128 **

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$, soit $f_n(t)=\frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$.

Etude complète de $f=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$: domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que f n'est pas dérivable en 0), allure du graphe.

Correction ▼ [005735]

159 222.03 Suites et séries d'intégrales

Exercice 4129 ** I

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x\in[0,\sqrt{n}]\\ 0 \text{ si } x>\sqrt{n}\end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto e^{-x^2}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$.

Correction ▼ [005738]

Exercice 4130 **

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ et $\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}$.

Correction ▼ [005739]

Exercice 4131 **

Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Correction ▼ [005740]

Exercice 4132 **

Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\text{sh}\,x}\,dx$ en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

Correction ▼ [005741]

Exercice 4133 **

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

Correction ▼ [005742]

Exercice 4134 **

1. Montrer que pour x réel de $[0,1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Correction ▼ [005743]

Exercice 4135 *** I

Montrer que pour tout réel x, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$

Correction ▼ [005744]

160 222.04 Suite et série de matrices

Exercice 4136 **

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

Correction ▼ [005864]

Exercice 4137 ***

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).

(2) $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$

(3) La série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Correction ▼ [005865]

Exercice 4138 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [005866]

Exercice 4139 ** I

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit A un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| \leqslant \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

Correction ▼ [005867]

Exercice 4140 ** I

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [005868]

Exercice 4141 ** I

Calculer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [005869]

Exercice 4142 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

Correction ▼ [005870]

Exercice 4143 ** I Exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de $\mathbb{R}^3$

1. (a) Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, on pose $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$. Vérifier que $f_{\overrightarrow{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Réciproquement, soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ unique tel que $f = f_{\overrightarrow{\omega}}$.
2. Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

Correction ▼ [005871]

Exercice 4144 **

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim_{p\to+\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p$.

Correction ▼ [005872]

Exercice 4145 **

Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Correction ▼ [005873]

161 222.99 Autre

Exercice 4146 Fonction définie par une série

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arccos(\cos nx)}{n!}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue, paire et 2π-périodique.
2. Calculer $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction ▼ [004528]

Exercice 4147 Fonction définie par une série (Centrale MP 2003)

Soit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2n^2}$ sous réserve de convergence ($a \in \mathbb{R}$).

1. Domaine de définition de f ?

2. Limite de $af(a)$ quand $a \to 0$?
3. Limite de $f(a)$ quand $a \to +\infty$?

Correction ▼ [004529]

Exercice 4148 Fonction ζ de Riemann

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. Prouver que $\zeta(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$ $\left(\text{majorer } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ par comparaison à une intégrale}\right)$.
3. Prouver que $\zeta(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^+$.

[004530]

Exercice 4149 Fonction ζ de Riemann et constante d'Euler

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$.

Montrer que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k}$.

[004531]

Exercice 4150 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2. Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

Correction ▼ [004532]

Exercice 4151 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $]1, +\infty[$.

[004533]

Exercice 4152 Fonction définie par une série

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.
2. Montrer que la quantité : $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D.
3. Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$.
4. Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.

Correction ▼ [004534]

Exercice 4153 Fonction définie par une série

1. Établir la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{\operatorname{ch} nx}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur toute partie de la forme $\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Que pouvez-vous en déduire pour f ?

[004535]

Exercice 4154 Fonction définie par une série

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que la série $f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Y a-t-il convergence normale ?

Correction ▼ [004536]

Exercice 4155 Fonction définie par une série

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1. Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.
3. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [004537]

Exercice 4156 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan}(n)\right)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Chercher une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
4. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction ▼ [004538]

Exercice 4157 Conversion série-intégrale

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt$.

Correction ▼ [004539]

Exercice 4158 Fonction Γ

Soit $f_n(x) = \frac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\dots(1+x/n)}$.

1. Étudier la convergence simple des fonctions f_n.
2. On note $f = \lim f_n$. Calculer $f(x)$ en fonction de $f(x-1)$ lorsque ces deux quantités existent.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition (on calculera $f_n'(x)/f_n(x)$).

Correction ▼ [004540]

Exercice 4159 Ensi Chimie P' 93

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \frac{n(n+1)}{x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t\,dt$.

Correction ▼ [004541]

Exercice 4160 Convergence de $f^{(n)}$

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée n-ème). On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers φ. Que peut-on dire de φ ? [004542]

Exercice 4161 Ensi PC 1999

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n \cos^n x}{n+1}$.

1. Étudier la convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \int_{x=0}^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

Correction ▼ [004543]

Exercice 4162 Développement de $\coth(x)$

1. Décomposer en éléments simples sur (x^2+1) la fractions rationnelle : $F_n(X) = \frac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.
2. En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^{-2x}-1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.
3. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Correction ▼ [004544]

Exercice 4163 $\sum \sin(n)/n$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$ on pose $u_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue, f.
2. Justifier la dérivabilité de f sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Correction ▼ [004545]

Exercice 4164 Fonctions ζ et η

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et pour $x > 0$: $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ pour $x \to 1^+$.
2. Montrer que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$. On remarquera que $\frac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Correction ▼ [004546]

Exercice 4165 Centrale MP 2000

Pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n(y) = \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(y)x^n$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\}$ et $F(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)x^n$. Montrer que F, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent en tout point de D.

[004547]

Exercice 4166 Série lacunaire

Soit (p_n) une suite d'entiers naturels, strictement croissante et telle que $p_n/n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p_n}$. Montrer que $(1-x)f(x) \to 0$ lorsque $x \to 1^-$.

Correction ▼ [004548]

Exercice 4167 Fonctions réciproques (Pugin, MP*-2001)

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to [c,d]$ continues, bijectives, strictement croissantes, convergeant simplement vers une fonction $f : [a,b] \to [c,d]$ elle aussi continue, bijective strictement croissante.

1. Montrer qu'il y a convergence uniforme (deuxième théorème de Dini, considérer une subdivision de $[a,b]$).
2. Montrer que les fonctions réciproques f_n^{-1} convergent simplement vers une fonction g et que $g = f^{-1}$.

3. Montrer que (f_n^{-1}) converge uniformément vers f^{-1}.

Correction ▼ [004549]

Exercice 4168 Mines MP 2001

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le compact K, à valeurs réelles et convergent uniformément sur K vers la fonction f. A-t-on $\sup f_n \longrightarrow \sup f$ lorsque $n \longrightarrow \infty$?

Correction ▼ [004550]

Exercice 4169 Mines MP 2001

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sous réserve de convergence.

1. Étudier la convergence simple, normale, uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [004551]

Exercice 4170 Centrale MP 2001

Convergence et limite en 1^- de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.

Correction ▼ [004552]

Exercice 4171 Centrale MP 2001

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$.

1. Pour quelles valeurs de t, S est-elle définie ? Est-elle continue ?
2. Montrer qu'au voisinage de 1^- on a $S(t) = -\frac{\ln(1-t)}{1-t} + O\left(\frac{1}{1-t}\right)$. On pourra développer $\ln(1-t)$ en série entière.

Correction ▼ [004553]

Exercice 4172 Centrale MP 2002

On pose $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| \text{ tel que } n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$ est définie et continue.
2. Montrer que ϕ est lipschitzienne. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Correction ▼ [004554]

Exercice 4173 ENS Lyon-Cachan MP 2002

Soin $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose : $f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin^2(nh)}{(nh)^2}$ si $h \neq 0$ et $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Étudier le domaine de définition et la continuité de f.

Correction ▼ [004555]

Exercice 4174 Centrale MP 2002

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \frac{1}{n} \int_{t=0}^{n} f(x+t) f(t)\, dt$.

1. Montrer que la suite (F_n) converge vers une fonction F que l'on précisera.
2. Nature de la convergence ?
3. Prouver $\|F\|_\infty = |F(0)|$.

Correction ▼ [004556]

Exercice 4175 Approximation par des fractions rationnelles

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, ayant même limite finie ℓ en $\pm\infty$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles.

Correction ▼ [004557]

Exercice 4176 Fonction définie par une série

On pose pour $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to\infty}f(x)$.
2. Chercher un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Correction ▼ [004558]

Exercice 4177 Recherche d'équivalents, Centrale MP 2006

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Correction ▼ [004559]

Exercice 4178 Étude de $\sum t^{p-1}\sin(px)$ pour $x\in\,]0,\pi[$, TPE MP 2005

1. Calculer $S_n(t)=\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}\sin(px)$ puis $S(t)=\lim_{n\to\infty}S_n(t)$.
2. Calculer $\int_{t=0}^{1}S_n(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{1}S(t)\,dt$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ converge et donner sa valeur.

Correction ▼ [004560]

Exercice 4179 Fraction rationnelle de meilleure approximation (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

On note R l'ensemble des fractions rationnelles continues sur $[0,1]$ et pour $m,n\in\mathbb{N}$:

$R_{m,n}=\{f\in R$ tel que $\exists\,P,Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P)\le m,\ \deg(Q)\le n$ et $f=P/Q\}$.

1. R est-il un espace vectoriel ? Si oui en trouver une base. Même question pour $R_{m,n}$.
2. Soient m,n fixés. On note $d=\inf\{\|g-f\|,\ f\in R_{m,n}\}$ où g désigne une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\|h\|=\sup\{|h(x)|,\ x\in[0,1]\}$. Montrer qu'il existe $r_0\in R_{m,n}$ tel que $\|g-r_0\|=d$.

Correction ▼ [004561]

Exercice 4180 Dérivation multiple, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que (f_n') converge uniformément vers g et il existe x_1 tel que $(f_n(x_1))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f'=g$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur $[a,b]$ telle que $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers g et il existe $x_1,\dots,x_p$ distincts tels que $(f_n(x_i))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f^{(p)}=g$.

Correction ▼ [004562]

Exercice 4181 Exponentielle, Polytechnique MP* 2006

Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exp(A)-\exp(B)=\int_{s=0}^{1}\exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\,ds$.

Correction ▼ [004563]

Exercice 4182 **

Pour $x>0$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de f en 0 à droite.

Correction ▼ [005736]

Exercice 4183 ***

Pour $x\in]-1,1[$, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Trouver un équivalent simple de f en 1.

Correction ▼ [005737]

162 223.01 Limite

Exercice 4184

Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$
2. $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$
3. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
5. $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Indication ▼ Correction ▼ [001784]

Exercice 4185

Soit $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0 \tag{3}$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Indication ▼ Correction ▼ [001785]

Exercice 4186

Soit

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad\text{et}\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0. [001786]

Exercice 4187

Déterminer les limites lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$

3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$;
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$;
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2}$;
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{\cos y-\cosh x}$

Indication ▼ Correction ▼ [001787]

Exercice 4188

Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier l'existence d'une limite en $(0,0,0)$:

1. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$;
2. $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [001788]

Exercice 4189

Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f_1(0,0) = 0.$$
$$f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f_2(0,0) = 0.$$

[001789]

Exercice 4190 partiel 1999

1. Étudier la continuité de la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)(\sin y)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. Soit $a > 0$ fixé. Étudier la continuité de la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a\,|y|^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
3. Étudier la continuité de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_3(x,y) = \begin{cases} y-x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leq x^2. \end{cases}$$
4. On définit une fonction continue de l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ en posant
$$f_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\, \sin\frac{1}{x}\, \sin\frac{1}{y}\, \cos\frac{1}{z}.$$
Étudier la possibilité de prolonger f_4 en une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$.

[001790]

Exercice 4191

Prolonger par continuité la fonction $g : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$. [001791]

Exercice 4192

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,.)$ et $f(.,y)$ sont continues. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to\infty} g_n(x,y)=f(x,y).$$

[001792]

Exercice 4193

Pour chacune des suites $(u_n)_n$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, placer quelques-uns des points u_n dans le plan et décrire qualitativement le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini. Étudier ensuite la convergence de chacune des suites et déterminer la limite le cas échéant.

1. $u_n=(\frac{4n^2}{n^2+4n+3},\cos\frac{1}{n})$
2. $u_n=(\frac{n^2\arctan n}{n^2+1},\sin(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n})))$
3. $u_n=(\sinh n,\frac{\ln n}{n})$
4. $u_n=(a^n\cos(n\alpha),a^n\sin(n\alpha))$, en fonction de $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002621]

Exercice 4194

On considère une suite $(u_n)_n$, de terme général $u_n\in\mathbb{R}^2$.

1. Donner la définition de convergence pour une telle suite. (Ceci est une question de cours !)
2. Soit la suite de terme général $u_n=(\mathrm{th}(n),\cos(n)\exp(-n^2))$. Étudier sa convergence.

[002649]

Exercice 4195 **T

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $\frac{xy}{x+y}$
2. $\frac{xy}{x^2+y^2}$
3. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
4. $\frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$
5. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
6. $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Correction ▼ [005553]

Exercice 4196 ** I

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
3. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$
4. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$
5. $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
6. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$
7. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$
8. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

Correction ▼ [005887]

163 223.02 Continuité

Exercice 4197

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

[001793]

Exercice 4198

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
5. $$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
6. $$f(x,y) = \begin{cases} x e^{\arctan \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[001794]

Exercice 4199

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) ; x \in \mathbb{R}\}$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$? [001795]

Exercice 4200

Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[001796]

Exercice 4201

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+2y)^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3. $$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{y} & \text{si } y\neq 0\\ x & \text{sinon.}\end{cases}$$

5. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ \frac{1}{1+x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

   définie sur $D=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0\}$.

[001797]

Exercice 4202

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y}{x-y}, \quad \text{si } x\neq y\\ &= x, \quad \text{si } x=y. \end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.
2. Pour tout $v=(\cos\theta,\sin\theta)$, calculer $D_vf(1,-2)$. Pour quelles valeurs de $\theta\in[0,2\pi[$, $D_vf(1,-2)=0$?
3. Étudier la continuité de f au point $(1,1)\in\mathbb{R}^2$.
4. Étudier la continuité de f au point $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et les déterminer.
6. Montrer que la dérivée directionnelle $D_vf(0,0)$ existe pour $v=(1,1)$, et la déterminer. On constatera que l'égalité $D_vf(0,0)=\partial_xf(0,0)+\partial_yf(0,0)$ n'est pas satisfaite. Expliquer pourquoi cela ne contredit aucun théorème du cours.

[002650]

Exercice 4203 ***

On pose $f_{x,y}:\begin{array}{ccc}[-1,1] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & xt^2+yt\end{array}$ puis $F(x,y)=\sup\limits_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005554]

Exercice 4204 **

Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $B=\{x\in E/\ \|x\|<1\}$. Montrer que $f:\begin{array}{ccc}E & \to & B\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|}\end{array}$ est un homéomorphisme.

Correction ▼ [005900]

Exercice 4205 **

$E=\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f:\begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \|x\|_2\end{array}$ est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et préciser df.

Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Correction ▼ [005901]

---

164 223.03 Différentiabilité

Exercice 4206

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x,y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$.

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité. [001798]

Exercice 4207

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles. f est-elle C^1 ? [001799]

Exercice 4208

Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} &f(x,y) = xy\tfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ &f(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1.

Indication ▼ Correction ▼ [001800]

Exercice 4209

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy)$$

Indication ▼ Correction ▼ [001801]

Exercice 4210

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$. [001802]

Exercice 4211

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x & \text{si} & |x| > |y| \\ f(x,y) = y & \text{si} & |x| < |y| \\ f(x,y) = 0 & \text{si} & |x| = |y|. \end{array}$$

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Indication ▼ Correction ▼ [001803]

Exercice 4212

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ fixé ; l'application $x \to \langle x, a\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usuel dans $\mathbb{R}$ est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont elles continues ? [001804]

Exercice 4213

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

– si $|x| \leq y$, $f(x,y) = x^2$.
– $f(x,y) = y^2$ sinon.

Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles. [001805]

Exercice 4214

Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0. [001806]

Exercice 4215

Soient $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad |f(x,y)| \leq \left(x^2+y^4\right)^{\frac{2\alpha-3}{4}}.$$
   (b) Calculer $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \left|f(y^2,y)\right|$.
   (c) Étudier la continuité de f en (0,0).
2. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|^{\alpha-2}.$$
   (b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|}$.
   (c) Étudier la différentiabilité de f en (0,0).

[001807]

Exercice 4216

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = e^{x^2+y^2}$ au point $P(1,0)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = x^2-3yz+5$ au point $P(1,2,1)$ dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = xy+yz+zx$ au point $M(2,1,3)$ dans la direction joignant ce point au point $N(5,5,15)$.

[001808]

Exercice 4217

Etudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} e^{x\ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[001809]

Exercice 4218

On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue mais pas différentiable en $(0,0)$. [001810]

Exercice 4219

Soit $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f. [001811]

Exercice 4220

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable. [001812]

Exercice 4221

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\ . \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$. [001813]

Exercice 4222

Etudier la différentiabilité et la continuité des dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

[001814]

Exercice 4223

Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions définies par

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[001815]

Exercice 4224

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition.

1. $f(x,y) = x^2e^{xy}$;
2. $g(x,y,z) = x^2y^3\sqrt{z}$;
3. $h(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

[001816]

Exercice 4225

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ en $(2,1)$. [001817]

Exercice 4226

On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$. [001818]

Exercice 4227

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ au point $P(1,2)$ dans une direction formant avec l'axe Ox un angle de $\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ au point $P(1,2)$ dans la direction joignant ce point au point $M(4,6)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ au point $P(1,1)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.

[001819]

Exercice 4228

Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$;
2. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

[001820]

Exercice 4229

Calculer $df(1,1)$, si $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$. [001821]

Exercice 4230

Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ à l'origine dans une direction formant avec les axes de coordonnées x,y,z les angles α, β, γ. [001822]

Exercice 4231

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,3,3)$;
2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1/2,1)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002628]

Exercice 4232

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Indication ▼ Correction ▼ [002629]

Exercice 4233

Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$. Même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$.

Indication ▼ Correction ▼ [002630]

Exercice 4234

Soit C le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et C^+ le demi-cône où $z \geq 0$. Pour un point quelconque M_0 de $C \setminus \{(0,0,0)\}$, de coordonnées $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, on note $\mathscr{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône C en M_0.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan $\mathscr{P}_{M_0}$.
2. Montrer que l'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et que l'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites $\mathscr{D}_1^+$ et $\mathscr{D}_2^+$.
3. Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $\mathscr{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ (respectivement en tout point de $\mathscr{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$).

Indication ▼ Correction ▼ [002631]

Exercice 4235

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_{M_0}$ au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
2. Pour le point M_0 de coordonnées $(2,1,2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle à $\mathscr{P}_{M_0}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002632]

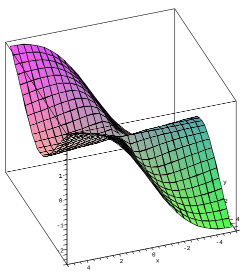
Exercice 4236

Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue et que, quel que soit $v \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle $D_v f(x,y)$ existe en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. La dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ est-elle linéaire en v ? Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$, forment-elles un plan ? Expliquer comment on peut observer la réponse sur la figure.
3. Le vecteur v étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de $D_v f(x,y)$ en (x,y) ?



Indication ▼ Correction ▼ [002633]

Exercice 4237

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))], \quad \arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)].$$

Indication ▼ Correction ▼ [002634]

Exercice 4238

1. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Donner la définition de "f est différentiable en a".
2. Montrer que, si f est différentiable en a, alors toutes ses dérivées partielles existent. Exprimer le lien entre la différentielle df_a de f en a et les dérivées partielles de f en a.
3. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera brièvement sa réponse.
   (A) Si f est différentiable en a, alors elle y est continue.
   (B) Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors f est différentiable en a.

[002651]

Exercice 4239

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée de

$$\exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

[002652]

Exercice 4240 ***T

Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}^2$ où $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$.

Correction ▼ [005555]

Exercice 4241 *** I

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005888]

Exercice 4242 ** I

Extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3+3x^2y-15x-12y$
2. $f(x,y) = -2(x-y)^2+x^4+y^4$.

Correction ▼ [005894]

Exercice 4243 *** I

Soit $f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.

Correction ▼ [005895]

Exercice 4244 *

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$.

Correction ▼ [005896]

Exercice 4245 **

Déterminer la différentielle en tout point de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$.

Correction ▼ [005899]

---

165 223.04 Dérivée partielle

Exercice 4246

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f. Pour chacune des fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent :

1. $f(x,y) = x^2 \exp(xy)$,
2. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$,
3. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
4. $f(x,y,z) = x^2y^2\sqrt{z}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002622]

Exercice 4247

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $D_v f(0,0)$. Pour quelle(s) valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

Indication ▼ Correction ▼ [002623]

Exercice 4248

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002624]

Exercice 4249

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \dfrac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) & = & 0. \end{array}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.
6. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002625]

Exercice 4250

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002626]

Exercice 4251

On considère les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Indication ▼ Correction ▼ [002627]

Exercice 4252 Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

1. $f(x,y,z) = (x+z)^{(y^z)}$
2. $f(x,y) = \min(x, y^2)$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

[004136]

Exercice 4253 DL d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0,1,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 3$.

Peut-on déterminer $\lim_{t\to 0} \frac{f(t^2, \operatorname{ch} t, e^t)}{f(t, \cos t, \operatorname{ch} t)}$?

Correction ▼ [004137]

Exercice 4254 Simplification

Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.

Correction ▼ [004138]

Exercice 4255 Somme des angles d'un triangle

Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f : (x,y,z) \mapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x,y,z sont strictement positifs. [004139]

Exercice 4256 Intégrale fonction de paramètres

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n) \mapsto \int_{t=0}^{1} f(t, x_1t + x_2t^2 + \dots + x_nt^n)\,dt$.

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles. [004140]

Exercice 4257 Dérivées secondes composées

Soient $u,v,f,g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ liées par la relation :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.

Correction ▼ [004141]

Exercice 4258 Les polynômes complexes sont harmoniques

Soient $P \in (x^2+1)[X]$ et $f : \mathbb{R}^2 \to (x^2+1), (x,y) \mapsto P(x+iy)$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. [004142]

Exercice 4259 Laplacien en polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, et $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplacien de f).

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.

Correction ▼ [004143]

Exercice 4260 Laplacien en sphériques

Soient $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ avec $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi, \end{cases}$ et $F = f \circ \Phi$. Vérifier que :

$$(\Delta f)\circ\Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.
[004144]

Exercice 4261 Laplacien en dimension n

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit une application F de $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(x_1,\dots,x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$.

Calculer le laplacien de F en fonction de f.

Correction ▼ [004145]

Exercice 4262 Contre-exemple au théorème de Schwarz

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathscr{C}^2$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f. En déduire les valeurs de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Correction ▼ [004146]

Exercice 4263 Contre-exemple au théorème de Schwarz (Centrale MP 2003)

Soit $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Correction ▼ [004147]

Exercice 4264 Dérivées d'ordre k distinctes

Trouver $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que les $k+1$ dérivées d'ordre k en $(0,0)$ soient distinctes.

[004148]

Exercice 4265 Les isométries conservent le laplacien

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\| \ \|_2$.

1. Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linéaire de φ.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$.

[004149]

Exercice 4266 Changement de variables affine

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine.

1. Montrer que la matrice jacobienne, J, de φ est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $A \in \mathbb{R}^2$, on note $H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$ (*matrice Hessienne de* f). Montrer que : $\forall\, A \in \mathbb{R}^2,\ H_{f\circ\varphi}(A) = {}^tJH_f(\varphi(A))J$.

[004150]

Exercice 4267 Formule de Leibniz

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Calculer $\frac{\partial^n(fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ en fonction des dérivées de f et g.

Correction ▼ [004151]

Exercice 4268 Intégration de formes différentielles

Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2+x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+y}{x} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{x}{y^2} \end{cases}$

Correction ▼ [004152]

Exercice 4269 Formes différentielles exactes

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle $\omega = f(y)(xe^y\,dx + y\,dy)$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Correction ▼ [004153]

Exercice 4270

Quelles sont les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle :

$\omega = f(x,y)\,d(x^2+y^2)$ soit exacte ?

Correction ▼ [004154]

Exercice 4271

Trouver les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle :

$\omega = 2xz\,dx + f(y)g(z)\,dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)dz$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Correction ▼ [004155]

Exercice 4272 Équation associée à une différentielle exacte

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln x}{xy^2} \end{cases}$
2. Application : Résoudre l'équation différentielle : $(x \ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Correction ▼ [004156]

Exercice 4273 Équation aux dérivées partielles

Trouver les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$. [004157]

Exercice 4274 DL d'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer que :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(a,b) + o(h^2+k^2).$$

[004158]

Exercice 4275 Ajustement linéaire

Problème d'ajustement linéaire : Etant donné n couples de réels (x_i, y_i) $1 \le i \le n$, on cherche une droite D d'équation $y = ax+b$ telle que $\mu(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimal.

On note $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i$, et on suppose $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$.

1. Résoudre le problème.
2. Interpréter la relation $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

[004159]

Exercice 4276 Jacobien des fonctions symétriques

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \dots, x_n$. Calculer le déterminant jacobien de f.

Correction ▼ [004160]

Exercice 4277 Changement de variables

On pose $f(x,y) = (x+y, xy) = (u,v)$. Montrer que f induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser. Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.

[004161]

Exercice 4278 Changement de variables

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$. Montrer que f induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Correction ▼ [004162]

Exercice 4279 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ dont les dérivées secondes sont bornées :

$$\forall\, i,j,\ \forall\, A \in U,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right| \leq M.$$

1. Montrer que : $\forall\, A,B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_A(\vec{AB})\right| \leq \frac{M\|\vec{AB}\|_1^2}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, A,B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_C(\vec{AB})\right| \leq \frac{M\|\vec{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A,B]$.

[004163]

Exercice 4280 Application du théorème des fonctions implicites

On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1+2x+y$. Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point $(0,0)$.

Correction ▼ [004164]

Exercice 4281 Théorème des fonctions implicites

1. Montrer que l'équation : $x^3+y^3-3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Correction ▼ [004165]

Exercice 4282 Théorème des fonctions implicites, Ensi P 91

Montrer que l'égalité $2e^{x+y}+y-x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,-1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Correction ▼ [004166]

Exercice 4283 Équation implicite $x\ln x = y\ln y$

Soit $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$ $(x,y>0)$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $f(x,y) = k$.

1. Suivant la position de $(a,b) \in \mathscr{C}_k$, préciser l'orientation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ en (a,b).
2. Dresser le tableau de variations de $\phi(t) = t\ln t$.
3. Dessiner $\mathscr{C}_0$. (Étudier en particulier les points $(0,1), (1,0)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)
4. Indiquer l'allure générale des courbes $\mathscr{C}_k$ suivant le signe de k.

[004167]

Exercice 4284 Fonction implicite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.
2. Montrer que l'on a alors : $\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

[004168]

Exercice 4285 Équation fonction de deux paramètres

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow x^5 + \lambda x^3 + \mu x^2 - 1 = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage, V, de $(0,0)$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}&\varphi \text{ est } \mathscr{C}^\infty\\ &\varphi(0,0) = 1\\ &\forall\ (\lambda,\mu) \in V,\ \varphi(\lambda,\mu) \text{ est racine simple de } (*).\end{aligned}$$

Donner le DL à l'ordre 2 de φ en $(0,0)$.

Correction ▼ [004169]

Exercice 4286 Changement de variable singulier, Matexo

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même définie par $f(x,y) = (u,v)$, où

$$u(x,y) = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad v(x,y) = (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Calculer sa matrice jacobienne. Est-elle inversible localement ? Caractériser $f(\mathbb{R}^2)$.

Correction ▼ [004170]

Exercice 4287 Longueur d'un arc de courbe

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont les dérivées partielles sont bornées sur U et $t \in I \ \mapsto M_t$ une courbe paramétrée dans U de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $a, b \in I$ comparer les longueurs des arcs $\overset{\frown}{M_a M_b}$ et $\overset{\frown}{f(M_a) f(M_b)}$. [004171]

Exercice 4288 Différentielle du déterminant

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \det M$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que l'on a pour $M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $df_M(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M)H)$.

Application : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$. Exprimer a_1 en fonction des cofacteurs de M. [004172]

Exercice 4289 Mise en facteur de x et y

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0,0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $g, h : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que :
$$\forall\ (x,y) \in U,\ f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y).$$
2. Y a-t-il unicité de g et h ?
3. Généraliser au cas où U n'est pas convexe.

Correction ▼ [004173]

Exercice 4290 Fonctions convexes

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque :

$$\forall x,y \in U,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

1. On suppose que f est convexe.
   (a) Soient $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ tel que $x-h \in U$ et $x+h \in U$. Montrer :
   $$(1+t)f(x)-tf(x-h) \leq f(x+th) \leq (1-t)f(x)+tf(x+h).$$
   (b) Montrer que f est continue (raisonner sur le cas $n=2$ puis généraliser).
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
   Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $(x,y) \in U$ on a : $f(y) \geq f(x)+df_x(y-x)$. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque $n=2$.
3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (a) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$ la forme bilinéaire symétrique d^2f_x est positive.
   (b) Si, pour tout $x \in U$, d^2f_x est définie positive, montrer que f est strictement convexe. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

Correction ▼ [004174]

Exercice 4291 Les racines d'un polynôme sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ des coefficients

Soit U l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n et à racines réelles simples.

1. Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $P \in U$ on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de P. Montrer que l'application $P \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

[004175]

Exercice 4292 Non injectivité locale de l'exponentielle

Soit $f : \mathscr{M}_n((x^2+1)^) \to \mathscr{M}_n((x^2+1)^), M \mapsto \exp(M)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ et exprimer, pour $M,H \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, $df_M(H)$ sous forme d'une série.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ tel que pour toutes matrices $A,B \in V$ on a : $\exp(A) = \exp(B) \Rightarrow A = B$.
3. Trouver une suite (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_2((x^2+1)^)$ distinctes ayant même exponentielle et convergeant vers une matrice A (donc il n'existe pas de voisinage de A sur lequel la restriction de f est injective).
4. Donner de même un point de non injectivité locale dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [004176]

Exercice 4293 Caractérisation des isométries

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que f est une application affine si et seulement si sa différentielle est constante (c'est-à-dire $df_x = df_y$ pour tous x,y, égalité dans $\mathscr{L}(E)$).
2. Soit X un ensemble non vide quelconque et $\varphi : X^3 \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
   $$\forall x,y,z \in X,\ \varphi(x,y,z) = \varphi(y,x,z) = -\varphi(z,y,x).$$
   Montrer que $\varphi = 0$ (lemme des tresses).
3. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que f est une isométrie de E pour la distance euclidienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, df_x est une application orthogonale.

[004177]

Exercice 4294 Différentiabilité de la norme

Pour chacune des trois normes classiques sur $\mathbb{R}^2$ dire en quels points elles sont différentiables. [004178]

Exercice 4295 Difféomorphisme

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, h \in E,\ (df_x(h) \mid h) \geq \alpha \|h\|^2.$$

1. Montrer pour $x, y \in E$: $(f(x) - f(y) \mid x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2$. En déduire que $f(E)$ est fermé.
2. Montrer que $f(E)$ est ouvert puis que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

[004179]

Exercice 4296 Difféomorphisme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et k-lipschitzienne avec $k < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + f(y), y - f(x))$.
Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. [004180]

Exercice 4297 Partiellement dérivable $\Rightarrow$ continue ?

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner un exemple de fonction $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières, mais discontinue en au moins un point.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières *bornées* sur U. Montrer que f est continue.

Correction ▼ [004181]

Exercice 4298 Point non extrémal

On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \frac{4x^6 y^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.
3. Calculer $f(x, x^2)$. Conclusion ?

Correction ▼ [004182]

Exercice 4299 Contre-exemple au théorème de Leibniz

On pose : $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x \leq \sqrt{y}\,; \\ 2\sqrt{y} - x & \text{si } y \geq 0 \text{ et } \sqrt{y} < x \leq 2\sqrt{y}\,; \\ 0 & \text{si } y \geq 0 \text{ et } 2\sqrt{y} < x \text{ ou } x \leq 0\,; \\ -f(x,-y) & \text{si } y < 0. \end{cases}$ et : $F(y) = \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx$.

Faire un dessin, vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, calculer $F(y)$ pour $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$, $F'(0)$ et $\int_{x=0}^{1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\,dx$. [004183]

Exercice 4300 Centrale MP 2000

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $c > 0$ tels que, pour tous x, y, $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$.

1. Montrer que pour tous x, h, $\|df_x(h)\| \geq c\|h\|$.
2. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ (pour la surjectivité on considèrera, si $a \in \mathbb{R}^n$, le minimum de $\|f(x) - a\|^2$).

Correction ▼ [004184]

Exercice 4301 Centrale MP 2000

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

1. On suppose que $\Delta u > 0$. Montrer que $\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}\setminus\Omega} u(x,y)$.
2. Même question en supposant seulement $\Delta u \geq 0$.
3. Soit $0 < r_1 < r_2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 < x^2+y^2 < r_2^2\}$. On suppose que u est continue sur $\overline{A}$, $\mathscr{C}^2$ sur A et que $\Delta u \geq 0$ sur A. On pose pose $M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$.

   Montrer que, pour tout $r_1 \leq r \leq r_2$, $M(r) \leq \frac{M(r_1)\ln(r_2/r)+M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$.

   Indication : la fonction $v : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ vérifie $\Delta v = 0$.

Correction ▼ [004185]

Exercice 4302 Mines MP 2001

Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur le disque unité du plan, telle que son laplacien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ soit nul.

1. Montrer $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$ ne dépend pas de $r \in [0,1]$.
2. Calculer alors $\iint_{D_r} f(x,y)\,dxdy$ D_r étant le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Correction ▼ [004186]

Exercice 4303 Mines MP 2001

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geq 1$ et $|g'(x)| < 1$. Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = (f(x)+g(y), f(y)+g(x))$.

1. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
2. On suppose qu'il existe $k \in\,]0,1[$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |g'(x)| < k$; montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004187]

Exercice 4304 ENS MP 2002

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $|f(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$. Prouver que ∇f est surjective sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004188]

Exercice 4305 ENS MP 2002

Soit n un entier > 0, $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $f(x)/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, et qu'en tout point la matrice hessienne de f est définie positive.

On pose $g(y) = \sup\{(x \mid y) - f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Étudier les propriétés de g.

Correction ▼ [004189]

Exercice 4306 $\int \varphi\circ f$, X MP* 2004

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On y définit une norme par : $\|f\| = \sqrt{\int_{t=0}^{1} f^2(t)\,dt}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que φ'' est bornée. Pour $f \in E$ on pose $T(f) = \int_{t=0}^{1} \varphi(f(t))\,dt$.

1. Montrer que l'application ainsi définie $T : E \to \mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que T est différentiable en tout point.

Correction ▼ [004190]

Exercice 4307 ***T

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } y=0 \\ y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \end{array} \right. \end{array}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

Correction ▼ [005556]

Exercice 4308 ***

Le laplacien d'une application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Déterminer une fontion de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction

$$g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

soit non constante et ait un laplacien nul sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ le plus grand possible (une fonction de Laplacien nul est dite harmonique).

Correction ▼ [005557]

Exercice 4309 *

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda\in]0,+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$.

Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x).$$

Correction ▼ [005893]

166 223.05 Différentielle de fonctions composées

167 223.06 Différentielle seconde

Exercice 4310

Calculer les différentielles suivantes, sans calculer des dérivées partielles, en utilisant les propriétés des différentielles de sommes, produits et composées :

$$\text{(a) } \mathrm{d}\left(\ln(xy)\right) \quad \text{(b) } \mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right) \quad \text{(c) } \mathrm{d}\left(\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)$$

Indication ▼ Correction ▼ [002635]

Exercice 4311

1. Y a-t-il une fonction $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que
$$\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y?$$
2. Trouver les fonctions $b\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telles qu'il existe $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition
$$\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y.$$
Étant donnée alors la fonction b, déterminer toutes les fonctions g correspondantes.

Indication ▼ Correction ▼ [002636]

Exercice 4312

Soit $g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $g(1,1)=3$ et dont la différentielle vaille

$$\mathrm{d}g=(2xy+y^2)\mathrm{d}x+(x^2+2xy)\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Soit

$$h\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}$$

l'application de classe C^1 définie par

$$h(x,y)=(u(x,y),v(x,y))=(x^2y,xy^2)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}.$$

1. Calculer $\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$.
2. Déterminer g à partir du calcul précédent et (5), et sans autre calcul.
3. Montrer que h est une bijection. (On pourra calculer explicitement h^{-1}.)
4. Déterminer explicitement $\mathrm{d}(g\circ h^{-1})$.
5. Calculer les matrixes jacobiennes $J_h(x,y)$ et $J_{h^{-1}}(u,v)$ et vérifier par un calcul direct que

   $$J_h(x,y)J_{h^{-1}}(h(x,y))=I_2,$$

   où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Indication ▼ Correction ▼ [002637]

Exercice 4313

Calculer les matrices hessiennes des fonctions f définies par les expressions suivantes sur leur domaine de définition naturel :

$$\sin(xyz),\quad \sin^2(y/x).$$

Indication ▼ Correction ▼ [002638]

Exercice 4314

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient r et θ les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'association

$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\quad (r,\theta)\longmapsto(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par

$$F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

C'est "l'expression de f en coordonnées polaires". Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta). \tag{6}$$

Cette formule calcule "le Laplacien en coordonnées polaires." L'exercice ne dépend pas de la connaissance du Laplacien cependant.

Indication ▼ Correction ▼ [002639]

Exercice 4315

Les variables étant notées x et t, trouver la solution générale $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de "l'équation des ondes", à savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0. \tag{7}$$

Trouver ensuite la solution unique de l'équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x,0)=\sin x,\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)=-\cos x. \tag{8}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002640]

Exercice 4316 *** I

Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \\ 0 \text{ si } y=0 \end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Correction ▼ [005889]

Exercice 4317 ***

Trouver une application non constante $f\ :\ ]-1,1[\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

Correction ▼ [005904]

Exercice 4318 *** I

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.

Correction ▼ [005905]

168 223.07 Extremums locaux

Exercice 4319

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y)=x^2+2xy+y^2+6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y)=x^3+2xy^2-y^4+x^2+3xy+y^2+10$ au point critique $(0,0)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002641]

Exercice 4320

Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x,y)=\sin x+y^2-2y+1$$

Indication ▼ Correction ▼ [002642]

Exercice 4321

1. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^2 dans un voisinage de $0\in\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)\neq 0$. Montrer que la fonction réelle F des deux variables x et y définie dans un voisinage de $(0,0)$ par $F(x,y)=f(x)f(y)$ n'a pas d'extremum relatif en $(0,0)$. Est-ce que le point $(0,0)$ est quand même critique ? Si oui caractériser sa nature.
2. Déterminer les points critiques, puis les minima et les maxima locaux de
$$f(x,y)=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$
Remarque : en utilisant la périodicité de la fonction, on peut limiter le nombre de cas à étudier.

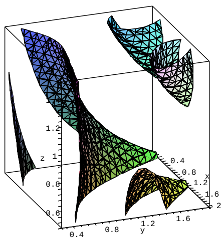
Indication ▼ Correction ▼ [002643]

Exercice 4322

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface de niveau

$$\sin(\pi xy)+\sin(\pi yz)=1,$$

au point de coordonnées $(1,\frac{1}{6},1)$. Identifier, en ce point, un vecteur perpendiculaire à la surface. Votre résultat est-il compatible avec la figure ci-dessous ? Expliquer.



Indication ▼ Correction ▼ [002644]

Exercice 4323

Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation $f(x,y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

1. Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe $\mathscr{C}$ au point $(0,0)$.
2. Déterminer la limite de y/x quand (x,y) tend le long la courbe $\mathscr{C}$ vers $(0,0)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002645]

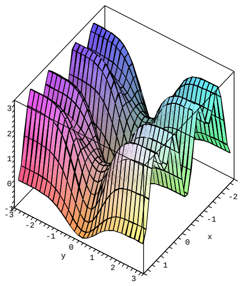
Exercice 4324

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f de deux variables définie par $f(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.
2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geq 0$. (*Indication* : Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geq 0$).
3. Montrer que le point $(-1,0)$ est un point isolé de la partie
$$\mathscr{C} = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$$
du plan, c'est-à-dire, le point $(-1,0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathscr{C} = \{(-1,0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1,0)$ et de rayon ε.
4. Énoncer le théorème des fonctions implicites.
5. Montrer que, quel que soit le point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinct de $(-1,0)$, au moins une des deux alternatives (i) ou (ii) ci-dessous est vérifiée :
   (i) Il existe une fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0) = y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$.
   (ii) Il existe une fonction k de classe C^1 de la variable y définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(y_0) = x_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002646]

Exercice 4325

On considère la fonction
$$f(x,y) = (1+2\cos^2(\pi x))(1-\exp(-y^2)) + \sin(\pi x).$$
Son graphe est reproduit dans la figure ci-dessous.



1. Trouver tous les points critiques de f et déterminer leur nature. Vos résultats sont-ils compatibles avec le graphe de la fonction, reproduit ci-dessus ?
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(1,1,f(1,1))$. Tracer la droite d'intersection de ce plan avec le plan xOy.

[002654]

Exercice 4326 Étude de points critiques

Chercher les extrémums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

1. $3xy-x^3-y^3$
2. $-2(x-y)^2+x^4+y^4$
3. $x^2y^2(1+3x+2y)$
4. $2x+y-x^4-y^4$
5. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x,y>0$
6. xe^y+ye^x
7. $x(\ln^2 x+y^2)$, $x>0$
8. $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}$
9. $MA+MB-MO, \quad O=\mathrm{mil}(A,B)$

Correction ▼ [004191]

Exercice 4327 Distances aux sommets d'un triangle

Soit $A\in\mathbb{R}^p$ fixé et $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, M\mapsto AM^2$ $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, M\mapsto AM$ (distance euclidienne)

1. Calculer les gradients de f et g en un point M.
2. Soient A,B,C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :
   (a) $MA^2+MB^2+MC^2$.
   (b) $MA+MB+MC$.
   (c) $MA\times MB\times MC$.

Correction ▼ [004192]

Exercice 4328 Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle de cotés a,b,c.

1. Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a, b, c.
2. Montrer que $\frac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatéral.

Correction ▼ [004193]

Exercice 4329 Centrale MP 2000

On considère un vrai triangle ABC et f la fonction définie par : $f(M) = d(M,AB) \times d(M,AC) \times d(M,BC)$. Montrer que f admet un maximum à l'intérieur du triangle ABC, et caractériser géométriquement le point M_0 où f est maximale.

Correction ▼ [004194]

Exercice 4330 Loi de réfraction

Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (0,a)$, $B = (b,-c)$ et $M = (x,0)$ $(a,b,c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\alpha_1 = \overline{(\vec{j},\vec{MA})}$ $\alpha_2 = \overline{(-\vec{j},\vec{MB})}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

[004195]

Exercice 4331 Centrale MP 2001

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Correction ▼ [004196]

Exercice 4332 Centrale MP 2001

D_1, D_2, D_3 sont trois droites d'un plan portant les côtés d'un triangle équilatéral de côté a. On pose

$$\varphi : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}, (M,N,P) \mapsto MN + NP + PM.$$

Déterminer $\min\varphi$ et les triplets (M,N,P) où ce minimum est atteint.

Correction ▼ [004197]

Exercice 4333 Centrale MP 2006

E désigne l'espace affine euclidien classique. D_1, D_2, D_3 sont trois droites deux à deux non parallèles. Soit $f : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}, (M_1,M_2,M_3) \mapsto \|\vec{M_1M_2}\|^2 + \|\vec{M_2M_3}\|^2 + \|\vec{M_3M_1}\|^2$.

1. Montrer que f admet un minimum atteint pour un unique triplet.
2. Dans le cas où D_1, D_2, D_3 sont coplanaires et délimitent un triangle équilatéral, trouver ce triplet.

Correction ▼ [004198]

Exercice 4334 Plus court chemin, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Déterminer le plus court chemin entre les pôles nord et sud d'une sphère en dimension 3.

Correction ▼ [004199]

Exercice 4335 Extremums liés, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, f de classe $\mathscr{C}^1$ sur B et $x \in B$ tel que $f(x) = \max\{f(y), y \in B\}$.

Montrer que $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$.

Correction ▼ [004200]

Exercice 4336 **T

Trouver les extrema locaux de

1. $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+xy+y^2+2x+3y \end{array}$
2. $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4+y^4-4xy \end{array}$

Correction ▼ [005558]

Exercice 4337 ***

Maximum du produit des distances aux cotés d'un triangle ABC du plan d'un point M intérieur à ce triangle (on admettra que ce maximum existe).

Correction ▼ [005559]

Exercice 4338 **

Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{y^2+(x-a)^2}$.

Correction ▼ [005560]

Exercice 4339 ***

Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Correction ▼ [005902]

Exercice 4340 *

Minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a réel donné.

Correction ▼ [005903]

---

169 223.08 Fonctions implicites

Exercice 4341

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$y^2(x^2+1)+x^2(y^2+1) = 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $b>0$ tel que le point de coordonnées $(1/2,b)$ se trouve sur $\mathscr{C}$. Déterminer b, puis déterminer l'équation de la droite tangente à $\mathscr{C}$, passant par $(1/2,b)$.
2. Trouver l'unique fonction $\varphi : x \in]-1,1[\to \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$ telle que $(x,\varphi(x)) \in \mathscr{C}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et que φ est décroissante sur $[0,1[$. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Énoncer le théorème des fonctions implicites et montrer qu'il existe exactement deux points de la courbe $\mathscr{C}$ où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas pour écrire, au voisinage de chacun de ces deux points, y comme fonction de x.

[002653]

Exercice 4342 **

Montrer que $\varphi: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x-e^y, x+y) \end{array}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Correction ▼ [005890]

Exercice 4343 ***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1}+y-x=0$ définit implicitement une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $[y^{2n+1}+y-x=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)]$.

Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^2 \varphi(t)\,dt$.

Correction ▼ [005891]

Exercice 4344 ***

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y}+y-1=0$.

Correction ▼ [005892]

170 223.99 Autre

Exercice 4345

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues en 0 et telle que :

$$\forall a\in\mathbb{R}^2-\{0\},\forall t>0, f(ta)=tf(a).$$

Montrer que f est linéaire. [001861]

Exercice 4346

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application C^1 sur un ouvert convexe O telle que :

$$\forall a\in O, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)=0.$$

Montrer que f est constante sur O. [001862]

Exercice 4347

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une application différentiable. Montrez que si $\|\nabla f(x)\|\leq M$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, alors

$$|f(x)-f(y)|\leq M\|x-y\|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n\ .$$

[001863]

Exercice 4348 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que : $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\ \ (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leq n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$
2. Déterminer : $m=\mathrm{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i)$ tels que $x_1,x_2,\cdots,x_n>0\}$
3. Déterminer : $M=\sup\{|x+2y+3z+4t|$ tels que $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ,x^2+y^2+z^2+t^2\leq 1\}$

[001864]

Exercice 4349

On considère la fonction $f(x,y)=2x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. Tracer les lignes de niveau $f(x,y)=2, f(x,y)=4$.
2. Tracer le graphe de la fonction f. Expliquer votre dessin en quelques phrases, en identifiant notamment les intersections du graphe de f avec les plans parallèles aux trois plans des coordonnées.

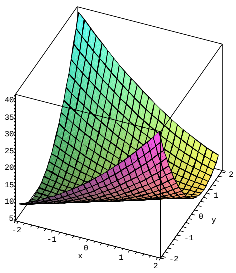
[002648]

Exercice 4350

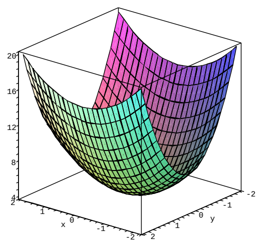
On considère les quatre surfaces $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$, définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2-\exp(2x^2+y^2)=0 &\quad (\Sigma_1)\\
z=x^2+3y^2+4 &\quad (\Sigma_2)\\
z-(x-2y)^2-4=0 &\quad (\Sigma_3)\\
\exp(x^2+y^2)+\exp(y^2+z^2)=3 &\quad (\Sigma_4)
\end{aligned}$$

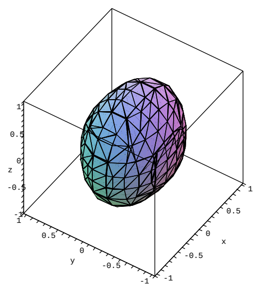
Les quatre surfaces sont tracées dans les parties A, B, C et D de la figure sur la page suivante. Indiquer quelle surface correspond à quelle partie de la figure. On justifiera très brièvement ses réponses.



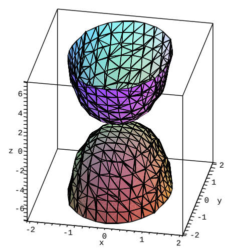
A



B



C



D

[002655]

Exercice 4351

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^n$ par $f(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$. Chercher ses extrema quand $x_1+\cdots+x_n=n$. En déduire que la moyenne géométrique de n nombres positifs est plus petite que leur moyenne arithmétique. [002684]

Exercice 4352 **

Trouver toutes les applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application f de $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}.$$

Correction ▼ [005561]

Exercice 4353 $**$

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (en utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x+2y$)
2. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0\}$ (en passant en polaires).

Correction ▼ [005562]

171 224.01 Intégrale multiple

Exercice 4354

Calculer $I_1 = \iint\limits_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}$.

Calculer $I_2 = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < x, x^2+y^2 > y\right\}$.

Calculer $I_3 = \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in [0,1]^2/x^2+y^2 \geq 1\right\}$.

Calculer $I_4 = \iint\limits_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

Calculer $I_5 = \iiint\limits_D zdxdydz$ où $D = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3/y^2+z \leq 1, x^2+z \leq 1\right\}$.

Calculer $I_5 = \iint\limits_D xydxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a, b > 0$. [001907]

Exercice 4355

Représenter et calculer le volume de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/-1 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2+1\right\}$. [001908]

Exercice 4356

Déterminer le centre de gravité du culbuto (homogène), *i.e.* le cône

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/z \in [0,1], x^2+y^2 \leq z^2\right\}$$

auquel on adjoint sur sa base une demi-boule. [001909]

Exercice 4357

Soit $D = [0,1]^2$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}.$$

[001910]

Exercice 4358

Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy.$$

[001911]

Exercice 4359

Soit $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2-2y \geq 0, x^2+y^2-1 \leq 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

[001912]

Exercice 4360

Soit $D = \{(x^2+y^2)^2 \leq xy\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy.$$

[001913]

Exercice 4361

Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ par deux méthodes différentes.
(On rappelle que l'aire d'un domaine D vaut $\iint_D dx\, dy$.) [001914]

Exercice 4362

Soit $a > 0$ et D le domaine délimité par la courbe d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$. Calculer l'aire de D. [001915]

Exercice 4363

Soient $0 < a \leq b, 0 < c \leq d$, et $D = \{ax^2 \leq y \leq bx^2, \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.) [001916]

Exercice 4364

Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leq 0, x^2 - 2py \leq 0\}$. Calculer :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dx\, dy.$$

(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$.) [001917]

Exercice 4365

Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2+y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0,R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

[001918]

Exercice 4366

Soient $a, R > 0$. Dans le plan (yOz), soit D le disque de centre $(0,a,0)$ et de rayon R. En tournant autour de l'axe (Oz), le disque D engendre un domaine T (appelé un tore plein). Calculer le volume de T (c'est-à-dire l'intégrale triple $\iiint_T dx\, dy\, dz$). [001919]

Exercice 4367

Soit $D = \{x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 + y^2\}$. Calculer le volume de D. [001920]

Exercice 4368

Soit $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$. Calculer :

$$\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

[001921]

Exercice 4369

Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes (Ox) et (Oy) et de même rayon $R > 0$? [001922]

Exercice 4370

En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a\,,\,b > 0$; $f(x,y) = x^2 + y^2$;
3. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq z \leq h\}$ avec $h > 0$; $f(x,y,z) = z$;
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 \leq y \leq 2x^2\,,\, 1/x \leq y \leq 2/x\}$; $f(x,y) = x + y$ (changement de variable $u = y/x^2\,,\, v = xy$) ;
5. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0\,,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$; $f(x,y,z) = xyz$;
6. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$; $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}$.

[001923]

Exercice 4371

Identifier les ensembles suivants et calculer leur aire s'ils sont dans $\mathbb{R}^2$, leur volume s'ils sont dans $\mathbb{R}^3$.

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a, b > 0$;
2. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ avec $a, b, c > 0$; qu'obtient-on dans le cas particulier où D est la boule unité de $\mathbb{R}^3$?
3. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R\,,\, 0 \leq z \leq h\right\}$ avec $R, h > 0$;
4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0\,,\, x + y + z \leq 1\right\}$;
5. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2/h^2\,,\, 0 \leq z \leq h\right\}$ avec $h > 0$.

[001924]

Exercice 4372

Calculer les coordonnées du centre d'inertie (de gravité) du domaine D :

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\right\}$ (le quart d'ellipse) ;
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\,,\, x \geq 0\,,\, |y| \leq ax\right\}$;
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\,,\, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

[001925]

Exercice 4373

1. **Théorème de Guldin** Soit D_0 un domaine tracé dans le demi-plan $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$. Si l'on fait tourner D_0 autour de l'axe Oz, on obtient un domaine D de $\mathbb{R}^3$. En utilisant les coordonnées cylindriques. montrer que
$$Vol\,(D) = 2\pi Aire\,(D_0) \cdot x_G\,,$$
où (x_G, z_G) sont les coordonnées du centre d'inertie du domaine D_0.
2. Calculer les volumes des domaines suivants :
   (a) le tore obtenu en faisant tourner autour de Oz le domaine $D_0 = \{(x,0,z) \mid \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\}$, où $a < c$;
   (b) $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2\,,\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$, où $R > 0$.

[001926]

Exercice 4374

On pose $I = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$ et $J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}\,dxdy$. Calculer J et en déduire la valeur de I. [001927]

Exercice 4375

On note D le domaine délimité par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

1. Calculer (directement) $I=\iint_D (x-y)dxdy$.
2. Calculer I au moyen du changement de variable $u=x+y$ et $v=x-y$.

[001928]

Exercice 4376

Soit $D=\{(x,y); x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$. Calculer $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$. [001929]

Exercice 4377 Intégrales doubles

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$:

1. $D=\{y\geq 0, x+y\leq 1, y-x\leq 1\}$,
   $f(x,y)=x^2y$.
2. $D=\{x^2+y^2\leq R^2\}$,
   $f(x,y)=x^2y$.
3. $D=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$,
   $f(x,y)=x^2+y^2$.
4. $D=\{0\leq x\leq 1-\frac{y^2}{4}\}$,
   $f(x,y)=x^2+y^2$.
5. $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$,
   $f(x,y)=(x+y)^2$.
6. $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$,
   $f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.
7. $D=\{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$,
   $f(x,y)=x+y+1$.
8. $D=\{|x+y|\leq 1, |x-y|\leq 1\}$,
   $f(x,y)=\ln(x+y+1)$.
9. $D=\{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq \pi\}$,
   $f(x,y)=(x+y)\sin x\sin y$.
10. $D=\{|x|\leq x^2+y^2\leq 1\}$,
    $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^2$.
11. $D=\{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq a\}$,
    $f(x,y)=x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.
12. $D=\{x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$,
    $f(x,y)=xy\sqrt{x^2+4y^2}$.
13. $D=\{x^2+y^2-2y\leq 0\}$,
    $f(x,y)=y\exp(x^2+y^2-2y)$.
14. $D=\{y^2\leq 2px, x^2\leq 2py\}$,
    $f(x,y)=\exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$.

Correction ▼ [004381]

Exercice 4378 ESEM 94

Calculer $I=\iint_\Delta xy\,dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)$ tel que $y\geq 0$ et $(x+y)^2\leq 2x/3\}$.

Correction ▼ [004382]

Exercice 4379 Ensi PC 1999

Calculer $I = \iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)$ tel que $y \geq 0$ et $x^2+y^2-2x \leq 0$ et $x^2+y^2-2y \leq 0\}$.

Correction ▼ [004383]

Exercice 4380 Intégrales triples

Calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$:

1. $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,
   $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$.
2. $D = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$,
   $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} \quad (a > R > 0)$.
3. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$,
   $f(x,y,z) = xyz$.
4. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$,
   $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$.
5. $D = \{x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq a\}$,
   $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3z(x^2+y^2)$.
6. $D = \{x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$,
   $f(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+1)^2}$.
7. $D = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$,
   f(x,y,z)=x$^2+y^2$.

Correction ▼ [004384]

Exercice 4381 Ensi Chimie P 93

1. Calculer $\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$ avec $D = \{(x,y,z)$ tel que $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z\}$.
2. En déduire $\int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt$.

Correction ▼ [004385]

Exercice 4382 Ensi Chimie P 93

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

En calculant $J = \iint_D \frac{x\,dxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$ avec $D = \{(x,y)$ tel que $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ de deux façons différentes, trouver I.

Correction ▼ [004386]

Exercice 4383 Ensi Chimie P 93

Soit T un tore plein d'axe (Oz) et de rayons R, r $(R > r)$. Calculer $\iiint_T (x^2+y^2)\,dxdydz$.

Correction ▼ [004387]

Exercice 4384 $MF+MF'$

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, E le domaine limité par $\mathscr{E}$ et F, F' les foyers de $\mathscr{E}$. Calculer $I = \iint_{M \in E} (MF+MF')\,dxdy$.

On effectuera le changement de variable : $x = \sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y = u \sin v$ où $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

Correction ▼ [004388]

Exercice 4385 $\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,dx$

1. Montrer l'existence de $I = \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,dx$.
2. Montrer que $I = \iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y}\,dxdy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$.
3. En déduire la valeur de I.

Correction ▼ [004389]

Exercice 4386 Intégrale de Gauss

Calcul de $I = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Pour $a > 0$ on note $\Delta_a = [0,a]\times[0,a]$ et C_a le quart de disque d'équations : $x^2+y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
   (a) Encadrer l'intégrale sur Δ_a de $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ par les intégrales de f sur des domaines du type C_b.
   (b) Calculer $\iint_{C_b} f(x,y)\,dxdy$ en polaires et en déduire la valeur de I.

[004390]

Exercice 4387 $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$

1. Calculer $A = \iint_{0\le y\le x\le 1} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2. Démontrer la convergence des intégrales :
   $B = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta}\,d\theta$, $C = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta}\,d\theta$, et $D = \int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$.
3. Démontrer que $A = B$ (passer en coordonnées polaires dans A).
4. Calculer $B+C$ et $B-C$ en fonction de D.
5. En déduire les valeurs de C et D.

Correction ▼ [004391]

Exercice 4388 Aires

Calculer l'aire des domaines suivants :

1. D est la partie du disque unité située dans la concavité de l'hyperbole d'équation $xy = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. D est l'intersection des domaines limités par les ellipses d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$.

Correction ▼ [004392]

Exercice 4389 Ensi P 90

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$.

Correction ▼ [004393]

Exercice 4390 Chimie P 91

On considère les courbes planes : $\mathscr{Q}_i$: $(x^2 = 2q_iy)$ et $\mathscr{P}_i$: $(y^2 = 2p_ix)$. On suppose $0 < q_1 < q_2$ et $0 < p_1 < p_2$. Calculer l'aire du "quadrilatère" limité par $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$.

Correction ▼ [004394]

Exercice 4391 Chimie P 1996

Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y-x)^2 = a^2-x^2$.

Correction ▼ [004395]

Exercice 4392 Volumes

Calculer le volume des domaines suivants :

1. D est l'intersection du cylindre de révolution d'axe Oz de rayon a et de la boule de centre O de rayon 1 ($0 < a < 1$).
2. D est l'intersection de la boule de centre O de rayon 1 et du cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle $\frac{\pi}{4}$.
3. D est le volume engendré par la rotation d'un disque de rayon r autour d'une droite coplanaire avec le disque, située à la distance $R > r$ du centre du disque (tore de révolution ou chambre à air).

Correction ▼ [004396]

Exercice 4393 Ensi Physique P 94

Calculer le volume intérieur au paraboloïde d'équation $x^2+y^2 = 2pz$ et extérieur au cône d'équation $x^2+y^2 = \lambda^2 z^2$ ($p > 0$, $\lambda > 0$).

Correction ▼ [004397]

Exercice 4394 Volume

Dans le plan Oxy on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ($a > 0$, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$). En tournant autour de Ox, $\mathscr{C}$ engendre une surface dont on calculera le volume qu'elle limite (on posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\cos\phi$, $z = \rho\sin\theta\sin\phi$).

Correction ▼ [004398]

Exercice 4395 Volume

On coupe une demi-boule par un plan P parallèle à sa base. Quelle doit être la position de P pour que les deux morceaux aient même volume ? (Donner un résultat approché)

Correction ▼ [004399]

Exercice 4396 Somme double

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0\leq i\leq j\leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$. [004400]

Exercice 4397 Nombre de couples (a,b) tel que $a^2+b^2 \leq n$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } p^2+q^2 \leq n\}$ et $C_n = \mathrm{Card}\,(E_n)$.

Interpréter C_n comme une aire et donner un équivalent de C_n lorsque $n \to \infty$. [004401]

Exercice 4398 Ens MP 2002

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^1 f = 1$. Pour $\psi \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ on pose

$$\Lambda_n(\psi) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) f(x_1)\dots f(x_n)\,dx_1\dots dx_n.$$

Montrer que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\left(\int_{x=0}^1 xf(x)\,dx\right)$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004402]

Exercice 4399 **

Calculer les intégrales multiples suivantes

1. $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.
2. $I = \iint_{[-1,1]^2} |x+y|\,dxdy$.
3. $I = \iint_D xy\,dxdy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.
4. $I = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$.

5. $I = \iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.
6. $I = \iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz$.
7. $I = \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz$.

Correction ▼ [005908]

Exercice 4400 ***

Soient $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0, +\infty[^4$ tel que $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$.
Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x$ et $2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y\}$.

Correction ▼ [005910]

Exercice 4401 *** I

Calculer le volume de $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$ (boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\| \ \|_2$).

Correction ▼ [005911]

Exercice 4402 **

Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

Correction ▼ [005912]

Exercice 4403 ***

Calculer $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2 - y^2)\, dxdy$.

Correction ▼ [005914]

---

172 224.02 Calcul approché d'intégrale

173 224.03 Intégrale de Riemann dépendant d'un paramètre

Exercice 4404 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0} \int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t}\, dt$.

Correction ▼ [004313]

Exercice 4405 Calcul de limite, Ensi P 90

Calculer les limites : $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\, dt$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\, dt$.

Correction ▼ [004314]

$\frac{t}{\tan^2 t} = \frac{1}{t} + \varphi(t)$ avec φ prolongeable par continuité en 0, donc $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\, dt = \ln 3$.
$\frac{t^2}{t+e^{3t}} = t^2 + o(t^2)$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\, dt = \frac{1}{3}$. **Exercice 4406** Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_{t=3}^{x^2+x} \frac{\sin t\, dt}{3+\ln(\ln t)}$.

Correction ▼ [004315]

Exercice 4407 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=x}^{x^2} \frac{e^{-t}\,dt}{\sin t \ln t}$.

Correction ▼ [004316]

Exercice 4408 Série d'intégrales, Esem 91

Établir la convergence et calculer la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

Correction ▼ [004317]

Exercice 4409 $\sin(t)/(t+x)$

1. Prouver l'existence pour $x > 0$ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

Correction ▼ [004318]

Exercice 4410 Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=0}^{1} \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004319]

Exercice 4411 Calcul d'équivalent, Mines 1999

Donner un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004320]

Exercice 4412 Calcul de limite

Soit $a > 0$. Donner le DL en $x = 1$ à l'ordre 3 de $f(x) = \int_{t=a/x}^{ax} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004321]

Exercice 4413 $(\int f^x)^{1/x}$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\int_{t=a}^{b} (f(t))^x\,dt\right)^{1/x}$.

1. Montrer que $\varphi(x) \to \max(f)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que $\varphi(x) \to \exp\left(\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,dt\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

Correction ▼ [004322]

Exercice 4414 $t^n f(t)$

Soit $I_n = \int_{t=0}^{1} t^n \ln(1+t^2)\,dt$. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

[004323]

Exercice 4415 $t^n f(t)$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1} t^n f(t)\,dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

[004324]

Exercice 4416 $f(t^n)$

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1} f(t^n)\,dt \to f(0)$ lorsque $n \to \infty$.
2. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=0}^{1} \frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.
3. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $-1+\int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004325]

Exercice 4417 $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+t^n}$.

Correction ▼ [004326]

Exercice 4418 $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004327]

Exercice 4419 $f(t^n)$

Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=1}^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004328]

Exercice 4420 Calcul de limite

Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{x+2}\,dx$.

[004329]

Exercice 4421 Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} nf(t)e^{-nt}\,dt$.

Correction ▼ [004330]

Exercice 4422 $(1-x/n)^n$, Ensi PSI 1998

Soit $x \in [0,n]$. Montrer que $(1-x/n)^n \le e^{-x}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1-x/n)^n\,dx$.

Correction ▼ [004331]

Exercice 4423 Équation intégrale, Ensi P 91

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$.

Correction ▼ [004332]

Exercice 4424 $\tan^n t$, Ensi Physique P 94

On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,dt$.

1. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Calculer I_n en fonction de n.
3. Que peut-on en déduire ?

Correction ▼ [004333]

Exercice 4425 Calcul de limite, École de l'air 94

Chercher $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt$.

Correction ▼ [004334]

Exercice 4426 Approximation de la mesure de Dirac

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue atteignant son maximum en un unique point $c \in]a,b[$.

1. Soit $\mu > 0$ tel que $[c-\mu, c+\mu] \subset [a,b]$. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^b f^n(t)\,dt \Big/ \int_{t=c-\mu}^{c+\mu} f^n(t)\,dt\right)$.
2. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^b f^n(t)g(t)\,dt \Big/ \int_{t=a}^b f^n(t)\,dt\right)$.

Correction ▼ [004335]

Exercice 4427 Équation intégrale

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^x f^2(t)\,dt \to \ell \neq 0$ (lorsque $x \to +\infty$). Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Correction ▼ [004336]

Exercice 4428 Convolution

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = \int_{t=a}^b f(t)g(x-t)\,dt$.

1. Montrer que φ est continue et que si g est de classe $\mathscr{C}^k$, alors φ l'est aussi.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et g continue), alors φ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

[004337]

Exercice 4429 Convolution (Mines MP 2003)

Soient $f, g \in \mathscr{C}([0,+\infty[, \mathbb{R})$. On pose $h(x) = \int_{t=0}^x f(x-t)g(t)\,dt$.

1. Existence et continuité de h.
2. Peut-on inverser f et g ?
3. On suppose f intégrable sur $[0,+\infty[$ et g bornée. Montrer que h est bornée.
4. On prend $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \cos(\alpha x)$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. h est-elle bornée (on pourra étudier les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$) ?

Correction ▼ [004338]

Exercice 4430 Calcul d'intégrale

1. Calculer $\varphi(a) = \int_{t=0}^1 \frac{dt}{1+at}$.
2. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^1 \frac{t\,dt}{(1+at)^2}$.

Correction ▼ [004339]

Exercice 4431 Fonction définie par une intégrale

On pose $\varphi(x) = \int_{t=0}^1 e^{-x/t}\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Vérifier que $\varphi''(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

[004340]

Exercice 4432 Fonction définie par une intégrale, Mines 1999

Soit $I(\alpha)=\int_{x=0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

[004341]

Exercice 4433 Fonction définie par une intégrale

On pose pour $x\geq 0$: $f(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$.

Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u=1/t$).

Correction ▼ [004342]

Exercice 4434 Fonction définie par une intégrale

On pose $I(x)=\int_{t=0}^{\pi/2}\ln(\cos^2 t+x^2\sin^2 t)\,dt$.

1. Montrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Correction ▼ [004343]

Exercice 4435 Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par : $f(x)=\left(\int_{t=0}^{x}e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x)=\int_{t=0}^{1}\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.
2. Montrer que $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.
3. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004344]

Exercice 4436 Intégrale de Gauss, Ensi PC 1999

On donne : $\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existence et valeur de $\int_{t=0}^{+\infty}e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,dt$.

Correction ▼ [004345]

Exercice 4437 Fonction définie par une intégrale

1. Soit $I(x)=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$. Prouver que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(x)$ $\left(\text{on admet que } I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Correction ▼ [004346]

Exercice 4438 Fonctions définies par des intégrales

On pose, pour x réel, $F(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt$ et $G(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{1-\cos tx}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

1. Montrer que les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ convergent absolument pour tout x réel et que $F(x)=|x|F(1)$.
2. Montrer que la fonction $F-G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

[004347]

Exercice 4439 Théorème de division des fonctions $\mathscr{C}^\infty$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ f'(0) & \text{si } x=0.\end{cases}$

Vérifier que $g(x)=\int_{t=0}^{1} f'(tx)\,dt$. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Montrer de même que la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{x^k}\left(f(x)-f(0)-xf'(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0.

[004348]

Exercice 4440 $y''+y=f$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On pose $g(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,dt$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle : $y''+y=f(x)$ telle que $y(0)=y'(0)=0$.

[004349]

Exercice 4441 Fonction définie par une intégrale

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On définit pour $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}$: $g(x,y)=\frac{1}{x}\int_{t=x}^{xy} f(t)\,dt$.

1. Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose de plus f dérivable en 0. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Correction ▼ [004350]

Exercice 4442 Fonctions définies par des intégrales

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} |x+t|\sin t\,dt$.
2. $f(x)=\int_{t=x}^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.
3. $f(x)=\int_{t=x}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.
4. $f(x)=\int_{t=0}^{1}\frac{e^t\,dt}{t+x}$.
5. $f(x)=\int_{t=0}^{\pi/2} x\exp\left(\frac{\sin t}{x}\right)dt$.
6. $f(x)=\int_{t=0}^{x}\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004351]

Exercice 4443 Fonction définie par une intégrale

Montrer qu'il existe un unique réel $x\in[0,\pi]$ tel que $\int_{\theta=0}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=0$. Calculer une valeur approchée de x à 10^{-2} près.

Correction ▼ [004352]

Exercice 4444 Développement en série, Ensam PSI 1998, Mines MP 1999

Soit $I(\alpha)=\int_{x=0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{e^x-1}\,dx$.

1. Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{b+n^2}$.
3. Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha\to+\infty$.

Correction ▼ [004353]

Exercice 4445 Formule de Stirling

Montrer que $\Gamma(x+1)\sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Correction ▼ [004354]

Exercice 4446 Développement en série, Mines 1999

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{e^{-i\theta}-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n}$. [004355]

Exercice 4447 Fonction définie par une intégrale, X 1999

1. Calculer $f(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at)\,dt$.
2. Soit $g(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin(at)}{t}\,dt$; calculer $\lim_{a\to+\infty} g(a)$.

Correction ▼ [004356]

Exercice 4448 Développement asymptotique

Soient $J(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$ et $K(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$.

Calculer $\lim_{x\to 0^+}(J(x)-K(x))$ et montrer que $J(x) = -\ln x + 2\ln 2 + o_{x\to 0^+}(1)$. [004357]

Exercice 4449 Transformée de Laplace

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (pas forcément absolument).

On pose $\varphi(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que φ est continue en 0.

Correction ▼ [004358]

Exercice 4450

On pose pour $n \geq 2$: $v_n = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^n}\,dx$. Montrer que la suite (v_n) converge. Nature de la série $\sum(v_n - 1)$?

Correction ▼ [004359]

Exercice 4451

On pose pour $n \geq 2$ $u_n = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$. Montrer que la suite (u_n) converge, puis que la série $\sum(u_n - 1)$ converge également.

Correction ▼ [004360]

Exercice 4452 Centrale MP 2000

Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$. Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

Correction ▼ [004361]

Exercice 4453 Centrale MP 2000

On considère $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).
2. Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}(x)$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en 1.
4. Calculer $f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Correction ▼ [004362]

Exercice 4454 Ensae MP* 2000

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.

Correction ▼ [004363]

Exercice 4455 Polytechnique MP* 2000

Existence et continuité de $f(x)=\int_{t=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt$. Montrer que f est intégrable.

Correction ▼ [004364]

Exercice 4456 Centrale MP 2001

1. Développer, pour tout $x>0$, $s(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,dt$ en série de fractions rationnelles.
2. Montrer qu'en 0^+, $s(x)$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$.

Correction ▼ [004365]

Exercice 4457 X MP* 2001

Étudier $\int_{t=0}^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004366]

Exercice 4458 Ensi MP 2004

Soit $f(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt$.

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer $f-f'$.
4. Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x\to+\infty$.
5. Montrer que $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
6. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [004367]

Exercice 4459 Ensea MP 2004

Soit $\alpha>0$.

1. Montrer que $f:x\mapsto e^{-\alpha x}\int_{\theta=0}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $I=\int_{x=0}^{+\infty}f(x)\,dx$. Indication : écrire $I=\lim_{a\to+\infty}\int_{x=0}^{a}f(x)\,dx$.

Correction ▼ [004368]

Exercice 4460 X MP* 2000

Étudier la limite en $0+$ de $I(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{e^{-t}-\cos t}{t}e^{-xt}\,dt$.

Correction ▼ [004369]

Exercice 4461 ζ et Γ

Montrer, pour $x>1$: $\zeta(x)\Gamma(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt$. [004370]

Exercice 4462 Centrale MP 2002

Soit $f : x\mapsto\int_{t=0}^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}+t+1}$. Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie. Calculer $\int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}+t}$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Correction ▼ [004371]

Exercice 4463 Polytechnique MP 2002

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x)\exp(\lambda n \sin^2(x))\,dx$.

Correction ▼ [004372]

Exercice 4464 Centrale MP 2004

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!}\int_{t=0}^{1} t(t-1)\dots(t-n)\,dt$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
2. Donner un équivalent de a_n.

Correction ▼ [004373]

Exercice 4465 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, Mines-Ponts MP 2004

Soit $u_n(t)$ le terme général d'une série : $u_n(t) = t^{n-1}\sin(nx)$ avec $0 < x < \pi$.

1. Étudier la convergence de la série.
2. Calculer $\sum_{p=0}^{n} u_p(t) = S_n(t)$. Mettre $S_n(t)$ sous la forme $\frac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n(t)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt$.
4. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Correction ▼ [004374]

Exercice 4466 Lemme de Lebesgue, Centrale MP 2004

Soit f continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans (x^2+1).

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\,dt \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit $u_n = \int_{t=0}^{n\pi} \sin^2(nt) f(t)\,dt$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \to \infty$ et la préciser.

Correction ▼ [004375]

Exercice 4467 Suite d'intégrales, Centrale MP 2004

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0,1],\ f_n(x) = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ.
2. (a) La convergence est-elle uniforme ?
   (b) La convergence est-elle monotone ?
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^{1} f_n(x)\,dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Correction ▼ [004376]

Exercice 4468 Mines-Ponts MP 2004

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{1-t}{\ln t} t^x\,dt$. Étudier le domaine de définition de f, sa dérivabilité, puis calculer $f(x)$.

Correction ▼ [004377]

Exercice 4469 Mines-Ponts MP 2004

Soit $I(a) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} e^{-ax}\,dx$.

1. Quel est le domaine de définition de I ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de I.
3. Calculer $I(a)$.

Correction ▼ [004378]

Exercice 4470 ENS Lyon MP* 2004

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $F(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-itx}\,dt$ avec $a < 0 < b$. Montrer que $F(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer que $F(x) = \frac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2}\,dt$.
4. Soit $g(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-ixt^2/2}\,dt$. Montrer que $g(x) = \frac{I.f(0)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Correction ▼ [004379]

Exercice 4471 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in (x^2+1)^{[}X]$ de degré $n \geq 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans (x^2+1). On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r,\theta) = \frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et $F(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r,\theta)\,d\theta$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
2. Vérifier que $ir\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta}$. En déduire que F est constante.
3. Obtenir une contradiction.

[004380]

Exercice 4472 ****

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t-x| f(t)\,dt$. Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005453]

Exercice 4473 ***

Etude complète de $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Correction ▼ [005460]

Exercice 4474 ***I

– Déterminer $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
– Etude complète de $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Correction ▼ [005464]

Exercice 4475

Etude de $f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2}\,dt$.

Correction ▼ [005472]

Exercice 4476

Etude de $f(x) = \int_0^1 \mathrm{Max}(x,t)\,dt$.

Correction ▼ [005473]

Exercice 4477 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt$.

Correction ▼ [005765]

Exercice 4478 *** I (très long) Intégrale de Poisson

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\, d\theta$.

1. (a) Montrer que F est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.
   (b) Calculer $F'(x)$.
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln x)$.
   (d) En déduire $F(x)$ pour tout réel x.
2. (a) Quand $x\in]-1,1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).
   (b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x)$ pour tout réel x.

Correction ▼ [005766]

Exercice 4479 ** I Un calcul de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.
3. Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. En déduire I.

Correction ▼ [005767]

Exercice 4480 ***

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\, dt$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Correction ▼ [005768]

Exercice 4481 ***

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\, dt$.

Correction ▼ [005769]

Exercice 4482 **** I (très long)

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

Correction ▼ [005770]

Exercice 4483 ** I (Produit de convolution)

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose
$$f*g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt.$$
Montrer que la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.
2. $*$ est donc une loi interne sur E, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Montrer que cette loi est commutative.

Correction ▼ [005771]

174 224.04 Tranformée de Laplace et transformée de Fourier

175 224.99 Autre

176 225.01 Résolution d'équation différentielle du premier ordre

Exercice 4484

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

[000845]

Exercice 4485

Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point M(.,.) et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0,1)$,
2. $y' + y\tan x = \sin x \cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$,
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, On déterminera $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

[000846]

Exercice 4486

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Intégrer $(E1)$ sur $]0,\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Correction ▼ [000847]

Exercice 4487

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;
3. $y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $(y - y')(0) = 0$.

[000848]

Exercice 4488

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y\tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

[000849]

Exercice 4489

Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2y' + y = 1.$$

[000850]

Exercice 4490

Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Correction ▼ [000851]

Exercice 4491

Résoudre et raccorder éventuellement :

1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1+x^2)y' = y$.
3. $(x^2+1)y' + (x-1)^2y = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

[000852]

Exercice 4492

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$. [000853]

Exercice 4493

Résoudre l'équation différentielle de Ricatti $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ en trouvant une solution particulière y_0 et en posant $z = \frac{1}{y-y_0}$.
[000854]

Exercice 4494

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x^2 + 2x$$

Intégrer (E) et montrer que par un point donné il passe une et une seule courbe intégrale. Soit H l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par M a une tangente horizontale en ce point, et I l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par ce point a un point d'inflexion en ce point. Tracer H, I et la courbe intégrale passant par $O(0,0)$. En déduire un tracé géométrique des courbes intégrales. [000855]

Exercice 4495

Résoudre le système différentiel :

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + y(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) - y(t),$$
$$x(0) = 2, y(0) = -2.$$

[000856]

Exercice 4496

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f'(x)+\alpha f(x)\right)=0$$

alors :

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

[000857]

Exercice 4497

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0)=1$ et $f \leq f' \leq 2f$.Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$. [000858]

Exercice 4498 **IT

Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

1) $x\ln xy'+y=x,\ I=]1,+\infty[$	2) $x(xy'+y-x)=1,\ I=]-\infty,0[$
3) $2xy'+y=x^4,\ I=]-\infty,0[$	4) $y'+2y=x^2-3x,\ I=\mathbb{R}$
5) $y'+y=\frac{1}{1+2e^x},\ I=\mathbb{R}$	6) $y'\sin x-y\cos x+1=0,\ I=]0,\pi[$

Correction ▼ [005476]

Exercice 4499 ***I

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y'-2xy=x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I=]1,+\infty[$, $I=]-1,1[$, $I=]-1,+\infty[$, $I=\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005477]

Exercice 4500 ***

Résoudre sur $\}-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y'+(x-1)y=x^3$.

Correction ▼ [005478]

Exercice 4501 **

Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et pèriodique de pèriode $T\neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y'+ay=f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.

Correction ▼ [005481]

177 225.02 Résolution d'équation différentielle du deuxième ordre

Exercice 4502

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y''+4y'+3y=0$,
2. $y''-6y'+9y=0$,
3. $y''-2y'+2y=0$.

[000859]

Exercice 4503

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y''-y=x^3+x^2$,
2. $y''-2y'+y=e^x$,
3. $y''-2y'+y=\cos(mx)$ où $m\in\mathbb{R}$,

4. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3+3)$ (utiliser le principe de superposition).

[000860]

Exercice 4504

On considère l'équation homogène (E) $\;ay''+by'+cy=0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions necessaires et suffisantes liant les coefficients a, b et c dans les deux cas suivants :
(i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ;
(ii) toutes les solutions sont périodiques.

[000861]

Exercice 4505

Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

[000862]

Exercice 4506

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Correction ▼

[000863]

Exercice 4507

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

Correction ▼

[000864]

Exercice 4508

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Correction ▼

[000865]

Exercice 4509

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Correction ▼

[000866]

Exercice 4510

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ (Indication : On traitera séparement les cas $m=0$ et $m\neq 0$). [000867]

Exercice 4511

On considère l'équation différentielle :

$$y''+6y'+9y=d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) lorque, respectivement, on pose :

$$d(x)=(x^2+1)e^{-3x} \text{ et } d(x)=\cos x.$$

3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :

$$d(x)=2(x^2+1)e^{-3x}+50\cos x.$$

[000868]

Exercice 4512

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x} \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

[000869]

Exercice 4513

Déterminer une équation différentielle admettant $(r-2)^2=0$ comme équation caractéristique et $e^x+(x^3/6)e^{2x}$ comme solution particulière. [000870]

Exercice 4514

Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations :
a) $y''+y'-6y=e^{3x}$, b) $y''+y'-6y=e^x(2x+1)$,
c) $y''-4y'+13y=\cos x$, d) $y''+3y'+2y=e^{-2x}(x+1)$ avec $y(0)=1$, $y(1)=0$. [000871]

Exercice 4515

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y''-4y'+4y=d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x)=e^{-2x}$ et lorsque $d(x)=e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque

$$d(x)=\frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4}.$$

Correction ▼ [000872]

Exercice 4516

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y''-4y=4e^{-2x}$.
2. $y''-3y'+2y=(x^2+1)e^x$.
3. $y''-2y'+y=e^x\sin x$.
4. $y''+y=e^{-|x|}$.

[000873]

Exercice 4517

Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) + f(-x) = x$. [000874]

Exercice 4518

Résoudre sur $]0,+\infty[$ $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$. [000875]

Exercice 4519

Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1. $x^2y'' - 2y = x$.
2. $x^2y'' + xy' + y = x\ln|x|$.

[000876]

Exercice 4520

Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$. [000877]

Exercice 4521

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) &= x^4, \\ y"(x) - 4y(x) &= 4e^{-2x}, \\ y"(x) - 2y'(x) + y(x) &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

[000878]

Exercice 4522

En posant $z = \frac{1}{y}$ et en supposant que y ne s'annule pas, résoudre l'équation (de Bernoulli) :

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} - x\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0.$$

[000879]

Exercice 4523

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x\cos x \cosh x$.

Correction ▼ [000880]

Exercice 4524

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x\cos x.$$

Correction ▼ [000881]

Exercice 4525

Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. [000882]

Exercice 4526

Montrer que toute solution de $y''(x)e^{-x^2}+y(x)=0$ est bornée sur $\mathbb{R}$. [000883]

Exercice 4527

En posant $t=\arctan x$, résoudre :

$$y''(x)+\frac{2x}{1+x^2}y'(x)+\frac{y(x)}{(1+x^2)^2}=0.$$

Correction ▼ [000884]

Exercice 4528

Résoudre par le changement de fonction $z=\frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x''^2(x)-2xy'(x)+(2-x^2)y(x)=0.$$

Correction ▼ [000885]

Exercice 4529 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y''-2y'+2y=x\cos x\operatorname{ch}x$ 2) $y''+6y'+9y=x^2e^{2x}$ 3) $y''-2y'+y=\operatorname{ch}x$
4) $y''-2ky'+(1+k^2)y=e^x\sin x,\ k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Correction ▼ [005479]

Exercice 4530 **

On considère l'équation différentielle (E) : $ax^2y''+bxy'+cy=0$ (a, b, c réels, $a\neq 0$) pour $x\in]0,+\infty[$.

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $z(t)=y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
3. Résoudre sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle $x^2y''-xy'+y=0$.

Correction ▼ [005480]

178 225.03 Raccordement de solutions

179 225.04 Equations différentielles linéaires

Exercice 4531 Équations linéaires d'ordre 1

Intégrer les équations suivantes :

1. $(2+x)y'=2-y$.
2. $xy'+y=\cos x$.
3. $(1+x)y'+y=(1+x)\sin x$.
4. $x^3y'-x^2y=1$.
5. $3xy'-4y=x$.
6. $y'+y=\sin x+3\sin 2x$.
7. $2x(1-x)y'+(1-2x)y=1$.

8. $x(x+1)y'+y=\arctan x$.
9. $x(x^2-1)y'+2y=x\ln x-x^2$.
   pour 8 : Étudier les problèmes de raccordement.

Correction ▼ [004054]

Exercice 4532 Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Intégrer :

1. $y''-2y'+2y=xe^x$.
2. $y''-4y'+4y=2(x-2)e^x$.
3. $y''-4y'+13y=10\cos 2x+25\sin 2x$.
4. $y''+y=\operatorname{cotan} x$.
5. $y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
6. $y''+y=P(x)$ où P est un polynôme.
7. $y'^2+y^2=1$ (dériver).

Correction ▼ [004055]

Exercice 4533 Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Intégrer les équations suivantes :

1. $y''-y'-e^{2x}y=e^{3x}$ (poser $u=e^x$).
2. $y''-\left(6x+\frac{1}{x}\right)y'+8x^2y=x^4$ (poser $u=x^2$).
3. $x(1-2\ln x)y''+(1+2\ln x)y'-\frac{4}{x}y=0$ (chercher une solution de la forme $y=x^\alpha$).
4. $x^2y''-2xy'+2y=2+2x^3\sin x$ (poser $u=\ln x$).
5. $x(x+1)y''-y'-2y=3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y=x^\alpha$).
6. $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ $\left(\text{poser } y=\frac{u}{x^2}\right)$.
7. $(x^2+3)y''+xy'-y=1$ (chercher les solutions polynomiales).
8. $xy''-2y'-xy=0$ (dériver deux fois).

Correction ▼ [004056]

Exercice 4534 Résolution par DSE

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

1. $4xy''-2y'+9x^2y=0$.
2. $xy''+2y'-xy=0$.
3. $4xy''+2y'-y=0$.
4. $y''+xy'+3y=0$.
5. $x^2y''+6xy'+(6-x^2)y=-1$.
6. $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

Correction ▼ [004057]

Exercice 4535 $y^{(4)}+y''+y=|\sin x|$

Montrer que l'équation : $y^{(4)}+y''+y=|\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Correction ▼ [004058]

Exercice 4536 $y''+k^2y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

Soit $k\in\mathbb{R}$. Résoudre $y''+k^2y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004059]

Exercice 4537 $y' = |x-y|$

Résoudre l'équation : $y' = |x-y|$. Étudier les problèmes de raccordement.

Correction ▼ [004060]

Exercice 4538 $y'' + |y| = 1$

Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$, avec $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Correction ▼ [004061]

Exercice 4539 Mines MP 2000

Résoudre $(E) : 4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que (E) admet deux solutions y et z telles que $yz = 1$. Comment résoudre cette équation sans l'indication ?

Correction ▼ [004062]

Exercice 4540 Mines MP 2000

Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} g' + ag = f \\ g(0) = b. \end{cases}$
2. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, g l'est également. Relation entre $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} g(t)\,dt$.

Correction ▼ [004063]

Exercice 4541 Systèmes différentiels à coefficients constants

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}$

Correction ▼ [004064]

Exercice 4542 Système différentiel à coefficients non constants

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t. \end{cases}$

Correction ▼ [004065]

Exercice 4543 Lemme des noyaux, Matexo

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation : $y'' + py' + qy = 0$. On note S l'ensemble des solutions de (E) et D l'application de S dans S définie par $D(f) = f'$.

1. D peut elle être une homothétie ?
2. Déterminer les valeurs de p et q pour lequelles D n'est pas un isomorphisme de S.
3. Vérifiez que $D \circ D + pD + q\mathrm{id}_S = 0$ et montrer qu'il existe des nombres complexes r_1 et r_2 tels que : $(D - r_1\mathrm{id}_S) \circ (D - r_2\mathrm{id}_S) = 0$.
4. Les applications $D - r_1\mathrm{id}_S$, $D - r_2\mathrm{id}_S$ peuvent-elles être inversibles ?

[004066]

Exercice 4544 $y'' + x\,y' + y = 0$, Matexo

On désigne par y la solution de l'équation différentielle $y'' + x\,y' + y = 0$, avec les conditions de Cauchy $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

1. Montrer que les dérivées de y vérifient $y^{(n)} + x\,y^{(n-1)} + (n-1)\,y^{(n-2)} = 0, \quad \forall n \geq 2$.
2. Calculer par récurrence les dérivées successives de y en zéro.
3. Montrer que y admet le développement limité à l'origine $(x \to 0)$:

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}).$$

[004067]

Exercice 4545 $f''(x) + f(-x) = x\cos x$

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall\, x \in R,\ f''(x) + f(-x) = x\cos x$.

Correction ▼ [004068]

Exercice 4546 $y'' + \frac{2y'}{\mathrm{th}\,x} + y = 0$

On considère l'équation différentielle : $(*) \iff y'' + \frac{2y'}{\mathrm{th}\,x} + y = 0$.

1. On pose $z(x) = y'(x) + \frac{y(x)}{\mathrm{th}\,x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.
2. Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation en z, puis $(*)$.
3. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?
   On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $y_0(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$.
4. Démontrer que y_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\frac{y_0'(x)}{\mathrm{th}\,x}$ admet une limite finie en 0.
   En déduire que y_0 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de y_0 et l'axe des abscisses est finie ?

Correction ▼ [004069]

Exercice 4547 $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, (x^2+1)^)$ et $\Phi : E \to E$, définie par $\Phi(f) = g$ où g est l'application $g : t \mapsto f'(t) + tf(t)$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
3. Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Correction ▼ [004070]

Exercice 4548 $x^2f''(x)+xf'(x)=\lambda f(x)$

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $E=\mathbb{R}[X]$ $\Phi(P)(X)=X^2P''(X)+XP'(X)$.
2. $E=\mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[)$ $\Phi(f)(x)=x^2f''(x)+xf'(x)$.
3. $E=\mathscr{C}^\infty(]0,1[)$ $\Phi(f)(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}f'(x)$.

Correction ▼ [004071]

Exercice 4549 $AP'-nA'P=\lambda P$

Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q=AP'-nA'P$.

1. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :
   (a) $A=X^2-1$,
   (b) $A=X^2$,
   (c) $A=X^2+1$.

Correction ▼ [004072]

Exercice 4550 Équation intégrale

Trouver les applications $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continues vérifiant pour tout $x>0$:

$$\frac{1}{2}\int_{t=0}^{x}g^2(t)\,dt=\frac{1}{x}\left(\int_{t=0}^{x}g(t)\,dt\right)^2.$$

Correction ▼ [004073]

Exercice 4551 Inéquations différentielles

Soient $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues, et y,z solutions de $\begin{cases}y(0)=z(0)\\ y'=a(t)y+b(t)\\ z'\leq a(t)z+b(t).\end{cases}$

Démontrer que : $\forall\, t\geq 0$, on a $y(t)\geq z(t)$.

Correction ▼ [004074]

Exercice 4552 Tangentes parallèles ou concourantes

Soit l'équation $(*)\Leftrightarrow y'=a(x)y+b(x)$ et x_0 un réel fixé. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0 sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004075]

Exercice 4553 $y'+ay=$ fct périodique

Soit $\lambda\in(x^2+1)$ et $\varphi:\mathbb{R}\to(x^2+1)$ T-périodique. On considère l'équation : $(*)\Leftrightarrow y'+\lambda y=\varphi(x)$.

1. Montrer que si y est solution de $(*)$, alors $y(x+T)$ est aussi solution.
2. En déduire que y, solution de $(*)$, est T-périodique si et seulement si $y(0)=y(T)$.
3. Montrer que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ, l'équation $(*)$ admet une et une seule solution T-périodique.

[004076]

Exercice 4554 Coefficients périodiques

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont des fonctions continues, T-périodiques.

1. Montrer que si y est solution de $(*)$, alors la fonction définie par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.
2. En déduire que si $\int_{t=0}^{T} a(t)\,dt \neq 0$, alors $(*)$ admet une unique solution T-périodique.

Correction ▼ [004077]

Exercice 4555 Équation intégrale

Soit $E = \{\text{fcts} : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continues }\}$ et $\Phi : E \to E, f \mapsto g$ avec $g(x) = \int_{t=0}^{1} \inf(t,x) f(t)\,dt$.

Chercher les valeurs propres et les fonctions propres de Φ.

Correction ▼ [004078]

Exercice 4556 Matexo

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ fixé. On considère : $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 3\}$.

Déterminer $\inf\limits_{f \in E} \displaystyle\int_{t=0}^{1} (f'(t) + kf(t))^2\,dt$. *Indication : poser $f' + kf = g$ et calculer $f(1)$ en fonction de g.*

Correction ▼ [004079]

Exercice 4557 Ulm-Lyon-Cachan MP* 2000

Soient u, v, w trois applications bornées et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifiant : $u' + v' = w$; $w' = -v$; $\int_0^\infty \|u'\|^2 < +\infty$. On suppose qu'il existe une suite de terme général t_n tendant vers $+\infty$ telle que $u(t_n)$ tend vers $a \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} u(t)\,dt$ tend vers a.
2. Montrer que les suites de termes généraux $v_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt$ et $w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt$ tendent vers 0.

Correction ▼ [004080]

Exercice 4558 Centrale MP 2001

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y + f = 0$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Correction ▼ [004081]

Exercice 4559 Centrale MP 2001

Trouver les fonctions f, g continues vérifiant : $\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt = x - 1 + g(x)$ et $\int_{t=0}^{x} g(t)\,dt = x - 1 + f(x)$.

Correction ▼ [004082]

Exercice 4560 X MP* 2000

On considère l'équation différentielle $y' = \sin(x+y)$. Montrer que pour toute condition initiale l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$. Ensemble des points d'inflexion des courbes solutions ?

Correction ▼ [004083]

Exercice 4561 Polytechnique PC 2002

Soit l'équation différentielle : $(E) \Leftrightarrow u''(x) + (k - 2d\cos(x))u(x) = 0$.

1. Existence et domaine de définition des solutions maximales A et B telles que $A(0)=1$, $A'(0)=0$ et $B(0)=0$, $B'(0)=1$.
2. Montrer que A est paire et B est impaire.
3. Montrer que $A(k,d,x)=A(k,0,x)+2d\int_{t=0}^{x}B(d,0,x-t)A(k,d,x)\cos(t)\,dt$.

Correction ▼ [004084]

Exercice 4562 $f\mapsto f+f'$ (Mines MP 2003)

Soit E l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est bornée.

Soit $u:E\to E, f\mapsto f+f'$.

1. Montrer que $u\in\mathscr{L}(E)$.
2. Est-ce que u est injectif ?
3. Est-ce que u est surjectif ?

Correction ▼ [004085]

Exercice 4563 Centrale MP 2004

On considère l'équation différentielle : $-y''+\frac{y}{p^2}=f$ où $p\in\mathbb{N}^*$ et f est une fonction continue donnée.

1. Donner les solutions de cette équation. Montrer que $x\mapsto -\int_{t=0}^{x}pf(t)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right)dt$ est solution.
2. Montrer qu'il existe une unique solution telle que $y(0)=y(1)=0$. On la note u_p.
3. Montrer que (u_p) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Correction ▼ [004086]

Exercice 4564 Centrale MP 2004

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(\mathscr{E})\Leftrightarrow\frac{d^2u(x)}{dx^2}+(1-\lambda)x^2u(x)=0$.

1. Montrer que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont de la forme $H(x)e^{-x^2/2}$ où H est une fonction développable en série entière.
2. Déterminer les valeurs de λ telles que H soit une fonction polynomiale non nulle.

Correction ▼ [004087]

Exercice 4565 Lemme de Gronwall (X MP* 2003)

Soient f,g deux fonctions continues et $a\in\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\,t\geq 0,\ g(t)\geq 0$ et $f(t)\leq a+\int_{u=0}^{t}f(u)g(u)\,du$. Montrer : $\forall\,t\geq 0,\ f(t)\leq a\exp\left(\int_{u=0}^{t}g(u)\,du\right)$.

Correction ▼ [004088]

Exercice 4566 $y''+y\geq 0$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f(x)+f''(x)\geq 0$.

Montrer que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f(x)+f(x+\pi)\geq 0$.

Correction ▼ [004089]

Exercice 4567 $f''+f'+f\to 0$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f''(t)+f'(t)+f(t)\to 0$ lorsque $t\to+\infty$. Démontrer que $f(t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$.

Correction ▼ [004090]

Exercice 4568 $f''\geq f+2/ch(x)^3$, Centrale PC 1997

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x : $f''(x) \geq f(x) + \frac{2}{\operatorname{ch}(x)^3}$. Montrer pour tout x : $f(x) \geq \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)}$.
[004091]

Exercice 4569 $y' + ay = b$, $y(-\infty) = 0$

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x) \geq 1$ et $b(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

1. Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. On suppose $b(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

Correction ▼ [004092]

Exercice 4570 $y'' + ay = 0$, $a > 0 \Rightarrow y$ s'annule

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

1. Soit y une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit z une solution de l'équation $z'' - a(x)z = 0$. Montrer que $z = 0$ ou bien z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004093]

Exercice 4571 $y'' + ay' = 0$ a croissante positive $=>$ y est bornée

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ croissante strictement positive et y une solution de l'équation : $y'' + a(t)y = 0$. Montrer que y est bornée au voisinage de $+\infty$ (on étudiera $z = y^2 + y'^2/a$). [004094]

Exercice 4572 $y'' + ay = 0$, a intégrable

Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0, +\infty[$ (on commencera par prouver que si y_1, y_2 sont deux solutions alors le déterminant wronskien de y_1 et y_2 est constant).

Correction ▼ [004095]

Exercice 4573 Zéros entrelacés (Centrale MP 2003)

Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall\, x \in I,\ r(x) \geq q(x)$. On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \Leftrightarrow y'' + qy = 0, \qquad (E_2) \Leftrightarrow z'' + rz = 0.$$

1. Soit y une solution de (E_1) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?
2. Soit z une solution de (E_2). On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.
3. Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.
4. Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Correction ▼ [004096]

Exercice 4574 Zéros des solutions de $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'équation $(*) \iff y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a, b continues.

1. Soit y une solution non nulle de $(*)$. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Soient y, z deux solutions de $(*)$ non proportionelles.
   (a) Montrer que y et z n'ont pas de zéros commun.
   (b) Montrer que si u, v sont deux zéros consécutifs de y, alors z possède un unique zéro dans l'intervalle $]u, v[$ (étudier $\frac{z}{y}$).

Correction ▼ [004097]

Exercice 4575 $y'' + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$

Soit $\lambda > 0$ et y une solution de $y'' + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, y a un zéro dans l'intervalle $]a, a+\pi[$. (Étudier $z = y'\varphi - y\varphi'$ où $\varphi(t) = \sin(t-a)$)

Correction ▼ [004098]

Exercice 4576 $y'' + e^t y = 0$

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de $y'' + e^t y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y est infini dénombrable.
2. On note a_n le $n$ème zéro positif de y. En utilisant les fonctions $\begin{cases} \varphi(t) = \sin\left(e^{a_n/2}(t-a_n)\right) \\ \psi(t) = \sin\left(e^{a_{n+1}/2}(t-a_n)\right), \end{cases}$ montrer que $\frac{\pi}{e^{a_{n+1}/2}} \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$.
3. Donner un équivalent de a_n quand $n \to \infty$.

Correction ▼ [004099]

Exercice 4577 Conditions aux limites

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec f positive. Montrer qu'il existe une unique solution pour le problème aux limites : $y'' = f(t)y + g(t)$, $y(a) = y(b) = 0$.

Correction ▼ [004100]

Exercice 4578 Comparaison de solutions

Soient $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues avec : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ q(x) < 0$. Soient $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ y'' + p(x)y' + q(x)y \leq z'' + p(x)z' + q(x)z \\ y(a) \leq z(a),\ y'(a) < z'(a). \end{cases}$$

Montrer que : $\forall\, x > a,\ y(x) < z(x)$.

Correction ▼ [004101]

Exercice 4579 Système différentiel à coefficients positifs

Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto (a_{ij}(t))$ continue avec : $\forall\, t \geq 0,\ \forall\, i, j,\ a_{ij}(t) \geq 0$ et X une solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. Montrer que si toutes les coordonnées de $X(0)$ sont positives ou nulles il en est de même pour $X(t)$ pour tout t (commencer par le cas strictement positif).

Correction ▼ [004102]

Exercice 4580 Intégrale fonction d'un paramètre

On pose $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} e^{itx} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Former une équation différentielle satisfaite par f. En déduire f.

Correction ▼ [004103]

Exercice 4581 Ulm MP* 2000

Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que la fonction Δ est strictement positive sur I.

On pose $E = \{f \in \mathscr{C}^2(I) \mid f(a) = f(b) = 0\}$. On considère enfin l'opérateur $K : f \mapsto \frac{f''}{\Delta}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(K) \subset]-\infty, 0[$.

2. Trouver un produit scalaire $(\ |\ )$ pour lequel deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3. On suppose que $I = \mathbb{R}^+$ et que $\Delta(x) \geq 1$ pour $x \geq 2$. Soit $\lambda < 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique $f_\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle $\begin{cases} f_\lambda'' = \lambda \Delta f_\lambda \\ f_\lambda(0) = 0 \\ f_\lambda'(0) = 1. \end{cases}$
   (b) Montrer f_λ a une infinité dénombrable de zéros $(x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots)$ et que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [004104]

Exercice 4582 Centrale MP 2001

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \leq \int_0^\pi f'^2$.
   Indication : prolonger f en une fonction impaire 2π-périodique.
2. Soit une fonction q de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $]-\infty, 1[$. Montrer que l'unique fonction x de classe $\mathscr{C}^2$ s'annulant en 0 et en π et vérifiant l'équation différentielle $x''(t) + q(t)x(t) = 0$ est la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et deux réels a, b fixés. Montrer qu'il existe une unique solution x de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $x(0) = a$, $x(\pi) = b$ et $x''(t) + q(t)x(t) = f(t)$.

Correction ▼ [004105]

Exercice 4583 X MP* 2000

On considère l'équation différentielle à coefficients continus sur $\mathbb{R}$: $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Trouver une condtion nécessaire portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment un.

Correction ▼ [004106]

Exercice 4584 X MP* 2000

Soit A coninue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose que les $a_{ij}(t)$ restent positifs quand t décrit $\mathbb{R}^+$, et l'on se donne un vecteur X_0 dont toutes les composantes sont positives. Montrer qu'en désignant par $X(t)$ la valeur en t du système $Y' = AY$ valant X_0 en $t = 0$, on a pour tout $t \geq 0$ et pour tout i l'inégalité $x_i(t) \geq 0$.

Correction ▼ [004107]

Exercice 4585 ENS MP 2002

Soit une application A de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive. Soit F de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $(x^2+1)^n$. Montrer qu'il existe X de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $(x^2+1)^n$, solution de $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$.

Indication : commencer par le cas $n = 1$, A constante.

Correction ▼ [004108]

Exercice 4586 X MP* 2003

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $k > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, t \geq t_0,\ f(t) \leq g(t) + k\int_{u=t_0}^t f(u)\,du$.
   Montrer que : $\forall\, t \geq t_0,\ f(t) \leq g(t) + k\int_{u=t_0}^t e^{k(t-u)} g(u)\,du$.
2. Soient $A, B : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ continues, $T > t_0$, $K > 0$ et $\eta > 0$ tels que : $\forall\, t \in [t_0, T],\ |||A(t)||| \leq K$ et $|||A(t) - B(t)||| \leq \eta$. On note M_0 (resp. N_0) la solution du problème de Cauchy : $M(t_0) = I$, $M'(t) = A(t)M(t)$ (resp. $N(t_0) = I$, $N'(t) = B(t)N(t)$).
   Montrer que : $\forall\, t \in [t_0, T],\ |||M_0(t) - N_0(t)||| \leq e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)$.
3. On note X_0 (resp. Y_0) la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$: $X(t_0) = \alpha$, $X'(t) = A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0) = \alpha$, $Y'(t) = B(t)Y(t)$) où $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Quelle majoration a-t-on sur $\|X_0(t) - Y_0(t)\|$?

Correction ▼ [004109]

Exercice 4587 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle proposée :

1. $y' + y = 1$
2. $2y' - y = \cos x$
3. $y' - 2y = xe^{2x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
5. $y'' + 4y = \cos(2x)$
6. $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Correction ▼ [005874]

Exercice 4588 *** I

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que quand x tend vers $+\infty$, $f' + \alpha f$ tend vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers $\frac{\ell}{\alpha}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty}(f + f' + f'')(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
   On note D l'opérateur de dérivation. Soit P un polynôme de degré n unitaire dont tous les zéros ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{x \to +\infty}(P(D))(f)(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Correction ▼ [005875]

Exercice 4589 *** I

Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$.

Correction ▼ [005876]

Exercice 4590 *** I

Résoudre sur l'intervalle I proposé :

1. $xy' - 2y = 0$ $(I = \mathbb{R})$
2. $xy' - y = 0$ $(I = \mathbb{R})$
3. $xy' + y = 0$ $(I = \mathbb{R})$
4. $xy' - 2y = x^3$ $(I =]0, +\infty[)$
5. $x^2y' + 2xy = 1$ $(I = \mathbb{R})$
6. $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$ $(I =]-\infty, 0[,]0, 1[,]1, +\infty[,]-\infty, 1[,]0, +\infty[, \mathbb{R})$
7. $|x|y' + (x-1)y = x^3$ $(I = \mathbb{R})$.

Correction ▼ [005877]

Exercice 4591 *** I

Déterminer le rayon de convergence puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$.

Correction ▼ [005878]

Exercice 4592 **

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{array} \right.$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
3. $\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{array} \right.$

4. $\begin{cases} x' = 5x+y-z \\ y' = 2x+4y-2z \\ z' = x-y+z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = -x \\ z' = x+y+z \end{cases}$ (trouver la solution telle que $x(0)=0$, $y(0)=1$ et $z(0)=-1$).

Correction ▼ [005879]

Exercice 4593 **

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005880]

Exercice 4594 **

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y + 2t \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y + t^2 \end{cases}$ sur $]0,+\infty[$

2. $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx - y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x + ty + 3t \end{cases}$

3. $\begin{cases} \mathrm{sh}(2t)x' = \mathrm{ch}(2t)x - y \\ \mathrm{sh}(2t)y' = -x + \mathrm{ch}(2t)y \end{cases}$ sur $]0,+\infty[$ sachant qu'il existe une solution vérifiant $xy = 1$.

Correction ▼ [005881]

Exercice 4595 *** I

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.
2. $(x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$ sur $]0,+\infty[$.
3. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ sur $]0,+\infty[$.
4. $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$ sur $]-1,+\infty[$.
5. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. $4xy'' + 2y' - y = 0$ sur $]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005882]

Exercice 4596 **

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Correction ▼ [005883]

Exercice 4597 ***

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ vérifiant $\forall x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$.

Correction ▼ [005884]

Exercice 4598 *** I

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$.

Correction ▼ [005885]

Exercice 4599 *** I

Montrer que $\forall x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

Correction ▼ [005886]

180 225.05 Equations différentielles non linéaires

Exercice 4600 Équations à variables séparables

1. $y' = y(1+y)$.
2. $y' = \sin x \cos y$.
3. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
4. $1+xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
5. $y' = \sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.

Correction ▼ [004110]

Exercice 4601 Équations homogènes

1. $y - xy' = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $y' = \frac{x-y}{x+y}$.
3. $(x^2+y^2)y' = 2xy$.
4. $(x+y)y' = 2x-y$.

Correction ▼ [004111]

Exercice 4602 Équations de Bernouilli

1. $xy' + y = xy^3$.
2. $2xy' + y = \frac{2x^2}{y^3}$.
3. $\sqrt{x}y' - y + (x+2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.
4. $xy' + y = (xy)^{3/2}$.
5. $x^3y' = y(3x^2+y^2)$.

Correction ▼ [004112]

Exercice 4603 Équations de Riccati

1. $x^2(y'+y^2) = xy-1$.

Correction ▼ [004113]

Exercice 4604 Divers ordre 1

$(x^2-y^2-1)y' = 2xy$: poser $z = \frac{y}{x^2+y^2-1}$.

Correction ▼ [004114]

Exercice 4605 Centrale MP 2004

Soit $n > 0$ et $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{2}{n}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t)+y^2(t). \end{cases}$

1. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver une autre solution présentant une symétrie avec γ. Peut-on avoir comme solution $\sigma(t) = \lambda\gamma(\mu t)$? En déduire une propriété géométriques des solutions maximales de (S).
2. Déterminer les courbes du plan formées des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy). En déduire quelques solutions particulières.
3. A supposer qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$, déterminer Φ et en déduire toutes les courbes intégrales.

Correction ▼ [004115]

Exercice 4606 Chimie P 91

Résoudre numériquement le système
$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = y - z \\ y(0) = 1 \text{ et } z(0) = 0. \end{cases}$$
Prendre $h = 0.1$ et faire un tableau avec 10 valeurs. Faire la résolution analytique.

Correction ▼ [004116]

Exercice 4607 Équations d'ordre 2

1. $y'' = \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
2. $2(2a - y)y'' = y'^2$.
3. $yy'' = y'^2 - y^2$: poser $z = y'/y$.

Correction ▼ [004117]

Exercice 4608 Centrale MP 2000

Existe-t-il des solutions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2\sqrt{y} = 0$? Que peut-on dire de l'équation : $y'^2 = 4y$?
[004118]

Exercice 4609 Étude qualitative : $y' = x^3 + y^3$

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = x^3 + y^3$ telle que $y(0) = a \geq 0$, et $I =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition. Montrer que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$, que β est borné, et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \beta^-$.

Correction ▼ [004119]

Exercice 4610 Étude qualitative : $y' = x - e^y$

Soit y une solution maximale de l'équation $y' = x - e^y$.

1. Montrer que y est décroissante puis croissante.
2. Montrer que y est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.
3. Montrer que $\alpha > -\infty$ et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \alpha^-$.

Correction ▼ [004120]

Exercice 4611 Étude qualitative : $x' = \cos(t) + \cos(x)$

Soit x la solution maximale du problème de Cauchy : $x' = \cos(t) + \cos(x)$, $x(0) = x_0 \in]0, \pi[$.

Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, t > 0,\ 0 < x(t) < \pi$. [004121]

Exercice 4612 Étude qualitative : $x' = x^2 - t$, ENS Cachan MP* 2005

On considère l'équationn différentielle $(E) : x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t, x) \mid x^2 - t < 0\}$.

Montrer que si x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$, alors x est définie sur $[t_0, +\infty[$ et la courbe intégrale reste dans D_0. En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Correction ▼ [004122]

Exercice 4613 Intervalle maximal pour $y' = f(y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ strictement positive et y la solution maximale définie sur $]\alpha, \beta[$ du problème de Cauchy : $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. Montrer que $\beta = x_0 + \int_{t=y_0}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \beta^-$. [004123]

Exercice 4614 Étude qualitative de $y' = 2ty + y^2$

On considère l'équation : $y' = 2ty + y^2,\ y(t_0) = y_0$. Soit y une solution maximale.

1. Montrer que $y = 0$ ou bien y ne s'annulle pas.
2. On choisit $y_0 > 0, t_0 < 0$. Soit $]t_1, t_2[$ le domaine d'existence de y.
   (a) Montrer que si $y_0 \geq -2t_0$, alors y est strictement croissante sur $[t_0, t_2[$.
   (b) Montrer que $t_1 = -\infty$. (sinon, y et y' seraient bornées sur $]t_1, t_0]$.)
   (c) Donner l'allure générale de la courbe de y.
3. Résoudre l'équation en posant $z(t) = \frac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

[004124]

Exercice 4615 Équation admettant simultanément t et $\sin t$ comme solution

---

Existe-t-il une fonction $f : (y,t) \to f(y,t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'équation : $y^{(n)} = f(y,t)$ admette les deux solutions $y(t) = t$ et $y(t) = \sin t$ sur $\mathbb{R}$?

Même question avec l'équation $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y, t)$. [004125]

Exercice 4616 $y'' = F(x,y)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

Soit $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, l'application $y \mapsto F(x,y)$ est strictement croissante. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe au plus une solution à l'équation : $y'' = F(x,y)$ avec les conditions aux limites $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Correction ▼ [004126]

Exercice 4617 Comparaison d'équations

Soient y, z solutions de $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ z' = g(z,t) \\ y(0) = z(0) \end{cases}$ où f, g sont deux fonctions localement lipschitziennes telles que :

$$\begin{cases} \forall\, u,t,\ f(u,t) \leq g(u,t) \\ \forall\, u,v,t,\ u \leq v \Rightarrow f(u,t) \leq f(v,t). \end{cases}$$

1. Pour $\varepsilon > 0$, on note z_ε la solution de $\begin{cases} z'_\varepsilon = g(z_\varepsilon, t) + \varepsilon \\ z_\varepsilon(0) = y(0). \end{cases}$
   Montrer que $z_\varepsilon \geq y$ (sur leur domaine commun de définition).
2. Démontrer que $z_\varepsilon \to z$ lorsque $varepsilon \to 0^+$ uniformément sur tout intervalle borné. Conclusion ?

[004127]

Exercice 4618 Étude de l'équation

$$\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Soit y la solution maximale. On a l'intégrale première : $\frac{y'^2}{2} - \cos y = C = \alpha^2 - 1$.

1. (a) Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que y est impaire.
2. On suppose ici que $C > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit $T > 0$ tel que $y(T) = 2\pi$.
   (b) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ y(t + T) = y(t) + 2\pi$.

3. On suppose ici que $-1 < C < 1$: On pose $C = -\cos\theta$, et $F(x) = \int_{u=0}^{x} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}$.
   (a) Soit a maximal tel que $y'(t) > 0$ sur $[0,a[$. Montrer que $y(a) = \theta$ et $F(\theta) = a$.
   (b) Montrer que y est $4a$-périodique.
4. Étudier les cas $C = 1$, $C = -1$.

[004128]

Exercice 4619 Résolution approchée de $y' = f(y,t),\ y(a) = y_0$ par la méthode d'Euler

On suppose que f est bornée par M et $|f(y,s) - f(z,t)| \leq K(|y-z| + |s-t|)$. On divise $[a,b]$ en n intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et on approche la solution y par la fonction z, continue affine par morceaux définie par :

$$\begin{cases} z(a_0) = y_0 \\ \text{sur }]a_k, a_{k+1}[,\ z' = f(z(a_k), a_k). \end{cases}$$

1. Soit $\varepsilon_k = |z(a_k) - y(a_k)|$. Montrer que : $\forall\, t \in [a_k, a_{k+1}], \quad |y(t) - z(t)| \leq kh^2(M+1) + (1+Kh)\varepsilon_k \ \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$.
2. En déduire que $\sup|y-z| \leq (M+1)(e^{K(b-a)} - 1)\frac{b-a}{n}$.

[004129]

Exercice 4620 Lyon MP* 2000

1. Soit f une application minorée et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que la suite $(f'(a_n))$ tende vers 0.
2. Soit f une application minorée et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de $\mathbb{R}^p$ telle que la suite $(df(a_n))$ tende vers 0, c'est à dire $\nabla f(a_n)$ tend vers 0.

Correction ▼ [004130]

Exercice 4621 ENS MP* 2001

Soit un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Montrer qu'il existe une unique fonction $u = (u_1, u_2, u_3)$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3)$ et $u(0) = v$.

Indication : étudier la fonction $p \mapsto p + u \wedge p$ avant de pouvoir évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Correction ▼ [004131]

Exercice 4622 Centrale MP 2001

On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ de la manière suivante : f_0 est la fonction constante 1 et pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = 1 + \int_{t=0}^{x} f_n(t - t^2)\,dt$.

1. En étudiant $f_{n+1} - f_n$ montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Que valent $f'(0)$ et $f'(1)$?
3. Étudier la concavité de f.
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $1 + x \leq f(x) \leq \exp(x)$.

Correction ▼ [004132]

Exercice 4623 ENS MP 2002

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t,x)$ de classe $\mathscr{C}^1$, et a, b des réels tels que $a < b$. On suppose que f est T-périodique par rapport à t et que l'on a : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ f(t,a) > 0$ et $f(t,b) < 0$.

1. Que peut-on dire des solutions du problème de Cauchy E_y : $(x'(t) = f(t,x(t)),\ x(0) = y \in [a,b])$?
2. Montrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $[a,b]$.
3. Montrer qu'il existe une solution de E_y qui est T-périodique.

Correction ▼ [004133]

Exercice 4624 X MP* 2005

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. On suppose qu'il existe a, b continues de J dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tous t, y : $(f(t,y) \mid y) \leq a(t)\|y\|^2 + b(t)$. Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t,y)$ est définie sur J entier.

Correction ▼ [004134]

Exercice 4625 Système autonome, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

On considère le système différentiel :

$$(V) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1). \end{cases}$$

dont on cherche les solutions (x,y) définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

1. Trouver une fonction $f \in \mathscr{C}^2((\mathbb{R}^{+*})^2, \mathbb{R})$ telle que pour toute solution (x,y) de V, $f(x,y)$ soit constante.
2. Montrer que les solutions de (V) sont périodiques.

Correction ▼ [004135]

181 225.06 Equations aux dérivées partielles

Exercice 4626 $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$

Résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$ avec la *condition aux limites* : $f(t,t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

(Étudier $\varphi : t \mapsto f(a+bt, a+ct)$ avec a, b, c bien choisis)

Correction ▼ [004201]

Exercice 4627 $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \text{cste}$

Déterminer les applications f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$ où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u = x+y$, $v = x-y$.

Correction ▼ [004202]

Exercice 4628 $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$

Résoudre sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y}. \end{cases}$

Correction ▼ [004203]

Exercice 4629 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$. On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

Correction ▼ [004204]

Exercice 4630 $x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y}$

Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$

Correction ▼ [004205]

Exercice 4631 $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$. où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On pose $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, puis trouver f ...

1. Si $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0\}$.
2. Si $U = \mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004206]

Exercice 4632 Ensi Physique P 94

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x = \frac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \frac{u}{v}$.

Correction ▼ [004207]

Exercice 4633 Fonctions homogènes

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) \neq (0,0)\}$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

(On étudiera $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$) [004208]

Exercice 4634

Résoudre l'équation : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)f$ où α est un réel fixé, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. On posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Correction ▼ [004209]

Exercice 4635 Équation d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*) \Leftrightarrow a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction inconnue : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u = x+\alpha y$, $v = x+\beta y$.

1. Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.
2. En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :
   $(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$, $\qquad (2) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, $\qquad (3) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

Correction ▼ [004210]

Exercice 4636 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Trouver les applications $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Correction ▼ [004211]

Exercice 4637 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}$

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto g(y/x)$. Trouver g telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}$.

Correction ▼ [004212]

Exercice 4638 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $g(x,y)=f(2x+y,2x-y)$.

1. Calculer les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f.
2. Trouver f telle que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

Correction ▼ [004213]

Exercice 4639 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

On considère l'équation aux dérivées partielles sur $\Omega=(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Résoudre cette équation en posant $\begin{cases}u=xy\\ v=\frac{x}{y}.\end{cases}$

Correction ▼ [004214]

Exercice 4640 $f(\cos x/\operatorname{ch} y)$ harmonique

Soit $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On considère $g:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$.

Déterminer f pour que g vérifie : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$.

Correction ▼ [004215]

Exercice 4641 $(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$ préserve les fonctions harmoniques

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(u,v)\mapsto F(u,v)$ et f définie par : $f(x,y)=F(u,v)$.

Montrer que $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$ entraîne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Correction ▼ [004216]

Exercice 4642 $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}=y$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g(u,v)=f(uv,u+v)$.

1. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}$.
2. Résoudre l'équation : $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}=y$.

Correction ▼ [004217]

Exercice 4643 $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ tq $\Delta f=-f$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g(x,y,z)=\frac{f(r)}{r}$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Déterminer f de sorte que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=-g$.

Correction ▼ [004218]

Exercice 4644 $x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

1. Trouver les fonctions $g : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u > v\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $\frac{\partial}{\partial u}\left(g + v\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(g + u\frac{\partial g}{\partial u}\right)$ (penser au théorème de Poincaré).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ l'équation : $x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en posant $u = y + \frac{1}{x}$, $v = y - \frac{1}{x}$.

Correction ▼ [004219]

Exercice 4645 *** I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $u = x + y$ et $v = x + 2y$.
2. $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en passant en polaires.
3. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

Correction ▼ [005898]

---

182 225.99 Autre

183 229.01 Ouvert, fermé, intérieur, adhérence

Exercice 4646

Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$; $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$;
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$;
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$; $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$. [001741]

Exercice 4647

Montrer que toute reunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ? [001742]

Exercice 4648 partiel 1999

On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. L'ensemble A est-il connexe ? [001743]

Exercice 4649

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leq 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$$
$$C = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid \cos(x) \geq 0\}$$

[001754]

Exercice 4650

On se propose de montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts disjoints. On considère donc un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in U$ on pose

$$C(x) = \{y \in [x,+\infty[\mid [x,y] \subset U\} \cup \{y \in]-\infty,x] \mid [y,x] \subset U\}.$$

1. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert pour tout x. (Considérer $\inf_{y \in C(x)} y$ et $\sup_{y \in C(x)} y$.)

2. Pour tous x, y dans U, montrer qu'on a $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.
3. Conclure.

[001755]

Exercice 4651

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. Montrer :

1. $C_{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_A}$, $C_{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_A}$
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.
   Donner un exemple pour lequel l'inclusion réciproque n'est pas réalisée.

[001756]

Exercice 4652

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon) \cap C_A \neq \emptyset\}$
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_A)$
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

[001757]

Exercice 4653

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\bar{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
2. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que si A est bornée, alors $\sup A \in \bar{A}$. (Construire une suite de points appropriée.)

[001758]

Exercice 4654

Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon. [001759]

Exercice 4655

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. On pose $A + B = \{z \in E \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}$.

Montrer que si A est ouvert, $A + B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.) [001760]

Exercice 4656

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé. [001761]

Exercice 4657

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Montrer que si A est bornée, alors $\bar{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont bornés.
2. Comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\mathrm{diam}(\bar{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.

(b) Soit x et u des éléments de A avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.

(c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathrm{Fr}(A)$.

(d) En déduire que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.

[001762]

Exercice 4658

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0,A)$, par la formule

$$d(x_0,A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0,A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0,B) \geq d(x_0,A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a,b) \in A \times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

[001764]

Exercice 4659

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E on note

$$A + B = \{z \in E \mid \exists (x,y) \in A \times B, z = x + y\}.$$

Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé. [001766]

Exercice 4660

Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$; montrer qu'elle est fermée si et seulement si pour toute partie fermée bornée $K, K \cap X$ est fermée bornée. [001769]

Exercice 4661

Soient $k \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\omega_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{k^2}{n^2} \right\},$$

et

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n.$$

Ω est-il ouvert ? fermé ? ... [001770]

Exercice 4662

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$, et $K_n \neq \emptyset$.

Montrer que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

[001771]

Exercice 4663

Montrer que l'intersection de deux ensembles ouvert est ouvert, que l'union de deux ensembles fermés est fermée, que cela reste vrai pour un nombre fini d'ensembles, mais que cela peut devenir faux si l'on considère des suites infinies. [001772]

Exercice 4664

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ; on pose
$$\mathrm{Int}(E) = {}^c\,\overline{{}^cE}.$$
Montrer que $\mathrm{Int}(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E. [001773]

Exercice 4665

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{A}$ est aussi bornée et que
$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in \overline{A}} \|x\|.$$
[001774]

Exercice 4666

Classer (pour l'inclusion) les parties : $\overline{A \cap B}, \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}, \overline{A} \cup \overline{B}$. [001776]

Exercice 4667

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, chacune des parties suivantes est-elle ouverte ? fermée ?

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0,1[, [0,+\infty[,]0,1[\cup \{2\}, \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}, \bigcap_{n \geq 1}]-1/n, 1/n[$. [001777]

Exercice 4668

Soit E un evn (espace vectoriel normé). Soit A une partie de E. Montrer l'égalité
$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} \text{ et } E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$$
[001778]

Exercice 4669

Soit E un evn, V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\mathring{V} \neq \varnothing$ alors $V = E$.

[001779]

Exercice 4670

Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leurs adhérences et intérieurs.

1. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$
2. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x| = 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$
3. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\}$$
4. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 1 - xy > 0\}$$
5. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 3x + 4y = 2\}$$
6. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , x^2 + y^2 = 1\}$$
7. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , xy = 1\}$$

8.
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{1/n\}\times[0,1]$$

[001780]

Exercice 4671

Déterminer l'adhérence de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$
2. $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$
3. $\{\frac{(-1)^n}{1+1/n}, n\in\mathbb{N}^*\}$

[001781]

Exercice 4672

Soient A et B, deux parties d'un evn E.

1. Montrer que si O est un ouvert de E, alors $A+O$ est ouvert. (Indication : Prendre d'abord $A=\{a\}$ puis A quelconque ....)
2. Etablir que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. (Trouver un exemple où l'inclusion est stricte)

[001782]

Exercice 4673

1. Tracer le graphe de la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2$ et tracer les lignes de niveau de cette fonction.
2. Tracer les graphes des fonctions f et g définies par $f(x,y)=25-(x^2+y^2)$ et $g(x,y)=5-\sqrt{x^2+y^2}$ sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 25\}$.
3. Tracer le graphe de la courbe paramétrée $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $f(x)=(x\cos x, x\sin x)$.
4. Peut-on représenter graphiquement l'application de la question (3.) ? Comment ?
5. Décrire les surfaces de niveau de la fonction $f\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=\exp(x+y^2-z^2)$.
6. Pourquoi ne peut-t-on pas naïvement représenter le graphe de l'application
$$f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(-y,x),$$
sur une feuille de papier. Comment peut-on graphiquement représenter cette application ?

Indication ▼ Correction ▼ [002616]

Exercice 4674

Déterminer si chacune des parties suivantes du plan sont ouvertes ou fermées, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer chaque fois l'intérieur et l'adhérence.

1. $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2y^2>1\}$,
2. $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1, y>0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002617]

Exercice 4675

1. Soient $B_1\subset\mathbb{R}^n$ et $B_2\subset\mathbb{R}^m$ des boules ouvertes. Montrer que $B_1\times B_2\subset\mathbb{R}^{n+m}$ est un ouvert.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et B un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $A\times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Indication ▼ Correction ▼ [002618]

Exercice 4676

1. Soit (A_n) $(n\in\mathbb{N})$ une suite de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que la réunion des A_n est encore une partie ouverte ? Et leur intersection ?
2. Même question pour une famille de parties fermées.

Indication ▼ Correction ▼ [002619]

Exercice 4677

Soit $A = \{(t, \sin\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2 ; t > 0\}$. Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ de A.

Indication ▼ Correction ▼ [002620]

Exercice 4678

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition de "D est ouvert." (Ceci est une question de cours !)
2. Donner la définition de "$a \in \mathbb{R}^2$ est un point adhérent de D." (Ceci est une question de cours !)
   On considère dans la suite de l'exercice l'ensemble
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$
3. Dessiner D.
4. Montrer que D n'est pas ouvert.
5. Déterminer $\overline{D}$, l'adhérence de D. On justifiera brièvement sa réponse, en s'aidant d'un dessin.

[002647]

Exercice 4679 **

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\mathring{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\mathring{\overbrace{A \cup B}} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.
5. $\mathring{\overbrace{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.
6. $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Correction ▼ [005844]

Exercice 4680 **

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Correction ▼ [005845]

Exercice 4681 **

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de $\|\ \|_\infty$.

D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P.

Correction ▼ [005846]

Exercice 4682 **

1. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F. Soit D une partie de E dense dans E. Montrer que si $f_{/D} = g_{/D}$ alors $f = g$.
2. Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

Correction ▼ [005848]

Exercice 4683 ***

Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

Correction ▼ [005849]

184 229.02 Compacité

Exercice 4684 partiel 1999

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall M > 0$, $\exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$.

(2) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

(3) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. [001744]

Exercice 4685

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \|(x,y)\| \leq 2 \text{ et } xy = 1\}$.
- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|(x,y)\| \leq 2 \text{ et } xy = 1\}$.
- $C = \{(x,\cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 18 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.

[001763]

Exercice 4686

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0,A)$, par la formule

$$d(x_0,A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0,A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0,B) \geq d(x_0,A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a,b) \in A \times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

[001764]

Exercice 4687

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et x sa limite. Montrer que l'ensemble $\{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact. [001767]

Exercice 4688

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. $\forall n \geq 1$, on pose $A_n = \{u_p / \ p \geq n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est $V = \bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n}$, et qu'ainsi V est fermé. En déduire que si la suite est bornée, alors l'ensemble V est un compact non vide. [001783]

Exercice 4689 Graphe fermé

Soient E,F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. On note $Gr(f) = \{(x,y) \in E \times F \text{ tq } y = f(x)\}$.

1. Montrer que si f est continue, alors $Gr(f)$ est fermé dans $E \times F$.

2. Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.
3. Donner un contre-exemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.

[004827]

Exercice 4690 Application presque contractante

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to A$ telle que : $\forall\, x,y \in A,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.

1. Montrer que f admet un point fixe unique, a.
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers a.

Correction ▼ [004828]

Exercice 4691 Application presque contractante (Mines MP 2003)

Soit C un compact convexe d'un evn E. Soit $f : C \to C$, 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe. On pourra utiliser la fonction $f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ avec $a \in C$.

Correction ▼ [004829]

Exercice 4692 Fonction bicontinue sur un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to F$ une fonction continue et injective (F = evn).

1. Montrer que $f^{-1} : f(A) \to A$ est aussi continue.
2. Donner un exemple où A n'est pas compact et f^{-1} n'est pas continue.

[004830]

Exercice 4693 Isométries d'un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to A$ telle que : $\forall\, x,y \in A,\ d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$.

1. Soit $a \in A$ et (a_n) la suite définie par : $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite (a_n).
2. Soient $a,b \in A$. Montrer que $d(f(a), f(b)) = d(a,b)$.
3. Montrer que $f(A) = A$.

[004831]

Exercice 4694 Partie dense dans un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E. Montrer qu'il existe une suite (a_k) d'éléments de A qui est dense dans A. [004832]

Exercice 4695 Intersection emboitée

Soit E un espace vectoriel normé, (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de E et $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que $K \neq \varnothing$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe n tel que $K_n \subset U$.
3. Montrer que $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \delta(K_n)$ (δ est le diamètre).

Correction ▼ [004833]

Exercice 4696 Image d'une intersection

Soient E,F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts de E. Montrer que $f(\bigcap\limits_n K_n) = \bigcap_n f(K_n)$.

[004834]

Exercice 4697 Recouvrement ouvert

Soit A une partie compacte d'un evn E et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Montrer qu'il existe $r>0$ tel que toute partie de A de diamètre inférieur ou égal à r soit incluse dans l'un des O_i.

Correction ▼ [004835]

Exercice 4698 Ensemble compact de suites

Soit $E=\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})=\{\text{suites } u=(u_n) \text{ bornées}\}$. On munit E de la norme : $\|u\|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|u_n|}{2^n}$. Montrer que $A=\{u\in E \text{ tq } \forall\, n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 1\}$ est compact.

Correction ▼ [004836]

Exercice 4699 Boule unité non compacte

Soit $E=\mathscr{C}([0,2\pi])$ muni de la norme $\|.\|_2$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=\cos(nx)$.

1. Calculer $\|f_n-f_p\|_2$ pour $n,p\in\mathbb{N}$.
2. En déduire que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

[004837]

Exercice 4700 Plus petite boule contenant une partie

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$, $A\subset\mathbb{R}^2$ une partie bornée contenant au moins deux points.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant A.
2. Montrer que cette boule n'est pas nécessairement unique (on prendra $\|.\|=\|.\|_\infty$).
3. Montrer que si $\|.\|$ est une norme euclidienne, alors la boule précédente est unique.

[004838]

Exercice 4701 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel normé, K un compact convexe de E, f une application de K dans K, 1-lipchitzienne. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [004839]

Exercice 4702 Thm. de Riesz, Stival 2003

Soit E un evn de dimension infinie.

1. Soit F un sev de dimension finie et $a\in E\setminus F$.
   (a) Montrer qu'il existe $b\in F$ tel que $\|a-b\|=d(a,F)$.
   (b) En déduire qu'il existe $c\in E$ tel que $\|c\|=1=d(c,F)$.
2. Montrer que la boule unité de E n'est pas compacte.

[004840]

185 229.03 Borne supérieure

Exercice 4703

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer les implications suivants :
- $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A,\ x < M \Rightarrow \sup A \leq M$
- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$.

[001750]

Exercice 4704

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A+B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = a+B\}.$$

1. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure, puis que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
2. Montrer l'implication :
$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A, \forall y \in B,\ x+y < M \Rightarrow \sup A + \sup B \leq M.$$

[001751]

Exercice 4705

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geq \varepsilon$. Montrer que $\varepsilon = 0$. [001752]

Exercice 4706

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup\{|x-y| : (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

[001753]

Exercice 4707 ***

Calculer $\displaystyle \operatorname*{Inf}_{\alpha \in]0,\pi[} \left\{ \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}$.

Correction ▼ [005850]

186 229.04 Topologie de la droite réelle

Exercice 4708 Partie à un seul point d'accumulation

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ ayant un seul point d'accumulation, a.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. On numérote les éléments de A d'une manière quelconque : $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.
Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Correction ▼ [004717]

Exercice 4709 $(\sin(n))$ est dense

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $A = \{ma + n \text{ tq } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Application : Montrer que tout réel de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin n)$. [004718]

Exercice 4710 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

Montrer que l'ensemble $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \text{ tq } m, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004719]

Exercice 4711 Unités quadratiques

Soit $A = \{n + p\sqrt{2} \text{ tq } n, p \in \mathbb{N},\ n + p\sqrt{2} > 0,\ n^2 - 2p^2 = 1\}$. Montrer que A est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{+*}$.

Correction ▼ [004720]

Exercice 4712 Olympiades 1991

Soit $a > 1$. Montrer qu'il existe une suite réelle bornée, (x_n), telle que : $\forall\, i \neq j,\ |x_i - x_j| \geq \frac{1}{|i-j|^a}$.

Correction ▼ [004721]

Exercice 4713 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

[004722]

Exercice 4714 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, $u_0 \in [0,1]$ et (u_n) la suite des itérées de f en u_0.

On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe de f.

Correction ▼ [004723]

Exercice 4715 $\exp(iu_n)$

Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite $(\exp(iu_n))$ converge et la suite $(|u_{n+1} - u_n|)$ est majorée par $\alpha < \pi$. Montrer que (u_n) converge.

[004724]

Exercice 4716 $\exp(iu_n)$

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Démontrer que la suite $(\exp(iu_n))$ est dense dans $\mathbb{U}$. [004725]

Exercice 4717 $\exp(iu_n)$

Soit (x_n) une suite réelle bornée et $u > 0$, $v > 0$. On suppose que $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$ et que les suites (e^{iux_n}) et (e^{ivx_n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge. [004726]

Exercice 4718 $u_{n+p} \leq u_n + u_p$

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que : $\forall\, n, p \in \mathbb{N},\ u_{n+p} \leq u_n + u_p$. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est convergente.

Correction ▼ [004727]

Exercice 4719 Fonctions périodiques (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, périodiques de périodes 1 et $\sqrt{2}$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continues telles que :
   pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $f(X) = f(X + (1,0)) = f(X + (0,1)) = f(AX)$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Correction ▼ [004728]

Exercice 4720 **

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Correction ▼ [005843]

Exercice 4721 *** I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Correction ▼ [005851]

---

187 229.05 Topologie des espaces métriques

Exercice 4722 Ouverts disjoints

Soient U, V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{U}}$ et $\overset{\circ}{\overline{V}}$ sont disjoints.

Donner un contre-exemple lorsque U et V ne sont pas ouverts.

Correction ▼ [004729]

Exercice 4723 A ouvert disjoint de B

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé disjointes. Si A est ouvert, montrer que A et $\overline{B}$ sont disjoints.

[004730]

Exercice 4724 $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Correction ▼ [004731]

Exercice 4725 Frontière d'un ouvert

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Correction ▼ [004732]

Exercice 4726 La distance est 1-lipchitzienne

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \text{ tq } a \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in E,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue.

[004733]

Exercice 4727 Diamètre de la frontière

Soit A une partie non vide et bornée d'un evn E. On note $\delta(A) = \sup\{d(x,y) \text{ tq } x, y \in A\}$ (*diamètre de* A).

Montrer que $\delta(A) = \delta(\operatorname{Fr}(A))$.

Correction ▼ [004734]

Exercice 4728 Ensemble dérivé

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Un point $x \in E$ est dit *point d'accumulation de* A si toute boule de centre x contient une infinité de points de A. On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A (*ensemble dérivé de* A). Montrer que A' est fermé, et comparer A' et $\overline{A}$.

[004735]

Exercice 4729 Caractérisation des fonctions continues

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$.

Montrer que f est continue si et seulement si : $\forall\, A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

si et seulement si : $\forall\, B \subset F,\ f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)^{\circ}$.

Correction ▼ [004736]

188 229.06 Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 4730 Unicité du centre et du rayon d'une boule

Soit E un evn non nul et $\vec{a}, \vec{a}' \in E$, $r, r' > 0$ tels que $B_f(\vec{a}, r) = B_f(\vec{a}', r')$. Montrer que $\vec{a} = \vec{a}'$ et $r = r'$. [004737]

Exercice 4731 $x+y+z=0$

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs d'un evn E tels que $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$.

Montrer que : $\|\vec{x}-\vec{y}\|+\|\vec{y}-\vec{z}\|+\|\vec{z}-\vec{x}\| \geq \frac{3}{2}(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|+\|\vec{z}\|)$. [004738]

Exercice 4732 Une boule est convexe

Soit E un evn, et $\vec{a} \in E$, $r > 0$. On note $\overline{B} = \overline{B}(\vec{a}, r)$ et $\mathring{B} = \mathring{B}(\vec{a}, r)$.

1. Montrer que $\overline{B}$ et $\mathring{B}$ sont convexes.
2. Si la norme est euclidienne, montrer que si $\vec{u}, \vec{v} \in \overline{B}$ avec $\vec{u} \neq \vec{v}$, alors $]\vec{u}, \vec{v}[\subset \mathring{B}$.
   ($]\vec{u}, \vec{v}[= \{(1-t)\vec{u}+t\vec{v}$ tq $t \in]0,1[\}$)
3. En déduire que si la norme est euclidienne, toute partie A telle que $\mathring{B} \subset A \subset \overline{B}$ est convexe.
4. Donner un contre-exemple avec une norme non euclidienne.

[004739]

Exercice 4733 Distance à un ensemble

Soit E un evn et $A \subset E$ une partie non vide. Pour $\vec{x} \in E$ on pose : $d(\vec{x}, A) = \inf\{\|\vec{x}-\vec{a}\|$ tq $\vec{a} \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \left|d(\vec{x}, A) - d(\vec{y}, A)\right| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|$. (Enlever la valeur absolue et démontrer séparément chaque inégalité)
2. Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto d(\vec{x}, A)$ est continue.

[004740]

Exercice 4734 Distance à un ensemble (ENS Cachan MP 2002)

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ non vide. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$: $d_A(x) = \inf\{\|x-y\|$ tq $y \in A\}$.

1. Montrer que d_A est continue.
2. Soient deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vides A, B. Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.
3. On note $\rho(A,B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, valant éventuellement $+\infty$.
   Montrer que l'on a $\rho(A,B) = \max\left(\sup_{x \in A} d_B(x),\ \sup_{x \in B} d_A(x)\right)$.

Correction ▼ [004741]

Exercice 4735 Distance entre un fermé et un compact

Soient A,B deux parties compactes non vides de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\|a-b\| = \min\{\|x-y\| \text{ tq } x \in A,\ y \in B\}$.

Montrer que ceci est encore vrai si on suppose A compact et B fermé. [004742]

Exercice 4736 Diamètre

Soit E un evn de dimension finie et $A \subset E$ borné, fermé, non vide. Montrer qu'il existe $\vec{a},\vec{b} \in A$ tels que $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \max(\|\vec{x}-\vec{y}\| \text{ tq } \vec{x},\vec{y} \in A)$. (Considérer l'ensemble $A \times A$ dans l'evn $E \times E$) [004743]

Exercice 4737 Diamètres concourants (Ens Ulm MP* 2003)

1. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. Soit $O \in \mathring{K}$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue 2π-périodique telle qu'en coordonnées polaires de centre O, K est défini par $\rho \leq f(\theta)$.
2. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\cos(x)\,dx = \int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x)\,dx = 0$. Montrer que g s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.
3. Soit G le centre de gravité de K. Montrer que G est le milieu d'au moins trois "diamètres" de K (trois segments joignant deux points de la frontière).

Correction ▼ [004744]

Exercice 4738 $x/\max(1,\|x\|)$, Centrale MP 2005

Soit f définie par $f(x) = \frac{x}{\max(1,\|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Correction ▼ [004745]

Exercice 4739 u_n colin à $v_n \Rightarrow \lim u_n$ colin à $\lim v_n$

Soit E un evn de dimension finie et $(\vec{u}_n)$, $(\vec{v}_n)$ deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \vec{u}_n \text{ est colinéaire à } \vec{v}_n, \qquad \vec{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{u}, \qquad \vec{v}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{v}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (raisonner par l'absurde et compléter $(\vec{u},\vec{v})$ en une base de E). [004746]

Exercice 4740 Suites de Cauchy

Soient (u_n), (v_n) deux suites d'un evn E telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (u_n) est de Cauchy. Montrer que (v_n) est de Cauchy. [004747]

Exercice 4741 Suite de Cauchy non convergente

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme : $\|\sum a_k X^k\| = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N})$. On note $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas. [004748]

Exercice 4742 Mines PC 1998

Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite (B^n) converge vers une matrice C. Que peut-on dire de C ? [004749]

Exercice 4743 Suite de matrices inversibles

Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1 :\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ 2 :\ \text{pour tout } n,\ A_n \text{ est inversible} \\ 3 :\ A_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}). \end{cases}$$

1. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.

2. Peut-on retirer la propriété 3 ?

[004750]

Exercice 4744 Suite de matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles convergeant vers A. [004751]

Exercice 4745 DSE de $I-A$

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite de matrices : $A_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I-A$ est inversible, et $B = (I-A)^{-1}$.

Remarque : La réciproque est fausse, c'est à dire que la suite (A_n) peut diverger même si $I-A$ est inversible. Chercher un contre-exemple. [004752]

Exercice 4746 Ensam PSI 1998

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telle que la suite (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection. [004753]

Exercice 4747 Suites de fonctions

Soient $E = \mathscr{C}([a,b] \to \mathbb{R})$, (f_n) une suite de fonctions de E et $f \in E$. Comparer les énoncés :

$$1 : \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 2 : \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 3 : \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

[004754]

Exercice 4748

On note E l'espace vectoriel des suites réelles (x_n) telles que la série $\sum x_n^2$ converge. On le munit du produit scalaire $(x \mid y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. Soit (y^s) une suite bornée d'éléments de E. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergent faiblement, c'est-à-dire qu'il existe z telle que pour tout x de E on ait $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$.

Correction ▼ [004755]

Exercice 4749 ENS Lyon MP 2002

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou (x^2+1) de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ la suite $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1. Montrer que la suite $(|||u^n|||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i(x)$.

Correction ▼ [004756]

Exercice 4750 Norme bizarre

Montrer que $(x,y) \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$; dessiner la boule unité. [004757]

Exercice 4751 Normes de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$
$$\|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\},$$
$$\|P\|_* = \max\{|P(t)| \text{ tq } 0 \le t \le 1\}.$$

Montrer que ce sont des normes, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. (On considèrera $P_n(t)=(t-1)^n$ et $Q_n(t)=1+t+t^2+\cdots+t^n$) [004758]

Exercice 4752 Norme de polynômes

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $P\in E$ on pose $\|P\|=\sup(|P(t)-P'(t)| \text{ tq } t\in[0,1])$.

Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E. [004759]

Exercice 4753 Normes de polynômes

Soit $a\in\mathbb{R}$. On pose pour $P\in\mathbb{R}[X]$: $N_a(P)=|P(a)|+\int_{t=0}^{1}|P'(t)|\,dt$. Montrer que...

1. N_a est une norme.
2. N_0 et N_1 sont équivalentes.
3. Si $a,b\in[0,1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.
4. Soit $P_n=(X/2)^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite (P_n) est convergente et quelle est sa limite.
5. Si $0\le a<b$ et $b>1$ alors aucune des normes N_a, N_b n'est plus fine que l'autre.

Correction ▼ [004760]

Exercice 4754 Normes sur les polynômes

Soit (λ_n) une suite de réels strictement positifs. On lui associe la norme sur $\mathbb{R}[x]$: $N(\sum_i a_i x^i)=\sum_i \lambda_i|a_i|$.

Soient (λ_n) et (λ'_n) deux suites et N, N' les normes associées. Montrer que N et N' sont équivalentes si et seulement si les suites $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}\right)$ et $\left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)$ sont bornées. [004761]

Exercice 4755 Centrale MP 2006

E est l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ telles que $f(0)=f'(0)=0$. Pour $f\in E$, on pose :

$$\begin{aligned}
N_\infty(f) &= \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|,\\
N(f) &= \sup_{x\in[0,1]}|f(x)+f''(x)|,\\
N_1(f) &= \sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|+\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.
\end{aligned}$$

1. Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1 ni à N.
3. Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y''+y=g$).

Correction ▼ [004762]

Exercice 4756 Norme de Frobenius

Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\|=\sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)}$.

Montrer que c'est une norme et que : $\forall\, A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\|\le\|A\|\times\|B\|$.

Correction ▼ [004763]

Exercice 4757 Semi-norme

Soit p une semi-norme sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ (ie. il manque juste l'axiome $p(A)=0\Rightarrow A=0$). On suppose de plus que $\forall\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n((x^2+1)^))^2$, $p(AB)\le p(A)p(B)$. Montrer que $p=0$ ou p est en fait une norme.

Correction ▼ [004764]

Exercice 4758 Normes produit

Soient E,F deux evn et $G = E\times F$. On pose pour $u = (\vec{x},\vec{y}) \in G$:

$$\|u\|_1 = \|\vec{x}\|_E + \|\vec{y}\|_F, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\|\vec{x}\|_E^2 + \|\vec{y}\|_F^2}, \quad \|u\|_\infty = \max(\|\vec{x}\|_E, \|\vec{y}\|_F).$$

1. Montrer que ce sont des normes sur G et qu'elles sont deux à deux équivalentes (sans hypothèse de dimension finie).
2. On prend $E = F$. Montrer que pour chacune de ces normes, l'application $G \to E, (\vec{x},\vec{y}) \mapsto \vec{x}+\vec{y}$ est continue.

[004765]

Exercice 4759 Normes sur les suites

Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ réelles bornées. On pose $\begin{cases} \|u\| = \sup(|u_n| \text{ tq } n \in \mathbb{N}) \\ N(u) = \sup(|u_n| + |u_{2n}| \text{ tq } n \in \mathbb{N}). \end{cases}$

Montrer que ce sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes. [004766]

Exercice 4760 Norme sur les suites

Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 1}$ telles que la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ est bornée. Pour $u \in E$, on pose $\|u\| = \sup(\sqrt[n]{|u_n|} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et que $\|\ .\ \|$ *n'est pas* une norme sur E. [004767]

Exercice 4761 Fonctions lipschitziennes

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \text{ tq } x \neq y\right),$$
$$N(f) = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \text{ tq } x \neq 0\right).$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que $\|\ .\ \|$ et N sont des normes sur E.
3. Sont-elles équivalentes ?

[004768]

Exercice 4762 Fonctions $\mathscr{C}^1$

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $f \in E$, on pose : $N_1(f) = \sup(|f| + |f'|)$, $N_2(f) = \sup|f| + \sup|f'|$. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E. [004769]

Exercice 4763 Norme sur les fonctions continues

$E = C([0,1],\mathbb{R})$. Soit $g \in E$. Pour tout $f \in E$ on pose $N(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)g(x)|\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.
2. Si pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, montrer qu'alors N et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la proposition précédente.

[004770]

Exercice 4764 Comparaison de normes (ENS MP 2002)

1. Soit E un espace préhilbertien réel et $u_1,\dots,u_n$ des éléments de E. Calculer $\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\right\|^2$ où σ parcourt l'ensemble des fonctions de $[[1,n]]$ dans $\{-1,1\}$.
2. On se place dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la norme infinie n'est équivalente à aucune norme euclidienne.
3. Même question avec la norme $\|\ \|_p$, $p \in [1,+\infty[\setminus\{2\}$.

Correction ▼ [004771]

Exercice 4765 Jauge

Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-evn et $K \subset E$ une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine et telle que $0 \in \mathring{K}$.
Pour $x \in E$, on pose $n(x) = \inf\{|\lambda| \text{ tq } x \in \lambda K\}$. Montrer que n est une norme équivalente à $\| \ \|$. [004772]

Exercice 4766 Polytechnique MP* 2006

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$(i) \qquad \forall\, \lambda, x, \ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \ ;$$
$$(ii) \qquad \forall\, x, \ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

1. Montrer que N est une norme si et seulement $B = \{x \text{ tq. } N(x) \leq 1\}$ est convexe.
2. Montrer que si N vérifie aussi
$$(iii) \qquad \forall\, x, y, \ N(x+y)^2 \leq 2N(x)^2 + 2N(y)^2$$
alors c'est une norme.

Correction ▼ [004773]

Exercice 4767 Parties de $\mathbb{R}^n$

Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + xy + y^2 < 1\}$.
3. $C = \{z \in (x^2+1)$

tq $\ \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$.

[004774]

Exercice 4768 Addition de parties

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \text{ tq } \vec{a} \in A, \ \vec{b} \in B\}$. Montrer que ...

1. Si A ou B est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Si A et B sont fermés, alors $A+B$ n'est pas nécéssairement fermé. (Prendre $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$ et $B = \{(x,0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$)
3. Si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.

[004775]

Exercice 4769 Voisinage fermé d'un fermé

Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On pose $F' = \bigcup_{\vec{x} \in F} \overline{B}(\vec{x}, r)$. Montrer que F' est fermé. [004776]

Exercice 4770 Ev engendré par un ouvert

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert non vide d'un ev normé E. Montrer que $\mathrm{vect}(\mathscr{O}) = E$. [004777]

Exercice 4771 Adhérence et intérieur d'un sev

Soit E un evn et F un sev de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sev de E.
2. Si E est de dimension finie, montrer que $F = \overline{F}$.
3. Dans le cas général, montrer que $\mathring{F} = \varnothing$ ou $F = E$.

[004778]

Exercice 4772 Cône convexe engendré par un ensemble fini, ENS ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $a_1,\dots,a_n \in E$. On pose $C = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\right\}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $c \in C$ tel que $\|x-c\| = \inf\{\|x-a\|, a \in C\}$.
2. En déduire que C est fermé.

Correction ▼ [004779]

Exercice 4773 Partie convexe dense

Soit E un evn de dimension finie et $C \subset E$ convexe et dense. Montrer que $C = E$.

Correction ▼ [004780]

Exercice 4774 L'ensemble des projecteurs est fermé

Soit E un evn de dimension finie et $\mathscr{P}$ l'ensemble des projecteurs de E. Montrer que $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. [004781]

Exercice 4775 Adhérence et intérieur dans les fonctions continues

1. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit P l'ensemble des fonctions de E positives ou nulles. Chercher $\overline{P}$ et $\mathring{P}$.
2. Mêmes questions avec la norme : $\|f\| = \int_{t=0}^1 |f(t)|\,dt$.

Correction ▼ [004782]

Exercice 4776 Mines MP 2000

On pose $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et on le munit de la norme N_∞. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Correction ▼ [004783]

Exercice 4777 Points isolés (Ens Ulm MP* 2003)

Les solutions de l'équation $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ pour $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ sont-elles isolées ?

Correction ▼ [004784]

Exercice 4778 Adhérence et intérieur d'un convexe

Soit A une partie convexe d'un evn E.

1. Démontrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont aussi convexes (pour $\mathring{A}$: faire un dessin).
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est convexe (c.a.d. $d(tx+(1-t)y,A) \leq td(x,A)+(1-t)d(y,A)$).

[004785]

Exercice 4779 Théorème des fermés emboités

Soit E un evn de dimension finie, et $(B_n = B(\vec{a}_n, r_n))$ une suite de boules fermées, décroissante pour l'inclusion, tq $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. Montrer que la suite $(\vec{a}_n)$ admet une sous-suite convergeant vers $\vec{a} \in E$.
2. Montrer que $\vec{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{a}$.
3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{\vec{a}\}$.

[004786]

Exercice 4780 X MP* 2001

On considère l'espace $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que $GL_n((x^2+1)^{)}$ est ouvert dense de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$.
2. Soit $D_n((x^2+1)^{)}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$. Montrer que $D_n((x^2+1)^{)}$ est dense dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$.
3. Quel est l'intérieur de $D_n((x^2+1)^{)}$?

Correction ▼ [004787]

Exercice 4781 Matrices nilpotentes, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Soit $N \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$. Montrer que N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à l'ensemble $\{P^{-1}NP,\ P \in GL_n((x^2+1)^{)}\}$.

Correction ▼ [004788]

Exercice 4782 Polynômes scindés (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathbb{R}^n$. On note $P_\sigma = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n$.

Soit $\Omega = \{\sigma \in \mathbb{R}^n$ tq P_σ est à racines réelles, distinctes$\}$.

1. Ω est-il ouvert ? fermé ?
2. Notons $f : \sigma \mapsto P_\sigma$. Déterminer $f(\overline{\Omega})$.

Correction ▼ [004789]

Exercice 4783 $(f(x)-f(y))/(x-y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} (x,y) & \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ (x,x) & f'(x) \end{cases}$

Montrer que g est continue. (Attention : pour une fonction définie par cas, se placer au voisinage d'un point (x_0,y_0) et déterminer si un seul ou plusieurs cas sont à considérer dans ce voisinage) [004790]

Exercice 4784 $\sup(f(x,y))$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \sup(f(x,y)$ tq $y \in [0,1])$. Montrer que g est continue.

Correction ▼ [004791]

Exercice 4785 Fonction tendant vers $+\infty$ à l'infini

Soit E un evn de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(\vec{x}) \xrightarrow[\|\vec{x}\|\to\infty]{} +\infty$, c'est à dire :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \vec{x} \in E,\ \|\vec{x}\| \geq B \Rightarrow f(\vec{x}) \geq A.$$

1. On prend $A = f(\vec{0})$ et B le nombre correspondant.
   Montrer que $\inf\{f(\vec{x})$ tq $\vec{x} \in E\} = \inf\{f(\vec{x})$ tq $\|\vec{x}\| \leq B\}$.
2. En déduire que f admet un minimum.
3. Exemple : soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée.
   Montrer qu'il existe $P \in E$ tq $\|f-P\|_\infty = \sup\{|f(t)-P(t)|$ tq $t \in [a,b]\}$ soit minimal (P est appelé : *un* polynôme de meilleure approximation de f sur $[a,b]$).

[004792]

Exercice 4786 Fonctions homogènes

On note $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est *positivement homogène de degré* α si :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \forall\, t > 0,\ f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y).$$

1. Donner des exemples de telles fonctions pour $\alpha = 1, 0, -2, \frac{1}{2}$.
2. Soit f continue, positivement homogène de degré α. Montrer que si $\alpha \geq 0$, f est bornée sur D et que si $\alpha > 0$, f admet une limite finie en $(0,0)$. Examiner les cas $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.

[004793]

Exercice 4787 Fonction partiellement continue dans toutes les directions

Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ discontinue en $(0,0)$ mais telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha t, \beta t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. [004794]

Exercice 4788 Continuité du polynôme caractéristique

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}_n[X]$, et $\varphi : E \to F, A \mapsto P_A$ (polynôme caractéristique). Montrer que φ est continue. [004795]

Exercice 4789 Ouverts et non ouverts

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose : $\begin{cases} N_1(P) = \sup(|P(t)| \text{ tq } 0 \leq t \leq 1) \\ N_2(P) = \sup(|P(t)| \text{ tq } 1 \leq t \leq 2) \\ \varphi(P) = P(0). \end{cases}$

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Montrer que φ est continue pour N_1.
3. Montrer que φ est discontinue pour N_2. (Considérer $P_n(t) = (1 - t/2)^n$)
4. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?
5. Soit $\mathscr{O} = \{P \in E \text{ tq } P(0) \neq 0\}$. Montrer que $\mathscr{O}$ est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2.

[004796]

Exercice 4790 Thm du point fixe

Soit E un evn de dimension finie et $f : E \to E$ une fonction k-lipchitzienne avec $k < 1$. On choisit $\vec{u}_0 \in E$ arbitrairement, et on considère la suite $(\vec{u}_n)$ telle que pour tout n : $\vec{u}_{n+1} = f(\vec{u}_n)$.

1. Montrer que $\|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n\| \leq k^n \|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\|$.
2. En déduire que la suite $(\vec{u}_n)$ est de Cauchy.
3. Soit $\vec{\ell} = \lim(\vec{u}_n)$. Montrer que $\vec{\ell}$ est l'unique solution dans E de l'équation $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

[004797]

Exercice 4791 Points fixes, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Montrer que les points fixes de f, continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, forment un ensemble fermé non vide.
2. Montrer que tout fermé de $[0,1]$ non vide est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Correction ▼ [004798]

Exercice 4792 Racines de polynômes X MP* 2004

Soit $E = (x^2+1)^{d[X]}$ normé par $\|P\| = \sum |a_i|$, $P \in E$ de degré d à racines simples et P_n une suite de polynômes de E convergeant vers P. Soit $z \in (x^2+1)$ tel que $P(z) = 0$ et $\delta > 0$.

1. Montrer que pour n assez grand, P_n a au moins un zéro dans $\overline{B(z,\delta)}$.
2. Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0,\delta_0]$ P_n a exactement une racine dans $\overline{B(z,\delta)}$ si n est assez grand.
3. Que peut-on dire si les zéros de P ne sont plus supposés simples ?

Correction ▼ [004799]

Exercice 4793 Une application polynomiale est fermée, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit f une fonction polynomiale sur (x^2+1). Montrer que l'image par f de tout fermé est un fermé.

Correction ▼ [004800]

Exercice 4794 Principe du maximum, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit $P \in (x^2+1)^[X]$ et U un ouvert de (x^2+1) borné. Montrer que $\sup(|P(x)|,\ x \in U) = \sup(|P(x)|,\ x \in \mathrm{Fr}(U))$.

Correction ▼ [004801]

Exercice 4795 Fonction presque additive, Centrale MP 2001

Soient E,F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, F étant complet. Soit f une application continue de E dans F telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall\, x,y \in E,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M.$$

1. Dans le cas $M = 0$ montrer que f est linéaire. Ce résultat subsiste-t-il si E et F sont des (x^2+1)-ev ?
2. On suppose $M > 0$. Soit pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur E.
3. On note $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Montrer que g est une application linéaire continue et que c'est l'unique application linéaire telle que $f - g$ soit bornée.

Correction ▼ [004802]

Exercice 4796 f uc $\Rightarrow f$(borné) est borné

Soit $A \subset E$ une partie non vide bornée et $f : A \to F$ uniformément continue. Montrer que f est bornée dans les cas suivants :

1. A est convexe.
2. A est connexe par arcs.
3. A est quelconque et E est de dimension finie.

[004803]

Exercice 4797 Applications linéaires continues

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $|||u||| = \sup(\|u(\vec{x})\| \text{ tq } \|\vec{x}\| = 1)$.

1. Montrer que $|||u|||$ existe et que c'est un maximum.
2. Montrer que $|||\,.\,|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$ (appelée : *norme linéaire associée à* $\|\,.\,\|$).
3. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \|u(\vec{x})\| \leq |||u||| \times \|\vec{x}\|$.
4. En déduire que : $\forall\, u,v \in \mathscr{L}(E),\ |||u \circ v||| \leq |||u||| \times |||v|||$.

[004804]

Exercice 4798 Centrale MP 2006

E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour $p \in |||$ et $f \in E$ on pose : $N_p(f) = \sup\{|t^p e^{-|t|} f(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que N_p est une norme sur E.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $P_c : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$. Étudier la continuité de P_c sur (E,N_p).
3. Montrer que, pour p et q distincts dans $|||$, les normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Correction ▼ [004805]

Exercice 4799 Applications linéaires continues

Soient E,F deux evn de dimensions finies et $\varphi : E \to F$ linéaire. Montrer que φ est continue.

En déduire que tout sev de E est fermé. [004806]

Exercice 4800 Continuité du polynôme de Lagrange

Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ distincts. À $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ on fait correspondre le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.

1. Montrer que l'application $(y_1,\dots,y_n) \mapsto P$ est continue.
2. Montrer que l'application réciproque est aussi continue.

[004807]

Exercice 4801 Ensi PSI 1998

Soit $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme $\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in |||\}$.

Soit $L : \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, u \mapsto \ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme. [004808]

Exercice 4802 Itération d'un endomorphisme

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On choisit $\vec{x}_0 \in E$, et on considère la suite $(\vec{x}_n)$ définie par la relation de récurrence : $\vec{x}_{n+1} = \frac{u(\vec{x}_n)}{\|u(\vec{x}_n)\|}$.

On suppose que la suite $(\vec{x}_n)$ converge. Montrer que la limite est un vecteur propre de u.

Exemples : **1)** $E = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{mat}(u) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{smallmatrix}\right)$. **2)** $E = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{mat}(u) = \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$. [004809]

Exercice 4803 Puissances de u

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|u\| \le 1$. Montrer que la suite (u^n) contient une sous-suite simplement convergente.

Correction ▼ [004810]

Exercice 4804 $\mathrm{id} - u$ est bicontinu

Soit E un (x^2+1)-evn et $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que $\mathrm{id}_E - u$ est bicontinu. Montrer que pour tout entier n, $\mathrm{id}_E - u^n$ est bicontinu et comparer son inverse à $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{id}_E - e^{2ik\pi/n} u\right)^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [004811]

Exercice 4805 Norme linéaire sur $\mathbb{R}$ = norme linéaire sur (x^2+1)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{L}((x^2+1)^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A. Montrer que si on munit $\mathbb{R}^n$ et $(x^2+1)^n$ des normes euclidiennes usuelles, alors $\|f\| = \|g\|$.

Correction ▼ [004812]

Exercice 4806 Applications linéaires sur les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[x]$ muni de la norme : $\left\|\sum_i a_i x^i\right\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que $\varphi : P \mapsto P(x+1)$ est continue ?
2. Est-ce que $\psi : P \mapsto AP$ est continue ? ($A \in E$ fixé)
3. Reprendre les questions précédentes avec la norme : $\|P\| = \sup\{e^{-|t|}|P(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Correction ▼ [004813]

Exercice 4807 $uv - vu = \mathrm{id}$

Soit E un espace vectoriel normé et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$.

1. Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in |||^*$.
2. Montrer que u ou v est discontinu.

Correction ▼ [004814]

Exercice 4808 La dérivation peut-elle être continue ?

On note $E = \mathscr{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E de dérivation : $D(f) = f'$.

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu (considérer $x \mapsto e^{\alpha x}$).
2. Soit F le sous-ev de E constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ est continu.

Correction ▼ [004815]

Exercice 4809 Mines MP 2002

On munit $E_k = \mathbb{R}_k[X]$ de la norme $\|P\|_k = \sum_{i=0}^k |P(i)|$. Calculer $|||\varphi|||$ avec $\varphi : E_2 \to E_3, P \mapsto X^2 P'$.

Correction ▼ [004816]

Exercice 4810 Normes sur les suites bornées

Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)$ bornées et F le sev des suites telles que la série de terme général $|u_n|$ converge. Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_n |u_n|$ et pour $u \in F$: $\|u\|_1 = \sum\limits_n |u_n|$.

Soit $a \in E$ et $f : E \to E, u \mapsto au = (a_n u_n)$.

1. Montrer que f est une application linéaire continue de E dans E et calculer sa norme.
2. Montrer que F est stable par f et calculer la norme de $f_{|F}$ quand on prend la norme $\| \ \|_1$ sur F.

[004817]

Exercice 4811 Thm de l'hyperplan fermé

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et $f \in E^*$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker} f$ est fermé (pour la réciproque : supposer $\mathrm{Ker} f$ fermé, montrer que $\{x \text{ tq } f(x) > 0\}$ est ouvert, puis étudier $\{x \text{ tq } -1 < f(x) < 1\}$).
2. On suppose f continue. Soit $x \in E$. Montrer que $|f(x)| = \|f\| d(x, \mathrm{Ker} f)$.

Correction ▼ [004818]

Exercice 4812 Théorème de Hahn-Banach (Polytechnique MP* 2003)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un hyperplan de E. Soit $\varepsilon \in E$ tel que $\mathbb{R}\varepsilon$ soit supplémentaire de F. Soit f une forme linéaire sur F.

1. Montrer que : $\forall\, x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\ \|x_1 - \varepsilon\| \leq |||f|||\ \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\ \|x_1 - \varepsilon\| \leq \alpha \leq |||f|||\ \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
3. On définit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi_{|F} = f$ et $\varphi(\varepsilon) = \alpha$. Montrer que $|||\varphi||| = |||f|||$.
4. On considère $E = \{u = (u_n)_{n \in |||} \in \mathbb{R}^{|}|| \text{ tq } \sum_{n \in |||} |u_n| < +\infty\}$ avec la norme définie par : $\|u\| = \sum_{n \in |||} |u_n|$. Montrer que E est complet pour cette norme.
5. Donner une famille dénombrable de sev de E de dimensions finies dont la réunion est dense dans E.
6. Soit F un sev de E de dimension finie et f une forme linéaire sur F. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi_{|F} = f$ et $|||\varphi||| = |||f|||$.

Correction ▼ [004819]

Exercice 4813 Rayon spectral

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $x_n = \|u^n\|$.

1. Montrer que $\rho = \inf\{\sqrt[n]{x_n},\ n \in |||\}$ est indépendant de la norme choisie sur E.
2. En utilisant l'inégalité : $x_{p+q} \leq x_p x_q$, montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers ρ.

[004820]

Exercice 4814 Rayon spectral (Centrale MP 2001)

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. On considère un endomorphisme f de E et on note $\rho(f) = \sup\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$ (rayon spectral de f). Soit ν une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\rho(f) \leq \lim_{p\to\infty}(\nu(f^p))^{1/p}$. On pourra pour commencer supposer que ν est la norme subordonnée à une norme sur E.
2. Montrer que si f est diagonalisable l'inégalité précédente est une égalité.
3. Étudier le cas général.

Correction ▼ [004821]

Exercice 4815 Polytechnique MP* 2000

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Prouver que u est surjective si et seulement si elle transforme tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ en ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Correction ▼ [004822]

Exercice 4816 Connexité d'un evn

Soit E un evn et $A \subset E$. On suppose que A est à la fois ouvert et fermé.

1. Exemples de telles parties ?
2. On définit la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ par $\begin{cases} \vec{x} & 1 \text{ si } \vec{x} \in A, \\ \vec{x} & 0 \text{ si } \vec{x} \notin A \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue.
   (b) On prend $\vec{a} \in A$ et $\vec{b} \notin A$. Montrer que $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t\vec{a} + (1-t)\vec{b})$ est continue.
   (c) Conclure.

[004823]

Exercice 4817 $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$ => $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$

Soit E un evn et A une partie de E ni vide, ni égale à E. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$. [004824]

Exercice 4818 $A \cup B$ fermé $\Rightarrow A \cup B = E$.

Soit E un evn de dimension supérieure ou égale à 2 et A, B deux parties de E telles que A est ouvert non vide, B est fini et $A \cup B$ est fermé. Montrer que $A \cup B = E$.

Correction ▼ [004825]

Exercice 4819 Complémentaire d'un hyperplan (Ens Ulm MP* 2005)

Soit E un evn réel et H un hyperplan de E. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si H *n'est pas* fermé.

Correction ▼ [004826]

Exercice 4820 **

Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

Correction ▼ [005839]

Exercice 4821 *** I

1. Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI. Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Montrer que pour $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$.
   (b) En déduire que $\forall((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$.
   (c) En déduire que $\forall((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}$.
2. Soit α un réel strictement positif. Pour $x=(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_\alpha(x)=\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}$.
   (a) Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1$, N_α est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Dessiner les « boules unités » de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $\alpha \in \left\{\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,+\infty\right\}$.
   (c) Montrer que, pour $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ fixé, $\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x)=\text{Max}\{|x_k|,\ 1\leqslant k\leqslant n\}=N_\infty(x)$.
   (d) Montrer que si $0<\alpha<1$, N_α n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n\geqslant 2$).

Correction ▼ [005840]

Exercice 4822 ** I

Soit $E=C^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f)=\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N'(f)=|f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N''(f)=|f(0)|+|f'(0)|+\int_0^1 |f''(t)|\,dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

Correction ▼ [005841]

Exercice 4823 ** I Distance d'un point à une partie

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$.

Pour $x\in E$, on pose $d_A(x)=d(x,A)$ où $d(x,A)=\text{Inf}\{\|x-a\|,\ a\in A\}$.

1. Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E.
2. (a) Montrer que si A est fermée, $\forall x\in E$, $d_A(x)=0 \Leftrightarrow x\in A$.
   (b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x\in E$, $\exists a\in A/\ d_A(x)=\|x-a\|$.
3. Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\overline{A}}(x)$.
4. Montrer d_A est continue sur E.
5. A chaque partie fermée non vide A, on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A\mapsto d_A$ est injective.
6. Dans l'espace des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A=\left\{f\in E/\ f(0)=0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt\geqslant 1\right\}$. Calculer $d_A(0)$.

Correction ▼ [005847]

189 229.07 Connexité

Exercice 4824 Frontière connexe

Soit E un espace vectoriel normé et $A\subset E$ fermé. Montrer que si $\text{Fr}(A)$ est connexe, alors A est connexe.

Correction ▼ [004841]

Exercice 4825 $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes

Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de (x^2+1) et $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective. [004842]

Exercice 4826 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit E un evn de dimension finie et (u_n) une suite bornée d'éléments de E telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est connexe.

Correction ▼ [004843]

Exercice 4827 Complémentaire d'une partie étoilée

Soit Ω une partie bornée étoilée d'un evn réel de dimension supérieure ou égale à 2. Montrer que le complémentaire de Ω est connexe.

[004844]

Exercice 4828 Complémentaire d'un sev

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et F un sev propre de E. Montrer que $E \setminus F$ est connexe si et seulement si $\operatorname{codim}(F) \geq 2$. Que peut-on dire dans un (x^2+1)-ev ? [004845]

190 229.08 Espaces complets

Exercice 4829 Norme pour les fonctions lipschitziennes

Soit $E = \{\text{fonctions lipchitziennes } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = |f(0)| + \sup\limits_{x\neq y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$.

Montrer que E est complet.

[004846]

Exercice 4830 Image d'une intersection de fermés

Soit E un espace vectoriel normé complet, F un espace vectoriel normé quelconque, $f : E \to F$ une application continue et (E_n) une suite décroissante de fermés de E dont le diamètre tend vers 0.

Montrer que $f(\bigcap\limits_n E_n) = \bigcap_n f(E_n)$. [004847]

Exercice 4831 Intersection de boules

Soit E un evn complet et $(B_n(a_n, r_n))$ une suite décroissante de boules fermées dont le rayon ne tend pas vers 0. Montrer que $\bigcap_n B_n$ est une boule fermée.

Correction ▼ [004848]

Exercice 4832 Intersection vide

Soit $E = \mathscr{B}(|||, \mathbb{R}) = \{\text{suites } u = (u_n) \text{ bornées}\}$. On munit E de la norme : $\|u\| = \sup\{|u_n|,\ n \in |||\}$.

1. Montrer que E est complet.
2. Soit $F_k = \{u \in E \text{ tq } \|u\| = 1 \text{ et } u_0 = \cdots = u_k = 0\}$. Vérifier que les F_k forment une suite de fermés bornés emboîtés dont l'intersection est vide.

[004849]

Exercice 4833 Théorème de Baire

Soit E un espace vectoriel normé complet et (F_n) une suite de fermés de E d'intérieurs vides. On pose $F = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\mathring{F} = \varnothing$.

Correction ▼ [004850]

Exercice 4834 $f \circ f$ est contractante

Soit E un espace vectoriel normé complet et $f : E \to E$ telle que $f \circ f$ est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction ▼ [004851]

Exercice 4835 Centrale MP 2001

Montrer qu'un plan euclidien n'est pas réunion de cercles disjoints non réduits à un point.

Indication ▼ Correction ▼ [004852]

191 229.09 Fonctions vectorielles

Exercice 4836 Centre de gravité d'une courbe paramétrée

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto M_t$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ de longueur non nulle. Le centre de gravité de la courbe est le point G tel que $\int_{t=a}^{b} \vec{GM_t} \|\vec{M}'(t)\| \, dt = \vec{0}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité de G.
2. Déterminer le centre de gravité d'un demi-cercle. (On admet que G est indépendant du paramétrage)
3. Montrer que G appartient à l'enveloppe convexe de la courbe.
4. Montrer que si la courbe admet un axe de symétrie, Δ, alors $G \in \Delta$. (Si σ est la symétrie associée, considérer la courbe décrite par $N_t = \sigma(M_t)$)
5. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie affine. Montrer que si G est le centre de gravité de $\mathscr{C}$, alors $\Phi(G)$ est le centre de gravité de $\Phi(\mathscr{C})$.

Correction ▼ [004853]

Exercice 4837 Dérivée d'une base orthonormée

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $t \in I$, $\mathscr{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (base orthonormée mobile).

1. Soit M_t la matrice dans $\mathscr{B}_t$ des vecteurs dérivés $\vec{e}_1{}'(t), \vec{e}_2{}'(t), \vec{e}_3{}'(t)$. Montrer que M_t est antisymétrique.
2. En déduire qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}(t)$ tel que $\vec{e}_i{}'(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t)$, $i = 1,2,3$.
3. Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont de classe $\mathscr{C}^2$, montrer que $\vec{\Omega}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\vec{e}_i{}''$ en fonction de $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}'$ et $\vec{e}_i$.

Correction ▼ [004854]

Exercice 4838 f' est colinéaire à f

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall\, t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0} \text{ et la famille } (\vec{f}(t), \vec{f}'(t)) \text{ est liée.}$$

On pose $\vec{g}(t) = \frac{\vec{f}(t)}{\|\vec{f}(t)\|}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\vec{g}'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $\vec{g}(t)$.
2. En déduire que $\vec{f}(t)$ garde une direction constante.
3. Chercher un contre-exemple lorsqu'on retire la propriété : $\forall\, t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0}$.

[004855]

Exercice 4839 f'' est colinéaire à f

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $\vec{f}''(t)$ est colinéaire à $\vec{f}(t)$. (*mouvement à accélération centrale*) On note $\vec{\sigma}(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{f}'(t)$.

1. Montrer que $\vec{\sigma}(t)$ est un vecteur constant.

2. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $(\vec{f}(t_0), \vec{f}'(t_0))$ est libre, montrer que $\vec{f}(I)$ est inclus dans un plan.

[004856]

Exercice 4840 f et g colinéaires

Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \to E$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On suppose : $\forall\, t \in I,\ f(t)$ et $g(t)$ sont colinéaires. Est-ce que $f'(t)$ et $g'(t)$ sont colinéaires ?
2. On suppose : $\forall\, t \in I,\ f'(t)$ et $g'(t)$ sont colinéaires. Existe-t-il $\vec{c} \in E$ tel que $f - \vec{c}$ et g soient colinéaires ?

Correction ▼ [004857]

Exercice 4841 $\mathbb{R}^2 \setminus$ une droite n'est pas connexe

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue, D une droite de $\mathbb{R}^2$ et P^+, P^- les demi-plans délimités par D. Montrer que s'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \in P^+$ et $f(b) \in P^-$, alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c) \in D$. Généraliser en dimension n. [004858]

---

192 229.10 Application linéaire continue, norme matricielle

Exercice 4842 *

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. Vérifier brièvement que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E,\ f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et déterminer $|||f|||$.

Correction ▼ [005854]

Exercice 4843 **

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E,\ C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et calculer leur norme.

Correction ▼ [005855]

Exercice 4844 *** I

On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

On pose $T : \begin{array}{ccccc} E & \to & E & & \\ f & \mapsto & Tf : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & & x & \mapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array}$ et on admet que T est un endomorphisme de E.

1. Démontrer que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.
2. Vérifier que la borne supérieure n'est pas atteinte.

Correction ▼ [005856]

Exercice 4845 **

On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A \in E,\ N(A) = \text{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A \in E$, $f(A) = \mathrm{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E,N) et déterminer $|||f|||$.

Correction ▼ [005857]

Exercice 4846 ***

Déterminer $s = \mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\}$ quand $\|\ \|$ est

1. $\|\ \|_1$,
2. $\|\ \|_2$,
3. $\|\ \|_\infty$.

Correction ▼ [005858]

Exercice 4847 *

Une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$, est-elle nécessairement une « norme trois barres » ?

Correction ▼ [005859]

Exercice 4848 **

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant k(A)N(B)$.

Correction ▼ [005860]

Exercice 4849 **

Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$.

Correction ▼ [005861]

Exercice 4850 ***

On pose $\forall X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|$.

Déterminer les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement associées aux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On notera $|||\ |||_1$ et $|||\ |||_\infty$ ces normes.

Correction ▼ [005862]

Exercice 4851 **I

Pour $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \mathrm{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Montrer que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$ où $|||A|||_2 = \mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$.

Correction ▼ [005863]

193 229.99 Autre

Exercice 4852

Soit $x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Démontrer que
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$
et
$$\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Discuter le cas $n = 1$.
3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée
$$B_{\|\cdot\|} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \|x\| \le 1\}$$
pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

[001740]

Exercice 4853

1. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ euclidien muni d'une b.o.n., représenter les ensembles suivants :
   - $\mathscr{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$
   - $\mathscr{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{4} < 4\}$
   - $\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x+y+z < 3 \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } z > 0\}$
   - $\mathscr{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{array}{rr} & x+y+z<1 \\ \text{et} & x-y+z<1 \\ \text{et} & -x-y+z<1 \end{array} \right\}$
   - $\mathscr{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } 2 < z < 4\}$
   - $\mathscr{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } x^2 + y^2 < z^2 \text{ et } z > 0\}$
   - $\mathscr{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ et } z = x - 1\}$.
2. Déterminer les projections de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ sur le plan (xOy).

[001745]

Exercice 4854 Images directes et réciproques

1. Soit f l'application affine par morceaux, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 1+x & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$
Soient $A = [-1, 0[$ et $B = [0, 2[$. Déterminer $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(\mathbb{R} \setminus A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))$, $f(A \cap B)$, et $f(A) \cap f(B)$.
2. Soient deux ensembles E et F, et $f : E \to F$ une application. Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ et A, $f(f^{-1}(B))$ et B, $f(E \setminus A)$ et $F \setminus f(A)$.

[001746]

Exercice 4855

Soit l'application $\left(\begin{array}{cccc} G : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u}{u+v}, \frac{\sqrt{v(v+2u)}}{u+v}) \end{array} \right)$. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de G. Déterminer $G(\mathscr{D})$.

[001747]

Exercice 4856

Soient les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :
$$f(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y) \text{ et } g(x,y) = (2x, \frac{y}{\sqrt{2}}).$$
Soient les ensembles
$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{xy}{2} = 1\},$$
$$\text{et } \mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1\}.$$

Déterminer $f(\mathscr{D}_1)$ et $g^{-1}(\mathscr{D}_2)$.

[001748]

Exercice 4857

Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \text{ et } J = \bigcap_{i>0, j>0}]-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j}[.$$

[001749]

Exercice 4858

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum. [001765]

Exercice 4859

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in|||}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente. [001768]

Exercice 4860

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{C}$ est aussi convexe. [001775]

Exercice 4861 *** I Topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geqslant 2$).
3. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?
4. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.
5. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
7. Propriétés topologiques de l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que la forme quadratique $(x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit définie positive ?
8. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
9. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [005842]

194 240.00 Géométrie affine dans le plan et dans l'espace

Exercice 4862

Soit P un plan muni d'un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs ccordonnées dans R.

1. Donner un vecteur directeur, la pente et des représentations cartésiennes et paramétriques des droites (AB) suivantes :
   (a) $A(2, 3)$ et $B(-1, 4)$
   (b) $A(-7, -2)$ et $B(-2, -5)$
   (c) $A(3, 3)$ et $B(3, 6)$.
2. Donner des représentations cartésiennes et paramétriques des droites passant par A et dirigées par $\vec{u}$ avec :
   (a) $A(2, 1)$ et $\vec{u}(-3, -1)$
   (b) $A(0, 1)$ et $\vec{u}(1, 2)$

(c) $A(-1,1)$ et $\vec{u}(1,0)$.

3. Donner des représentations paramétriques et cartésiennes (que l'on pourra déduire des paramétriques) des droites définies comme suit :
   (a) passant par le point $(0,4)$ et de pente 3,
   (b) passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe des x,
   (c) passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $D : 8x+4y=3$,
   (d) passant par le point $(1,0)$ et parallèle à la droite $D : x-y+5=0$.

[001956]

Exercice 4863

1. Les trois points A, B et C de P sont-ils alignés ? Si oui donner une équation cartésienne de la droite qui les contient.
   (a) $A(-3,3)$, $B(5,2)$ et $C(2,1)$,
   (b) $A(1,1)$, $B(-2,2)$ et $C(2,1)$,
   (c) $A(4,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(2,-2)$,
   (d) $A(2,-1)$, $B(1,-2)$ et $C(-3,4)$.
2. Dans les cas suivant, donner un vecteur directeur de D et déterminer si le point C appartient ou non à D
   (a) $(D) : 3x+5y+1=0$, $C(3,-2)$.
   (b) $(D) : \begin{cases} x=3+t \\ y=2-t \end{cases}$, $C(5,3)$.

[001957]

Exercice 4864

Dans l'exercice suivant, on considère des couples de deux droites D_1 et D_2 : on doit déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, on déterminera les coordonnées du point d'intersection, et si elles sont parallèles ou confondues on déterminera un vecteur directeur.

1. $(D_1) : 3x+5y-2=0$ et $(D_2) : x-2y+3=0$
2. $(D_1) : 2x-4y+1=0$ et $(D_2) : -5x+10y+3=0$
3. $(D_1) : \begin{cases} x=3+4t \\ y=2-t \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x=5-s \\ y=2+3s \end{cases}$
4. $(D_1) : \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x=3-4s \\ y=-1+6s \end{cases}$
5. $(D_1) : x-2y+3=0$ et $D_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \end{cases}$
6. $(D_1) : 3x-2y+1=0$ et $(D_2) : \begin{cases} x=1-4t \\ y=2-6t \end{cases}$

[001958]

Exercice 4865

On considère les deux droites du plan $D : 2x-3y+4=0$ et $D' : x+3y+1=0$. On considère le point A, intersection des deux droites et le point B de coordonnées $(3,8)$. Donner une équation de (AB). [001959]

Exercice 4866

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x+2y=3, (AC) : x+y=2, (BC) : 2x+3y=4$.

1. Donner les coordonnées des points A,B,C.
2. Donner les coordonnées des milieux A',B',C' de $(BC),(AC)$ et (AB) respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

[001960]

Exercice 4867 Médianes

On considère dans P trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A,\vec{AB},\vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

[001961]

Exercice 4868 Théorème de Menelaüs

Dans le triangle ABC, on considère trois points P,Q,R, sur les côtés $(BC),(AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A,B ou C. Montrer que P,Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

[001962]

Exercice 4869 Théorème de Pappus

Soient (A_1,A_2,A_3) et (B_1,B_2,B_3) deux systèmes de trois points alignés. Montrer que les points C_1, C_2 et C_3, intersections des droites (A_2B_3) et (A_3B_2), (A_3B_1) et (A_1B_3), (A_1B_2) et (A_2B_1) (que l'on suppose exister) sont alignés. [001963]

Exercice 4870 Théorème de Ceva

Dans le triangle ABC, on considère trois points P,Q,R, sur les droites $(BC),(AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A,B ou C. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

[001964]

Exercice 4871

Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe. Est-ce vrai pour l'union ? [001965]

Exercice 4872

Soient C et C' deux ensembles convexes d'un espace affine, montrer que

$$D = \left\{\frac{M+M'}{2} \mid (M,M') \in C\times C'\right\}$$

est convexe. [001966]

Exercice 4873

On appelle enveloppe convexe $co(A)$ d'une partie non vide A d'un espace affine E l'intersection des ensembles convexes contenant A ; c'est le plus petit ensemble convexe contenant A. Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A. Que sont $co(\{A,B\}), co(\{A,B,C\})$? [001967]

Exercice 4874

Un cône d'un espace vectoriel est une partie K telle que :

$$\forall x\in K, \forall t\geq 0, tx\in K.$$

Montrer qu'un cône est convexe si et seulement si il est stable par addition. [001968]

Exercice 4875

Trouver les parties C convexes de $\mathbb{R}^2$ telles que le complémentaire ${}^cC$ soit aussi convexe. [001969]

Exercice 4876

Soit E un espace affine de dimension n, et $(x_1,...,x_n)$ des points de E.On considère une combinaison convexe de points de A, sous ensemble de E :

$$x=\sum_{i=1}^{m} t_i x_i \text{ avec } \forall i \in \{1,...,m\} : t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{m} t_j = 1.$$

Montrer qu'on peut écrire :

$$x=\sum_{k=1}^{n+1} g_k x_k \text{ avec } \forall k \in \{1,...,n+1\} : g_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} g_k = 1.$$

Ainsi il suffit de $n+1$ points dans un espace de dimension n pour écrire une combinaison convexe. [001970]

Exercice 4877

Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédianes sont concourantes. [001971]

Exercice 4878

Soient A,B,C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$. [001972]

Exercice 4879

Soit $R_1 = (0,e_1,e_2,e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O^{'} = (1,0,0)$, $e_1^{'} = e_1+e_2$, $e_2^{'} = e_1-e_2$, $e_3^{'} = e_3$ et $R_2 = (0^{'},e_1^{'},e_2^{'},e_3^{'})$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1. [001973]

Exercice 4880

Soient $(D_i)_{i=1...4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère). [001974]

Exercice 4881

1. Soient $(D_i : u_i x+v_i y+h_i = 0)_{i=1...3}$ trois droites du plan affine. Montrer qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$
2. Soient $(D_1 : x+2y=1)$, $(D_2 : x+y=2)$, $(D_3 : 2x+y=3)$, $(D_4 : 3x+2y=1)$. Déterminer une équation de la droite D qui passe par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sans calculer ces points d'intersection.

[001975]

Exercice 4882

Soient A,B,C trois points non alignés d'un plan affine.

1. Soit f une application affine telle que $f(A)=A$, $f(B)=B$ et $f(C)=C$. Montrer que $f=id$.
2. Soient f et g affines telles que $f(A)=g(A)$, $f(B)=g(B)$ et $f(C)=g(C)$. Que peut-on dire ?
3. Soit f affine telle que $f(A)=B$, $f(B)=C$ et $f(C)=A$. Que peut-on dire ?

[001976]

Exercice 4883

Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que f est une translation ssi $\vec{f}=id$.
2. Montrer que si $\vec{f}=\lambda id$ où $\lambda \neq 1$ alors f est une homothétie (on montrera que f admet un point fixe).
3. On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des translations. Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-groupe du groupe affine.

4. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des homothéties bijectives. Montrer que $\mathscr{T} \cup \mathscr{H}$ est un sous-groupe du groupe affine.

[001977]

Exercice 4884

Soient f et g deux applications affines de E dans E telles que $\vec{f} = \vec{g}$. Montrer qu'il existe $u \in \vec{E}$ tel que $f = t_u \circ g$ où t_u est la translation de vecteur u. Que peut-on dire si de plus il existe $M \in E$ tel que $f(M) = g(M)$?

[001978]

Exercice 4885

Reconnaître les application affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+2y-2z-2 \\ -3y+2z+6 \\ -4y+3z+6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2}-\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \\ -x+\frac{3y}{2}-\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \\ -x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

[001979]

Exercice 4886

Soit E un espace affine, f une application affine de E dans E et

$$F = \{M \in E / f(M) = M\}.$$

On suppose que $F \neq \emptyset$.

1. Montrer que $\vec{F} = \ker(\vec{f} - id)$.
2. On suppose que $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$. Soit s la projection affine sur F parallèlement à $\ker(\vec{f})$. Montrer que $f = s$.
3. Faire la même chose si $\vec{f} \circ \vec{f} = id$.

[001980]

Exercice 4887

Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que si $f \circ f = f$ alors f est une projection affine.
2. Montrer que si $f \circ f = id$ alors f est une symétrie affine.

[001981]

Exercice 4888

On considère les droites $D : x+2y = 5$ et $D' : 3x-y = 1$ et on note A l'intersection des deux droites et B le point de coordonnées $(5,2)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à D passant par B.
3. Donner une équation cartésienne de la parallèle à D' passant par B.
4. Soit C le point de coordonnées $(2,-7)$). Donner une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[B,C]$. Δ est-elle parallèle à D ? Et à D' ?

[001991]

Exercice 4889

1. On considère la famille des droites $D_\lambda : x+\lambda y+1 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.
   (b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x-3y+1 = 0$? Si oui donner des équations de ces droites.
2. On considère la famille de droites $D_m : (2m-1)x+(3-m)y+m+1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
   Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $(\Delta) : x+y-1 = 0$? Si oui, laquelle ?

[001992]

Exercice 4890

On considère les trois points de P : $A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

1. Dessiner le triangle ABC puis calculer son aire.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G de ABC.
3. Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

[001993]

Exercice 4891

1. Calculer les angles :
   (a) entre les vecteurs $\vec{u}_1(\sqrt{3},2)$ et $\vec{v}_1(1,3\sqrt{3})$,
   (b) entre les vecteurs $\vec{u}_2(1,\sqrt{2})$ et $\vec{v}_2(\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+2)$,
   (c) du triangle de sommets $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
2. Calculer la distance du point A à la droite D :
   (a) $A(1,1)$ et $D : 2x+y-1=0$
   (b) $A(2,-1)$ et $D : 3x-2y+4=0$
   (c) $A(3,3)$ et $D : -x+3y+2=0$.
3. Trouver les bissectrices de :
   (a) $D : 5x-12y+7=0$ et $D' : 3x+4y-7=0$,
   (b) $D : x-3y+5=0$ et$D' : 3x-y-1=0$.

[001994]

Exercice 4892

Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer l'expression analytique dans ce repère de la réflexion d'axe $x+y=1$. [001995]

Exercice 4893

Soit G un sous-groupe fini de l'ensemble des isométries du plan. Montrer que G ne peut pas contenir de translation non triviale. [001996]

Exercice 4894

On considère dans le plan les deux droites $(D : 3x+y=5)$ et
$(D' : x-2y+3=0)$. Quel est l'angle entre ces deux droites ? [001997]

Exercice 4895

Soit C un cercle de centre $I=(x_0,y_0)$ et de rayon R et $(D : ax+by+c=0)$. En paramétrant D, montrer que D est tangente à C (*i.e.* $D\cap C$ est un singleton) ssi $d(I,D)=R$. [001998]

Exercice 4896

Soient A et B deux points du plan et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\alpha$. [001999]

Exercice 4897

Soient A,B,C les sommets d'un triangle équilatéral de coté 1. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA^2+MB^2+MC^2=2$. [002000]

Exercice 4898

Soient A et B deux points du plan et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA = kMB$. [002001]

Exercice 4899

Quelle est l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x-4y \\ -4x+3y-2 \end{pmatrix} \end{cases}$? [002002]

Exercice 4900

Soit $X = \{A,B,C,D\}$ les sommets d'un carré du plan et $G = \{f \in I_2 / f(X) = X\}$. Montrer que G est un sous-groupe de I_2. Montrer que si $f \in G$ alors $f(O) = O$ où O est l'isobarycentre de A,B,C,D. En déduire les éléments de G. [002003]

Exercice 4901

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z, z^2, z^4 soient alignés. [002004]

Exercice 4902

Si a et b sont les affixes de deux sommets opposés d'un carré, calculer les affixes des deux autres. [002005]

Exercice 4903

Soit O,A,B un triangle rectangle en O. A toute droite D issue de O on associe le cercle de diamètre $A^{'}B^{'}$ où $A^{'}$ et $B^{'}$ sont les projetés orthogonaux de A et B sur D. Montrer que tous les cercles passent par un même point fixe (on pourra utiliser une similitude...). [002006]

Exercice 4904

Pour a,b,c trois nombres complexes tels que $b \neq c$, on note $V(a,b,c) = \frac{c-a}{c-b}$. Soient z_1,z_2,z_3,z_4 quatre nombres complexes distincts. Montrer que les images de ces nombres complexes sont alignées ou cocycliques ssi $\frac{V(z_1,z_2,z_3)}{V(z_1,z_2,z_4)} \in \mathbb{R}$. [002007]

Exercice 4905

Soit $ABCD$ un carré direct et M un point de la droite (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N. On note I le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu des points I lorsque M décrit la droite (DC). [002008]

Exercice 4906

Soient A,B,C,D quatre points distincts du plan tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Montrer que le centre de la similitude transformant A en C et B en D est aussi le centre de celle transformant A en B et C en D. [002009]

Exercice 4907

Les quatre points A, B, C et D de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner une équation cartésienne du plan qui les contient :

1. $A(1,2,2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(3,4,4)$ et $D(-2,3,1)$.
2. $A(0,1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(1,1,-1)$ et $D(1,2,2)$.
3. $A(-1,2,4)$, $B(3,-3,0)$, $C(1,3,4)$ et $D(5,1,-6)$.
4. $A(2,-1,0)$, $B(0,-4,5)$, $C(4,-13,13)$ et $D(-4,5,-3)$.

[002010]

Exercice 4908

1. Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.

   (a) A, B et C sont des points de (P)

      i. $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,1,0)$.

      ii. $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$ et $C(-1,2,4)$.

      iii. $A(5,0,-1)$, $B(1,3,-2)$ et $C(-2,4,5)$.

   (b) A est un point de (P), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P)

      i. $A(1,2,1)$, $\vec{u}(4,0,3)$ et $\vec{v}(1,3,-1)$.

      ii. $A(1,0,2)$, $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(-1,4,5)$.

   (c) A est un point de (P), D est une droite contenue dans (P)

      i. $A(4,1,-3)$ et $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0 \end{cases}$

      ii. $A(1,1,0)$ et $(D) : \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{cases}$

   (d) D et D' sont des droites contenues dans (P)

      i. $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x-y-z+5=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

      ii. $(D) : \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x+y-3z+7=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{cases}$

2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :
$\begin{cases} x=2+s+2t \\ y=2+2s+t \\ z=1-s-t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=1+3u-v \\ y=3+3u+v \\ z=1-2u \end{cases}$

[002011]

Exercice 4909

Les plans suivants sont-ils parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de la droite $(D)=(P)\cap(P')$.

1. $(P) : 5x-y-1=0$ et $(P') : z=3$.
2. $(P) : x+y+z+1=0$ et $(P') : 2x-y+3z+2=0$.
3. $(P) : 2x-z+1=0$ et $(P') : 4x-3y+2z+5=0$.
4. $(P) : 4x-6y+8z-1=0$ et $(P') : -6x+12y-9z+11=0$.

[002012]

Exercice 4910

Quelle est la nature de l'intersection des trois plans suivants ? Si c'est un point en donner les coordonnées, si c'est une droite en donner un vecteur directeur.

1. $(P) : z=1$, $(P') : x-y-2=0$ et $(P") : 4x-2y+z+2=0$.
2. $(P) : 4x-2y+3z+5=0$, $(P') : 3x+y-z+2=0$ et $(P") : x-y+z+1=0$.
3. $(P) : 4x-2y+10z-4=0$, $(P') : -10x+5y-25z+13=0$ et $(P") : x+y-z+1=0$.
4. $(P) : 3x-y+2z-5=0$, $(P') : x-y+3z-7=0$ et $(P") : 4x+2y-z+1=0$.
5. $(P) : x-y+2z-1=0$, $(P') : 2x+y+z+3=0$ et $(P") : x-4y+5z-6=0$.
6. $(P) : x-y+2z-1=0$, $(P') : 2x+y-z+1=0$ et $(P") : x+5y-8z+2=0$.

[002013]

Exercice 4911

Les droites suivantes sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur.

1. $(D) : \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

2. $(D) : \begin{cases} x = 1-2t \\ y = t+2 \\ z = 3t+1 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -t+2 \\ z = 2t \end{cases}$

[002014]

Exercice 4912

Dans chacun des cas suivants dire si la droite (D) et le plan (P) sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

1. $(D) : \begin{cases} 5x-3y+2z-5 = 0 \\ 2x-y-z-1 = 0 \end{cases}$ et $(P) : 4x-3y+7z-7 = 0$.
2. $(D) : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-3t \\ z = 2-2t \end{cases}$ et $(P) : -3x+2y+3z-5 = 0$.

[002015]

Exercice 4913

On considère les cinq points suivants : $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$, $D(1,0,4)$ et $E(-1,1,1)$.

1. Ces quatre points sont-ils coplanaires ?
2. Déterminer la nature du triangle ABC. A, B et C sont-ils alignés, si non donner une équation catésienne du plan P qui les contient.
3. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C et D.
4. Montrer que O, D et G sont alignés et que la droite OD est perpendiculaire à P.

[002016]

Exercice 4914

Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites concourrantes en Ω et soient P, P' et P'' trois plans tels que aucun ne contient aucune des 3 droites ci dessus. On peut alors définir les 9 points d'intersections : P coupe D_1, D_2, D_3 en A, B, C ; P' coupe D_1, D_2, D_3 en A', B', C' ; P' coupe D_1 D_2, D_3 en A'', B'', C'' ;

On considère aussi les intersections suivantes : $I = (AB')\cap(A'B)$, $J = (AC')\cap(A'C)$,$K = (BC')\cap(B'C)$.

Montrer que les droites $(A''K)$, $B''J)$ et $(C''I)$ sont parallèlles ou concourrantes. (*Indication : utiliser un bon repère affine*). [002017]

Exercice 4915

On considère les quatre points suivants : $A(2,0,0)$, $B(-1,\sqrt{3},0)$, $C(-1,-\sqrt{3},0)$, $D(0,0,4)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite $(ABC)\cap(ADE)$. [002018]

Exercice 4916

Donner une condition sur m pour que les trois plans suivants se coupent sur une même droite. $(P) : x+my-z+1 = 0$, $(P') : (m+1)x+3y+4z-2 = 0$ et $(P") : y+(2m+4)z-(2m+2) = 0$. [002019]

Exercice 4917

On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x+(2m-1)y+mz = 3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :
   (a) $A(1,1,1) \in P_m$
   (b) $B(-1,-2,6) \in P_m$
   (c) $C(-1,0,1) \in P_m$
   (d) $\vec{v}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de P
   (e) $\vec{n}(0,1,0)$ est normal à P.
2. Montrer qu'il existe un unique point R appartenant à tous les plans P_m.

[002020]

Exercice 4918

1. Déterminer la distance du point A au plan (P)
   (a) $A(1,1,1)$ et $(P): x+y+z-1=0$
   (b) $A(1,0,2)$ et $(P): 2x+y+z+4=0$.
   (c) $A(3,2,1)$ et $(P): -x+5y-4z+2=0$.
   (d) $A(4,5,2)$ et $(P): 2x-y+z=0$.
2. Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ à la droite $(D): \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right.$

[002021]

Exercice 4919

On considère les deux droites $(D): \left\{\begin{array}{l} y-z=3 \\ -x-y+2=0 \end{array}\right.$ et $(\Delta): \left\{\begin{array}{l} -x+3z=1 \\ -x-3y=2 \end{array}\right.$.

1. Donner un vecteur directeur de D et de Δ.
2. Donner une équation paramétrique de Δ.
3. On fixe un point M_α de Δ dépendant du paramètre α où α est l'abscisse de point M_α. Donner une équation du plan P_α passant par M_α et contenant D.
4. Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à Δ ? Pour quelle valeur α_0 de α est il obtenu ? Donner une équation de ce plan. Donner les coordonnées de M_{α_0}.

[002022]

Exercice 4920

On se donne 2 droites D_1 et D_2 ayant comme vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

1. Perpendiculaire commune à ces deux droites.
   (a) On suppose que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires et on note $\vec{n} := \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.
      i. Montrer que le plan P_1 contenant D_1 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur et le plan P_2 contenant D_2 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur se coupent en une droite Δ.
      ii. Montrer que Δ est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 (c'est à dire Δ coupe D_1 et D_2, et est orthogonale à D_1 et à D_2).
      iii. Montrer que Δ est la seule perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
   (b) Comment construire Δ dans le cas où D_1 et D_2 sont parallèlles ?
2. Distance entre ces deux droites.
   Soit $H_1 := D_1 \cap \Delta$ et $H_2 := D_2 \cap \Delta$.
   Montrer que pour tout $A_1 \in D_1$ et tout $A_2 \in D_2$, on a $d(A_1,A_2) \geq d(H_1,H_2)$.
   $d(H_1,H_2)$ est appelée *distance entre les deux droites D_1 et D_2*.
3. Donner des équations cartésiennes pour Δ et calculer la distance entre les deux droites D_1 et D_2 dans le cas suivant :
   (a) $(D_1): \left\{\begin{array}{l} x-y-z+4=0 \\ -x-2y-3z+9=0 \end{array}\right.$ et $(D_2): \left\{\begin{array}{l} -x+2y+z+2=0 \\ -2x+4y-z+1=0 \end{array}\right.$
   (b) $(D_1): \left\{\begin{array}{l} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{array}\right.$ et $(D_2): \left\{\begin{array}{l} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{array}\right.$
   (c) $(D_1): \left\{\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=t+2 \\ z=3t+1 \end{array}\right.$ et $(D_2): \left\{\begin{array}{l} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{array}\right.$
   (d) $(D_1): \left\{\begin{array}{l} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{array}\right.$ et $(D_2): \left\{\begin{array}{l} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{array}\right.$

[002023]

Exercice 4921

1. Déterminer les plans bissecteurs de :
   $P : x+y+z+3=0$ et $P' : 2x+y+2z=1$
   $Q : 5x+3y-4z=8$ et $Q' : 4x-5y-3z=2$.
2. Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants des trois axes de coordonnées.
3. On considère la droite D d'équation paramétrique $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=1 \\ z=-t-1 \end{cases}$
   Donner une équation des deux plans P et P' contenant D à une distance de 1 de l'origine (point O de coordonnées $(0,0,0)$).

[002024]

Exercice 4922

Déterminer l'expression analytique de la réflexion s de plan $x+y-z=1$. Quelle est l'image par s du plan $x+2y-3z+1=0$?
[002025]

Exercice 4923

Déterminer la distance du point $M=(1,2,3)$ aux droites

$$D \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{et } \Delta \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \end{cases}$$

[002026]

Exercice 4924

Soit deux plans $\begin{cases} \pi : & ux+vy+wz+h &= 0 \\ \pi' : & u'x+v'y+w'z+h' &= 0 \end{cases}$.

1. Montrer que si π et π' sont sécants, tout plan passant par leur droite d'intersection D a une équation du type
   $$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$
   et réciproquement, tout plan ayant une équation de ce type, (pour un couple (λ,μ) donné) passe par D.
2. Si π et π' sont parallèles, que représente l'ensemble des plans d'équation :
   $$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$

[002027]

Exercice 4925

Écrire l'équation du plan passant par la droite $\begin{cases} 3x+2y+5z+6 &= 0 \\ x+4y+3z+4 &= 0 \end{cases}$ et parallèle à la droite $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}$. [002028]

Exercice 4926

Soit la droite d'équations $\begin{cases} 3x-2y-z+4 &= 0 \\ x-4y-3z-2 &= 0 \end{cases}$. Trouver sa projection sur le plan $5x+2y+2z-7=0$. [002029]

Exercice 4927

Soit les droites D et D' non coplanaires :

$$(D) \begin{cases} x-y+z+1 &= 0 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') \begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 2x-2y-2z-1 &= 0 \end{cases}$$

Trouver des équations de leur perpendiculaire commune. [002030]

Exercice 4928

Soit ABC un triangle équilatéral de côté unité et T_0 son intérieur. On considère les figures géométriques T_n obtenues par récurrence de la manière suivante : sur chaque côté MN de T_{n-1}, on ajoute l'intérieur d'un triangle équilatéral PQR, où P et Q sont sur le segment $[MN]$, aux tiers de sa longueur, et R est extérieur à T_{n-1}. Finalement on définit le sous-ensemble du plan K par

$$K = \bigcup_{n\geq 0} T_n.$$

1. Faire un dessin resprésentant T_0, T_1, T_2...
2. Donner l'aire de T_n sous forme de série. Quelle est l'aire de K ?
3. Mêmes questions avec le périmètre, puis le diamètre de T_n et K.

[002698]

Exercice 4929 **I

(ABC) est un vrai triangle.

1. Montrer que ses médianes sont concourantes en G l'isobarycentre de (ABC).
2. Montrer que ses médiatrices sont concourantes en O le centre du cercle circonscrit à (ABC).
3. Montrer que ses hauteurs sont concourantes en H l'orthocentre de (ABC) puis montrer la relation d'EULER : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (considérer l'homothétie de centre G et de rapport -2).
4. Montrer que ses bissectrices (intérieures) sont concourantes en I le centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [005195]

Exercice 4930 **IT

On donne les points $A(1,2)$, $B(-2,1)$ et $C(0,4)$.

1. Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près.
2. Déterminer l'aire du triangle (ABC).
3. Déterminer son isobarycentre, son orthocentre, le centre de son cercle circonscrit puis une équation de ce cercle.
4. Déterminer une équation des bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$ puis de la bissectrice intérieure à l'angle $\widehat{A}$.

Correction ▼ [005196]

Exercice 4931 **

Soit (E) l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5=0$. Montrer que (E) est une réunion de deux droites. Déterminer l'aire du parallélogramme formé par ces deux droites et les parallèles à ces deux droites passant par O.

Correction ▼ [005199]

Exercice 4932 **

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y=2x+1$, $y=2x+7$ et $y=-\frac{1}{2}x$.

Correction ▼ [005200]

Exercice 4933 ***I

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, puis $A_1, A_2, ..., A_n$ n points du plan. Existe-t-il n points $B_1, B_2, ..., B_n$ tels que, pour $i \in \{1,...,n\}$, A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ (avec la convention $B_{n+1} = B_1$) ? (Utiliser l'exercice précédent.)

Correction ▼ [005202]

Exercice 4934 *T

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

1. Déterminer une équation de la tangente au point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(2,-2+\sqrt{3})$.
2. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2.

Correction ▼ [005203]

Exercice 4935 *** Théorème de MÉNÉLAÜS

Soient A, B et C trois points non alignés. Soient M, N et P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et distincts de A, B et C. Montrer que :

$$(M,\ N,\ \text{et } P \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1\right).$$

(Trouver une démonstration utilisant le théorème de THALÈS, une utilisant la composée de deux homothéties et une utilisant des coordonnées.)

Correction ▼ [005204]

Exercice 4936 ** Faisceaux de droites

1. Soient (D) et (D') deux droites sécantes d'équation respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, $(a,b)\neq(0,0)$, $(a',b')\neq(0,0)$. Soit (Δ) une droite. Montrer que (D), (D') et (Δ) sont concourantes si et seulement si il existe (Δ) a une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.
2. Equation cartésienne de la droite passant par le point $(1,0)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives $5x+7y+1=0$ et $-3x+2y+1=0$
3. Pour $m\in\mathbb{R}$, on considère (D_m) la droite d'équation $(2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0$. Montrer que les droites (D_m) sont concourantes en un point A que l'on précisera. Toute droite passant par A est-elle une droite (D_m) ?

Correction ▼ [005208]

Exercice 4937 **

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $(D)\left\{\begin{array}{l} x-z-a=0\\ y+3z+1=0\end{array}\right.$ et $(D')\left\{\begin{array}{l} x+2y+z-2b=0\\ 3x+3y+2z-7=0\end{array}\right.$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Correction ▼ [005510]

Exercice 4938 **

Système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) parallèle à la droite (D) : $2x=3y=6z$ et sécante aux droites $(D_1): x=z-4=0$ et $(D_2): y=z+4=0$.

Correction ▼ [005511]

Exercice 4939 ***

Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites $(D_1)\ x-1=y=0$, $(D_2): y-1=z=0$, $(D_3): z-1=x=0$ et $(D_4): x=y=-6z$.

Correction ▼ [005512]

Exercice 4940 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

Correction ▼ [005513]

Exercice 4941 **T

Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de M à la droite $(D)\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0\\ 2x+y+5z=2\end{array}\right.$. En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

Correction ▼ [005514]

Exercice 4942 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé, soient $(D)\left\{\begin{array}{l}x+y+z+1=0\\2x+y+5z=2\end{array}\right.$ et $(D')\left\{\begin{array}{l}x+y+z=2\\2x+y-5z=3\end{array}\right.$. Déterminer la distance de (D) à (D') puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Correction ▼ [005515]

Exercice 4943 **

Montrer que les plans $(P_1): z-2y=5$, $(P_2): 2x-3z=0$ et $(P_3)\ :\ 3y-x=0$ admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

Correction ▼ [005516]

Exercice 4944 *T

Angle des plans $x+2y+2z=3$ et $x+y=0$.

Correction ▼ [005517]

Exercice 4945 **T

Soient $(P_1)\ :\ 4x+4y-7z-1=0$ et $(P_2)\ :\ 8x-4y+z+7=0$. Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de (P_1) et (P_2).

Correction ▼ [005518]

Exercice 4946 **T

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') : $(D)\left\{\begin{array}{l}x+y-3z+4=0\\2x-z+1=0\end{array}\right.$ et $(D')\left\{\begin{array}{l}x=z-1\\y=z-1\end{array}\right.$.

Correction ▼ [005519]

Exercice 4947 **I

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Correction ▼ [005521]

Exercice 4948 **T

Déterminer la distance de l'origine O à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{\begin{array}{l}x-y-z=0\\x+2y-z=10\end{array}\right.$.

Correction ▼ [005522]

195 240.01 Sous-espaces affines

Exercice 4949 Ensi Physique P 94

Soient I,J,K trois points du plan. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés :

a) I, J, K sont alignés.

b) Il existe M tel que $\det(\vec{MI},\vec{MJ})+\det(\vec{MJ},\vec{MK})+\det(\vec{MK},\vec{MI})=0$.

c) Pour tout point M, on a $\det(\vec{MI},\vec{MJ})+\det(\vec{MJ},\vec{MK})+\det(\vec{MK},\vec{MI})=0$.

Correction ▼ [004859]

Exercice 4950 Faisceau de plans

On considère deux plans non parallèles de $\mathscr{E}_3$ ayant pour équation dans un repère $\mathscr{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\begin{cases} P: & ax+by+cz+d=0 \\ P': & a'x+b'y+c'z+d'=0. \end{cases}$$

Soit $D = P \cap P'$. Montrer qu'un plan Q contient D si et seulement s'il a pour équation dans $\mathscr{R}$:

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.

Correction ▼ [004860]

Exercice 4951 Équation d'un plan

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : $A : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D : \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x+y-3z=-1. \end{cases}$

Donner l'équation cartésienne du plan passant par A et D.

Correction ▼ [004861]

Exercice 4952 Droites coplanaires

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : $D : \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a. \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de a, D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Donner alors l'équation du plan contenant D et D'.

Correction ▼ [004862]

Exercice 4953 Droites non coplanaires

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, et D, D', D'' trois droites parallèles à un même plan $\mathscr{P}$, mais deux à deux non coplanaires.

1. Montrer que par tout point A de D, il passe une unique droite Δ_A rencontrant D' et D''.
2. Montrer que les droites Δ_A sont toutes parallèles à un même plan $\mathscr{Q}$.

Correction ▼ [004863]

Exercice 4954 Droites concourantes

Dans $\mathscr{E}_2$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les trois droites : $\begin{cases} D: & \text{ax + by = c} \\ D': & \text{a'x + b'y = c'} \\ D'': & \text{a"x + b"y = c".} \end{cases}$

Montrer que D, D', D'' sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$ [004864]

Exercice 4955 Droites concourantes

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et $M \in (ABC)$. On note I, J les projections de M sur (AB) et (CD) parallèlement à (AD), et K, L les projections de M sur (AD) et (BC) parallèlement à (AB).

Montrer que les droites (IK), (JL), (BD) sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004865]

Exercice 4956 Équation d'une droite variable

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère de $\mathscr{E}_2$, et $A : \binom{1}{0}$, $B : \binom{0}{1}$, $C : \binom{0}{2}$.

Pour $m \in \mathbb{R}$, on construit les droites $D : y = mx$ et $D' : y = -mx$, puis $M \in D \cap (AB)$, et $M' \in D' \cap (AC)$ (si possible).

Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe (= indépendant de m).

Correction ▼ [004866]

Exercice 4957 Dimensions

Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine $\mathscr{E}$. On note $\mathscr{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$. Déterminer $\dim(\mathscr{H})$.

Correction ▼ [004867]

Exercice 4958 Dimensions

Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, deux sous-espaces affines disjoints de dimensions f, g d'un espace affine $\mathscr{E}$ avec $f \leq g$.

Montrer que $\mathscr{F} \,//\, \mathscr{G}$ si et seulement s'il existe un sous-espace affine $\mathscr{H}$ de dimension $g+1$ contenant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. [004868]

Exercice 4959 Centrale PSI 1997

Soit la famille de droites :

$$(D_\lambda) \quad \begin{cases} x = \lambda + \lambda^2 z \\ y = \lambda^2 + \lambda z. \end{cases}$$

1. En écrivant leurs équations sous la forme $\begin{cases} z = a \\ ux + vy + h = 0 \end{cases}$ montrer qu'il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 horizontales coupant toutes les droites D_λ.
2. Trouver les équations des plans passant par $M(\lambda, \lambda^2, 0)$ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2.
3. Retrouver l'ensemble (D_λ).

Correction ▼ [004869]

Exercice 4960 *T

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer un repère de la droite $(D) \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{array} \right.$.

Correction ▼ [005505]

Exercice 4961 *T

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de $(D) \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 7 \end{array} \right.$ et $(P) \ : \ x + 3y - 5z + 2 = 0$.

Correction ▼ [005506]

Exercice 4962 **

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer le réel a pour que les droites $\left\{ \begin{array}{l} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = a \end{array} \right.$ soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

Correction ▼ [005507]

Exercice 4963 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$.

Correction ▼ [005508]

196 240.02 Applications affines

Exercice 4964 $f^p = \mathrm{id} => f$ a un point fixe

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine telle qu'il existe $p \in |||^*$ tel que $f^p = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Montrer que f admet au moins un point fixe. [004870]

Exercice 4965 1 non valeur propre $\Rightarrow$ un pt fixe unique

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$. [004871]

Exercice 4966 Expressions analytiques

On fixe un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Déterminer les expressions analytiques des applications suivantes :

1. Symétrie de base le plan d'équation $x + 2y + z = 1$ et de direction $\mathrm{vect}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.
2. Symétrie de base la droite d'équations $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+z+2=0, \end{cases}$
   de direction le plan vectoriel d'équation $3x + 3y - 2z = 0$.

Correction ▼ [004872]

Exercice 4967 Expression analytique

On fixe un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Reconaître l' application ayant l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8. \end{cases}$$

(chercher les points fixes de f et étudier $\overrightarrow{MM'}$)

Correction ▼ [004873]

Exercice 4968 Permutation circulaire de 4 points

Dans un espace affine $\mathscr{E}$, on considère quatre points A, B, C, D. Étudier l'existence d'une application affine f telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = A$.

Correction ▼ [004874]

Exercice 4969 $f^3 = \mathrm{id}$

Soit $\mathscr{P}$ un plan, et $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une application affine telle que $f^3 = \mathrm{id}$, avec $f \neq \mathrm{id}$.

1. Montrer que si $A \neq f(A)$, alors $A, f(A), f^2(A)$ sont non alignés.
2. En déduire que f est le produit de deux symétries.

[004875]

Exercice 4970 Produit d'affinités

Soit $\mathscr{P}$ un plan, $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$, et f, g deux affinités de base $\mathscr{D}$, de directions $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta}'$ et de rapports λ, μ.

Étudier la nature de $f \circ g$.

Correction ▼ [004876]

Exercice 4971 Barycentre de projections

Soient π, π' deux projections dans un espace affine $\mathscr{E}$ ayant même direction $\vec{\mathscr{F}}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note π_λ l'application : $M \longmapsto \mathrm{Bar}(\pi(M) : \lambda, \pi'(M) : 1-\lambda)$.

Montrer que π_λ est encore une projection de direction $\vec{\mathscr{F}}$. [004877]

Exercice 4972 Symétrie-translation

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine. On dit que f est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

1. Soient s une symétrie de base $\mathscr{B}$ de direction $\vec{\mathscr{F}}$, et t une translation de vecteur $\vec{u}$.
   Montrer que $s \circ t = t \circ s \iff \vec{u} \in \vec{\mathscr{B}}$.
2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s,t) tel que $f = s \circ t = t \circ s$ est unique.
3. Soit f affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.
4. En déduire que le produit d'une symétrie par une translation quelconques est une symétrie-translation.
5. AN : décomposer l'application f d'expression analytique dans un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

Correction ▼ [004878]

Exercice 4973 Transitivité des homothéties-translations

Dans un espace affine $\mathscr{E}$ on donne quatre points P, Q, P', Q' avec $P \neq Q$. Existe-t-il une homothétie-translation f telle que $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$?

Correction ▼ [004879]

Exercice 4974 Usage d'applications affines

On considère dans l'espace deux plans parallèles distincts $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $A, B, C \in \mathscr{P}$, $O \notin \mathscr{P}$, et on construit les points suivants :

– A', B', C' : les intersections avec $\mathscr{P}'$ des droites (OA), (OB), (OC).

– α, β, γ : les milieux des segments $[B,C]$, $[C,A]$, $[A,B]$.

Montrer que les droites $(A'\alpha)$, $(B'\beta)$, $(C'\gamma)$ sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004880]

Exercice 4975 Usage d'applications affines

Soient $A_1, \dots, A_n$ n points de $\mathscr{E}$.

Étudier l'existence de points $B_1, \dots, B_n$ tels que $A_i = \mathrm{mil}(B_i, B_{i+1})$ $(A_n = \mathrm{mil}(B_n, B_1))$. [004881]

Exercice 4976 Projection stéréographique

Dans l'espace, on considère un point O et un plan $\mathscr{P}$ ne passant pas par O. On définit l'application $f : M \longmapsto M'$ où M' est le point intersection de $\mathscr{P}$ et (OM). (Projection stéréographique sur $\mathscr{P}$ de pôle O)

1. Est-ce que f est affine ?
2. Etudier l'image par f d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe.

[004882]

Exercice 4977 Caractérisation des produits de symétries

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine.

Montrer que f est un produit de symétries si et seulement si $\det(\vec{f}) = \pm 1$. [004883]

Exercice 4978 Points dans l'espace

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et A,B,C non alignés. Soient G,G' les isobarycentres des triangles ABC, $A'B'C'$. CNS pour que O,G,G' soient alignés ?

Correction ▼ [004885]

Exercice 4979 Polygone des milieux

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

(Écrire un sommet de P_k comme barycentre de $A_1,\dots,A_n$)

Correction ▼ [004886]

Exercice 4980 Isobarycentre de tous les points sauf un

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Correction ▼ [004887]

Exercice 4981 Suite récurente

Soient A_0,A_1,A_2 trois points donnés. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall\, k \geq 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Correction ▼ [004888]

Exercice 4982 Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A,B,C.

1. Montrer que P,Q,R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. Dans ce cas, montrer que $P' = \mathrm{mil}(P,C)$, $Q' = \mathrm{mil}(Q,A)$, et $R' = \mathrm{mil}(R,B)$ sont aussi alignés.

[004889]

Exercice 4983 Théorème de Céva

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A,B,C. Démontrer que les droites (AQ), (BR), (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Exercice 4984 Droites parallèles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les parallèles à (AB), (BC), (CA) passant respectivement par C',A',B' soient concourantes. Montrer qu'il en est de même pour les parallèles à $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ passant par C,A,B.

[004891]

Exercice 4985 Points aux tiers des côtés

Soit ABC un triangle, $A_1 = \mathrm{Bar}(B:2, C:1)$, $B_1 = \mathrm{Bar}(C:2, A:1)$ et $C_1 = \mathrm{Bar}(A:2, B:1)$.

On note A_2, B_2, C_2 les points d'intersection des droites (AA_1), (BB_1), et (CC_1).

1. Montrer que A_2 est le milieu de $[B, B_2]$.
2. Comparer les surfaces des triangles ABC et $A_2B_2C_2$.

Correction ▼ [004892]

Exercice 4986 Symétriques d'un point par rapport aux milieux des cotés

Soit un triangle ABC, A', B', C', les milieux des côtés, et M un point du plan (ABC) de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

1. Chercher les coordonnées barycentriques de P, Q, R symétriques de M par rapport aux points A', B', C'.
2. Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes en un point N.
3. Montrer que N est le milieu de $[A, P]$, $[B, Q]$, $[C, R]$.
4. Reconnaître l'application $M \mapsto N$.

Correction ▼ [004893]

Exercice 4987 Parallélogrammes

Dans le plan, on considère :

– trois points non alignés A, B, C.

– trois points alignés P, Q, R avec $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$.

On construit les points I, J, K de sorte que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ soient des parallélogrammes.

Montrer que I, J, K sont alignés.

Correction ▼ [004894]

Exercice 4988 Projections en cascade

Soient A, B, C trois points non alignés et $M_1 \in (AB)$. On construit les points M_2, M_3, M_4 de la manière suivante :

– M_2 est le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AC).

– M_3 est le projeté de M_2 sur (AC) parallèlement à (AB).

– M_4 est le projeté de M_3 sur (AB) parallèlement à (BC).

On recommence ensuite les mêmes constructions à partir de M_4, ce qui donne les points M_5, M_6, M_7.

Montrer que $M_7 = M_1$.

Correction ▼ [004895]

Exercice 4989 Caractérisation du barycentre par les surfaces

Soit ABC un triangle, et $M \in (ABC)$. On note α, β, γ les aires des triangles MBC, MCA, MAB.

1. On suppose que M est dans l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$.
   Montrer que : $(\alpha = \beta = \gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.
2. Quels sont tous les points du plan (ABC) tels que $\alpha = \beta = \gamma$?

Correction ▼ [004896]

Exercice 4990 Coord. barycentriques du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overrightarrow{\vec{AB}, \vec{AC}})$, $\beta \equiv (\overrightarrow{\vec{BC}, \vec{BA}})$, $\gamma \equiv (\overrightarrow{\vec{CA}, \vec{CB}})$.

1. Montrer que pour tout point M du cercle (ABC), on a :
$$a\cos\alpha MA^2 + b\cos\beta MB^2 + c\cos\gamma MC^2 = abc.$$
2. En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle (ABC).

[004897]

Exercice 4991 Cercle inscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Soit A' le pied de la bissectrice intérieure issue de A. Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de I, centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [004898]

197 240.03 Barycentre

Exercice 4992 Équation barycentrique d'une droite

Soit (A,B,C) une base affine de $\mathscr{E}_2$, et M,M',M'' trois points de coordonnées barycentriques (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$.

Montrer que M,M',M'' sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$. [004884]

Exercice 4993 Points dans l'espace

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et A,B,C non alignés. Soient G,G' les isobarycentres des triangles ABC, $A'B'C'$. CNS pour que O,G,G' soient alignés ?

Correction ▼ [004885]

Exercice 4994 Polygone des milieux

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

(Écrire un sommet de P_k comme barycentre de $A_1,\dots,A_n$)

Correction ▼ [004886]

Exercice 4995 Isobarycentre de tous les points sauf un

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Correction ▼ [004887]

Exercice 4996 Suite récurente

Soient A_0,A_1,A_2 trois points donnés. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall\, k \geq 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Correction ▼ [004888]

198 240.04 Propriétés des triangles

Exercice 4997 Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A,B,C.

1. Montrer que P,Q,R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. Dans ce cas, montrer que $P' = \text{mil}(P,C)$, $Q' = \text{mil}(Q,A)$, et $R' = \text{mil}(R,B)$ sont aussi alignés.

[004889]

Exercice 4998 Théorème de Céva

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A,B,C. Démontrer que les droites (AQ), (BR), (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Exercice 4999 Droites parallèles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les parallèles à (AB), (BC), (CA) passant respectivement par C',A',B' soient concourantes. Montrer qu'il en est de même pour les parallèles à $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ passant par C,A,B.

[004891]

Exercice 5000 Points aux tiers des côtés

Soit ABC un triangle, $A_1 = \text{Bar}(B:2,C:1)$, $B_1 = \text{Bar}(C:2,A:1)$ et $C_1 = \text{Bar}(A:2,B:1)$.

On note A_2,B_2,C_2 les points d'intersection des droites (AA_1), (BB_1), et (CC_1).

1. Montrer que A_2 est le milieu de $[B,B_2]$.
2. Comparer les surfaces des triangles ABC et $A_2B_2C_2$.

Correction ▼ [004892]

Exercice 5001 Symétriques d'un point par rapport aux milieux des cotés

Soit un triangle ABC, A',B',C', les milieux des côtés, et M un point du plan (ABC) de coordonnées barycentriques (α,β,γ).

1. Chercher les coordonnées barycentriques de P,Q,R symétriques de M par rapport aux points A',B',C'.
2. Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes en un point N.
3. Montrer que N est le milieu de $[A,P]$, $[B,Q]$, $[C,R]$.
4. Reconnaître l'application $M \mapsto N$.

Correction ▼ [004893]

Exercice 5002 Parallélogrammes

Dans le plan, on considère :

– trois points non alignés A,B,C.

– trois points alignés P,Q,R avec $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$.

On construit les points I,J,K de sorte que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ soient des parallélogrammes.

Montrer que I,J,K sont alignés.

Correction ▼ [004894]

Exercice 5003 Projections en cascade

Soient A,B,C trois points non alignés et $M_1 \in (AB)$. On construit les points M_2,M_3,M_4 de la manière suivante :

– M_2 est le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AC).

– M_3 est le projeté de M_2 sur (AC) parallèlement à (AB).

– M_4 est le projeté de M_3 sur (AB) parallèlement à (BC).

On recommence ensuite les mêmes constructions à partir de M_4, ce qui donne les points M_5, M_6, M_7.

Montrer que $M_7 = M_1$.

Correction ▼ [004895]

Exercice 5004 Caractérisation du barycentre par les surfaces

Soit ABC un triangle, et $M \in (ABC)$. On note α, β, γ les aires des triangles MBC, MCA, MAB.

1. On suppose que M est dans l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$.
   Montrer que : $(\alpha = \beta = \gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.
2. Quels sont tous les points du plan (ABC) tels que $\alpha = \beta = \gamma$?

Correction ▼ [004896]

Exercice 5005 Coord. barycentriques du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv \overline{(\vec{AB}, \vec{AC})}$, $\beta \equiv \overline{(\vec{BC}, \vec{BA})}$, $\gamma \equiv \overline{(\vec{CA}, \vec{CB})}$.

1. Montrer que pour tout point M du cercle (ABC), on a :
$$a\cos\alpha MA^2 + b\cos\beta MB^2 + c\cos\gamma MC^2 = abc.$$
2. En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle (ABC).

[004897]

Exercice 5006 Cercle inscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Soit A' le pied de la bissectrice intérieure issue de A. Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de I, centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [004898]

Exercice 5007 Orthocentre

Soit ABC un triangle. On note : $\alpha \equiv \overline{(\vec{AB}, \vec{AC})}$, $\beta \equiv \overline{(\vec{BC}, \vec{BA})}$, $\gamma \equiv \overline{(\vec{CA}, \vec{CB})}$.

1. Soit A' le pied de la hauteur issue de A. Calculer $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H.

Correction ▼ [004899]

Exercice 5008 **

Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points d'intersection des lignes d'une feuille blanche quadrillée usuelle.

Correction ▼ [005206]

199 240.99 Autres

200 241.00 Isométrie vectorielle

Exercice 5009

Compléter $x_1 = (1,2,1)$ en base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. [001982]

Exercice 5010

Montrer que $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \;\; x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$. [001983]

Exercice 5011

Soit E euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$.
Soit $f : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \wedge a \end{cases}$. f est-elle linéaire, bijective ? Comparer f^3 et f. [001984]

Exercice 5012

Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'équation $a \wedge x = b$. [001985]

Exercice 5013

Soit R le rotation vectorielle d'angle θ et d'axe orienté par le vecteur unitaire k. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3 \; R(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)k \wedge x + 2(x|k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$. [001986]

Exercice 5014

Determiner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du retournement d'axe $\mathbb{R}(1,2,1)$. [001987]

Exercice 5015

Reconnaître les transformations géométriques dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[001988]

Exercice 5016

Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ et r une rotation quelconque. Déterminer rRr^{-1}. En déduire que le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est bîîîîîp (le centre est l'ensemble des rotations qui commutent avec toutes les autres). [001989]

Exercice 5017

On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^3$. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a,b,c]$ le produit mixte de a, b et c. Exprimer à l'aide de p les quantités suivantes

1. $s = [a+b, b+c, c+a]$,
2. $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$.

[001990]

Exercice 5018 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1-i)z + 2 + i$

Correction ▼ [005207]

---

201 242.01 Géométrie affine euclidienne du plan

Exercice 5019 Transformations affines et Isométries

Soit P un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque.

1. On considère D une droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$ et $\vec{u}(3, -2)$.
   (a) Soit $A(4, 2)$. Donner une équation paramétrique de D_A droite passant par A de direction $\vec{u}$. En déduire les coordonnées de $A' = D_A \cap D$ projeté de A sur D selon $\vec{u}$.
   (b) Définir plus généralement analytiquement la projection sur D selon $\vec{u}$ en exprimant les coordonnées x', y' de M' projeté de $M(x, y)$ en fonction de x et y.
2. Définir analytiquement les projections sur D selon Δ dans les cas suivants :
   (a) Δ d'équation $x - 2y + 1 = 0$.
   (b) Δ d'équation $3x + 2y + 2 = 0$.
   (c) Δ d'équation $x + y - 1 = 0$.
   (d) Δ d'équation $2x - 2y + 4 = 0$.

[002035]

Exercice 5020

Soit P un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque.

1. Donner l'expression analytique de la translation t_1 de vecteur $(1, 2)$.
2. Donner l'expression analytique de la translation t_2 de vecteur $(-1, 2)$.
3. Donner l'expression analytique de l'homothétie h_1 de centre l'origine du repère et de rapport 2 et de l'homothétie h_2 de centre $A(2, -1)$ de rapport 3.
4. Donner l'expression analytique de $t_1 \circ h_1$, $t_2 \circ h_2$, $h_1 \circ t_1$, $h_2 \circ t_2$.
5. Soit $M(x, y)$ un point de P. Donner les coordonnées du symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = ax + b$.

[002036]

Exercice 5021

1. On considère S_1 la transformation du plan définie par le système d'équations suivant :
   $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$. Reconnaître cette transformation.
2. De même avec la transformation S_2 définie par $x' = 5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$, $y' = -5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$.
3. On compose S_1 avec S_2. Donner l'expression de $S_1 \circ S_2$, et trouver la nature de cette transformation.

[002037]

Exercice 5022

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

1. Soit f la transformation du plan définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1) \\ y' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+2) \end{cases}$$

   (a) Calculer les coordonnées de O', I', J' les images par f des points O, I, J.
   (b) Montrer que le repère $(O', \vec{O'I'}, \vec{O'J'})$ est orthonormé, est-il direct ?
   (c) En déduire que f est une isométrie, est-elle directe ?
   (d) Déterminer l'ensemble des points invariants par f et reconnaitre f.
   (e) Donner l'expression analytique de la transformation inverse de f.
   (f) Calculer l'image par f la droite d'équation $2x-y-1=0$.
2. Donner l'expression analytique de la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, calculer l'image de 0 par cette transformation.
3. Même question pour la symétrie d'axe la droite d'équation $x+y+1=0$
4. Donner l'expression analytique de la composée des deux applications précédentes.

[002040]

Exercice 5023

Dans le plan cartésien identifié à $\mathbb{C}$, un point M est représenté par son affixe z.

1. Dessiner les ensembles suivants puis les exprimer en fonction de (x,y) $((z=x+iy))$:
   (i) $z+\bar{z}=1$ (ii) $z-\bar{z}=i$ (iii) $iz-i\bar{z}=1$
2. Donner l'expression analytique en complexe des transformations suivantes, puis calculer l'image de i par ces transformations :
   (a) la rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$,
   (b) la symétrie d'axe la droite d'équation $iz-i\bar{z}=1$,
   (c) la composée des deux applications précédentes.
3. Soit f la transformation du plan définie analytiquement par $z'=(1+i)z+1$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   (b) Donner l'expression analytique de la transformation inverse de f.
   (c) Calculer l'image par f de l'ensemble $z+\bar{z}=1$.
   (d) Ecrire f comme la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

[002041]

Exercice 5024 Fonction numérique de Leibniz

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

Quels sont les points M du plan (ABC) tels que $MA^2+a^2=2(MB^2+MC^2)$?

Correction ▼ [004949]

Exercice 5025 Cercle circonscrit à un triangle

Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan de coordonnées barycentriques (x,y,z) dans le repère affine (ABC).

Montrer que : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow xAM^2+yBM^2+zCM^2=0 \Leftrightarrow xyAB^2+xzAC^2+yzBC^2=0$.

Correction ▼ [004950]

Exercice 5026 Cercle stable par une application affine

Soit $\mathscr{C}=\mathscr{C}(O,r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathscr{C})=\mathscr{C}$. Montrer que f est une isométrie de point fixe O.
[004951]

Exercice 5027 Point équidistant d'une famille de droites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.

Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites D_λ.

Correction ▼ [004952]

Exercice 5028 Bissectrice de deux droites

Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O.

On note $\mathscr{H} = \{M \text{ tq } d(M,D) = d(M,D')\}$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D,D'))
2. Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathscr{H}$
3. Soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathscr{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathscr{H}$.

[004953]

Exercice 5029 Trois figures isométriques

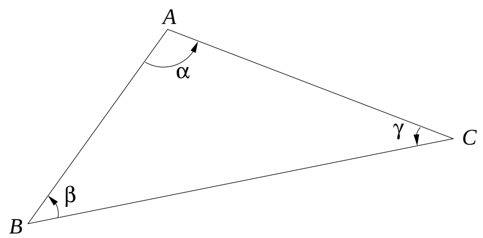
Trois figures F_1, F_2, F_3 se déduisent l'une de l'autre par rotations. Montrer qu'il existe une figure F dont F_1, F_2, F_3 se déduisent par symétries axiales.

Correction ▼ [004954]

Exercice 5030 Produit de 3 rotations

Soit ABC un triangle d'angles α, β, γ.

On note ρ, ρ', ρ'' les rotations autour de A, B, C d'angles α, β, γ, orientés suivant le dessin :



Qu'est-ce que $\rho \circ \rho' \circ \rho''$?

Correction ▼ [004955]

Exercice 5031 Sous-groupes finis de déplacements

1. Soit G un sous-groupe fini de déplacements du plan.
   (a) Montrer que G est constitué uniquement de rotations.
   (b) Soient $f, g \in G$. Montrer que f et g ont même centre (étudier $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$).
   (c) Prouver enfin que G est cyclique.
2. Soit G un sous groupe fini d'ordre p d'isométries du plan, non toutes positives.
   (a) Montrer que G contient autant d'isométries positives que négatives.
   (b) Montrer que G est un groupe diédral (groupe d'isotropie d'un polygone régulier).

[004956]

Exercice 5032 Centrale MP 2000

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O. Soit A le point de coordonnées $(a,0)$. Pour tout point M, on définit $M' = f(M)$ de la manière suivante : A, M, M' sont alignés et (MO) est orthogonale à $(M'O)$. Expliciter f en fonction des coordonnées (x,y) de M. Donner son domaine de définition. Montrer que f réalise une bijection entre le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$ et le quart de plan d'équations $x < 0, y > 0$.

Correction ▼ [004957]

Exercice 5033 *IT

Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0, y_0)$ sur la droite (D) d'équation $x+3y-5=0$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Correction ▼ [005197]

Exercice 5034 *

Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Correction ▼ [005198]

Exercice 5035 **I

1. h (resp. h') est l'homothétie de centre Ω et de rapport k (resp. k') non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$.
2. s (resp. s') est la symétrie centrale de centre Ω (resp. Ω'). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ s$.
3. s est la symétrie centrale de centre Ω et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s$.

Correction ▼ [005201]

202 242.02 Géométrie affine euclidienne de l'espace

Exercice 5036

On considère les 4 points A, B, C, D donnés. $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ définit-il bien un nouveau repère ? Dans ce cas, trouver les formules de changements de repère exprimant les coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de celles (x', y', z') dans $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.

1. $A(2,-1,0)$, $B(7,-1,-1)$, $C(-3,0,-2)$, $D(3,-6,-3)$
2. $A(4,1,4)$, $B(7,3,1)$, $C(9,0,0)$, $D(5,2,3)$
3. $A(0,-1,3)$, $B(5,-6,4)$, $C(-4,1,-2)$, $D(-3,3,6)$
4. $A(1,1,0)$, $B(1,5,2)$, $C(0,-1,1)$, $D(3,4,-1)$
5. $A(2,-1,4)$, $B(0,0,1)$, $C(3,2,-1)$, $D(1,3,4)$
6. $A(4,4,2)$, $B(5,3,2)$, $C(4,3,3)$, $D(3,5,2)$
7. $A(1,3,1)$,$B(1,2,2)$,$C(2,-1,-4)$, $D(0,8,6)$.

[002031]

Exercice 5037

Les formules suivantes définissent-elles bien un changement de repère ? Dans ce cas, donner le changement de repère inverse.

1. $\begin{cases} x' = y - z + 1 \\ y' = -x - 4y + 5z + 2 \\ z' = x - 5y + 5z + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 3z - 2 \\ y' = 2x + 3y + z + 2 \\ z' = 4x - y + 3z + 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 2z - 2 \\ y' = x + y - 5z + 1 \\ z' = -3x - 4y + 4z - 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 3x - 5y + z + 2 \\ y' = 2x - y + z - 1 \\ z' = -3x - 4y - z - 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x - z + 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 2 \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x-2y-3z+5 \\ y' = -3x+4y+z-2 \\ z' = 2x-y+6z+3 \end{cases}$

[002032]

Exercice 5038

On considère les droites et les plans suivants dont les équations sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donner leurs équations dans le nouveau repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$, sachant que dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(4,-1,2)$, $B(2,-5,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(1,-5,6)$.

1. $P : x+y = 1$
2. $P : 2x-3y+4z-1 = 0$
3. $P : x-y+z+3 = 0$
4. $P : \begin{cases} x = 2t+3s+1 \\ y = t-s+2 \\ z = 4t-2s-3 \end{cases}$
5. $(D) : \begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x-y+4z = 3 \end{cases}$
6. $(D) : \begin{cases} 3x-y-z = -1 \\ 4x-3y-z = -2 \end{cases}$

[002033]

Exercice 5039

On considère la droite $(D) : \begin{cases} y-z = 3 \\ -x-y+2 = 0 \end{cases}$.

1. On considère le point $A(-2,4,1)$, les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{v}(2,2,-4)$, $\vec{w}(3,-1,,1)$ et le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note x', y'et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y, z en fonction de x', y', z'.
2. Utiliser ce changement de repère pour donner dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une équation de D .
3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

[002034]

Exercice 5040

1. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par
$$\begin{cases} x' = & -3x+2y-2z+4 \\ y' = & -8x+5y-4z+8 \\ z' = & -4x+2y-z+4 \end{cases}$$
   (a) Déterminer l'ensemble P des points invariants par f.
   (b) Montrer que pour M d'image M', le milieu de $[MM']$ est dans P, (MM') est parallèle à une direction fixe.
   (c) En déduire une description simple de f.
2. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(& 2x-y-z+1) \\ y' = \frac{1}{3}(& -x+2y-z+1) \\ z' = \frac{1}{3}(& -x-y+2z+1) \end{cases}$$
   (a) Déterminer l'ensemble P des points invariants par f.
   (b) Montrer que pour M d'image M' le vecteur $\vec{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe.
   (c) En déduire une description simple de f.

[002038]

Exercice 5041

1. Définir analytiquement les projections orthogonales suivantes :
   (a) sur le plan d'équation $2x+2y-z=1$.
   (b) sur le plan d'équation $2x-3y+z=6$.
   (c) sur la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{array}\right.$.
2. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan (P) contenant le point $C(2,-1,1)$ et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}(0,-1,1)$ et $\vec{u'}(-2,0,1)$, selon la droite AB, où $A(1,-1,0)$ et $B(0,-1,3)$.

[002039]

Exercice 5042

Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}=(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

1. On considère les deux droites d et D données par les systèmes d'équations cartésiennes suivant :
   $d\left\{\begin{array}{ll} x+y-3z & =0 \\ y+z & =0 \end{array}\right.$ et $D\left\{\begin{array}{ll} x-1 & =0 \\ y-z-1 & =0 \end{array}\right.$
   (a) i. Donner un point et un vecteur directeur de d. Donner un point et un vecteur directeur de D.
   ii. Dire si les droites d et D sont parallèles, sécantes ou non coplanaires.
   iii. Justifier l'existence de deux plans parallèles (en donnant pour chacun de ces deux plans un point et deux vecteurs directeurs) tels que d est contenue dans l'un et D est contenue dans l'autre.
   (b) i. Soient $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(4,-1,1)$ dans $\mathscr{R}$, $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(0,1,1)$ dans $\mathscr{R}$ et Ω le point de coordonnées $(1,1,0)$ dans $\mathscr{R}$.
   Déterminer une équation cartésienne pour le plan P de repère cartésien $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, en déduire une équation cartésienne pour le plan Q de repère cartésien $(\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
   ii. Donner des équations paramétriques pour la droite Δ normale à P passant par O. Déterminer les deux points $\Delta\cap P$ et $\Delta\cap Q$ puis calculer la distance entre eux.

   Interpréter cette distance.
2. On considère les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{a}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{b}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{c}=(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.
   (a) Montrer que $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ est un repère orthonormé. Est-il direct ?
   (b) Ecrire les formules de changement de repères de $\mathscr{R}$ à $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.
   (c) Quelle est l'équation dans le repère $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ du plan d'équation $x+2y-2z=0$ dans $\mathscr{R}$? Même question avec le plan d'équation $x+2y-2z=3$ dans $\mathscr{R}$.

[002042]

Exercice 5043

Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. On définit les trois points : $A=(3,\sqrt{6},3)$, $B=(3,-\sqrt{6},3)$ et $C=(4,0,0)$.

1. (a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan P contenant O, A et B.
   (b) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.
   (c) Les points O,A,B et C sont-ils coplanaires ?
2. Soit G le barycentre des points O, A, B et C, c'est à dire, par définition l'unique point G de l'espace tel que : $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
   (b) En déduire les coordonnées de G dans $\mathscr{R}$.
3. (a) Montrer que la droite (GC) est perpendiculaire au plan P.
   (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite (GC) avec le plan P.
4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules : $(x'=x, y'=-y, z'=z)$ est une isométrie. Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points O,A,B,C par cette isométrie. Que remarque-t-on ?

[002043]

Exercice 5044

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On définit les points

$$A:\ (1,2,3)\ ;\quad B:\ (2,3,1)\ ;\quad C:\ (3,1,2)\ ;\quad D:\ (1,1,1)$$

et le plan

$$\Pi : 2x-3y+4z=0.$$

1. Montrer que les points A,B,C ne sont pas alignés.
2. Montrer que les points A,B,C,D ne sont pas coplanaires.
3. Donner une équation cartésienne du plan P passant par A,B,C.
4. Calculer la distance de D au plan P.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite $d=P\cap\Pi$.

[002044]

Exercice 5045

Soient A, B et C trois points distincts et non alignés de l'espace affine tridimensionnel $\mathscr{E}$. On note P le plan qui contient A, B et C. Soit O un point de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas à P.

1. (a) Expliquer rapidement pourquoi $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ est un repère cartésien de $\mathscr{E}$.
   (b) Dans ce repère $\mathscr{R}$, écrire les coordonnées des points O, A, B et C, et déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Soit A' le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$. On note P' le plan parallèle à P passant par A'. P' coupe (OB) en B' et (OC) en C'.
   Dans $\mathscr{R}$, écrire les coordonnées des points A', B' et C' et déterminer des équations paramétriques pour les droites (BC') et $(B'C)$, en déduire des équations cartésiennes de ces droites.
   Calculer les coordonnées des points $I=(BC')\cap(B'C)$, $J=(AC')\cap(A'C)$ et $K=(AB')\cap(A'B)$.
3. Soit A'' le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA''}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. On note P'' le plan parallèle à P passant par A''. P'' coupe (OB) en B'' et (OC) en C''.
   Montrer que les droites (IA''), (JB''), (KC'') sont parallèles.

[002045]

Exercice 5046 Équation au produit vectoriel

Soient A, B, C trois points distincts de l'espace.

Déterminer le lieu des points M tels que $\vec{MA}\wedge\vec{MB}+\vec{MB}\wedge\vec{MC}=2\vec{MC}\wedge\vec{MA}$.

Correction ▼ [004958]

Exercice 5047 $\|\vec{MA}+2\vec{MB}+k\vec{MC}\|=\|\vec{MD}+\vec{ME}\|$

Soient A,B,C,D,E cinq points de l'espace et $k\in\mathbb{R}$.

Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA}+2\vec{MB}+k\vec{MC}\|=\|\vec{MD}+\vec{ME}\|$.

Correction ▼ [004959]

Exercice 5048 Ensi Chimie P 93

Trouver les coordonnées des projetés du point $C(3,4,-2)$ sur les droites définies par les équations :

$D_1 : \frac{x-5}{13}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+3}{-4}$.

$D_2 : \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{-4}$.

Correction ▼ [004960]

Exercice 5049 Projections sur 4 plans

Dans un *rond* on donne les plans $\begin{cases} P & x+y=1 \\ Q & y+z=1 \\ R & x+z=1 \\ S & x+3y+z=0 \end{cases}$ et le point $A:(1,1,\lambda)$.

Donner une CNS sur λ pour que les projections de A sur les quatre plans soient coplanaires.

Correction ▼ [004961]

Exercice 5050 Calculs de points et plans

Dans un *rond* on donne les points $A:(1,2,3)$, $B:(2,3,1)$, $C:(3,1,2)$, $D:(1,0,-1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.
2. Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
3. Chercher le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$.

Correction ▼ [004962]

Exercice 5051 Perpendiculaire commune à deux droites

Dans un *rond* on donne les droites $D:\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ et $D':\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Chercher la perpendiculaire commune, Δ, à D et D' (On donnera les points $H \in D\cap\Delta$ et $K \in D'\cap\Delta$).

Correction ▼ [004963]

Exercice 5052 Perpendiculaire commune à deux droites

Dans un *rond* on donne les droites $D:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ et $D':\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

Calculer $d(D,D')$.

Correction ▼ [004964]

Exercice 5053 Tétraèdre dont les faces ont même aire

Soit $ABCD$ un tétraèdre dont les quatre faces ont même aire. Montrer que les côtés non coplanaires ont deux à deux mêmes longueurs.

Correction ▼ [004965]

Exercice 5054 Distance entre les côtés d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a. Chercher la distance entre deux côtés non coplanaires.

Correction ▼ [004966]

Exercice 5055 Distance d'un point à une droite

Dans un *rond* on donne la droite $D:\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ et $M(x,y,z)$. Calculer $d(M,D)$.

Correction ▼ [004967]

Exercice 5056 Projection orthogonale

Dans un *rond* on donne le plan $P: x+2y+3z=4$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur P.

Correction ▼ [004968]

Exercice 5057 Projection orthogonale

Dans un *rond* on donne les points $A:(1,0,-1)$, $B:(-1,1,1)$, $C:(2,-1,1)$, $D:(1,2,-2)$, $E:(-2,-2,0)$.

Déterminer, par un point et un vecteur directeur, la projection de (DE) sur le plan (ABC).

Correction ▼ [004969]

Exercice 5058 Symétrique d'un plan

Dans un *rond* on donne les plans $P: x+y+z=1$ et $Q: 2x-y+z=1$. Chercher une équation cartésienne du plan Q' symétrique de Q par rapport à P.

Correction ▼ [004970]

Exercice 5059 Repères orthonormés

Soient $(O,\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})$ et $(O,\vec{OA'},\vec{OB'},\vec{OC'})$ deux repères orthonormés directs de l'espace.

Montrer que $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$ sont coplanaires. [004971]

Exercice 5060 Angle d'un plan et d'une droite

Soient P un plan, D une droite tels que $\overline{(P,D)} \equiv \theta (\operatorname{mod} \pi)$.

Montrer que pour toute droite $\Delta \subset P$, on a $\cos(D,\Delta) \geq \cos\theta$. Quand y a-t-il égalité ? [004972]

Exercice 5061 Angle entre deux faces d'un dodécaèdre

Quel est l'angle entre deux faces d'un dodécaèdre régulier ? (on donne : $4\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$)

Correction ▼ [004973]

Exercice 5062 Ensi P 90

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2. \end{cases}$

Correction ▼ [004974]

Exercice 5063 Sphère définie par ses intersections

Soit S une partie de l'espace contenant au moins deux points et telle que pour tout plan P, $P\cap S$ est un cercle, un singleton ou vide. Montrer que S est une sphère.

Correction ▼ [004975]

Exercice 5064 CNS pour que deux vissages commutent

Soient f,g deux vissages d'angles $\neq \pi$. Trouver une CNS pour que $f\circ g = g\circ f$. (On étudiera $f\circ g\circ f^{-1}$)

Correction ▼ [004976]

Exercice 5065 Composée de 3 demi-tours

Soient D_1,D_2,D_3, trois droites, et $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ les $\frac{1}{2}$-tours correspondants.

Démontrer que $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour si et seulement si D_1,D_2,D_3 ont une perpendiculaire commune ou sont parallèles.

Correction ▼ [004977]

Exercice 5066 Composée de demi-tours par rapport aux arêtes d'un tétraèdre

---

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et d_{AB},d_{AC},d_{AD} les $\frac{1}{2}$-tours autour des droites $(AB),(AC),(AD)$. Simplifier $f = d_{AB}\circ d_{AC}\circ d_{AD}$.

Correction ▼ [004978]

Exercice 5067 Isométries transformant un triangle en un triangle donné

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?

Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.

Correction ▼ [004979]

Exercice 5068 Groupes d'isotropie

Déterminer *toutes* les isométries

1. d'un tétraèdre régulier.
2. d'un cube.
3. de deux droites non coplanaires.

Correction ▼ [004980]

Exercice 5069 Composée de projections

Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de l'espace non toutes parallèles. Pour $M_1 \in D_1$ on construit : M_2, projeté de M_1 sur D_2, M_3, projeté de M_2 sur D_3, M_4, projeté de M_3 sur D_1.

Montrer qu'il existe un unique point $M_1 \in D_1$ tel que $M_4 = M_1$.

Correction ▼ [004981]

Exercice 5070 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$ et $D(1,0,4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Correction ▼ [005501]

Exercice 5071 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne : la droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = 2+3t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{array}\right.$, le plan P dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda+\mu \\ y = -1-3\lambda+2\mu \\ z = 1+\lambda \end{array}\right.$, le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = -5-\nu \\ y = 3+\nu+3\eta \\ z = \nu+\eta \end{array}\right.$, Etudier $D \cap P$ et $P \cap P'$

Correction ▼ [005502]

Exercice 5072 **T

Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ autour de $(1,2,2)$ qui transforme j en k.

Correction ▼ [005503]

203 243.00 Conique

Exercice 5073 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Eléments caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est

– 1. $y^2 = x$,
  2. $y^2 = -x$,
  3. $y = x^2$,
  4. $y = -x^2$.
– 1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,
  2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$,
  3. $x^2 + 2y^2 = 1$.
– 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,
  2. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,
  3. $x^2 - y^2 = 1$.

Correction ▼ [005540]

Exercice 5074 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Eléménts caractéristiques de la courbe dont une équation dans $\mathscr{R}$ est

– 1. $y = x^2 + x + 1$,
  2. $y^2 + y - 2x = 0$,
  3. $y = \sqrt{2x+3}$.
– 1. $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$,
  2. $y = -2\sqrt{-x^2+x}$.
– $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$.

Correction ▼ [005541]

Exercice 5075 **IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Nature et éléments caractéristiques de la courbe dont une équation en repère orthonormé est

1. $y = \frac{1}{x}$,
2. $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$,
3. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$,
4. $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$,
5. $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$,
6. $x(x-1) + (y-2)(y-3) = 0$,
7. $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$,
8. $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$.

Correction ▼ [005542]

Exercice 5076 *IT

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$,
2. $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$,
3. $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$,
4. $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$,
5. $r = \frac{1}{2-\cos\theta}$.

Correction ▼ [005543]

Exercice 5077 ***

Déterminer l'image du cercle trigonométrique par la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{1+z+z^2} \end{array}$.

Correction ▼ [005544]

Exercice 5078 ***

1. **Droite de** SIMSON. Soit (A,B,C) un triangle et M un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R de M sur les cotés (BC), (CA) et (AB) du triangle (ABC) sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à (ABC). La droite passant par P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au triangle ABC (ou au cercle (ABC)).
2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. En particulier, fournir la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005546]

Exercice 5079 **

$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[A,B]$. (D) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur $(\mathscr{C})$ et (T) la tangente en P à $(\mathscr{C})$. (T) recoupe (D) en S. La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (BS) en M. Ensemble des points M ?

Correction ▼ [005547]

Exercice 5080 **

Etudier les courbes dont une équation en repère orthonormé est :

1. $2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1=0$.
2. $x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0$.
3. $2x^2-4xy-3x+3y+1=0$.
4. $-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2-4=0$.
5. $4x^2+12xy+9y^2-2x+1=0$.
6. $(x-y+1)^2+(x+y-1)^2=0$.
7. $x^2+y^2-3x-y+2=0$.
8. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$.
9. $(x+2y-4)(x-y-1)=3$.
10. $(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$.

Correction ▼ [005815]

Exercice 5081 **

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r=\frac{2}{1-2\cos\theta}$,
2. $r=\frac{6}{2+\cos\theta}$,
3. $r=\frac{2}{1-\sin\theta}$.

Correction ▼ [005816]

Exercice 5082 ***

1. Montrer que toute courbe de degré inférieur ou égal à 2 admet une représentation paramétrique de la forme
$$\begin{cases} x(t)=\frac{P(t)}{R(t)} \\ y(t)=\frac{Q(t)}{R(t)} \end{cases}$$
où P, Q et R sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et montrer réciproquement que toute courbe paramétrée du type précédent est une courbe de degré inférieur ou égal à 2.
2. Etudier la courbe $\begin{cases} x=\frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y=\frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{cases}$.

Correction ▼ [005817]

204 243.01 Ellipse

Exercice 5083

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F', M un point fixé de $\mathscr{E}$ et M' un point qui se promène sur $\mathscr{E}$. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles de centres M et M' de rayons MF' et $M'F'$. Soient I le point de $(FM)\cap\mathscr{C}$ tel que $M\in[FI]$ et J le deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Montrer que (MM') est bissectrice de l'angle $F'MJ$.
2. Que devient J si M' tend vers M (on ne demande pas de preuve) ?
3. Montrer que la tangente à $\mathscr{E}$ en M est bissectrice extérieure de l'angle FMF'.

[002065]

Exercice 5084

Montrer que la courbe paramétrée $x(t)=\dfrac{1}{t^2+t+1}$ et $y(t)=\dfrac{t}{t^2+t+1}$ est une ellipse et la tracer. [002071]

Exercice 5085 Orthoptique d'une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F,F', de centre O, de dimensions a et b.

Soient $M,M'\in\mathscr{E}$ tels que les tangentes à $\mathscr{E}$ sont perpendiculaires en un point T.

Montrer que $TF^2+TF'^2=4a^2$. Quel est le lieu de T quand M et M' varient ?

Correction ▼ [004912]

Exercice 5086 Tangentes à une ellipse

Soient $\mathscr{E}:\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$, et $\mathscr{E}':\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1. CNS sur u,v,w pour que la droite d'équation $ux+vy+w=0$ soit tangente à $\mathscr{E}'$?
2. Soient (MP), (MQ) deux tangentes à $\mathscr{E}'$ avec $M,P,Q\in\mathscr{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente à $\mathscr{E}$.

Correction ▼ [004913]

Exercice 5087 Points mobiles avec $PQ=$ constante

Soient P un point mobile sur Ox, et Q un point mobile sur Oy tels que PQ reste constante.

1. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, déterminer le lieu, $\mathscr{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P:1-\alpha,Q:\alpha)$.
2. Soit R le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_\alpha$ en un point M est perpendiculaire à (RM).

Correction ▼ [004914]

Exercice 5088 FMT est rectangle en F

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyer F, directrice D. Soit $M\in\mathscr{E}$ hors de l'axe focal, et T le point d'intersection de la tangente en M et de la directrice D. Montrer que FMT est rectangle en F.

Correction ▼ [004915]

Exercice 5089 $1/OM^2+1/OP^2$

Soit $\mathscr{E}$ un ellipse de centre O et de dimensions a, b. Soient $M,P\in\mathscr{E}$ tels que OMP soit rectangle en O.

1. Montrer que $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OP^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.
2. En déduire que (MP) reste tangente à un cercle fixe de centre O.

[004916]

Exercice 5090 Cercle sur une tangente

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de sommets A,A', et $M \in \mathscr{E}$. La tangente en M coupe les tangentes en A,A' en P,P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P,P']$ passe par les foyers de $\mathscr{E}$.

[004917]

Exercice 5091 ***

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005550]

Exercice 5092 ***

$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$. $(\mathscr{D})$ est la tangente en A au cercle $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur le cercle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{T})$ la tangente en P au cercle $(\mathscr{C})$. $(\mathscr{T})$ recoupe $(\mathscr{D})$ en S. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P coupe la droite (BS) en M. Ensemble des points M ?

Correction ▼ [005820]

Exercice 5093 **

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005822]

205 243.02 Parabole

Exercice 5094

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$, M un point de $\mathscr{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$. Montrer que la tangente à $\mathscr{P}$ en M est la médiatrice de $[FH]$. En déduire un procédé de construction d'une parabole.

[002066]

Exercice 5095

Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole. [002067]

Exercice 5096

Déterminer astucieusement le sommet et l'axe de la parabole $x(t) = t^2 + t + 1$ et $y(t) = t^2 - 2t + 2$. [002070]

Exercice 5097 Orthoptique d'une parabole

Soit P une parabole de foyer F et de directrice D. Soit $M \in P$, et M' le point de P tel que les tangentes en M et M' sont orthogonales.

1. Montrer que ces tangentes se coupent au milieu de $[H,H']$.
2. Montrer que M,F,M' sont alignés.
   En déduire dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ donné, toutes les paraboles tangentes aux axes de coordonnées.

Correction ▼ [004903]

Exercice 5098 Cercle circonscrit

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et A,B deux points distincts de $\mathscr{C}$. Soit Δ le diamètre parallèle à (AB).

Pour $M \in \mathscr{C}$, on note P,Q les intersections de (MA) et (MB) avec Δ. Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit à MPQ.

Correction ▼ [004904]

Exercice 5099 Projection sur le diamètre d'un cercle

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $A \in \mathscr{C}$. Pour $M \in \mathscr{C}$, on construit le projeté N sur le diamètre perpendiculaire à (OA), et I, le point d'intersection de (OM) et (AN). Quel est le lieu de I ?

Correction ▼ [004905]

Exercice 5100 $MF + MH = 2a$

Soit F un point, D une droite ne passant pas par F, et $a > \frac{1}{2}d(F,D)$.

Trouver l'ensemble des points M tels que $MF + d(M,D) = 2a$.

Correction ▼ [004906]

Exercice 5101 Paraboles passant par un point

Soient D une droite et $F \in D$.

Montrer que pour tout point $M \notin D$, il passe exactement deux paraboles de foyer F et d'axe D.

Montrer que les tangentes à ces paraboles en M sont orthogonales. [004907]

Exercice 5102 Longueur minimale d'une corde normale, Ensi Physique 93

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de paramètre p et $A \in \mathscr{P}$. Soit B le point où la normale à $\mathscr{P}$ en A recoupe $\mathscr{P}$. Déterminer la longueur minimale de AB.

Correction ▼ [004908]

Exercice 5103 Cordes perpendiculaires, Centrale P' 1996

On considère une parabole dans le plan euclidien.

1. Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points A et B de la parabole à l'aide d'un déterminant d'ordre 3.
2. A,B,C étant trois points sur la parabole, exprimer le fait que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
3. On fixe A sur la parabole, B et C sont deux points de la parabole variables tels que (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que (BC) passe par un point fixe M.
4. Quel est le lieu de M quand A varie ?

Correction ▼ [004909]

Exercice 5104 Normales concourantes, Centrale P' 1996

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{P}$.

1. Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathscr{P}$ distincts de M_0 tels que la normale à $\mathscr{P}$ en M passe par M_0.
2. Dans le cas où il y a deux solutions, M_1 et M_2, trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.

Correction ▼ [004910]

Exercice 5105 Croisillons sur une parabole, Centrale MP 2000

Pour $p > 0$ on donne la courbe Γ d'équation $y^2 = 2px$. Soit un carré $ABCD$ tel que $B,D \in \Gamma$ et A,C appartiennent à l'axe de symétrie de Γ.

1. Quelle relation lie les abscisses de A et C ?
2. On construit une suite (M_n) de points de Ox, M_n d'abscisse x_n, telle que $x_{n+1} > x_n$ et M_nM_{n+1} est la diagonale d'un carré dont les deux autres sommets appartiennent à Γ. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to \infty$.

Correction ▼ [004911]

Exercice 5106 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole , c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole, perpendiculaires l'une à l'autre.

Correction ▼ [005545]

Exercice 5107 ***

Soit, dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, la courbe (Γ) d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$. Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005548]

Exercice 5108 ***

Equation cartésienne de la parabole tangente à $(0x)$ en $(1,0)$ et à $(0y)$ en $(0,2)$.

Correction ▼ [005552]

Exercice 5109 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole qui soient perpendiculaires.

Correction ▼ [005818]

Exercice 5110 ***

1. (Droite de SIMSON) Soient ABC un triangle et M un point du plan.
   Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R du point M sur les côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite passant par les points P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au cercle (ABC).
2. (Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle) Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. Fournir en particulier la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005819]

Exercice 5111 **

L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé (O,i,j,k). On note (Γ) la courbe d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ x+y+z-1=0 \end{array}\right. .$$

Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005821]

Exercice 5112 **

Equation cartésienne de la parabole $(\mathscr{P})$ tangente à (Ox) en $(1,0)$ et à (Oy) en $(0,2)$.

Correction ▼ [005824]

206 243.03 Hyperbole

Exercice 5113 Projection non orthogonale

Soient F un point, D une droite ne passant pas par F, et $\vec{\Delta}$ une direction ni égale ni perpendiculaire à $\vec{D}$. Pour $M \in \mathscr{P}$, on note H le projeté de M sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$?

Correction ▼ [004918]

Exercice 5114 Triangle rectangle sur une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère de dimension a. On se place dans un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j})$ construit sur les asymptotes de $\mathscr{H}$.

1. Déterminer l'équation de $\mathscr{H}$ dans ce repère.
2. Soit ABC un triangle rectangle en A dont les trois sommets sont sur $\mathscr{H}$. Montrer que la tangente en A est orthogonale à (BC).
3. Soit ABC un triangle quelconque dont les sommets sont sur $\mathscr{H}$. Montrer que l'orthocentre y est aussi.

Correction ▼ [004919]

Exercice 5115 Cercle sur une tangente

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de sommets A, A', et $M \in \mathscr{H}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de $\mathscr{H}$. [004920]

Exercice 5116 Triangle équilatéral

Soient A, F deux points distincts, D leur médiatrice, $\mathscr{H}$ l'hyperbole de foyer F, directrice D, excentricité 2, et $\mathscr{C}$ un cercle passant par A et F, de centre I.

1. Pour $M \in \mathscr{C}$, montrer que $M \in \mathscr{H} \Leftrightarrow 3\overline{(\vec{IM}, D)} \equiv \overline{(\vec{IF}, D)}\ [2\pi]$.
2. En déduire que si $I \notin (AF)$, $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{H}$ aux sommets d'un triangle équilatéral.

Correction ▼ [004921]

Exercice 5117 $\overline{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv 2\overline{(\vec{AM}, \vec{AO})}$

Soient O, A deux points distincts du plan. Trouver les points M tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv 2\overline{(\vec{AM}, \vec{AO})}$.

Correction ▼ [004922]

Exercice 5118 Lieu géométrique

Soient A, A' deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A, A']$. Pour $P \in \mathscr{C}$, on construit : P' le symétrique de P par rapport à (AA'), et M le point d'intersection de (AP) et (A', P'). Quel est le lieu de M ?

Correction ▼ [004923]

Exercice 5119 Triangle sur une hyperbole, Ensi P 91

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère et ABC un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathscr{H}$. Montrer que l'orthocentre, H, du triangle appartient aussi à $\mathscr{H}$. Comparer H et le point Q où le cercle circonscrit à ABC recoupe $\mathscr{H}$.

Correction ▼ [004924]

Exercice 5120 *

Que vaut l'excentricité de l'hyperbole équilatère (une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires) ?

Correction ▼ [005549]

Exercice 5121 ***

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005551]

Exercice 5122 ***

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005823]

207 243.04 Quadrique

Exercice 5123 Étude d'équations

Déterminer les natures des surfaces d'équation :

1. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$.
2. $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)=0$.
3. $x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx+4=0$.
4. $x^2-2y^2-z^2+2xz-4yz+3=0$.
5. $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz+4x-2y-z+3=0$.
6. $xy+xz+yz+1=0$.
7. $2x^2+2y^2-z^2+5xy-yz+xz=0$.
8. $xy+yz=1$.
9. $x^2+4y^2+5z^2-4xy-2x+4y=0$.
   On fera le minimum de calculs nécéssaires pour pouvoir conclure.

Correction ▼ [004925]

Exercice 5124 Repère non orthonormé

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+2gx+2hy+2iz+j=0$ dans un repère non orthonormé. Montrer que c'est quand même une quadrique. [004926]

Exercice 5125 Centre de symétrie

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique d'équation $f(x,y,z)=0$. On note q la forme quadratique associée à f.

1. Montrer que, pour tout point A et tout vecteur $\vec{h}$, on a : $f(A+\vec{h})=f(A)+(\vec{\nabla}f(A)\mid\vec{h})+q(\vec{h})$.
2. On suppose que $\mathscr{S}$ n'est pas incluse dans un plan. Montrer qu'un point Ω est centre de symétrie de $\mathscr{S}$ si et seulement si $\vec{\nabla}f(\Omega)=\vec{0}$.
3. En déduire que si 0 n'est pas valeur propre de la matrice de q, alors $\mathscr{S}$ admet un centre unique.

[004927]

Exercice 5126 Cône s'appuyant sur une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équations : $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ et $\Omega=(x_0,y_0,z_0)$ avec $z_0\neq 0$. On note $\mathscr{C}$ le cône de sommet Ω engendré par $\mathscr{E}$.

1. Chercher une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2. Quels sont les points Ω tels que $\mathscr{C}\cap Oyz$ soit un cercle ?

Correction ▼ [004928]

Exercice 5127 Sections circulaires

1. On considère la forme quadratique $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ avec $a \in [b,c]$.
   (a) Montrer qu'il existe $y,z \in \mathbb{R}$ tels que $y^2 + z^2 = 1$ et $by^2 + cz^2 = a$.
   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.
2. Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde de centre O. Montrer qu'il existe un plan P qui coupe $\mathscr{E}$ selon un cercle de centre O. Montrer que les sections de $\mathscr{E}$ par des plans parallèles à P sont des cercles.
3. Peut-on généraliser à une quadrique quelconque ?

Correction ▼ [004929]

Exercice 5128 Rotation d'une droite

1. Soit D la droite d'équations $\begin{cases} y = 1 \\ x = \lambda z \end{cases}$ où λ est un réel non nul fixé. Déterminer une équation cartésienne et la nature de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation de D autour de Oz.
2. En déduire que tout hyperboloïde de révolution à une nappe est réunion d'une famille de droites (*surface réglée*).
3. Généraliser à un hyperboloïde à une nappe quelconque.

Correction ▼ [004930]

Exercice 5129 Droites sur un paraboloïde hyperbolique

Soit $\mathscr{P}$ le paraboloïde d'équation $z = xy$. Montrer que par tout point $M \in \mathscr{P}$, il passe deux droites et deux seulement incluses dans $\mathscr{P}$.
[004931]

Exercice 5130 Hyperbole en rotation

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1. \end{cases}$

1. Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\mathscr{C}$.
2. Chercher une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de Oz et reconnaître $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [004932]

Exercice 5131 Volume d'un ellipsoïde

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3z^2}{4} + xz = 1$. Montrer que $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

Correction ▼ [004933]

Exercice 5132

Équation d'un cône

Déterminer les réels λ tels que la surface d'équation : $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) = \lambda$ soit un cône. Préciser alors le sommet et la nature du cône.

Correction ▼ [004934]

Exercice 5133 Plan tangent à un ellipsoïde

Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et P un plan d'équation $ux+vy+wz=1$. Montrer que P est tangent à E si et seulement si $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1$. [004935]

Exercice 5134 Normale à un ellipsoïde

Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, M un point de $\mathscr{E}$, et P,Q,R les intersections de la normale en M à $\mathscr{E}$ avec les plans Oyz, Oxz, Oxy. Montrer que $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ sont dans un rapport constant (indépendant de M).

Correction ▼ [004936]

Exercice 5135 Points équidistants de deux droites

Soient D,D' deux droites non coplanaires et $\mathscr{S}$ l'ensemble des points équidistants de D et D'. Montrer que $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique. (Utiliser un repère judicieux) [004937]

Exercice 5136 $MF=eMH$

On considère un point F, un plan P ne passant pas par F et un réel $e>0$. Montrer que l'ensemble, $\mathscr{S}$, des points M tels que $MF=ed(M,P)$ est une quadrique de révolution. Préciser les différents cas possibles. [004938]

Exercice 5137 $MF=ed(M,D)$

Dans l'espace, on considère un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel $e>0$. Montrer que l'ensemble, $\mathscr{S}$, des points M tels que $MF=ed(M,D)$ est une quadrique. Préciser les différents cas possibles.

Correction ▼ [004939]

Exercice 5138 $d(M,P)^2+d(M,D)^2=\text{cste}$

On considère un plan P et une droite D sécants. Déterminer le lieu des points M tels que $d(M,P)^2+d(M,D)^2=a$ (constante fixée).

Correction ▼ [004940]

Exercice 5139 Points équidistants d'un plan et d'une droite

Dans l'espace, soit P le plan d'équation $z=0$ et D la droite d'équations : $\begin{cases} y=0 \\ x\cos\theta - z\sin\theta = 0. \end{cases}$ $\quad (0\le\theta<\frac{\pi}{2})$

Quel est le lieu des points M tels que $d(M,P)=d(M,D)$?

Correction ▼ [004941]

Exercice 5140 Sphères équidistantes d'une sphère et d'un plan

Dans l'espace, on considère un plan P et une sphère S. Quel est le lieu des centres des sphères tangentes à S et à P ?

Correction ▼ [004942]

Exercice 5141 Appellations incontrolées

La liste des quadriques semble comporter des oublis : paraboloïde parabolique, cône hyperbolique,...Dresser la liste de toutes les surfaces oubliées et constater qu'elles sont connues sous d'autres appellations. [004943]

Exercice 5142 ** I

Nature et « éléments caractéristiques » de la quadrique $(\mathscr{S})$ dont une équation dans un repère orthonormé donné $\mathscr{R}=(O,i,j,k)$ de l'espace de dimension 3 est :

1. $x^2+y^2+z^2-2yz-4x+4y-1=0$.
2. $x^2+y^2+z^2+2xy-1=0$.

3. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$.
4. $x^2+4y^2+5z^2-4xy-2x+4y=0$.
5. $x^2-4x-3y-2=0$.
6. $7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0$.
7. $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)=0$.
8. $xy+yz=1$.
9. $xy+yz+zx+2y+1=0$.

Correction ▼ [005825]

Exercice 5143 **

Déterminer la quadrique contenant le point $A(2,3,2)$ et les deux paraboles $(\mathscr{P})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y^2=2x \end{array}\right.$ et $(\mathscr{P}')$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y^2=2z \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005826]

Exercice 5144 ***

Démontrer que toute équation du second degré symétrique en x, y et z est l'équation d'une surface de révolution (une surface $(\mathscr{S})$ est dite de révolution d'axe $(\mathscr{D})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ est invariante par toute rotation d'axe $(\mathscr{D})$).

Correction ▼ [005827]

Exercice 5145 ***

Former l'équation de la surface de révolution $(\mathscr{S})$ engendrée par la rotation de la droite $(\mathscr{D})$ $\left\{\begin{array}{l} x=z+2 \\ y=2z+1 \end{array}\right.$ autour de la droite (Δ) d'équations $x=y=z$. Quelle surface obtient-on ?

Correction ▼ [005828]

Exercice 5146 ***

Equation du cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ dans les cas suivants :

1. $S(0,0,0)$ et $(\mathscr{C}) : x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ t\in\mathbb{R}^*$.
2. $S(1,-1,0)$ et $(\mathscr{C}) : \left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x^2+y^2=z \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005829]

Exercice 5147 ***

Trouver une équation du cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$ quand

1. $S(0,5,0)$ et $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2=9$,
2. $S(0,0,0)$ et $(\mathscr{S}) : x^2+xy+z-1=0$. (Préciser la courbe de contact.)

(**Définitions.** Le cône $(\mathscr{C})$ de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$ est la réunion des tangentes à $(\mathscr{S})$ passant par S. D'autre part, une droite est tangente à la surface $(\mathscr{S})$ en un point M si et seulement si elle passe par M et est contenue dans le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M).

Correction ▼ [005830]

Exercice 5148 ***

Pour quelles valeurs de λ la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda=0$ est-elle un cône du second degré ? En préciser alors le sommet et une directrice.

Correction ▼ [005831]

Exercice 5149 *

Montrer que l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) \\ y = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) \\ z = e^t \end{array}\right.$ est tracé sur un cône du second degré de sommet O.

Correction ▼ [005832]

Exercice 5150 ***

Equation cartésienne du cylindre $(\mathscr{C})$ de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice (C) dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}(1,0,1)$ et $(C) : x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = a\sin t\cos t$ (a et b tous deux non nuls).
2. $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ et $(C) : \left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005833]

Exercice 5151 **

Equation du cylindre $(\mathscr{C})$ de section droite la courbe (C) d'équations $\left\{\begin{array}{l} z=x \\ 2x^2+y^2=1 \end{array}\right.$

Correction ▼ [005834]

Exercice 5152 ** I

Equation cartésienne du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ de rayon R et d'axe $(\mathscr{D})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=z+2 \\ y=z+1 \end{array}\right.$. Déterminer R pour que la droite (Oz) soit tangente au cylindre.

Correction ▼ [005835]

Exercice 5153 *

Trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation $x^2+2y^2+3z^2=21$ qui sont parallèles au plan d'équation $x+4y+6z=0$.

Correction ▼ [005836]

Exercice 5154 **

Trouver les plans tangents à la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $x-8yz=0$ et contenant la droite $(\mathscr{D})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005837]

Exercice 5155 ** I

1. Equation du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe la droite d'équations $x=y+1=3z-6$ et de rayon 3.
2. Equation du cône de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe la droite d'équations $x=y+1=3z-6$, de sommet $S(0,-1,2)$ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005838]

---

208 243.99 Autre

Exercice 5156

Soit $\mathscr{E} = \left\{M(z)/2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2-\bar{z}^2) = 1\right\}$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $\mathscr{E}' = R(\mathscr{E})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{E}'$ et en déduire le tracé de $\mathscr{E}$. [002068]

Exercice 5157

1. $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$
2. $xy + 3x + 5y - 4 = 0$
3. $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

[002069]

Exercice 5158 Équations du second degré

Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé :

1. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0$.
2. $5x^2 + 7y^2 + 2xy\sqrt{3} - (10 + 2\sqrt{3})x - (14 + 2\sqrt{3})y - 4 + 2\sqrt{3} = 0$.
3. $x^2 + xy + y^2 = 1$.
4. $x^2 + 2y^2 + 4xy\sqrt{3} + x + y\sqrt{3} + 1 = 0$.
5. $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$ $(m \in \mathbb{R})$.

Correction ▼ [004900]

Exercice 5159 Courbe paramétrée

Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments.

Correction ▼ [004901]

Exercice 5160 Points alignés avec le foyer

Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F, directrice D, excentricité e. On considère deux points de $\mathscr{C}$, $M \neq M'$ alignés avec F. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles.

Correction ▼ [004902]

209 244.01 Courbes paramétrées

Exercice 5161

Tracer les courbes paramétrées suivantes

$$x(t) = \cos^2(t) \qquad y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$$
$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \qquad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$
$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \qquad y(t) = t + \frac{1}{t}$$
$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$x(t) = \tan(t) + \sin(t) \qquad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$
$$x(t) = \sin(2t) \qquad y(t) = \sin(3t)$$

[002046]

Exercice 5162

On fait rouler sans glissement un cercle de rayon 1 sur l'axe (Ox). Déterminer et tracer la courbe décrite par un point du cercle. [002047]

Exercice 5163

Tracer la courbe d'équation $x^3+y^3=3xy$ en la coupant par les droites $y=tx$ où $t\in\mathbb{R}$. [002048]

Exercice 5164

Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t)=\int_0^t \cos(2u)\sin(u)du, \quad y(t)=\int_0^t \sin(2u)\cos(u)du.$$

[002049]

Exercice 5165

Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t)=t^2+2t, y(t)=\frac{1+2t}{t^2}.$$

[002050]

Exercice 5166

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, donner des équations paramétriques pour une droite ; un cercle ; une ellipse ; une hyperbole ; une parabole. [002699]

Exercice 5167

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente en tout point, les points d'inflexion et de rebroussement, les branches infinies, les points doubles ; construire et tracer la courbe.

1. $x=\sin 4t, \quad y=\cos 3t$;
2. $x=t-\sin t, \quad y=1-\cos t$;
3. $x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t$;
4. $x=\cos t, \quad y=\dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t}$;
5. $x=\dfrac{t^3}{1-t^2}, \quad y=\dfrac{1+t}{(1-t)^2}$;
6. $x=\cos^3 t+\sin t, \quad y=\sin^3 t+\cos t$;
7. $x=3\cos t-2\sin^3 t, \quad y=\cos 4t$.

[002700]

Exercice 5168

On considère l'ensemble Γ des points du plan

(x,y) qui vérifient $0<x<2$ et $x=2\sin(y/x)$.

Montrer

que c'est un arc dont on trouvera une représentation

paramétrique. Construire Γ.

[002701]

Exercice 5169

On considère l'arc paramétré du plan défini par

$$x=\frac{t^2+1}{t^3-1}, \quad y=\frac{2t}{t^3-1}.$$

Étudier ses branches infinies. Trouver ses points d'inflexion et montrer qu'ils sont alignés. Tracer l'arc. [002702]

Exercice 5170

Soit l'arc paramétré défini par
$$x = \frac{t-\sin t}{t^2}, \quad y = \frac{1-\cos t}{t^2}.$$
Montrer qu'il peut être prolongé continûment pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'il possède un axe de symétrie. Montrer qu'il possède une infinité de points de rebroussement situés sur un même cercle, et que les tangentes en ces points sont concourantes. Tracer l'arc. [002703]

Exercice 5171

Épicycloïdes, hypocycloïdes -
Soit $R > 0$ un réel, et C_R le cercle de centre O et de rayon R dans le plan.

1. On considère le cercle γ de rayon 1 tangent extérieurement à C_R en $A = (R,0)$; on fait rouler γ le long de C_R sans glisser. Trouver des équations paramétriques de l'ensemble Γ_R des points occupés par A. Dans quels cas cet ensemble est-il un arc ? Sinon quel est-il ?
2. On suppose à présent que $R > 1$ et que γ est tangent intérieurement à C_R ; mêmes questions sur l'ensemble Γ'_R ainsi construit.
3. Tracer Γ_R et Γ'_R pour $R = 6$ et $R = 8/3$.

[002704]

Exercice 5172

Montrer que les deux droites de l'espace d'équations paramétriques $x = 2+2t, y = 2+4t, z = 2-4t$ et $x = 4+t, y = 6+2t, z = -2-2t$ sont identiques. [002705]

Exercice 5173

Montrer que la courbe de l'espace d'équations paramétriques
$$x = 4\sqrt{2}\cos t, \quad y = t+2\sin t, \quad z = -2\cos t$$
est plane. [002706]

Exercice 5174

Hélice -
Étudier la courbe paramétrée de l'espace définie par
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$
Tracer ses projections orthogonales sur les trois plans xOy, yOz, xOz. Montrer que la projection de cette courbe sur le plan xOy parallèlement à la direction d'une de ses tangentes est une cycloïde.

[002707]

Exercice 5175

Trouver en tout point l'équation du plan osculateur à la courbe
$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad z = \frac{t}{t^2+1}.$$

[002708]

Exercice 5176

On considère l'arc de l'espace défini en coordonnées paramétriques par
$$M(t): \qquad x = t^3, \quad y = t^2, \quad z = t.$$
Déterminer l'intersection $\mu(t)$ de sa tangente en $M(t)$ avec le plan osculateur en $O = M(0)$, et montrer que la tangente à l'arc $t \mapsto \mu(t)$ n'est autre que l'intersection des plans osculateurs en O et en $M(t)$. [002709]

Exercice 5177

Loxodromie de sphère -
On considère la courbe paramétrique de l'espace définie par

$$x=\cos(k\log\sin t)\sin t, \quad y=\sin(k\log\sin t)\sin t, \quad z=\cos t,$$

pour $0<t<\pi$, où $k>0$ est un réel fixé.

1. Montrer qu'elle est tracée sur une sphère de centre O, et qu'elle est symétrique par rapport à O. Montrer qu'elle possède deux points limites que l'on précisera.
2. Calculer sa tangente en tout point. Montrer qu'elle fait un angle constant avec les méridiens de la sphère, angle que l'on déterminera en fonction de k.
3. Tracer les projections de la courbe sur les trois plans xOy, yOz et xOz. Quelle est l'allure de cette courbe dans l'espace ?

[002710]

Exercice 5178

Étudier la courbe définie par

$$\theta=t-2\sin t, \qquad \rho=\tan t$$

Trouver asymptotes et points doubles. [002716]

Exercice 5179

Construire la courbe ayant pour équation implicite $(x^2+y^2)^2-ax(x^2+2y^2)=0, (a>0)$.

[002717]

Exercice 5180 Rebroussements

Étudier les points stationnaires des courbes paramétrées suivantes :

1. $x=\sin t, \quad y=\frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicorne)
2. $x=(1+\cos^2 t)\sin t, \quad y=\sin^2 t\cos t$.
3. $x=(1+\cos t)\sin 2t, \quad y=\cos 2t$.
4. $x=2t^3+3t^2, \quad y=3t^2+6t$.
5. $x=t^3-3t, \quad y=t^3-t^2-t+1$.

[004982]

Exercice 5181 Branches infinies

Étudier les branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

1. $x=t^5-t^3+\frac{t}{4}, \quad y=\frac{3t}{3t^2+1}$.
2. $x=2\cos^2 t+\ln|\sin t|, \quad y=\sin 2t$.
3. $x=\sqrt{\frac{t^2-2}{t^4-1}}, \quad y=tx$. L'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est-elle finie ?
4. $x=\frac{t^3-t}{2t-1}, \quad y=tx$.
5. $x=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}, \quad y=\frac{1}{t}+\frac{1}{(t+1)^2}$.
6. $x=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}, \quad y=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$.
7. $x=\frac{3t}{1+t^3}, \quad y=tx$.
8. $x=\frac{te^t}{t+1}, \quad y=\frac{e^t}{t+1}$.
9. $x=2t^3+3t^2, \quad y=3t^2+6t$.
10. $x=t^3-3t, \quad y=t^3-t^2-t+1$.
11. $x=\frac{t}{t^2-1}, \quad y=\frac{t^2}{t-1}$.

[004983]

Exercice 5182 Inflexions

Déterminer les points d'inflexion des courbes paramétrées suivantes :

1. $x = \sin t, \quad y = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicorne)
2. $x = \sin \frac{t}{2}, \quad y = \tan t$.
3. $x = \frac{e^t}{t}, \quad y = te^t$.
4. $x = \sin t \cos 2t, \quad y = \cos t \sin 2t$.

Correction ▼ [004984]

Exercice 5183 Matexo

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques : $x(t) = \frac{t^2+1}{t^3-1}, y(t) = \frac{2t}{t^3-1}$.

1. Montrer que les points de paramètres t, u, v (distincts) sont alignés si et seulement si $tuv = t+u+v+1$.
2. Prouver que $\mathscr{C}$ admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

Correction ▼ [004985]

Exercice 5184 Construction

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x = \frac{t}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$.

Déterminer les coordonnées du point double et vérifier que les tangentes en ce [004986]

Exercice 5185 Construction

Dessiner la courbe d'équation cartésienne : $x^3 + y^3 = 3xy$ (folium de Descartes) On prendra $t = \frac{y}{x}$ comme paramètre. [004987]

Exercice 5186 Construction

Construire les courbes d'équation polaire :

1. $\rho = \frac{\cos(\theta/2)}{1+\sin\theta}$.
2. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. (Strophoïde, calculer l'aire limitée par la boucle)
3. $\rho = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta-1}$. Vérifier que la courbe traverse ses asymptotes au point double.
4. $\rho = \frac{1}{\cos\theta+\sin 2\theta}$.
5. $\rho = \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$.
6. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta-1}$.
7. $\rho = \cos\frac{\theta}{3}$.
8. $\rho = 1+\sin 3\theta$.
9. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.
10. $\rho = \ln\theta$.

[004988]

Exercice 5187 Strophoïde

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon 1, $A \in \Gamma$, et D le diamètre de Γ perpendiculaire à (OA).

Pour $M \in \Gamma \setminus \{A\}$, on construit le point N intersection de D et (AM), puis le point P tel que $\vec{AP} = \vec{MN}$.

[004989]

Exercice 5188 Cochléoïde

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$ (cochléoïde)
2. Une droite passant par O coupe $\mathscr{C}$ en un certain nombre de points. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points sont concourantes.

Correction ▼ [004990]

Exercice 5189 Chimie P 91

Soient O et A deux points distincts dans un plan $\mathscr{P}$. Déterminer le lieu des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\overline{(\vec{OA},\vec{AM})} \equiv 3\overline{(\vec{OA},\vec{OM})} (\text{mod}\,\pi)$.

Correction ▼ [004991]

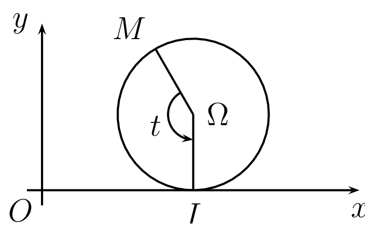
Exercice 5190 Ensi Chimie P' 93

Déterminer les points doubles de la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{\theta}{\theta^2-1}$.

Correction ▼ [004992]

Exercice 5191 Quelques grands classiques

1. (**) **L'astroïde.**
   (a) a est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$.
   (b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.
2. (**) **La cycloïde.**
   (a) Un cercle $(\mathscr{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathscr{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathscr{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathscr{C})$). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega I}})$.



   Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).
   (b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.
3. (**) **Une courbe de** Lissajous. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$
4. (**) **La lemniscate de** Bernoulli. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$
5. (***) **Les tractrices.**
   (a) Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox).
   (b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(\ln|\tan\frac{t}{2}|+\cos t) \\ y = R\sin t \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

Correction ▼ [005523]

Exercice 5192

Construire les courbes de paramétrisations :

1. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \frac{t^2}{t^2-1} \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{array}\right.$

3. $\begin{cases} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = t^2+t^3 \\ y = t^2+t^3-2t^4-2t^5 \end{cases}$

Correction ▼ [005524]

Exercice 5193

La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathscr{C})$ est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à $(\mathscr{C})$, orthogonales. Déterminer l'orthoptique de $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1. $(\mathscr{C})$ est un astroïde de paramétrisation $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $a > 0$ donné.
2. $(\mathscr{C})$ est l'arc paramétré : $\begin{cases} x = t^2-2t \\ y = 2t^3-3t^2 \end{cases}$.
3. $(\mathscr{C})$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.

Correction ▼ [005525]

Exercice 5194

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré : $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$ [005526]

Exercice 5195

Dans chacun des cas suivants, trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe proposée puis construire

$$1)\ x(y^2-x^2) = 2y^2-x^2 \qquad 2)\ x^3-y^3+xy-2x+2y+3 = 0$$

[005527]

Exercice 5196

Trouver une équation cartésienne des supports des arcs suivants :

1. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

[005528]

---

210 244.02 Coordonnées polaires

Exercice 5197

Tracer les courbes en polaires suivantes

$$\rho(\theta) = \sin(2\theta)$$
$$\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$
$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$$
$$\rho(\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$$
$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$$

[002051]

Exercice 5198

Soit C un cercle du plan de centre $(1,0)$ et de rayon a. Déterminer et tracer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les tangentes de C. [002052]

Exercice 5199

Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point M fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\overrightarrow{OM}$. [002053]

Exercice 5200

Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation $2xy(x^2+y^2) = x^2 - y^2$. [002054]

Exercice 5201

Tracer la courbe d'équation polaire :

$$r = 1 + \cos\theta.$$

[002055]

Exercice 5202

Tracer les courbes d'équations polaires :

$$r = \frac{\tan\theta}{\cos\theta}\ ;\ r^2 = \frac{1}{\sin(2\theta)}.$$

[002056]

Exercice 5203

1. Montrer qu'un cercle C de diamètre a et passant par le pôle O peut être représenté en coordonnées polaires par l'équation $\rho = a\cos(\theta - \theta_0)$. On considère un réel $b > 0$ et la conchoïde de C de valeur b, c'est-à-dire la courbe Γ définie comme suit : à tout point P de C, on associe le point M situé sur la demi-droite OP, du côté opposé à O par rapport à P et tel que $PM = b$; Γ est le lieu des points M. Donner une équation polaire de Γ. Construire Γ en distinguant quatre cas : $a > b$, $a = b$, $a < b < 2a$ et $b \geq 2a$. Déterminer en particulier les points d'inflexion dans chaque cas.
2. En s'inspirant de la question précédente, tracer les conchoïdes d'une droite $\rho = a/\cos(\theta - \theta_0)$.

[002711]

Exercice 5204

Étudier en fonction des paramètres $a, b > 0$ les courbes d'équation $\rho = a/(1 + b\cos\theta)$ (en particulier branches infinies, position par rapport aux asymptotes). Montrer que ce sont des coniques, et en déterminer les foyers. [002712]

Exercice 5205

Étudier et tracer les courbes définies en coordonnées polaires ci-après ; s'il y a des branches infinies, les préciser, et préciser la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes ; trouver aussi les points doubles :

rosace à quatre branches	ρ	$=$	$a\sin 2\theta$
	ρ	$=$	$\sin\theta+\cos\frac{\theta}{2}$
strophoïde droite	ρ	$=$	$a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$
	ρ	$=$	$1+2\cos\frac{3\theta}{2}$
scarabée	ρ	$=$	$5\cos 2\theta-3\cos\theta$
courbe du diable	ρ^2	$=$	$49+\frac{1}{\cos 2\theta}$
spirale d'Archimède	ρ	$=$	$a\theta$
	ρ	$=$	$\theta+1/\theta$ (asymptote ?)
spirale parabolique	θ	$=$	$(\rho-1)^2$
cochléoïde	ρ	$=$	$a\frac{\sin\theta}{\theta}$
courbe du spiral	ρ	$=$	$\frac{a}{1+e^{\theta/5}}$
	ρ	$=$	$\frac{1-2\cos\theta}{1+\sin\theta}$ (parabole asymptote)
épi	ρ	$=$	$\frac{a}{\sin(5\theta/3)}$

[002713]

Exercice 5206

Une *spirale logarithmique* est une courbe d'équation en coordonnées polaires $\rho = ae^{k\theta}$. Montrer qu'elle coupe ses rayons vecteurs suivant un angle constant, qu'on déterminera en fonction de k. [002714]

Exercice 5207

Montrer que la courbe définie par

$$\rho = 1+\tan\frac{\theta}{2}$$

admet une asymptote ; préciser la position de la courbe par rapport à elle. [002715]

Exercice 5208 Courbes en polaires

Construire les courbes en polaires suivantes :

1. $\rho = \dfrac{\cos\theta/2}{1+\sin\theta}$
2. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos}\theta$
3. $\rho = \dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta-1}$
4. $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta+\sin 2\theta}$
5. $\rho = \cos\theta+\dfrac{1}{\cos}\theta$

6. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$
7. $\rho = \cos\dfrac{\theta}{3}$
8. $\rho = 1 + \sin 3\theta$
9. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$
10. $\rho = \ln\theta$
11. $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$

Correction ▼ [004993]

Exercice 5209 ***

Construire l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $r = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}}$ (commencer par étudier toutes les symétries de l'ensemble considéré).

Correction ▼ [005205]

Exercice 5210

Construire les courbes suivantes :

1. $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$,
2. $r = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$,
3. $r = ae^{b\theta}$, $(a,b) \in]0,+\infty[^2$,
4. $r = 2\cos(2\theta)+1$,
5. $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

Correction ▼ [005530]

Exercice 5211

Etude complète de la courbe d'équation polaire $r = \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$.

Correction ▼ [005531]

Exercice 5212 La cardioïde

Soit la courbe d'équation polaire $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$.

1. Construire la courbe.
2. Longueur et développée.

Correction ▼ [005532]

Exercice 5213

Construire la courbe d'équation cartésienne $x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2 = 0$ après être passé en polaires .

Correction ▼ [005533]

Exercice 5214

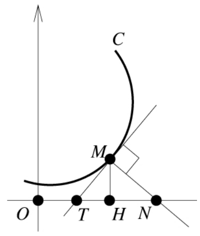
Développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^{\theta}$ $(a > 0)$.

Correction ▼ [005534]

211 244.03 Courbes définies par une condition

Exercice 5215 Sous-tangente, sous-normale

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. A un point M un point de $\mathscr{C}$, on associe les points H, T et N selon le dessin :



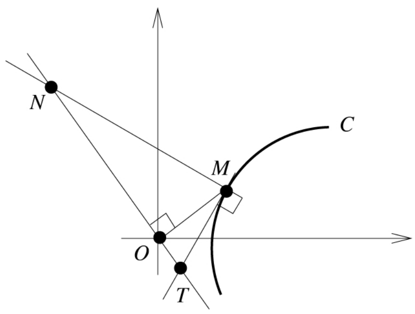
Déterminer les courbes d'équation $y = f(x)$ vérifiant la condition suivante :

1. $\overline{HT} =$ cste.
2. $\overline{HN} =$ cste.
3. $MN =$ cste.
4. $MT =$ cste.
5. $AN = MN$ où A est le point de coordonnées $(0,a)$.

Correction ▼ [004994]

Exercice 5216 Sous-tangente, sous-normale

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. A un point M un point de $\mathscr{C}$, on associe les points T et N selon le dessin :



Déterminer les courbes vérifiant la condition suivante :

1. $\overline{OT} =$ cste.
2. $\overline{ON} =$ cste.

Correction ▼ [004995]

Exercice 5217 Milieu fixe

Soit D une droite du plan et $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. Pour $M \in \mathscr{C}$ on note T et N les points d'intersection de D avec la tangente et la normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer $\mathscr{C}$ telle que le milieu de $[T,N]$ reste fixe.

$\left(\text{On paramètrera } \mathscr{C} \text{ par } t = \frac{y'}{x'}\right)$

Correction ▼ [004996]

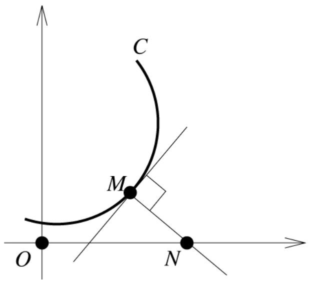
Exercice 5218 Distance TN constante

Soit D une droite du plan et $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. Pour $M \in \mathscr{C}$ on note T et N les points d'intersection de D avec la tangente et la normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer $\mathscr{C}$ telle que la distance TN reste constante.

$\left(\text{On paramètrera } \mathscr{C} \text{ par } t = \frac{y'}{x'}\right)$

Correction ▼ [004997]

Exercice 5219 Ensi Chimie P' 93



Trouver les courbes $\mathscr{C}$ telles que $MN = ON$.

Correction ▼ [004998]

Exercice 5220 Ensi Physique P 94

Trouver les arcs biréguliers du plan dont le cercle osculateur est en tout point tangent à une droite fixe.

Correction ▼ [004999]

Exercice 5221 L'homothétique du cercle osculateur reste tangent à Ox

Déterminer les courbes planes telles que l'image du cercle osculateur en un point M par l'homothétie de centre M et de rapport 2 reste tangente à Ox.

On prendra φ comme paramètre et on cherchera une équation différentielle sur le rayon de courbure R.

Correction ▼ [005000]

Exercice 5222 Ensi P 91

On se place dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Donner l'ensemble des trajectoires orthogonales de la famille des cercles de rayon constant a $(a > 0)$ centrés sur Ox.

Correction ▼ [005001]

Exercice 5223 Équations intrinsèques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On étudie les courbes planes paramétrées par une abscisse curviligne, s, telles que la courbure au point M_s soit $c = f(s)$.

1. Montrer que si l'on impose la position de M_0 et la tangente en ce point, le problème admet une solution unique.
2. Dans le cas général, démontrer que les courbes solutions se déduisent d'une courbe particulière en appliquant un déplacement du plan arbitraire.
3. Étudier les équations : $c =$ cste, $c = \frac{1}{s}$ (spirale logarithmique).

[005002]

Exercice 5224 Équations intrinsèques

Chercher les courbes planes vérifiant l'équation intrinsèque :

1. $R = s$.
2. $Rs = 1$.
3. $R^2 = 2as$, $a > 0$ donné.
4. $R = 1 + s^2$.
5. $R^2 + s^2 = a^2$.

Correction ▼ [005003]

Exercice 5225 I reste sur un cercle

Trouver les courbes planes $\mathscr{C}$ telles que le centre de courbure reste sur un cercle $\mathscr{C}(O,r)$ fixe. (On prendra φ comme paramètre)

Correction ▼ [005004]

Exercice 5226 $M - s/2M'$ reste sur Ox

Soit $\mathscr{C}$ une courbe plane et s une abscisse curviligne sur $\mathscr{C}$. A chaque point $M \in \mathscr{C}$ d'abscisse curviligne s, on associe le point $N = M - \frac{s}{2}\vec{T}$. Trouver $\mathscr{C}$ telle que N reste sur Ox.

Correction ▼ [005005]

Exercice 5227 $MC = kMN$

Trouver les courbes Γ du plan ayant la propriété suivante : Soit $M \in \Gamma$, C le centre de courbure de Γ en M et N le projeté de O sur la normale à Γ en M. Alors $\vec{MC} = k\vec{MN}$ où k est un réel fixé.

Étudier les cas particuliers : $k=1$, $k=\frac{2}{3}$, $k=2$, $k=\frac{1}{3}$ et $k=-1$.

Correction ▼ [005006]

Exercice 5228

Soit T l'intersection de (Ox) et de la tangente en M et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes telles que

1. $MT = a$ ($a > 0$ donné)
2. $HT = a$ (sans rapport avec 1))

[005529]

212 244.04 Branches infinies

Exercice 5229 Branches infinies

Déterminer les branches infinies pour les courbes paramétrées suivantes :

1. $x = 4t^5 - 4t^3 + t$, $y = \dfrac{t}{3t^4+1}$
2. $x = 2\cos^2 t + \ln|\sin t|$, $y = \sin 2t$
3. $x = \sqrt{\dfrac{t^2-2}{t^4-1}}$, $y = tx$
4. $x = \dfrac{t^3-t}{2t-1}$, $y = tx$
5. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t+1)^2}$
6. $x = \sin\dfrac{t}{2}$, $y = \tan t$
7. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$
8. $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = tx$
9. $x = \dfrac{te^t}{t+1}$, $y = \dfrac{e^t}{t+1}$
10. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
11. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
12. $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$

Correction ▼ [005007]

213 244.05 Points de rebroussement

Exercice 5230 Rebroussements

1. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
2. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
3. $x = \sin t$, $y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}$
4. $x = (1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = \sin^2 t \cos t$
5. $x = (1 + \cos t)\sin 2t$, $y = \cos 2t$

Correction ▼ [005008]

214 244.06 Enveloppes

Exercice 5231 Esem 91

Soit $\mathscr{C}$ le cercle : $x^2 + y^2 = 1$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'angle polaire θ et D_θ la droite passant par M d'angle polaire 2θ. Trouver l'enveloppe des droites D_θ.

Correction ▼ [005009]

Exercice 5232 Ensi Physique 93

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et S un point du plan différent de O. Donner l'enveloppe des normales en M à (SM) lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

Correction ▼ [005010]

Exercice 5233 Cordes sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Chercher l'enveloppe des cordes $[A,B]$ de $\mathscr{P}$ de hauteur $h > 0$ donnée.

Correction ▼ [005011]

Exercice 5234 Cordes sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Pour $A, B \in \mathscr{P}$ distincts, on note C le point d'intersection des tangentes en A et B. Trouver l'enveloppe des droites (AB) lorsque l'aire du triangle ABC reste constante.

Correction ▼ [005012]

Exercice 5235 Cordes sur une parabole

Soient M, M' deux points d'une parabole $\mathscr{P}$ tels que (MM') passe par le foyer F. Quels sont :

1. L'enveloppe des droites (MM') ?
2. Le lieu des milieux des segments $[M,M']$?
3. L'enveloppe des médiatrices de $[M,M']$?

Correction ▼ [005013]

Exercice 5236 Rayons réfléchis sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

1. Un rayon incident arrive suivant une parallèle à Ox et se réfléchit à “l'intérieur” de $\mathscr{P}$ avec le même angle. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.
2. Même question, mais le rayon incident est parallèle à Oy.

Correction ▼ [005014]

Exercice 5237 Cercle osculateur à une parabole

Soit $\mathscr{P}$ une parabole, $M \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ le cercle osculateur à $\mathscr{P}$ en M. Montrer que, sauf cas particulier, $\mathscr{C}$ recoupe $\mathscr{P}$ en un deuxième point P. Déterminer l'enveloppe des droites (MP).

Correction ▼ [005015]

Exercice 5238 Cordes d'une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyer F. Trouver l'enveloppe des cordes $[P,Q]$ de $\mathscr{H}$ vues depuis F sous un angle droit.

Correction ▼ [005016]

Exercice 5239 Cardioïde

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Chercher l'enveloppe des droites $D_\theta = (A_\theta\, A_{2\theta})$.

Correction ▼ [005017]

Exercice 5240 Cycloïde

Chercher l'enveloppe d'un diamètre Δ d'un cercle $\mathscr{C}$ roulant sans glisser sur une droite D. Comparer le point caractéristique à la projection orthogonale du point de contact I sur Δ.

Correction ▼ [005018]

Exercice 5241 Hypocycloïde

Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par O centré sur Ox. Pour $M \in \mathscr{C}$, on note D_M la droite symétrique de (OM) par rapport à l'horizontale passant par M. Déterminer l'enveloppe des droites D_M et la construire.

Correction ▼ [005019]

Exercice 5242 Cordes de $\rho = a/\cos(3\theta)$

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{a}{\cos 3\theta}$, $a > 0$. Chercher l'enveloppe des cordes vues de O sous un angle droit.

Correction ▼ [005020]

Exercice 5243 Perpendiculaire à OM sur une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de centre O, de paramètres a et b. Pour $M \in \mathscr{E}$, soit D la perpendiculaire en M à (OM).

1. Donner les équations paramétriques de l'enveloppe des droites D.
2. Tracer les enveloppes sur ordinateur pour différentes valeurs de a/b.
3. Étudier les points stationnaires de l'enveloppe quand il y en a.

Correction ▼ [005021]

Exercice 5244 $AM \perp D$

Soit D une droite du plan et A un point non élément de D. Soit M un point variable sur D. Trouver l'enveloppe de la normale en M à (AM).

Correction ▼ [005022]

Exercice 5245 Concavité

Soient u, v, w de classe $\mathscr{C}^2$, D_t la droite d'équation : $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$, et Γ l'enveloppe des droites D_t.

On note : $\delta = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$, et on suppose pour tout t : $\delta\Delta w(t) \neq 0$.

Montrer que Γ tourne sa concavité vers O si et seulement si pour tout t : $\delta\Delta w(t) > 0$. [005023]

215 244.07 Propriétés métriques : longueur, courbure,...

Exercice 5246

Déterminer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leq x \leq 3$. [002059]

Exercice 5247

Déterminer une abscisse curviligne, la longueur et la développée de l'astroïde. [002060]

Exercice 5248

Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$ en fonction de ρ. [002061]

Exercice 5249

Soit $\mathscr{P}$ la parabole $y^2 = x$. Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la développée de $\mathscr{P}$. Tracer Γ. [002062]

Exercice 5250

Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.
3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.
4. En déduire une construction géométrique de la développée de Γ.

[002063]

Exercice 5251

Soit $M(s)$ un arc C^2 birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Soit $\mathscr{R}$ le repère de Frénet $(M(0), \vec{t}(0), \vec{n}(0))$. On note $(X(s), Y(s))$ les coordonnées dans ce repère d'un point $M(s)$ de la courbe.

1. Montrer que si R_0 est le rayon de courbure en $M(0)$ alors $R_0 = \lim_{s \to 0} \frac{X^2(s)}{2Y(s)}$.
2. En déduire le rayon de courbure au point $\theta = 0$ de la courbe $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(\frac{\theta}{2})$.

[002064]

Exercice 5252 Calcul de longueur

Déterminer la longueur d'un arc $\overset{\frown}{M_0M_t}$ ou $\overset{\frown}{M_0M_\theta}$ pour les courbes :

1. $x = t - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t, \quad y = 2\operatorname{ch} t$
2. $\rho = \operatorname{th} \frac{\theta}{2}$.

Correction ▼ [005024]

Exercice 5253 Calcul de longueur

Soit la courbe paramétrée par : $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AO}$ où A est le point de rebroussement.

Correction ▼ [005025]

Exercice 5254 Calcul de longueur

Calculer la longueur totale des courbes suivantes :

1. $x = (1+\cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t \cos t$.
2. $\rho = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Correction ▼ [005026]

Exercice 5255 TPE MP 2003

Nature, construction et longueur de la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Correction ▼ [005027]

Exercice 5256 Comparaison de longueurs (ENS MP 2002)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue concave, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, L_1 la courbe paramétrée $x \mapsto (x, f(x))$ et L_2 un chemin continu $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant les extrémités de L_1 et situé au-dessus de L_1. Montrer que la longueur de L_2 est supérieure ou égale à celle de L_1.

Correction ▼ [005028]

Exercice 5257 Centre de courbure

Déterminer les coordonnées du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :

1. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$.
2. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$.
3. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$. (Cycloïde, indiquer une relation géométrique simple entre la courbe décrite par M et celle décrite par I)
4. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. (Astroïde) Construire le courbe $\mathscr{C}$ et sa développée, puis prouver par le calcul qu'elles sont semblables.
5. Hyperbole d'équation $xy = 1$.
6. Ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
7. $\rho = e^\theta$. (Spirale logarithmique)
8. $\rho = 1 + \cos\theta$. (Cardioïde)

Correction ▼ [005029]

Exercice 5258 Points sur une hyperbole (Ensi P 91)

Soit la courbe Γ définie par : $xy = a^2$, $(a > 0)$. Pour chaque point M on définit le point Ω par : $2\vec{\Omega M} = \vec{MN}$, où N est le point où Γ recoupe sa normale en M. Montrer que Ω est le centre de courbure de Γ en M.

Correction ▼ [005030]

Exercice 5259 Cercle circonscrit à trois points

Soit $\mathscr{C}$ une courbe plane paramétrée par une abscisse curviligne s. Soit s_0 fixé.

1. Donner le DL à l'ordre 2 de M_s pour $s \to s_0$ dans le repère de Frenet en M_{s_0}.
2. On suppose $c(s_0) \neq 0$. Montrer que pour h assez petit, les points M_{s_0-h}, M_{s_0}, M_{s_0+h} ne sont pas alignés.
3. Soit Γ_h le cercle circonscrit à ces trois points, et R_h son rayon. Chercher $\lim_{h\to 0} R_h$.

[005031]

Exercice 5260 Propriétés de la cycloïde

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ pour $t \in]0, 2\pi[$ (arche de cycloïde). On note S le point de paramètre π, et D la tangente à $\mathscr{C}$ en S.

Soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{S\}$, I le point d'intersection de la normale à $\mathscr{C}$ en M et de Ox, et J le point d'intersection de la tangente en M avec D.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que I et J ont même abscisse.
3. On prend S comme origine des abscisses curvilignes. Trouver une relation entre s et $\vec{MJ}$.

[005032]

Exercice 5261 Normales à une cardioïde

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ (cardioïde).

1. Dessiner $\mathscr{C}$.
2. Une droite D passant par O coupe $\mathscr{C}$ en deux points M_1 et M_2. Soient Δ_1, Δ_2 les normales à $\mathscr{C}$ en ces points et P le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2. Quelle est la courbe décrite par P lorsque D tourne autour de O ?

Correction ▼ [005033]

Exercice 5262 Calcul de courbure par TFI

Déterminer le rayon de courbure de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation : $2x^2 + y^2 = 1$ aux points intersection de $\mathscr{C}$ et des axes Ox et Oy.

Correction ▼ [005034]

Exercice 5263 Calcul de courbure par TFI

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x^4 + y^4 + x^3 + y^3 = 2$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, calculer la courbure de $\mathscr{C}$ en $A = (-1, 1)$.

Correction ▼ [005035]

Exercice 5264 Calcul de courbure (Chimie P' 90)

Déterminer l'ensemble des centres de courbure en O aux courbes intégrales de l'équation différentielle $(1 - x^2)y'' - xy' - 2y = 1$ telles que $y(0) = 0$.

Correction ▼ [005036]

Exercice 5265 Courbe parallèle à une parabole

Soit $\mathscr{C} : t \mapsto M_t$ une courbe plane paramétrée sans point stationnaire. Les courbes parallèles à $\mathscr{C}$ sont les courbes de la forme : $t \mapsto M_t + \lambda\vec{N}$, ou $\vec{N}$ est le vecteur normal en M_t et λ est constant.

1. Montrer que le parallélisme est une relation d'équivalence entre arcs sans points stationnaires.
2. Construire les parallèles à la parabole d'équation $y = x^2$ pour $\lambda = \pm 2$.

[005037]

Exercice 5266 Points équidistants sur la tangente

Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée, $(M, \vec{t}, \vec{n})$ le repère de Frenet en un point M de $\mathscr{C}$. Soit $a > 0$ fixé et $P_1 = M + a\vec{t}$, $P_2 = M - a\vec{t}$. On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes décrites par P_1 et P_2 quand M décrit $\mathscr{C}$ et c_1, c_2 les courbures correspondantes. Soit C le centre de courbure à $\mathscr{C}$ en M.

Montrer que $c_1 + c_2 = \frac{2}{CP_1}$ et que les trois normales sont concourantes.

Correction ▼ [005038]

Exercice 5267 Paraboles de cercle osculateur donné

Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2-2Rx=0$ et Δ une droite variable passant par O.

1. Chercher l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ d'axe parallèle à Δ, passant par O, dont $\mathscr{C}$ est le cercle osculateur en O.
2. Quelle est l'enveloppe des paraboles précédentes ?

Correction ▼ [005039]

Exercice 5268 Développante

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'équations paramétriques : $x=3t-t^3, \quad y=3t^2$.
2. Chercher les équations paramétriques des développantes de $\mathscr{C}$.
3. Tracer la développante qui rencontre $\mathscr{C}$ à l'origine.

Correction ▼ [005040]

Exercice 5269 Développante

Déterminer la développante de la chainette $\mathscr{C}$ d'équation $y=a\mathrm{ch}(x/a)$ qui rencontre $\mathscr{C}$ pour $x=0$. (Tractrice) Dessiner les deux courbes.

Correction ▼ [005041]

Exercice 5270

Longueur L de (Γ) dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'astroïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right.$ $(a>0$ donné).
2. Γ est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=R(t-\sin t) \\ y=R(1-\cos t) \end{array}\right.$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
3. Γ est l'arc de parabole d'équation cartésienne $x^2=2py$, $0\leq x\leq a$ ($p>0$ et $a>0$ donnés).
4. Γ est la cardioïde d'équation polaire $r=a(1+\cos\theta)$ ($a>0$ donné).

Correction ▼ [005535]

Exercice 5271

Déterminer et construire la développée

1. $\left\{\begin{array}{l} x=R\left(\cos t+\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ y=R\sin t \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x=R(t-\sin t) \\ y=R(1-\cos t) \end{array}\right.$.
3. $y=x^3$

Correction ▼ [005536]

Exercice 5272

Trouver le point de la courbe d'équation $y=\ln x$ en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

Correction ▼ [005537]

Exercice 5273

Soit (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(\cos x)$, pour $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Calculer l'abscisse curviligne s quand O est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation est celle des x croissants. Trouver une relation entre R et s. Tracer (Γ) et sa développée.

Correction ▼ [005538]

Exercice 5274

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note (Γ_λ) la courbe d'équation $y = \lambda x e^{-x}$. Quel est le lieu des centres de courbure C_λ en O à (Γ_λ) quand λ décrit $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005539]

216 244.08 Courbes dans l'espace

Exercice 5275 Ensi P 90

On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par : $x(t) = \frac{t^4}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$, $z(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

A quelle condition M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points de $\mathscr{C}$ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 sont-ils coplanaires ?

Correction ▼ [005042]

Exercice 5276 Courbure de M cste $\Rightarrow$ courbure de I cste

Soit $\mathscr{C}$ une courbe de l'espace, et Γ la courbe décrite par le centre de courbure, I, en un point M de $\mathscr{C}$. On suppose que la courbure de $\mathscr{C}$ est constante et sa torsion non nulle.

1. Montrer que la courbure de Γ est aussi constante.
2. Chercher la torsion de Γ en I en fonction de la courbure et la torsion de $\mathscr{C}$ en M.

Correction ▼ [005043]

Exercice 5277 Éléments de courbure de T

Soit $s \mapsto M_s$ une courbe de l'espace de classe $\mathscr{C}^3$ paramétrée par une abscisse curviligne, et P le point tel que $\vec{OP} = \frac{d\vec{M}}{ds}$. Chercher les éléments de courbure de la trajectoire de P.

Correction ▼ [005044]

Exercice 5278 Enveloppe de normales

Soit $s \mapsto M_s$ une courbe de l'espace de classe $\mathscr{C}^3$ paramétrée par une abscisse curviligne. Pour tout s on choisit une normale à la courbe en M_s : Δ_s. A quelle condition les droites Δ_s admettent-elles une enveloppe ?

Correction ▼ [005045]

Exercice 5279 Équations intrinsèques en dimension 3

Trouver les courbes de l'espace vérifiant les équations intrinsèques : $c = \tau = \frac{1}{s\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005046]

217 244.99 Autre

Exercice 5280

Soit $f : [0,1] \to [0,1]^2$ de classe C^1, montrer que f ne peut être bijective. [002057]

Exercice 5281

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, et $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Montrer :

$$\begin{array}{rcl} \forall \varepsilon & > & 0, \exists \gamma' \in C([0,1],\mathbb{C}) \text{ tel que :} \\ 1 & : & \forall t \in [0,1], |\gamma(t) - \gamma'(t)| < \varepsilon, \\ 2 & : & \forall t \in [0,1], \gamma(t) \neq z. \end{array}$$

[002058]

Exercice 5282

Un cercle de rayon R roule sans glisser sur l'axe Ox dans le sens des x croissants. Soit C la courbe décrite par le point M lié à la circonférence qui, dans la position initiale, coïncide avec l'origine O (cycloïde). Soit M(θ) la position du point M quand le cercle a tourné d'un angle θ à partir de la position initiale et $\Omega(\theta)$ le point de contact correspondant entre la circonférence et l'axe Ox.

- Déterminer l'abscisse de $\Omega(\theta)$ et les coordonnées $x(\theta)$ et $y(\theta)$ du point M(θ). Montrer que la courbe C est périodique et représenter graphiquement la première période.
- Déterminer, en fonction de θ, le vecteur tangent $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}/d\theta$, le vecteur tangent unitaire $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, et l'élément de longueur ds.
- Déterminer le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ et le rayon de courbure ρ au point paramétré par θ. Montrer que le centre de courbure est situé sur la droite définie par M(θ) et $\Omega(\theta)$, et préciser sa position sur cette droite.
- (facultatif) L'angle de rotation est défini en fonction du temps par la fonction $\theta(t)$. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du point M à l'instant t. Montrer que $\overrightarrow{v}$ s'exprime en fonction de ΩM, $d\theta/dt$ et $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, et donner un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ orthogonal au plan du mouvement tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$. Obtenir géométriquement à un instant donné quelconque le vecteur vitesse d'un point P quelconque de la circonférence.

[002691]

Exercice 5283

Un segment AB de longueur l se déplace dans le plan de façon que le point A reste constamment sur l'axe Ox et le point B sur l'axe Oy, l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{AB})$ variant de 0 à 2π. Soit M le point de AB tel que AM=αl, $\alpha = C^{te}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Calculer les coordonnées de M en fonction de θ et déterminer la courbe qu'il décrit.

- A l'instant zéro un oiseau s'envole d'un point A d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}$. Au même instant un chasseur situé au point B tire un coup de fusil en vue d'abattre l'oiseau. La vitesse de la balle de fusil est en valeur absolue égale à u. On suppose évidemment que l'on a $u > \|\overrightarrow{v}\|$. Déterminer la direction dans laquelle le chasseur doit tirer pour abattre l'oiseau et l'instant t_0 de l'impact : on écrira deux équations déterminant la vitesse vectorielle $\overrightarrow{u}$ de la balle de fusil et l'instant t_0, et on en donnera les solutions. Donner l'expression de la distance d parcourue par l'oiseau entre les instants 0 et t_0.
  Appliquer numériquement les résultats précédents aux deux cas définis par $A(0,0,a)$, $B(b,0,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,v,0)$ avec :
- Envol à partir du repos : a=15m, b=10m, v=5m/s, u=300m/s
- Passage en plein vol : a=20m, b=0, v=90km/h, u=300m/s

[002694]

Exercice 5284

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px, p > 0$.

- Montrer que la tangente à $\mathscr{P}$ au point $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$.
- Un rayon lumineux, porté par la droite d'équation $y = y_0$ et se propageant en sens inverse de l'axe des x, se réfléchit au point M_0 sur la tangente à $\mathscr{P}$ selon la loi de Descartes. Déterminer l'équation du rayon réfléchi.
- Vérifier que les rayons réfléchis correspondant aux diverses valeurs de y_0 passent tous par un même point F situé sur l'axe des x (foyer de la parabole).
  Citer des applications pratiques de cette propriété.

[002695]

Exercice 5285

On dispose d'un oscilloscope à deux voies. On applique sur la voie X une tension sinusoïdale de pulsation ω, et sur la voie Y une tension de même amplitude et de pulsation 2ω. En plaçant l'oscilloscope en mode X–Y et pour un choix approprié du gain de chaque voie, on observe sur l'écran une courbe paramétrée définie en coordonnées cartésiennes par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin \omega t \\ y(t) = a \sin 2\omega t \end{cases}$$

- Déterminer la période du mouvement T.
- Donner le tableau des variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle [0,T], et en déduire l'allure de la courbe.
- Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'abscisse ou d'ordonnée maximum.
- Déterminer les symétries de la courbe et donner les transformations correspondantes du paramètre t.

[002696]

Exercice 5286

Sur l'écran d'un oscilloscope on observe la courbe dont les équations paramétriques sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = a\sin\omega t \\ y(t) = a\sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

- Exprimer puis factoriser la somme et la différence $x+y$ et $x-y$.
- Soient X et Y les coordonnées par rapport aux axes déduits des axes Ox et Oy par une rotation de $\pi/4$. Donner les équations paramétriques de la courbe dans ce système de coordonnées.
- Tracer la courbe et discuter de sa forme et du sens de parcours sur celle-ci en fonction du paramètre $\varphi \in [0,2\pi]$ (considérer les valeurs multiples de $\pi/2$ et les régions qu'elles délimitent).
- La courbe étant supposée donnée, en déduire géométriquement la valeur de φ.

[002697]

218 245.00 Analyse vectorielle : forme différentielle, champ de vecteurs, circulation

219 245.01 Forme différentielle, champ de vecteurs, circulation

Exercice 5287

On considère le champ de vecteurs $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$P(x,y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}; -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

1. Vérifier que la forme différentielle associée à P est fermée.
2. En déduire que P est un champ de gradients et en déterminer un potentiel.
3. Calculer la circulation de P le long du chemin

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); \mathrm{e}^t + 1).$$

[002072]

Exercice 5288

Soient a,b des nombres tels que $0 < a < b$ et soit

$$D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leq xy \leq b,\ y \geq x,\ y^2 - x^2 \leq 1\}.$$

En effectuant le changement de variable $u = xy, v = y^2 - x^2$, calculer

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

[002073]

Exercice 5289

Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy + e^y, x^2 + xe^y)$. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$. [002074]

Exercice 5290

Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (xy, -z, xz)$. $\vec{V}$ est-il un champ de gradient ? Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ pour $t \in [0,2\pi]$. [002075]

Exercice 5291

Montrer que $\omega(x,y) = \frac{(1-x^2+y^2)y}{(1+x^2+y^2)^2}dx + \frac{(1+x^2-y^2)x}{(1+x^2+y^2)^2}dy$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégrer. [002076]

Exercice 5292

Sur $D =]0,+\infty[^2$ on définit $\omega(x,y) = (\frac{x}{x+y} + \ln(x^2+xy))dx + \frac{\varphi(y)}{x+y}dy$.

1. Trouver une CNS sur φ pour que ω soit fermée.
2. Montrer qu'alors ω est exacte et l'intégrer.

[002077]

Exercice 5293

Soit $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ une forme différentielle C^1 sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$.

1. A quelle condition ω est-elle exacte ?
2. On suppose qu'elle n'est pas exacte et on cherche alors $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^*$ de classe C^1 telle que $\lambda\omega$ soit exacte. On dit alors que λ est un facteur intégrant. En éliminant λ dans la condition trouvée à la question précédente, trouver une condition nécessaire sur P, Q, R pour qu'il existe un facteur intégrant.

[002078]

Exercice 5294

Soit $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\right\}$ et $\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - (x^2-y^2)dz$.

1. En utilisant l'exercice précédent (exercice 5293), montrer que ω admet un facteur intégrant.
2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de z.
3. On suppose qu'un mouvement dans U vérifie l'équation différentielle $2x(t)z(t)\dot{x}(t) - 2y(t)z(t)\dot{y}(t) - (x^2(t) - y^2(t))\dot{z}(t)$. Trouver une intégrale première du mouvement.

[002079]

Exercice 5295

Calculer l'aire d'une astroïde. [002080]

Exercice 5296

On rappelle que la formule de Stokes générale affirme que si ω est une forme différentielle de degré $p-1$, Ω une variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension p et de bord $\partial\Omega$, alors

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Dans le cas où $p = 1$, $\Omega = [a,b]$ un segnment et $\omega = f$ une fonction réelle, que donne cette formule ? Et si Ω est la réunion de plusieurs intervalles ? Plus généralement, si Ω est une courbe de $\mathbb{R}^3$, et g une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$, quel est le travail de g le long de Ω ? Montrer qu'il ne dépend pas du chemin parcouru. [002480]

Exercice 5297

Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ de bord $\Gamma = \partial\Sigma$, et $\mathbf{U}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. En considérant la forme différentielle $\omega = \mathbf{U}_1\,dx + \mathbf{U}_2\,dy + \mathbf{U}_3\,dz$, montrer la forme vectorielle de la formule de Stokes :

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \oint_\Gamma \mathbf{U}\cdot d\mathbf{r},$$

où $\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal à Σ. Expliciter cette formule dans les cas où Σ est donnée : a) sous la forme directe $z = f(x,y)$, avec $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$; b) sous la forme intrinsèque $f(x,y,z) = 0$; c) sous la forme paramétrique $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, avec $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. [002481]

Exercice 5298

Calculer
$$\oint_\Gamma (2xy^2+\sin z)\,dx+2x^2y\,dy+x\cos z\,dz$$
le long de la courbe Γ donnée par $x=\cos t, y=z=\sin t$, $0\leq t<2\pi$.

[002482]

Exercice 5299

Montrer que si Σ est une surface fermée de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{U}$ un champ de vecteurs C^1 sur Σ, alors $\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0$. En déduire la valeur de $\int_S \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,ds$, où $\mathbf{U}=(-y^3,x^3+z,z^3)$ et S l'hémisphère $z>0$ de la sphère unité. [002483]

Exercice 5300

Soit $\mathbf{U}=(e^x+y^2,-ye^x,x^2+y^2)$; calculer $\div\mathbf{U}$ et en déduire $\int_\Sigma \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$, où Σ est une surface fermée de $\mathbb{R}^3$. [002484]

Exercice 5301

Sous les conditions du théorème de Stokes, montrer les identités suivantes, où $\mathbf{V}$ est un champ de vecteur arbitraire, Σ une surface de bord Γ, et ϕ et ψ des fonctions C^1 :
$$\begin{aligned}\oint \phi\,d\mathbf{r} &= \int_\Sigma d\sigma\wedge\nabla\varphi,\\ \oint_\Gamma d\mathbf{r}\wedge\mathbf{U} &= \int_\Sigma (\mathbf{n}\wedge\nabla)\wedge\mathbf{U}\,d\sigma,\\ \oint_\Gamma \varphi\nabla\psi\cdot d\mathbf{r} &= \int_\Sigma \nabla\phi\wedge\nabla\psi\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.\end{aligned}$$

[002485]

Exercice 5302

Déduire de la formule générale de Stokes la formule de Green en deux dimensions : si $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux, et si P, Q sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 dans Ω, alors
$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

[002486]

Exercice 5303

Soit C une courbe fermée du plan, et P et Q deux polynômes de degré 1 en x, y ; montrer que la valeur de $\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ ne change pas si l'on effectue une translation sur C. En déduire la valeur de $\oint_C (3x+4y)\,dx+(x-3y)\,dy$, où C est un cercle quelconque de rayon $a>0$. [002487]

Exercice 5304

Soit C le bord du carré $[-1,1]\times[-1,1]$. Calculer
$$\oint_C (e^{x^3}+3y^2)\,dx+\sqrt{\cos y}\,dy.$$

[002488]

Exercice 5305

Soit C la cycloıde d'équations $x=t-\sin t, y=1-\cos t$, et

C_0 l'arc de C joignant

$O=(0,0)$ à $A=(\pi,2)$; calculer $\int_{C_0}$

$(2x^2+3y^2)\,dx+(6xy+4y^2)\,dy$.

[002489]

Exercice 5306

Soit C une courbe fermée du plan enclosant une aire S, et a, b deux réels.

1. Calculer $\oint_C ay\,dx + bx\,dy$. En déduire que
$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$
2. En utilisant la formule précédente, calculer l'aire comprise entre l'axe Ox et l'arche de la cycloïde d'équations $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$.
3. De même, trouver l'aire intérieure à la boucle du folium de Descartes d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$, qui est comprise dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$ (on pourra chercher une représentation paramétrique de la boucle du folium en posant $y = tx$).

[002490]

Exercice 5307

Déduire de la formule générale de Stokes la formule de Green en trois

dimensions : si V est un volume de $\mathbb{R}^3$ de bord $\Sigma = \partial V$, et

$\mathbf{U}$ un champ de

vecteur C^1 dans V, alors

$$\int_V div\mathbf{U}\,dv = \oint_\Sigma \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

En déduire que le volume de V est donné par

$$|V| = \oint_\Sigma x\,dydz = \oint_\Sigma y\,dzdx = \oint_\Sigma z$$

dx dy

= 1 $\frac{}{3\oint_\Sigma x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.}$

[002491]

Exercice 5308

Sous les conditions de la formule de Green, montrer les identités suivantes, où $\mathbf{U}$ est un champ de vecteur arbitraire, et φ une fonction C^1 :

$$\begin{aligned} \int_V \nabla\varphi\,dv &= \oint_\Sigma \varphi\,\mathbf{n}\,d\sigma, \\ \int_V \mathrm{rot}\,\mathbf{U}\,dv &= \oint_\Sigma \mathbf{n}\wedge\mathbf{U}\,d\sigma. \end{aligned}$$

[002492]

Exercice 5309

Soit $\mathbf{U} = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$; calculer directement $I_S = \oint_S \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,ds$ dans le cas où S est une boule de rayon r et de centre $O = (0,0,0)$. Calculer également $\div\mathbf{U}$. Que constatez-vous ? Expliquer pourquoi la formule de Green ne s'applique pas. Calculer I_S respectivement dans le cas où S est une surface fermée dont l'intérieur ne contient pas O (resp. contient O). Que se passe-t-il si O se trouve sur S ? [002493]

Exercice 5310

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{U}$ un champ vectoriel arbitraire, $\mathbf{a}$ un vecteur constant, $\mathbf{r}$ le champ vectoriel de coordonnées (x,y,z) et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Calculer $\Delta\frac{1}{r}$; $\mathrm{div}(\mathbf{r}/r^3)$; $\mathrm{div}(\mathbf{U}\wedge\mathbf{r})$; $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{U})$; $\mathrm{rot}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{r})$. [002685]

Exercice 5311

Soit a, b, c des constantes et $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées

$$(x+2y+az,\ bx-3y-z,\ 4x+cy+2z).$$

Déterminer pour quelles valeurs de a, b, c, $\mathbf{U}$ est irrotationnel. Dans ce cas, de quel potentiel dérive-t-il ? Mêmes questions avec le champ de coordonnées

$$\left(\frac{xzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{yzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{-r^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

où $r^2 = x^2+y^2+z^2$. [002686]

Exercice 5312

Un *champ électromagnétique* est caractérisé par deux champs de vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, également fonctions du temps t, et satisfaisant les *équations de Maxwell*

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

où c est une constante et ρ une fonction scalaire de (x,y,z,t). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ tel que $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$, et un champ scalaire ϕ tel que $\mathbf{E}$ s'exprime en fonction de $\mathbf{A}$ et ϕ. Calculer $\operatorname{div}\mathbf{A}$ à l'aide de ϕ, et montrer que $\mathbf{A}$ et ϕ satisfont une équation des ondes. [002687]

Exercice 5313 **

Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1. $\omega = (2x+2y+e^{x+y})(dx+dy)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega = \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y > x\}$
3. $\omega = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - ydy$
4. $\omega = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy$ sur $(]0,+\infty[)^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de x^2+y^2).

Correction ▼ [005897]

Exercice 5314 **

Calculer l' intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

1. $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$ joignant les points $(0,-1)$ et $(0,1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.
2. $\omega = (x-y^3)dx + x^3dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.
3. $\omega = xyzdx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Correction ▼ [005906]

Exercice 5315 **

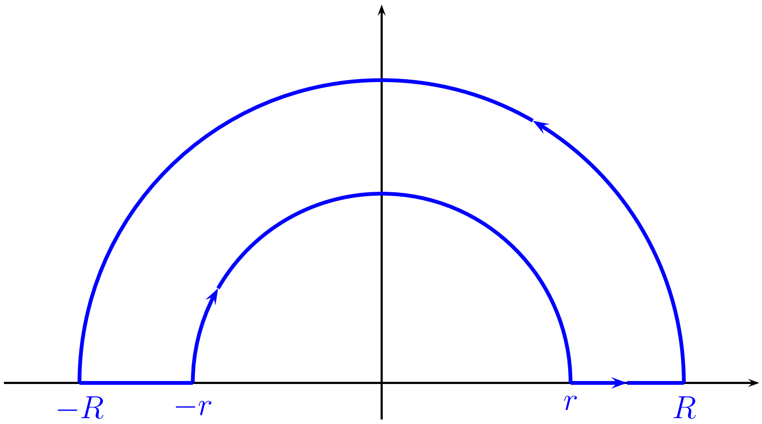
Soit $\omega = x^2dx + y^2dy$. Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec $\omega = y^2dx + x^2dy$.

Correction ▼ [005907]

Exercice 5316 *** I

(Un calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$).

1. r et R sont deux réels strictement positifs tels que $r < R$. On considère le contour Γ orienté suivant



Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}((x\sin x - y\cos x)dx + (x\cos x + y\sin x)dy)$$

le long de ce contour orienté.

2. En déduire $\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx$ en fonction d'une autre intégrale.
3. En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Correction ▼ [005909]

Exercice 5317 **** Inégalité isopérimétrique

Une courbe fermée (C) est le support d'un arc paramétré γ de classe C^1 régulier et simple. On note $\mathscr{L}$ sa longueur et $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe fermée (C). Montrer que

$$\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord $\mathscr{L} = 2\pi$ et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de PARSEVAL aux intégrales permettant de calculer $\mathscr{L}$ et $\mathscr{A}$ et on comparera les sommes des séries obtenues.

Correction ▼ [005913]

220 245.02 Torseurs

Exercice 5318 Moment parallèle à un plan

Soient $\mathscr{T}$ un torseur et $\mathscr{P}$ un plan. Déterminer le lieu des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\mathscr{T}(M) \in \vec{\mathscr{P}}$.

Correction ▼ [004944]

Exercice 5319 Torseurs de sommes orthogonales

Soient $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ deux torseurs de sommes non nulles, orthogonales. Montrer que le comoment de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ est nul si et seulement si les axes centraux sont concourants. [004945]

Exercice 5320 Somme de glisseurs

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les glisseurs :

$\mathscr{G}_1$ d'axe $\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases}$ et de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j}$.

$\mathscr{G}_2$ d'axe $\begin{cases} y = -mx \\ z = -1 \end{cases}$ et de vecteur $\vec{v} = \vec{i} - m\vec{j}$.

Déterminer l'axe central de $\mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2$. [004946]

Exercice 5321 Glisseurs associés à un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace. Pour $X,Y \in \{A,B,C,D\}$ distincts, on note $\mathscr{G}_{XY}$ le glisseur d'axe la droite (XY) et de vecteur $\vec{XY}$.

Montrer que $(\mathscr{G}_{AB}, \mathscr{G}_{AC}, \mathscr{G}_{AD}, \mathscr{G}_{BC}, \mathscr{G}_{BD}, \mathscr{G}_{CD})$ est une base de l'espace des torseurs.

Correction ▼ [004947]

Exercice 5322 Produit vectoriel de torseurs

Soient $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ deux torseurs de sommes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$. On définit le champ $\mathscr{T}$ par :

$$\mathscr{T}(M) = \vec{R}_1 \wedge \mathscr{T}_2(M) + \mathscr{T}_1(M) \wedge \vec{R}_2.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est un torseur de somme $\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2$ (produit vectoriel de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$).
2. Si $\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2 \neq \vec{0}$, montrer que l'axe central de $\mathscr{T}$ est la perpendiculaire commune des axes centraux de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$.

[004948]

221 246.00 Autre

222 246.01 Plan tangent, vecteur normal

Exercice 5323

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ parallèle au plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2. Etudier localement la position relative de la surface $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.
3. Etudier la position relative globale de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Correction ▼ [005915]

Exercice 5324

Trouver toutes les droites tracées sur la surface d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ puis vérifier que ces droites sont coplanaires. [005916]

223 246.02 Surfaces paramétrées

Exercice 5325 Chimie P 91

Équation de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oz où Γ est la courbe d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = a\cos^3 u \\ y = a\sin^3 u \qquad (a > 0) \\ z = a\cos 2u. \end{cases}$$

Correction ▼ [005047]

Exercice 5326 Ensi Physique 93

Soit la courbe d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = 0 \\ x + z & = 1. \end{cases}$$

Déterminer la surface engendrée par la rotation de (Γ) autour de Oz.

Correction ▼ [005048]

Exercice 5327 Le plan tangent coupe Oz en un point fixe

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = f(\rho,\theta) \end{cases}$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Donner l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point $M(\rho,\theta)$.
2. Déterminer f de sorte que, le long d'une ligne $\theta = \text{cste}$, le plan tangent coupe Oz en un point fixe.
3. Exemple : $f(\rho,\theta) = \theta$. Dessiner la surface $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [005049]

Exercice 5328 Pseudo-sphère

Dessiner la surface $\mathscr{S}$ d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = a\cos u/\operatorname{ch} v \\ y = a\sin u/\operatorname{ch} v \\ z = a(v-\operatorname{th} v) \end{cases}$ où a est un réel strictement positif (pseudo-sphère).

Correction ▼ [005050]

Exercice 5329 Les normales coupent $Oz \Leftrightarrow$ révolution

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $z = f(x,y)$. Montrer que $\mathscr{S}$ est de révolution si et seulement si en tout point M, la normale à $\mathscr{S}$ en M est parallèle ou sécante à Oz.

Correction ▼ [005051]

Exercice 5330

Que dire d'une surface $\mathscr{S}$ telle que toutes les normales sont concourantes ? (cf ex.5329) [005052]

Exercice 5331 Contour apparent

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

1. Reconnaître $\mathscr{S}$.
2. Soit D la droite d'équations : $2x + y = 0$, $z = 0$. Déterminer les points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M est parallèle à D. (Contour apparent de $\mathscr{S}$ dans la direction de D)

Correction ▼ [005053]

Exercice 5332 Cylindre circonscrit

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = u/(u^2+v^2) \\ y = v/(u^2+v^2) \\ z = 1/(u^2+v^2). \end{cases}$

1. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de $\mathscr{S}$ où le plan tangent est parallèle à la droite D d'équations : $x = y = z$.
3. Déterminer l'équation cartésienne du cylindre de génératrices parallèles à D s'appuyant sur $\mathscr{C}$. (Cylindre circonscrit à $\mathscr{S}$)

Correction ▼ [005054]

Exercice 5333 Équation de cône

Soit $\mathscr{C}$ le cercle intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ et du plan d'équation $x+y=1$, et $S=(1,1,1)$. Déterminer l'équation cartésienne du cône de sommet S s'appuyant sur $\mathscr{C}$.

Correction ▼ [005055]

Exercice 5334 Cône = cylindre ?

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne : $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}=\frac{1}{(x-z)^2}$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est à la fois un cylindre et un cône.
2. Comment est-ce possible ?

[005056]

Exercice 5335 Position d'une surface de révolution par rapport au plan tangent

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation cartésienne $z=f(\rho)$ où $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ et f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que la position de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent est donnée par le signe de $f'(\rho)f''(\rho)$. Interpréter géométriquement ce fait. [005057]

Exercice 5336 Intersection de deux cylindres

Soient $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2+y^2+xy=1$ et $y^2+z^2+yz=1$, et $\mathscr{C}=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$.

1. Donner en tout point de $\mathscr{C}$ le vecteur tangent à $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
3. Quelle est la projection de $\mathscr{C}$ sur Oxz ?

Correction ▼ [005058]

Exercice 5337 Conoïde

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A=(a,0,0)$ et de rayon r $(0<r<a)$ et $\mathscr{S}'$ la surface constituée des droites horizontales tangentes à $\mathscr{S}$ et sécantes à Oz. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathscr{S}'$.

Correction ▼ [005059]

Exercice 5338 Surface cerclée

Soit $A=(0,1,0)$ et $\mathscr{S}$ la surface constituée des cercles verticaux de diamètre $[A,B]$ où B est un point variable sur Ox. Chercher une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [005060]

Exercice 5339 Chimie P' 91

On considère la droite Δ d'équations : $x=a$, $z=0$. P est un point décrivant Δ et $\mathscr{C}_P$ le cercle tangent à Oz en O et passant par P. Faire un schéma et paramétrer la surface engendrée par les cercles $\mathscr{C}_P$ quand P décrit Δ.

Correction ▼ [005061]

Exercice 5340 Ensi Chimie P' 93

Soit (Γ) : $\begin{cases} x(t)=a\cos(t)/\mathrm{ch}(mt) \\ y(t)=a\sin(t)/\mathrm{ch}(mt) \\ z(t)=a\,\mathrm{th}(mt). \end{cases}$

1. Montrer que (Γ) est tracée sur une surface (Σ) simple. Montrer que (Σ) est de révolution autour de Oz et donner son équation.
2. Montrer que (Γ) coupe les méridiennes de (Σ) suivant un angle constant (loxodromie).
3. Réciproquement, déterminer toutes les loxodromies de (Σ).
4. Dessiner la projection de (Γ) sur xOy.

Correction ▼ [005062]

224 260.01 Probabilité et dénombrement

Exercice 5341

Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction ▼ [005983]

Exercice 5342

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction ▼ [005984]

Exercice 5343

Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction ▼ [005985]

Exercice 5344

Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Correction ▼ [005986]

Exercice 5345

Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Correction ▼ [005987]

Exercice 5346

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Correction ▼ [005988]

Exercice 5347

La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Correction ▼ [005989]

Exercice 5348

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction ▼ [005990]

Exercice 5349

La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ? Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Correction ▼ [005991]

225 260.02 Probabilité conditionnelle

Exercice 5350

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction ▼ [005992]

Exercice 5351

Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Correction ▼ [005993]

Exercice 5352

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Correction ▼ [005994]

Exercice 5353

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.

On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n

Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Correction ▼ [005995]

Exercice 5354

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction ▼ [005996]

Exercice 5355

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction ▼ [005997]

Exercice 5356

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction ▼ [005998]

Exercice 5357

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

Correction ▼ [005999]

Exercice 5358

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

– Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
– Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction ▼ [006000]

Exercice 5359

Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Correction ▼ [006001]

Exercice 5360

Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité $P(B)$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $P(C)$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $P(D)$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction ▼ [006002]

Exercice 5361

Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction ▼ [006003]

Exercice 5362

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

– Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
– Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Ecrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Correction ▼ [006004]

226 260.03 Variable aléatoire discrète

Exercice 5363

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».
   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction ▼ [006005]

Exercice 5364

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :

A : au moins une ampoule est défectueuse ;

B : les 3 ampoules sont défectueuses ;

C : exactement une ampoule est défectueuse.

Correction ▼ [006006]

Exercice 5365

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Correction ▼ [006007]

Exercice 5366

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction ▼ [006008]

Exercice 5367

Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction ▼ [006009]

Exercice 5368

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Correction ▼ [006010]

Exercice 5369

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Correction ▼ [006011]

Exercice 5370

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Correction ▼ [006012]

Exercice 5371

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

Correction ▼ [006013]

227 260.04 Lois de distributions

Exercice 5372

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Correction ▼ [006014]

Exercice 5373

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro i en mm» et Z la variable aléatoire «épaisseur des n plaques en mm». Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?

Correction ▼ [006015]

Exercice 5374

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées ; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée) ; quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égal à 3 ? Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3 ?

Correction ▼ [006016]

Exercice 5375

Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.6$mm et $\sigma = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm». Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6mm.

Correction ▼ [006017]

Exercice 5376

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;

- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;

- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

Correction ▼ [006018]

Exercice 5377

Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est la loi exacte avec les paramètres éventuels (espérance, variance) et indiquez éventuellement une loi approchée.

1. Nombre annuel d'accidents à un carrefour donné où la probabilité d'accident par jour est estimée à $\frac{4}{365}$.
2. Nombre de garçons dans une famille de 6 enfants ; nombre de filles par jour dans une maternité où naissent en moyenne 30 enfants par jour.
3. Dans un groupe de 21 personnes dont 7 femmes, le nombre de femmes dans une délégation de 6 personnes tirées au hasard.

Correction ▼ [006019]

Exercice 5378

On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse.

1. On contrôle un lot de 1000 pièces :

   Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces défectueuses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) ; quel est son espérance, son écart-type ?
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 18 et 22 ($P[18 \leq X \leq 22]$) ; on fera les calculs avec et sans correction de continuité. On fera également les calculs avec la vraie loi pour comparer.

Correction ▼ [006020]

Exercice 5379

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0,05$ est fausse et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0,02$ est fausse. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?
2. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?
3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces fausses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) ; quelle est son espérance, son écart-type ?
4. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.

Correction ▼ [006021]

Exercice 5380

On jette un dé 180 fois. On note X la variable aléatoire : «nombre de sorties du 4».

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Correction ▼ [006022]

Exercice 5381

Aux dernières élections présidentielles en France, le candidat A a obtenu 20% des voix. On prend au hasard dans des bureaux de vote de grandes villes des lots de 200 bulletins : on note X la variable aléatoire «nombre de voix pour A dans les différents bureaux».

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Comment peut-on l'approcher ?
3. Quelle est alors la probabilité pour que : X soit supérieur à 45 ? X compris entre 30 et 50 ?
4. Pour un autre candidat B moins heureux le pourcentage des voix est de 2%. En notant Y le nombre de voix pour B dans les différents bureaux, sur 100 bulletins, reprendre les questions 1 et 2. Quelle est alors la probabilité pour que : Y soit supérieur à 5 ? Y compris entre 1 et 4 ?

Correction ▼ [006023]

Exercice 5382

On suppose qu'il y a une probabilité égale à p d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Monsieur A fait n voyages par an sur cette ligne.

1. On suppose que $p = 0.10$, $n = 700$.
   (a) Quelle est la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?
   (b) Monsieur A voyage en fait toujours sans ticket. Afin de prendre en compte la possibilité de faire plusieurs passages avec le même ticket, on suppose que le prix d'un ticket est de 1,12 euros. Quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?
2. On suppose que $p = 0.50$, $n = 300$. Monsieur A voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket est de 1,12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?

Correction ▼ [006024]

228 260.05 Espérance, variance

229 260.06 Droite de régression

230 260.07 Fonctions génératrices

231 260.99 Autre

232 261.01 Densité de probabilité

233 261.02 Loi faible des grands nombres

234 261.03 Convergence en loi

235 261.99 Autre

236 262.01 Estimation

Exercice 5383

Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur le taux de cholestérol de ses employés ; les observations sur 100 employés tirés au sort sont les suivantes.

taux de cholestérol en cg :(centre classe)	effectif d'employés :
120	9
160	22
200	25
240	21
280	16
320	7

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σ_e sur l'échantillon.
2. Estimer la moyenne et l'écart-type pour le taux de cholestérol dans toute l'entreprise.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne.
4. Déterminer la taille minimum d'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure à 10.

Correction ▼ [006028]

Exercice 5384

Sur 12 000 individus d'une espèce, on a dénombré 13 albinos. Estimer la proportion d'albinos dans l'espèce. On comparera les méthodes d'approximation des lois réelles par d'autres lois classiques.

Correction ▼ [006029]

237 262.02 Tests d'hypothèses, intervalle de confiance

Exercice 5385

Un échantillon de 10 000 personnes sur une population étant donné, on sait que le taux moyen de personnes à soigner pour un problème de cholestérol élevé est de $7,5\%$. Donner un intervalle dans lequel on soit «sûr» à 95%, de trouver le nombre exact de personnes à soigner sur les 10 000.

Correction ▼ [006025]

Exercice 5386

Un vol Marseille - Paris est assuré par un Airbus de 150 places ; pour ce vol des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0.75$. La compagnie vend n billets, $n > 150$. Soit X la variable aléatoire «nombre de personnes parmi les n possibles, ayant confirmé leur réservation pour ce vol».

1. Quelle est la loi exacte suivie par X ?
2. Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour que, à au moins 95%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion, c'est-à-dire n tel que : $P[X > 150] \leq 0.05$?
3. Reprendre le même exercice avec un avion de capacité de 300 places ; faites varier le paramètre $p = 0.5$; $p = 0.8$.

Correction ▼ [006026]

Exercice 5387

Un petit avion (liaison Saint Brieuc-Jersey) peut accueillir chaque jour 30 personnes ; des statistiques montrent que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui se présentent au comptoir parmi 30 personnes qui ont réservé».

1. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) ; quelle est son espérance, son écart-type ?
2. Donner un intervalle de confiance au seuil 95%, permettant d'estimer le nombre de clients à prévoir.

Correction ▼ [006027]

Exercice 5388

Une compagnie aérienne a demandé des statistiques afin d'améliorer la sûreté au décollage et définir un poids limite de bagages. Pour l'estimation du poids des voyageurs et du poids des bagages, un échantillon est constitué de 300 passagers qui ont accepté d'être pesés : on a obtenu une moyenne m_e de 68kg, avec un écart-type σ_e de 7 kg.

1. Définir un intervalle de confiance pour la moyenne des passagers. (On admet que le poids des passagers suit une loi normale de moyenne m, d'écart-type σ.)
2. Montrer que l'on peut considérer que le poids des passagers est une variable aléatoire X de moyenne 70 kg, d'écart-type 8 kg.
3. En procédant de même pour le poids des bagages, on admet les résultats :
   – Si le poids maximum autorisé est de 20 kg, le poids des bagages peut être considéré comme une variable aléatoire Y de moyenne 15 kg, d'écart-type 5 kg.
   – La capacité de l'avion est de 300 passagers ; l'avion pèse, à vide, 250 tonnes. Le décollage est interdit si le poids total dépasse 276.2 tonnes. Quelle est la probabilité pour que le décollage soit interdit ?

Correction ▼ [006030]

Exercice 5389

Afin de mieux satisfaire leurs clients, une grande société fournisseur d'accès internet fait ses statistiques sur le nombre d'appels reçus en *hotline*, elle pourra ainsi évaluer le temps d'attente pour le client et le nombre d'employés à mettre au standard ; les résultats de l'enquête portent sur 200 séquences consécutives de une minute, durant lesquelles le nombre d'appels moyen a été de 3 appels par minute. On suppose que les appels sont répartis également dans le temps : on partage un intervalle de temps en unités de une seconde ; alors dans chaque unité de temps, il y a au plus un appel.

1. Quelle est la loi de probabilité du nombre d'appels reçus en 4 minutes ?
2. Montrer que l'on peut approcher cette loi par une loi de Poisson.
3. Donner un intervalle de confiance pour le nombre moyen d'appels en 4 minutes.

Correction ▼ [006031]

Exercice 5390

On s'intéresse au problème des algues toxiques qui atteignent certaines plages de France ; après étude on constate que 10% des plages sont atteintes par ce type d'algues et on veut tester l'influence de rejets chimiques nouveaux sur l'apparition de ces algues. Pour cela 50 plages proches de zones de rejet chimiques, sont observées ; on compte alors le nombre de plages atteintes par l'algue nocive : on constate que 10 plages sont atteintes par l'algue. Pouvez-vous répondre à la question «Les rejets chimiques ont-t-il modifié, de façon significative, avec le risque $\alpha = 0.05$, le nombre de plages atteintes ?»

Correction ▼ [006032]

Exercice 5391

On veut étudier la liaison entre les caractères : «être fumeur» (plus de 20 cigarettes par jour, pendant 10 ans) et «avoir un cancer de la gorge», sur une population de 1000 personnes, dont 500 sont atteintes d'un cancer de la gorge. Voici les résultats observés :

Tableau observé

Observé	cancer	non cancer	marge
fumeur	342	258	600
non fumeur	158	242	400
marge	500	500	1000

Faire un test d'indépendance pour établir la liaison entre ces caractères.

Correction ▼ [006033]

238 262.99 Autre

239 300.00 Groupe quotient, théorème de Lagrange

Exercice 5392

Soit G un groupe non réduit à un élément. Un sous-groupe M de G est dit *maximal* si le seul sous-groupe de G, distinct de G et contenant M, est M lui-même. Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $6\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $5\mathbb{Z}$ est un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
2. On pose $G := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Soit H_1 le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et H_2 le sous-groupe de G engendré par $\overline{2}$.
   (a) Expliciter les éléments de H_1 et H_2.
   (b) Montrer que H_1 n'est pas un sous-groupe maximal de G et que H_2 est un sous- groupe maximal de G.

[001434]

Exercice 5393

Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001435]

Exercice 5394

Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$. [001436]

Exercice 5395

Soit G le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, on note $\mathrm{cl}(q)$ la classe de q modulo $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathrm{cl}(\frac{35}{6}) = \mathrm{cl}(\frac{5}{6})$ et déterminer l'ordre de $\mathrm{cl}(\frac{35}{6})$.
2. Montrer que si $x \in G$ il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ tel que $x = \mathrm{cl}(\alpha)$.
3. Montrer que tout élément de G est d'ordre fini et qu'il existe des éléments d'ordre arbitraire.

[001437]

Exercice 5396

Décrire le groupe-quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ et montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001438]

Exercice 5397

Montrer que tout quotient d'un groupe monogène est monogène. [001439]

Exercice 5398

Soient G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\overline{3},\overline{2})$. Écrire la décomposition de G suivant les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe-quotient G/H. [001440]

Exercice 5399

Soit G un groupe $Z(G) = \{h \in G; \forall g \in g, gh = hg\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène G est cyclique.

[001441]

Exercice 5400

Soit G un groupe ; on note $D(G)$ le groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$; $g,h \in G$.

1. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G.
2. Montrer que $G/D(G)$ est commutatif ; plus généralement montrer qu'un sous-groupe distingué H de G contient $D(G)$ si et seulement si G/H est commutatif.

Correction ▼ [001442]

Exercice 5401

Soit G un groupe ; on note, pour tout $g \in G$ φ_g l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ de G dans lui-même et $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g; g \in G\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Soit $f : G \to \mathrm{Int}(G)$ l'application $g \mapsto \varphi_g$. Montrer que f est un homomorphisme de groupe. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

[001443]

Exercice 5402

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$. On suppose que K est distingué dans G.

1. Montrer que $HK = KH$ et que HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que H et K sont des sous-groupes de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H et que K est distingué dans KH.
3. Soit $\varphi : H \to (HK)/K$ la restriction à H de l'application quotient. Calculer le noyau et l'image de φ. En déduire que les groupes $H/(K \cap H)$ et $(HK)/K$ sont isomorphes.

[001444]

Exercice 5403

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes distingués de G avec $H \subset K$.

1. Montrer que K/H est un sous-groupe distingué de G/H.
2. Montrer que le quotient $(G/H)/(K/H)$ est isomorphe à G/K.

[001445]

Exercice 5404

Soit G le sous-groupe de $Gl(2,\mathbb{R})$ engendré par les matrices $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par AB. Calculer $|H|$
2. Montrer que H est distingué dans G. Calculer le quotient G/H; en déduire $|G|$.

Correction ▼ [001446]

Exercice 5405

Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto 3x + 6y$ est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer le noyau $\ker f$ de f et montrer qu'il n'existe pas $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\ker f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-2,1)$ est isomorphe au groupe $3\mathbb{Z}$.

2. Soit G le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,0)$ et $(0,2)$. Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001447]

Exercice 5406

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. (indication : utiliser la division euclidienne).
2. Rappeler pourquoi ces sous-groupes sont distingués. On peut donc considérer les groupes quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
4. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe engendré par un cycle de longueur n dans S_N $(N \geq n)$.
5. Plus généralement, montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un seul groupe monogène (ie engendré par un seul élément) d'ordre n, appelé groupe cyclique d'ordre n.

[001448]

Exercice 5407

Rappel : si A est un anneau (en particulier, si A est un corps), on note $GL_n(A)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficient dans A, qui sont inversibles. $GL_n(A)$ forme un groupe pour la loi $\times$ de multiplication des matrices, appelé groupe linéaire. Une matrice carrée de dimension n est dans $GL_n(A)$ ssi son déterminant est un inversible de l'anneau A (ce qui revient à dire, lorsque A est un corps, que son déterminant est non nul).

Pour simplifier, on suppose dans l'exercice que A est un corps, noté $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes.
2. On note $SL_n(\mathbb{K}) = \ker(\det)$. Dire pourquoi $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{K})$ et montrer que $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.
3. Reconnaître $GL_1(\mathbb{K})$ et $SL_1(\mathbb{K})$.
4. Montrer que les matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures) de $GL_n(\mathbb{K})$ forment un sous-groupe. Sont-ils distingués ?
5. Montrer que $Z(GL_n(\mathbb{K}))$ est le sous-groupe formé par les homothéties.

[001449]

---

240 301.00 Ordre d'un élément

Exercice 5408

On dispose d'un échiquier et de dominos. Les dominos sont posés sur l'échiquier soit horizontalement, soit verticalement de façon à couvrir deux cases contiguës. Est-il possible de couvrir ainsi entièrement l'échiquier à l'exception des deux cases extrêmes, en haut à gauche et en bas à droite ? Reprendre cette question dans le cas où l'on exclut deux cases quelconques à la place des deux cases extrêmes ci-dessus.

Indication ▼ [002101]

Exercice 5409

(I) Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X ordonné par l'inclusion. Soit φ une application croissante de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même.

(a) Montrer que l'ensemble E des parties A de X qui vérifient $\varphi(A) \subset A$ est non vide et admet un plus petit élément A_0.

(b) Montrer que $\varphi(A_0) = A_0$.

(II) Soit deux ensembles X et Y munis de deux injections g de X dans Y et h de Y dans X.

(a) Montrer que l'application de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même défini par

$$\varphi(A) = X - h(Y - g(A))$$

est croissante.

(b) Déduire de ce qui précède qu'il existe une bijection de X sur Y.

Indication ▼ Correction ▼ [002102]

Exercice 5410

Soit X un ensemble non vide et ordonné. Montrer qu'il existe une partie Y totalement ordonnée de X qui vérifie la propriété

$$\forall x \notin Y \quad \exists y \in X \quad x \text{ et } y \text{ non comparables}$$

L'ensemble Y est-il unique ?

Correction ▼ [002103]

Exercice 5411

Un jardinier doit planter 10 arbres en 5 rangées de 4 arbres. Donner une disposition possible. Quel est le nombre minimal d'arbres dont il doit disposer pour planter 6 rangées de 5 arbres ? Généraliser.

Indication ▼ [002104]

Exercice 5412

Soit n et p deux entiers, $p \leq n$. Démontrer, grâce à un dénombrement, la formule suivante :

$$\sum_{0 \leq k \leq p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$$

Indication ▼ [002105]

Exercice 5413

Soit n un entier impair non divisible par 3. Montrer que 24 divise $n^2 - 1$.

Indication ▼ [002106]

Exercice 5414

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition définie par $x \star y = x + y - xy$. Cette loi est-elle associative, commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Un réel x admet-il un inverse pour cette loi ? Donner une formule pour la puissance n-ième d'un élément x pour cette loi.

Indication ▼ Correction ▼ [002107]

Exercice 5415

Soit E un monoïde unitaire. On dit qu'un élément a de E admet un *inverse à gauche* (resp. *inverse à droite*) s'il existe $b \in E$ tel que $ba = e$ (resp. $ab = e$).

(a) Supposons qu'un élément a admette un inverse à gauche b qui lui-même admet un inverse à gauche. Montrer que a est inversible.

(b) Supposons que tout élément de E admette un inverse à gauche. Montrer que E est un groupe.

Correction ▼ [002108]

Exercice 5416

Soit E un ensemble muni d'une loi $\star$ associative

(i) admettant un élément neutre à gauche e (i.e. $\forall x \in E \quad e \star x = x$) et

(ii) tel que tout élément possède un inverse à gauche (i.e. $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad y \star x = e$).

Montrer que E est un groupe pour la loi $\star$.

Indication ▼ Correction ▼ [002109]

Exercice 5417

Les rationnels non nuls forment-ils un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^\times$?

Indication ▼ [002110]

Exercice 5418

Montrer que l'ensemble $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$, ainsi que l'ensemble $\{\frac{1+2m}{1+2n} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Indication ▼ [002111]

Exercice 5419

Montrer que l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes de déterminant non nul est un groupe pour la multiplication.

Indication ▼ [002112]

Exercice 5420

On considère l'ensemble E des matrices carrées à coefficients réels de la forme

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^\times, \quad b \in \mathbb{R}$$

muni du produit des matrices.

(a) Montrer que E est ainsi muni d'une loi de composition interne associative.

(b) Déterminer tous les éléments neutres à droite de E.

(c) Montrer que E n'admet pas d'élément neutre à gauche.

(d) Soit e un élément neutre à droite. Montrer que tout élément de E possède un inverse à gauche pour cet élément neutre, i.e.

$$\forall g \in E \quad \exists h \in E \quad hg = e$$

Indication ▼ [002113]

Exercice 5421

Soit G un groupe vérifiant

$$\forall x \in G \quad x^2 = e$$

Montrer que G est commutatif. Déduire que si G est fini, alors l'ordre de G est une puissance de 2.

Correction ▼ [002114]

Exercice 5422

Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$, $x \neq e$ tel que $x^2 = e$.

Indication ▼ Correction ▼ [002115]

Exercice 5423

Soit G un groupe d'ordre impair. Montrer que l'application f de G sur lui-même donnée par $f(x) = x^2$ est une bijection. En déduire que l'équation $x^2 = e$ a une unique solution, à savoir $x = e$.

Indication ▼ [002116]

Exercice 5424

Soient G un groupe fini et m un entier premier à l'ordre de G. Montrer que pour tout $a \in G$ l'équation $x^m = a$ admet une unique solution.

Indication ▼ [002117]

Exercice 5425

Soit G un groupe et $H < G$, $K < G$ deux sous-groupes de G. On suppose qu'il existe deux éléments $a, b \in G$ tels que $Ha \subset Kb$. Montrer que $H < K$.

Correction ▼ [002118]

Exercice 5426

Soit H une partie non vide d'un groupe G. On pose $H^{-1} = \{x^{-1}; x \in H\}$. Montrer les équivalences suivantes :

(a) $H < G \Leftrightarrow HH^{-1} \subset H$

(b) $H < G \Leftrightarrow \forall a \in H \quad Ha = H$.

Indication ▼ [002119]

Exercice 5427

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

(a) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H < K$ ou $K < H$.

(b) Montrer qu'un groupe ne peut être la réunion de deux sous-groupes propres.

Correction ▼ [002120]

Exercice 5428

Montrer que dans un groupe G, toute partie non vide finie stable par la loi de composition est un sous-groupe. Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas d'une partie infinie.

Correction ▼ [002121]

Exercice 5429

(a) Montrer que les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où n est un entier.

(b) Un élément x d'un groupe est dit d'ordre fini s'il existe un entier k tel que $x^k = e_G$. Montrer que $\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k = e_G\}$ est alors un sous-groupe non nul de $\mathbb{Z}$. On appelle ordre de x le générateur positif de ce sous-groupe.

(c) Soit x un élément d'un groupe G. Montrer que x est d'ordre d si et seulement si le sous-groupe $< x >$ de G engendré par x est d'ordre d.

Indication ▼ [002122]

Exercice 5430

On pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$.

(a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(b) On considère les deux matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Démontrer que A et B sont d'ordres finis mais que AB est d'ordre infini.

Indication ▼ [002123]

Exercice 5431

Soit G un groupe abélien et a et b deux éléments d'ordres finis. Montrer que ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b. Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et de b.

Correction ▼ [002124]

Exercice 5432

Soit G un groupe commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de G forme un sous-groupe de G.

Indication ▼ [002125]

Exercice 5433

Déterminer tous les sous-groupes de $\mu_2 \times \mu_2$.

Indication ▼ [002126]

Exercice 5434

Soient G un groupe et $\{G_i\}_{i\in I}$ la famille des sous-groupes propres maximaux de G. On pose $F = \bigcap_{i\in I} G_i$. Montrer que F est l'ensemble des éléments a de G qui sont tels que, pour toute partie S de G contenant a et engendrant G, $S - \{a\}$ engendre encore G.

Correction ▼ [002127]

Exercice 5435

Déterminer tous les groupes d'ordre ≤ 5. En déduire qu'un groupe non commutatif possède au moins 6 éléments. Montrer que le groupe symétrique S_3 est non commutatif.

Indication ▼ [002128]

Exercice 5436

Le centre d'un groupe G est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutents à tous les éléments de G. Vérifier que $Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G. Montrer que si G possède un unique élément d'ordre 2, alors cet élément est dans le centre $Z(G)$.

Indication ▼ [002129]

Exercice 5437

Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes de G.

(a) Montrer que l'ensemble $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

(b) Montrer que si H et K sont finis alors $|HK| = \dfrac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.

Correction ▼ [002130]

Exercice 5438

Déterminer tous les sous-groupes du groupe symétrique S_3.

Correction ▼ [002131]

Exercice 5439

Montrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

Indication ▼ Correction ▼ [002132]

Exercice 5440

Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p un nombre premier. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre p.

Correction ▼ [002133]

Exercice 5441

Soient $n \geq 0$ un entier et p un nombre premier tels que p divise $2^{2^n}+1$. Montrer que p est de la forme $p = k2^{n+1}+1$ où k est un entier.

Indication ▼ Correction ▼ [002134]

Exercice 5442

Montrer que tout entier $n > 0$ divise toujours $\varphi(2^n - 1)$ (où φ est la fonction indicatrice d'Euler).

Indication ▼ Correction ▼ [002135]

Exercice 5443

Soit G un groupe multiplicatif (c'est-à-dire dont la loi est notée multiplicativement). Soient a et b deux éléments de G. Montrer que si ab est d'ordre fini, alors ba l'est également et son ordre est celui de ab. [002661]

Exercice 5444

Montrer que les éléments d'ordre fini d'un groupe commutatif G forment un sous-groupe de G. En est-il de même si G n'est pas commutatif ? [002662]

Exercice 5445

Soit G un groupe commutatif multiplicatif, a et b deux éléments de G d'ordres n et m. Que peut-on dire de l'ordre de ab ? Que peut-on dire de plus si l'intersection des sous-groupes G_a et G_b engendrés par a et b est réduite à $\{1_G\}$? [002663]

Exercice 5446

Montrer qu'un groupe fini dont l'ordre est un nombre premier est cyclique. [002664]

Exercice 5447

Soient σ et τ deux transpositions de $\{1,\dots,n\}$. Montrer que $\sigma \circ \tau$ est d'ordre 1, 2 ou 3. [002665]

241 302.00 Groupe symétrique, décomposition en cycles disjoints, signature

Exercice 5448

Pour tout $n \in |||^*$, calculer la signature de la permutation $[n\ n-1\ n-2 \dots\ 3\ 2\ 1] \in S_n$. [002666]

Exercice 5449

Soit $n \in |||^*$. Calculer la somme des nombres d'inversions de toutes les permutations de $\{1,2,\dots,n\}$. [002667]

Exercice 5450

Matrices de permutation

Soit $n \in |||^*$ et K un corps. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : S_n &\longrightarrow M_n(K) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

où $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{cases}$ (symbole de Kronecker) induit un morphisme de groupes de S_n dans $GL_n(K)$. [002668]

Exercice 5451

Soit $\sigma \in S_n$ et $c = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ un cycle. Quelle est la nature de la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$? [002669]

Exercice 5452

Expliciter les 24 rotations de l'espace laissant un cube de sommets $A_1, A_2, \dots, A_8$ invariant.

Décomposer en cycles les permutations de S_8 correspondantes.

Ecrire les produits "typiques" de 2 quelconques de ces permutations. [002670]

242 303.00 Sous-groupe distingué

Exercice 5453

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes d'ordre fini de G tels que $H \cap K = \{e_G\}$.

1. Montrer que le cardinal de HK est égal $|H||K|$.
2. En déduire que si $|G| = pq$ où p est premier et $p > q$ alors G a au plus un sous-groupe d'ordre p. Montrer que si ce sous-groupe existe il est distingué dans G.

Correction ▼ [001428]

Exercice 5454

Soit G un groupe, A une partie non vide de G. On note $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$. [001429]

Exercice 5455

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que $\forall h \in H, k \in K : hk = kh$. Montrer que l'application $f : H \times K \to G$ définie par $\forall h \in H, k \in K : f(h,k) = hk$ est un homomorphisme de groupes.
3. Calculer le noyau et l'image de f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme de groupes.

[001430]

Exercice 5456

1. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $\forall g \in G : gHg^{-1} \subset H$.

   ii) $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$.

   iii) $\forall g \in G : gH = Hg$.
2. En déduire que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

[001431]

Exercice 5457

Soient $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que U est un sous-groupe distingué de T.

[001432]

Exercice 5458

Soit G un groupe.

1. Un sous-groupe H de G est distingué si : $\forall x \in G, xH = Hx$, ce qui est équivalent à dire que H est le noyau d'un morphisme de G dans un groupe. Rappeler la démonstration de cette équivalence.
2. Si H est un sous-groupe d'indice 2 de G, montrer que H est distingué.
3. Si G est abélien, montrer que tout sous-groupe de G est distingué.

4. Le centre de G est l'ensemble $Z(G) = \{z \in G : \forall x \in G, xz = zx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué.

[001433]

Exercice 5459

Soit G un groupe tel que l'application $x \to x^{-1}$ soit un morphisme. Montrer que G est commutatif.

Indication ▼ [002136]

Exercice 5460

Soient G un groupe et $n \geq 1$ un entier tels que l'application $x \to x^n$ soit un automorphisme de G. Montrer que pour tout élément x de G, x^{n-1} appartient au centre de G.

Correction ▼ [002137]

Exercice 5461

Montrer que le groupe des automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe symétrique S_3.

Correction ▼ [002138]

Exercice 5462

Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G est distingué dans G.

Correction ▼ [002139]

Exercice 5463

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On suppose que le produit de deux classes à gauche modulo H est une classe à gauche modulo H. Montrer que H est distingué dans G.

Correction ▼ [002140]

Exercice 5464

Soit G un groupe et $\simeq$ une relation d'équivalence sur G. On suppose que cette relation est compatible avec la loi de groupe, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in G \quad \forall x', y' \in G \quad x \simeq x' \quad \text{et} \quad y \simeq y' \quad \text{alors} \quad xy \simeq x'y'$$

Montrer que la classe H de l'élément neutre 1 est un sous-groupe distingué de G et que

$$\forall x, x' \in G \quad x \simeq x' \quad \text{est} \quad \text{équivalent} \quad \text{à} \quad x'x^{-1} \in H$$

Correction ▼ [002141]

Exercice 5465

Soit G un groupe et $K \subset H \subset G$ deux sous-groupes. On suppose que H est distingué dans G et que K est caractéristique dans H (i.e. stable par tout automorphisme de H). Montrer qu'alors K est distingué dans G.

Donner un exemple de groupe G et de deux sous-groupes $K \subset H \subset G$, H étant distingué dans G et K étant distingué dans H, mais K n'étant pas distingué dans G.

Correction ▼ [002142]

Exercice 5466

(a) Montrer que pour tous entiers premiers entre eux $m, n > 0$, les deux groupes $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes. En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

(b) Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ? Montrer que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, que $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Etudier le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$.

Indication ▼ [002143]

Exercice 5467

(a) Montrer que si m et n sont des entiers premiers entre eux et qu'un élément z d'un groupe G vérifie $z^m = z^n = e$ où e désigne l'élément neutre de G, alors $z = e$.

(b) Montrer que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, l'application

$$\phi : \mu_m \times \mu_n \longrightarrow \mu_{mn}$$

qui au couple (s,t) fait correspondre le produit st est un isomorphisme de groupes

Indication ▼ [002144]

Exercice 5468

Montrer que les groupes μ_4 et $\mu_2 \times \mu_2$ ne sont pas isomorphes. De façon générale montrer que si m et n sont des entiers qui ne sont pas premiers entre eux, les groupes μ_{mn} et $\mu_m \times \mu_n$ ne sont pas isomorphes.

Correction ▼ [002145]

Exercice 5469

Soit n et d deux entiers tels que d divise n. On définit une application $f : \mu_n \longrightarrow \mu_d$ qui à s associe $s^{n/d}$. Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est $\mu_{n/d}$.

Indication ▼ [002146]

Exercice 5470

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G. Montrer que l'ordre de $f(G')$ divise les ordres de G' et de H.

Indication ▼ [002147]

Exercice 5471

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G d'ordre premier à l'ordre de H. Montrer que $G' \subset \ker(f)$.

Indication ▼ [002148]

Exercice 5472

Soit G un groupe fini et H et K deux sous-groupes de G. On suppose que H est distingué dans G, que $|H|$ et $|G/H|$ sont premiers entre eux et $|H| = |K|$. Montrer que $H = K$.

Correction ▼ [002149]

Exercice 5473

Soit f un morphisme de groupes $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^{\times}_{>0}$, $\mathbb{Q}$ étant muni de l'addition et $\mathbb{Q}^{\times}_{>0}$ muni de la multiplication. Calculer $f(n)$ en fonction de $f(1)$ pour tout entier $n > 0$. Montrer que les deux groupes précédents ne sont pas isomorphes.

Correction ▼ [002150]

Exercice 5474

Trouver tous les morphismes du groupe additif $\mathbb{Q}$ dans lui même.

Même question de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Même question de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Indication ▼ [002151]

Exercice 5475

Etant donnés deux entiers $m,n > 0$, déterminer tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, puis tous les automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indication ▼ [002152]

Exercice 5476

Soit G un groupe et H un sous groupe distingué de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$, $a^n \in H$. Donner un exemple de sous-groupe H non distingué de G pour lequel la conclusion précédente est fausse.

Correction ▼ [002153]

Exercice 5477

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe distingué d'ordre n et d'indice m. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre n.

Correction ▼ [002154]

Exercice 5478

Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que le groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{R}^\times$.

Indication ▼ [002155]

Exercice 5479

On considère les groupes suivants :

$$T = \{z \in (x^2+1)2pt \mid |z| = 1\} \quad \mu_n = \{z \in (x^2+1)2pt \mid z^n = 1\} \quad \mu_\infty = \{z \in (x^2+1)2pt \mid \exists n \quad z^n = 1\}$$

(a) Montrer les isomorphismes suivants :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T \quad (x^2+1)^{\times/\mathbb{R}^\times_{>0} \simeq T \quad (x^2+1)^{\times/\mathbb{R}^\times \simeq T \quad T/\mu_n \simeq T \quad (x^2+1)^{\times/\mu_n \simeq (x^2+1)^\times}}}$$

(b) Montrer que $\mu_\infty \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Quels sont les sous-groupes finis de μ_∞ ?

(c) Montrer qu'un sous-groupe de type fini de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$ est de la forme $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$. En déduire la forme des sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et de μ_∞.

(d) Soit p un nombre premier. Montrer que $\mu_{p^\infty} = \{z \in (x^2+1)2pt \mid \exists n \in ||| \quad z^{p^n} = 1\}$ est un sous-groupe de μ_∞. Est-il de type fini ?

Correction ▼ [002156]

Exercice 5480

Soit G un sous-groupe d'indice fini du groupe multiplicatif $(x^2+1)^\times$. Montrer que $G = (x^2+1)^\times$.

Correction ▼ [002157]

Exercice 5481

Soit G un groupe et H un sous-groupe contenu dans le centre $Z(G)$ de G. Montrer que H est distingué dans G et que, si le groupe quotient G/H est cyclique, $G = Z(G)$.

Indication ▼ [002158]

Exercice 5482

Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier est abélien. (On utilisera que le centre d'un p-groupe est non trivial, ce qui est une conséquence classique de la "formule des classes" (voir chapitre suivant)).

Indication ▼ [002159]

Exercice 5483

(a) Soit p un nombre premier. Montrer que tout morphisme de groupes entre $\mathbb{F}_p^n$ et $\mathbb{F}_p^m$ est une application $\mathbb{F}_p$ -linéaire.

(b) Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$.

(c) Déterminer le nombre d'automorphismes de $\mathbb{F}_p^n$.

Correction ▼ [002160]

Exercice 5484

Déterminer le centre du groupe $GL_n(\mathbb{F}_p)$ des automorphismes de $(\mathbb{F}_p)^n$.

Indication ▼ [002161]

Exercice 5485

Soit p un nombre premier. Montrer qu'un groupe abélien fini, dont tous les éléments différents de l'élément neutre sont d'ordre p, est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

Correction ▼ [002162]

Exercice 5486

(a) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On note φ la surjection canonique $\varphi : G \to G/H$. Montrer que l'ordre d'un élément x de G est un multiple de l'ordre de $\varphi(x)$.

(b) Pour tout $x \in G$ on pose τ_x l'application de G dans G définie par $\tau_x(y) = xyx^{-1}$. Montrer que τ_x est un automorphisme de G et que l'application

$$x \longrightarrow \tau_x$$

est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}(G)$. Quel est le noyau de ce morphisme ?

(c) On suppose que G est fini et que H est un sous-groupe distingué dont l'ordre est le plus petit nombre premier p divisant l'ordre de G. Montrer que pour tout $x \in G$ l'ordre de la restriction à H de τ_x est un diviseur de $p-1$ et de l'ordre de G. En déduire que τ_x restreint à H est l'identité pour tout x et donc que H est contenu dans le centre de G.

Indication ▼ [002163]

Exercice 5487

Soit G un groupe. On appelle groupe des commutateurs de G et l'on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Montrer que $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G tel que le quotient de G par ce sous-groupe soit abélien.

Indication ▼ [002164]

Exercice 5488

Soit G un groupe d'ordre p^3 où p est un nombre premier. Montrer que si G n'est pas commutatif, $Z(G) = D(G)$ et que ce sous-groupe est d'ordre p.

Correction ▼ [002165]

243 304.00 Action de groupe

Exercice 5489

Soit $\sigma \in S_5$ défini par

$$\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

(a) Ecrire la décomposition de σ en produit de cycles de supports disjoints. Quelle est la signature de σ ?

(b) Donner la liste des éléments de $< \sigma >$. Déterminer $< \sigma > \cap A_5$.

Indication ▼ [002166]

Exercice 5490

(a) Montrer que le produit de deux transpositions distinctes est un 3-cycle ou un produit de deux 3-cycles. En déduire que A_n est engendré par les 3-cycles.

(b) Montrer que $A_n =< (123), (124), \dots, (12n) >$.

Correction ▼ [002167]

Exercice 5491

On appelle cycle une permutation σ vérifiant la propriété suivante : il existe une partition de $\{1,\dots,n\}$ en deux sous-ensembles I et J tels que la restriction de σ à I est l'identité de I et il existe $a \in J$ tel que $J = \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)\}$ où r est le cardinal de J. Le sous-ensemble J est appelé le support du cycle σ.

Un tel cycle sera noté $(a, \sigma(a), \dots, \sigma^{r-1}(a))$

(a) Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. On considère le sous-groupe C engendré par σ dans S_n. Montrer que la restriction de σ à chacune des orbites de $\{1,\dots,n\}$ sous l'action de C est un cycle, que ces différents cycles commutent entre eux, et que σ est le produit de ces cycles.

(b) Décomposer en cycles les permutations suivantes de $\{1,\dots,7\}$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

(c) Montrer que si σ est un cycle, $\sigma = (a, \sigma(a), \dots, \sigma^{r-1}(a))$, la conjuguée $\tau\sigma\tau^{-1}$ est un cycle et que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a), \tau(\sigma(a)), \dots, \tau(\sigma^{r-1}(a)))$.

(d) Déterminer toutes les classes de conjugaison des permutations dans S_5 (on considérera leur décomposition en cycles). Déterminer tous les sous-groupes distingués de S_5.

Indication ▼ [002168]

Exercice 5492

Montrer que les permutations circulaires engendrent S_n si n est pair, et A_n si n est impair.

Correction ▼ [002169]

Exercice 5493

Soit I un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ et σ un cycle de support I. Soit τ une autre permutation. Montrer que τ commute avec σ si et seulement si τ laisse invariant I et la restriction de τ à I est égale à une puissance de la restriction de σ à I.

Correction ▼ [002170]

Exercice 5494

Soit H un sous-groupe distingué de S_n contenant une transposition. Montrer que $H = S_n$.

Correction ▼ [002171]

Exercice 5495

Dans le groupe symétrique S_4 on considère les sous-ensembles suivants :

$$H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(\{1,2\}) = \{1,2\}\}$$

$$K = \{\sigma \in S_4 \mid \forall a,b \quad a \equiv b \text{ [mod 2]} \Rightarrow \sigma(a) \equiv \sigma(b) \text{ [mod 2]}\}$$

Montrer que H et K sont des sous-groupes de S_4. Les décrire.

Correction ▼ [002172]

Exercice 5496

Montrer que l'ordre d'une permutation impaire est un nombre pair.

Indication ▼ [002173]

Exercice 5497

Montrer que toute permutation d'ordre 10 dans S_8 est impaire.

Correction ▼ [002174]

Exercice 5498

(a) Montrer que tout 3-cycle est un carré. En déduire que le groupe alterné A_n est engendré par les carrés de permutations.

(b) Montrer que A_n est le seul sous-groupe de S_n d'indice 2.

Correction ▼ [002175]

Exercice 5499

Trouver toutes les classes de conjugaison de S_4. Donner la liste des sous-groupes distingués de S_4.

Correction ▼ [002176]

Exercice 5500

Etant donnés un groupe G et un sous-groupe H, on définit le normalisateur $\mathrm{Nor}_G(H)$ de H dans G comme l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gHg^{-1} = H$.

(a) Montrer que $\mathrm{Nor}_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H comme sous-groupe distingué.

(b) Montrer que le nombre de sous-groupes distincts conjugués de H dans G est égal à l'indice $[G : \mathrm{Nor}_G(H)]$ et qu'en particulier c'est un diviseur de l'ordre de G.

Indication ▼ [002177]

Exercice 5501

Montrer que pour $m \geq 3$, un groupe simple d'ordre $\geq m!$ ne peut avoir de sous-groupe d'indice m.

Indication ▼ Correction ▼ [002178]

Exercice 5502

Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini n. Montrer que l'intersection H' des conjugués de H par les éléments de G est un sous-groupe distingué de G et d'indice fini dans G. Montrer que c'est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H.

Indication ▼ [002179]

Exercice 5503

a) Montrer qu'un groupe G vérifiant

$$\forall a,b \in G \quad a^2b^2 = (ab)^2$$

est commutatif.

(b) Le but de cette question est de donner un exemple de groupe G vérifiant la propriété

$$\forall a,b \in G \quad a^3b^3 = (ab)^3$$

et qui n'est pas commutatif.

(i) montrer qu'il existe un automorphisme σ de $\mathbb{F}_3^2$ d'ordre 3.

(ii) montrer que le groupe G défini comme le produit semi-direct de $\mathbb{F}_3^2$ par $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3$ agissant sur $\mathbb{F}_3^2$ via σ répond à la question.

Correction ▼ [002180]

Exercice 5504

Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini dans G. On définit sur G la relation xRy si et seulement si $x \in HyH$.

(a) Montrer que R est une relation d'équivalence et que toute classe d'équivalence pour la relation R est une union finie disjointe de classes à gauche modulo H.

Soit $HxH = \bigcup_{1\le i\le d(x)} x_iH$ la partition de la classe HxH en classes à gauche distinctes.

(b) Soit $h \in H$ et i un entier compris entre 1 et $d(x)$; posons $h * x_iH = hx_iH$. Montrer que cette formule définit une action transitive de H sur l'ensemble des classes $x_1H, \dots, x_{d(x)}H$ et que le fixateur de x_iH dans cette action est $H \cap x_iHx_i^{-1}$. En déduire que

$$d(x) = [H : H \cap xHx^{-1}]$$

et qu'en particulier $d(x)$ divise l'ordre de G.

(c) Montrer que H est distingué dans G si et seulement si $d(x) = 1$ pour tout $x \in G$.

(d) On suppose que G est fini et que $[G : H] = p$, où p est le plus petit nombre premier divisant l'ordre de G. Le but de cette question est de montrer que H est distingué dans G.

(i) Montrer que pour tout $x \in G$, $d(x) \le p$. En déduire que $d(x) = 1$ ou $d(x) = p$.

(ii) Montrer que si H n'est pas distingué dans G, il existe une unique classe d'équivalence pour la relation R et que $G = H$, ce qui contredit l'hypothèse $[G : H] = p$.

Correction ▼ [002181]

Exercice 5505

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

(a) On suppose que toute orbite contient au moins deux éléments, que $|G| = 15$ et que $\mathrm{card}(X) = 17$. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune.

(b) On suppose que $|G| = 33$ et $\mathrm{card}(X) = 19$. Montrer qu'il existe au moins une orbite réduite à un élément.

Correction ▼ [002182]

Exercice 5506

(a) Soit G un groupe et H un sous-groupe. Montrer que la formule

$$g.g'H = gg'H$$

définit une action de G sur l'ensemble quotient G/H. Déterminer le fixateur d'une classe gH.

(b) Soit G un groupe et X et Y deux ensembles sur lesquels G agit (on parlera de G-ensembles). Soit f une application de X dans Y. On dira que f est compatible à l'action de G (ou que f est un morphisme de G-ensembles) si pour tout élément x de X et tout g dans G, $f(g.x) = g.f(x)$. Montrer que si f est bijective et compatible à l'action de G il en est de même de f^{-1}. On dira dans ce cas que f est un isomorphisme de G-ensembles.

(c) Soit G un groupe agissant transitivement sur un ensemble X (i.e. pour tout couple d'éléments x et y de X il existe au moins un élément g du groupe tel que $g.x = y$). Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G tel que X soit isomorphe en tant que G-ensemble à G/H (on prendra pour H le fixateur d'un point quelconque de X).

(d) i) Soit H et K deux sous-groupes de G. Montrer qu'il existe une application f de G/H vers G/K compatible avec l'action de G si et seulement si H est contenu dans un conjugué de K. Montrer que dans ce cas f est surjective. Montrer que G/H et G/K sont isomorphes en tant que G-ensembles si et seulement si H et K sont conjugués dans G.

ii) Soit X et Y deux G-ensembles transitifs. Montrer qu'il existe une application de X vers Y compatible avec l'action de G si et seulement si il existe deux éléments x et y de X et Y tels que le fixateur de x soit contenu dans un conjugué du fixateur de y. Montrer que X et Y sont isomorphes si et seulement si les fixateurs de x et de y sont conjugués dans G.

Correction ▼ [002183]

Exercice 5507

Soit G un groupe fini et X un G-ensemble transitif. On dira que X est *imprimitif* si X admet une partition $X = \bigcup_{1\le i\le r} X_i$ telle que tout élément g de G respecte cette partition, i.e. envoie un sous-ensemble X_i sur un sous-ensemble X_k (éventuellement $k = i$) et telle que $2 \le r$ et les parties X_i ne sont pas réduites à un élément. Dans le cas contraire on dit que X est *primitif*.

(a) Montrer que dans la décomposition précédente, si elle existe, tous les sous-ensembles X_i ont même nombre m d'éléments.

(b) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que G/H est imprimitif si et seulement s'il existe un sous-groupe propre K de G différent de H tel que $H \subset K \subset G$ (on regardera la partition de G/H en classes modulo K).

(c) Déduire de ce qui précède que X est primitif si et seulement si le fixateur d'un élément x de X est maximal parmi les sous-groupes propres de G.

(d) On suppose ici que X est primitif et que H est un sous-groupe distingué de G dont l'action n'est pas triviale sur X. Montrer qu'alors H agit transitivement sur X.

Indication ▼ Correction ▼ [002184]

Exercice 5508

Montrer qu'un sous-groupe primitif de S_n qui contient une transposition est S_n tout entier.

Indication ▼ Correction ▼ [002185]

Exercice 5509

Soit G un groupe fini et X un G-ensemble. Si k est un entier ($1 \leq k$), on dit que X est k-transitif, si pour tout couple de k-uplets $(x_1,\dots,x_k)$ et $(y_1,\dots,y_k)$ d'éléments de X distincts deux à deux, il existe au moins un élément g de G tel que pour tout i, $1 \leq i \leq k$, $g.x_i = y_i$. Un G-ensemble 1-transitif est donc simplement un G-ensemble transitif.

(a) Montrer que si X est k-transitif, il est aussi l-transitif pour tout l, $1 \leq l \leq k$.

(b) Montrer que X est 2-transitif si et seulement si le fixateur d'un élément x de X agit transitivement sur $X \setminus \{x\}$.

(c) Montrer que si X est imprimitif, il n'est pas 2-transitif.

(d) Montrer qu'un groupe cyclique C d'ordre premier considéré comme C-ensemble par l'action de translation de C sur lui-même, est primitif mais n'est pas 2-transitif.

(e) Montrer que l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ muni de l'action du groupe S_n est k-transitif pour tout k, $1 \leq k \leq n$. En déduire que l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ muni de l'action du groupe S_n est primitif.

(f) Montrer que le fixateur de 1 dans S_n est isomorphe à S_{n-1}. Dans la suite on identifie S_{n-1} à ce fixateur. Déduire de l'exercice 19 que S_{n-1} est un sous-groupe propre maximal de S_n.

Indication ▼ [002186]

Exercice 5510

Décrire le groupe D_n des isométries du plan affine euclidien qui laissent invariant un polygone régulier à n côtés. Montrer que D_n est engendré par deux éléments σ et τ qui vérifient les relations : $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Quel est l'ordre de D_n ? Déterminer le centre de D_n. Montrer que $D_3 \simeq S_3$.

Indication ▼ [002187]

Exercice 5511

Montrer que le groupe des isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3 qui laissent invariant un tétraèdre régulier de sommets a_1,a_2,a_3,a_4 est isomorphe à S_4 et que le sous-groupe des isométries directes qui laissent invariant le tétraèdre est isomorphe à A_4.

Correction ▼ [002188]

Exercice 5512

Déterminer le groupe des isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3 qui laissent invariant un cube. [002189]

244 305.00 Groupe cyclique

Exercice 5513

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique. [002659]

Exercice 5514

Montrer qu'un groupe G dont les seuls sous-groupes sont G et $\{e_G\}$ est cyclique et que son ordre est premier. [002660]

245 306.00 Théorème de Sylow

Exercice 5515

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que si H et G/H sont des p-groupes, il en est de même de G.

Indication ▼ [002190]

Exercice 5516

Soit G un p-groupe et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $H \cap Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.

Correction ▼ [002191]

Exercice 5517

Soit G un p-groupe d'ordre p^r.

(a) Montrer que pour tout entier $k \leq r$, G possède un sous-groupe distingué d'ordre p^k.

(b) Montrer qu'il existe une suite $G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \ldots \subset G_r = G$ de sous-groupes G_i distingués d'ordre p^i $(i = 1, \ldots, r)$.

(c) Montrer que pour tout sous-groupe H de G d'ordre p^s avec $s < r$, il existe un sous-groupe d'ordre p^{s+1} de G qui contient H.

Indication ▼ Correction ▼ [002192]

Exercice 5518

Soit G un groupe d'ordre $2p$, où p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que G contient un unique sous-groupe H d'ordre p et que ce sous-groupe est distingué. Vérifier que les seuls automorphismes d'ordre 2 d'un groupe cyclique d'ordre p sont l'identité et le passage à l'inverse. En déduire que le groupe G est soit cyclique, soit non commutatif, auquel cas il possède deux générateurs s et t vérifiant les relations $s^p = 1$, $t^2 = 1$ et $tst^{-1} = s^{-1}$.

Correction ▼ [002193]

Exercice 5519

Soit G un groupe non commutatif d'ordre 8.

(a) Montrer que G contient un élément a d'ordre 4 et que le sous-groupe H de G engendré par a est distingué dans G.

(b) On suppose ici qu'il existe un élément b de $G \setminus H$ qui est d'ordre 2. Soit K le sous-groupe engendré par b. Montrer que dans ce cas G est isomorphe au produit semi-direct de H par K, le générateur b de K agissant sur H via l'automorphisme $x \to x^{-1}$. Le groupe est alors isomorphe au groupe diédral D_4.

(c) Dans le cas contraire, soit b un élément d'ordre 4 de G n'appartenant pas à H. Montrer que a^2 est le seul élément d'ordre 2 de G, que le centre $Z(G)$ de G est égal à $\{1, a^2\}$. On pose $-1 = a^2$. Montrer que a et b vérifient les relations suivantes : $a^2 = b^2 = -1$, $bab^{-1} = a^{-1}$. Enfin on pose $ab = c$. Vérifier les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1 \quad ab = -ba = c \quad bc = -cb = a \quad ca = -ac = b$$

(l'écriture $-x$ signifiant ici $(-1)x$). Ce dernier groupe est le groupe des quaternions.

Correction ▼ [002194]

Exercice 5520

Montrer que le groupe diédral D_6 est isomorphe au produit direct $\mu_2 \times S_3$.

Indication ▼ [002195]

Exercice 5521

(a) Soit G un groupe non abélien d'ordre 12. Soit H un 3-Sylow de G. On considère le morphisme $\theta : G \to S_{G/H}$ correspondant à l'action de G par translation de G sur G/H. Montrer que ce morphisme n'est pas injectif si et seulement si H est distingué dans G. En déduire que si H n'est pas distingué dans G, le groupe G est isomorphe à A_4.

(b) On suppose que G n'est pas isomorphe à A_4. Montrer qu'alors G admet un unique 3-Sylow $H = \{1, a, a^2\}$. Montrer ensuite que si G contient un élément b d'ordre 4, a et b vérifient les relations :

$$a^3 = b^4 = 1 \quad bab^{-1} = a^2 = a^{-1}$$

Montrer que dans le cas contraire $G \simeq D_6$.

(c) Donner la liste des classes d'isomorphisme de groupes d'ordre 12.

Correction ▼ [002196]

Exercice 5522

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On se donne un nombre premier p et l'on suppose que H admet un unique p-Sylow S. Montrer que S est distingué dans G.

Indication ▼ [002197]

Exercice 5523

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On se donne un nombre premier p et un p-Sylow P de G. Montrer que $H \cap P$ est un p-Sylow de H et que HP/H est un p-Sylow de G/H.

Correction ▼ [002198]

Exercice 5524

Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Correction ▼ [002199]

Exercice 5525

Pour p un nombre premier, déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_p.

Correction ▼ [002200]

Exercice 5526

(a) Donner l'ensemble $\mathscr{D}$ des ordres possibles des éléments du groupe alterné A_5 et pour chaque $d \in \mathscr{D}$, indiquer le nombre d'éléments de A_5 d'ordre d.

(b) Montrer que, pour $d = 2$ et $d = 3$, les éléments d'ordre d sont conjugués, et que les sous-groupes d'ordre 5 sont conjugués.

(c) Déduire une preuve de la simplicité de A_5.

Indication ▼ [002201]

Exercice 5527

Déterminer les sous-groupes de Sylow du groupe alterné A_5.

Indication ▼ Correction ▼ [002202]

Exercice 5528

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

(a) Montrer que G admet 6 5-Sylow, et que l'action de conjugaison sur ses 5-Sylow définit un morphisme injectif $\alpha : G \to S_6$, une fois une numérotation des 5-Sylow de G choisie. Montrer que l'image $\alpha(G) = H$ est contenue dans A_6.

(b) On considère l'action de A_6 par translation à gauche sur l'ensemble $A_6/.H$ des classes à gauche. Montrer qu'elle définit un isomorphisme $\varphi : A_6 \to A_6$, une fois une numérotation des éléments de $A_6/.H$ choisie.

(c) Montrer que $\varphi(H)$ est le fixateur de la classe de l'élément neutre H, et en conclure que $G \simeq A_5$.

Correction ▼ [002203]

Exercice 5529

Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre pq. Montrer que G admet un unique q-Sylow Q qui est distingué et que $G = QP$, où P est un p-Sylow de G. Montrer que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre q par un groupe cyclique d'ordre p. Montrer que si $q-1$ n'est pas divisible par p, ce produit semi-direct est en fait un produit direct.

Indication ▼ [002204]

Exercice 5530

Montrer qu'un groupe d'ordre 35 est cyclique.

Indication ▼ [002205]

Exercice 5531

Soient p et q deux nombres premiers et G un groupe d'ordre p^2q. On suppose que p^2-1 n'est pas divisible par q et que $q-1$ n'est pas divisible par p. Montrer que G est abélien.

Correction ▼ [002206]

Exercice 5532

Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre p^2q.

Indication ▼ Correction ▼ [002207]

Exercice 5533

Soit G un groupe d'ordre 399.

(a) Montrer que G admet un unique 19-Sylow P qui est distingué dans G.

(b) Soit Q un 7-Sylow. Montrer que $N = PQ$ est un sous-groupe d'ordre 133 de G et que ce groupe est cyclique.

(c) On suppose que Q n'est pas distingué dans G. Montrer que G admet 57 sous-groupes cycliques d'ordre 133 distincts deux à deux. Quel serait le nombre d'éléments d'ordre 133 dans G ? Aboutir à une contradiction. En déduire que Q est distingué dans G et que N est distingué dans G.

(d) Montrer que $G = NR$, où R est un 3-Sylow. En déduire que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre 133 par un groupe cyclique d'ordre 3.

Correction ▼ [002208]

Exercice 5534

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

(a) Montrer que G n'admet pas de sous-groupe d'ordre 20.

(b) Montrer que si G admet un sous-groupe K d'ordre 12, alors K admet 4 3-Sylow.

(c) Montrer que si H et K sont deux sous-groupes distinct d'ordre 4 de G alors $H \cap K = \{1\}$.

(d) Montrer que si H est un 2-Sylow, alors $H \neq \mathrm{Nor}_G(H)$.

(e) Montrer que G possède 5 2-Sylow.

(f) Conclure en considérant l'action de G par conjugaison sur les 5-Sylow.

Indication ▼ [002209]

246 307.00 Autre

247 310.00 Isométrie euclidienne

248 311.00 Géométrie différentielle élémentaire de Rn

249 312.00 Géométrie et trigonométrie sphérique

250 313.00 Groupe orthogonal et quaternions

251 314.00 Géométrie projective

252 315.00 Géométrie et trigonométrie hyperbolique

253 316.00 Autre

254 320.00 Groupe

255 321.00 Sous-groupe, morphisme

256 322.00 Groupe fini

257 323.00 Anneau, corps

Exercice 5535

1. Trouver
$$999 \cdot 1998 \mod 1999, \qquad 136^7 \mod 137, \qquad 1997 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 \mod 2001.$$
2. Trouver $2792^{217} \mod 5$ et $10^{1000} \mod 13$.

[002240]

Exercice 5536

1. Examiner les carrés $a^2 \mod n$ pour $n = 3,\ 4,\ 8$.
2. Examiner $a^3 \mod 9$ et $b^4 \mod 16$.

[002241]

Exercice 5537

Passer $\mod n$ avec un module approprié et montrer que chacune des équations suivantes n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$:

1. $3x^2 + 2 = y^2$;
2. $x^2 + y^2 = n$ pour $n = 2003, 2004$;
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 1999$;
4. $x^3 + y^3 + z^3 = 5$;
5. $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{15}^4 = 7936$.

[002242]

Exercice 5538

On dit que $a \mod n$ est inversible si il existe $b \mod n$ tel que $ab \equiv 1 \mod n$.

1. Trouver tous les éléments inversibles modulo 5, 6, 9, 11.
2. Trouver $\mathrm{pgcd}(107,281)$ et sa representation linéaire en utilisant *l'algorithme d'Euclide*.
3. Trouver l'inverse de $107 \mod 281$ et l'inverse de $281 \mod 107$.
4. Montrer que $a \mod n$ est inversible ssi a et n sont premiers entre eux.

[002243]

Exercice 5539

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$:

1. $2x+3 \equiv 10 \mod 13$;
2. $\begin{cases} 2x+3y \equiv 5 \mod 7 \\ 5x+2y \equiv 2 \mod 7; \end{cases}$
3. $x^2+2x+14 \equiv 0 \mod 17$.

[002244]

Exercice 5540 Le petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un nombre premier à p. Montrer que :

1. $am \equiv an \mod p$ ssi $m \equiv n \mod p$;
2. La suite $a,\ 2a,\ 3a,\dots,(p-1)a \mod p$ est une permutation de la suite $1,\ 2,\ 3,\dots,(p-1) \mod p$;
3. $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

[002245]

Exercice 5541

1. Examiner $7^n+11^n \mod 19$.
2. Trouver $2792^{217} \mod 5$ et $10^{1000} \mod 13$.
3. Montrer que 13 divise $2^{70}+3^{70}$ et 11 divise $2^{129}+3^{118}$.

[002246]

Exercice 5542 Théorème de Wilson

Soit $p=2m+1$ un nombre premier. Montrer que :

1. $(p-1)! \equiv -1 \mod p$;
2. $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \mod p$.

[002247]

Exercice 5543

Soit $p>2$ un nombre premier.

1. Soit a premier à p. Supposons que la congruence $x^2 \equiv a \mod p$ possède une solution. Montrer que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \mod p$.
2. La congruence $x^2 \equiv -1 \mod p$ a une solution ssi $p \equiv 1 \mod 4$.

[002248]

Exercice 5544

Donner la définition d'un corps. Les opérations binaires $+$ et $\cdot$, sont-elles équivalentes dans la définition ?

Correction ▼ [002249]

Exercice 5545

Trouver toutes les solutions des équations :

1. $ax+b=c$ $(a,b,c \in K$, K est un corps$)$;

2. $2x \equiv 3 \mod 10$ et $2x \equiv 6 \mod 10$ dans l'anneau $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002250]

Exercice 5546

Soit A un anneau. Démontrer que :

1. $\forall a \in A \;\; 0_A \cdot a = 0_A$;
2. $(-1_A) \cdot a = -a$;
3. $|A| \geq 2 \iff 1_A \neq 0_A$ dans A.

Correction ▼ [002251]

Exercice 5547

1. Si $x \cdot y$ est inversible dans un anneau A, alors x et y sont inversibles.
2. Dans un anneau, un élément inversible n'est pas diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.

Correction ▼ [002252]

Exercice 5548

Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Indication ▼ Correction ▼ [002253]

Exercice 5549

Lesquels de ces sous-ensembles donnés de $\mathbb{C}$ sont des anneaux ? Lesquels sont des corps ?

1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} 10^{-n}\mathbb{Z}$;
2. $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1, p \nmid n\}$ (p est un nombre premier fixé) ;
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$;
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Correction ▼ [002254]

Exercice 5550

Les éléments inversibles d'un anneau A forment le groupe multiplicatif $(A^\times, \cdot)$.

1. Trouver $A^\times$ pour les anneaux 1. et 2. de l'exercice 5549.
2. Trouver le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ en utilisant la norme complexe.
3. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

[002255]

Exercice 5551

Un élément a d'un anneau A s'appelle nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :

1. $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
3. Démontrer que, pour tout nilpotent x de A, l'élément $1 + x$ est inversible.

[002256]

Exercice 5552

Soit I un idéal d'un anneau A. On note par $(a) = a \cdot A$ l'idéal principal engendré par a. Montrer que :

1. $I = A$ si et seulement si I contient une unité ;
2. $(a) = A$ ssi a est inversible ;

3. Un anneau A est un corps ssi (0) est le seul idéal propre de A.

[002257]

Exercice 5553

Montrer que les éléments nilpotents d'un anneau forment un idéal.

[002258]

Exercice 5554 Sommes et produits d'idéaux

1. Soient I, J deux idéaux d'un anneau A. Montrer que
$$I \cap J, \qquad I + J = \{x + y \,|\, x \in I, y \in J\}$$
sont des idéaux de A.
2. Montrer que $I + J$ est le plus petit idéal de A contenant I et J.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$, $I = (n) = n\mathbb{Z}$, $J = (m) = m\mathbb{Z}$. Trouver $I \cap J$ et $I + J$.
4. Montrer que
$$I \cdot J = \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_k \in I,\ y_k \in J \text{ pour } \ 1 \leq k \leq n\}$$
est un idéal. Il s'appelle *produit des idéaux I et J*.
5. On considère les idéaux $I = (x_1, \ldots x_n) = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ et $J = (y_1, \ldots y_m) = Ay_1 + \cdots + Ay_m$. Décrire les idéaux $I + J$, $I \cdot J$, I^2 en fonction de x_k, y_l.

[002259]

Exercice 5555 Idéaux étrangers

1. Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$ et $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$
2. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I + J = A$. Montrer que $I \cap J$=$I \cdot J$ si I, J sont étrangers.

[002260]

Exercice 5556

Soient A un anneau et I et J les idéaux de A tels que $I + J = (1)$. Démontrer que $I^n + J^m = (1)$ quels que soient entiers positifs non-nuls n et m.

Correction ▼ [002300]

Exercice 5557

Trouver toutes les solutions des systèmes suivantes :

1. $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x \equiv 997 \mod 2001 \\ x \equiv 998 \mod 2002 \\ x \equiv 999 \mod 2003 \end{cases}$.

Correction ▼ [002301]

Exercice 5558

Démontrer que les anneaux suivants sont isomorphes
$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}.$$

Correction ▼ [002302]

Exercice 5559

---

1. Montrer que $20^{15}-1$ est divisible par $11\times 31\times 61$.
2. Trouver le reste de la division de 2^{6754} par 1155.

Correction ▼ [002303]

Exercice 5560

1. Quels sont les restes des division de 10^{100} par 13 et par 19 ?
2. Quel est le reste de la division de 10^{100} par $247=13\cdot 19$? En déduire que $10^{99}+1$ est multiple de 247.

Correction ▼ [002304]

Exercice 5561

Soit $C=A\times B$ le produit direct de deux anneaux. Décrire les ensembles des éléments inversibles, des diviseurs de zéro et des éléments nilpotents de l'anneau C.

Correction ▼ [002305]

Exercice 5562

1. Déterminér la structure des anneaux quotients suivants :
$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+x+1),\quad \mathbb{Z}[x]/(x^2-1),\quad \mathbb{Q}[x]/(x^8-1).$$
2. Considérons l'anneau quotient $K[x]/(f^ng^m)$ où f et g sont deux polynômes distincts irréductibles sur le corps K. Décrirer les diviseurs de zéro et les éléments nilpotents de l'anneau $K[x]/(f^ng^m)$.
3. Quels idéaux a-t-il cet anneau ?
4. Soit K le corps fini à p éléments. Trouver le nombre des éléments du groupe multiplicatif de l'anneau $K[x]/(f^mg^l)$.
5. Donner une généralisation de la question 4) dans le cas du produit de n polynômes irréductibles sur un corps fini K à q éléments.

Correction ▼ [002306]

Exercice 5563

Trouver les facteurs multiples des polynômes suivants :

1. $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$;
2. $x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$.

Correction ▼ [002307]

Exercice 5564

Trouver le polynôme $f\in\mathbb{Z}[x]$ du dergé le plus petit tel que
$$\begin{cases} f\equiv 2x \mod (x-1)^2\\ f\equiv 3x \mod (x-2)^3\end{cases}.$$

[002308]

Exercice 5565

Soit $\sqrt{d}$ non rationel. Dans l'anneau
$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]=\{n+m\sqrt{d}\,|\,n,m\in\mathbb{Z}\}$$
on definit la "conjugaison" $\bar{z}$:
$$\text{si } z=n+m\sqrt{d}, \text{ alors } \bar{z}=n-m\sqrt{d}.$$
On peut aussi définir la norme $N_d:\mathbb{Z}[\sqrt{d}]\to\mathbb{Z}$ par $N_d(z)=z\bar{z}=(n+m\sqrt{d})(n-m\sqrt{d})$.

0. Montrer que les aplications $\bar{z}$ et $N(z)$ sont multiplicatives :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \qquad N_d(z_1 \cdot z_2) = N_d(z_1) \cdot N_d(z_2).$$

Correction ▼ [002309]

Exercice 5566

1. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible ssi $N_d(z) = \pm 1$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
2. Montrer que si $N_d(z) = \pm p$, où p est un premier, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Donner quelques exemples d'éléments irreductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour $d = -1,\ 2,\ -6,\ p$, où p un premier.
3. On note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Montrer que 3 et $2+\sqrt{-5}$ sont irréductibles dans A.
4. Trouver tous les irréductibles de A de norme 9.
5. Trouver tous les diviseurs de 9 et de $3(2+\sqrt{-5})$ dans l'anneau A à association près.
6. Trouver un *pgcd* $(3, 2+\sqrt{-5})$, et montrer que 3 et $2+\sqrt{-5}$ n'ont pas de *ppcm* dans l'anneau A.
7. Montrer que l'idéal $I = (3, 2+\sqrt{-5}) \subset A$ n'est pas principal. Donc l'anneau A n'est pas principal. Est-il factoriel ?
8. Montrer que 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ n'ont pas de *pgcd* dans A. Possèdent-ils un *ppcm* ?

Correction ▼ [002310]

Exercice 5567

Soit $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers modulo 36.

1. Décrire tous les éléments inversibles, tous les diviseurs de zéro et tous les éléments nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}$. (*Un élément a d'un anneau A est dit nilpotent si il existe n tel que* $a^n = 0$.)
2. Trouver tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}$.
3. Soit A un anneau arbitraire. Montrer que
$$(a \in A^{\times} \text{ et } b \in A^{\times}) \iff (a \cdot b) \in A^{\times}.$$
4. Donner un exemple d'un polynôme inversible de degré 1 sur $\mathbb{Z}_{36}$.
5. Décrire tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}[x]$.

Correction ▼ [002311]

Exercice 5568

Montrer que les polynômes suivantes sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$:

1. $P = x^{2004} + 4x^{2002} + 2000x^4 + 2002$;
2. $Q = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 25$.

Correction ▼ [002312]

Exercice 5569

Soit p un nombre premier impair. Montrer que la congruence
$x^2 \equiv -1 \mod p$ a une solution si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.

Correction ▼ [002313]

Exercice 5570

Soient $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ deux polynômes sur le corps $\mathbb{Z}_2$.

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide trouver le p.g.c.d. de f et g et sa représentation linéaire.
2. Les polynômes f et g sont-ils irréductibles ?
3. Soit (g) l'idéal principal engendré par g. Combien d'éléments contient l'anneau quotient $A = \mathbb{Z}_2[x]/(g)$?
4. Soit $\pi : \mathbb{Z}_2[x] \to A$ la projection canonique. On pose $\pi(x) = \bar{x} \in A$. Trouver l'inverse de l'élément $\pi(f)$ dans l'anneau quotient A.
5. L'anneau quotient $B = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ est-il un corps ? Justifier la réponse, i.e. donner une démonstration si B est un corps ou trouver un élément non-inversible dans B dans le cas contraire.

Correction ▼ [002314]

258 324.00 Polynôme

Exercice 5571

1. Soit A un anneau quelconque. Alors l'anneau de polynômes $A[x]$ n'est pas un corps.
2. Montrer que pour un anneau intègre A, les polynômes unitaires linéaires de $A[x]$ sont irréductibles.
3. Décrire tous les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[x]$ et de $\mathbb{R}[x]$.
4. Démontrer que pour tout corps K, l'anneau de polynômes $K[x]$ a une infinité de polynômes unitaires irréductibles.

Correction ▼ [002261]

Exercice 5572

1. Montrer que l'idéal (x,n) où $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ de l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.
2. Soit A un anneau intègre. Montrer que $A[x]$ est principal ssi A est un corps.

Correction ▼ [002262]

Exercice 5573

Soit $f(x) \in A[x]$ un polynôme sur un anneau A. Supposons que $(x-1) \mid f(x^n)$. Montrer que $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

Correction ▼ [002263]

Exercice 5574

Pour $n,m \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(x-2)^m+(x-1)^n-1$ par $(x-1)(x-2)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Correction ▼ [002264]

Exercice 5575

1. Si K est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 ou 3 dans $K[x]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans K.
2. Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. En utilisant la partie précédente, montrer que les polynômes $5x^3+8x^2+3x+15$ et $x^5+2x^3+3x^2-6x-5$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.
4. Décrire tous les polynômes irréductibles de degré 4 et 5 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002265]

Exercice 5576

1. Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_3[x]$.

$$x^2+x+1, \qquad x^3+x+2, \qquad x^4+x^3+x+1\ .$$

Correction ▼ [002266]

Exercice 5577

En utilisant les réductions $\mod 2$ ou $\mod 3$ montrer que les polynômes $x^5-6x^3+2x^2-4x+5$, $7x^4+8x^3+11x^2-24x-455$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.

Correction ▼ [002267]

Exercice 5578

Soient

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1, \quad g(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$$

où $a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ soient deux à deux distincts. Montrer que f et g sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$.

Correction ▼ [002268]

Exercice 5579

Soient $f, g \in \mathbb{Q}[x]$. Supposons que f soit irréductible et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$. Alors f divise g.

Correction ▼ [002269]

Exercice 5580

Pour quel n, m dans $\mathbb{Z}$ la fraction

$$\frac{11n+2m}{18n+5m}$$

est réductible ?

Correction ▼ [002270]

Exercice 5581

Trouver le pgcd$(x^n-1,\ x^m-1)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Correction ▼ [002271]

Exercice 5582

Trouver le pgcd(f,g) dans $\mathbb{Z}_2[x]$ et sa représentation linéaire $fu+gv$ où $d,u,v \in \mathbb{Z}_2[x]$:

1. $$f = x^5+x^4+1, \qquad g = x^4+x^2+1;$$
2. $$f = x^5+x^3+x+1, \qquad g = x^4+1.$$

Correction ▼ [002272]

Exercice 5583

Trouver le pgcd(f,g) dans $\mathbb{Z}_3[x]$ et $\mathbb{Z}_5[x]$ de $f = x^4+1$, $g = x^3+x+1$.

Correction ▼ [002273]

Exercice 5584

Trouver le pgcd(f,g) dans $\mathbb{Z}[x]$ de $f = x^4+x^3-3x^2-4x-1$ et $g = x^3+x^2-x-1$.

Correction ▼ [002274]

Exercice 5585

Montrer que f est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f = x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
2. $f = x^5-12x^3+36x-12$;
3. $f = x^4-x^3+2x+1$;
4. $f = x^{p-1}+\cdots+x+1$, où p est premier.

Correction ▼ [002275]

Exercice 5586

Soient $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ et K son corps de fractions. Montrer que x^2-x+1 est irréductible dans $A[x]$ sans pour autant être irréductible dans $K[x]$. Expliquer la contradiction apparente avec le corollaire du lemme de Gauss.

Correction ▼ [002276]

Exercice 5587

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$.

1. Supposons que $P(0)$, $P(1)$ soient impairs. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$. (*Indication :* Utiliser la réduction modulo 2.)
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'aucun des entiers $P(0), \dots, P(n-1)$ ne soit divisible par n. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002277]

Exercice 5588

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$. Soit $\frac{a}{b}$ sa racine rationnelle : $P(\frac{a}{b}) = 0$, $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z} \;\; (a-bk)$ divise $P(k)$.
2. Quelles racines rationnelles ont les polynômes $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ et $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$?

Correction ▼ [002278]

Exercice 5589

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, $m = P(n)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad m \,|\, P(n+km)$.
2. En déduire qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$, non constant, tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit un nombre premier.

Correction ▼ [002279]

Exercice 5590

Dans le cours nous avons déjà montré que le produit de polynômes primitifs est aussi primitif et que

$$c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g) \qquad \forall\, f, g \in \mathbb{Z}[x].$$

1. Etant donné $f \in \mathbb{Q}[x]$, alors $f = \alpha \cdot f_0$ où $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme primitif et $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Soit $g \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme primitif, $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha \cdot g \in \mathbb{Z}[x]$. Alors $\alpha \in \mathbb{Z}$.
3. Considèrons deux polynômes d, f sur $\mathbb{Z}$. Si d est primitif et d divise f dans $\mathbb{Q}[x]$ alors d divise f dans $\mathbb{Z}[x]$.
4. Supposons que $d = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Q}[x]}(f,g)$ soit le p.g.c.d. dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ de deux polynômes primitifs f et g de $\mathbb{Z}[x]$. Soit $d = \alpha \cdot d_0$ sa représentation de type 1). Montrer que : $d_0 = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f,g)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[x]$.
5. Soient f, $g \in \mathbb{Z}[x]$, $f = c(f)f_0$, $g = c(g)g_0$. Alors
$$\mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f,g) = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}}(c(f),c(g)) \cdot \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f_0,g_0).$$

Correction ▼ [002280]

Exercice 5591

Démontrer que tout morphisme d'un corps dans un anneau non-trivial est injectif.

Correction ▼ [002281]

Exercice 5592

Soit R un anneau intègre dans lequel toute chaîne décroissante d'idéaux est finie. Démontrer que R est un corps.

Correction ▼ [002282]

Exercice 5593

Montrer que dans un anneau fini tout idéal premier est maximal.

Correction ▼ [002283]

Exercice 5594

Montrer que un idéal propre I de l'anneau A est premier ssi quand le produit de deux idéaux est contenue dans I, alors l'un de deux est contenu dans I. En déduire que si M est un idéal maximal de A, alors le seul idéal premier de A qui contient M^n est M.

Correction ▼ [002284]

Exercice 5595

Soit A un anneau. Trouver les anneaux quotients

$$A[x]/(x), \quad A[x,y]/(x), \quad A[x,y]/(x,y), \quad A[x_1,x_2,\ldots,x_n]/(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

où (x), (x,y), $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sont les idéaux engendrés réspectivement par x, x et y, x_1, x_2, ... ,x_n. Sous quelle condition sur l'anneau A ces idéaux sont-ils premiers (maximaux) ?

Correction ▼ [002285]

Exercice 5596

1. Trouver le nombre d'éléments de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
2. L'idéal principal endendré par 2 est-il premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Correction ▼ [002286]

Exercice 5597

Soit A un anneau intègre. On appelle *élément premier* de A un élément qui engendre un idéal principal premier.

1. Montrer que un élément premier est irréductible.
2. D'après le cours tout élément irréductible dans un anneau factoriel est premier. Montrer que dans un anneau factoriel, tout idéal premier non nul contient un élément irréductible.
3. Nous avons vu que l'élément $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est irréductible. Montrer que 3 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
4. L'élément 2 est-il irréductible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?

Correction ▼ [002287]

Exercice 5598

1. Soit A un anneau principal, I un idéal de A. Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient A/I sont principaux.
2. Trouver tous les idéaux des anneaux suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]/(f)$ où (f) est l'idéal principal engendré par un polynôme f.
3. Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}[x]/(f)$.

Correction ▼ [002288]

Exercice 5599

Soit I et J deux idéaux de l'anneau A. Considérons la projection canonique
$\pi_I : A \longrightarrow A/I$ et l'image $\bar{J} = \pi_I(J)$ de l'idéal J.

1. Montrer que $\bar{J}$ est un idéal de l'anneau quotient A/I.
2. Démontrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I+J)$.
   (*Indication :*. Considérer le morphisme $a+I \mapsto a+(I+J)$ de l'anneau A/I vers l'anneau $A/(I+J)$.)

Correction ▼ [002289]

Exercice 5600

Soit f un morphisme de l'anneau A vers l'anneau B.

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est aussi un idéal premier. Cette proposition est-elle vraie pour idéaux maximaux ?
2. Montrer par un exemple, que l'image $f(I)$ d'un idéal I de A n'est pas forcément un idéal de B. Démontrer cependant que si f est surjectif, alors $f(I)$ est un idéal pour tout idéal I de A. (Voir le cours.)
3. Toujours sous l'hypothèse que f est surjective, montrer que l'image d'un idéal maximal par f est soit B tout entier, soit un idéal maximal de B.

4. Considérons la reduction de polynômes sur $\mathbb{Z}$ modulo m : $r_m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x]$ et deux idéaux premiers principaux (x) et (x^2+1). Les idéaux $r_6((x))$ et $r_2((x^2+1))$ sont-ils premiers ?

Correction ▼ [002290]

Exercice 5601

Soit A un anneau, B un sous-anneau de A, I un idéal de A.

1. Montrer que $B \cap I$ est un idéal de B, $B+I = \{b+i \,|\, b \in B,\ i \in I\}$ est un sous-anneau de l'anneau A et I est un idéal de ce sous-anneau.
2. Montrer que l'anneau quotient $B/(B\cap I)$ est isomorphe à l'anneau quotient $(B+I)/I$. (*Indication :* Considérer le composé de l'inclusion $B \to B+I$ avec la projection canonique $B+I \to (B+I)/I$.)

Correction ▼ [002291]

Exercice 5602

Soit (x^3-x+2) l'idéal principal engendré par x^3-x+2 dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$.

1. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Q}[x]/(x^3-x+2)$ est un corps.
2. Soit y l'image de x dans $\mathbb{Q}[x]/(x^3-x+2)$ par la surjection canonique. Calculer son inverse.
3. Montrer que $1+y+y^2$ est non nul et calculer son inverse.

Correction ▼ [002292]

Exercice 5603

Soit $f \in A[x]$ un polynôme primitif de degré positif sur l'anneau factoriel A. Soit $\pi \in A$ un élément irréductible. Supposons que le coefficient dominant de f ne soit pas divisible par π et que $f \mod \pi$ soit irréductible dans l'anneau quotient $A/(\pi)$. Montrer que f est irréductible dans $A[x]$.

Correction ▼ [002293]

Exercice 5604

Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

1. $X^5+121X^4+1221X^3+12221X^2+122221X+222222$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. $f(X,Y) = X^2Y^3+X^2Y^2+Y^3-2XY^2+Y^2+X-1$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$ et $\mathbb{F}_2[X,Y]$.
3. $f(X,Y) = Y^7+Y^6+7Y^4+XY^3+3X^2Y^2-5Y+X^2+X+1$ dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Correction ▼ [002294]

Exercice 5605

L'idéal principal (x^2+y^2+1) est-il maximal dans les anneaux $\mathbb{C}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$, $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x,y]$?

Correction ▼ [002295]

Exercice 5606

1. Soit $f \in \mathbb{Z}[x]$. Considérons la reduction du polynôme f modulo m : $f \mod m \in \mathbb{Z}_m[x]$. Montrer que
$$\mathbb{Z}[x]/(m,f) \cong \mathbb{Z}_m[x]/(f \bmod m)$$
où (m,f) est l'idéal engendré par m et f dans $\mathbb{Z}[x]$ et $(f \bmod m)$ est l'idéal engendré par $f \mod m$ dans $\mathbb{Z}_m[x]$. (*Indication :* Utiliser l'exercice 10 de fiche 4.)
2. Si p est un nombre premier et f est un polynôme tel que $f \mod p$ est irréductible sur le corps $\mathbb{Z}_p$, alors l'idéal (p,f) est maximal dans $\mathbb{Z}[x]$.

[002296]

Exercice 5607

Soit A un anneau factoriel.

1. Pour $a,b \neq 0$ on a $(a)\cdot(b) = (a)\cap(b)$ ssi $\operatorname{pgcd}(a,b) \sim 1$.
2. Si (a,b) est principal, alors $(a,b) = (\operatorname{pgcd}(a,b))$.

Correction ▼ [002297]

Exercice 5608

1. Montrer que les idéaux $(5,x^2+3)$, $(x^2+1,x+2)$, (x^3-1,x^4-1) ne sont pas principaux dans $\mathbb{Z}[x]$.
2. Les idéaux $(x,x+1)$, $(5,x^2+4)$ et $(x^2+1,x+2)$ sont-ils premiers ou maximaux dans $\mathbb{Z}[x]$?

Correction ▼ [002298]

Exercice 5609

Démontrer que si J est un idéal premier de l'anneau $\mathbb{Z}[x]$, alors

$$J = (0), \quad (p), \quad (f) \quad \text{ou} \quad (p,g),$$

où p est premier, $f \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme irréductible de degré positif et g est un polynôme, tel que sa réduction modulo p est irréductible sur $\mathbb{Z}_p$. Le dernier cas, $J = (p,g)$, nous donne la forme générale d'un idéal maximal dans $\mathbb{Z}[x]$. *Le plan de la démonstration est le suivant.*

1. Soit B un sous-anneau de l'anneau A, I un idéal premier de A. Montrer que $B\cap I$ est soit un idéal premier de B, soit l'anneau B lui-même.
2. Soit J un id'eal premier de $\mathbb{Z}[x]$. Montrer que $\mathbb{Z}\cap J = (0)$ ou (p) où p est premier.
3. Supposons que $\mathbb{Z}\cap J = (0)$. Montrer que si $J \neq (0)$, alors J est engendré par un polynôme primitif de J de degré minimal.
4. Supposons que $\mathbb{Z}\cap J = (p)$. Soit $r_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ la réduction modulo p. Montrer que l'idéal $r_p(J)$ est premier et que $J = (p,g)$.
5. Montrer que J est maximal ssi $J = (p,g)$ où p est premier et $r_p(g)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_p[x]$.

Correction ▼ [002299]

259 325.00 Extension de corps

260 326.00 Extension d'anneau

261 327.00 Autre

262 350.00 Variété

263 351.00 Immersion, submersion, plongement

264 352.00 Sous-variété

Exercice 5610

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $S_\lambda = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2+x_2^2-x_3^2 = \lambda\}$.

1. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Dessiner S_λ en fonction de λ.
2. Pour $x,y \in \mathbb{R}^3$, soit $B(x,y) = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$. Soit $x \in S_\lambda$, exprimer T_xS_λ à l'aide de B.

Correction ▼ [002547]

Exercice 5611

On muni $\mathbb{R}^n$ de la norme $||x|| =< x,x >= \sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $< x,y >= \sum_{i=1}^n x_iy_i$. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire telle que $< u(x),y >=< x,u(y) >$ et soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n; < u(x),x >= 1\}$ Montrez que Q est une sous-variété et déterminez le plan tangent.

Correction ▼ [002548]

Exercice 5612

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta,\varphi) = (\cos\theta(1+1/2\cos\varphi), \sin\theta(1+1/2\cos\varphi), 1/2\sin\varphi)$ et soit $T = f(\mathbb{R}^2)$.

1. Soit R_θ la rotation d'angle θ autour de $(0z)$, et soit $C = \{(1+1/2\cos\varphi, 0, 1/2\sin\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \Cup_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(C)$. Dessiner T.
2. Montrer que $f(\theta,\varphi) = f(\theta_0,\varphi_0)$ si et seulement si il existe $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et $\varphi = \varphi_0 + 2l\pi$.
3. Montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $f(U)$ est un ouvert de T.
4. Montrer que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

[002549]

Exercice 5613

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par $f(A) = det(A)$.

1. Montrer que $\lim_{\lambda\to 0} \frac{det(I+\lambda X)-1}{\lambda} = tr(X)$ (penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{Id_n} f(X)$.
2. En remarquant que $\frac{det(A+\lambda X)-det(A)}{\lambda}$ est égal à $det(A)\frac{det(I+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$, pour A inversible, calculer $D_A f(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension n^2-1, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in M_n(\mathbb{R}); tr(X) = 0\}$.

[002550]

Exercice 5614

Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n. Soit $f : \mathscr{M}(\mathbb{R}) \to E$ définie par $f(A) = {}^tAA$.

1. Montrer que $D_A f(X) = {}^tAX + {}^tXA$.
2. Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in E$ et $X = 1/2AS$. Montrer que $D_A f(X) = S$. En déduire que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); {}^tX = -X\}$.

[002551]

Exercice 5615

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to E$ un difféomorphisme de classe C^1. On suppose que $f^n = Id$ et $f(a) = a$. On pose $A = D_a f$ et $u(x) = \sum_{p=1}^n A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.
2. Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F est une sous-variété de E.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x, y+y^3-x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En déduire que 2/ n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = Id$.

[002552]

265 353.00 Espace tangent, application linéaire tangente

266 354.00 Champ de vecteurs

267 355.00 Forme différentielle

268 356.00 Orientation

269 357.00 Intégration sur les variétés

270 358.00 Autre

271 370.00 Différentiabilité, calcul de différentielles

Exercice 5616

1. Montrez que $d(x,y) = |x-y|$ est bien une distance sur l'ensemble des réels.
2. Pour tout couple d'éléments $X = (x_1,\dots,x_n)$ et $Y = (y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on définit $d(X,Y) = \sup_{i=1..n}|x_i - y_i|$. Montrez que d est bien une distance sur $\mathbb{R}^n$.
3. Faire de même avec $d(X,Y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\dots+|x_n-y_n|$.

[002494]

Exercice 5617

Décrire la boule de centre l'origine et de rayon 1 dans les espaces suivants :

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.
2. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.
3. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sup(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$.
4. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$.

Montrez que les 3 dernières distances sont équivalentes.

Correction ▼ [002495]

Exercice 5618

Soit E l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues. Montrez que l'application $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ est une norme sur E. Montrez que E n'est pas complet.

Correction ▼ [002496]

Exercice 5619

Etudiez la continuité des applications suivantes :

1. $f(x) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $f(x) = \frac{exp(\frac{-1}{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$.

[002497]

Exercice 5620

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ pour tout } x,y \in E.$$

Montrez que f est linéaire continue.

Correction ▼ [002498]

Exercice 5621

Soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On définit la norme de M (ou de l'application linéaire associée) de la manière suivante :

$$||M|| = \sup_{X \in S_1(0,1)} ||M.X||_2$$

où $S_1(0,1)$ est la sphère unité pour la norme $||.||_1$. Dans chacun des cas suivant, calculez la norme de M.

1. $||(x,y)||_1 = ||(x,y)||_2 = sup(|x|,|y|)$.
2. $||(x,y)||_1 = ||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ et $||(x,y)||_2 = sup(|x|,|y|)$.

Correction ▼ [002499]

Exercice 5622

Continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

[002500]

Exercice 5623

Calculez la norme des opérateurs suivants :

1. Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$ (sur l^∞ on définit $||(x_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$).
2. $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme sup et l'opérateur $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.
3. $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme sup et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ où $g \in X$ est une fonction qui s'annule qu'en $x = 1/2$.
4. $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.
5. X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Correction ▼ [002501]

Exercice 5624

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme $||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrez que la forme linéaire $T : X \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(0)$ n'est pas continue en 0. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ? [002502]

Exercice 5625

Soit f une application f de E dans F espaces vectoriels normés de dimension finie.

On rappelle les implications suivantes : si $x_0 \in E$, "f de classe C^1 en x_0" $\Rightarrow$ "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f continue en x_0". On sait de même que "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f admet des dérivées partielles en x_0" montrer que les réciproques sont fausses en général en s'inspirant de :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + y^2\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2\sin\frac{1}{1}x & \text{si } y = 0 \\ y^2\sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

ou de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Correction ▼ [002503]

Exercice 5626

1. Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés et supposons f différentiable en a ; montrer que pour tout vecteur $u \in E^*$, la dérivée de f en a dans la direction u existe , i.e. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+hu)-f(a)\big)$ et l'exprimer à l'aide de $f'(a)$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et, si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)=\frac{x^3y}{x^4+y^2}$. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

[002504]

Exercice 5627

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y)=\frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x\neq y,\;\; F(x,x)=g'(x).$$

Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Correction ▼ [002505]

Exercice 5628

Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t)-P^2(t))\,dt$ et $P \mapsto P'-P^2$.

Correction ▼ [002506]

Exercice 5629

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, propre (i.e. $||f(x)||$ tend vers ∞ quand $||x|| \to \infty$), telle que pour tout $x\in\mathbb{R}^2$ $Df(x)$ soit injective. On va montrer que f est surjective. Soit $a\in\mathbb{R}^2$ et $g(x)=||f(x)-a||^2$;

1. Calculer $Dg(x)$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 de $\mathbb{R}^2$, et que $Dg(x_0)=0$; en déduire le résultat.

Correction ▼ [002507]

Exercice 5630

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, F un sous-espace fermé, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=d(x,F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne, et que pour chaque x il existe $y\in F$ tel que $f(x)=d(x,y)$.

1. On suppose que f est différentiable en $x\notin F$. Montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\leq 1$.
2. On considère la fonction $\varphi : t\in[0,1]\to f((1-t)x+ty)$; en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x).\frac{x-y}{||x-y||}=1$ et $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}=1$.
3. En déduire que y est unique.

Correction ▼ [002508]

Exercice 5631

Soit E un espace de Banach et $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes linéaires continus de E.

1. Soit $A\in\mathscr{L}(E)$; montrer que l'application $\varphi : t\in\mathbb{R}\to e^{tA}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que la norme de E est associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $x\in E$. Montrer que l'application $\Phi : t\to\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que A est antisymétrique. Montrer que pour tout t, e^{tA} est unitaire.

[002509]

Exercice 5632

Soit $\alpha>0$. Étudier la différientiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ qui est définie par $f(0,0)=0$ et par

$$f(x,y)=\frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,.$$

[002510]

Exercice 5633

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

[002511]

Exercice 5634

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme et soit f une application de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note F l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X dans X. Montrer que pour chaque $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ est l'opérateur linéaire de multiplication par $f' \circ \varphi$ dans X :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = h f' \circ \varphi \,,$$

et que DF est continue.

[002512]

Exercice 5635

Soit $\mathscr{F}$ l'algèbre des matrices carrés $p \times p$ munie d'une norme.

1. Soit $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son determinant $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est différentiable et déterminer Df.
2. Pour $n \geq 1$, on considère l'application $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$. Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice $A \in \mathscr{F}$.
3. On désigne par U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{F}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathscr{F}$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de U dans U.

[002513]

Exercice 5636

1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2) = \|x\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|)$?
2. Généraliser ceci à $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_\infty$, avec $\mathscr{F} = \mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites convergentes vers zero.

[002514]

Exercice 5637

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $x = (x_1,x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Est-ce qu'elle est différentiable ?

Considérons maintenant l^1 l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |x_j|$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur l^1 il existe une suite bornée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ telle que
$$L(x) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j \;.$$
2. Montrer que la norme $\|.\|_1 : l^1 \to \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en aucun point de l^1 (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

[002515]

Exercice 5638

Dans un espace normé $(\mathscr{F},N)$, on considére l'application $x \mapsto N(x)$. Rappeler que, lorsque cette application N est différentiable en $x \in \mathscr{F}$, alors

$$DN(x) \cdot (h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(N(x+th) - N(x) \right) \,.$$

En déduire que N n'est pas différentiable en $0 \in \mathscr{F}$. Supposons N différentiable en $x \in \mathscr{F}$, alors justifier que N l'est aussi en λx, où $\lambda > 0$, et que $DN(x) = DN(\lambda x)$. En considérant la dérivée en $\lambda = 1$ de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda x)$, montrer que $DN(x) \cdot (x) = N(x)$ et en déduire $|||DN(x)||| = 1$.

[002516]

Exercice 5639

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Soit u un endomorphisme continu de $\mathscr{E}$ que l'on suppose symétrique, i.e.

$$\langle u(x),y \rangle = \langle x,u(y) \rangle \quad \text{pour tout } \ x,y \in \mathscr{E} \ .$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathscr{E} \mapsto \langle u(x),x \rangle$ est différentiable sur $\mathscr{E}$ et calculer sa différentielle. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est donc différentiable.
2. On définit une application $\varphi : \mathscr{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \frac{\langle u(x),x \rangle}{\langle x,x \rangle}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite $D\varphi$. Montrer que, pour un élément non nul $a \in \mathscr{E}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

[002517]

Exercice 5640

1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \overset{\leq}{\to} b$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.
2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x<y$ de I et $t \in [0,1]$. (Poser $z=(1-t)x+ty$ et appliquer les AF à $[x,z]$ puis $[z,y]$.)

Correction ▼ [002518]

Exercice 5641

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x)=e^{ix}$.

Correction ▼ [002519]

Exercice 5642 partiel du 5 décembre 1999

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2-y, x^2+y^2)$ et $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $Df(x,y)$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0,0)$ notée $Dg(0,0)$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ) on a $||Dg(x,y)|| \leq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$.

Correction ▼ [002520]

Exercice 5643

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (\cos x - \sin y,\ \sin x - \cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||DF(x,y)|| \leq \sqrt{2}$ pour tout (x,y).
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

converge pour tout (x_0,y_0). Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

Correction ▼ [002521]

Exercice 5644

Soit f une application différentiable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k>0$ tel que

$$||f'(x)|| \leq k||f(x)||, \quad \forall x \in]a,b[.$$

Montrer que si f s'annule en un point $x_0 \in]a,b[$, f est identiquement nulle dans $]a,b[$ (montrer que $E = \{x \in]a,b[\ ;\ f(x) = 0\}$ est ouvert).
[002522]

Exercice 5645

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)|| \leq k|f(x)|, \quad \forall x \in U$. Montrer que pour x assez voisin de $a \in U$,

$$|f(x)| \leq e^{k||x-a||}\,|f(a)|.$$

Indication : considérer l'application $t \in [0,1] \to f(a+t(x-a))$).
[002523]

Exercice 5646

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois avec elle-même. On considère $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(x,y) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $(x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow F(x,y) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $||(x,y)|| < \varepsilon \Longrightarrow ||F'(x,y)|| \leq \frac{1}{2}$; en déduire que 0 est intérieur à Ω puis que Ω est ouvert.
3. Montrer que Ω est connexe.

[002524]

Exercice 5647

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)\ .$$

Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^2 ; \lim_{k\to\infty} F^k(p) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|||DF(p)||| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $(0,0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

[002525]

Exercice 5648

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leq \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\|\ .$$

Correction ▼ [002526]

---

272 371.00 Différentielle d'ordre supérieur, formule de Taylor

Exercice 5649

Calculez $D^2 f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f \in L(E,G)$ continue
2. $f : E \times F \to G$, bilinéaire continue.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$

Correction ▼ [002553]

Exercice 5650

Etudier les extrémas locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}x^3$
2. $f(x,y)=x^2y-x^2/2-y^2$
3. $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$
4. $f(x,y)=\sin^2 x-\operatorname{sh}^2 y$
5. $f(x,y)=x^3+y^3$
6. $f(x,y)=y^2-3x^2y+2x^4$

Correction ▼ [002554]

Exercice 5651

Trouver le volume maximum d'une boite rectangulaire inscrite dans la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Correction ▼ [002555]

Exercice 5652

Déterminez le parallélipipède rectangle de volume V donné dont la surface totale est minimale. [002556]

---

273 372.00 Difféomorphisme, théorème d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 5653

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=((x-2)^2+y^2-4)((x-1)^2+\frac{y^2}{4}-1).$$

1. Tracer rapidement la courbe C d'équation $f(x,y)=0$.
2. En quels points de C la relation $f(x,y)=0$ permet-elle de définir une fonction implicite de la forme $y=\phi(x)$?

[001858]

Exercice 5654

Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple (a,b) indiqué une fonction implicite $y=\phi(x)$.

Donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en a.

1. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1=0$ $\quad(a,b)=(0,1)$.
2. $f(x,y)=2e^{x+y-1}+\ln(x-y)-2x+y^3$ $\quad(a,b)=(1,0)$.

[001859]

Exercice 5655

Montrer que la relation

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2z(x+y)-2x+y-2z-1=0$$

définit au voisinage de $(0,0,-1)$ une fonction implicite $z=\phi(x,y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0,0)$. [001860]

Exercice 5656

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x)=x+x^2\sin\frac{\pi}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Correction ▼ [002527]

Exercice 5657

1. Montrer que l'application $\varphi : (r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x,y) = g(r,\theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \to (e^x\cos y, e^x\sin y)$.
   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x,y)$ est un élément de Isom$(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

Correction ▼ [002528]

Exercice 5658

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pas

$$\varphi(x,y) = (sin(y/2) - x, sin(x/2) - y).$$

1. Justifier que φ est de classe C^1, calculer sa différentielle et voir que $D\varphi(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
3. Montrer que φ^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $||(x,y)|| = |x| + |y|$).
4. En déduire que φ est un difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
5. Calculer $D\varphi^{-1}(p)$ où $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Correction ▼ [002529]

Exercice 5659

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$< Df(x)(h), h > \geq \alpha < h, h > .$$

1. En considérant la fonction $t \to \varphi(t) =< f(a+t(b-a)), b_a) >$, montrez que
   $$< f(b) - f(a), b-a > \geq \alpha < b-a, b-a > \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R}^n.$$
   En déduire que f est une application fermée.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E, Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est une application ouverte.
3. Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Correction ▼ [002530]

Exercice 5660

Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ l'application inversion de pôle 0, de puisssance 1, définie dans U, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par les formules

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

Calculer la matrice jacobienne de cette transformation (on posera $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) et vérifier que cette matrice est égale à son inverse. [002531]

Exercice 5661

Reconsidérez l'exercice 5659 dans l'esprit suivant : "si f est un difféomorphisme, la matrice inverse de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de f^{-1}." [002532]

Exercice 5662

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considèrant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $||A - I|| < \alpha$ admette une racine carrée. [002533]

Exercice 5663

1. Montrer que si a, b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y + e^{xy} = a,\ x + e^{-xy} = b$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x,y) = (x\sin(xy) + y, y\cos(xy) + x)$, et soit (a_n, b_n) une suite tendant vers $(0,0)$. Montrer que si $f(a_n, b_n) = 0$ pour tout n, la suite (a_n, b_n) stationne.

[002534]

Exercice 5664

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 $\varphi = (f, g)$. On considère u, v réels et on cherche x, y tels que

$$(*) \quad f(x,y) = u,\ g(x,y) = v.$$

1. On suppose que la différentielle de φ est de rang 2 en tout point de U. Montrer que pour tout (u, v) le système $(*)$ admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de U seulement ?
2. A-t-on des solutions si la différentielle est de rang 0 ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de φ est de rang 1 en tout point de U. Si f'_x ne s'annule pas sur U, montrer que $\psi : (x,y) \to (f(x,y), y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V \subset U$ sur $\psi(V)$. En déduire G telle que $g(x,y) = G(f(x,y))$ sur V. Que peut-on dire des solutions du système $(*)$?

[002535]

Exercice 5665

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque, et B_r la boule fermée $||x|| \leq r$. Soit f un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de E, contenant 0, tel que $f(0) = 0$. On pose $A = f'(0) \in \mathscr{L}(E)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in B_R$,
$$||A^{-1}(f(x)) - x|| \leq \varepsilon\ ||x||.$$
2. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que pour $0 \leq r \leq R'$,
$$(1 - \varepsilon)\, A(B_r) \subset f(B_r) \subset (1 + \varepsilon)\, A(B_r).$$
3. En déduire que $\lim_{r \to 0} \frac{\text{vol } f(B_r)}{\text{vol } (B_r)} = |\det A|$.

[002536]

Exercice 5666

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$.

1. Montrer que si $|ab| < 1$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. Montrer que si $|ab| = 1$, f n'est plus un difféomorphisme mais reste un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

[002537]

Exercice 5667

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que

$$||f(x) - f(y)|| \geq k||x - y||$$

pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, k étant une constante > 0. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^n$.

[002538]

Exercice 5668

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ une application continue dans $\overline{G}$ et C^1 dans G. Pour tout $x \in G$, on suppose $Df(x)$ inversible. Démontrer que, sous ces conditions, l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum en un point du bord $\partial G = \overline{G} \setminus G$. [002539]

Exercice 5669

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert connexe de E et soit $f : \Omega \to E$ une application de classe C^1 telle que $|||Df(x)||| \leq c$, pour tout $x \in \Omega$, où $0 \leq c < 1$. Montrer que $Id_{|E} - f$ est un difféomorphisme C^1 de Ω sur son image. [002540]

Exercice 5670

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0,z_0)$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Correction ▼ [002541]

Exercice 5671

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un nuique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -x/y$. [002542]

Exercice 5672

On considère le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z. [002543]

Exercice 5673

Considérons $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. Les fonctions $x \to a_j(x)$ sont C^1, $j = 0,1,\ldots,n-1$.
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \to F(x_0,y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x \to y(x)$ est C^1. [002544]

Exercice 5674

Donner l'allure de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Correction ▼ [002545]

Exercice 5675

Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [002546]

274 373.00 Extremum, extremum lié

Exercice 5676

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local. [001823]

Exercice 5677

Ecriver la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0,y_0) donné.

1. $f(x,y) = \sin(x+2y),\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1},\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos xy,\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy)+\cos(xy),\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y,\ (x_0,y_0) = (1,0)$.

[001824]

Exercice 5678

Pour chacune des fonctions suivantes etudiez la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$ au point critique $(0,0,0)$;
4. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

[001825]

Exercice 5679

Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1. $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
2. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
3. $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
4. $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

[001826]

Exercice 5680

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extremums locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

[001827]

Exercice 5681

Trouver le point du plan $(2x - y + z = 16)$ le plus proche de l'origine. [001828]

Exercice 5682

Déterminer les extremums de $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y2)$ sur $[0,1]^2$. [001829]

Exercice 5683

Soit $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Ecrire $f(x,y)+9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale. [001830]

Exercice 5684

Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné. [001831]

Exercice 5685

Soit $f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y)$.

Montrer que f admet un minimum local en 0 suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de minimum local en $(0,0)$. [001832]

Exercice 5686

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto xe^y+ye^x$.
Montrer que $(-1,-1)$ est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de $\varphi(h)=f(-1+h,-1+h)$ et de $\psi(h)=f(-1+h,-1-h)$, montrer que f n'a pas d'extremum. [001833]

Exercice 5687

Déterminer les extrémums de $f:(x,y,z)\to x^2+y^2+z^2+2xyz$. [001834]

Exercice 5688

Déterminer $\max\limits_{|z|\leq 1}|\sin z|$. On rappelle que : $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. [001835]

Exercice 5689

Si f est concave sur un ouvert convexe $U\subset\mathbb{R}^2$ et si :

$$\exists a\in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)=0,$$

alors f admet un maximum local en a. [001836]

Exercice 5690

Soit $A\subset\mathbb{R}^2$, on définit $\int(A)$ comme l'ensemble $\{x\in A|\exists\rho>0, B(x,\rho)\subset A\}$. On supposera A fermée bornée et $\int(A)\neq\emptyset$. On suppose que f est une fonction C^1 sur A telle que f est constante sur $A\setminus\mathrm{Int}(A)$. Montrer qu'il existe $z\in\mathrm{Int}(A)$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(z)=0.$$

[001837]

Exercice 5691

Chercher les extrémums sur $\mathbb{R}^2$ des applications :

$$(x,y)\to x^4+y^4-4xy;$$
$$(x,y)\to(x-y)e^{xy};$$
$$(x,y)\to xe^y+ye^x;$$
$$(x,y)\to e^{x\sin y};$$
$$(x,y)\to x^3+y^3.$$

[001838]

Exercice 5692

Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler une condition nécessaire pour que f présente un extremum local en (x_0,y_0).
Dans la suite de l'exercice, $\mathbf{a}=(x_0,y_0)$ vérifie cette condition, c'est-à-dire est un *point critique* de f. On pose
$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{a}),\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$
$$Q(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2,\quad \Delta=B^2-AC,$$
$$R(t)=At^2+2Bt+C,\quad S(t)=Ct^2+2Bt+A.$$
2. On suppose $\Delta<0$ et $A(\text{ou } C)>0$.
   (a) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}$, $R(t)\geq\delta$ et $S(t)\geq\delta$ pour un certain $\delta>0$.
   (b) On pose $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$, et on suppose que $\sin\theta.\cos\theta\neq 0$. Montrer successivement :
$$Q(x,y)\geq r^2\delta\sin^2\theta,$$
$$Q(x,y)\geq r^2\delta\cos^2\theta,$$
$$Q(x,y)\geq \tfrac{r^2}{2}\delta.$$
   En déduire que
$$\forall(x,y)\quad Q(x,y)\geq\frac{r^2}{2}\operatorname{Inf}(\delta,2A,2C).$$
   (c) Montrer que $\mathbf{a}$ est un point de minimum local strict de f. On écrira pour cela la formule de Taylor-Young pour f en ce point.
3. On suppose $\Delta<0$ et $A(\text{ou } C)<0$.
Montrer que (x_0,y_0) est un point de maximum local strict de f.
4. On suppose maintenant $\Delta>0$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ tels que $S(t_1)>0$ et $S(t_2)<0$.
   (b) Soient $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ tels que $\tan\theta_1=t_1$ et $\tan\theta_2=t_2$. En examinant les fonctions
$$g(t)\ := f(x_0+t\cos\theta_1,y_0+t\sin\theta_1),\quad h(t)\ := f(x_0+t\cos\theta_2,y_0+t\sin\theta_2)$$
   pour $t\in\mathbb{R}$ assez petit, montrer que $\mathbf{a}$ n'est ni un point de maximum local, ni un point de minimum local de f.
5. Dessiner l'allure du graphe de f au voisinage du point $(\mathbf{a},f(\mathbf{a}))$ dans les trois cas étudiés ci-dessus (questions 1, 3 et 4).
6. Que peut-on dire en général quand $\Delta=0$? Pour répondre à cette question, on pourra s'appuyer sur l'étude des deux cas suivant au voisinage de $(0,0)$:
$$f_1(x,y)=x^2+x^4+y^4\quad\text{et}\quad f_2(x,y)=x^2-y^4.$$

[001839]

Exercice 5693

Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné ? Le déterminer par une méthode géométrique. [001840]

Exercice 5694

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue telle que :
$$\lim_{\|x\|\to\infty}|f(x)|=+\infty.$$
Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure. [001841]

Exercice 5695

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application $(x,y)\mapsto 6xy+(y-x)^3$. On note $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,-1\leq x\leq y\leq 1\}$.
1. Dessiner Δ. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur Δ.
2. Calculer les extrema de f sur le bord de Δ puis dans l'intérieur de Δ.
3. En déduire les bornes de f sur Δ.

[001842]

Exercice 5696

$S=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$. Soit f l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $f(z)=|\sin z|$.

1. Pour quelle raison f est-elle bornée sur D ? On note $M = \sup_{z\in D} f(z)$ et $m = \inf_{z\in D} f(z)$. Est-ce que M et m sont atteints ? Donner la valeur de m.
2. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}, x,y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$. (On rappelle que $\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$ et $\operatorname{ch} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.)
3. En déduire que M est atteint en un point de S.
4. Montrer que $M = \dfrac{e^2-1}{2e}$.

[001843]

Exercice 5697

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en $(0,0)$?

[001844]

---

275 374.00 Autre

276 380.00 Solution maximale

Exercice 5698

1. Pour chacune des équations suivantes où $y = y(x)$ est rélle de variable réelle, décrire les solutions en précisant leur intervalle maximal de définition et dessiner les trajectoires :
$$\text{(i) } y' = e - y \text{ (ii) } y' - y = e^x \text{ (iii) } xy' - 2y = 0.$$
2. Quelles sont les courbes isoclines de l'équation $y' = y^2 - x$; en déduire l'allure des trajectoires.

[002557]

Exercice 5699

On considère l'équation
$$x' = 3x^{2/3} :(1)$$
avec condition initiale $x(0) = 0$.

1. Soit φ une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$; on pose $\lambda = \inf\{t \leq 0; \varphi(t) = 0\} \leq +\infty$. Montrez que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).
2. Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \leq \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \geq \mu$; en déduire toutes les solutions maximales de (1) définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.

Correction ▼ [002558]

Exercice 5700

On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$.

1. Montrez que pour tout réel x_0, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Détermner la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geq 0$ et $t < 0$, et vérifiez qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

Correction ▼ [002559]

Exercice 5701

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donnée par $f(t,x)=4\frac{t^3x}{t^4+x^2}$ si $(t,x)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. On s'interesse à l'équation différentielle

$$x'(t)=f(t,x(t)).$$

1. L'application f, est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation (2) ?
2. Soit φ une solution de (2) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application *psi* par $\varphi(t)=t^2\psi(t), t\in I$. Déterminer une équation différentielle (E) telle que ψ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (E).
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de l'équation différentielle (2) avec donnée initiale $(t_0,x_0)=(0,0)$

Correction ▼ [002560]

Exercice 5702

Soit l'équation différentielle

$$x'''-xx''=0$$

où x est une application trois fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique $y'(t)=f(t,y(t))$, où f est une application que l'on déterminera.
2. Soient $t_0,a,b,c\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (3) qui satisfasse aux conditions initiales
$$\varphi(t_0)=a, \varphi'(t_0) \text{ et } \varphi''(t_0)=c.$$
3. Soit φ une telle solution maximale. Calculer la dérivée de la fonction
$$t\to\varphi''(t)exp\left(-\int_{t_0}^t\varphi(u)du\right)$$
En déduire que la fonction φ est soit convexe, soit concave sur son intervalle de définition. Déterminer φ dans le cas où $\varphi''(t_0)=0$.

Correction ▼ [002561]

Exercice 5703

On considère l'équation $xx''=(x')^2+1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, $x_0\neq0$ et x_0' étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0)=x_0$ et $\varphi'(0)=x_0'$.
2. Si de plus $x_0'\neq0$, on peut supposer que φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de x_0 (pourquoi ?) ; on note ψ l'application réciproque et on pose $z(x)=\varphi'(\psi(x))$. Calculez $z'(x)$, trouver l'équationb satisfaite par z et expliciter z ; en déduire une expression de φ.
3. Quelle est la solution φ de léquation telle que $\varphi(0)=x_0\neq0$ et $\varphi'(0)=0$.

[002562]

277 381.00 Théorème de Cauchy-Lipschitz

278 382.00 Système linéaire à coefficients constants

279 383.00 Etude qualititative : équilibre, stabilité

280 384.00 Equation aux dérivées partielles

Exercice 5704

Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

[001845]

Exercice 5705

Résoudre l'équation des cordes vibrantes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide du changement de variables $u=\frac{x+y}{2}$ et $v=\frac{x-y}{2}$ (on suppose que f est C^2).

[001846]

Exercice 5706

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=f$$

en passant en coordonnées polaires.

[001847]

Exercice 5707

Résoudre en utilisant le changement de variable $x=u, y=uv$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

[001848]

Exercice 5708

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application C^1 homogène de degré $s>0$, i.e. telle que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^{+*},\forall x\in\mathbb{R}^2, f(\lambda x)=\lambda^s f(x).$$

Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $s-1$ et :

$$sf(x)=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

[001849]

Exercice 5709

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dérivable. On pose $F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$.
Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}$.

[001850]

Exercice 5710

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction C^2. On pose $g(x,y)=f(x^2-y^2,2xy)$.
Calculer $\triangle(g)$ en fonction de $\triangle(f)$.

[001851]

Exercice 5711

On cherche les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+2u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0 \qquad \text{pour tout } (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{9}$$

Soit $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y)=(x,y+x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Posons $g=f\circ\phi$.

(a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) Montrer que f est solution de (9) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que f vérifie (9) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(u,v) = h(v-u^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[001852]

Exercice 5712

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1+x^2)\right)$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

[001853]

Exercice 5713

Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $V =]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

1. Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de V sur U. Déterminer Ψ^{-1}.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On pose

$$F(r,\theta) = f \circ \Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Montrer que f vérifie l'équation

$$(E) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \forall (a,b) \in U$$

si et seulement si F vérifie l'équation

$$(E') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0,\theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0,\theta_0) \in V.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U qui vérifient l'équation (E).

[001854]

Exercice 5714

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u,uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

[001855]

Exercice 5715

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$.

[001856]

Exercice 5716

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. En utilisant des propriétés de la différentielle, montrer que $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

[001857]

---

281 385.00 Autre

282 400.00 Tribu, fonction mesurable

Exercice 5717

Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\qquad \text{et} \qquad]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

Correction ▼ [005933]

Exercice 5718

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrer que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq A \\ A & \text{si} \quad f(x) > A \end{cases}$$

est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Correction ▼ [005934]

Exercice 5719

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \sharp E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Montrer que f est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et que :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Correction ▼ [005935]

Exercice 5720

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable. On dit que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *fonction simple* ou *étagée* si φ est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si φ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j$, $c_i \neq c_j$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$. Soit φ une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de φ par rapport à une mesure μ est définie par :

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu = \int_0^{\infty} \mu\left(S_{\varphi}(t)\right) dt,$$

où $S_{\varphi}(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\}$.

1. Montrer que

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive, $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions simples positives telle que :
   (a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Correction ▼ [005936]

Exercice 5721

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \cdot f\,d\mu.$$

Monter que λ définit une mesure sur (Ω, Σ).

Correction ▼ [005937]

Exercice 5722

Soit $p > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

Calculer l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de deux manières différentes :

(i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;

(ii) En calculant la mesure des ensembles $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ et la définition de l'intégrale de Lebesgue.

Correction ▼ [005938]

283 401.00 Mesure

Exercice 5723

Montrer que $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre si et seulement si $\mathscr{A}$ est une algèbre et une classe monotone.

Correction ▼ [005926]

Exercice 5724

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathscr{P}(\Omega)$). Soit μ une mesure sur (Ω, Σ). Montrer les propriétés suivantes : $(A, B, A_i$ sont des élements de de $\Sigma)$

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont deux à deux disjoints, alors
$$\mu\left(\cup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$
2. Si $B \subset A$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. *Monotonie :* Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.
4. *Principe inclusion-exclusion :* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
5. $\mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$. *(Rappelons que l'on a égalité si l'union est disjointe.)*

Correction ▼ [005927]

284 402.00 Lemme de Fatou, convergence monotone

Exercice 5725

1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$. Montrer que
$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu.$$
2. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$
où Γ est la fonction d'Euler et où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. (On pourra considérer les fonctions $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$.)

Correction ▼ [005939]

Exercice 5726

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante vers $f = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Bien que les fonctions f_n soient uniformément bornées par 1 et que les intégrales des f_n sont finies, on a :

$$\int_\Omega f\,d\mu = +\infty.$$

Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ce cas ?

Correction ▼ [005940]

Exercice 5727

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,+\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone décroissante et converge uniformément vers 0, mais

$$0 = \int_\Omega f\,d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\,d\mu = +\infty.$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Correction ▼ [005941]

Exercice 5728

Soit $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que

$$\int_\Omega f\,d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\,d\mu$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Correction ▼ [005942]

Exercice 5729

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = -\frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ mais que

$$\lim_{n\to+\infty}\inf \int_\Omega f_n\,d\mu < \int_\Omega f\,d\mu.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Correction ▼ [005943]

Exercice 5730

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ est une suite croissante et
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
2. Calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx}\,d\lambda(x)$$
où $b > 1$.

Correction ▼ [005950]

285 403.00 Théorème de convergence dominée

Exercice 5731

Soit $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ tel que $\int_\Omega f\,d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\mu\{x \in \Omega,\ f(x) = +\infty\} = 0.$$

On pourra considérer les fonctions $f_n = n\mathbf{1}_{\{f \geq n\}}$.

Correction ▼ [005944]

Exercice 5732

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Correction ▼ [005945]

Exercice 5733

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f(x)\cos^n(\pi x)\,d\lambda(x)\ ?$$

Correction ▼ [005946]

Exercice 5734

On rappelle qu'une fonction $f\ :\Omega \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $f_+ := \max\{f, 0\}$ et $f_- = \max\{-f, 0\}$ vérifient $\int_\Omega f_+\,d\mu < +\infty$ et $\int_\Omega f_-\,d\mu < +\infty$. On note $\mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables. Pour $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, on pose

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega f_-\,d\mu.$$

1. Montrer l'équivalence
$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$$
et
$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\,d\mu. \tag{10}$$
2. Montrer que si f est mesurable, g intégrable et $|f| \leq |g|$, alors f est intégrable et
$$\int_\Omega |f|\,d\mu \leq \int_\Omega |g|\,d\mu.$$
3. On rappelle qu'une fonction $f\ :\Omega \to \mathbb{C}$ est dite intégrable si la partie réelle $\mathrm{Re} f$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im} f$ de f sont intégrables. On pose alors
$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} f\,d\mu + i\int_\Omega \mathrm{Im} f\,d\mu.$$
Montrer que l'inégalité (10) est vérifiée.

Correction ▼ [005947]

Exercice 5735

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On dit que f_n converge vers f *en mesure* si pour tout ε,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{x \in \Omega,\ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

Montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout.

Correction ▼ [005948]

Exercice 5736

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

Correction ▼ [005949]

Exercice 5737

Montrer que

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m dx = m!$ (pour tout $m \in \mathbf{N}$).
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1$.

Correction ▼ [005951]

Exercice 5738

Montrer le théorème suivant, Ω étant un espace mesurable. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)
Théorème.(Dérivation sous le signe $\int$)
Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

(i) Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, la fonction $x \mapsto f(x,s)$ est intégrable ;

(ii) pour presque tout x, la fonction $s \mapsto f(x,s)$ est dérivable sur (s_1, s_2) ;

(ii) il existe $g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tel que pour tout $s \in [s_1, s_2]$ et pour presque tout $x \in \Omega$ on ait $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}| \leq g(x)$.

Alors la fonction $I(s) := \int_\Omega f(x,s)\, d\mu(x)$ est dérivable sur (s_1, s_2) et

$$\frac{dI}{ds} = \int_\Omega \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} d\mu(x).$$

Correction ▼ [005952]

Exercice 5739

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y) := \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-ixy} f(x) dx,$$

montrer que

1. $\hat{f}$ est continue,
2. $\hat{f}$ est bornée et $\sup |\hat{f}| \leq \|f\|_{L^1}$ $(= \int_\mathbb{R} |f(x)|\, dx)$,
3. Si $x \to x f(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{dy} \hat{f} = \widehat{-ixf(x)}.$$

Correction ▼ [005953]

286 404.00 Intégrales multiples, théorème de Fubini

Exercice 5740

Soit $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y) dx\right) dy \neq \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y) dy\right) dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le théorème de Fubini ? (on pourra calculer l'intégrale de $|f|$ sur l'anneau $S_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.)

Correction ▼ [005957]

Exercice 5741

Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$; en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y}\,dy.$$

Correction ▼ [005958]

Exercice 5742

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \le p \le +\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que le *produit de convolution* de f et g défini par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

vérifie $f*g(x) = g*f(x)$ et

$$\|f*g\|_p \le \|f\|_1\,\|g\|_p.$$

Correction ▼ [005959]

Exercice 5743

Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calculer $f*g(x)$.

Correction ▼ [005960]

Exercice 5744

1. Pour tout $t>0$, on pose :
$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $t>0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$.
   (b) Montrer que, pour tout $\delta>0$, $\lim_{t\to 0}\int_{\{|x|>\delta\}} f_t(x)\,dx = 0$.
   (On dit que f_t est une *approximation de la distribution de Dirac.*)
2. Soit g une fonction continue bornée. Montrer que f_t*g est bien définie et que
$$\lim_{t\to 0} f_t*g(x) = g(x).$$

Correction ▼ [005961]

Exercice 5745

Soient $f,g \in L^1(\mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\,dx$.
2. $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

Correction ▼ [005962]

Exercice 5746

Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne définie, pour $x\in\mathbb{R}^n$, par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$, où $a>0$.

Correction ▼ [005963]

287 405.00 Intégrale dépendant d'un paramètre

288 406.00 Espace Lp

Exercice 5747

Soit $k \in |||$ et $\alpha \in]0,1]$. On rappelle qu'on note $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions g de classe C^k sur $\mathbb{R}$, dont la k-ième dérivée est höldérienne, c'est-à-dire vérifie

$$\exists C > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}, \qquad |g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}.$$

(En particulier, si $\alpha = 1$, ce sont les fonctions de k-ième dérivée lipschitzienne.)

- Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact, et $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$. En déduire que si $g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$.
- Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support quelconque, et $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ *bornée*. Montrer que $f * g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ et est bornée. En déduire que si $g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$, bornée ainsi que toutes ses dérivées, alors $f * g$ aussi.

Correction ▼ [002692]

Exercice 5748

1. Soit $a,b \geq 0$ et soit $p,q \in (1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit que p et q sont conjugués au sens de Young)*. Montrer l'inégalité de Young :
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
On pourra considérer la fonction $\theta\ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.
2. Soit de nouveau $p,q \in (1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\int_{\Omega} |fg|\, d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p\, d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q\, d\mu.$$
Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\, \|g\|_q.$$
Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?
3. Soient p et p' dans $[1,+\infty[$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$, alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.
4. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^{\infty}(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu),$$
et, pour tout f,
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}.$$
5. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $f \cdot g \in L^r(\mu)$ et
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Correction ▼ [005954]

Exercice 5749

Théorème 1.(Théorème de Riesz) Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 2. Soit p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$ convergeant vers une fonction $f \in L^p(\mu)$. Alors il existe une sous-suite de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement presque-partout vers f.

Le but de cet exercice est de démontrer les théorèmes 1 et 2.

1. *Cas de* $L^{\infty}(\mu)$.
   (a) Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^{\infty}(\mu)$. Pour $k,m,n \geq 1$, considérons les ensembles
   $$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_{\infty}\}\ ; \quad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_{\infty}\}.$$
   Montrer que $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$ est de mesure nulle.

(b) Montrer que sur le complémentaire de E, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

(c) En déduire que $L^\infty(\mu)$ est complet.

2. *Cas de* $L^p(\mu)$.

(a) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$.

(b) Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

où g est à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\|g_k\|_p < 1$, puis que $\|g\|_p \leq 1$.

(c) En déduire que la série

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

est absolument convergente pour presque tout $x \in \Omega$. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. Vérifier que f est la limite ponctuelle des $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour presque tout $x \in \Omega$.

(d) Montrer que $f - f_m \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ et que $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. Conclure.

Correction ▼ [005955]

Exercice 5750

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Montrer que la fonction $N\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(t) = \int_\Omega |f(x) + t\cdot g(x)|^p \, d\mu$$

est différentiable et que sa dérivée en $t = 0$ est donnée par :

$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu,$$

où par convention $|f(x)|^{p-2} f(x) = 0$ lorsque $f = 0$.

Correction ▼ [005956]

Exercice 5751

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f\ : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Soit $\mathscr{B}^n(0,1)$ la boule unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$. En considérant les fonctions

$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$

montrer que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte.

Correction ▼ [005964]

Exercice 5752

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. En considérant les suites $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$, montrer que pour $q < p$, l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte.

Correction ▼ [005965]

Exercice 5753

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0$ $\mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. – Pour quelle valeur de α la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   – Pour quelle valeur de β la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   – Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. En utilisant (a) et (b), trouver une fonction f qui appartienne à $L^q(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et une fonction g qui appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^n)$.
2. – Soit $1 \leq q < p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$.
   – Soit r tel que $q < r < p$. Montrer que
   $$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$
   où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. On pourra écrire $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ et utiliser l'inégalité de Hölder pour un couple de réels conjugués bien choisi.
   – En déduire que si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $f \in L^p([0,+\infty[) \cap L^q([0,+\infty[)$ avec $1 \leq q < 2 < p$. Montrer que la fonction h définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ appartient à $L^1([0,+\infty[)$ et trouver des constantes $C_{p,q}$ et γ telles que $\|h\|_1 \leq C_{p,q} \|f\|_q^\gamma \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

Correction ▼ [005966]

Exercice 5754

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p > 2$.

Correction ▼ [005967]

Exercice 5755

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p < 2$.

Correction ▼ [005968]

289 407.00 Transformée de Fourier

Exercice 5756

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Plancherel.

Définition. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Plancherel. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

2. Montrer que la fonction $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2 e^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x)f(y)e^{2\pi i(k,x-y)}e^{-\varepsilon\pi|k|^2}\,dxdydk.$$
4. Sachant que la transformée de Fourier de la gaussienne $h_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$) est donnée par $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}}\bar{f}(x)f(y)\,dxdy.$$
5. Soit $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions définies par :
$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}}\bar{f}(x)\,dx.$$
Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε lorsque ε tend vers 0 ?
6. Montrer que
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^n}(\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon)f(y)\,dy.$$
7. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \|\hat{f}\|_2^2$.
8. En déduire que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Correction ▼ [005977]

Exercice 5757

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction radiale, i.e. telle que $f(x) = h(r)$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $r = |x|$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f s'écrit :
$$\hat{f}(k) = \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r)r\sin(2\pi|k|r)\,dr.$$

Correction ▼ [005978]

290 408.00 Autre

Exercice 5758

Le but de cet exercice est de prouver le Théorème de Carathéodory.

Définition. Une mesure extérieure sur un ensemble Ω est une application $m_* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ telle que

(i) $m_*(\emptyset) = 0$;

(ii) (monotonie) $A \subset B \Rightarrow m_*(A) \leq m_*(B)$;

(iii) (σ-sous-additivité) Pour toute suite d'ensembles $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ on a
$$m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(A_i).$$

Théorème de Carathéodory Soit m_* une mesure extérieure sur Ω. Un ensemble $A \subset \Omega$ est dit m_*-mesurable si pour tout $Q \subset \Omega$ on a
$$m_*(Q) \geq m_*(Q\cap A) + m_*(Q\cap A^c).$$
Notons $\mathscr{M}_{m_*} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties m_*-mesurables. Alors

1. $\mathscr{M}_{m_*}$ est une σ-algèbre.
2. $m = m_*|_{\mathscr{M}_{m_*}}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*})$.
3. L'espace mesuré $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*}, m)$ est complet, i.e. si $E \in \mathscr{M}_{m_*}$ et $m(E) = 0$, alors tout sous-ensemble $A \subset E$ appartient à $\mathscr{M}_{m_*}$.

Début de l'exercice :

1. (a) Rappeler la définition d'une σ-algèbre.
   (b) Vérifier que $\emptyset$ et $\Omega \in \mathscr{M}_{m_*}$, et $A \in \mathscr{M}_{m_*} \Rightarrow A^c \in \mathscr{M}_{m_*}$.
   (c) Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ un suite quelconque d'ensembles m_*-mesurables. On pose $B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1$ et $B_j = \cup_{i=1}^{j-1} A_i$, pour $j \geq 2$. Soit Q un sous-ensemble de Ω. Montrer par récurrence que l'assertion (P_k) suivante est vérifiée pour tout $k \geq 1$:
$$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c \cap A_j).$$

(d) Soit $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Déduire de la question précédente que

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

e) En remarquant que $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(Q \cap B_j^c \cap A_j)$, montrer :

$$m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) \leq m_*(Q),$$

et conclure.

2. (a) Rappeler la définition d'une mesure.
   (b) En utilisant la question 1.d), montrer la σ-additivité de m.
3. Montrer que m est complète.

Correction ▼ [005928]

Exercice 5759

On définit la mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $m_* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, par la formule

$$m_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i-1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}.$$

Montrer qu'il s'agit bien d'une mesure extérieure.

Correction ▼ [005929]

Exercice 5760

On définit m_* : $\mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$m_*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que m_* est une mesure extérieure.
2. Quels sont les ensembles m_*-mesurables ?
3. Vérifier le théorème de Carathéodory sur cet exemple.

Correction ▼ [005930]

Exercice 5761

1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
   Indication : On pourra d'abord calculer $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ en passant en coordonnées polaires.
2. *Calcul de l'aire de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{S}_{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{A}_{n-1}$ son aire. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \ldots dx_n$$
   en fonction de $\mathscr{A}_{n-1}$. En déduire l'expression de $\mathscr{A}_{n-1}$ en fonction de la fonction Γ :
$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$
3. *Calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{V}_n$ son volume. Montrer que $\mathscr{V}_n = \frac{\mathscr{A}_{n-1}}{n}$. En déduire que :
$$\mathscr{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$
4. *Application :* Que vaut l'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$? Que vaut le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$?

Correction ▼ [005931]

Exercice 5762

Cet exercice fournit une autre méthode de calcul du volume de la boule unité $\mathscr{B}_n$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et de l'aire de la sphère* $\mathscr{S}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On conserve les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que $\mathscr{V}_n = I_n \cdot \mathscr{V}_{n-1}$, où $I_n = \int_0^\pi (\sin\theta)^n \, d\theta$.
2. Vérifier que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
3. Calculer $\mathscr{V}_n$ pour $n = 1, 2, \dots, 7$.
4. Calculer $\mathscr{A}_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \dots, 6$.

Correction ▼ [005932]

Exercice 5763

Définition.

On dit qu'un espace métrique E est *séparable* s'il existe un sous-ensemble $\mathscr{F} \subset E$ dénombrable et dense.

Théorème L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour $1 \le p < +\infty$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Pour $j = 1, 2, 3, \dots$ et $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, on considère les cubes
$$\Gamma_{j,m} := \{x \in \mathbb{R}^n, \ 2^{-j} m_i < x_i \le 2^{-j}(m_i + 1), \ i = 1, \dots, n\}.$$
Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.
2. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathscr{F}_j$ de fonctions φ de la forme :
$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbf{1}_{\Gamma_{j,m}},$$
où les constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ et sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que l'ensemble
$$\mathscr{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j$$
est dénombrable.
3. Le but de cette question est de montrer que toute fonction continue à support compact peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$. Soit $\tilde{f}$ une fonction continue à support compact et soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   – Montrer que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
   $$x, y \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon'.$$
   – Soit $\varepsilon' > 0$ fixé et j comme dans la question précédente. On considère la fonction $\tilde{f}_j$ définie par :
   $$\tilde{f}_j(x) = 2^{nj} \int_{\Gamma_{j,m}} \tilde{f}(y) \, dy \quad \text{lorsque} \quad x \in \Gamma_{j,m},$$
   i.e. la valeur de $\tilde{f}_j$ en un point $x \in \mathbb{R}^n$ est la valeur moyenne de la fonction $\tilde{f}$ sur le cube $\Gamma_{j,m}$ de coté 2^{-j} qui contient x. Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
   $$x \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_j(x)| < \varepsilon',$$
   et en déduire que
   $$\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\|_p < \text{Volume}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon'$$
   où γ est un cube de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, -2^J \le x_i \le 2^J\}$ en dehors duquel $\tilde{f}$ est nulle.
   – En déduire qu'il existe $f_j \in \mathscr{F}_j$ telle que $\|\tilde{f} - f_j\|_p < \varepsilon$. (On rappelle que les éléments de $\mathscr{F}_j$ ne prennent que des valeurs rationnelles.)
4. Montrer que toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < +\infty$, peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$. Conclure.

Correction ▼ [005969]

Exercice 5764

Théorème. L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que
   – Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
   – $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

– I n'est pas dénombrable.
Montrer que E n'est pas séparable. (On pourra raisonner par l'absurde).

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$ où $\mathscr{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Montrer que la famille
$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$
où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$, satisfait (a), (b) et (c). Conclure.

Correction ▼ [005970]

Exercice 5765

Définition. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesuré (Ω, Σ). On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\nu << \mu$ si
$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$
pour tout $S \in \Sigma$.

Théorème de Radon-Nikodym. Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesuré (Ω, Σ). Si ν est absolument continue par rapport à μ, alors il existe une fonction positive $h \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction positive mesurable F on a :
$$\int_\Omega F(x)\, d\nu(x) = \int_\Omega F(x) h(x)\, d\mu(x). \tag{11}$$

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème de Radon-Nikodym.

1. Posons
$$\alpha = \mu + 2\nu, \qquad \omega = 2\mu + \nu.$$
On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure α et l'application linéaire $\varphi\ : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ donnée par :
$$\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\, d\omega(x).$$
Montrer que $\varphi\ : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ est une application linéaire continue.
2. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega, \alpha)$:
$$\int_\Omega f(2g - 1)\, d\nu = \int_\Omega f(2 - g)\, d\mu.$$
3. Montrer que les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ où $l \in \mathbb{N}^*$ vérifient $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. En déduire que l'on peut choisir la fonction g de telle manière que $\frac{1}{2} \leq g \leq 2$. Montrer que l'ensemble $Z = \{x \in \Omega\ : g(x) = \frac{1}{2}\}$ est de μ-mesure 0.
4. Montrer que la fonction
$$h(x) = \frac{2 - g(x)}{2g(x) - 1}$$
est bien définie, positive, appartient à $L^1(\Omega, \mu)$ et satisfait (11).

Correction ▼ [005971]

Exercice 5766

1. On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, montrer que
$$B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{d/2} r^{m-1} dr$$
2. Démontrer que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\, dx$ en fonction de la fonction Bêta.

Correction ▼ [005972]

Exercice 5767 Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$

Soit Ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\Omega' = \{(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0<r, 0<\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}<\pi, 0<\theta_{n-1}<2\pi\}.$$

Soit l'application S de Ω' dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & r\cos\theta_1, \\ x_2 & = & r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \vdots & & \\ x_{n-2} & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2} \\ x_{n-1} & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{array}$$

où $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les coordonnées cartésiennes de $x\in\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1}\geq 0\}$. Montrer que Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est de mesure nulle, et que S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.
2. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\, r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,dr\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1} \\ &= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\, r^{n-1}\,dr\,d\sigma, \end{aligned}$$

   où $d\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume $\mathscr{V}_4$ de la boule unité de $\mathbb{R}^4$ et l'aire $\mathscr{A}_3$ de la sphère unité $\mathscr{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.

Correction ▼ [005973]

Exercice 5768 Théorème de Newton

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$, où $|x|$ désigne la norme de x dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour $r = |x|$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy = 4\pi\frac{1}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

2. Que peut-on en déduire pour une distribution de masse $f(x) = g(|x|)$ lorsque g est à support dans $[0,R]$?

Correction ▼ [005974]

Exercice 5769

Soit $x\in\mathbb{R}^d$, $d = 1,2$ et $r = |x|$. On considère $f : \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. Calculer pour $d = 1$ le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.
2. Même question pour $d = 2$.
3. Calculer $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$ puis $d = 2$.

Correction ▼ [005975]

Exercice 5770

Soit $f : \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a\in\mathbb{R}$. Calculer le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.

Correction ▼ [005976]

Exercice 5771

Définition. Soit $h\in\mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h, noté τ_h, agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) := f(x-h), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$.

Théorème. Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1\leq p<+\infty$, alors $\lim_{h\to 0}\|\tau_h f - f\|_p = 0$, i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème. Soit $1\leq p<+\infty$.

1. Montrer que si f est continue à support compact dans la boule $\mathscr{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h| \leq 1$, alors
$$|f(x-h)-f(x)|^p \leq \mathbf{1}_{B(0,M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p.$$
où $\mathscr{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.
2. En déduire que pour f continue à support compact, on a
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
3. Démontrer le théorème pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.
4. Que se passe-t-il pour $p=\infty$?

Correction ▼ [005979]

Exercice 5772

Théorème Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n = 1$

(ii) il existe une constante $K>0$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx \leq K$

(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|>\varepsilon} |\varphi_n(x)|\,dx = 0$.

Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1 \leq p < +\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), et en utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\,dx$, montrer que
$$|\varphi_n * f - f|^p(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p |\varphi_n|(y)\,dy\right).$$
2. En déduire que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\,dy.$$
3. Soit $\delta > 0$, montrer que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy\right).$$
4. En déduire le théorème cherché.

Correction ▼ [005980]

Exercice 5773

Soit f une fonction dans $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0<\alpha<n$. Posons $c_\alpha := \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$. En utilisant l'identité
$$c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\pi|k|^2\lambda} \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda,$$
montrer que
$$c_\alpha \left(|k|^{-\alpha}\hat{f}(k)\right)^\vee(x) = c_{n-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy,$$
où la notation $h^\vee$ désigne la transformée de Fourier inverse d'une fonction h donnée par $h^\vee(x) := \hat{h}(-x)$.

Correction ▼ [005981]

---

291 420.00 Espace topologique, espace métrique

Exercice 5774

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Montrer que $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour que $(x,y) \longrightarrow f(d(x,y))$ soit une distance sur E.

2. Montrer que l'application d'' définie sur $E \times E$ par $d''(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une distance sur E. *Indication* : On utilisera la croissance de la fonction $u \longrightarrow \dfrac{u}{1+u}$.
3. Comparer les distances d et d'' .
4. Dans le cas où E est l'ensemble des nombres réels et où d est la distance valeur absolue, construire $B_{d''}(0,a)$ où a est un réel.

[001867]

Exercice 5775

Soit (E,d) un espace métrique complet, et f une application de E dans E telle qu'il existe $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$ tel que $d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)\ \ \forall x \in E,\ \forall y \in E$.

1. Montrer que f est continue sur (E,d).
2. Soient $x_0 \in E$ et pour $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (E,d).
3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(l) = l$. Montrer que ce point fixe est unique.
4. Application : montrer que le système $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 & = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{array} \right.$ admet une solution unique $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[001868]

Exercice 5776

1. Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :
   (i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A\cup B)$, (iii) $\sup(A\cap B)$, (iv) $\inf(A\cup B)$, (v) $\inf(A\cap B)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(x,A) = \inf_{a\in A} ||x-a||$. Trouver $d(0,\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$, $d(M,\mathscr{D})$ où $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a,b,c).
3. Pour $A,B \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} ||a-b||$. Trouver $d(A,B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ xy = 1\}$ et B une asymptote.
4. On définit $\operatorname{diam} A = \sup_{a,b\in A} ||a-b||$. Quel est $\operatorname{diam}(]0,1[\cap\mathbb{Q})$? $\operatorname{diam}([0,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q})$?

Indication ▼ Correction ▼ [002340]

Exercice 5777

Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. (*Indication :* si $x \in O$ ouvert, considérer J_x qui est l'union des intervalles ouverts inclus dans O et contenant x). Énoncer un résultat similaire pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002341]

Exercice 5778

On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Remarquer que D est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u = \sqrt{2}-1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geq 1$ tel que $0 < u^n < b-a$, puis $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$.
   En déduire le résultat.

Indication ▼ Correction ▼ [002342]

Exercice 5779

Montrer que dans tout espace métrique (E,d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ ne coincide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a,r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$, $E = [0,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2},0)$ de rayon $1/2$).

Indication ▼ Correction ▼ [002343]

Exercice 5780

$(E,||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R) \iff r \leq R$ et $||a-b|| \leq R-r$.

Correction ▼ [002344]

Exercice 5781

1. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $||(x,y)|| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.
2. Soit p,q deux normes sur $\mathbb{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que
$$B_q \subset B_p \iff p \leq q.$$
Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Correction ▼ [002345]

Exercice 5782

On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Indication ▼ Correction ▼ [002346]

Exercice 5783

Soit $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f(0) = 0\}$. On pose
$$||f|| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} |f'(x)|.$$
Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur E.

Indication ▼ Correction ▼ [002347]

Exercice 5784

On désigne par $d(a,b)$ la distance euclidienne usuelle de $a,b \in \mathbb{R}^2$ et on pose
$$\delta(a,b) = \begin{cases} d(a,b) & \text{si } a,b \text{ sont alignés avec l'origine } O \\ d(0,a) + d(0,b) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ ("distance SNCF") plus fine que la distance usuelle.
Dans la suite, on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie associée à δ.
2. Soit H le demi-plan $\{(x,y)\ ;\ y > 0\}$; montrer que H est un ouvert ; déterminer $\overline{H}$.
3. Quelle est la topologie induite sur une droite vectorielle ; sur le cercle unité Γ ?
4. Lesquelles des transformations suivantes sont continues : homothéties de centre O ; rotations de centre O ; translations ?

[002348]

Exercice 5785

1. Montrer que $||f||_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ sont deux normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes ?
2. Les deux métriques associées sont-elles topologiquement équivalentes ?

Indication ▼ Correction ▼ [002349]

Exercice 5786

Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Comparer les normes $N_1(f) = ||f||_\infty$, $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$, $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$, $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002350]

Exercice 5787

Soit (x_n) une suite d'un espace topologique X séparé ; on note A l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

1. Toute valeur d'adhérence a de la suite est un point de $\overline{A}$: donner un exemple où a est un point isolé de A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans $\overline{A} \backslash A$.
2. Montrer que tout point d'accumulation de A est valeur d'adhérence de la suite.

Correction ▼ [002351]

Exercice 5788

Soit $\mathbb{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbb{R}^n$.
   On se restreint maintenant au cas $n = 1$.
2. Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a > 0$.
3. Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbb{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
4. On considère $\alpha \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Correction ▼ [002352]

Exercice 5789

Soit $X = \{a, b, c, d\}$. Lesquelles parmi les collections de sous-ensembles suivants déterminent une topologie sur X ? Justifier.

1. $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$;
2. $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, d\}$;
3. $\emptyset$, X, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Correction ▼ [002418]

Exercice 5790

Soit $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{T}$ une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ contenant $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et tous les complementaires d'ensembles finis. Est-ce une topologie sur $\mathbb{R}$? Est-ce une topologie séparée ?

Correction ▼ [002419]

Exercice 5791

On appelle *base* d'une topologie $\mathscr{T}$ un sous-ensemble $\mathscr{B}$ de $\mathscr{T}$ tel que tout ouvert $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$ s'écrit comme $\mathscr{O} = \bigcup_{i\in I} B_i$, où $B_i \in \mathscr{B}$ pour tout $i \in I$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{T}$ si et seulement si pour tout ouvert $\mathscr{O}$ et tout point $x \in \mathscr{O}$ il existe un $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset \mathscr{O}$.
2. Soit $\mathscr{T}_n$ la topologie sur $\mathbb{R}^n$ induite par la métrique euclidienne
$$\mathrm{dist}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{B}$ de boules ouvertes ayant leur centre dans $\mathbb{Q}^n$et leur rayon dans $\mathbb{Q}$ est une base de $\mathscr{T}_n$.
3. Soit $\mathscr{B}'$ l'ensemble de parallelipipèdes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Est-ce que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{T}_n$?
4. Est-ce que $\{]-\infty, a[\ ;\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{]b, +\infty[\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour $\mathscr{T}_1$?
5. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on note par δ_a la droite d'équation $y = ax$ dans $\mathbb{R}^2$, et on note par Y la réunion des droites δ_a. Soit $\mathscr{T}$ la topologie sur Y induite par la topologie sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathscr{T}'$ la topologie de base $\mathscr{B}'$ composée par tous les segments ouverts $]M, N[\subset \delta_a$, $O \notin]M, N[$, et par toutes les reunions $\bigcup_{a\in\mathbb{Q}, O\in]M_a, N_a[}]M_a, N_a[$. Les deux topologies $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont-elles équivalentes ?

Correction ▼ [002420]

Exercice 5792

Soit X un espace muni d'une métrique dist : $X \times X \to \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to R_+$ est une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ alors $\mathrm{dist}_f(x, y) = f(\mathrm{dist}(x, y))$ est une métrique sur X.

2. Montrer que

$$\operatorname{dist}'(x,y) = \frac{\operatorname{dist}(x,y)}{1+\operatorname{dist}(x,y)},\ \forall x,y,$$

est une métrique sur X.

3. Montrer que les métriques dist et dist$'$ sont topologiquement équivalentes.

Correction ▼ [002421]

Exercice 5793

Soit (E,d) un espace métrique. On dit que d est *ultramétrique* si elle vérifie :

$$\forall (x,y,z) \in E^3 \qquad d(x,z) \leq \sup\left(d(x,y), d(y,z)\right).$$

Cette inégalité entraine évidemment l'inégalité triangulaire.

1. Montrer que E muni de la distance d définie par

$$d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y, \qquad d(x,x) = 0$$

est un espace ultramétrique.

On suppose maintenant que (E,d) est ultramétrique.

2. Montrer que si $d(x,y) \neq d(y,z)$, on a $d(x,z) = \sup\left(d(x,y), d(y,z)\right)$.
3. Montrer qu'une boule ouverte (resp. fermée) est une partie à la fois ouverte et fermée.
4. Montrer que si deux boules ont un point commun l'une est contenue dans l'autre. Montrer de plus que si ces boules ont même rayon et sont toutes les deux des boules ouvertes (resp. fermées) elles sont confondues.
5. Montrer que si deux boules ouvertes distinctes B_1, B_2 de rayon r sont contenues dans une boule fermée de même rayon, alors leur distance est égale à r :

$$d(B_1,B_2) := \inf_{(a,b)\in B_1\times B_2} d(a,b) = r.$$

Correction ▼ [002422]

Exercice 5794

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $\nu(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Pour $x = \pm\frac{a}{b}$, $(a,b \in \mathbb{N}^*)$, on définit $\nu(x) = \nu(a) - \nu(b)$.

1. Montrer que $\nu(x)$ est indépendant du choix de la représentation $\pm\frac{a}{b}$.
2. Montrer que $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, $x,y \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ pour $x,y \in \mathbb{Z}$, puis pour $x,y \in \mathbb{Q}$.
4. Montrer que sur $\mathbb{Q}$, d définie par :

$$d(x,y) = p^{-\nu(x-y)} \text{ si } x \neq y, \qquad d(x,x) = 0$$

est une distance ultramétrique.

Correction ▼ [002423]

Exercice 5795

1. Soit E un espace métrique et $A \subset E$ une de ses parties. On désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de A et par $\mathrm{Fr}(A)$ la frontière de A dans E. On a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.
   (a) Montrez que $x \in \mathrm{Fr}(A)$, si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de A et une suite (y_n) d'éléments du complémentaire $E \setminus A$ de A dans E, qui convergent l'une et l'autre vers x.
   (b) Soit $E =]-\infty,-1] \cup [0,1[\cup [2,+\infty[$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$. Avec $A = [0,\frac{1}{2}]$, qu'elle est la frontière de A dans E. Considérée comme sous-partie de $\mathbb{R}$, qu'elle serait la frontière de A dans $\mathbb{R}$?
2. Soient E et F deux espaces métriques respectivement au moyen des distances d et d'.
   (a) Précisez ce que l'on entend par la distance $\sup(d,d')$ sur $E \times F$. Dîtes rapidement pourquoi cette distance définit sur $E \times F$ le produit des topologies métriques sur E et F.
   (b) Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrez que l'intérieur $A \times B \setminus \mathrm{Fr}(A \times B)$ de $A \times B$ dans $E \times F$ est le produit cartésien de l'intérieur $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ de A dans E avec l'intérieur $B \setminus \mathrm{Fr}(B)$ de B dans F.
3. E et F sont toujours comme dans la deuxième question çi dessus.

(a) Si (ξ_n, ξ'_n) est une suite de points dans le complémentaire $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ dans $E \times F$, montrez qu'au moins une des deux alternatives suivantes (i) ou (ii) est vérifiée :

(i) il existe une suite extraite ξ_{n_k} dont tous les termes sont dans $E \setminus A$.

(ii) il existe une suite extraite ξ'_{n_k} dont tous les termes sont dans $F \setminus B$.

(b) Déduire, de tout ce qui précède, que la frontière $\mathrm{Fr}(A \times B)$ de $A \times B$ dans $E \times F$ est donnée par la formule :

$$\mathrm{Fr}(A \times B) = \left(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\right)$$

4. Supposons E et F comme çi dessus mais avec l'hypothèse supplémentaire d'être connexes, et avec des inclusions strictes $A \subset E$ et $B \subset F$.
   (a) Soient, dans $E \times F$, les points $(x, x') \notin A \times B$ et $(y, y') \notin A \times B$. Supposons que $x \in A$ et $y \notin A$; Montrez qu'il existe une partie connexe entièrement contenue dans le complémentaire de $A \times B$ qui contient (x, x') et (y, y').
   (b) En déduire, sous les présentes hypothèses de cette quatrième question, que le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ est connexe.

Correction ▼ [002424]

292 421.00 Compacité

Exercice 5796

Soit X un espace métrique.

1. Soit A et B deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où B est réduit à un point).
2. Soit K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication :

$$d(x, K) < r \Rightarrow x \in U\ .$$

Indication ▼ Correction ▼ [002370]

Exercice 5797

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Indication ▼ Correction ▼ [002371]

Exercice 5798

Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a - b\| = \mathrm{dist}(K, F)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002372]

Exercice 5799

Soit E un espace compact et soit (F, d) un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Correction ▼ [002373]

Exercice 5800

Soit X un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n\ .$$

   Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$.
2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Correction ▼ [002374]

Exercice 5801

Soit X un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue.

Correction ▼ [002375]

Exercice 5802

Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A+B$ l'ensemble $\{a+b\,;\,a\in A \text{ et } b\in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Indication ▼ Correction ▼ [002376]

Exercice 5803

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002377]

Exercice 5804

Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$. On munit E de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).

Que peut-on dire de la boule unité fermée de l^∞ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Correction ▼ [002378]

Exercice 5805

Soit (X,d) un espace métrique, soit (Y,δ) un espace métrique compact et soit $f : X \to Y$ une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x))\, x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \to X$ et $q : G \to Y$ les restrictions des deux projections $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = y$. Montrer que p est un homéomorphisme de G sur X. En déduire que f est continue. [002379]

Exercice 5806

Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in X\,, x \neq y\,.$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geq 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to \infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002380]

Exercice 5807

Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in E\,.$$

On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a,b \in E$ et posons, pour $n \geq 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $d(a, a_k) < \varepsilon$ et $d(b, b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).

Correction ▼ [002381]

Exercice 5808

On se donne une métrique d sur $X = [0,1]$ telle que l'identité $i : (X, |.|) \to (X, d)$ soit continue (i.e. la topologie définie par d est moins fine que la topologie usuelle de X).

1. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle.

Correction ▼ [002382]

293 422.00 Continuité, uniforme continuité

Exercice 5809

Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \,;\, f(x) < \lambda\}$ et $\{x \,;\, f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de X.
2. Montrer que si f est continue, pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert de X (F_σ= réunion dénombrable de fermés).

Indication ▼ Correction ▼ [002353]

Exercice 5810

1. Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\,dx$, puis de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$. Vérifier que l'application $f \to \int_0^1 |f| dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne dans les deux cas.
2. Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Si on désigne par $\ell(x)$ la limite de la suite x, montrer que ℓ est une application continue de c dans $\mathbb{R}$. En déduire que c_0 est fermé dans c.

Indication ▼ Correction ▼ [002354]

Exercice 5811

Soit f, g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé. Montrer que $\{f = g\}$ est fermé dans X ; en déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X, alors $f = g$.

Indication ▼ Correction ▼ [002355]

Exercice 5812

Une application de X dans Y est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x,y) \in X \times Y \to x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, comme application de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Indication ▼ Correction ▼ [002356]

Exercice 5813

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans X. Que peut-on dire alors de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?
2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, et que f est ouverte si et seulement si $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002357]

Exercice 5814

1. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$; montrer que f est "presque lipschitzienne" au sens :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon\ ;\ \forall x,y \in [0,1] \quad |f(x)-f(y)| \leq C_\varepsilon |x-y| + \varepsilon$.
2. Montrer qu'une fonction f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq a|x|+b$ où a et b sont des constantes.

[002358]

Exercice 5815

Soit f une fonction continue de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si f est uniformément continue, elle est bornée. Réciproque ? [002359]

Exercice 5816

Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. Montrer que f tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Retrouver ainsi le fait que la fonction $\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002360]

294 423.00 Application linéaire bornée

Exercice 5817

Soient E_1, E_2 et F des espaces normés sur $\mathbb{R}$ et soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|B(x)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\| \quad \text{pour tout } x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2\ .$$

Indication ▼ Correction ▼ [002361]

Exercice 5818

Soient E et F deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x_n))_n$ *est bornée dans* F *pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* E *tendant vers* $0 \in E$. Montrer que L est continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002362]

Exercice 5819

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x,y \in E\ .$$

Montrer que f est linéaire continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002363]

Exercice 5820

Calculer la norme des opérateurs suivants :

- Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n$, $S(x)_0 = 0$.
- $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.

Calculer la norme des formes linéaires suivantes :

– $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ où $g \in X$ est une fonction qui ne s'annule qu'en $x = 1/2$.
– $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.
– $X = l^1$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans l^∞.
– X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Indication ▼ Correction ▼ [002364]

Exercice 5821

Soit $X = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, $U(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} a_k x^k$ et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$.

1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme et que U et V définissent des applications linéaires de X dans X.
2. Examiner si U et V sont continues ?

Indication ▼ Correction ▼ [002365]

Exercice 5822

Soit l^∞ l'espace des suites réelles muni avec la norme uniforme, i.e. $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. On considére l'application $A : l^\infty \to l^\infty$ définie par

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)\,.$$

Montrer que :

1. A est injective et continue avec $\|A\| = 1$. Par contre, A n'est pas surjective.
2. A admet un inverse à gauche mais qu'il n'est pas continu.

Correction ▼ [002366]

Exercice 5823

Soit X un espace normé, $L : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $H = L^{-1}(\{0\})$ son noyau.

1. Montrer que, si L est continue, alors H est un sous-espace fermé dans X. Établir la relation
$$\mathrm{dist}(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|} \quad \text{pour tout } a \in X\,.$$
2. Réciproquement, supposons que le noyau H est un fermé. Démontrer alors que $\mathrm{dist}(a,H) > 0$ dès que $a \in X \setminus H$ et en déduire que L est continue de norme au plus $|L(a)|/\mathrm{dist}(a,H)$.
3. Peut-on généraliser ceci a des applications linéaires entre espaces normés ?

Indication ▼ Correction ▼ [002367]

Exercice 5824

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que la forme linéaire $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?

Correction ▼ [002368]

Exercice 5825

Soit $X = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})\ ;\ (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que N est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante L est continue et calculer sa norme :

$$L : X \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002369]

295 424.00 Espace vectoriel normé

Exercice 5826 Normes sur $\mathbb{R}^2$

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y)=\mathrm{Max}(\sqrt{x^2+y^2},|x-y|)$ et $N_2(x,y)=\sqrt{x^2/9+y^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2\le\|.\|_\infty\le\|.\|_2\le N_1\le\|.\|_1\le 4N_2$.
3. Déterminer le plus petit réel $k>0$, tel que $\|.\|_1\le kN_2$. (utiliser Cauchy-Schwarz)

[001865]

Exercice 5827

On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\|X\|_1=|x_1|+|x_2| \ \ , \ \ \|X\|_2=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} \ \ , \ \ \|X\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}.$$

Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on “comparer" ces trois normes ? Ecriver les définitions des distances d_1,d_2 et d_∞ associées à chacune d'entre elles. [001869]

Exercice 5828

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et continues sur [-1,1].

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :
$$f\longrightarrow\|f\|_1=\int_{-1}^{+1}|f(x)|dx,\quad f\longrightarrow\|f\|_2=(\int_{-1}^{+1}f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$f\longrightarrow\|f\|_\infty=\sup_{x\in[-1,+1]}\{|f(x)|\}$$
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ de fonctions définies par $f_n(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in[-1,-\frac{1}{n}]\\ nx & \text{si } x\in]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\\ 1 & \text{si } x\in]\frac{1}{n},1]\end{cases}$

   La suite f_n est-elle de Cauchy dans $(E,\|.\|_1)$, $(E,\|.\|_2)$ et dans $(E,\|.\|_\infty)$? Conclusions ?

[001870]

Exercice 5829

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f)=\|f\|_\infty \text{ et } N_2(f)=\|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f)\le N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E,N_2) vers (E,N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E,N_1) vers (E,N_2) n'est pas continue.

[001871]

Exercice 5830

Lorsqu'un espace vectoriel E est en outre muni d'une multiplication, l'application $N:\ E\to\mathbb{R}$ est dite norme multiplicative si :

- N est une norme,
- pour tous A et B dans E, $N(A.B)\le N(A).N(B)$.

Soit $E=M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. $A\in E$ se note $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$

1. Montrer que $N_\infty(A)=\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\}$ définit une norme multiplicative sur E.
2. Montrer que $N_\infty(A)=\max_{\{X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty=1\}}\{\|A.X\|_\infty\}$.
3. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\ 1\le i\le n,\ |a_{i,i}|>\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{i,j}|$ et D la matrice diagonale formée avec les éléments diagonaux de A. Soit aussi F un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la suite des $X^{(p)}\in\mathbb{R}^n$ définie pour $p\ge 0$ par :
$$\begin{cases}X^{(0)} &= X_0\in\mathbb{R}^n\\ X^{(p+1)} &= (I-D^{-1}A)X^{(p)}+D^{-1}F \quad \text{pour p}\ge 0\end{cases}$$
   Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

[001872]

Exercice 5831 partiel 1999

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un élément de E et A un compact de E.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y\|$ est continue.
2. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y-x\|$ est continue.
3. Montrer que la distance de x à A est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que

$$\inf_{y\in A} \|y-x\| = \|a-x\|.$$

[001873]

Exercice 5832

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit L une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que L est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
2. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E \qquad \forall x \in E.$$

   Montrer que L est continue.
3. Dans la suite, on suppose que L est continue et on pose

$$K = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F.$$

   (a) Supposons que $K = +\infty$. Montrer qu'alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et telle que $\|L(x_n)\|_F$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe une suite y_n tendant vers 0 et telle que $\|L(y_n)\|_F = 1$.

   (b) En déduire que $K \in \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in E$ on a

$$\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E.$$

[001874]

Exercice 5833

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

On considère l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$.

1. Montrer que L est une application linéaire.
2. En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

[001875]

Exercice 5834

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in|||}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente. [001876]

Exercice 5835

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|\,dt.$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in|||^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que
$$\|f_n - f_p\| \leq \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$
et en déduire que (f_n) est de Cauchy.
3. Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0$$
pour tout $0 < \alpha < 1$.
4. Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\,dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\,dt = 0$$
pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que
$$\begin{aligned} f(t) &= -1 && \forall t \in [-1, 0[\\ f(t) &= 1 && \forall t \in]0, 1]. \end{aligned}$$
Conclure.

[001877]

Exercice 5836

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application continue g de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0, 1[$ tel que
$$\|g(x) - g(y)\| \leq K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$
On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe.

Soit f une application continue de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.
2. Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.
3. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

[001878]

Exercice 5837

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule
$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

[001879]

Exercice 5838

$N : (x, y) \longmapsto |5x + 3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$? [001880]

Exercice 5839

1. Montrer que $\forall p \geq 1$, l'application $\left(\begin{array}{cccc} N_p : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\sum_{k=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right)$ est une norme (on utilisera la convexité de x^p).

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, montrer que $\lim_{p\to+\infty} N_p(x) = \max(x_i, 1 \leq i \leq n)$, et que cela définit une norme, appelée **norme infinie**, et notée N_∞.
3. Établir les inégalités suivantes :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{n} N_2(x) \leq n N_\infty(x).$$
Que peut-on en déduire ?
4. Dessiner les boules unités des normes 1,2, et ∞ dans $\mathbb{R}^2$.

[001881]

Exercice 5840

Soit $\begin{pmatrix} N: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{k=1}^n |\sum_{i=1}^k x_i| \end{pmatrix}$. Montrer que N est une norme. [001882]

Exercice 5841

A est dit *convexe* s'il contient tout segment reliant deux quelconques de ses points :
$$\forall (x,y) \in A^2,\ [x,y] = \{x + t(y-x), t \in [0,1]\} \subset A.$$
Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que toute boule fermée (ou ouverte) est convexe et symétrique par rapport à son centre. [001883]

Exercice 5842

Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer :
$$\forall (x,y) \in (E \setminus \{0\})^2,\ N(x-y) \geq \frac{1}{2}\sup(N(x),N(y)) \cdot N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right).$$

[001884]

Exercice 5843

Soit E un espace vectoriel normé, et $(a,a') \in E^2$, $(r,r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer :
1. $B(a,r) = \{a\} + B(0,r)$
2. $B(a,r) = B(a',r') \Leftrightarrow a = a'$ et $r = r'$
3. $B(a+a', r+r') = B(a,r) + B(a',r')$
4. $B(a,r) \cap B(a',r') \neq \emptyset \Leftrightarrow \|a'-a\| < r + r'$.

[001885]

Exercice 5844

Soit (E,N) une espace vectoriel. Montrer les équivalences :
$$\begin{array}{rcl} A \subset E \text{ est borné} & \Leftrightarrow & \exists (a,r) \in E \times \mathbb{R}^+ : A \subset B(a,r) \\ & \Leftrightarrow & \exists R \geq 0 : A \subset B(0,R) \\ & \Leftrightarrow & \exists R \geq 0 : A \subset B_f(0,R) \\ & \Leftrightarrow & A \text{ est inclus dans une boule de } E. \end{array}$$

[001886]

Exercice 5845 Topologie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$

---

1. Quelles sont toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?
On se place désormais dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$.
2. Quelles sont les boules ouvertes ? fermées ?
3. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$:

(a) soit $(I_a)_{a\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints. Montrer que A est au plus dénombrable.

(b) soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, et $a \in O$. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x > a\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x < a\}$. Etudier l'existence de $\inf A$ et $\sup B$.

(c) en déduire que :
– tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts
– tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles fermés.

[001887]

Exercice 5846

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$.

1. On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty$ et $N'(f) = \|f'\|_\infty$. Montrer que N et N' sont des normes.
2. Montrer que N et N' ne sont pas équivalentes.

[001888]

Exercice 5847

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$.

1. On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E
2. Montrer que, si $f \in E$ alors, pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))dt$.
3. On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f+f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme sur E, équivalente à N.

[001889]

Exercice 5848

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E et x un élément de E. Comparer les deux assertions :

i) Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap B(x,\varepsilon)$ est infini.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément y distinct de x dans $A \cap B(x,\varepsilon)$.

[001890]

Exercice 5849

Soit A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. On munit $C[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que A est fermé et calculer son intérieur.
2. On munit $C[0,1]$ de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que l'intérieur de A est vide et que A est fermé.

[001891]

Exercice 5850

Soit $(E, \|\ \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\mu(E) = \sup_{x,y\in E-(0,0)} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}.$$

1. Montrer que $1 \leq \mu(E) \leq 2$.
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}^2)$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne puis de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.

[001892]

Exercice 5851

Soit $\|\ \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{i,j\in 1,\cdots n} \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|=1} \|Ax\|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \quad \|_1$. Montrer que $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|)$.

[001893]

Exercice 5852

On munit $C[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in C[0,1];\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini.
2. Calculer $N(\psi)$ lorsque $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Posons, pour toute fonction $f \in C[0,1]$: $\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$. Montrer que $N(\varphi) = 1$.

[001895]

Exercice 5853

On munit E, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles telles que $f(0) = 0$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in E;\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini. Montrer que $\varphi \mapsto N(\varphi)$ est une norme sur l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.
2. Calculer $\mu = N(\psi)$ lorsque ψ est définie en posant, pour toute fonction $f \in E$: $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Peut-on trouver une fonction $f \in E$ telle que $|\psi(f)| = \mu$ et $\|f\|_\infty = 1$?

[001896]

Exercice 5854

On munit $E = C^1[0,1]$ et $F = C[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in E;\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini.
2. Montrer que l'application $f \mapsto f'$ n'est pas continue.

[001897]

Exercice 5855

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$.

1. Soient $x, y \in E$ et I le segment $[x,y]$. Calculer $S \cap I$.
2. Les normes $\| \quad \|_1$ et $\| \quad \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont-elles euclidiennes ?

[001898]

Exercice 5856

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer quil existe une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inversibles convergeant vers A (en un sens que l'on précisera).
2. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer les valeurs propres de N. Montrer que $\det(I+N) = 1$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AN = NA$. Calculer $\det(A+N)$.

[001899]

Exercice 5857

I Préliminaires

1. Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{P}$ est de dimension infinie.
2. Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(X) = \sup\bar{X}$.

II

On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x,y \in [0,1]$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$. On note $(x^2+1)^1$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, c'est à dire dérivables à dérivée continue.

1. Montrer que $\mathscr{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, que $\mathscr{L}$ contient $(x^2+1)^1$ et est de dimension infinie.
2. On pose, pour tout $f \in \mathscr{L}$:
$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$
$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in]0,1]} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\lambda(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$
   (a) Montrer que N_1, N_2, $\| \ \|_\infty$ et λ sont des normes sur $\mathscr{L}$.
   (b) En considérant la suite $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$, montrer que N_2 n'est pas équivalente à $\| \ \|_\infty$.
   (c) Montrer que N_1 n'est équivalente ni à $\| \ \|_\infty$, ni à N_2.
   (d) Construire une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{L}$ qui converge vers 0 pour $\| \ \|_\infty$ mais pas pour N_2. En déduire (de nouveau) que N_2 n'est pas équivalente à $\| \ \|_\infty$.
   (e) Montrer que λ et N_1 sont équivalentes.
3. On pose, pour tout $f \in (x^2+1)^{1:}$ $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
   (a) Montrer que ν_1 et ν sont des normes sur $(x^2+1)^1$.
   (b) Montrer que $\nu_1(f) = N_1(f)$, pour tout $f \in (x^2+1)^{1.}$
   (c) Les normes ν et ν_1 sont-elles équivalentes ?
4. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite de *Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, si $m,n \geq N$ alors $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. On dit que $(E, \| \ \|)$ est *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente. On rappelle que $\mathbb{R}$ muni de la norme $x \mapsto |x|$ est complet.
   (a) Soit C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(C^0, \| \ \|_\infty)$ est complet.
   (b) L'espace vectoriel normé $((x^2+1)^{1,\nu)}$ est-il complet ? Qu'en est-il de $((x^2+1)^{1,\nu_1)}$?
   (c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L}, \lambda)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f.
   (d) Démontrer que pour n assez grand $f - f_n$ est lipschitzienne.
   (e) En déduire que $(\mathscr{L}, \lambda)$ est complet.

III

On munit $(x^2+1)^1$ d'une norme N et et C^0 de la norme $\| \ \|_\infty$. On note d l'application $f \mapsto f'$ de $(x^2+1)^1$ à valeurs dans $(x^2+1)^{0.}$

1. Soit $\varphi : (x^2+1)^{1 \to C^0}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f;N(f)\leq 1} \|\varphi(f)\|_\infty$. Démontrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini. Vérifier que N est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $(x^2+1)^1$ à valeurs dans $(x^2+1)^{0.}$
2. Montrer que l'application d n'est pas continue si $N = \| \ \|_\infty$.
3. On munit $(x^2+1)^1$ de la norme ν. Montrer que d est continue et calculer $N(d)$.

Correction ▼ [001900]

296 425.00 Espace métrique complet, espace de Banach

Exercice 5858

L'espace $(\mathbb{R},d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1+|x-y|)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002395]

Exercice 5859

On considère pour $x,y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, où f est une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que cette distance est complète si et seulement si f est d'image fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [002396]

Exercice 5860

On considère l'espace des fonctions continues $X = \mathscr{C}([a,b])$.

1. Soit $\omega \in X$ une fonction qui ne s'annule pas sur $[a,b]$. Posons
$$d_\omega(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f(t)-g(t))| \ .$$
L'espace (X,d_ω) est-il complet ?
2. Montrer que l'espace $(X,\|.\|_1)$ n'est pas complet (où $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$).

Indication ▼ Correction ▼ [002397]

Exercice 5861

Soit $X = \mathscr{C}^1([a,b])$.

1. Est-ce un espace complet si on le muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$?
2. Considérons maintenant, pour $f \in X$, la norme
$$N(f) = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\| \ .$$
L'espace (X,N) est-il complet ?

Indication ▼ Correction ▼ [002398]

Exercice 5862

Soit X l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et soit
$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|} \quad \text{pour } x,y \in X \ .$$

1. Montrer que X n'est pas complet pour la métrique ρ.
2. Trouver un espace de suites Y tel que (Y,ρ) soit complet et tel que X soit dense dans Y.
3. Que donne l'exercice si on remplace ρ par la norme uniforme ?

Indication ▼ Correction ▼ [002399]

Exercice 5863

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une série $\sum u_k$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. On veut démontrer que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente. En déduire que si toute série normalement convergente est convergente, alors E est complet.
2. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que S_n est une suite de Cauchy. En déduire que si E est complet, alors toute série normalement convergente est convergente.

Indication ▼   Correction ▼   [002400]

Exercice 5864

Soient E,F des espaces normés et $A_n, A \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre :

1. $A_n \to A$ dans $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Pour toute partie bornée $M \subset E$, la suite $A_n x$ converge uniformément vers Ax, $x \in M$.

Correction ▼   [002401]

Exercice 5865 Cours

Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.

Correction ▼   [002402]

Exercice 5866

Soit δ la métrique sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$. Montrer, à l'aide du théorème de prolongement de fonction uniformément continue, que l'identité $i : (\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R},|.|)$ n'est pas uniformément continue. [002403]

297 426.00 Théorème du point fixe

Exercice 5867

Soit $\alpha_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application pour laquelle

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in X \text{ et } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in X$, que pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n\geq 0}$ converge vers p et que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p,x_n) \leq \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu\right) d(x_1,x_0)\,.$$

Indication ▼   Correction ▼   [002404]

Exercice 5868

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une application telle que l'une de ces itérées f^n est strictement contractante, i.e. il existe $\rho < 1$ tel que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho\, d(x,y) \quad \text{pour tout} \quad x,y \in X\,.$$

Montrer que f possède un unique point fixe. Faire le rapprochement avec l'exercice 5867.

Indication ▼   Correction ▼   [002405]

Exercice 5869

Soit $X = (\mathscr{C}^1([0,1]),N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt\,.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$.

Indication ▼   Correction ▼   [002406]

Exercice 5870

Soient $y \in \mathscr{C}([a,b])$ et $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$ des fonctions continues. On se propose de résoudre l'équation (intégrale de Fredholm) suivante :

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt = y(s) \quad \text{pour } s \in [a,b] \tag{12}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}([a,b])$. Pour ce faire on suppose que le "noyau" k satisfait l'hypothèse suivante :

$$\lambda := \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|\,dt < 1 \qquad \left(\text{ou même} \quad \max_{a \le s,t \le b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a}\right).$$

1. Rappeler que $(\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est un espace complet.
2. Soit $x \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto Ax \in \mathscr{C}([a,b])$ l'application donnée par

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt + y(s)\;.$$

   Noter que (12) équivaut à $Ax = x$ et qu'on cherche donc un point fixe de $x \mapsto Ax$. Déduire des hypothèses faites sur k qu'un tel point fixe $x \in \mathscr{C}([a,b])$ existe et que toute suite $A^n x_0$, $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, converge uniformément vers ce point fixe x.
3. *Dépendance continue de la solution $x = x(y)$.*
   Soient $y_1, y_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ deux fonctions et $x_1, x_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ les deux solutions associées de (12) ou, de façon équivalente, les points fixes des applications associées $x \mapsto A_i x$. Montrer que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \le \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty\;.$$

   En déduire que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \le \frac{1}{1-\lambda} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

   et donc que la solution x de (12) dépend continuement de la fonction y.

Correction ▼ [002407]

298 427.00 Espace de Hilbert, théorème de projection

Exercice 5871

1. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire euclidien sur $C[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
2. On note $C = \{f \in C[0,1];\ \int_0^1 f(t)dt = 1$. Montrer que $\inf_{f \in C} \int_0^1 f^2(t)dt = 1$ et que cette borne inférieure est atteinte.

[001894]

299 428.00 Théorème de Baire

Exercice 5872

À l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. *Indication :* on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.

Que peut-on dire de l'ensemble de Cantor ?

Indication ▼ Correction ▼ [002392]

Exercice 5873

Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X,d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O sur lequel f est majorée.

Application : soit (f_n) une suite de formes linéaires continues sur un Banach B, vérifiant

$$\forall x \in B,\ \sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002393]

Exercice 5874

On sait que l^1 est inclus dans l^2 (au fait pourquoi ?) mais n'est pas fermé dans l^2 (re-pourquoi ?) ; on va montrer qu'il est de première catégorie dans l^2 c.a.d. réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (dans l^2).

1. On considère pour chaque $p \geq 1$,
$$F_p = \{(a_n) \in l^2 \,/\, \sum |a_n| \leq p\}$$
Montrer que F_p est fermé dans l^2 et d'intérieur vide.
2. En déduire le résultat.

[002394]

300 429.00 Dualité, topologie faible

301 430.00 Connexité

Exercice 5875

Soit X un espace métrique.

1. Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante.
2. Soit A une partie de X connexe. Montrer que toute partie $B \subset E$ vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
3. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 0$. Prouver que $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est connexe.

Indication ▼ Correction ▼ [002383]

Exercice 5876

Déterminer les parties connexes de
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x \neq y\} \quad \text{et de} \quad \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,; z \neq w\}\,.$$

Correction ▼ [002384]

Exercice 5877

Soit A et B des parties de X. On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap \complement A$ sont non vides. Montrer que B coupe la frontière de A.

Indication ▼ Correction ▼ [002385]

Exercice 5878

Notons $T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002386]

Exercice 5879

1. Montrer qu'il existe une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\,; \; |z| = 1\}$ et qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002387]

Exercice 5880

Dans $\mathbb{R}^2$, soit B_a l'ensemble $\{a\}\times]0,1]$ si a est rationnel et $B_a = \{a\} \times [-1,0]$ si a est irrationnel. Montrer que $B = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} B_a$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [002388]

Exercice 5881

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I\times I\ ;\ x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que *la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire* (un théorème de Darboux).

Indication ▼ Correction ▼ [002389]

Exercice 5882

Soit X un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de X telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [002390]

Exercice 5883

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\ ;\ x > 0\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe et connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\overline{A}$ et justifier que $\overline{A}$ est connexe.
3. Montrer que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Indication ▼ Correction ▼ [002391]

302 431.00 Autre

Exercice 5884 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que : $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbb{R}\ \ (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \leq n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$
2. Déterminer : $m = \text{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i)$ tels que $x_1,x_2,\cdots,x_n > 0\}$
3. Déterminer : $M = \sup\{|x+2y+3z+4t|$ tels que $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ,x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1\}$

[001864]

Exercice 5885

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de n nombres réels. Montrer, en étudiant le signe du trinôme $\lambda \longrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i+\lambda b_i)^2$ que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

[001866]

303 432.00 Théorème de Stone-Weirstrass, théorème d'Ascoli

Exercice 5886

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b f(t)t^n\,dt = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Indication ▼ Correction ▼ [002408]

Exercice 5887

Montrer qu'une fonction de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[x]$.

Indication ▼ [002409]

Exercice 5888

Soit E un espace compact. Soit f_i, $i = 1,\dots,n$ une famille de n élements de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ qui sépare les points de E. Montrer que E est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002410]

Exercice 5889

Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Soit $\mathscr{A}$ l'ensembles des combinaisons linéaires finies $f \in \mathscr{C}(X\times Y,\mathbb{R})$ de la forme :

$$f(x,y) = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i(x)\cdot v_i(y), \quad \text{avec } u_i \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R}), v_i \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}), \lambda_i \in \mathbb{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que toute fonction de $\mathscr{C}(X\times Y,\mathbb{R})$ est limite uniforme de suites d'éléments de $\mathscr{A}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002411]

Exercice 5890

1. Soit $k>0$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in]a,b[$. Montrer que $\mathscr{F}$ est une famille équicontinue.
2. Si $L>0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications L-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de (f_n).

Indication ▼ Correction ▼ [002412]

Exercice 5891

Soient E,F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications de E dans F équicontinue en $a \in E$. Montrer que, si la suite $(f_n(a))$ converge vers b, alors $(f_n(x_n))$ converge également vers b, si (x_n) est une suite de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

L'équicontinuité est-elle nécessaire ici ?

Indication ▼ Correction ▼ [002413]

Exercice 5892

Soient E,F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications équicontinues de E dans F. Montrer que l'ensemble des $x\in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, est un fermé.

Correction ▼ [002414]

Exercice 5893

Soient (E,d) un espace métrique et $\mathscr{H}$ une famille équicontinue d'applications de E dans $\mathbb{R}$. Établir :

1. L'ensemble A des $x \in E$ pour lesquels $\mathscr{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.

2. Si E est compact et connexe et si $\mathscr{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [002415]

Exercice 5894

On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t+4(n\pi)^2})$, $t \in [0,\infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathscr{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$? Que dit le théorème d'Ascoli ?

Indication ▼ Correction ▼ [002416]

Exercice 5895

Soit $K : \mathscr{C}([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,dt$, $k \in \mathscr{C}([a,b]\times[a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$.

1. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).
3. Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X.

Correction ▼ [002417]

304 440.00 Fonction holomorphe

Exercice 5896

Tout complexe z qui n'est pas un réel positif ou nul peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]0,2\pi[$. On définit une fonction f sur $\Omega = (x^2+1)^\setminus[0,+\infty[$ par

$$f(z) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$$

où P et Q sont des fonctions réelles données. Donner des conditions sur les dérivées partielles de P, Q pour que f soit holomorphe sur Ω.

En déduire que la fonction

$$\log z = \log r + i\theta$$

est holomorphe sur Ω. Quelle est sa dérivée ?

Correction ▼ [002681]

Exercice 5897

Soit a un réel dans $]0,1[$. On souhaite calculer l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

Pour cela, on définit une fonction f sur $\Omega = (x^2+1)^\setminus[0,+\infty[$ de la manière suivante :

$$f(z) = \frac{\exp((a-1)\log z)}{1+z}$$

où la fonction log est définie comme dans l'exercice précédent.

- Montrer que f est méromorphe sur Ω. Quels en sont les pôles ?
- Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $R > 1$ deux réels. On considère à présent le chemin C réunion du segment $[\varepsilon,R]+0i$, du cercle de rayon R, parcouru positivement, du segment $[R,\varepsilon]-0i$ et du cercle de rayon ε parcouru négativement. Calculer $\int_C f(z)\,dz$; en déduire la valeur de I_a.

Correction ▼ [002682]

Exercice 5898

Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Correction ▼ [002783]

Exercice 5899

Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 ; montrer que $f+g$, $f-g$ et fg le sont et donner la valeur de leurs dérivées au point z_0.

Correction ▼ [002784]

Exercice 5900

Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 montrer que $\frac{f}{g}$ est dérivable au sens complexe et donner la valeur de la dérivée lorsque $g(z_0) \neq 0$.

Correction ▼ [002785]

Exercice 5901

Montrer la formule pour la dérivée d'une composition $g \circ f$.

Correction ▼ [002786]

Exercice 5902

Soit f et g deux fonctions n-fois dérivables au sens complexe sur un ouvert non vide U (remarque : d'après le cours il suffit qu'elles soient dérivables une fois sur U pour qu'elles le soient un nombre quelconque de fois). Montrer la formule de Leibniz généralisée :

$$\forall z \in U \qquad (fg)^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z) g^{(n-j)}(z)$$

Correction ▼ [002787]

Exercice 5903

On se donne deux séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayons de convergences R_1 et R_2 non nuls. En utilisant le théorème sur les séries doubles prouver $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pour $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ avec (formules dites de Cauchy) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est-il toujours égal à $\min(R_1, R_2)$ ou peut-il être plus grand ?

Correction ▼ [002788]

Exercice 5904

Retrouver le résultat de l'exercice précédent (l'exercice 5903) de manière plus indirecte en montrant que les coefficients $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ sont ceux de la série de Taylor à l'origine de la fonction holomorphe $k(z) = f(z)g(z)$.

Correction ▼ [002789]

Exercice 5905

En quels points la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle dérivable au sens complexe, et/ou holomorphe ? Même question pour les fonctions $z \mapsto x$ et $z \mapsto y$.

Correction ▼ [002790]

Exercice 5906

Prouver qu'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe, de dérivée identiquement nulle, est constante. Et si l'ouvert n'est pas connexe ?

Correction ▼ [002791]

Exercice 5907

Sur un ouvert connexe U on se donne une fonction holomorphe f qui a la propriété de ne prendre que des valeurs réelles. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante.

Correction ▼ [002792]

Exercice 5908

Cet exercice propose une variante pour développer la théorie de la fonction exponentielle.

1. On se donne une fonction f qui est $n+1$-fois dérivable au sens complexe sur le disque ouvert $D(0,R)$ (on sait qu'une fois suffit mais on ne va pas utiliser ce théorème difficile ici). Soit $z \in D(0,R)$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange à la fonction de la variable réelle $t \mapsto g(t) = f(tz)$ pour $0 \leq t \leq 1$, prouver :
$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tz)\,dt$$
2. On suppose que f est dérivable au sens complexe une fois sur $D(0,R)$ et vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est infiniment dérivable au sens complexe. En utilisant la question précédente montrer :
$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \big(\sup_{|w| \leq |z|} |f(w)| \big) \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$
et en déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.
3. Réciproquement on considère la fonction $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Vérifier que le rayon de convergence est infini. Établir par un calcul direct que $F'(0)$ existe et vaut 1. En utilisant le théorème sur les séries doubles, montrer $F(z+w) = F(z)F(w)$. En déduire ensuite que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $F' = F$.

Correction ▼ [002793]

Exercice 5909

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Est-il exact que pour $|z| > R$ on a $\lim |a_n z^n| = +\infty$?

Correction ▼ [002794]

Exercice 5910

Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

Correction ▼ [002795]

Exercice 5911

Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

Correction ▼ [002796]

Exercice 5912

Déterminer en tout $z_0 \neq 1, 2$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus on demande d'indiquer le rayon de convergence *avant* de déterminer explicitement la série de Taylor.

Correction ▼ [002797]

Exercice 5913

Déterminer en tout point z_0 où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de z_0. [002798]

Exercice 5914

On considère la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. Quel est son rayon de convergence ? On note $f(z)$ sa somme. Que vaut $\lim_{t\to 1} f(t)$? (on prend $0 < t < 1$; minorer f par ses sommes partielles). Plus généralement que vaut $\lim_{t\to 1} f(tw)$ (ici encore t est pris dans $]0,1[$), lorsque w vérifie une équation $w^{2^N} = 1$? En déduire qu'il est impossible de trouver un ouvert U connexe intersectant $D(0,1)$ mais non inclus entièrement dans $D(0,1)$ et une fonction holomorphe $g(z)$ sur U tels que $g = f$ sur $U \cap D(0,1)$. Pour tout $z_0 \in D(0,1)$ déterminer alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point z_0.

Correction ▼ [002799]

Exercice 5915

Montrer que le rayon de convergence de chacune des séries concernées est 1 et prouver :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$ **sauf** en $z = 1$.

Pour ce dernier cas on définit $S_0 = 1$, $S_1 = 1+z$, $S_2 = 1+z+z^2$, ...(on pose aussi $S_{-1} = 0$). En écrivant $z^n = S_n - S_{n-1}$ exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}$ en fonction des S_n. Montrer que les S_n sont bornées lorsque $|z| = 1$, $z \neq 1$. Conclure. [002800]

Exercice 5916

Montrer qu'un entier $k \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $2^n(2m+1)$, $n \geq 0$, $m \geq 0$. Puis prouver pour $|z| < 1$:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\,.$$

On justifiera les interversions de séries. Prouver aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\,.$$

[002801]

Exercice 5917

Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

1. Montrer que cos et ch sont des fonctions paires et sin et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières. Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$, $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Établir les formules :
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
en écrivant de deux manières différentes $e^{\pm i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.
3. Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi+z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi+z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$.
4. Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Correction ▼ [002802]

Exercice 5918

Montrer $\sin(a+ib) = \sin(a)\,\mathrm{ch}(b) + i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b)$. Puis en prenant dorénavant a et b réels, prouver :

$$a, b \in \mathbb{R} \implies \quad |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \mathrm{sh}^2(b)$$

Déterminer alors les nombres complexes $z = a+ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

Correction ▼ [002803]

Exercice 5919

Montrer :

$$a,b\in\mathbb{R} \implies \quad |\cos(a+ib)|^2=\cos^2(a)+\operatorname{sh}^2(b)=\operatorname{ch}^2(b)-\sin^2(a)$$

Déterminer les nombres complexes z avec $\cos(z)=0$. [002804]

Exercice 5920

Les fonctions de Bessel sont très importantes en Analyse. Elles apparaissent très souvent dans des problèmes de physique mathématique. L'analyse complexe permet d'étudier de manière approfondie ces fonctions. Ici nous nous contentons des tout débuts de la théorie. Nous ne considérons que les fonctions[2] $J_0, J_1, J_2, \ldots$, qui sont définies par les formules : [3]

$$\nu\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{C} \qquad J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série définissant J_ν est $+\infty$.
2. En dérivant terme à terme prouver les formules :

$$(z^\nu J_\nu)'=z^\nu J_{\nu-1} \qquad (\nu\geq 1)$$
$$(z^{-\nu}J_\nu)'=-z^{-\nu}J_{\nu+1} \qquad (\nu\geq 0)$$

   En particulier on a $(zJ_1)'=zJ_0$ et $J_0^{'}=-J_1$.
3. Réécrire les équations précédentes sous la forme $(z\frac{d}{dz}+\nu)J_\nu=zJ_{\nu-1}$ $(\nu\geq 1)$ et $(z\frac{d}{dz}-\nu)J_\nu=-zJ_{\nu+1}$ $(\nu\geq 0)$ et en déduire $-(\frac{d}{dz}+\frac{\nu+1}{z})(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z})J_\nu=J_\nu$, puis, après simplification, l'équation différentielle de Bessel :

$$z^2J_\nu''+zJ_\nu'+(z^2-\nu^2)J_\nu=0$$

4. Montrer, pour tout $\nu\in\mathbb{N}$, que la série entière définissant J_ν est la seule (à une constante multiplicative près) qui donne une solution de l'équation différentielle de Bessel.[4]

[002805]

305 441.00 Fonction logarithme et fonction puissance

Exercice 5921

Montrer qu'il existe une (unique) fonction analytique sur $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ qui vaut $\sqrt{a^2-1}$ pour $a>1$. *Indication :* montrer pour commencer que la formule $f(a)=\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(a-1)+\frac{1}{2}\operatorname{Log}(a+1))$ donne une solution sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus]-\infty,1]$. Puis montrer que $g(a)=-\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a-1)+\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a+1))=-f(-a)$ est analytique sur $\mathbb{C}\setminus[-1,+\infty[$. Enfin montrer que $g(a)=f(a)$ dans le demi-plan supérieur et aussi dans le demi-plan inférieur en calculant $f(\pm i)$ et donc $g(\pm i)$ et en expliquant pourquoi a priori le quotient $g(a)/f(a)$ est constant dans ces deux demi-plans. [002851]

Exercice 5922

1. On considère la fonction analytique $\phi(a)=\operatorname{Log}(a-1)-\operatorname{Log}(a+1)$ dans le demi-plan supérieur et la fonction analytique $\psi(a)=\operatorname{Log}(a-1)-\operatorname{Log}(a+1)$ dans le demi-plan inférieur. Montrer que ϕ et ψ sont la restriction à leurs demi-plans respectifs d'une fonction analytique sur $\mathbb{C}\setminus[-1,+1]$. *Indication :* il y a plusieurs raisonnements possibles et plusieurs indications possibles. Donc, débrouillez vous.

[2] dites "fonctions de Bessel de première espèce (et d'indices entiers)".

[3] Autrement dit :

$$J_\nu(z)=\frac{z^\nu}{2.4.\ldots.(2\nu)}\left(1-\frac{z^2}{2.(2\nu+2)}+\frac{z^4}{2.4.(2\nu+2).(2\nu+4)}-\frac{z^6}{2.4.6.(2\nu+2).(2\nu+4).(2\nu+6)}+\ldots\right)$$

Remarquez que seule la constante $2.4.\ldots.(2\nu)=2^\nu\nu!$ nous restreint (pour le moment) à des valeurs entières de ν. Si on en fait abstraction on obtient avec $\nu=-\frac{1}{2}$ la fonction "multiforme" $z^{-1/2}\cos(z)$; tandis qu'avec $\nu=+\frac{1}{2}$ on obtient $z^{-1/2}\sin(z)$. Les définitions exactes sont $J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$ et $J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z)$.

[4] les autres solutions de l'équation différentielle sont singulières en $z=0$, avec une composante logarithmique ($\nu\in\mathbb{Z}$). Pour $\nu\notin\mathbb{Z}$ il y a une solution en $z^\nu(\sum_{k\geq 0}c_kz^k)$ et une autre en $z^{-\nu}(\sum_{k\geq 0}d_kz^k)$.

2. On considère la fonction $a \mapsto \frac{a-1}{a+1}$. Quelle est l'image par cette fonction de l'intervalle $]-1,1[$? Quelle est l'image par cette fonction de $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$? En déduire que la fonction composée $\Phi(a) = \mathrm{Log}\frac{a-1}{a+1}$ existe et est analytique sur $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$. Retrouver le résultat de la question précédente (et montrer que ϕ, ψ et Φ coïncident dans les intersections deux-à-deux de leurs ouverts de définitions).
3. Quel est le développement en série de Laurent de la fonction analytique Φ dans la couronne $1 < |a| < \infty$? Que vaut par exemple $\int_{|a|=2} \Phi(a) a^{18} da$?

[002852]

306 442.00 Formule de Cauchy

Exercice 5923

Le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est un opérateur différentiel qui joue un rôle important en analyse complexe. Soit $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert du plan complexe. On sait que f, donc u et v, admettent des dérivées partielles de tous les ordres. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que u et v vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

On dit d'une fonction vérifiant l'équation de Laplace qu'elle est harmonique. La fonction holomorphe $f = u + iv$ est aussi une fonction harmonique puisque $\Delta(f) = \Delta(u) + i\Delta(v) = 0$.

Correction ▼ [002806]

Exercice 5924

On veut exprimer les équations de Cauchy-Riemann avec les coordonnées polaires r et θ. Les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F = 0$$

donc il s'agit d'exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}$ et de $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) sur lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$). Montrer :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$

En déduire $\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$. Montrer alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = e^{i\theta}\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

En déduire qu'en coordonnées polaires les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire (en particulier) sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\,r\frac{\partial F}{\partial r}$$

Correction ▼ [002807]

Exercice 5925

Il est intéressant que l'équation de l'exercice précédent $\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\,r\frac{\partial F}{\partial r}$, peut se réécrire dans le système de coordonnées $(a,b) = (\log(r), \theta)$ sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial b} = i\frac{\partial F}{\partial a}\ ,$$

autrement dit exactement sous la même forme qu'ont les équations de Cauchy-Riemann originelles dans les coordonnées cartésiennes (x,y).[5] Or a et b sont les parties réelles et imaginaires de la combinaison $a+ib$ qui est holomorphe comme fonction de $x+iy$: $a+ib = \log(x+iy)$. Montrer que cela est général : dans un système de coordonnées (a,b) telles que $w = a+ib$ est une fonction

[5] $\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial x}$, ou, plus mnémotechnique : $\frac{\partial F}{i\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}$ qui dit “holomorphe $\Leftrightarrow$ iy est comme x”.

holomorphe de $z = x+iy$ les équations de Cauchy-Riemann pour l'holomorphie (par rapport à (x,y)) d'une fonction F sont $\frac{\partial F}{\partial b} = i\frac{\partial F}{\partial a}$ (ce qui équivaut à l'holomorphie de F comme fonction "sur le plan de $w = a+ib$"[6]). Indication : prouver l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - i\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right) ,$$

en exploitant les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x} = +\frac{\partial b}{\partial y}$ pour $a+ib = g(x+iy)$.

Correction ▼ [002808]

Exercice 5926

On veut exprimer le Laplacien avec les coordonnées polaires r et θ : autrement dit pour toute fonction deux fois différentiable Φ on veut calculer la fonction $\Delta(\Phi)$ à l'aide des opérateurs de dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$, lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) dans lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$). Une méthode possible est d'utiliser les expressions obtenues dans l'exercice 5924 :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} ,$$

et de calculer ensuite $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ et $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ puis de faire la somme. Mais cela donne des calculs un peu longs. Voici une ruse : en reprenant une formule déjà établie dans l'exercice 5924 montrer

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \theta}$$

On remarquera maintenant que l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ appliqué à la fonction $x+iy$ donne zéro. Donc (expliquer !) :

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = (x-iy)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Prouver alors en conclusion :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\left((r\frac{\partial}{\partial r})^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2}.$$

[002809]

Exercice 5927

Soit $\gamma = [A,B]+[B,C]+[C,D]+[D,A]$ le bord (parcouru dans le sens direct) du carré de sommets $A = 1-i$, $B = 1+i$, $C = -1+i$, $D = -1-i$. Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma dx$, $\int_\gamma x\,dx$, $\int_\gamma x^2\,dx$, $\int_\gamma y\,dx$, $\int_\gamma y^2\,dx$, $\int_\gamma y^3\,dx$,
2. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, $\int_\gamma x\,dy + y\,dx$, $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$,
3. $\int_\gamma dz$, $\int_\gamma z\,dz$, $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma z\,dx$,
4. $\int_\gamma z^{-1}\,dz$, $\int_\gamma z^{-2}\,dz$, $\int_\gamma z^n\,dz$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002810]

Exercice 5928

Avec les mêmes notations on veut évaluer $\int_\gamma \overline{z^n}\,dz$, $n \in \mathbb{Z}$. Justifier les étapes suivantes :

$$\int_\gamma \overline{z^n}\,dz = \overline{\int_\gamma z^n\,\overline{dz}}$$

$$\int_\gamma z^n\,\overline{dz} = \int_{[B,C]} z^n\,dz - \int_{[C,D]} z^n\,dz + \int_{[D,A]} z^n\,dz - \int_{[A,B]} z^n\,dz ,$$

et compléter le calcul, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002811]

[6]autrement dit pour qu'une fonction soit holomorphe comme fonction de $x+iy$ il est nécessaire et suffisant qu'elle soit holomorphe comme fonction de $a+ib$. En particulier $x+iy$ est une fonction holomorphe de $a+ib$: on a donc prouvé que la réciproque d'une bijection holomorphe est aussi holomorphe. Nous reviendrons là-dessus avec d'autres méthodes (dont celle très concrète de l'"inversion" d'une série entière).

Exercice 5929

On note C le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C z^n\,dz$ et $\int_\gamma z^n\,dz$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et vérifier qu'il y a toujours égalité (ici $\gamma = \partial\mathscr{R}$ est à nouveau le bord du carré qui a été utilisé dans les exercices précédents). Calculer $\int_C \bar{z}^n\,dz$ et $\int_\gamma \bar{z}^n\,dz$ et trouver les cas d'égalités et d'inégalités.

Correction ▼ [002812]

Exercice 5930

Soit C un cercle de centre quelconque, parcouru dans le sens direct, et ne passant pas par l'origine. Calculer $\int_C z^n\,dz$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ dans le cas où C encercle l'origine, et dans le cas où C n'encercle pas l'origine. *Indication* pour $n = -1$: soit w l'affixe du centre du cercle, et R son rayon. Paramétrer le cercle par $z = w(1 + \frac{R}{|w|}e^{i\theta})$, $-\pi < \theta \leq +\pi$, puis utiliser un développement en série en distinguant les cas $R > |w|$ et $R < |w|$. Ou encore invoquer la fonction $\mathrm{Log}(z/w)$.

Correction ▼ [002813]

Exercice 5931

Soit $0 < a < b$ sur l'axe réel positif et soit $C = \{|z| = r\}$ le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Montrer :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{a-b} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

On pourra réduire la fraction en élément simples, puis se ramener au résultat de l'exercice précédent. Ou encore, on pourra envisager des développements en séries, pour se ramener par étapes aux intégrales $\int_C z^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002814]

Exercice 5932

Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

en développant par la formule du binôme et en utilisant les valeurs connues de $\int_C z^k dz$, $k \in \mathbb{Z}$. En déduire $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n t\,dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$ pour n pair :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} t\,dt = \frac{1.3.\cdots.(2m-1)}{2.4.\cdots.(2m)}\,\frac{\pi}{2}$$

Correction ▼ [002815]

Exercice 5933

On pose $J_m = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t\,dt$, pour $m \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties J_{m+1} obtenir la relation de récurrence $J_{m+1} = \frac{2m+2}{2m+3} J_m$ et prouver :[7]

$$J_m = \frac{2.4.\cdots.(2m)}{3.5.\cdots.(2m+1)}$$

[002816]

Exercice 5934

En utilisant $I_{m+1} \leq J_m \leq I_m$, obtenir :

$$\frac{2m+1}{2m+2}\,\frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2} \leq \frac{2}{\pi} \leq \frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2}$$

En déduire la formule de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{1.3}{2.2}\,\frac{3.5}{4.4}\cdots\frac{(2m-1).(2m+1)}{(2m).(2m)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4m^2}\right)$$

[7] par convention lorsque qu'un produit porte sur un ensemble vide il vaut 1. Donc la formule est bien compatible avec $J_0 = 1$.

[002817]

Exercice 5935

Justifier le réarrangement suivant (qui découle aussi du terme de gauche dans l'inégalité de l'exercice précédent) : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\frac{3.3.5.5....}{2.4.4.6....} = \frac{1}{2}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)^{-1}$, soit encore :

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right).$$

[002818]

Exercice 5936

Justifier également sur la base des formules précédentes les équivalents asymptotiques :

$$\binom{2m}{m} \sim_{m\to\infty} \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\cdots(m+\frac{1}{2})}{1.2.\cdots.m} \sim 2\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

$$\frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

[002819]

307 443.00 Singularité

Exercice 5937

À l'aide de la formule

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

où f est méromorphe dans un domaine contenant le contour simple Γ, et a est un point intérieur à Γ, montrer que l'on a

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{x^n e^{xz}}{n!z^{n+1}}\,dz$$

où C est le cercle unité de (x^2+1). En déduire que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta.$$

Correction ▼ [002680]

308 444.00 Théorème des résidus

Exercice 5938

Calculer par la méthode des résidus

$$I = \int_0^{\pi}\frac{a\,d\varphi}{a^2+\sin^2\varphi} \qquad (a>0)$$

Correction ▼ [002672]

Exercice 5939

Calculer les intégrales

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^4+x^2+1}\,dx.$$

Correction ▼ [002673]

Exercice 5940

Calculer par la méthode des résidus l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\, d\theta.$$

Correction ▼ [002674]

Exercice 5941

Développer la fonction

$$\phi(x) = \frac{1}{2-\cos x}$$

en série de Fourier, en calculant les coefficients par la méthode des résidus.

Correction ▼ [002675]

Exercice 5942

Résoudre l'équation $\cos z = a$, où a est un réel > 1. Donner le sinus des solutions. En déduire la valeur de

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(a-\cos x)}.$$

Correction ▼ [002676]

Exercice 5943

Soit $a \in [0,1[$ un réel. En intégrant $e^{az}/\cosh z$ le long du rectangle de sommets $-R$, $+R$, $R+i\pi$, $-R+i\pi$, montrer que l'on a

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\, dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Correction ▼ [002677]

Exercice 5944

En intégrant e^{2iaz-z^2} le long du rectangle de sommets 0, R, $R+ia$, ia, et en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

(On admettra la formule $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.)

Correction ▼ [002678]

Exercice 5945

Soit R une fraction rationnelle, ou plus généralement une fonction méromorphe sur (x^2+1), sans pôle réel.

– On souhaite calculer

$$I = \int_0^{+\infty} xR(x^4)\, dx$$

Montrer que cela peut se faire par la méthode des résidus, en intégrant sur un contour formé du bord du quart de cercle $\{0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, |z| < a\}$.

– Application : calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^8}\, dx.$$

– Plus généralement, montrer que si n et p sont des entiers, et $p \geq 3$, on peut calculer

$$I(n,p) = \int_0^{+\infty} x^n R(x^p)\,dx$$

sous une condition sur n, p que l'on précisera.

– Application : calculer

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{2p}}\,dx.$$

Correction ▼ [002679]

Exercice 5946

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$. Déterminer en tout $z_0 \in \Omega$ la série de Taylor de la fonction holomorphe $z \mapsto \operatorname{Log} z$ ainsi que son rayon de convergence. Soit z_0 avec $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Soit R_0 le rayon de convergence pour z_0 et soit $f(z)$ la somme de la série dans $D(z_0, R_0)$. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ dans $D(z_0, R_0)$?

Correction ▼ [002820]

Exercice 5947

On considère la fonction analytique $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ sur l'ouvert U complémentaire de $\pi\mathbb{Z}$. Vérifier que la fonction $\sin(z)$ ne s'annule jamais sur U. Déterminer en tout $z_0 \in U$ donné le rayon de convergence du développement en série de Taylor de f. *Remarque :* il est déconseillé de chercher à résoudre ce problème en déterminant explicitement les coefficients des séries de Taylor.

Correction ▼ [002821]

Exercice 5948

Soient f et g deux fonctions entières avec $\forall z\ f(z)g(z) = 0$. Montrer que l'une des deux est identiquement nulle.

Correction ▼ [002822]

Exercice 5949

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert **convexe** U. Soit $z_1 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_1 est R_1. De même, en $z_2 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est R_2. Soit g_1 sur le disque ouvert $D(z_1, R_1)$ la somme de la série de Taylor de f en z_1 et de même g_2 sur $D(z_2, R_2)$. Soit $V = D(z_1, R_1) \cap D(z_2, R_2)$. Montrer que si V est non vide alors $g_1 = g_2$ sur V. On commencera par montrer que $V \cap U$ est non vide aussi. *Attention* : en général, sans hypothèse spéciale comme la convexité de U cela est complètement faux ; donner un exemple, avec U connexe, mais pas convexe, tel que $g_1 \neq g_2$ sur V (et on peut même faire avec $V \cap U \neq \emptyset$). Il suffira d'utiliser l'exercice 5946.

Correction ▼ [002823]

Exercice 5950

1. Soit Ω l'ouvert habituel sur lequel est défini $\operatorname{Log} z$. Justifier pour tout $z \in \Omega$

$$\operatorname{Log}(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)}dt\ ,$$

et donner une formule intégrale explicite pour le reste $R_N(z)$ dans :

$$\operatorname{Log}(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{(z-1)^N}{N} + R_N(z)\ .$$

2. On suppose $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$ pour un certain $\delta \in]0,1[$. Prouver :

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}$$

On minorera $|1+t(z-1)|$ par δ.

3. En déduire que la série de Taylor de Log au point 1 est uniformément convergente sur le compact $\{|z-1| \leq 1, \delta \leq \operatorname{Re}(z)\}$.

4. Pour $-\pi < \phi < +\pi$ on pose $z = 1 + e^{i\phi}$. Déterminer les coordonnées polaires $|z|$ et $\mathrm{Arg}(z)$ de z en fonction de ϕ. Déduire de ce qui précède les identités suivantes, pour tout $\phi \in]-\pi, +\pi[$:

$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\phi}{k}$$
$$\frac{\phi}{2} = \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\phi}{k}$$

et le fait que ces séries sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[-\pi + \varepsilon, +\pi - \varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$.

Correction ▼ [002824]

Exercice 5951

1. Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle.
2. Plus fort : on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \le \theta \le \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. *Indication :* $f(z)f(-z)$.

Correction ▼ [002825]

Exercice 5952

Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

Correction ▼ [002826]

Exercice 5953

Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \le \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \ge 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

Correction ▼ [002827]

Exercice 5954

1. Soit f analytique sur un disque $|z - z_0| \le R$ et telle qu'il existe un certain z_1 avec $|z_1 - z_0| < R$ tel que $|f(z)| > |f(z_1)|$ pour $|z - z_0| = R$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. *Indication :* considérer sinon ce que dit le principe du maximum pour la fonction $\frac{1}{f}$.
2. *Théorème de Hurwitz.* Soit f_n des fonctions holomorphes sur un voisinage commun U de $\overline{D(0,1)}$ qui convergent uniformément sur U. Soit F la fonction limite. On suppose que F n'a aucun zéro sur le cercle $|z| = 1$, et qu'elle a au moins un zéro dans le disque ouvert $D(0,1)$. Montrer en appliquant la question précédente à f_n que pour $n \gg 1$ la fonction f_n a au moins un zéro dans $D(0,1)$.[8] Ce résultat est souvent appliqué sous sa forme réciproque : *si des fonctions holomorphes f_n sans zéro convergent uniformément sur un ouvert connexe vers F alors soit F est identiquement nulle soit F n'a aucun zéro.* Justifier cette dernière reformulation.

[002828]

Exercice 5955

Montrer que si une fonction entière f a sa partie réelle bornée supérieurement alors elle est constante (considérer $\exp(f)$).

Correction ▼ [002829]

Exercice 5956

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \le M(1 + |z|)^n$ pour un certain M et un certain $n \in \mathbb{N}$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme de degré au plus n :

– en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,

[8] On verra plus tard en cours ou en exercice que pour $n \gg 1$ chaque f_n a, comptés avec leurs multiplicités, exactement le même nombre de zéros que F dans $D(0,1)$.

– en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geq n+1$,
– en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z) - P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

Correction ▼ [002830]

Exercice 5957

Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = +\infty$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme :

– en montrant, par un théorème du cours, que $w = 0$ est une singularité polaire de $g(w) = f(\frac{1}{w})$, et en en déduisant qu'il existe un polynôme P tel que $f(z) - P(z)$ tende vers 0 pour $|z| \to \infty$, puis Liouville,
– ou en montrant que f n'a qu'un nombre fini de zéros z_j, $1 \leq j \leq n$, et en appliquant à $(z - z_1) \dots (z - z_n)/f(z)$ le résultat de l'exercice précédent, plus quelques réflexions de conclusion pour achever la preuve.

Montrer que la fonction entière $z + e^z$ tend vers l'infini le long de tout rayon partant de l'origine. D'après ce qui précède $z + e^z$ est donc un polynôme. Commentaires ?

Correction ▼ [002831]

Exercice 5958

Déterminer les séries de Laurent et les résidus à l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

Correction ▼ [002832]

Exercice 5959

Déterminer la série de Laurent à l'origine de la fonction analytique $\exp(\frac{1}{z})$, et son résidu à l'origine. En $z_0 \neq 0$ quel est le résidu de cette fonction ?

Correction ▼ [002833]

Exercice 5960

Déterminer la partie singulière, le résidu, et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{sh} z}$
3. $f(z) = \frac{1}{z \sin(z) \operatorname{sh}(z)}$

Correction ▼ [002834]

Exercice 5961

Déterminer les séries de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points 0, 1, 2, et 3. Quels sont les résidus en $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ et $z = 3$?

Correction ▼ [002835]

Exercice 5962

Montrer que tout lacet est homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [002836]

Exercice 5963

Justifier les affirmations du polycopié relatives à l'invariance de l'indice d'un lacet par rapport à un point, lorsque l'on déforme continûment soit le lacet, soit le point. Montrer que lorsque γ est un lacet il existe R tel que $|z| > R \implies \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0$.

Correction ▼ [002837]

Exercice 5964

1. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un lacet et soit $N \in \mathbb{Z}$ son indice par rapport à 0. En utilisant la notion de variation de l'argument, montrer qu'il existe une fonction continue $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\forall t \quad \gamma(t) = e^{g(t)}$ et $g(1) - g(0) = 2\pi i N$. Montrer que toute autre fonction continue G avec $\forall t \quad \gamma(t) = e^{G(t)}$ est de la forme $g + 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On pose $h(t,u) = (1-u)\, 2\pi i N t + u g(t)$ puis $H(t,u) = e^{h(t,u)}$. Montrer que pour chaque $u \in [0,1]$ l'application $t \mapsto H(t,u)$ est un lacet. En déduire que le lacet $c_N(t) = e^{2\pi i Nt}$ et γ sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. On considère le lacet obtenu en suivant d'abord c_N puis c_M. Montrer que ce lacet est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ au lacet c_{N+M} (il suffit de calculer son indice !).

Correction ▼ [002838]

Exercice 5965

On considère un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (donc ne passant pas par l'origine). On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de $t \in [a,b]$ avec $\gamma(t) \in \Delta =]-\infty, 0[$. On les note $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$. Pour simplifier on supposera que $\gamma(a)$ est sur Δ, donc $t_0 = a$ et $t_N = b$. Montrer que pour $t = t_j - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le signe μ_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j - \varepsilon))$ ne dépend pas de ε, et de même pour le signe μ'_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j + \varepsilon))$ (préciser ce que l'on fait pour $j = 0$ et $j = N$).

Si $\mu_j = +$ et $\mu'_j = -$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens direct, si $\mu_j = -$ et $\mu'_j = +$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens rétrograde. Sinon on dit que γ touche mais ne traverse pas Δ. En utilisant la relation entre la fonction $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ et la variation de l'argument de $\gamma(t)$ sur chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, prouver $\Delta_{\gamma_j} \arg(z) = \pi(\mu_{j+1} - \mu'_j)$ avec $\gamma_j = \gamma$ restreint à $[t_j, t_{j+1}]$.

En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ est égal au nombre de valeurs de t (a et b ne comptent que pour un seul) pour lesquelles γ traverse Δ, comptées positivement si la traversée est directe, négativement si la traversée est rétrograde.

Dans la pratique vous pourrez utiliser n'importe quelle demi-droite issue de l'origine à la place de Δ à partir du moment où elle n'intersecte le lacet γ qu'en un nombre fini de points (si on n'impose pas au lacet d'être régulier, c'est-à-dire d'avoir un vecteur vitesse partout non nul, alors il peut rester figé en un même point un certain temps, et donc il faut modifier un petit peu la discussion ci-dessus qui suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de t pour lesquels $\gamma(t)$ est sur la demi-droite). [002839]

Exercice 5966

Justifier les formules suivantes : lorsque f présente en z_0 un pôle simple on a :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Lorsque f présente en z_0 un pôle d'ordre au plus N on a :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z)$$

Correction ▼ [002840]

Exercice 5967

1. Soit g une fonction analytique ayant un zéro simple en z_0, et f une autre fonction analytique définie dans un voisinage de z_0. Montrer
$$\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} .$$
2. On suppose que g a un zéro d'ordre n : $g(z_0 + h) = h^n (c_0 + c_1 h + \dots)$, $c_0 \neq 0$, et l'on écrit $f(z_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots$. Montrer :
$$\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0) = e_{n-1}$$
avec e_0, e_1, ..., obtenus par la division suivant les puissances croissantes (comme dans les calculs de développement limités) :
$$\frac{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots}{c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots} = e_0 + e_1 h + e_2 h^2 + \dots .$$

[002841]

Exercice 5968

Soit $0 < a < b < c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$ selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

Correction ▼ [002842]

Exercice 5969

Soit $\mathscr{R} = \{x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$ un rectangle. En utilisant le théorème des résidus justifier la formule intégrale de Cauchy pour z dans l'intérieur du rectangle et f holomorphe sur le rectangle fermé :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathscr{R}} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Démontrer ce résultat de manière plus simple, directement à partir du théorème de Cauchy-Goursat pour les fonctions holomorphes sur les rectangles, en utilisant la fonction $w \mapsto (f(w)-f(z))/(w-z)$ (et aussi la notion d'indice d'un lacet). Dans le cas où z est à l'*extérieur* du rectangle $\mathscr{R}$, que vaut $\int_{\partial\mathscr{R}} \frac{f(w)}{w-z}dw$? [002843]

Exercice 5970

Soit Ω un domaine, de bord le cycle $\partial\Omega$ orienté dans le sens direct. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, soient z_1 et z_2 deux points de Ω. Que vaut

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \ ?$$

Qu'obtient-on pour $z_2 \to z_1$, z_1 fixé ?

Correction ▼ [002844]

Exercice 5971

Que vaut, en fonction de $R>0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2-5z+2} \ ?$$

On précisera les valeurs exclues de R.

Correction ▼ [002845]

Exercice 5972

Déterminer, C désignant tour à tour le cercle $|z-i|=1$, ou le cercle $|z+i|=1$, ou encore $|z|=2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

Même question pour :

$$\int_C \frac{1}{z^3-1}dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^4-1}dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^5-1}dz$$

[002846]

Exercice 5973

Que vaut $\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\,dz$, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$?

Correction ▼ [002847]

Exercice 5974

Déterminer pour A, B, C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de :

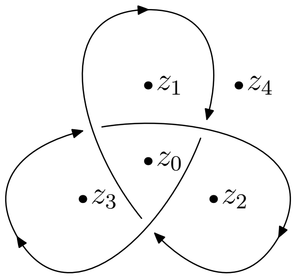
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin\theta + C\cos\theta}$$

On aura intérêt, comme première étape, à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$, mais on peut aussi se frotter plus directement au résidu (utiliser bien sûr $z = e^{i\theta}$ ou dans ce genre).

Correction ▼ [002848]

Exercice 5975

On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué.



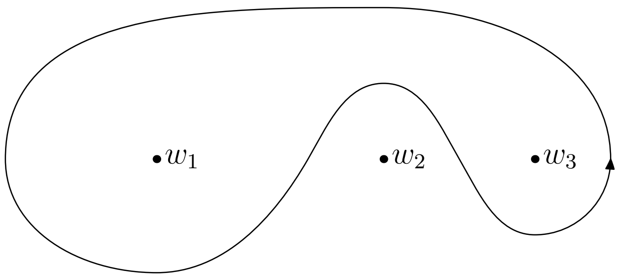
Pour $j = 0,1,2,3,4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0\dots 4$. [002849]

Exercice 5976

Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-contre.



Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$$

$$B = \int_\gamma \sin(z)dz$$

$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z-w_1)^2(z-w_3)}$$

[002850]

Exercice 5977

Prouver pour $a > 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta}d\theta = \frac{\sqrt{a^2-1}-a}{\sqrt{a^2-1}}$$

En utilisant l'un des exercices précédents montrer que la formule a un sens et est valable pour $a \in \mathbb{C}\setminus[-1,+1]$.

Correction ▼ [002853]

Exercice 5978

Que vaut en fonction de $R > 0$

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2+1}{z^3-z^2-4z+4}dz\ ?$$

[002854]

Exercice 5979

Soit $P(z) = Az^4 + \dots$ un polynôme de degré au plus 4. Montrer que $\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{z^5-1}\,dz$ est indépendant de R pour $R > 1$. En faisant tendre R vers l'infini en déduire que cette valeur constante est $2\pi iA$. Prouver alors via le théorème des résidus : $A = \frac{1}{5}\sum_{w^5=1} wP(w)$. [002855]

Exercice 5980 Résidu à l'infini

Soit f une fonction analytique pour $\{|z| > R\}$. On pose :

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)dz$$

avec C_r le cercle $\{|z| = r\}$ parcouru dans le sens direct. Montrer que le terme de droite est bien indépendant de $r > R$. On notera le signe $-$. On dit que $\operatorname{Res}(f,\infty)$ est le "résidu à l'infini" de f. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées. Montrer le théorème suivant : *la somme de tous les résidus (y compris celui à l'infini) de f est nulle.* [002856]

Exercice 5981

Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}\setminus\{z_1,\dots,z_N\}$, avec Ω le domaine intérieur à une courbe de Jordan γ. Soit $g_n(z)$ la partie principale (partie singulière) de f en la singularité isolée z_n. Prouver *la formule intégrale générale de Cauchy* :

$$\forall z \in \Omega\setminus\{z_1,\dots,z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1\le n\le N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

Pour cela, remarquer d'abord $\operatorname{Res}(\frac{f(w)}{w-z}, z_n) = \operatorname{Res}(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n)$; puis montrer que le résidu à l'infini de la fonction $\frac{g_n(w)}{w-z}$ de $w \in \mathbb{C}\setminus\{z_n\}$, est nul. On pourra utiliser l'exercice 5980.

Correction ▼ [002857]

Exercice 5982 Morceaux de Résidus

Soit f présentant en z_0 un *pôle simple*. Soit $C_r(\alpha,\beta)$ l'arc de cercle $w = z_0 + re^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le \beta$, parcouru dans le sens direct des θ et avec $0 < \beta-\alpha \le 2\pi$. Prouver :

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\operatorname{Res}(f,z_0)$$

Que se passe-t-il si le pôle est d'ordre plus élevé ?

Correction ▼ [002858]

Exercice 5983 Lemme de Jordan

Soit f une fonction définie et continue sur le domaine $\{\operatorname{Im}(z) > 0, |z| > R\}$, ou seulement sur une suite de demi-cercles $\{\operatorname{Im}(z) > 0, |z| = R_n\}$ de rayons tendant vers l'infini. On suppose $\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \operatorname{Im}(z)>0}} |f(z)| = 0$ (ou $\lim_{n\to\infty}\sup_{\operatorname{Im}(z)>0,\,|z|=R_n} |f(z)| = 0$.) Montrer (on utilisera $\sin(\theta) \ge \frac{2}{\pi}\theta$ pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{z=Re^{i\theta},\,0<\theta<\pi} f(z)e^{iz}\,dz = 0 \qquad \text{(ou l'analogue avec les } R_n)$$

Correction ▼ [002859]

Exercice 5984

En considérant l'intégrale de $\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour allant de $-R$ à $+R$ le long de l'axe réel en contournant 0 par un petit demi-cercle, puis qui revient de $+R$ à $-R$ par le demi-cercle dans le demi-plan supérieur, démontrer $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Correction ▼ [002860]

Exercice 5985

Déterminer les intégrales (semi-convergentes) de Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ en considérant l'intégrale de $\exp(-z^2)$ sur le contour $z = x$, $0 \le x \le R$, $z = R\exp(i\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $R \ge x \ge 0$. On rappelle l'identité $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$.

Correction ▼ [002861]

Exercice 5986

Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$? (faire un changement de variable $t = \pi u^2$ pour se ramener à la Gaussienne). En considérant un contour passant par l'axe réel, puis un quart de cercle, puis l'axe imaginaire, puis un petit quart de cercle évitant l'origine prouver :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \exp(i\frac{\pi}{4})\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}dx$$

et en déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ (qui ne sont que semi-convergentes). Comparer aux intégrales de Fresnel.
[002862]

Exercice 5987

Reprendre l'exercice précédent et déterminer pour $0 < a < 1$ les valeurs des intégrales (semi-convergentes)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx$$

en utilisant la fonction Gamma. À propos prouver que ces intégrales ne sont que semi-convergentes (*i.e.* pas absolument convergentes).
[002863]

Exercice 5988

Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue (Arctan… !) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment $[-R,+R]$ et le semi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, pour $R \to +\infty$. [002864]

Exercice 5989

Justifier $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2}dx$ pour $\xi \in \mathbb{R}$. Prouver par un calcul de résidu

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx = \pi e^{-|\xi|}\,.$$

Suivant le cas $\xi \geq 0$ ou $\xi < 0$ on complètera le segment $[-R,+R]$ par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour $R \to \infty$. On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de ξ et que l'on peut donc se restreindre à $\xi \geq 0$. [002865]

Exercice 5990

Prouver, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}(\pi e^{-|\xi|})d\xi = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Il suffit d'évaluer séparément $\int_{-\infty}^0$ et $\int_0^\infty$ en utilisant le fait que exp est sa propre primitive (ce calcul n'utilise donc pas la notion de fonction analytique et le théorème des résidus). On remarquera que l'on retombe sur la fonction $1/(1+x^2)$, ce qui n'est pas un hasard (formule d'inversion pour les transformations intégrales de Fourier). [002866]

Exercice 5991

Déterminer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx$$

[002867]

Exercice 5992

Préciser pourquoi $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4}dx$ est une intégrale convergente pour $\xi \in \mathbb{R}$, est une fonction réelle et paire de ξ, et utiliser un calcul de résidus pour établir, pour $\xi \geq 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi/\sqrt{2}}\sin(\frac{\xi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4})$$

Cette formule est-elle valable pour $\xi < 0$? [002868]

Exercice 5993

1. Déterminer
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$
Pour ce calcul, on considérera le contour allant le long de l'axe réel de 0 à R puis de R à jR le long d'un cercle puis de jR à 0 par un segment ($j=\exp(i\frac{2\pi}{3})$). On écrira d'une part chacune des trois contributions à l'intégrale de contour, en faisant attention au sens de parcours, et l'on utilisera d'autre part le théorème des résidus.
2. On note, pour $|w|=1$ et certaines valeurs spéciales de w (que l'on précisera) étant exclues, $J(w)$ l'intégrale $\int \frac{dz}{1+z^3}$ le long du segment infini $w\mathbb{R}^+$. Déterminer $J(w)$ en fonction de w.

[002869]

Exercice 5994

1. Prouver pour $n \in \mathbb{N}$, $n>1$:
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$
en utilisant le secteur angulaire $0 \leq \mathrm{Arg} z \leq \frac{2\pi}{n}$, $0 \leq |z| \leq R$, $R \to +\infty$, et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour $R \to +\infty$.
2. Montrer, en utilisant les contours $\varepsilon \leq x \leq R$, $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{a})$, $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$ $(R \geq r \geq \varepsilon)$, $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\frac{2\pi}{a} \geq \theta \geq 0)$:
$$a \in \mathbb{R},\ a>1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}\ .$$
Pour définir z^a comme fonction holomorphe sur $\{z = re^{i\alpha} \,|\, 0<r<\infty,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{a}\}$, on pose $z^a = r^a e^{a\,i\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$ (car $\log r + i\alpha = \mathrm{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + i\frac{\pi}{a}$; no comments).
3. Soit $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a}$; justifier que l'intégrale définissant $J(a)$ est convergente et analytique comme fonction de a pour $\mathrm{Re}(a)>1$ et prouver $J(a) = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$.
4. On définit maintenant
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$$
pour $0<p<1$. Justifier les identités (pour $0<p<1$) :
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p} J(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$
5. Expliquer pourquoi l'intégrale $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ est convergente et analytique pour p complexe avec $0<\mathrm{Re}(p)<1$ et établir la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour $0<\mathrm{Re}(p)<1$.
6. Donner une preuve simple directe de la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour tout p complexe avec $0<\mathrm{Re}(p)<1$ en appliquant le théorème des résidus avec des contours liés aux droites $z=x$, $x \in \mathbb{R}$ et $z = x+2\pi i$, $x \in \mathbb{R}$.
7. Déduire de ce qui précède avec $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\mathrm{ch}(t/2)} dt = \frac{2\pi}{\mathrm{ch}(\pi\xi)}\ ,$$
Montrer que la transformation de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)\,dx$ appliquée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi x)}$ donne simplement $\widehat{f} = f$ (remarque : c'est aussi le cas avec $f(x) = e^{-\pi x^2}$).
8. On revient à la formule générale $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. En séparant parties réelles et imaginaires dans $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ déterminer (en simplifiant le plus possible) les valeurs de :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t} dt \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\sin(vt)}{1+e^t} dt\ ,$$
pour $0<u<1$, $v \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [002879]

Exercice 5995

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}\,dx$. [002880]

Exercice 5996

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$. [002881]

Exercice 5997

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx$. [002882]

---

309 445.00 Tranformée de Laplace

310 446.00 Autre

Exercice 5998

Le but de ce problème est d'établir les deux formules importantes :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \quad \frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N\to+\infty\\ M\to+\infty}} \sum_{\substack{-M\le n\le N\\ n\ne 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$$

$$\forall z\in\mathbb{C} \qquad \sin(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \pi z\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z-n}$ (regarder les sommes partielles pour les indices pairs).
2. On pose $f(w)=\frac{\pi}{\sin\pi w}$. Soit $z\notin\mathbb{Z}$ fixé, soit $N>|z|-\frac{1}{2}$ et $\mathscr{R}_N$ le carré $\{|x|\le N+\frac{1}{2},\ |y|\le N+\frac{1}{2}\}$, et $C_N=\partial\mathscr{R}_N$ son bord parcouru dans le sens direct. Exprimer $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(w)}{w-z}dw$ à l'aide du Théorème des résidus.
3. Montrer $\int_{C_N}\frac{f(w)}{w}dw=0$ (on notera que f est impaire) et en déduire :
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{\pi}{\sin\pi w}\,\frac{z}{w(w-z)}dw$$
4. On rappelle l'identité $\sin(w)=\sin(x)\operatorname{ch}(y)+i\cos(x)\operatorname{sh}(y)$ pour $w=x+iy$. Montrer $|\sin w|^2=\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y$ ($x,y\in\mathbb{R}\ldots$). En déduire $|\sin(\pi w)|=\operatorname{ch}(\pi y)\ge 1$ sur les bords verticaux du carré et $|\sin(\pi w)|\ge\operatorname{sh}(\pi(N+\frac{1}{2}))\ge\operatorname{sh}(\pi\frac{1}{2})=2.301\cdots\ge 1$ sur les bords horizontaux. Conclure la preuve de
$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$$
avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.
5. Reprendre la même technique et prouver :
$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \quad \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N\le n\le N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\ ,$$
avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.
6. On veut maintenant prouver : $\sin(\pi z)=\lim_{N\to\infty}\pi z\prod_{n=1}^{N}(1-\frac{z^2}{n^2})$ On fixe une fois pour toutes $R>0$, et on va montrer la formule pour $|z|<R$. Soit N avec $N>R$ et notons $f_N(z)=\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\prod_{n=1}^{N}(1-\frac{z^2}{n^2})$, prolongé par continuité en les n, $|n|\le N$. Montrer que f_N est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(0,R)$.
7. Soit $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}^*$ le chemin $\gamma(t)=f_N(tz)$. On a donc $\gamma(0)=1$, $\gamma(1)=f_N(z)$, et $\gamma(t)\ne 0$ pour tout t. Par un théorème démontré en cours (lequel ?) on a $\gamma(1)=\gamma(0)\exp\left(\int_\gamma\frac{dw}{w}\right)$. En déduire $f_N(z)=\exp\left(\int_0^1\frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)}z\,dt\right)$.
8. Soit $\varepsilon>0$. En utilisant la convergence uniforme pour $|z|$ borné du développement en fractions de $\pi(\pi z)$, montrer que pour N suffisamment grand, on a $|f_N'(w)|\le\varepsilon|f_N(w)|$ pour tout $w\in D(0,R)$, puis en déduire
$$N\gg 0 \quad |z|<R \implies \quad |f_N(z)|\le e^{\varepsilon|z|}\le e^{\varepsilon R}$$

9. En déduire $\lim_{N\to\infty} f_N(z) = 1$, uniformément sur $D(0,R)$. Conclure la preuve du produit infini de Euler pour $\sin(z)$.

[002870]

Exercice 5999 Produit absolument convergent

Soit u_n, $n \geq 1$ des nombres complexes. Montrer : $1+\sum_{n=1}^{N}|u_n| \leq \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|) \leq e^{\sum_{n=1}^{N}|u_n|}$. En déduire que la suite croissante $\prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$ a une limite finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < \infty$. On suppose maintenant être dans ce cas, et de plus $\forall n\ 1+u_n \neq 0$. Montrer alors $\sum_{n=1}^{\infty}|\mathrm{Log}(1+u_n)| < \infty$, et en déduire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge. On conviendra donc de dire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est "absolument convergent" si $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < \infty$, et on vient donc de prouver qu'un produit absolument convergent est convergent. C'est principalement, la seule chose que vous ayez à savoir sur ce sujet. [002871]

Exercice 6000

Pour quelles valeurs de p (réel) $\prod_{k=1}^{\infty}(1+k^{-p})$ converge ? [002872]

Exercice 6001

Étant admis que $\sin(\pi z) = \pi z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}$$

et justifier la convergence absolue du produit. [002873]

Exercice 6002

Étant admis $\sin(\pi z) = \pi z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{k=-N,k\neq 0}^{+N}\frac{z-k}{-k} ,$$

puis établir pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$:

$$\sin(\pi(z-\alpha)) = -\sin(\pi\alpha)\lim_{N\to\infty}\prod_{k=-N}^{+N}\left(1-\frac{z}{\alpha+k}\right)$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on remplace dans le produit $-N$ par $-N\pm 1$ ou $+N$ par $+N\pm 1$. En déduire :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(\frac{1}{2}+k)^2}\right)$$

avec un produit absolument convergent. [002874]

Exercice 6003

On rappelle la formule $\pi(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{+N}\frac{1}{\alpha-k}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Montrer :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha-z))}{\sin(\pi\alpha)} = e^{-\pi(\pi\alpha)z}\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha+k}\right)e^{\frac{z}{\alpha+k}}$$

avec un produit absolument convergent. [002875]

Exercice 6004

Établir la convergence et évaluer les produits infinis suivants :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$$

Les trois premiers s'obtiennent par des réarrangements simples. Pour le dernier, utiliser le produit infini de $\sin z$. [002876]

Exercice 6005

On suppose $\sum_{n\geq 1}|u_n|^2 < \infty$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \mathrm{Log}(1+u_n)$ sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes (on suppose $\forall n\ u_n \neq -1$). Donc si $\sum_{n\geq 1}|u_n|^2 < \infty$ le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est convergent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. [002877]

Exercice 6006

Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{i}{k})$ diverge tandis que $\prod_{k=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{k}\right|$ converge. [002878]

Exercice 6007

Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111}+3z^{50}+1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. *Indication :* utiliser le théorème de Rouché en écrivant $P(z) = 3z^{50}+(z^{111}+1)$ et calculer P' pour s'assurer que les racines avec $|z| < 1$ sont simples.

Correction ▼ [002883]

Exercice 6008

Déterminer l'image par $z \mapsto \frac{3z+5}{z+2}$ du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine ; de la droite imaginaire, de la droite d'équation $x = y$, de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en -2.

Correction ▼ [002884]

Exercice 6009

Question de cours : quels sont les automorphismes de $D(0,1)$ avec 0 comme point fixe ? [002885]

Exercice 6010

Soit α avec $|\alpha| < 1$. On sait que $z \mapsto \phi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha}z}$ est un automorphisme du disque unité $D(0,1)$. Trouver z_1 et z_2 avec $\phi_\alpha(z_1) = z_2$, $\phi_\alpha(z_2) = z_1$. Deux points distincts arbitraires z_1 et z_2 étant donnés dans $D(0,1)$, montrer qu'il existe un automorphisme les échangeant et que cet automorphisme est unique à une rotation près (on se ramènera au cas où l'un des points est l'origine).

Correction ▼ [002886]

Exercice 6011

Trouver l'unique automorphisme du premier quadrant qui échange $1+i$ et $2+2i$. On remarquera que $z \mapsto z^2$ est une bijection analytique du premier quadrant sur le demi-plan supérieur, et que l'on peut donc ramener le problème à une question dans le demi-plan supérieur.
[002887]

Exercice 6012

Soit f holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $|f(w)| \leq 8$ pour tout $|w| \leq 1$ et $f(\frac{3}{4}) = 0$. Montrer $|f(0)| \leq 6$. *Indication :* trouver un automorphisme ϕ du disque avec $\phi(0) = \frac{3}{4}$ et utiliser le Lemme de Schwarz pour la fonction $\frac{1}{8}f(\phi(z))$. Trouver le z avec $\phi(z) = 0$.
[002888]

311 450.00 Interpolation polynomiale

312 451.00 Courbe de Bézier, spline

313 452.00 Intégration numérique

314 453.00 Méthode de Newton

315 454.00 Résolution d'équation différentielle

316 455.00 Résolution de systèmes linéaires : méthode directe

317 456.00 Résolution de systèmes linéaires : méthode itérative

318 457.00 Résolution de systèmes linéaires : méthode de gradient

319 458.00 Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres

320 459.00 Autre

Exercice 6013 Matrices triangulaires élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on définit les matrices suivantes dans $\mathbb{R}^{n\times n}$:
- E_{ij} matrice avec un 1 dans la position (i,j) et 0 partout ailleurs ;
- $V_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}, i > j$;
- $L(l_i) = I + l_i e_i^T$, $l_i \in \mathbb{R}^n$ tel que ses premières i composantes sont nulles.

1. Quels sont les résultats des opérations suivantes sur la matrice A :
$$B = V_{ij}(\lambda)A, C = AV_{ij}(\lambda)?$$
2. Quelle est la forme de la matrice
$$V_{ij}(\lambda)V_{kj}(\lambda'), k > i?$$
3. Représenter $L(l_i)$ et montrer que $L(l_i)^{-1} = L(-l_i)$.
4. Décomposer $L(l_i)$ comme produit de matrices de la forme $V_{km}(\lambda)$.
5. Calculer $L = \prod_{i=1}^{n-1} L(l_i)$ et son inverse L^{-1}
6. On suppose les l_i stockés dans un tableau bidimensionnel Z et $b \in \mathbb{R}^n$ stocké dans un tableau unidimensionnel B. Donner un algorithme permettant de calculer dans B la solution de $Lx = b$:
   (a) en utilisant l'expression de L^{-1} ;
   (b) en résolvant le système triangulaire.

   Quelle est la conclusion ?

Correction ▼ [002210]

Exercice 6014 Quelques identités pour le calcul d'inverses

Démontrer l'identité
$$(A+UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I+BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}$$
en précisant :
- son domaine de validité ;
- les types des matrices A, U, B, V.

Quelques cas particuliers :

1. Supposons $B = \beta$ scalaire, $U = u \in \mathbb{R}^n$, $V = v^T \in \mathbb{R}^n$. Retrouver la formule de Shermann–Morrison qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.

2. Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ régulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $1 + v^T A^{-1} u = 0$. Montrer que

$$B = \begin{pmatrix} A + uv^T & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \text{ est régulière.}$$

Calculer B^{-1} en remarquant que

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T & 1 \end{bmatrix}$$

3. Soit

$$D = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \text{ matrice inversible avec } P \in \mathbb{R}^{p\times p}, Q \in \mathbb{R}^{p\times q}, S \in \mathbb{R}^{q\times q}$$

Calculer D^{-1} en remarquant que

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q \\ S - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

4. *Calcul récursif de l'inverse* : on pose

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{bmatrix} \text{ avec } A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$

Utiliser la formule précédente pour calculer A_n^{-1} en fonction de A_{n-1}^{-1}. En déduire un algorithme récursif pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée de taille n.

Correction ▼ [002211]

Exercice 6015 Quelques propriétés des normes matricielles

1. Soit A une matrice d'ordre (m,n). Démontrer les inégalités suivantes pour les normes p, $p = 1, 2, \infty$ et la norme de Frobenius :
   (a) $\|A\|_2 \le \|A|_F \le \sqrt{n}\|A|_2$
   (b) $\max|a_{ij}| \le \|A\|_2 \le \sqrt{mn}\max|a_{ij}|$
   (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$
   (d) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$
2. Soit $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $E = uv^T$. Montrer que

$$\|E\|_F = \|E\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$$

$$\|E\|_\infty = \|u\|_\infty\|v\|_1$$

Correction ▼ [002212]

Exercice 6016

Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors
– $I - A$ est régulière ;
– $(I-A)^{-1} = \lim_{k\to\infty} C_k$ avec $C_k = I + A + \cdots + A^k$.

Correction ▼ [002213]

Exercice 6017 Estimation de l'erreur dans le calcul de l'inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible et B une approximation de A^{-1} On pose $X = I - AB$ et on suppose que $\|X\| < 1$. Montrer que

$$\|A^{-1} - B\| \le \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

Correction ▼ [002214]

Exercice 6018 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Soient
– H =span$\{v_1, \cdots, v_r\}$ le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\{v_i\}$ supposés indépendants ;

– $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{bmatrix}$ la matrice de type $n \times r$ dont les colonnes sont les composantes des v_i dans la base canonique $\varepsilon = (e_1, \cdots, e_n)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on désigne par y sa projection orthogonale sur H et par X et Y les matrices colonnnes des composantes de x et y dans la base ε. On pose

$$y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i.$$

1. Montrer que la matrice $G = G(v_1, \cdots, v_r) = V^T V$ est inversible.
2. Montrer que les α_i vérifient le système
$$G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = V^T X$$
3. En déduire que $Y = VG^{-1}V^T X = PX$ avec $P = VG^{-1}V^T$ (P est donc la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur H
4. *Application* : on considère $n = 3, v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2 + e_3$. Déterminer la projection orthogonale sur $H = \text{span}\,\{v_1, v_2\}$ de $x = 2e_1 - e_2 + e_3$.
5. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur H =span $\{v\}$?
6. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^n$
$$d^2(x, H) = \frac{\det G(x, v_1, \cdots, v_r)}{\det G(v_1, \cdots, v_r)}$$

[002215]

Exercice 6019

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang $r \leq p = \min(m, n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^T AV = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_p)$$

où les σ_i sont les valeurs singulières de A

1. Montrer que $\text{Im}(A) = \text{span}\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ et $\text{Ker}(A) = \text{span}\{v^{r+1}, \cdots, v^n\}$.
2. Montrer que $\text{Im}(^T A) = \text{span}\{v^1, u^2, \cdots, v^r\}$ et $\text{Ker}(A^T) = \text{span}\{u^{r+1}, \cdots, u^m\}$.
3. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A^T)$, $\text{Ker}(A^T)$ à l'aide de U et V.
4. *Application :* calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
et les matrices correspondantes aux projections orthogonales de l'exercice précédent.

Correction ▼ [002216]

Exercice 6020 Pseudo–inverse d'une matrice

Définition : Soit Σ une matrice diagonale de type $(m \times n)$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & \bigcirc & & & \end{pmatrix}$$

On appelle pseudo–inverse de Σ la matrice $\Sigma^\dagger$ de type $(n \times m)$ définie par

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & 0 & \\ & \ddots & & \bigcirc \\ 0 & & \mu_r^{-1} & \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice de type $(m \times n)$ dont la décomposition en valeurs singulières est $A = U\Sigma V^*$.

On appelle *pseudo-inverse* de la matrice A la matrice $A^\dagger$ de type $(n \times m)$ définie par

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*.$$

1. Quelle application représente la restriction de $\Sigma^{\dagger}\Sigma$ au sous-espace $\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_r\}$?
2. Montrer que si A est carrée régulière alors $A^{\dagger} = A^{-1}$.
3. Montrer que
$$A^{\dagger} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} v_i u_i^{*}.$$
4. Montrer que
   – $AA^{\dagger}$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$;
   – $A^{\dagger}A$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A^{*})$
5. Montrer que la restriction à $\mathrm{Im}(A^{*}) = \mathrm{Ker}(A)^{\perp}$ de $A^{*}A$ est une matrice inversible et
$$(A^{*}A)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-2} v_i v_i^{*}.$$

Correction ▼ [002217]

Exercice 6021

Montrer que, pour $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

1. $\|A\|_2 = \sigma_1$, la plus grande valeur singulière de A
2. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$ où les σ_i sont les valeurs singulières de A.
3. Les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrés des valeurs propres non nulles de $A^{*}A$ et AA^{*}.
4. pour $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$.
5. Si $A = A^{*}$ alors les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A

Correction ▼ [002218]

Exercice 6022

Montrer que

1. $\mathrm{cond}_2(A) = \mu_n(A)/\mu_1(A)$ avec $\mu_n(A)$ et $\mu_1(A)$ respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A ;
2. si A est normale alors
$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|};$$
3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale alors
$$\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(AQ) = \mathrm{cond}_2(QA)$$

Correction ▼ [002219]

Exercice 6023

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$

1. Calculer $\mathrm{cond}_2(A)$, $\mathrm{cond}_1(A)$ et $\mathrm{cond}_\infty(A)$;
2. Résoudre :
   – $Ax = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
   – $Ay = b + \delta b$ pour $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ pour $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
3. Pour chacune des trois normes considérées, trouver une majoration théorique de
$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \text{ et } \frac{\|z-x\|}{\|x\|}$$
et comparer avec les valeurs exactes. Quelle conclusion ?

[002220]

Exercice 6024 Conditionnement du problème de l'inversion d'une matrice

Soit A une matrice inversible donnée.

1. si $(A+\delta A)$ est une matrice inversible, démontrer

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|}\leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

2. Démontrer que

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1+\mathcal{O}(\|A\|))$$

Correction ▼ [002221]

Exercice 6025 Taille des éléments dans l'élimination de Gauss

Notons $\tilde{A}_k$ la matrice carrée d'ordre $(n-k+1)$ formée des éléments $a^k_{ij}, k\leq i,j\leq n$ de la matrice $A_k=(a^k_{ij})$ obtenue come résultat de la $(k-1)$–ème étape de l'élimination de Gauss. On suppose $A=A_1$ symétrique définie positive.

1. Notant $(.,.)$ le produit scalaire euclidien et $v'\in\mathbb{R}^{n-k}$ le vecteur formé par les $(n-k)$ dernières composantes d'un vecteur $v=(v_i)_{i=k}^n\in\mathbb{R}^{n-k+1}$ quelconque, établir l'identité

$$(\tilde{A}_k v,v)=(\tilde{A}_{k+1}v',v')+\frac{1}{a^k_{kk}}\left|a^k_{kk}v_k+\sum_{i=k+1}^n a^k_{ik}v_i\right|^2.$$

2. Montrer que chaque matrice $\tilde{A}_k$ est symétrique définie positive.
3. Etablir les inégalités suivantes :

$$0<a^{k+1}_{ii}\leq a^k_{ii},\quad k+1\leq i\leq n$$
$$\max_{k+1\leq i\leq n} a^{k+1}_{ii}=\max_{k+1\leq i,j\leq n}\left|a^{k+1}_{ij}\right|\leq \max_{k\leq i,j\leq n}\left|a^k_{ij}\right|=\max_{k\leq i\leq n} a^k_{ii}$$

Correction ▼ [002222]

Exercice 6026 Stratégie de pivotage

1. Montrer que pour une matrice quelconque $A=(a_{ij})$ de type (2×2) on a

$$\operatorname{cond}_2(A)=\sigma+(\sigma^2-1)^{1/2}\text{ avec }\sigma=\frac{\sum_{i,j=1}^2|a_{ij}|^2}{2|\det(A)|}$$

2. Calculer les conditionnements $\operatorname{cond}_p(.)$ pour $p=1,2,\infty$ des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire

$$\begin{cases}10^{-4}u_1+u_2=1\\ u_1+u_2=2\end{cases}$$

selon que l'on commence, ou non, par échanger les deux équations. Conclusion ?

[002223]

Exercice 6027 Factorisation LU d'une matrice bande

Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bande au sens suivant :

$$a_{ij}=0\text{ pour }|i-j|\geq p\Rightarrow\begin{cases}l_{ij}=0 & \text{pour } i-j\geq p\\ u_{ij}=0 & \text{pour } j-i\geq p\end{cases}$$

Correction ▼ [002224]

Exercice 6028 Factorisation d'une matrice symétrique

Soit A une matrice symétrique inversible admettant une factorisation LU. Montrer que l'on peut écrire A sous la forme

$$A=B\tilde{B}^T\text{ où}$$

– B est une matrice triangulaire inférieure ;
– $\tilde{B}$ est une matrice où chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à la colonne correspondante de B changée de signe.

Application numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [002225]

Exercice 6029 Quelques factorisations LU

1. Soit $A = LU$ la décomposition LU d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $|l_{ij}| \leq 1$. Soient a_i^T et u_i^T les lignes i de A et U respectivement. Montrer que
$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$
et que
$$\|U\|_\infty \leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$$
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que A a une décomposition LU avec $|l_{ij}| \leq 1$ et $u_{nn} = 2^{n-1}$.

[002226]

Exercice 6030

On suppose $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible. Montrer que si $PA\Pi = LU$ est obtenue par la méthode de Gauss avec pivotage total, alors

$$\forall i, j = 1, \cdots, n \ \ |l_{ij}| \leq 1$$
$$\forall i = 1, \cdots, n, \forall j = i, \cdots, n, \quad |u_{ij}| \leq |u_{ii}|$$

[002227]

Exercice 6031

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que A^T soit à diagonale strictement dominante. Montrer que A admet une décomposition LU avec L^T à diagonale strictement dominante.

Correction ▼ [002228]

Exercice 6032 Matrices de Householder

1. Soit v un vecteur réel vérifiant $v^T v = 1$. Montrer que la matrice de Householder
$$H(v) = I - 2vv^T$$
représente une symétrie par rapport au sous–espace vectoriel formé par les vecteurs orthogonaux aux vecgteurs v. En déduire que $\det(H(v)) = -1$.
2. Démontrer que toute matrice orthogonale est le produit de au plus n matrices de Householder. En déduire une interprétation géométrique des matrices orthogonales.

Correction ▼ [002229]

Exercice 6033 Algorithme de Gram–Schmidt et Gram–Schmidt modifié

Etant donnés n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^m$, $\{a_1, \cdots, a_n\}$, on veut calculer une base orthonormale pour $\text{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$. On pose $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et on considère la factorisation QR de A,

$$A = QR, \quad Q = [q_1, \cdots, q_n], \ \ r_i^T, i = 1, \cdots, n \text{ les lignes de } R$$

1. Montrer que
$$\text{Im}A = \text{span}\{q_1, \cdots, q_n\}.$$

2. Montrer que
$$q_k = \frac{1}{r_{kk}}\left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i\right) \quad k = 1,\cdots,n$$
3. En déduire un algorithme pour le calcul récursif des q_i (algorithme de Gram–Schmidt).
4. Algorithme de Gram–Schmidt modifié
L'algorithme précédent est instable numériquement dû à la perte d'orthogonalité dans le calcul des q_i. On va reformuler l'algorithme pour le rendre stable.
Pour $k = 1,\cdots,n-1$, on définit $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{m\times(n-k+1)}$ de la façon suivante :
$$[0, A^{(k)}] = A - \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_i^T = \sum_{i=k}^{n} q_i r_i^T$$
et on va décrire l'étape k de l'algorithme.
   (a) Montrer que si on pose
   $$A^{(k)} = [z, B], \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^{m\times(n-k)}$$
   alors
   $$r_{kk} = \|z\|_2, \quad q_k = z/r_{kk}.$$
   (b) Comment peut–on calculer la ligne k de R à partir de $A^{(k)}$?
   (c) Calculer $A^{(k+1)}$.
   (d) A partir des questions précédentes, décrire l'algorithme qui permet le calcul de la factorisation $A = Q_1R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ orthonormale, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire supérieure (Gram–Schmidt modifié). Le calcul de Q_1 doit se faire sur place.
   (e) Quelle est la complexité de l'algorithme précédent ?

Correction ▼ [002230]

Exercice 6034 Rotation de Givens

Soient $p,q : 1 \le p < q \le n$, $c,s \in \mathbb{R} : c^2 + s^2 = 1$.
On considère les matrices
$$G = G_{p,q}(c,s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & \cdots & -s & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & s & \cdots & c & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & \cdots & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire G comme perturbée de I par des matrices de rang 1.
2. Montrer que G est inversible, calculer G^{-1}, montrer que G est orthogonale.
3. Quelle est l'action de G sur $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?
4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $a_{pj} = \alpha, a_{qj} = \beta$. Peut–on trouver G telle que $A' = GA$ vérifie :
$$a'_{pj} = 0 = \alpha', \quad a'_{qj} = 0 = \beta'?$$
Est–ce que la solution est unique ?

Correction ▼ [002231]

Exercice 6035

Soit $Z = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ avec $c^2 + s^2 = 1$. On définit ρ par
$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c = 0 \\ 1/2\text{sign}(c)s & \text{si} \quad |s| < |c| \\ 2\text{sign}(s)/c & \text{si} \quad |c| \le |s| \end{cases}$$

1. Comment reconstruire $\pm Z$ à partir de ρ ?
2. Soit Q une matrice orthogonale produit de n rotations de Givens : $Q = J_1 \cdots J_n$. Comment peut–on stocker de la façon la plus économique Q sous forme factorisée ?

3. Modifier l'algorithme de Givens pour réduire A à la forme triangulaire supérieure ($QA = R$, Q matrice produit de rotations de Givens) en stockant sur place (donc dans A) toute l'information nécessaire à reconstruire Q.
4. Ecrire l'algorithme qui, à partir des résultats de l'algorithme précédent permet de reconstruire Q.

[002232]

Exercice 6036

Soient x et y deux vecteurs unitaires. Donner un algorithme qui utilise les transformations de Givens pour calculer une matrice Q telle que $Qx = y$. [002233]

Exercice 6037 Méthode de Givens Rapide

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On veut construire une matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ telle que

– $MA = S$ triangulaire supérieure ;
– $MM^T = D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_m)$, $d_i > 0$

et appliquer cette factorisation de A dans la résolution de systèmes au sens des moindres carrés.

1. Donner la factorisation QR de A en termes de M, D et S.
2. On considère maintenant $m = 2$. Soient $x = (x_1, x_2)^T$ et $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ ($d_i > 0$) donnés.
   (a) On définit
   $$M_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$
   Supposons $x_2 \neq 0$. Calculer $M_1 x$ et $M_1 D M_1^T$.
   Comment choisir α_1 et β_1 de façon à ce que la deuxième composante de $M_1 x$ soit nulle et que $M_1 D M_1^T$ soit diagonale ?
   Pour le choix précédent déterminer γ_1 tel que
   $$M_1 x = \begin{pmatrix} x_2(1+\gamma_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_1 D M_1^T = \begin{pmatrix} d_2(1+\gamma_1) & 0 \\ 0 & d_1(1+\gamma_1) \end{pmatrix}$$
   (b) Supposons $x_1 \neq 0$. On définit
   $$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Choisir α_2 et β_2 de façon à ce que
   $$M_2 x = \begin{pmatrix} x_1(1+\gamma_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 D M_2^T = \begin{pmatrix} d_1(1+\gamma_2) & 0 \\ 0 & d_2(1+\gamma_2) \end{pmatrix}$$
   et déterminer γ_2
   (c) Montrer que l'on peut toujours choisir M_i ($i = 1, 2$) de façon à ce que le "facteur de croissance" $(1+\gamma_i)$ soit inférieur à 2.
3. Soit maintenant $m \in \mathbb{N}$ quelconque. Définir les matrices $M_1(p,q)$ et $M_2(p,q)$ telles que
   $$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ ou } = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$
   – $e_q^T M_i(p,q) x = 0$;
   – $M_i D M_i^T$ matrice diagonale, avec $D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_n), d_i > 0$
   Ces matrices M_i sont appelées *matrice de Givens rapide*.
4. Décrire l'algorithme qui utilise les transformations de Givens rapides pour réduire $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ à la forme triangulaire supérieure (*méthode de Givens rapide*) :
   $$MA = R, \quad MM^T = \text{diag}(d_1, \cdots, d_m).$$
   Les calculs doivent être faits sur place.
   Quel est le coût de cet algorithme ? Comparer avec le coût de la méthode de Householder pour réduire A à la forme triangulaire supérieure.
5. Application à la résolution d'un système linéaire au sens des moindres carrés.
   (a) Comment profiter des résultats fournis par l'algorithme précédent pour résoudre
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \text{ avec } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad (m > n), \quad b \in \mathbb{R}^m?$$
   (b) Quelles modifications introduire dans l'algorithme de la méthode de Givens rapide pour qu'il résolve le problème de moindres carrés de la question précédente ?

6. *Application numérique* : résoudre au sens des moindres carrés par la méthode de Givens rapide le système

$$Ax = b, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

7. Considérons maintenant le problème de moindres carrés

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|D(Ax-b)\|_2 \qquad (13)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D =\mathrm{diag}(d_i)$ $(d_i > 0)$. Cela correspond à donner un poids différent à chaque équation du système.
Soit M une matrice produit de matrices de Givens rapide vérifiant

$$\begin{cases} MA = R \text{ triangulaire supérieure} \\ MD^{-2}M^T = \tilde{D} = \mathrm{diag}(\tilde{d_i}), \quad \tilde{d_i} > 0 \end{cases}$$

Comment peut–on résoudre le problème (13) ?
Quelles adaptations faire à l'algorithme précédent ?

Correction ▼ [002234]

Exercice 6038

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour qu'elles valeurs de a A est–elle définie positive ?
2. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Gauss–Seidel est–elle convergente ?
3. Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
4. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Jacobi converge–t–elle ?
5. Ecrire la matrice $\mathscr{L}_1$ de l'itération de Gauss–Seidel. Calculer $\rho(\mathscr{L}_1)$.
6. Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss–Seidel converge–t–elle plus vite que celle de Jacobi ?

[002235]

Exercice 6039

Soit A une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. Soit $B = I - M^{-1}A$ la matrice de l'itération :

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

Supposons que $M + M^* - A$ soit définie positive.

1. Soit x un vecteur quelconque et on pose $y = Bx$. Montrer l'identité :
$$(x,Ax) - (y,Ay) = ((x-y),(M+M^*-A)(x-y)).$$
2. Supposons que A est définie positive. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, $y = Bx = \lambda x$. Utiliser l'identité précédente pour montrer que $|\lambda| < 1$. Que peut–on conclure sur la convergence de la méthode ?
3. Supposons maintenant que $\rho(B) < 1$. montrer que A est définie positive.
4. Supposons A décomposée par points ou par blocs sous la forme
$$A = D - E - F \text{ avec } D \text{ définie positive.}$$
Montrer que la méthode de relaxation par points ou par blocs pour $0 < w < 2$ converge si et seulement si A est définie positive.

Correction ▼ [002236]

Exercice 6040

Soit $A = I - E - E^*$ une matrice carrée d'ordre N où E est une matrice strictement triangulaire inférieure ($e_{ij} = 0$ pour $i \leq j$). Pour résoudre le système $Ax = b$, on propose la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} (I-E)x_{2k+1} &= E^*x_{2k} + b \\ (I-E^*)x_{2k+2} &= Ex_{2k+1} + b \end{cases}$$

1. Déterminer B et c pour que l'on ait :
$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c.$$
Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ avec $M = (I-E)(I-E^*)$, $N = EE^*$.
2. Montrer que $M^* + N$ est une matrice définie positive. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode.

Correction ▼ [002237]

Exercice 6041

Soient A et B deux matrices réelles d'ordre N et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère les deux itérations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & By_k + a \\ y_{k+1} & = & Ax_k + b \end{array} \right. \quad k = 0, 1, \cdots \tag{14}$$
avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ donnés.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence des deux suites de vecteurs.
2. Soit $z_k = (x_k, y_k)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que (14) peut s'écrire
$$z_{k+1} = Cz_k + c$$
où C est une matrice d'ordre $2n$. Expliciter C et c.
3. Montrer que $\rho^2(C) = \rho(AB)$.
4. On considère maintenant les deux itérations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & By_k + a \\ y_{k+1} & = & Ax_{k+1} + b \end{array} \right. \quad k = 0, 1, \cdots \tag{15}$$
Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.
Montrer que (15) est équivalent à
$$z_{k+1} = Dz_k + d$$
où D est une matrice d'ordre $2N$.
Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.
5. **Taux de convergence**
On appelle taux de convergence asymptotique de la matrice itérative M le nombre
$$R(M) = -\ln(\rho(M))).$$
On pose $e^k = x^k - x^*$ l'erreur de l'itéré d'ordre k.
   (a) Montrer que le nombre d'itérations k pour réduire l'erreur d'un facteur ε , i.e., $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \varepsilon$ vérifie
$$k \geq \frac{-\ln \varepsilon}{R(M)}.$$
   (b) Comparer le taux de convergence des algorithmes (14) et (15).

Correction ▼ [002238]

Exercice 6042

On considère le système $Ax = b$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

1. Décomposer A sous la forme LU et en déduire que (16) admet une solution unique x^*.
2. Ecrire l'itération de Gauss–Seidel pour ce système, c'est–à–dire, le système linéaire donnant $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en fonction de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leq a\|e_n\|_\infty.$$
En déduire la convergence de la suite.
4. Déterminer la matrice de Gauss–Seidel $\mathcal{L}_1$ associée à A. Calculer $\|\mathcal{L}_1\|_\infty$. En déduire la convergence de (X_n) vers x^*.

5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\begin{array}{rcl} |a_{ij}| & \geq & \sum_{j\neq i}|a_{ij}| \;\; i=2,\cdots,n \\ |a_{11}| & > & \sum_{j\neq 1}|a_{1j}| \end{array}$$

et sur chaque ligne de A il existe il existe un terme non nul a_{ij} pour $i \geq 2$ et $j < i$.
Montrer qu'alors la méthode de Gauss–Seidel converge.

Correction ▼ [002239]

321 470.00 Fonction convexe

Exercice 6043

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n \in]0,+\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1\dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$.
2. Montrer que $(x_1\dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}$.
3. En déduire que $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$.

[001729]

Exercice 6044

Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$ convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f =$ tûûûûûût. [001730]

Exercice 6045

Soient p et $q \in]0,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Montrer que $\forall x,y>0\ xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$.
2. Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n>0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^n x_i^p = \sum\limits_{i=1}^n y_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i \leq 1$.
3. Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n>0$. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$
4. Soit $p>1$. En écrivant $(x_i+y_i)^p = x_i(x_i+y_i)^{p-1}+y_i(x_i+y_i)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski :
$$(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$
5. Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$ et $v_n=\sum\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$. Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) aussi.

[001731]

Exercice 6046

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

1. Montrer que f' admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (on pourra utiliser des ε et une formule de Taylor à l'ordre 1).

[001732]

Exercice 6047

$I \subset \mathbb{R}^{+*}$ un intervalle de $\mathbb{R}, J=\left\{x; \frac{1}{x}\in I\right\}$.

Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, puis que si $(x,y)\in I^2$, alors :

$$\forall \lambda \in [0,1], \exists \mu \in [0,1], \frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y} = \mu\frac{1}{x}+(1-\mu)\frac{1}{y}.$$

Soit f continue sur I, et g définie sur J par $g(x)=f(\frac{1}{x}), h$ définie sur I par $h(x)=xf(x)$. Montrer que g est convexe $\Leftrightarrow h$ est convexe.
[001733]

Exercice 6048

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$? [001734]

Exercice 6049

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}, u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2, v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors $(v_n)_n$ aussi. [001735]

Exercice 6050

Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall(x_1,...,x_n)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n, 1+\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(1+\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

[001736]

Exercice 6051

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe. [001737]

Exercice 6052

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ convexe ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0\in I$ et telle que $f'(x_0)=0$. Montrer que x_0 minimise f sur I.
[001738]

Exercice 6053

Soit $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que g est convexe si et seulement si :

$$\forall h\in CM([0,1],\mathbb{R}), g\left(\int_0^1 h\right)\leq\int_0^1 g(h).$$

[001739]

---

322 471.00 Multiplicateurs de Lagrange

323 472.00 Algorithme d’Uzawa

324 473.00 Algorithme du simplexe

325 474.00 Autre

326 480.00 Loi, indépendance, loi conditionnelle

327 481.00 Variance, covariance, fonction génératrice

328 482.00 Convergence de variables aléatoires

329 483.00 Lois des grands nombres, théorème central limite

330 484.00 Estimateur

331 485.00 Tests sur la moyenne, test du chi2

332 486.00 Chaînes de Markov

333 487.00 Autre

Indication pour l'exercice 3 ▲

Attention : la négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et réciproquement).

Indication pour l'exercice 6 ▲

Faire un dessin de F_1 et de F_2. Essayer de voir si la difficulté pour réaliser les assertions vient de ε "petit" (c'est-à-dire proche de 0) ou de ε "grand" (quand il tend vers $+\infty$).

Indication pour l'exercice 16 ▲

En fait, on a toujours : $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$. Puis chercher une condition sur n pour que l'inégalité

$$2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Il est plus facile de raisonner en prenant un élément $x \in E$. Par exemple, soit F, G des sous-ensembles de E. Montrer que $F \subset G$ revient à montrer que pour tout $x \in F$ alors $x \in G$. Et montrer $F = G$ est équivalent à $x \in F$ si et seulement si $x \in G$, et ce pour tout x de E. Remarque : pour montrer $F = G$ on peut aussi montrer $F \subset G$ puis $G \subset F$.

Enfin, se rappeler que $x \in \complement F$ si et seulement si $x \notin F$.

Indication pour l'exercice 53 ▲

Par l'absurde, supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Puis pour un tel p, évaluer f et f_p en une valeur bien choisie.

Indication pour l'exercice 54 ▲

Pour la première question vous pouvez raisonner par contraposition ou par l'absurde.

Indication pour l'exercice 58 ▲

1. Récurrence : calculer $x_{n+1} - 3$.
2. Calculer $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Récurrence.

Indication pour l'exercice 60 ▲

Pour les deux questions, travailler par récurrence.

Indication pour l'exercice 85 ▲

Un dessin permettra d'avoir une bonne idée de ce qui se passe...

Indication pour l'exercice 86 ▲

Il faut trouver l'erreur dans ce raisonnement, car bien sûr s'il y a trois axiomes pour la définition d'une relation d'équivalence, c'est que deux ne suffisent pas !

Indication pour l'exercice 88 ▲

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z.
2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.

Indication pour l'exercice 121 ▲

Prouver que l'égalité est fausse.

Indication pour l'exercice 137 ▲

1. f est injective mais pas surjective.
2. g est bijective.
3. h aussi.
4. k est injective mais par surjective.

Indication pour l'exercice 138 ▲

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$.
3. On pourra exhiber l'inverse.

Indication pour l'exercice 140 ▲

Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que $g \circ f$ est injective, soient $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc $a = a'$, donc f est injective."

Indication pour l'exercice 148 ▲

id est l'application identité définie par $id(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $f \circ f = id$ signifie $f \circ f(c) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Indication pour l'exercice 149 ▲

Montrer que la restriction de f définie par : $[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est une bijection. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

Indication pour l'exercice 151 ▲

Montrer que f est injective et surjective.

Indication pour l'exercice 161 ▲

Évaluer $(1+x)^n$ en $x = 1$, d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la deuxième égalité commencer par dériver $x \mapsto (1+x)^n$.

Indication pour l'exercice 163 ▲

Commencer par $2^n = (3-1)^n$.

Indication pour l'exercice 170 ▲

$1 + i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{2i\pi}{4}}$

Indication pour l'exercice 198 ▲

Tout d'abord faire un dessin (avec des patates !).

Pour A et B deux ensembles finis quelconques, commencer par (re)démontrer la formule : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.

Indication pour l'exercice 199 ▲

Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de $E \setminus A$?

Indication pour l'exercice 201 ▲

Petits rappels : dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" ($1 =$ As, $2, 3, \ldots, 10$, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est juste choisir 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'important pas.

Indication pour l'exercice 211 ▲

Si $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une telle partie avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, considérer l'ensemble $\{x_1 - 1, \ldots, x_p - p\}$.

Indication pour l'exercice 219 ▲

Coder un chemin par un mot : D pour droite, H pour haut.

Indication pour l'exercice 244 ▲

Il ne faut surtout pas chercher à calculer $15! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 15$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Indication pour l'exercice 245 ▲

Il faut travailler modulo 13, tout d'abord réduire 100 modulo 13. Se souvenir que si $a \equiv b \pmod{13}$ alors $a^k \equiv b^k \pmod{13}$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

Indication pour l'exercice 246 ▲

Attention le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Indication pour l'exercice 249 ▲

Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n \pmod 8$.

Indication pour l'exercice 280 ▲

1. Écrire $n = 2p + 1$.
2. Écrire $n = 2p$ et discuter selon que p est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrive comme un carré, par exemple $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ puis discuter selon que n est pair ou impair.

Indication pour l'exercice 323 ▲

Commencer par simplifier l'équation ! Ensuite trouver une solution particulière (x_0, y_0) à l'aide de l'algorithme d'Euclide par exemple. Ensuite trouver un expression pour une solution générale.

Indication pour l'exercice 374 ▲

Pour 1. utiliser l'égalité
$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1).$$

Pour 2. raisonner par contraposition et utiliser la question 1.

La question 3. est difficile ! Supposer $a \geq b$. Commencer par montrer que $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. Cela vour permettra de comparer l'agorithme d'Euclide pour le calcul de $\text{pgcd}(a,b)$ avec l'algorithme d'Euclide pour le calcul de $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1)$.

Indication pour l'exercice 375 ▲

Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Gauss.

Indication pour l'exercice 377 ▲

1. Écrire
$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$
et utiliser le lemme de Gauss ou le lemme d'Euclide.
2. Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a \pmod p$.

Indication pour l'exercice 379 ▲

1. Il faut être très soigneux : n est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur $k \in \mathbb{N}$.
2. Utiliser la question précédente avec $m = n + k$.
3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement N nombres premiers, considérer $N+1$ nombres du type F_i. Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez $N+1$ chaussettes rangées dans N tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*

Indication pour l'exercice 387 ▲

Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que n n'est pas de la forme 2^k, alors n admet un facteur irréductible $p > 2$. Utiliser aussi $x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{p-1})$ avec x bien choisi.

Indication pour l'exercice 408 ▲

Pour se "débarrasser" d'un dénominateur écrivez $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Indication pour l'exercice 410 ▲

Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l'on connait $\cos(2\theta)$ ou $\sin(2\theta)$ on sait calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication pour l'exercice 418 ▲

Passez à la forme trigonométrique. Souvenez-vous des formules sur les produits de puissances :
$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Indication pour l'exercice 420 ▲

Pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$.

Indication pour l'exercice 427 ▲

Utiliser la formule d'Euler pour faire apparaître des cosinus.

Indication pour l'exercice 441 ▲

Pour $z = a + ib$ on cherche $\omega = \alpha + i\beta$ tel que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$. Développez et indentifiez. Utilisez aussi que $|\omega|^2 = |z|$.

Indication pour l'exercice 443 ▲

Il s'agit de calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ de deux façons différentes.

Indication pour l'exercice 445 ▲

Pour les équation du type $az^4 + bz^2 + c = 0$, poser $Z = z^2$.

Indication pour l'exercice 469 ▲

Calculer $(1-z)S_n$.

Indication pour l'exercice 493 ▲

Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Indication pour l'exercice 502 ▲

Pour l'interprétation géométrique cherchez le parallélogramme.

Indication pour l'exercice 531 ▲

Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Indication pour l'exercice 715 ▲

Si $X^p - a = PQ$ avec $P, Q \in K[X]$ unitaires non constants, factoriser P dans (x^2+1) et considérer $P(0)$.

Indication pour l'exercice 729 ▲

Attention il y a une partie entière, la fraction s'écrit

$$\Phi = x + 1 + \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

Indication pour l'exercice 730 ▲

Il y a une partie entière qui vaut 2.

Indication pour l'exercice 853 ▲

1. E_1 est un espace vectoriel, sa dimension est 1.
2. E_2 n'est pas un espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 855 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.
5. E_5 n'est pas un espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 860 ▲

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion.

Indication pour l'exercice 891 ▲

On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indication pour l'exercice 892 ▲

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Un base comporte trois vecteurs.

Indication pour l'exercice 899 ▲

Soit montrer la double inclusion. Soit montrer une seule inclusion et faire un petit raisonnement sur les dimensions. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \text{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$ alors :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall i = 1,\ldots,n \quad e_i \in F.$$

Indication pour l'exercice 907 ▲

Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, et des indices $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) telsque

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Évaluer cette expression est des valeurs bien choisies.

Indication pour l'exercice 931 ▲

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux.
5. Vrai.

Indication pour l'exercice 932 ▲

1. Non.
2. Non.

Indication pour l'exercice 935 ▲

Soit

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Indication pour l'exercice 938 ▲

Pour une suite (u_n) qui converge vers ℓ regarder la suite $(u_n - \ell)$.

Indication pour l'exercice 958 ▲

1. Faux.
2. Vrai.

Indication pour l'exercice 996 ▲

Partir d'une base de $F \cap G$ et compléter cette base

Indication pour l'exercice 997 ▲

On peut utiliser des familles libres.

Indication pour l'exercice 1033 ▲

Une seule application n'est pas linéaire.

Indication pour l'exercice 1034 ▲

Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par φ^{n-1}.

Indication pour l'exercice 1048 ▲

Faire un dessin de l'image et du noyau pour $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 1061 ▲

Dire que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g signifie que $g(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$.

Indication pour l'exercice 1063 ▲

Montrer la double inclusion.

Indication pour l'exercice 1127 ▲

Pour une fonction f on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Indication pour l'exercice 1366 ▲

1. Raisonner par l'absurde.
2. Raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Ensuite plusieurs méthodes sont possibles par exemple essayer de montrer que p et q sont tous les deux pairs.
3. Considérer $r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ (faites un dessin !) pour deux rationnels r, r'. Puis utiliser les deux questions précédentes.

Indication pour l'exercice 1372 ▲

1. Calculer $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$ et utiliser le lemme de Gauss.
2. Utiliser la première question avec $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$.

Indication pour l'exercice 1374 ▲

1. Mutiplier N_n par une puissance de 10 suffisament grande pour obtenir un nombre entier.
2. Mutiplier M par une puissance de 10 suffisament grande (pas trop grande) puis soustraire M pour obtenir un nombre entier.

Indication pour l'exercice 1376 ▲

Raisonner par l'absurde !

Indication pour l'exercice 1379 ▲

Écrire la définition de la convergence d'une suite (u_n) avec les "ε". Comme on a une proposition qui est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, c'est en particulier vrai pour $\varepsilon = 1$. Cela nous donne un "N". Ensuite séparez la suite en deux : regardez les $n < N$ (il n'y a qu'un nombre fini de termes) et les $n \geqslant N$ (pour lequel on utilise notre $\varepsilon = 1$).

Indication pour l'exercice 1380 ▲

On prendra garde à ne pas parler de limite d'une suite sans savoir au préalable qu'elle converge !

Vous pouvez utiliser le résultat du cours suivant : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ alors toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.

Indication pour l'exercice 1397 ▲

Distinguer des cas.

Indication pour l'exercice 1398 ▲

$\inf A = 0$, A n'a pas de borne supérieure.

Indication pour l'exercice 1409 ▲

Il faut revenir à la définition de la borne supérieure d'un ensemble borné : c'est le plus petit des majorants. En particulier la borne supérieure est un majorant.

Indication pour l'exercice 1410 ▲

Deux propositions sont fausses...

Indication pour l'exercice 1428 ▲

Élever l'inégalité au carré.

Indication pour l'exercice 1434 ▲

1. $f(2) = f(1+1) = \cdots$, faire une récurrence.
2. $f((-n)+n) = \cdots$.
3. Si $q = \frac{a}{b}$, calculer $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b})$ avec b termes dans cette somme.
4. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, prendre une suite de rationnels qui croit vers x, et une autre qui décroit vers x.

Indication pour l'exercice 1459 ▲

1. Rappelez-vous que la partie entière de x est le plus grand entier, inférieur ou égal à x. Mais il est ici préférable de donner la définition de $E(x)$ en disant que $E(x) \in \mathbb{Z}$ et que x vérifie un certain encadrement...
2. Encadrer $E(kx)$, pour $k = 1, \ldots, n$.
3. Rappelez-vous d'abord de la formule $1+2+\cdots+n$ puis utilisez le fameux théorème des gendarmes.
4. Les u_n ne seraient-ils pas des rationnels ?

Indication pour l'exercice 1461 ▲

Dans l'ordre c'est vrai, faux et vrai. Lorsque c'est faux chercher un contre-exemple, lorsque c'est vrai il faut le prouver.

Indication pour l'exercice 1469 ▲

Écrire la convergence de la suite et fixer $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Une suite est *stationnaire* si, à partir d'un certain rang, elle est constante.

Indication pour l'exercice 1470 ▲

1. En se rappelant que l'intégrale calcule une aire montrer :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Pour chacune des majorations, il s'agit de faire la somme de l'inégalité précédente et de s'apercevoir que d'un coté on calcule H_n et de l'autre les termes s'éliminent presque tous deux à deux.
3. La limite est $+\infty$.
4. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
5. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 1474 ▲

Pour la deuxième question, raisonner par l'absurde et trouver deux sous-suites ayant des limites distinctes.

Indication pour l'exercice 1554 ▲

Pour la première question : attention on ne demande pas de calculer α ! L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité vient du fait que la fonction est strictement croissante.

Pour la dernière question : il faut d'une part montrer que (x_n) converge et on note ℓ sa limite et d'autre part il faut montrer que $\ell = \alpha$.

Indication pour l'exercice 1583 ▲

1.
2. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Indication pour l'exercice 1601 ▲

Remarquer que $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. Puis simplifier l'écriture de u_n.

Indication pour l'exercice 1607 ▲

1. C'est un calcul de réduction au même dénominateur.
2. Pour montrer la décroisance, montrer $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$.
3. Montrer d'abord que la suite converge, montrer ensuite que la limite est $\sqrt{a}$.
4. Penser à écrire $u_{n+1}^2-a=(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$.
5. Raisonner par récurrence.
6. Pour $u_0=3$ on a $u_1=3,166\ldots$, donc $3\leqslant\sqrt{10}\leqslant u_1$ et on peut prendre $k=0.17$ par exemple et $n=4$ suffit pour la précision demandée.

Indication pour l'exercice 1608 ▲

1. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2. Montrer que (u_n) est majorée et (v_n) minorée. Montrer que ces suites ont la même limite.
3. Raisonner par l'absurde : si la limite $\ell=\frac{p}{q}$ alors multiplier l'inégalité $u_q\leq\frac{p}{q}\leq v_q$ par $q!$ et raisonner avec des entiers.

Indication pour l'exercice 1609 ▲

Pour la première question et la monotonie il faut raisonner par récurrence. Pour la troisième question, remarquer que si f est décroissante alors $f\circ f$ est croissante et appliquer la première question.

Indication pour l'exercice 1610 ▲

1. Regarder ce que donne l'inégalité en élevant au carré de chaque coté.
2. Petites manipulations des inégalités.
3. (a) Utiliser 1.
   (b) Utiliser 2.
   (c) Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée aussi.

Indication pour l'exercice 1612 ▲

On notera $f_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x)=\sum_{k=1}^n x^k\ -1$.

1. C'est une étude de la fonction f_n.
2. On sait que $f_n(a_n)=0$. Montrer par un calcul que $f_n(a_{n-1})>0$, en déduire la décroissance de (a_n). En calculant $f_n(\frac{1}{2})$ montrer que la suite (a_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Une fois établie la convergence de (a_n) vers une limite ℓ, composer l'inégalité $\frac{1}{2}\leqslant\ell<a_n$ par f_n. Conclure.

Indication pour l'exercice 1847 ▲

1. On pourra utiliser la variante de l'inégalité triangulaire $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$.
2. Utiliser la première question pour montrer que $|f-g|$ est continue.

Indication pour l'exercice 1853 ▲

Ce n'est pas très dur mais il y a quand même quelque chose à démontrer : ce n'est pas parce que $f(x)$ vaut $+1$ ou -1 que la fonction est constante. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 1854 ▲

Il faut raisonner en deux temps : d'abord écrire la définition de la limite en $+\infty$, en fixant par exemple $\varepsilon = 1$, cela donne une borne sur $[A, +\infty]$. Puis travailler sur $[0, A]$.

Indication pour l'exercice 1861 ▲

Un *point fixe* est une valeur $c \in [0,1]$ telle que $f(c) = c$. Montrer que $c = \sup E$ est un point fixe. Pour cela montrer que $f(c) \leqslant c$ puis $f(c) \geqslant c$.

Indication pour l'exercice 1870 ▲

Non, trouver un contre-exemple.

Indication pour l'exercice 1877 ▲

1. On pourra montrer que $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a,b[$.
2. Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.

Indication pour l'exercice 1921 ▲

Le "ε" vous est donné, il ne faut pas y toucher. Par contre c'est à vous de trouver le "δ".

Indication pour l'exercice 1922 ▲

Distinguer trois intervalles pour la formule définissant f^{-1}.

Indication pour l'exercice 1923 ▲

Le seul problème est en $x = 0$. Montrer que la fonction est bien continue en ce point.

Indication pour l'exercice 1928 ▲

Oui pour le deux premières en posant $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, non pour la troisième.

Indication pour l'exercice 1931 ▲

Pour x fixé, étudier la suite $f(\frac{1}{2^n}x)$.

Indication pour l'exercice 1941 ▲

Utiliser l'expression conjuguée.

Indication pour l'exercice 1944 ▲

1. Raisonner par l'absurde.

2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes $f(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 1948 ▲

Réponses :

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite.
2. $-\infty$
3. 4
4. 2
5. $\frac{1}{2}$
6. 0
7. $\frac{1}{3}$ en utilisant par exemple que $a^3-1=(a-1)(1+a+a^2)$ pour $a=\sqrt[3]{1+x^2}$.
8. $\frac{1}{n}$

Indication pour l'exercice 1960 ▲

1. Calculer d'abord la limite de $f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$.
2. Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u=\cos x$.
3. Utiliser l'expression conjuguée.
4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x-\alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.
5. On a toujours $y-1 \leq E(y) \leq y$, poser $y=1/x$.
6. Diviser numérateur et dénominateur par $x-2$.
7. Pour $\alpha \geq 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha < 4$ la limite est $+\infty$.

Indication pour l'exercice 1967 ▲

Réponses : $0, \frac{1}{e}, e$.

1. Borner $\sin\frac{1}{x}$.
2. Utiliser que $\ln(1+t)=t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t)\to 1$ lorsque $t\to 0$.
3. Utiliser que $e^t-1=t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t)\to 1$ lorsque $t\to 0$.

Indication pour l'exercice 1969 ▲

Réponse : $\max(a,b)$.

Indication pour l'exercice 1970 ▲

Réponse : $\sqrt{ab}$.

Indication pour l'exercice 2051 ▲

Les problèmes sont seulement en 0 ou 1. f_1 est dérivable en 0 mais pas f_2. f_3 n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

Indication pour l'exercice 2052 ▲

Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

Indication pour l'exercice 2053 ▲

f est continue en 0 en la prolongeant par $f(0)=0$. f est alors dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Indication pour l'exercice 2054 ▲

On ne cherchera pas à utiliser la formule de Leibniz mais à linéariser les expressions trigonométriques.

Indication pour l'exercice 2077 ▲

Il faut appliquer le théorème de Rolle une fois au polynôme $(1-t^2)^n$, puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde,...

Indication pour l'exercice 2079 ▲

On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

Indication pour l'exercice 2080 ▲

C'est encore Rolle de nombreuses fois

Indication pour l'exercice 2086 ▲

1. Utiliser le théorème des accroissements finis avec la fonction $t \mapsto \ln t$
2. Montrer d'abord que f'' est négative. Se servir du théorème des valeurs intermédiaires pour f'.

Indication pour l'exercice 2087 ▲

Une fois le théorème des accroissements finis utilisé vous obtenez une somme téléscopique.

Indication pour l'exercice 2089 ▲

Le théorème des accroissements finis donne un résultat proche de celui souhaité à un facteur près. Pour obtenir la majoration demandée on peut utiliser le théorème de Rolle avec une fonction bien choisie.

Indication pour l'exercice 2135 ▲

On distinguera les cas $\lambda \geq 0$ et $\lambda < 0$. Pour le cas $\lambda < 0$ on considerera des sous-cas.

Indication pour l'exercice 2139 ▲

1. Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.
2. Calculer $h(a)$ et $h(b)$.
3. Appliquer la question 2. sur l'intervalle $[x,b]$.
4. Calculer f' et g'.

Indication pour l'exercice 2311 ▲

Faire un dessin. Remarquer que maximiser l'angle d'observation α revient à maximiser $\tan\alpha$. Puis calculer $\tan\alpha$ en fonction de la distance et étudier cette fonction.

Indication pour l'exercice 2312 ▲

On pourra étudier les fonctions définies par la différence des deux termes de chaque inégalité.

Indication pour l'exercice 2313 ▲

Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques. Pour la dernière expression commencer par calculer $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$.

Indication pour l'exercice 2315 ▲

On compose les équations par la bonne fonction, par exemple sinus pour la première.

Indication pour l'exercice 2318 ▲

Faire une étude de fonction.

$\operatorname{sgn}(x)$ est la *fonction signe* : elle vaut $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ (et 0 si $x = 0$).

Indication pour l'exercice 2354 ▲

1. Regarder ce qui se passe en deux valeurs opposées x et $-x$.
2. Poser $X = e^x$.

Indication pour l'exercice 2355 ▲

Réponses :

1. $\frac{3}{4}$;
2. $\ln 2$.

Indication pour l'exercice 2360 ▲

Il faut trouver $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos(y)}$, $\operatorname{sh} x = \tan y$, $\operatorname{th} x = \sin y$.

Indication pour l'exercice 2372 ▲

Montrer que l'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, puis étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Indication pour l'exercice 2405 ▲

Il faut se souvenir de ce que vaut la somme des n premiers entiers, la somme des carrés des n premiers entiers et de la somme d'une suite géométrique. La formule générale pour les sommes de Riemann est que $\int_a^b f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}).$$

Indication pour l'exercice 2406 ▲

1. On pourra penser que le cosinus et le sinus sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{it}$. On chercha donc d'abord à calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\, dt$.
2. On choisira q tel que $q^n = \frac{b}{a}$.

Indication pour l'exercice 2408 ▲

1. Revenir à la définition de la continuité en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ par exemple.
2. Soit f est tout le temps de même signe (et alors utiliser la première question), soit ce n'est pas le cas (et alors utiliser un théorème classique...).

3. On remarquera que $\int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2} = \int_a^b (f(t)-t)dt$.

Indication pour l'exercice 2409 ▲

Essayez d'encadrer $\int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n} dt$.

Indication pour l'exercice 2410 ▲

Il s'agit de montrer que la limite vaut 0. Pour un $\alpha > 0$ fixé on séparera l'intégrale en deux partie selon que f est plus petit ou plus grand que $1-\alpha$.

Indication pour l'exercice 2412 ▲

Se ramener à une composition de fonctions ou revenir à la définition de la dérivée avec le taux d'accroissement.

Indication pour l'exercice 2413 ▲

1. Soit faire comme l'exercice 2412, soit séparer l'intégrale en deux, et pour l'une faire un changement de variable $u = x^2$.
2. $H(x)$ se calcule explicitement et montrer qu'en fait H est une fonction constante, ensuite il faut comparer $H(x)$ et $F(x)$.

Indication pour l'exercice 2447 ▲

On pourra essayer de reconnître des sommes de Riemann. Pour le produits composer par la fonction ln.

Indication pour l'exercice 2490 ▲

1. Faire une intégration par parties pour I_{n+2}. Pour le calcul explicite on distinguera le cas des n pairs et impairs.
2. Utiliser la décroissance de I_n pour encadrer $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

Indication pour l'exercice 2497 ▲

1. Majorer par x^n.
2.
3. On pourra calculer $(I_0+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-\cdots$

Indication pour l'exercice 2501 ▲

Calculer la somme et la différence de ces deux intégrales.

Indication pour l'exercice 3449 ▲

Utiliser la formule de Bézout.

Indication pour l'exercice 3574 ▲

Montrer que l'ensemble des x tq $x^2 \neq e$ est de cardinal pair.

Indication pour l'exercice 3945 ▲

1.

2. $\dot{6}^2 = -\dot{1}$.

Indication pour l'exercice 4184 ▲

1. Raisonner à l'aide d'une fonction f de la variable x telle que $x+y=f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. Trouver deux courbes dans
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z); 2x^3+yz^2=0\}$$
qui tendent vers l'origine telle que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeurs distinctes.
3. Utiliser le fait que le numérateur et le dénominateur sont toujours positifs et que l'ordre du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur.
4. Raisonner à l'aide d'une fonction h de la variable y telle que $x^2-y^2=h(y)$ et $\lim_{y\to 0} h(y) = 0$.
5. Chercher deux courbes dans le domaine de définition qui tendent vers l'origine telle que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeures distinctes.

Indication pour l'exercice 4185 ▲

Diviser le numérateur et le dénominateur par x^2 resp. y^2 pour déterminer $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ resp. $\lim_{x\to 0} f(x,y)$. Montrer que, calculée le long d'une autre courbe convenable, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe et ne vaut pas zéro.

Indication pour l'exercice 4187 ▲

1. Réfuter l'existence de la limite à l'aide de l'étude des limites le long de deux courbes adaptées.
2. Utiliser les coordonnées polaires dans le plan.
3. Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ existe et est non nul alors
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{h(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)}.$$
4. Chercher deux courbes dans le domaine de définition qui tendent vers l'origine telles que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeures distinctes.

Indication pour l'exercice 4188 ▲

1. Raisonner à l'aide d'une fonction h des variables x et y telle que $x+y+z=h(x,y)$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$.
2. Montrer que, déjà sous la contrainte supplémentaire $z=0$, la limite ne peut pas exister.

Indication pour l'exercice 4193 ▲

Pour établir ou réfuter l'existences d'une limite particulière dans le plan et pour ensuite déterminer une limite pourvu qu'elle existe, utiliser le fait que pour que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)$ existe dans le plan $\mathbb{R}^2$ il faut et il suffit que chacune des limites $\lim_{n\to\infty} x_n$ et $\lim_{n\to\infty} y_n$ existe en tant que limite finie.

Indication pour l'exercice 4208 ▲

Il est évident que, en tout point (x,y) distinct de l'origine, la fonction f est continue et que les dérivées partielles y existent et sont continues. Il suffit de montrer que f est continue en $(0,0)$ et que les dérivées partielles y existent et y sont continues.

Indication pour l'exercice 4209 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 4211 ▲

Distinguer tout de suite la partie triviale et la partie non triviale de l'exercice.

Indication pour l'exercice 4231 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{17}$$

Dans le cas (1.), les calculs deviennt plus simples avec l'équation

$$z^2 = 19-x^2-y^2.$$

Indication pour l'exercice 4232 ▲

Ne pas confondre les variables pour l'équation de la surface, les variables pour l'équation de la tangente en un point, et les coordonnées du point de contact.

Indication pour l'exercice 4233 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{18}$$

Indication pour l'exercice 4234 ▲

Le vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ au point (x_0,y_0,z_0) est le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right). \tag{19}$$

Indication pour l'exercice 4235 ▲

Utiliser la version (18) de l'équation d'un plan tangent à une surface en un point.

Indication pour l'exercice 4236 ▲

Pour les majorations, utiliser les coordonnées polaires (r,φ) dans le plan. Distinguer tout de suite les parties triviales des parties non triviales de l'exercice.

Indication pour l'exercice 4237 ▲

Prendre

$$f(x,y) = \exp[\sin(\pi+x)\cos y] = \exp[-\sin x\cos y],$$
$$h(x,y) = \arctan[\sqrt{4+x}-2\exp(y)].$$

Indication pour l'exercice 4246 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpéter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 4247 ▲

Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

Indication pour l'exercice 4248 ▲

1. Utiliser les coordonnées polaires (r,φ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\log r = 0$.

Indication pour l'exercice 4249 ▲

1. Pour réfuter la différentiabilité de f en $(0,0)$, il suffit de trouver une dérivée directionnelle qui n'est pas combinaison linéaire des dérivées partielles (par rapport aux deux variables).
2. Le plan tangent au point $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ du graphe $z=f(x,y)$ de F est donnée par l'équation

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{20}$$

Indication pour l'exercice 4250 ▲

Calculer mène à la vérité.

Indication pour l'exercice 4251 ▲

Écrire $f(x,y)=(\sin(xy),y\cos x,xy\sin(xy)\exp(y^2))=(u,v,w)$.

Indication pour l'exercice 4310 ▲

Utiliser les règles

$$\begin{aligned} d(f+g) &= df+dg,\\ d(fg) &= fdg+gdf,\\ d(f\circ h) &= (f'\circ h)dh. \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 4311 ▲

Soient h, u, v des fonctions des deux variables x et y. Rappeler que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h &= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}(u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y) &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 4312 ▲

On va déterminer une primitive d'une forme différentielle de degré 1 par un changement de variables tel que, dans les nouvelles variables, la primitive soit presque évidente.

Indication pour l'exercice 4313 ▲

Rappeler que la matrice hessienne est la matrice constituée des dérivées partielles secondes.

Indication pour l'exercice 4314 ▲

1. Montrer que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}F.$$
2. Montrer que
$$r\frac{\partial F}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}.$$
3. Montrer que
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}$$
4. Utiliser ces résultats, puis calculer encore un peu pour obtenir le résultat souhaité.

Indication pour l'exercice 4315 ▲

1. Grace au changement de variables
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v)\longmapsto (x,y)=\left(\frac{u-v}{2},\frac{u+v}{2}\right),$$
la fonction f s'écrit $F(u,v)=f(\frac{u-v}{2},\frac{u+v}{2})$. Montrer que pour que f soit solution de (7) il faut et il suffit que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}=0. \tag{21}$$
2. Montrer que, si F satisfait à (21), il existe deux fonctions $g_1,g_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que
$$F(u,v)=g_1(u)+g_2(v).$$
3. Écrire la solution générale de (7) et expliquer la phrase : "En une dimension d'espace, toute solution de l'équation des ondes s'écrit comme somme d'une onde qui se déplace vers la droite et une qui se déplace vers la gauche."

Indication pour l'exercice 4319 ▲

Rappel : Pour qu'un point critique non dégénéré présente un maximum relatif (resp. minimum relatif) il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit négative (resp. positive) ; pour qu'un point critique non dégénéré présente un point selle il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit (non dégénérée et) indéfinie.

Indication pour l'exercice 4320 ▲

Voir l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 4321 ▲

Voir les exercices précédents.

Indication pour l'exercice 4322 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{22}$$

Indication pour l'exercice 4323 ▲

Rappel du théorème des fonctions implicites pour une fonction f de classe C^1 de deux variables définie dans un ouvert du plan : *Soit (x_0,y_0) un point tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Au voisinage de x_0, il existe une fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0)=y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y)=0$ il faut et il suffit que $y=h(x)$ et, s'il en est ainsi,*
$$h'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Dès que l'intervalle de définition de la fonction h est fixé la fonction h est unique.

Indication pour l'exercice 4324 ▲

Voir l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 4673 ▲

Utiliser le langage de la géométrie élémentaire, y compris les notions de surface de révolution, d'axe de révolution, de sommet d'un paraboloïde, de sommet d'un cône, de concavité vers le haut ou vers le bas, d'hélice, de spirale, etc.

Indication pour l'exercice 4674 ▲

Exploiter les propriétés géométriques des parties du plan qui définissent A_1 et A_2. Par exemple, une courbe qui est définie comme étant l'image réciproque d'un point relativement à une fonction continue est une partie fermée du plan.

Indication pour l'exercice 4675 ▲

Raisonner à partir de la définition d'un ouvert dans le plan.

Indication pour l'exercice 4676 ▲

Exploiter le fait que le complémentaire d'un ouvert est fermé et que le complémentaire d'un fermé est ouvert.

Indication pour l'exercice 4677 ▲

Distinguer la partie triviale de l'exercice de la partie non triviale. Dans cet exercice, le seul point délicat est pour le paramètre t proche de 0.

Indication pour l'exercice 4804 ▲

Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{1-X^n}$.

Indication pour l'exercice 4835 ▲

Considérer les disques fermés associée à un recouvrement « circulaire » du plan et mettre en évidence une suite de disques emboités dont les rayons tendent vers zéro.

Indication pour l'exercice 5408 ▲

Considérer la couleur des cases exclues.

Indication pour l'exercice 5409 ▲

Pour la question (II) (b) on considèrera la partie A_0 minimale associée à φ et l'on montrera que A_0 et $h(Y-g(A_0))$ forment une partition de X. La bijection sera définie par g sur A_0 et par h^{-1} sur $h(Y-g(A_0))$.

Indication pour l'exercice 5411 ▲

Ne voir dans le mot "rangée" qu'une condition d'alignement.

Indication pour l'exercice 5412 ▲

Compter, dans un ensemble E à n éléments, le nombre de parties à p éléments obtenues en réunissant une partie X à k éléments à une partie à $p-k$ éléments du complémentaire de X dans E, k décrivant $\{0,\dots,p\}$.

Indication pour l'exercice 5413 ▲

$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ et $24 = 2^3 \cdot 3$.

Indication pour l'exercice 5414 ▲

Les premières questions ne présentent aucune difficulté.

Pour la dernière, le plus difficile (et le plus intéressant) est de deviner la formule. Pour cela, calculer la puissance n-ième pour $n = 1,2,3,4,5\ldots$. (La formule est donnée dans la page "Corrections").

Indication pour l'exercice 5416 ▲

On pourra montrer les points suivants :

(a) $x \star y = e \Rightarrow y \star x = e$

(b) L'élément neutre à gauche est unique.

(c) L'élément neutre à gauche est un élément neutre à droite aussi.

(d) Tout élément est inversible.

Indication pour l'exercice 5417 ▲

Oui.

Indication pour l'exercice 5418 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5419 ▲

Pour l'existence d'un inverse pour toute matrice $n \times n$ de déterminant non nul, noter que $\det(A) \neq 0$ entraîne que la matrice A est inversible (comme matrice) et que la matrice A^{-1}, qui est de déterminant $1/\det(A) \neq 0$ est alors l'inverse de A pour le groupe en question.

Indication pour l'exercice 5420 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5422 ▲

Considérer la partition de G en sous-ensembles du type $\{x, x^{-1}\}$.

Indication pour l'exercice 5423 ▲

On commence par montrer que f est surjective, en notant que si $|G| = 2m+1$, alors pour tout $y \in G$ on a $y = (y^{m+1})^2$.

Indication pour l'exercice 5424 ▲

$x^m = a \Leftrightarrow x = a^u$ où $um + v|G| = 1$.

Indication pour l'exercice 5426 ▲

Standard.

Indication pour l'exercice 5429 ▲

Pour le (c), introduire le morphisme $\mathbb{Z} \to < x >$ qui associe nx à tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Ce morphisme est surjectif et de noyau $d\mathbb{Z}$ où d est l'ordre de x.

Indication pour l'exercice 5430 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5432 ▲

Conséquence de l'exercice 5431.

Indication pour l'exercice 5433 ▲

$\{1\}, \mu_2 \times \{1\}, \{1\} \times \mu_2, \{(1,1),(i,i)\}, \mu_2 \times \mu_2$.

Indication pour l'exercice 5435 ▲

Standard.

Indication pour l'exercice 5436 ▲

Pour la seconde question, noter que si x est d'ordre 2 dans G, alors yxy^{-1} l'est aussi, pour tout $y \in G$.

Indication pour l'exercice 5439 ▲

Commencer par analyser l'ordre possible des éléments de G.

Indication pour l'exercice 5441 ▲

Trouver l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$.

Indication pour l'exercice 5442 ▲

Trouver l'ordre de 2 modulo $2^n - 1$.

Indication pour l'exercice 5459 ▲

$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow xy = yx$.

Indication pour l'exercice 5466 ▲

(a) est standard. En utilisant (a), on obtient $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, lequel n'est pas cyclique puisque tous les éléments sont d'ordre 1, 2 ou 4. Le reste ne pose pas de grandes difficultés.

Indication pour l'exercice 5467 ▲

(a) Bézout. (b) ϕ est injectif et ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal.

Indication pour l'exercice 5469 ▲

$e^{2ik\pi/d} = \left(e^{2ik\pi/n}\right)^{n/d}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Indication pour l'exercice 5470 ▲

$f(G')$ est un sous-groupe de H isomorphe à $G'/(\ker(f) \cap G')$.

Indication pour l'exercice 5471 ▲

Résulte de l'exercice 5470.

Indication pour l'exercice 5474 ▲

Les morphismes du groupe $(\mathbb{Q},+)$ dans lui-même sont de la forme $x \to ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$. Les morphismes du groupe $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$ sont, parmi les précédents, ceux dont l'image est dans $\mathbb{Z}$; il n'y a que le morphisme nul. Les morphismes du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$ sont déterminés par l'entier $f(1)$ qui doit vérifier $mf(1) = 0$; il n'y a que le morphisme nul, si $m \neq 0$.

Indication pour l'exercice 5475 ▲

L'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien pour l'addition naturelle des morphismes. On note δ le pgcd de m et n et m' et n' les entiers m/δ et n/δ. Si $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ désigne la surjection canonique, la correspondance associant à tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ l'élément $f \circ p(1)$ induit un isomorphisme de groupe entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le sous-groupe $n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, lequel est isomorphe à $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe pour la composition. La correspondance précédente induit un isomorphisme entre $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 5478 ▲

Le morphisme "déterminant" de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^\times$ est surjectif et de noyau $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 5481 ▲

Si ζ est un élément de G dont la classe modulo H engendre G/H, alors tout élément de G peut s'écrire $h\zeta^m$ avec $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 5482 ▲

Appliquer l'exercice 5481 avec $H = Z(G)$.

Indication pour l'exercice 5484 ▲

Exercice classique d'algèbre linéaire : $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)) = \mathbb{F}_p^\times \cdot \mathrm{Id}_n$ (où Id_n désigne la matrice identité d'ordre n).

Indication pour l'exercice 5486 ▲

Les questions (a) et (b) ne présentent aucune difficulté.

Pour la question (c), noter que, pour tout $x \in G$, on a $(\tau_x)^{|G|} = 1$, et que la restriction de τ_x à H appartient à $\mathrm{Aut}(H) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (et utiliser l'exercice 5483).

Indication pour l'exercice 5487 ▲

Aucune difficulté. Observer que tout conjugué d'un commutateur est un commutateur et qu'un quotient G/H est abélien si et seulement si pour tous $u, v \in G$, on a $uvu^{-1}v^{-1} \in H$.

Indication pour l'exercice 5489 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5491 ▲

(a) est une simple vérification.

(b) Les trois permutations s'écrivent respectivement $(1\ 3\ 7\ 5)\ (2\ 6\ 4)$, $(1\ 7)\ (2\ 4\ 3)$ et $(2\ 3\ 7\ 6\ 5\ 4)$.

(c) est une simple vérification.

(d) **Rappel :** De façon générale, on dit qu'une permutation $\omega \in S_n$ est de type $1^{r_1}\text{-}2^{r_2}\text{-}\cdots\text{-}d^{r_d}$ où $d, r_1, \ldots, r_d$ sont des entiers ≥ 0 tels que $r_1 + \cdots + r_d = n$, si dans la décomposition de ω en cycles à support disjoints, figurent r_1 1-cycles (ou points fixes), r_2 2-cycles, ... et r_d d-cycles. En utilisant la question (c), il n'est pas difficile de montrer que deux permutations sont conjuguées dans S_n si et seulement si elles sont de même type. Les classes de conjugaison de S_n correspondent donc exactement à tous les types possibles.

On obtient ainsi facilement les classes de conjugaison de S_5. Soit maintenant H un sous-groupe distingué non trivial de S_5. Dès que H contient un élément de S_5, il contient sa classe de conjugaison ; H est donc une réunion de classes de conjugaison. En considérant toutes les classes possibles que peut contenir H, on montre que $H = A_5$ ou $H = S_5$. Par exemple, si H contient la classe 1-2-2, alors H contient $(1\ 2)\ (3\ 4) \times (1\ 3)\ (2\ 5) = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)$ et donc la classe des 5-cycles. D'après l'exercice 5490, H contient alors A_5. Le groupe H est donc A_5 ou S_5. Les autres cas sont similaires.

Indication pour l'exercice 5496 ▲

Une puissance impaire d'une permutation impaire ne peut pas être égale à 1.

Indication pour l'exercice 5500 ▲

(a) Aucune difficulté.

(b) Le nombre cherché est l'orbite de H sous l'action de G par conjugaison sur ses sous-groupes et $\mathrm{Nor}_G(H)$ est le fixateur de H pour cette action.

Indication pour l'exercice 5501 ▲

Etudier l'action du groupe par translation sur l'ensemble quotient des classes modulo le sous-groupe.

Indication pour l'exercice 5502 ▲

Le seul point non immédiat est que H' est d'indice fini dans G. Pour cela considérer le morphisme de G à valeurs dans le groupe des permutations des classes à gauche de G modulo H, qui à $g \in G$ associe la permutation $aH \to gaH$ et montrer que le noyau de ce morphisme est le groupe H'.

Indication pour l'exercice 5507 ▲

Question (d) : Si K le fixateur d'un élément $x \in X$, alors K est un sous-groupe propre maximal de G et X est isomorphe à $G/\cdot K$ en tant que G-ensemble. Déduire du fait que H n'est pas contenu dans K que $HK = G$ et que $H/\cdot H \cap K \simeq G/\cdot K$.

Indication pour l'exercice 5508 ▲

Soit H un tel sous-groupe. On peut supposer sans perte de généralité que H contient la transposition (12). On pourra ensuite procéder comme suit.

- montrer que H est engendré par le fixateur H_1 de 1 et par (12).

- montrer que l'orbite de 2 sous H est l'union de l'orbite de 2 sous H_1 et de 1.

- en déduire que H_1 agit transitivement sur l'ensemble $\{2, \ldots, n\}$ et que H agit 2-transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$.

- déduire du point précédent que H contient toutes les transpositions.

Indication pour l'exercice 5509 ▲

(a) est trivial.

(b) : Noter d'abord que la condition sur le fixateur de x est indépendante de $x \in X$: en effet si g est un élément de G envoyant x sur un autre élément $x' \in X$ (qui existe par transitivité de G), alors $G(x') = gG(x)g^{-1}$ et la correspondance $h \to ghg^{-1}$ permet d'identifier les actions de $G(x')$ sur $X \setminus \{x'\}$ et celle de $G(x)$ sur $X \setminus \{x\}$. Supposons maintenant vérifiée la condition sur le fixateur de x. Si (x,y) et (x',y') sont deux couples d'éléments distincts de X, il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(x) = x'$ (transitivité de G) et il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(x') = x'$ et $\tau(\sigma(y)) = y'$ (transitivité de $G(x')$ sur $X \setminus \{x'\}$ (noter que $\sigma(y) \neq x'$ car $\sigma(x) = x'$)). La permutation $\tau\sigma$ vérifie $\tau\sigma(x) = x'$ et $\tau\sigma(y) = y'$. Cela montre que X est 2-transitif. La réciproque est triviale.

(c) Si l'action de G sur X est imprimitive et $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ est une partition de X comme dans la définition, alors il n'existe pas d'élément $g \in G$ envoyant un premier élément $x_1 \in X_1$ dans X_1 et un second élément $x_1' \in X_1$ dans X_2.

(d) L'action par translation d'un groupe cyclique C sur lui-même est transitive, elle est primitive si $|C|$ est premier (toute partition de C en sous-ensembles de même cardinal est forcément triviale) mais elle n'est pas 2-transitive (le fixateur de tout élément est trivial, ce qui contredit le (c) de l'exercice 5507).

(e) et (f) ne présentent aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5510 ▲

On se ramène à la situation où le polygone est inscrit dans le plan complexe et a pour sommets les racines de l'unité $e^{2ik\pi/n}, k = 0,1,\dots,n-1$. Une isométrie laissant invariant le polygone fixe nécessairement l'origine. Elle est donc de la forme $z \to az$ ou $z \to a\bar{z}$ avec $|a| = 1$. On voit ensuite que a est nécessairement une racine n-ième de 1. Notons σ l'isométrie $z \to e^{2i\pi/n}z$ et τ la conjugaison complexe. On a $D_n = \{\sigma^k\tau^\varepsilon \mid k = 0,\dots,n-1, \varepsilon = \pm 1\}$. On vérifie que σ et τ engendrent le groupe D_n et satisfont les relations $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Autrement dit, D_n est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$. Si n est impair, son centre est trivial et si $n = 2m$ est pair, son centre est $\{1, \sigma^m\}$. Le groupe D_n se plonge naturellement dans S_n ; comme $|D_3| = |S_3| = 6$, ce plongement est un isomorphisme pour $n = 3$.

Indication pour l'exercice 5515 ▲

$|G| = |G/H|\,|H|$.

Indication pour l'exercice 5517 ▲

Pour les trois énoncés (a), (b) et (c), raisonner par récurrence sur r en utilisant le fait que le centre d'un p-groupe n'est pas trivial.

Indication pour l'exercice 5520 ▲

On a

$$D_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mu_2 \times S_3$$

Le premier isomorphisme est une application standard du lemme chinois. Pour le deuxième, noter que le premier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est dans le centre du groupe et donc que l'action sur lui par conjugaison du second $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est triviale. L'isomorphisme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_3$ est classique.

Indication pour l'exercice 5522 ▲

Pour tout $g \in G$, gSg^{-1} est un p-Sylow de $gHg^{-1} = H$ et donc $gSg^{-1} = S$.

Indication pour l'exercice 5526 ▲

Pour le (c), pour $H \neq \{1\}$ sous-groupe distingué de A_5, raisonner sur les éléments d'ordre 2, 3 et 5 contenus dans H.

Indication pour l'exercice 5527 ▲

L'identification de chacun des p-Sylow ne pose pas de difficulté. Observer ensuite que les sous-groupes de Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$ et determiner leur nombre en comptant les éléments d'ordre 2, 3 et 5.

Indication pour l'exercice 5529 ▲

Les théorèmes de Sylow montrent qu'il n'y a qu'un seul q-Sylow, nécessairement distingué. La suite est standard. Pour le dernier point, utiliser que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ (exercice 5475) et donc que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne peut agir non trivialement sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ que si p divise $q-1$.

Indication pour l'exercice 5530 ▲

D'après l'exercice 5529, un groupe d'ordre 35 est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, lequel est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ par le lemme chinois.

Indication pour l'exercice 5532 ▲

Soit G un groupe d'ordre p^2q qu'on suppose simple. On distinguera deux cas : $p > q$ et $p < q$. Dans le premier, montrer que G admet q p-Sylow d'ordre p^2 et que l'action par conjugaison de G sur les p-Sylow définit un morphisme injectif $G \hookrightarrow S_q$ et aboutir à une contradiction. Dans le second, raisonner sur le nombre de q-Sylow pour aboutir à une contradiction (on sera notamment amené à éliminer le cas $p = 2$ et $q = 3$).

Indication pour l'exercice 5534 ▲

(a) Si K est un sous-groupe d'ordre 20, K a un seul 5-Sylow L et donc $K \subset \mathrm{Nor}_G(L)$ ce qui entraine que l'ordre de $\mathrm{Nor}_G(L)$ est 20 ou 60. Mais alors il y aurait 1 ou 3 5-Sylow dans G. Or 1 est impossible car G est simple et 3 contredit les prédictions du théorème de Sylow.

(b) Si K a un unique 3-Sylow L, $K \subset \mathrm{Nor}_G(L)$, et donc l'ordre de $\mathrm{Nor}_G(L)$ serait 12 ou 60. Il y aurait alors 5 ou 1 3-Sylow dans G. Comme ci-dessus, c'est impossible.

(c) Supposons que $H \cap K =< a >$ soit d'ordre 2. Le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(a)$ de a contient H et K, donc $H \cup K$. Son ordre est au moins 6 et est divisible par 4. Les seules possibilités sont 12, 20, 60 :

- 60 est impossible, car $< a >$ serait distingué dans G

- 20 est impossible, d'après la question (a)

- 12 est impossible, car $\mathrm{Cen}_G(a)$ aurait 4 3-Sylow d'après la question (b). Il ne resterait de la place que pour un seul 2-Sylow ce qui contredit $H \cup K \subset \mathrm{Cen}_G(a)$.

(d) Si $H = \mathrm{Nor}_G(H)$, il y a 15 2-Sylow, et donc 46 éléments d'ordre une puissance de 2. Or il y a 6 5-Sylow d'intersections deux à deux triviales, et donc 24 éléments d'ordre 5. L'inégalité $46 + 24 > 60$ fournit une contradiction.

(e) Si H est un 2-Sylow, l'ordre de $\mathrm{Nor}_G(H)$ est 12, 20 ou 60. Mais 20 est exclu (question (a)) de même que 60 (G est simple). La seule possibilité est 12 ; il y a donc 5 2-Sylow.

(f) L'action de G par conjugaison sur les 5-Sylow fournit un morphisme $c : G \to S_5$ qui est injectif (car G est simple). Le groupe G est donc isomorphe à son image $c(G)$ qui est un sous-groupe d'ordre 60, donc d'indice 2 dans S_5. C'est donc A_5.

Indication pour l'exercice 5548 ▲

Voir la solution de l'exercice 5540, deuxième question.

Indication pour l'exercice 5776 ▲

Vérifier que :

1. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
3. $\max(\inf A, \inf B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;
4. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
5. $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

Indication pour l'exercice 5777 ▲

Montrer que J_x est un intervalle ouvert ; que $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. Et penser que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Indication pour l'exercice 5778 ▲

Pour trouver m, que prendriez-vous si on voulait seulement $m \in \mathbb{R}$?

Indication pour l'exercice 5779 ▲

Revenir à la définition de ce qu'est un "ensemble fermé" et de ce qu'est une "boule fermée".

Indication pour l'exercice 5782 ▲

Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, pour chaque $p \geq 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \dots)$.

Indication pour l'exercice 5783 ▲

Montrer

- $\|f\| \leq N(f)$;
- $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f\|$;
- $\|f\|_\infty \leq \|f\|$.

Indication pour l'exercice 5785 ▲

- Montrer $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.
- Par un contre-exemple, montrer qu'il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout f.

Indication pour l'exercice 5786 ▲

Les seules relations sont :

$$N_1 \leq N_2 \leq 2N_1 \leq 2N_4 \leq 2N_3.$$

Indication pour l'exercice 5796 ▲

1. Remarquer si U_a est un voisinage de a, alors $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$.
2. Raisonner par l'absurde et construire une suite (x_n) dont aucun élément n'est dans U et une suite (y_n) de K. Quitte à extraire une sous-suite se débrouiller pour qu'elle converge vers la même limite.

Indication pour l'exercice 5797 ▲

Utiliser qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Indication pour l'exercice 5798 ▲

Extraire des sous-suites...

Indication pour l'exercice 5802 ▲

On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

Indication pour l'exercice 5803 ▲

1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.
2. Remarquer que "$\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$" est équivalent à

$$\text{“}\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).\text{”}$$

Indication pour l'exercice 5806 ▲

1. ...
2. Utiliser l'exercice 5799.
3. Montrer $f(Y) \subset Y$ puis $Y \subset f(Y)$.
4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.

Indication pour l'exercice 5809 ▲

1. Utiliser le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts.
2. Écrire un intervalle fermé comme union dénombrable d'intervalles ouverts, puis utiliser la même remarque que ci-dessus.

Indication pour l'exercice 5810 ▲

1. $\ldots$.
2. Pour montrer que c_0 est fermé, l'écrire comme image réciproque de quelque chose.

Indication pour l'exercice 5811 ▲

Montrer que le complémentaire est un ouvert. Si vous le souhaitez, placez-vous dans des espaces métriques.

Indication pour l'exercice 5812 ▲

1. Pour un polynôme P, la limite de $P(x)$ ne vaut $\pm\infty$ que lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Indication pour l'exercice 5813 ▲

1. Pour le sens direct utiliser la caractérisation de l'adhérence par les suites. Pour le sens réciproque, montrer que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Indication pour l'exercice 5816 ▲

1. Par l'absurde, considérer $I(x) = \int_0^x f$. Trouver une suite (p_n) telle que $(I(p_n))$ ne soit pas une suite de Cauchy.
2. Pour montrer que cette intégrale converge utiliser le changement de variable $u = t^2$ puis faire une intégration par partie.

Indication pour l'exercice 5817 ▲

Si la relation est vérifiée montrer que B est continue en x en calculant $B(x+y) - B(x)$. Si B est continue alors en particulier B est continue en $(0,0)$, fixer le ε de cette continuité,...

Indication pour l'exercice 5818 ▲

La continuité de L sur E équivaut la continuité en 0. Par l'absurde supposer que L n'est pas continue en 0 et construire une suite (x_n) qui tend vers 0 mais avec $(L(x_n))$ non bornée.

Indication pour l'exercice 5819 ▲

Il faut montrer $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Le faire pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 5820 ▲

1. $\|S\| = 1$;
2. $\|T\| = \|g\|_\infty$;
3. $\|u\| = \int_0^1 |g|$, on distinguera les cas où g reste de signe constant et g change de signe ;
4. $\|u\| = \|a_n\|_2$;
5. $\|u\| = \|a\|_\infty$;
6. $\|u\| = 1$.

Indication pour l'exercice 5821 ▲

U est continue et $\|U\| = 1$, V n'est pas continue.

Indication pour l'exercice 5823 ▲

1. Montrer d'abord que X se décompose sous la forme $H + \mathbb{R}.a$.
2. ...
3. Non ! Chercher un contre-exemple dans les exercices précédents.

Indication pour l'exercice 5825 ▲

Montrer que $\|L\| = \pi$.

Indication pour l'exercice 5858 ▲

1. C'est une suite de Cauchy. Essayer de se ramener à une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. Regarder la suite définie par $u_n = -n$.
3. Comme la première question.

Indication pour l'exercice 5859 ▲

f est injective uniquement afin que d soit bien une distance. Raisonner par double implication. Utiliser la caractérisation d'un fermé par les suites.

Indication pour l'exercice 5860 ▲

1. (X, d_ω) est complet. La démonstration est presque la même que pour montrer que $(\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est complet.
2. Prendre par exemple, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = 1$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1 - n(t - \frac{1}{2}))$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 5861 ▲

1. Intégrer l'exemple de l'exercice 5860.
2. Oui cet espace est complet, montrer-le !

Indication pour l'exercice 5862 ▲

1. Prendre la suite (x^p) définie par $x^p = (1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$. $((x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de suite).
2. Prendre Y l'espace de toutes les suites.
3. Considérer $x^p = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, 0, 0, \ldots)$.

Indication pour l'exercice 5863 ▲

1. Écrire ce que donne la définition de "(x_n) est une suite de Cauchy" pour $\varepsilon = 1$, puis $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ..., puis $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Faire la somme. Remarquer que si $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$ alors $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$.
2. ...

Indication pour l'exercice 5867 ▲

C'est à peu prés la même démonstration que pour le théorème du point fixe d'une fonction contractante.

Indication pour l'exercice 5868 ▲

Montrer que l'unique point fixe x de f^n, est un point fixe de f. Pour cela écrire l'égalité $f^n(x) = x$ et composée habilement cette égalité. Pour conclure utiliser l'unicité du point fixe de f^n.

Indication pour l'exercice 5869 ▲

Faire soigneusement le calcul : $(T \circ Tf)(x) = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. Se souvenir que X est complet et utiliser l'exercice 5868.

Indication pour l'exercice 5872 ▲

Raisonner par l'absurde et montrer que ω_x est un ouvert dense.

Indication pour l'exercice 5873 ▲

1. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement* si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$
De façon équivalente f est *semi-continue inférieurement* si pour tout $x \in X$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \varepsilon).$$
Attention il n'y a pas de valeur absolue autour de $f(x) - f(y)$.
2. Pour la première question considérer $O_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ et utiliser le théorème de Baire.
3. Pour l'application utiliser la première question avec la fonction
$$\phi : B \to \mathbb{R}, \text{ définie par } \phi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Indication pour l'exercice 5875 ▲

Utiliser la première question pour les deux suivantes.

Indication pour l'exercice 5877 ▲

Utiliser la partition $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A \cup (X \setminus \bar{A})$ où $\mathrm{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ est la frontière de A.

Indication pour l'exercice 5878 ▲

Faites un dessin de T. Pour la dernière question, raisonner par l'absurde. Où peuvent s'envoyer les points de la deuxième question ?

Indication pour l'exercice 5879 ▲

1. Pour la surjection, pensez à l'exponentielle ou aux sinus et cosinus... Pour l'injection, raisonner par l'absurde et utiliser la connexité du cercle privé d'un point.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser la connexité de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point.

Indication pour l'exercice 5880 ▲

Définir $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Montrer pour chaque points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, g est constante dans un voisinage de ce point, puis faire la même chose pour un point de $\mathbb{Q}$. Conclure.

Indication pour l'exercice 5881 ▲

1. Faire un dessin !
2. Utiliser le théorème des accroissements finis d'une part. La définition de la dérivée d'autre part.
3. Utiliser l'exercice 5875 ou refaire la demonstration.

Indication pour l'exercice 5883 ▲

1. Faire un dessin ! !
2. Voir l'exercice 5875.
3. Raisonner par l'absurde. Prendre un chemin qui relie le point $(0,0)$ au point $(\frac{1}{2\pi},0)$ (par exemple). Ce chemin va quitter à un instant t_0 le segment $\{0\} \times [-1,1]$. Chercher une contradiction à ce moment là.

Indication pour l'exercice 5886 ▲

Approcher f par une suite de polynômes, et se rappeler que si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle alors...

Indication pour l'exercice 5887 ▲

Raisonner par l'absurde.

Indication pour l'exercice 5888 ▲

Considérer l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$.

Indication pour l'exercice 5889 ▲

Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 5890 ▲

Pour la deuxième question :

1. Montrer que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
2. Montrer que $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
3. Applique le théorème d'Acoli sur le compact $\bar{B}(0,R)$.
4. Utiliser le procédé diagonal de Cantor ($R = 1, 2, 3, \dots$).

Indication pour l'exercice 5891 ▲

Démarrer avec l'inégalité :

$$|f_n(x_n) - b| \leq |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

Si (f_n) n'est pas équicontinue le résultat peut être faux. Prendre $f_n(x) = (1+x)^n$ et $x_n = \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 5893 ▲

---

1. Pour ouvert et fermé, écrire l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$ en un point x (à fixer).
2. Ascoli...

Indication pour l'exercice 5894 ▲

---

1. Pour l'équicontinuité utiliser le théorème des accroissement finis. Pour la convergence simple montrer que pour t fixé : $f_n(t) = \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n})$.
2. Montrer que (f_n) ne converge par vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_\infty$ (c'est-à-dire il y a convergence simple mais pas convergence uniforme). Le théorème d'Acoli serait-il faux ?

Correction de l'exercice 2 ▲

Il ne faut pas se laisser impressionner par l'allure de cette assertion. En effet $A \Rightarrow B$ est une écriture pour B ou $(\text{non}A)$; ici A (la proposition $(1=2)$) est fausse, donc $(\text{non}A)$ est vraie et B ou $(\text{non}A)$ l'est également. Donc l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie, quand A est fausse et quelque soit la proposition B.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x+y = x-x-1 = -1 \leq 0$.
2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x+1$ et alors $x+y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leq 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leq 1)$. La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "$(f(x) \leq 1)$" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$".
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$". Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$".
3. La négation est : "l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive". On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leq 0)$". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$)", et celle de la seconde est :"$(f(x) > 0)$". Donc la négation de l'assertion complète est : "Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La négation de la première partie est "$(\forall x \in \mathbb{R})$", celle de la seconde est "$(\exists y \in \mathbb{R})$", et celle de la troisième est "($x < y$ et $f(x) \leq f(y)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{telsque} x < y$ et $f(x) \leq f(y)$".

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $\Leftarrow$
2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon > 0$, définissons $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ et $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ la proposition est donc démontrée.
2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition, la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :
$$\forall M_1 \in F_1 \ \ \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\qquad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.
3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1, 1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :
$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \ \ \exists M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.
4. Cette proposition est vraie, il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Correction de **l'exercice 7 ▲**

"Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction de **l'exercice 8 ▲**

1. P et non Q ;
2. "non P ou Q" ce qui la même chose que "$P \Rightarrow Q$" ;
3. (non P) ou ((non Q) ou (non R)) (on peut supprimer les parenthèses) ;
4. non P et (non Q ou R) (ici les parenthèses sont importantes) ;
5. P et Q et R et non S ;

Correction de **l'exercice 9 ▲**

1. "Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit." Bien sûr cette dernière phrase est fausse !
2. "Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire."
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit
$$\forall x \in \mathbb{Z} \;\; \exists y \in \mathbb{Z} \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Rightarrow z < x+1),$$
la négation est
$$\exists x \in \mathbb{Z} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} \;\; \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geq x+1).$$
4. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geq \varepsilon)$.

Correction de **l'exercice 16 ▲**

Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$ car $2n+1 \leq 2(n+2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon$$
Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité
$$2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$
soit vraie.
$$\begin{aligned} 2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2-\varepsilon)(n+2) < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geq N$ nous avons $n \geq N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon$. En fait nous venons de prouver que la limite de la suite de terme $(2n+1)/(n+2)$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Correction de **l'exercice 17 ▲**

1. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leq M$;
2. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad m \leq f(x) \leq M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(-x)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = -f(-x)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
6. $\exists a \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+a) = f(x)$;

7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$;
8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
9. $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
11. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = n$;
12. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leq g(x)$;
13. $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > g(x)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. (a) $(f = Id_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M)$ et $(f \neq Id_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P} /\ f(M) \neq M)$.
   (b) (f a au moins un point fixe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P} /\ f(M) = M$) et ($f$ n'a pas de point fixe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).

   Constatez que les phrases $f(M) = M$ ou $f(M) \neq M$ **n'ont aucun sens** si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.
2. (a) $(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} /\ f(x) \neq 0)$.
   (b) (L'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R} /\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} /\ f(x) \neq 0$).
   (c) (L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution si et seulement si $\exists ! x \in \mathbb{R} /\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas exactement une solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} /\ f(x) \neq 0$ ou $\exists (x,x') \in \mathbb{R}^2 /\ (x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 0)$.
3. (a) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} /\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$).
   (b) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} \geq u_n$) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non croissante $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} < u_n$).
   (c) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} \geq u_n$) ou ($\forall n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} \leq u_n$)) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotone $\Leftrightarrow$ (($\exists n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} < u_n$) et ($\exists n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} > u_n$)).

Correction de l'exercice 19 ▲

Le contraire de $x \geq 3$ est $x < 3$. Le contraire de $0 < x \leq 2$ est $((x \leq 0)$ ou $x > 2)$.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont tous deux nuls.
2. Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité $fg = 0$. La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de ($f = 0$ ou $g = 0$). Voici un exemple de fonctions f et g toutes deux non nulles dont le produit est nul. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x > 0 \\ x \text{ si } x \leq 0 \end{array} \right. \end{array}$. Pour chaque valeur de x, on a soit $f(x) = 0$ (quand $x \leq 0$), soit $g(x) = 0$ (quand $x \geq 0$). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0$ ou enfin, $fg = 0$. Cependant, $f(1) = 1 \neq 0$ et donc $f \neq 0$, et $g(-1) = -1 \neq 0$ et donc $g \neq 0$. Ainsi, on n'a pas ($f = 0$ ou $g = 0$) ou encore, on n'a pas (($\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$) ou ($\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$)).

Correction de l'exercice 22 ▲

Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon "directe". Nous supposons que A et B sont tels que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.
2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons montrer que $A \cap B \neq A \cup B$.

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction de l'exercice 23 ▲

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 24 ▲

Montrons quelques assertions.

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \quad \text{ car } f^{-1}(A) = \{x \in E \;/\; f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36 ▲

$I_1 = 3$ et $I_2 = [-2, 5]$.

Correction de l'exercice 37 ▲

$I = [0, 2]$ et $J =]1, +\infty[$.

Correction de l'exercice 44 ▲

1. $B \setminus A \subset X \subset B$.
2. $B \subset X \subset B \cup \complement A$.

Correction de l'exercice 48 ▲

1. Si $A = B = \varnothing$ alors $A \Delta B = \varnothing = A \cap B$. Si $A \Delta B = A \cap B$, supposons par exemple $A \neq \varnothing$. Soit $x \in A$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B = A \Delta B$ ce qui est absurde et si $x \notin B$, $x \in A \Delta B = A \cap B$ ce qui est absurde. Donc $A = B = \varnothing$. Finalement, $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

2. Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$,

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) &= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap B)\cup(B\cap C))\cap(C\cup A)\\ &= ((A\cap C)\cup B)\cap(C\cup A) \text{ (car } B\cap B=B \text{ et } A\cap B\subset B \text{ et } B\cap C\subset B)\\ &= ((A\cap C)\cap C)\cup((A\cap C)\cap A)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\ &= (A\cap C)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\ &= (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\end{aligned}$$

3. $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=B\Delta A$.
4.

$$\begin{aligned}x\in(A\Delta B)\Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A\Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux}\\ &\Leftrightarrow ((x\in A \text{ et } x\notin B \text{ et } x\notin C) \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\notin A \text{ et } x\notin C) \text{ ou } (x\in C \text{ et } x\notin A\Delta B)\\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de A, B et C, $A\Delta(B\Delta C)$ est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties A, B ou C ou dans les trois. Donc $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$. Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes $A\Delta B\Delta C$.

5. $A=B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$ et $B\setminus A=\varnothing\Rightarrow A\Delta B=\varnothing$.
$A\neq B\Rightarrow \exists x\in E/\ ((x\in A \text{ et } x\notin B) \text{ ou } (x\notin A \text{ et } x\in B))\Rightarrow \exists x\in E/\ x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B\Rightarrow A\Delta B\neq\varnothing$.
6. $\Leftarrow$ Immédiat.
$\Rightarrow$ Soit x un élément de A.
Si $x\notin C$ alors $x\in A\Delta C=B\Delta C$ et donc $x\in B$ car $x\notin C$.
Si $x\in C$ alors $x\notin A\Delta C=B\Delta C$. Puis $x\notin B\Delta C$ et $x\in C$ et donc $x\in B$. Dans tous les cas, x est dans B. Tout élément de A est dans B et donc $A\subset B$. En échangeant les rôles de A et B, on a aussi $B\subset A$ et finalement $A=B$.

Correction de l'exercice 49 ▲

1. Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y\in\bigcup_{i\in I}A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow \exists i\in I,\ \exists y\in A_i/\ x=f(y)\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I/\ x\in f(A_i)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i).}$$

2. Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y\in\bigcap_{i\in I}A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow \exists y\in E/\ \forall i\in I,\ y\in A_i \text{ et } x=f(y)\\ &\Rightarrow \forall i\in I/\ \exists y\in A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow \forall i\in I/\ x\in f(A_i)\\ &\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i).}$$

L'inclusion contraire n'est pas toujours vraie. Par exemple, pour x réel on pose $f(x)=x^2$ puis $A=\{-1\}$ et $B=\{1\}$. $A\cap B=\varnothing$ et donc $f(A\cap B)=\varnothing$ puis $f(A)=f(B)=\{1\}$ et donc $f(A)\cap f(B)=\{1\}$.
3. Il n'y a aucune inclusion vraie entre $f(E\setminus A)$ et $F\setminus f(A)$. Par exemple, soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^2\end{array}$ et $A=[-1,2]$. $f(A)=[0,4]$ et donc $C_{\mathbb{R}}(f(A))=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$ mais $f(C_{\mathbb{R}}A)=f(]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[)=]1,+\infty[$ et aucune inclusion entre les deux parties n'est vraie.

4. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).}$$

5. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).}$$

6. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(F \setminus B_i) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus B_i \Leftrightarrow f(x) \notin B_i \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(F \setminus B_i) = E \setminus f^{-1}(B_i).}$$

Correction de l'exercice 50 ▲

1. Il y a l'injection triviale $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.
2. Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective. Soit $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que A a un antécédent a. Dans ce cas, où est a ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de CANTOR : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Correction de l'exercice 53 ▲

Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, $f \neq f_p$.

Correction de l'exercice 54 ▲

1. Montrons en fait la contraposée.
S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = kp_i$ donc

$$p_i(k - p_1 p_2 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_r) = 1$$

soit $p_i q = 1$ (avec $q = k - p_1 p_2 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_r$ un nombre entier). Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1. Et donc p_i n'est pas un nombre premier.
Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i

2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ alors $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui même (c'est le 1.).
   Mais N est strictement supérieur à tous les p_i. Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i, il y a donc au moins $r+1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 56 ▲

Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathscr{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathscr{A}_n) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

– $\mathscr{A}_0$ est vraie $(1 = 1)$.
– Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathscr{A}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \ + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

  Ce qui prouve $\mathscr{A}_{n+1}$.
– Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathscr{A}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 58 ▲

1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathscr{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

   - La proposition $\mathscr{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
   - Soit $n \geq 0$, supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

     Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.
   - Nous avons montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$$

     et comme $\mathscr{H}_0$ est vraie alors $\mathscr{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.
2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 + 3x_n + 12}{x_n + 2}$$

   Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.
3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathscr{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

   - La proposition $\mathscr{H}_0$ est vraie.
   - Soit $n \geq 0$, supposons que $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vérifiée.
     D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   - Nous concluons en résumant la situation :
     $\mathscr{H}_0$ est vraie, et $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathscr{H}_n$ est toujours vraie.
4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Correction de l'exercice 59 ▲

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante :

$$\mathscr{H}_n : \quad n \text{ droites en position générale découpent le plan en } R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ régions.}$$

- pour $n = 1$ alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathscr{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\mathscr{H}_{n-1}$ soit vraie, et montrons $\mathscr{H}_n$. Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ n droites en position générale, la droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ en $n-1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_{n-1}$: $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc
  $$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$
  Et $\mathscr{H}_n$ est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathscr{H}_{n-1} \Rightarrow \mathscr{H}_n$.
- Conclusion : par récurrence on a montré que $\mathscr{H}_n$ est vraie quelque soit $n \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 60 ▲

1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit $\mathscr{A}_n$ l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathscr{A}_n$ vraie. Alors
   $$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$
   Nous avons utiliser la definition de f^{n+2}, puis la proposition $\mathscr{A}_n$, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc $\mathscr{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence
   $$\forall \in \mathbb{N} \ \ f^n \circ f = f \circ f^n.$$
2. On procède de même par récurrence : soit $\mathscr{A}_n$ l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathscr{A}_n$ vraie. Alors
   $$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$
   Donc $\mathscr{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence
   $$\forall \in \mathbb{N} \ \ (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Correction de l'exercice 85 ▲

1. Soient z, z', z'' des complexes quelconques.
   - Reflexivité : $z \mathscr{R} z$ car $|z| = |z|$.
   - Symétrie : $z \mathscr{R} z' \Rightarrow z' \mathscr{R} z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
   - Transitivité : $z \mathscr{R} z'$ et $z' \mathscr{R} z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z \mathscr{R} z''$.

   En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité "$=$" est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathscr{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$:
   $$\mathscr{C} = \left\{ |z| e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction de l'exercice 86 ▲

Le raisonnement est faux.

L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).

Correction de l'exercice 88 ▲

1. – Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$ donc $x\mathscr{R}x$.
   – Symétrie : Pour $x,y \in \mathbb{R}$, si $x\mathscr{R}y$ alors $xe^y = ye^x$ donc $ye^x = xe^y$ donc $y\mathscr{R}x$.
   – Transitivité : Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Calculons xye^z :
   $$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = yze^x.$$
   Donc $xye^z = yze^x$. Si $y \neq 0$ alors en divisant par y on vient de montrer que $xe^z = ze^x$ donc $x\mathscr{R}z$ et c'est fini. Pour le cas $y = 0$ alors $x = 0$ et $z = 0$ donc $x\mathscr{R}z$ également.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathscr{C}(x)$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$:
   $$\mathscr{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathscr{R}x\}.$$
   Donc
   $$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$
   Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$
   Alors
   $$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$
   Autrement dit $\mathscr{C}(x)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui par f prennent la même valeur que $f(x)$; en raccourci :
   $$\mathscr{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$
   Étudions maintenant la fonction f afin de déterminer le nombre d'antécédents : par un calcul de f' on montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty,1]$ puis strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. De plus en $-\infty$ la limite de f est $-\infty$, $f(1) = \frac{1}{e}$, et la limite en $+\infty$ est 0.
   C'est le moment de dessiner le graphe de f ! !
   Pour $x > 0$ alors $f(x) \in]0, \frac{1}{e}]$ et alors $f(x)$ a deux antécédents. Pour $x \leqslant 0$ alors $f(x) \in]-\infty,0]$ et alors $f(x)$ a un seul antécédent.
   Bilan : si $x > 0$ alors $\operatorname{Card}\mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 2$, si $x \leqslant 0$ alors $\operatorname{Card}\mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 1$.

Correction de l'exercice 93 ▲

– Reflexivité : pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$ on a $X \prec X$ car $X = X$.
– Anti-symétrie : pour $X,Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec X$, alors par définition de $\prec$ on a
$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x.$$
Comme la relation $\leq$ est une relation d'ordre alors $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ implique $x = y$. Donc
$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x = y,$$
ce qui implique que $X = Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).
– Transitivité : soit $X,Y,Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec Z$. Si $X = Y$ ou $Y = Z$ alors il est clair que $X \prec Z$. Supposons que $X \neq Y$ et $Y \neq Z$ alors
$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad y \leqslant z.$$
Donc on a
$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z,$$
alors par transitivité de la relation $\leq$ on obtient :
$$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant z.$$
Donc $X \prec Z$.

Correction de l'exercice 107 ▲

Soit A non vide et minorée, et $B = \{\text{minorants de } A\}$.

B n'est pas vide et est majorée par A donc $\beta = \sup(B)$ existe.

Soit $a \in A$: $\forall\, b \in B,\ b \leq a$ donc $\beta \leq a$.

Par conséquent, β minore A, donc $\beta = \max(B)$.

Correction de l'exercice 108 ▲

1.

2.
3.
4. Si (a,b) majore A, alors $(a,b) \gg (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ donc $(a,b) \gg (0,\sqrt{2})$.
   Réciproque : si $x^2+y^2 \leq 1$, alors $(x+y)^2+(x-y)^2 \leq 2$, donc $y \pm x \leq \sqrt{2}$, et $(x,y) \ll (0,\sqrt{2})$.
   Finalement, $\sup(A) = (0,\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 121 ▲

Si $f\circ g = g\circ f$ alors
$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f\circ g(x) = g\circ f(x).$$
Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x=0$. Alors $f\circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g\circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f\circ g(0) \neq g\circ f(0)$. Ainsi $f\circ g \neq g\circ f$.

Correction de l'exercice 137 ▲

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n\in\mathbb{N}$ tel que $f(n)=0$ (si ce n existait ce serait $n=-1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$). Par contre f est injective : soient $n,n'\in\mathbb{N}$ tels que $f(n)=f(n')$ alors $n+1=n'+1$ donc $n=n'$. Bilan f est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que g est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que g est à la fois injective et surjective. En effet soient $n,n'\in\mathbb{Z}$ tels que $g(n)=g(n')$ alors $n+1=n'+1$ donc $n=n'$, alors g est injective. Et g est surjective car chaque $m\in\mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n=m-1\in\mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n)=m$. Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction $g':\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définie par $g'(m)=m-1$ alors $g'\circ g(n)=n$ (pour tout $n\in\mathbb{Z}$) et $g\circ g'(m)=m$ (pour tout $m\in\mathbb{Z}$). Alors g' est la bijection réciproque de g et donc g est bijective.
3. Montrons que h est injective. Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tels que $h(x,y)=h(x',y')$. Alors $(x+y,x-y)=(x'+y',x'-y')$ donc
$$\begin{cases} x+y &= x'+y' \\ x-y &= x'-y' \end{cases}$$
   En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x=2x'$ donc $x=x'$ et avec la différence on obtient $y=y'$. Donc les couples (x,y) et (x',y') sont égaux. Donc h est injective.
   Montrons que h est surjective. Soit $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x,y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x,y)=(X,Y)$, donc $(x+y,x-y)=(X,Y)$ ou encore :
$$\begin{cases} x+y &= X \\ x-y &= Y \end{cases}$$
   Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x=\frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y=\frac{X-Y}{2}$, donc $(x,y)=(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple (x,y) que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour !). Bilan pour (X,Y) donné, son antécédent par h existe et est $(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. Donc h est surjective.
   En fait on pourrait montrer directement que h est bijective en exhibant sa bijection réciproque $(X,Y)\mapsto(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.
4. Montrons d'abord que k est injective : soient $x,x'\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tels que $k(x)=k(x')$ alors $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x'+1}{x'-1}$ donc $(x+1)(x'-1)=(x-1)(x'+1)$. En développant nous obtenons $xx'+x'-x=xx'-x'+x$, soit $2x=2x'$ donc $x=x'$.
   Au brouillon essayons de montrer que k est surjective : soit $y\in\mathbb{R}$ et cherchons $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tel que $f(x)=y$. Si un tel x existe alors il vérifie $\frac{x+1}{x-1}=y$ donc $x+1=y(x-1)$, autrement dit $x(y-1)=y+1$. Si l'on veut exprimer x en fonction de y cela se fait par la formule $x=\frac{y+1}{y-1}$. Mais attention, il y a un piège ! Pour $y=1$ on ne peut pas trouver d'antécédent x (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc k n'est pas surjective car $y=1$ n'a pas d'antécédent.
   Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction $k_|:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ qui est définie aussi par $k_|(x)=\frac{x+1}{x-1}$ (seul l'espace d'arrivée change par rapport à k) alors cette fonction $k_|$ est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

Correction de l'exercice 138 ▲

1. f n'est pas injective car $f(2)=\frac{4}{5}=f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y=2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x)=2$ devient $2x=2(1+x^2)$ soit $x^2-x+1=0$ qui n'a pas de solutions réelles.

2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.
3. Soit $y \in [-1,1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Donc pour $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.
4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1,1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1,1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f, appelée $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, est une bijection.

Correction de l'exercice 140 ▲

1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soient $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :
$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
c'est la définition de f injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.
3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.
Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2. g est surjective.
Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction de l'exercice 144 ▲

1. Pour $z = x + iy$, le module de $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ est e^x et son argument est y.
2. Les résultats : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
3. La fonction exp n'est pas surjective car $|e^z| = e^x > 0$ et donc e^z ne vaut jamais 0. La fonction exp n'est pas non plus injective car pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{z+2i\pi}$.

Correction de l'exercice 145 ▲

1. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective).} \end{aligned}$$
On a montré que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, et donc f est injective.
2. Soit $y \in H$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x dans E tel que $g(f(x)) = y$. En posant $z = f(x) \in G$, on a trouvé z dans G tel que $g(z) = y$. On a montré : $\forall y \in H,\ \exists z \in G/\ g(z) = y$, et donc g est surjective.

Correction de l'exercice 146 ▲

1) $\Rightarrow$ **2)** Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $X \subset f^{-1}(f(X))$. (En effet, pou $x \in E$, $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$). Réciproquement, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X/\ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X/\ x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalement, $f^{-1}(f(X)) \subset X$ et donc $f^{-1}(f(X)) = X$. **2)** $\Rightarrow$ **1)** Soit $x \in X$. Par hypothése, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ ce qui signifie que $f(x)$ a un et un seul antécédent à savoir x. Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f et f est injective.

1) $\Rightarrow$ **3)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. On a toujours $f(X\cap Y) \subset f(X)\cap f(Y)$ ($X\cap Y \subset X \Rightarrow f(X\cap Y) \subset f(X)$ et de même, $f(X\cap Y) \subset f(Y)$ et finalement, $f(X\cap Y) \subset f(X)\cap f(Y)$). Réciproquement, soit $y\in F$. $y \in f(X)\cap f(Y) \Rightarrow \exists (x,x') \in X\times Y/\ y = f(x) = f(x')$. Mais alors, puisque f est injective, $x = x' \in X\cap Y$ puis $y = f(x) \in f(X\cap Y)$. Finalement, $f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$.

3) $\Rightarrow$ **4)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. $X\cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X)\cap f(Y) = f(X\cap Y) = f(\varnothing) = \varnothing$.

4) $\Rightarrow$ **5)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tel que $Y \subset X$. Puisque $X\setminus Y \subset X$, on a $f(X\setminus Y) \subset f(X)$. Mais, puisque $Y\cap(X\setminus Y) = \varnothing$, par hypothèse $f(X\setminus Y)\cap f(Y) = \varnothing$. Finalement,$f(X\setminus Y) \subset f(X)\setminus f(Y)$. Inversement, si $f(X)\setminus f(Y) = \varnothing$, l'inclusion contraire est immédiate et si $f(X)\setminus f(Y) \neq \varnothing$, un élément de $f(X)\setminus f(Y)$ est l'image d'un certain élément de X qui ne peut être dans Y et donc est l'image d'un élément de $X\setminus Y$ ce qui montre que $f(X)\setminus f(Y) \subset f(X\setminus Y)$ et finalement que $f(X)\setminus f(Y) = f(X\setminus Y)$.

5) $\Rightarrow$ **1)** Soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Posons $X = \{x_1,x_2\}$ et $Y = \{x_2\}$. On a donc $Y \subset X$. Par hypothèse $f(X\setminus Y) = f(X)\setminus f(Y)$ ce qui fournit $f(\{x_1\}) = f(\{x_1,x_2\})\setminus f(\{x_2\})$ ou encore, $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\}\setminus\{f(x_2)\}$. Maintenant, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $\{f(x_1), f(x_2)\}\setminus\{f(x_2)\} = \varnothing$ (et pas $\{f(x_1)\}$). Donc $f(x_1) \neq f(x_2)$. On a montré que f est injective.

Correction de l'exercice 147 ▲

L'inverse de $f_{a,b}$ est $g_{a,b}$ avec $g_{a,b}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Autrement dit $f_{a,b}^{-1} = g_{a,b} = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$.

Correction de l'exercice 148 ▲

Soit $x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f\circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin [0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$ donc $f\circ f(x) = f(1-x)$, mais $1-x \notin [0,1]\cap\mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f\circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f\circ f(x) = x$. Et donc $f\circ f = id$.

Correction de l'exercice 149 ▲

Considérons la restriction suivante de f : $f_| : [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}, t \mapsto e^{it}$. Montrons que cette nouvelle application $f_|$ est bijective. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation $(|z| = 1)$.

- $f_|$ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0,2\pi[$.
- $f_|$ est injective :

$$\begin{aligned} f_|(t) = f_|(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t,t' \in [0,2\pi[\text{ et donc } k = 0. \end{aligned}$$

En conclusion $f_|$ est injective et surjective donc bijective.

Correction de l'exercice 151 ▲

- f est injective : soient $x,y \in [1,+\infty[$ tels que $f(x) = f(y)$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2-1 = y^2-1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ or } x,y \in [1,+\infty[\text{ donc } x,y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0,+\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2-1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Correction de l'exercice 156 ▲

1. f est dérivable sur $I =]-\infty,2]$, et pour $x \in]-\infty,2[$, $f'(x) = 2x-4 < 0$. f est donc continue et strictement décroissante sur $]-\infty,2]$. Par suite, f réalise une bijection de $]-\infty,2]$ sur $f(]-\infty,2]) = [f(2), \lim_{-\infty} f[= [-1,+\infty[= J$. On note g l'application de I dans J qui, à x associe $x^2-4x+3 (= f(x))$. g est bijective et admet donc une réciproque. Déterminons g^{-1}. Soit $y \in [-1,+\infty[$ et $x \in]-\infty,2]$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-4x+3-y = 0.$$

Or, $\Delta' = 4-(3-y) = y+1 \geq 0$. Donc, $x = 2+\sqrt{y+1}$ ou $x = 2-\sqrt{y+1}$. Enfin, $x \in]-\infty,2]$ et donc, $x = 2-\sqrt{y+1}$. En résumé,

$$\forall x \in]-\infty,2],\ \forall y \in [-1,+\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{y+1}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = 2-\sqrt{x+1}.}$$

2. On vérifie facilement que f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$, notée g. Soient alors $x \in]-2,+\infty[$ et $y \in]-\infty,2[$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

(on a ainsi trouvé au plus une valeur pour x à savoir $x = \frac{2y+1}{-y+2}$, mais il n'est pas nécessaire de vérifier que cette expression est bien définie et élément de $]-2,+\infty[$ car on sait à l'avance que y admet au moins un antécédent dans $]-2,+\infty[$, et c'est donc nécessairement le bon). En résumé,

$$\forall x \in]-2,+\infty[,\ \forall y \in]-\infty,2[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,2[,\ g^{-1}(x) = \tfrac{2x+1}{-x+2}}.$$

3. f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$. f est donc bijective de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[\right) = \left[f\left(-\frac{3}{2}\right), \lim_{+\infty} f\right[= [-1,+\infty[$. Notons encore f l'application de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ dans $[-1,+\infty[$ qui à x associe $\sqrt{2x+3}-1$. Soient alors $x \in \left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ et $y \in [-1,+\infty[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-3+(y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1.$$

En résumé, $\forall x \in \left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$, $\forall y \in [-1,+\infty[$, $y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1$. On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = \tfrac{x^2}{2}+x-1.}$$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire. Pour $x \in [0,+\infty[$, $0 \leq f(x) = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1$. Donc, $f([0,+\infty[) \subset [0,1[$. Par parité, $f(]-\infty,0]) \subset]-1,0]$ et même $f(]-\infty,0[) \subset]-1,0[$ car l'image par f d'un réel strictement négatif est un réel strictement négatif. Finalement, $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$. Vérifions alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $[0,+\infty[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq 1$, et positif, car $y \in [0,1[$. On a montré que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x)\ (\text{à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit $y \in]-1,0[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty,0[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq -1$, et strictement négatif, car $y \in]-1,0[$. On a montré que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x)\ (\text{à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x),$$

ce qui montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour $y \in]-1,1[$ donné, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ si $y \geq 0$ et $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$ si $y < 0$. Dans tous les cas, on a $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

En notant encore f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ qui à x associe $\frac{x}{1+|x|}$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \tfrac{x}{1-|x|}.}$$

Correction de l'exercice 157 ▲

---

1. Montrons que la restriction de f à D, notée g, est bien une application de D dans P. Soit $z \in D$. On a $|z| < 1$ et en particulier $z \neq i$. Donc, $f(z)$ existe. De plus,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{2z\bar{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc, $f(z)$ est élément de P. g est donc une application de D dans P.

2. Montrons que g est injective. Soit $(z,z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow iz' - iz = iz - iz' \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

3. Montrons que g est surjective. Soient $z \in D$ et $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ (car } Z \neq 1,$$

(ce qui montre que Z admet au plus un antécédent dans D, à savoir $z = \frac{i(Z+1)}{Z-1}$ (mais on le sait déjà car g est injective). Il reste cependant à vérifier que $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$ est effectivement dans D). Réciproquement, puisque $\mathrm{Re}(Z) < 0$,

$$\left|\frac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$$

(Z étant strictement plus proche de -1 que de 1) et $z \in D$. Finalement g est une bijection de D sur P, et :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

Correction de l'exercice 158 ▲

On peut supposer sans perte de généralité que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. D'après l'exercice 145, puisque $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ est injective, h est injective et puisque $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ est surjective, h est surjective. Déjà h est bijective. Mais alors, h^{-1} est surjective et donc $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ est surjective en tant que composée de surjections. Puis h^{-1} est injective et donc $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective. $f \circ g$ est donc bijective. $f \circ g$ est surjective donc f est surjective. $g \circ h \circ f$ est injective donc f est injective. Donc f est bijective. Enfin $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est bijective en tant que composée de bijections.

Correction de l'exercice 159 ▲

f est bien une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ car, pour tout couple (x,y) d'entiers naturels, l'un des deux entiers $x+y$ ou $x+y+1$ est pair et donc, $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ est bien un entier naturel (on peut aussi constater que $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\ldots+(x+y)$ est entier pour $x+y \geq 1$).
Remarque. La numérotation de $\mathbb{N}^2$ a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	$\ldots$	x	$\ldots$
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

Sur une parallèle à la droite d'équation $y = -x$, la somme $x+y$ est constante. Il en est de même de l'expression $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ et quand on descend de 1 en y, on avance de 1 dans la numérotation. **Lemme**. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! p \in \mathbb{N}/\ \frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$. **Démonstration**. Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)_{p \geq 0}$ est strictement croissante. Néanmoins, on va fournir explicitement p en fonction de n. Soient n et p deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2 + p - 2n \leq 0 \text{ et } p^2 + 3p + 2 - 2n > 0 \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} = -1 + \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).\end{aligned}$$

Le lemme est démontré. Montrons que f est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier n donné). Soient n un entier naturel et $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p est un entier naturel). On pose $\begin{cases} x+y=p \\ y=n-\frac{p(p+1)}{2} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y=n-\frac{p(p+1)}{2} \\ x=p-y=\frac{p(p+3)}{2}-n \end{cases}$. Tout d'abord, $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n-\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2} = n$. Mais il reste encore à vérifier que x et y ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque $\frac{p(p+1)}{2}$ est un entier naturel et que $n \geq \frac{p(p+1)}{2}$, y est bien un entier naturel. Ensuite, $\frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}+p$ est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2}-n \geq \frac{p(p+3)}{2}-\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right) = 0,$$

et x est bien un entier naturel. Ainsi, pour n naturel donné, en posant $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2}-n$ et $y = n-\frac{p(p+1)}{2}$, x et y sont des entiers naturels tels que $f((x,y)) = n$. f est donc surjective. Montrons que f est injective. Pour cela, on montre que si x et y sont des entiers naturels vérifiant $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$, alors nécessairement, $x+y = p$ (et $y = n-\frac{p(p+1)}{2}$). Soient donc x et y deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leq \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+(x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que $x+y = p$. L'unicité du couple (x,y) est donc démontrée. f est une application injective et surjective et donc f est bijective. Sa réciproque est $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ n & \mapsto & \left(\frac{p(p+3)}{2}, n-\frac{p(p+1)}{2}\right) \end{array}$ où $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 161 ▲

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$.
2. En calculant $f(-1)$ nous avons $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$.
3. Maintenant calculons $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}$. Évaluons $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k$.
4. Il s'agit ici de calculer la primitive F de f qui correspond à la somme : $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$. En $F(1) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Correction de l'exercice 163 ▲

L'astuce consiste à écrire $2 = 3-1$ (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3\times p + (-1)^n$$

Où $3\times p$ ($p \in \mathbb{Z}$) représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme. Donc $2^n - (-1)^n = 3p$. Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc 2^n+1 est divisible par 3. Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n+1 = 3p+2$ qui n'est pas divisible par 3.

Pour l'autre assertion regarder $3 = 7-4$.

Correction de l'exercice 169 ▲

Il s'agit de comparer les deux écritures de la fonction

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Pour $x = 1$ et $x = -1$ nous obtenons respectivement les assertions (a) et (b). En dérivant la fonction f et en calculant $f'(1)$, nous obtenons (b). Pour (d) il faut dériver une nouvelle fois.

Correction de l'exercice 170 ▲

$A = (1+i)^n$ a pour module $2^{n/2}$ et pour argument $n\frac{\pi}{4}$ (et B est son conjugué). On en tire grâce à la formule du binôme, et en séparant partie réelle et partie imaginaire : $S_1 = 2^{n/2}\cos n\frac{\pi}{4}$ et et $S_2 = 2^{n/2}\sin n\frac{\pi}{4}$. On a aussi $S_1 = \frac{A+B}{2}$ et $S_2 = \frac{B-A}{2}i$.

Correction de l'exercice 171 ▲

L'application Φ est une bijection : son inverse est Φ elle-même.

Supposons que E soit un ensemble fini. Notre bijection Φ envoie un ensemble $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$ sur un ensemble de même cardinal.

Choisissons E un ensemble à n éléments, et soit $p \leq n$. Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{Q} = \{F \subset E,\ \operatorname{Card}F = p\}.$$

Nous savons que $\operatorname{Card}\mathcal{Q} = C_n^p$ (c'est la définition de C_n^p). De plus

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{Q}) &= \{\Phi(F),\ F \subset E,\ \operatorname{Card}F = p\} \\ &= \left\{\complement F,\ F \subset E,\ \operatorname{Card}F = p\right\} \\ &= \{G \subset E,\ \operatorname{Card}G = n-p\}.\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Card}\Phi(\mathcal{Q}) = C_n^{n-p}$. Et comme Φ est une bijection, $\operatorname{Card}\Phi(\mathcal{Q}) = \operatorname{Card}(\mathcal{Q})$, donc $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Correction de l'exercice 176 ▲

$\sum_{k=0}^n kC_n^k = n2^{n-1}$, $\qquad \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 177 ▲

1.
2. 0 si $p < n$, $(-1)^n$ si $p = n$.
3.

Correction de l'exercice 178 ▲

$(-1)^p C_{n-1}^p$.

Correction de l'exercice 179 ▲

$n2^{n-1}$, $n4^{n-1}$, $3n4^{n-1}$.

Correction de l'exercice 180 ▲

$\frac{n(n^2-1)}{6}$, $\frac{n(n^2-1)(3n^2-12)}{360}$.

Correction de l'exercice 181 ▲

1. $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_n^1 = n$, $\Gamma_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Gamma_2^n = n+1$.
2.
3.

Correction de l'exercice 183 ▲

$p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 188 ▲

1. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geq 1),$$

et donc $S_1 = S_2$. Puis $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.}$$

3. En posant $j = e^{2i\pi/3}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Maintenant,
- si $k \in 3\mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$ car $j^3 = 1$.
- si $k \in 3\mathbb{N}+1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+1$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$
- si $k \in 3\mathbb{N}+2$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+2$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$.

Finalement, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3}(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 2\,\mathrm{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3}(2^n + 2\,\mathrm{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

4. Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = k\binom{n-1}{k-1}.$$

5. $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k)(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

6. **1ère solution.** Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$.
Pour x réel,

$$P(x) = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\,dt = \int_0^1 (1+t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}((1+x)^{n+1} - 1).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1}-1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

7. Pour $1 \leq k \leq n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k = p$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$). Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p}\left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n-p+1}\binom{p+k}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k}{p+1}\\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de PASCAL. Quand on descend dans le triangle de PASCAL, le long de la colonne p, du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

8. (a) Pour n naturel donné, posons $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 ((1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1}) \, dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n \, dx = \int_0^1 x.x(1-x^2)^{n+1} \, dx\\ &= \left[-x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-x^2)^{n+1} \, dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}\end{aligned}$$

et donc $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$ ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$

On a déjà $I_0 = 1$. Puis, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{2}{3}I_0 = \frac{(2n)(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3.1}.$$

(b) Pour n naturel non nul donné :

$$\begin{aligned}1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + ... + (-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1} &= \int_0^1 (1 - \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^4 + ... + (-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}) \, dx\\ &= \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = I_n = \frac{(2n)(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3.1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 189 ▲

La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^k(2c)^{9-k} = (a-b)^9 + ... + \binom{9}{6}(a-b)^6(2c)^3 + ... + (2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}a^k(-b)^{6-k} = a^6 - ... + \binom{6}{4}a^4b^2 - .. + b^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6}\binom{6}{4}2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}\frac{6.5}{2}.2^3 = 3.4.7.3.5.8 = 10080.$$

Correction de l'exercice 190 ▲

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

et

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Correction de l'exercice 191 ▲

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k = \binom{n}{k}a^kb^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1}}{\binom{n}{k}a^kb^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (ce qui équivaut à $n < \frac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n.

2ème cas. Si $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (ce qui équivaut à $n \leq \frac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n.

3ème cas. Si $0 < \frac{na-b}{a+b} \leq n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\frac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).
Si $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, on pose $k = E(\frac{na-b}{a+b})+1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis redécroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k, atteint une et une seule fois.
Si $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice k et à l'indice $k+1$.

Correction de l'exercice 192 ▲

Pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2} = 5n &\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n\\ &\Leftrightarrow n(-24+3(n-1)+(n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2-25 = 0\\ &\Leftrightarrow n = 5.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 193 ▲

$(1+a)^n = (1+a)\ldots(1+a) = 1+na+\ldots \geq 1+na.$

Correction de l'exercice 194 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k2^{n-k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k}+\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}2^{n-2k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k2^{n-2k}+\sqrt{3}\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k2^{n-2k-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k2^{n-2k}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des **entiers** tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n+b_n\sqrt{3}$. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on a aussi $(2-\sqrt{3})^n = a_n-b_n\sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2-3b_n^2 = (a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = (4-3)^n = 1.$$

2. On note que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=(a_n+b_n\sqrt{3})+(a_n-b_n\sqrt{3})=2a_n$. Mais,
$$0<(2-\sqrt{3})^n<1.$$
Par suite,
$$(2+\sqrt{3})^n<(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2a_n<(2+\sqrt{3})^n+1,$$
ou encore
$$2a_n-1<(2+\sqrt{3})^n<2a_n.$$
On en déduit que $E((2+\sqrt{3})^n)=2a_n-1$ et donc que$E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

Correction de l'exercice 195 ▲

1. Soit E un ensemble à n éléments, $n\geq 1$, et a un élément fixé de E. Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E)\\ A & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}A\setminus\{a\}\text{ si }a\in A\\ A\cup\{a\}\text{ si }a\notin A\end{array}\right.\end{array}$.
Montrons que f est involutive (et donc bijective). Soit A un élément de $\mathscr{P}(E)$.
Si $a\notin A$, $f(A)=A\cup\{a\}$ et donc, puisque $a\in A\cup\{a\}$, $f(f(A))=(A\cup\{a\})\setminus\{a\}=A$.
Si $a\in A$, $f(A)=A\setminus\{a\}$ et $f(f(A))=(A\setminus\{a\})\cup\{a\}=A$.
Ainsi, $\forall A\in\mathscr{P}(E)$, $f\circ f(A)=A$ ou encore, $f\circ f=Id_{\mathscr{P}(E)}$.
Maintenant clairement, en notant $\mathscr{P}_p(E)$ (resp. $\mathscr{P}_i(E)$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair), $f(\mathscr{P}_p(E))\subset\mathscr{P}_i(E)$ et $f(\mathscr{P}_i(E))\subset\mathscr{P}_p(E)$. Donc, puisque f est bijective
$$\text{card}(\mathscr{P}_p(E))=\text{card}(f(P_p(E))\leq\text{card}\mathscr{P}_i(E)$$
et de même $\text{card}(\mathscr{P}_i(E))\leq\text{card}\mathscr{P}_p(E)$. Finalement, $\text{card}(\mathscr{P}_i(E))=\text{card}\mathscr{P}_p(E)$.
2. Soient $E=\{a_1,...,a_n\}$ un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E. Soit $k\in\{1,...,n-1\}$.
Il y a C_{n-1}^{k-1} parties à k éléments qui contiennent a. Donc, $nC_{n-1}^{k-1}(=C_{n-1}^{k-1}+...+C_{n-1}^{k-1})$ est donc la somme du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_1 et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_2 ... et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_n.
Dans cette dernière somme, chaque partie à k éléments de E a été comptée plusieurs fois et toutes les parties à k éléments (en nombre égal à C_n^k) ont été comptés un même nombre de fois. Combien de fois a été comptée $\{a_1,a_2...a_k\}$? Cette partie a été comptée une fois en tant que partie contenant a_1, une fois en tant que partie contenant a_2... et une fois comme partie contenant a_k et donc a été comptée k fois.
Conclusion : $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.
3. Soit $E=\{a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\}$ un ensemble à $2n$ éléments. Il y a C_{2n}^n parties à n éléments de E. Une telle partie a k éléments dans $\{a_1,...,a_n\}$ et $n-k$ dans $\{b_1,...,b_n\}$ pour un certain k de $\{0,...,n\}$. Il y a C_n^k choix possibles de k éléments dans $\{a_1,...,a_n\}$ et C_n^{n-k} choix possibles de $n-k$ éléments dans $\{b_1,...,b_n\}$ pour k donné dans $\{0,...,n\}$ et quand k varie de 0 à n, on obtient :
$$C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.$$

Correction de l'exercice 196 ▲

Clairement, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n,0}=1$ (unique solution : $0+0+...+0=0$) et $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{1,k}=1$ (unique solution : $k=k$).

Soient $n\geq 1$ et $k\geq 0$ fixés. $a_{n+1,k}$ est le nombre de solutions en nombre entiers positifs x_i de l'équation $x_1+...+x_n+x_{n+1}=k$. Il y a $a_{n,k}$ solutions telles que $x_{n+1}=0$ puis $a_{n,k-1}$ solutions telles que $x_{n+1}=1$ ... puis $a_{n,0}$ solutions telles que $x_{n+1}=k$.

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{n+1,k}=a_{n,k}+a_{n,k-1}+...+a_{n,0}$ (et on rappelle $a_{n,0}=a_{1,k}=1$).

Montrons alors par récurrence sur n, entier naturel non nul, que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{n,k}=C_{n+k-1}^k$.

Pour $n=1$, on a pour tout naturel k, $a_{1,k}=1=C_{1+k-1}^k$.

Soit $n\geq 1$, supposons que $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{n,k}=C_{n+k-1}^k$. Soit $k\geq 1$.
$$a_{n+1,k}=\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}=\sum_{i=0}^{k}C_{n+i-1}^i=1+\sum_{i=1}^{k}(C_{n+i}^{i+1}-C_{n+i}^i)=1+C_{n+k}^{k+1}-1=C_{n+k}^{k+1},$$
ce qui reste clair pour $k=0$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = C_{n+k-1}^{k}$.

Correction de l'exercice 198 ▲

Tout d'abord si deux ensembles finis A et B sont disjoints alors $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

Si maintenant A et B sont deux ensembles finis quelconques : nous décomposons $A \cup B$ en trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Ces trois ensembles sont disjoints deux à deux donc : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} B \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} A \cap B$.

Mais pour $R \subset S$ nous avons $\operatorname{Card} S \setminus R = \operatorname{Card} S - \operatorname{Card} R$.

Donc $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} A \cap B$.

Donc $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.

Appliquons ceci à $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$$\operatorname{Card} A \Delta B = \operatorname{Card} A \cup B - \operatorname{Card} A \cap B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2 \operatorname{Card} A \cap B.$$

Correction de l'exercice 199 ▲

Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^{k} ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \dots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^{k} = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p 2^{n-p}.$$

Correction de l'exercice 201 ▲

1. Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc C_{52}^{5} mains différentes. Ceci peut être calculé : $C_{52}^{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2598960$.
2. Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan $4 \times C_{48}^{4}$ mains comprenant exactement un as.
3. Il est beaucoup plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet : il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets) ; il y a donc C_{48}^{5} mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet : il y en a donc $C_{52}^{5} - C_{48}^{5}$.
4. Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est C_{48}^{5} (comme la question 3.). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi C_{48}^{5}. Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame *n'est pas* $C_{48}^{5} + C_{48}^{5}$, car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a C_{44}^{5} telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc : $2C_{48}^{5} - C_{44}^{5}$ (on retire une fois les mains comptées deux fois !). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc : $C_{52}^{5} - 2C_{48}^{5} + C_{44}^{5}$.

Correction de l'exercice 205 ▲

1. $(6!)^2$
2. $4! \times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6 \times 12^6$, $4^4 \times 12^8$, $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Correction de l'exercice 206 ▲

1. $(2n)!$.

2. $2(n!)^2$.
3. $2^{n+1} \times n!$.
4. $4 \times n!$.

Correction de l'exercice 207 ▲

1. n^{n^2}.
2. $n^{n(n+1)/2}$.
3. $n \times n^{(n-1)^2}$.
4. $n \times n^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 208 ▲

1.
2.
3. (a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^p$.
   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!}$.

Correction de l'exercice 209 ▲

1.
2. Récurrence. Égalité pour $n \leq 2$ ou les A_i 3 à 3 disjoints.

Correction de l'exercice 210 ▲

3^n.

Correction de l'exercice 211 ▲

1. Comme $\{x_1-1,\ldots,x_p-p\}$ est une partie quelconque de $\{0,\ldots,n-p\}$, on a $N = C_{n-p+1}^{p}$.
2. (a)
   (b) 32951280099.

Correction de l'exercice 212 ▲

1. $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} R_k$ avec $R_0 = 1$.
2. 1,1,2,5,15,52,203.

Correction de l'exercice 216 ▲

1. 1,2,5.
2. $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}$.

Correction de l'exercice 217 ▲

Il y a C_{pq}^{q} choix possibles d'une première classe. Cette première classe étant choisie, il y a $C_{pq-q}^{q} = C_{(p-1)q}^{q}$ choix possibles de la deuxième classe... et C_q^q choix possibles de la p-ième classe. Au total, il y a $C_{pq}^{q} C_{(p-1)q}^{q} \ldots C_q^q$ choix possibles d'une première classe, puis d'une deuxième ...puis d'une p-ième.

Maintenant dans le nombre $C_{pq}^{q} C_{(p-1)q}^{q} \ldots C_q^q$, on a compté plusieurs fois chaque partition, chacune ayant été compté un nombre égal de fois.

On a compté chaque partition autant de fois qu'il y a de permutations des p classes à savoir $p!$. Le nombre cherché est donc :

$$\frac{1}{p!}C_{pq}^{q}C_{(p-1)q}^{q}...C_{q}^{q}=\frac{1}{p!}\frac{(pq)!}{q!((p-1)q)!}\frac{((p-1)q)!}{q!((p-2)q)!}\cdots\frac{(2q)!}{q!q!}\frac{q!}{q!0!}=\frac{(pq)!}{p!(q!)^{p}}.$$

Correction de l'exercice 218 ▲

On place le 0 soit au chiffre des unités, soit au chiffre des dizaines, soit au chiffre des centaines, soit au chiffre des milliers (mais pas au chiffre des dizaines de milliers) et le 0 étant placé, on n'y a plus droit.

Réponse : $4.9.9.9.9=4.9^4=4.(80+1)^2=4.6561=26244$.

Correction de l'exercice 219 ▲

On pose $H=$ "vers le haut" et $D=$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent. Il y en a C_{p+q}^{q} (nombre de choix de l'emplacement du D).

Correction de l'exercice 220 ▲

On note respectivement x, y et z le nombre de pièces de 10, 20 et 50 centimes. Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $10x+20y+50z=10000$ ou encore $x+2y+5z=1000$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. $x+2y=k\Leftrightarrow x=k-2y$ et le nombre de solutions de cette équation est :

$$\sum_{k=0}^{E(k/2)}1=E(\frac{k}{2})+1.$$

Pour $0\leq z\leq 200$ donné, le nombre de solutions de l'équation $x+2y=1000-5z$ est donc $E(\frac{1000-5z}{2})+1$. Le nombre de solutions en nombres entiers de l'équation $x+2y+5z=1000$ est donc

$$\sum_{z=0}^{200}(E(\frac{1000-5z}{2})+1)=\sum_{z=0}^{200}(E(\frac{-5z}{2})+501)=201.501+\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2})=100701+\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2}).$$

Maintenant

$$\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2})=\sum_{k=1}^{100}(E(\frac{-5(2k-1)}{2})+E(\frac{-5(2k)}{2}))=\sum_{k=1}^{100}(E(-5k+\frac{5}{2})-5k)=\sum_{k=1}^{100}(-10k+2)=200-10\frac{100.101}{2}.$$

Le nombre de solutions cherchés est donc $100701-50300=50401$. Il y a 50401 façons de payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Correction de l'exercice 221 ▲

1. $$\begin{aligned}\chi_{A_1\cup...\cup A_n}&=1-\chi_{\overline{A_1\cup...\cup A_n}}=1-\chi_{\overline{A_1}\cap...\cap\overline{A_n}}=1-\chi_{\overline{A_1}}\times...\times\chi_{\overline{A_n}}\\&=1-(1-\chi_{A_1})...(1-\chi_{A_n})=1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n}\chi_{A_{i_1}}...\chi_{A_{i_k}}))\end{aligned}$$

   et en sommant sur l'ensemble des x de E, on obtient le résultat.
2. Pour $1\leq k\leq n$, posons $A_k=\{\sigma\in S_n/\ \sigma(k)=k\}$. L'ensemble des permutations ayant au moins un point fixe est $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$. L'ensemble des permutations sans points fixes est le complémentaire dans S_n de $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$. D'après 1), leur nombre est donc :

$$\begin{aligned}\text{card}(S_n)-\text{card}(A_1\cup A_2...\cup A_n)&=\text{card}(S_n)-\sum_{i=1}^{n}\text{card}(A_i)+\sum_{i<j}\text{card}(A_i\cap A_j)\\&-...+(-1)^k\sum_{i_1<i_2<...<i_k}\text{card}(A_{i_1}\cap...A_{i_k})+...\\&+(-1)^n\text{card}(A_1\cap...\cap A_n).\end{aligned}$$

A_i est l'ensemble des permutations qui fixent i. Il y en a $(n-1)!$ (nombre de permutations de $\{1,...,n\}\setminus\{i\}$). $A_i\cap A_j$ est l'ensemble des permutations qui fixent i et j. Il y en a $(n-2)!$. Plus généralement, $\text{card}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})=(n-k)!$. D'autre part, il y a $n=C_n^1$ entiers i dans $\{1,n\}$ puis C_n^2 couples (i,j) tels que $i<j$ et plus généralement, il y a C_n^k k-uplets $(i_1,...,i_k)$ tels que $i_1<i_2<...<i_k$. Le nombre de dérangements est

$$n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ainsi le « problème des chapeaux »admet pour réponse

$$p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Montrons que cette suite tend très rapidement vers $\frac{1}{e}=0,36...$ quand n tend vers l'infini.
(On adapte un calcul déjà mené pour le nombre e.)
Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$.
Pour $n=0$, $(-1)^{n+1}\int_O^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\int_0^1e^{-t}\,dt=-1+e^{-1}$ et donc, on a bien $e^{-1}=1-\int_0^1e^{-t}\,dt$.
Soit $n\geq 0$. Supposons que $e^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$.
Une intégration par parties fournit

$$\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt=\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\,dt=\frac{1}{(n+1)!}-\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\,dt.$$

Mais alors,

$$e^{-1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+2}\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\,dt.$$

Le résultat est démontré par récurrence.
On en déduit que

$$|p_n-\frac{1}{e}|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt\right|=\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt\leq\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que p_n tend très rapidement vers $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 222 ▲

Soit n un naturel non nul. Dire que f est une surjection de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$ équivaut à dire que deux des entiers de $\{1,...,n+1\}$ ont même image k par f et que les autres ont des images deux à deux distinctes et distinctes de k. On choisit ces deux entiers : C_{n+1}^2 choix et leur image commune : n images possibles ce qui fournit nC_{n+1}^2 choix d'une paire de $\{1,...,n+1\}$ et de leur image commune. Puis il y a $(n-1)!$ choix des images des $n-1$ éléments restants. Au total, il y a $n!\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n.(n+1)!}{2}$ surjections de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$.

Correction de l'exercice 223 ▲

Soit $n\geq 5$. De chaque sommet part $n-1$ droites (vers les $n-1$ autres sommets) dont 2 sont des cotés et $n-3$ des diagonales. Comme chaque diagonale passe par 2 sommets , il y a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Ces diagonales se recoupent en $C_{n(n-3)/2}^2$ points distincts ou confondus. Dans ce décompte, chaque sommet a été compté autant de fois que l'on a choisi une paire de deux diagonales passant par ce sommet à savoir C_{n-3}^2. Maintenant, il y a n sommets.

Réponse :

$$\begin{aligned}C_{n(n-3)/2}^2-nC_{n-3}^2&=\frac{1}{2}\frac{n(n-3)}{2}(\frac{n(n-3)}{2}-1)-n\frac{(n-3)(n-4)}{2}=\frac{n(n-3)}{8}(n(n-3)-2-4(n-4))\\&=\frac{n(n-3)}{8}(n^2-7n+14)\end{aligned}$$

Les diagonales se recoupent en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points distincts ou confondus et distincts des sommets (ou encore en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points au maximum).

Correction de l'exercice 224 ▲

1. On a bien sûr $P(1) = 2$. Soit $n \geq 1$. On trace n droites vérifiant les conditions de l'énoncé. Elles partagent le plan en $P(n)$ régions. On trace ensuite D_{n+1}, une $(n+1)$ème droite. Par hypothèse, elle coupe chacune des n premières droites en n points deux à deux distincts. Ces n points définissent $(n+1)$ intervalles sur la droite D_{n+1}. Chacun de ces $(n+1)$ intervalles partage une des $P(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $P(n+1) = P(n) + (n+1)$.
   Soit $n \geq 2$.
   $$P(n) = P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(P(k+1) - P(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$
   $$= \frac{n^2+n+2}{2}$$
   ce qui reste vrai pour $n = 1$.
2. On a bien sûr $Q(1) = 2$.Soit $n \geq 1$. On trace n plans vérifiant les conditions de l'énoncé. Ils partagent l'espace en $Q(n)$ régions. On trace ensuite P_{n+1}, un $(n+1)$ème plan. Par hypothèse, il recoupe chacun des n premiers plans en n droites vérifiant les conditions du 1). Ces n droites délimitent $P(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ régions sur le plan P_{n+1}. Chacune de ces régions partage une des $Q(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $Q(n+1) = Q(n) + P(n) = Q(n) + \frac{n^2+n+2}{2}$.
   Soit $n \geq 2$.
   $$Q(n) = P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(Q(k+1) - Q(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+2}{2}) = 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k$$
   $$= (n+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^3+5n+6}{6}$$

Correction de l'exercice 225 ▲

Soient n et k des entiers naturels tels que $2 \leq k \leq n-1$.

Soit E un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E.

Il y a P_n^k partitions de E en k classes. Parmi ces partitions, il y a celles dans lesquelles a est dans un singleton. Elles s'identifient aux partitions en $k-1$ classes de $E \setminus \{a\}$ et sont au nombre de P_{n-1}^{k-1}. Il y a ensuite les partitions dans lesquelles a est élément d'une partie de cardinal au moins 2. Une telle partition est obtenue en partitionnant $E \setminus \{a\}$ en k classes puis en adjoignant à l'une de ces k classes au choix l'élément a. Il y a $kP_{n-1}k$ telles partitions. Au total, $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$.

Valeurs de P_n^k pour $1 \leq k, n \leq 5$.

n / k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Exprimons maintenant en fonction des P_n^k, le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

Si $p > n$, il n'y a pas de surjections de E_n dans E_p (où E_n et E_p désignent des ensembles à n et p éléments respectivement).

On suppose dorénavant $p \leq n$. La donnée d'une surjection f de E_n sur E_p équivaut à la donnée d'une partition de l'ensemble E_n en p classes (chaque élément d'une même classe ayant même image par f) puis d'une bijection de l'ensemble des parties de la partition vers E_p.

Au total, il y a donc $p!P_n^k$ surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments pour $1 \leq p \leq n$.

Correction de l'exercice 238 ▲

1. $a = 33$, $b = -200$.
2.

Correction de l'exercice 241 ▲

1. Récurrence sur n.

2. Si $a > n$, alors $a = b+1$ avec $b \geq n$, donc $f(b) \geq n$, donc $f(f(b)) \geq f(a)$. Contradiction.
3.

Correction de l'exercice 242 ▲

Si $n \geq 366$, on a clairement $p_n = 1$ (Principe des tiroirs : si 366 personnes sont à associer à 365 dates d'anniversaire, alors 2 personnes au moins sont à associer à la même date d'anniversaire).

Si $2 \leq n \leq 365$, on a $p_n = 1 - q_n$ où q_n est la probabilité que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Il y a $(365)^n$ répartitions possibles des dates d'anniversaires (cas possibles) et parmi ces répartitions, il y en a $365.364.363....(365-n+1)$ telles que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Finalement

$$p_n = 1 - \frac{1}{(365)^n}365.364.363....(365-n+1) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1}\frac{365-k}{365} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1}(1-\frac{k}{365}).$$

Ensuite,

$$p_n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1}(1-\frac{k}{365}) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-\frac{k}{365}) \leq \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1-\frac{k}{365}) \geq \ln 2.$$

Maintenant, soit $x \in [0,1[$. On a

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt \geq \int_0^x \frac{1}{1-0}dt = x.$$

Pour k élément de $\{1,...,n-1\}(\subset \{1,...,364\})$, $\frac{k}{365}$ est un réel élément de $[0,1[$.

En appliquant l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1-\frac{k}{365}) \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{365} = \frac{n(n-1)}{730}.$$

Ainsi,

$$p_n \geq \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{n(n-1)}{730} \geq \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 730\ln 2 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{1+\sqrt{1+2920\ln 2}}{2} = 22,99... \Leftrightarrow n \geq 23.$$

Finalement, dans un groupe d'au moins 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire.

Correction de l'exercice 243 ▲

1. Notre calendrier est 400 ans périodique (et presque $4.7 = 28$ ans périodique). En effet,
   (a) la répartition des années bissextiles est 400 ans périodique (1600 et 2000 sont bissextiles mais 1700, 1800 et 1900 ne le sont pas (entre autre pour regagner 3 jours tous les 400 ans et coller le plus possible au rythme du soleil))
   (b) il y a un nombre entier de semaines dans une période de 400 ans. En effet, sur 400 ans, le quart des années, soit 100 ans, moins 3 années sont bissextiles et donc sur toute période de 400 ans il y a 97 années bissextiles et 303 années non bissextiles.
   Une année non bissextile de 365 jours est constituée de $52.7+1$ jours ou encore d'un nombre entier de semaines plus un jour et une année bissextile est constituée d'un nombre entier de semaine plus deux jours.
   Une période de 400 ans est donc constituée d'un nombre entier de semaines plus : $97.2+303.1 = 194+303 = 497 = 7.71$ jours qui fournit encore un nombre entier de semaines.
2. Deux périodes consécutives de 28 ans ne contenant pas d'exception (siècles non bissextiles) reproduisent le même calendrier. En effet, les 7 années bissextiles fournissent un nombre entiers de semaines plus 2.7 jours $= 2$ semaines et les 21 années non bissextiles fournissent un nombre entier de semaines plus 21.1 jours $= 3$ semaines.
3. D'après ce qui précède, il suffit de compter les 1ers de l'an qui tombe un dimanche ou un samedi sur une période de 400 ans donnée, par exemple de 1900 à 2299 (inclus).
   On décompose cette période comme suit :

$$1900,\ 1901 \to 1928,\ 1929 \to 1956,\ 1957 \to 1984,\ 1985 \to 2012,\ 2013 \to 2040,\ 2041 \to 2068,\ 2069 \to 2096,$$
$$2097 \to 2100,\ 2101 \to 2128,\ 2129 \to 2156,\ 2157 \to 2184,\ 2185 \to 2200,\ 2201 \to 2228\ 2229 \to 2256,$$
$$2257 \to 2284,\ 2285 \to 2299.$$

4. On montre ensuite que sur toute période de 28 ans sans siècle non bissextile, le premier de l'an tombe un même nombre de fois chaque jour de la semaine (Lundi, mardi,..). (La connaissance des congruences modulo 4 et 7 seraient bien utile). Quand on passe d'une année non bissextile à l'année suivante, comme une telle année contient un nombre entier de semaines plus un jour, le 1er de l'an tombe un jour plus tard l'année qui suit et deux jours plus tard si l'année est bissextile. Par exemple,

   1er janvier 1998 : jeudi 1999 : vendredi 2000 : samedi 2001 : Lundi 2002 : Mardi 2003 : Mercredi 2004 : Jeudi 2005 : samedi...

   Notons A,B,C,D,E,F,G les jours de la semaine. Sur une période de 28 ans sans siècle non bissextile finissant par exemple une année bissextile, on trouve la séquence suivante :

   ABCD FGAB DEFG BCDE GABC EFGA CDEF (puis çà redémarre ABCD...) soit 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F, et 4G.

5. Il reste à étudier les périodes à exception (soulignées dans le 3)).

   Détermination du 1er janvier 1900. Le 1er janvier 1998 était un jeudi . Il en est donc de même du 1er janvier 1998-28 = 1970 et des premiers janvier 1942 et 1914 puis on remonte :

   1914 Jeudi 1913 Mercredi 1912 Lundi 1911 Dimanche 1910 Samedi 1909 Vendredi 1908 Mercredi 1907 Mardi 1906 Lundi 1905 Dimanche 1904 Vendredi 1903 Jeudi 1902 Mercredi 1901 Mardi 1900 Lundi (1900 n'est pas bissextile)

   Les premiers de l'an 2000, 2028 , 2056 et 2084 sont des samedis, 2088 un jeudi, 2092 un mardi, 2096 un dimanche et donc 2097 mardi 2098 mercredi 2099 jeudi 2100 vendredi.

   2101 est un samedi de même que 2129, 2157, 2185 ce qui donne de 2185 à 2200 inclus la séquence :

   S D L Ma J V S D Ma Me J V D L Ma Me

   2201 est un jeudi de même que 2285 ce qui donne de 2285 à 2299 inclus la séquence :

   J V S D Ma Me J V D L Ma Me V S D

Le décompte des Lundis , mardis ... soulignés est : 6D 4L 6Ma 5Me 5J 6V 4S. Dans toute période de 400 ans, le 1er de l'an tombe 2 fois de plus le dimanche que le samedi et donc plus souvent le dimanche que le samedi.

Correction de l'exercice 244 ▲

Écrivons la décomposition de $15! = 1.2.3.4\dots 15$ en facteurs premiers. $15! = 2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13$. Un diviseur de $15!$ s'écrit $d = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta.11^\varepsilon.13^\eta$ avec $0 \leq \alpha \leq 11$, $0 \leq \beta \leq 6$, $0 \leq \gamma \leq 3$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de $15!$. Le nombre de diviseurs est donc $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Correction de l'exercice 245 ▲

Il sagit de calculer 100^{1000} modulo 13. Tout d'abord $100 \equiv 9 \pmod{13}$ donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \pmod{13}$. Or $9^2 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$, $9^3 \equiv 9^2.9 \equiv 3.9 \equiv 1 \pmod{13}$, Or $9^4 \equiv 9^3.9 \equiv 9 \pmod{13}$, $9^5 \equiv 9^4.9 \equiv 9.9 \equiv 3 \pmod{13}$. Donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9^{3.333+1} \equiv (9^3)^{333}.9 \equiv 1^{333}.9 \equiv 9 \pmod{13}$.

Correction de l'exercice 246 ▲

La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $96842 = 256 \times 378 + 74$ et $96842 = 258 \times 375 + 92$.

Correction de l'exercice 249 ▲

Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod{8}.$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{8}.$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc Si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Correction de l'exercice 252 ▲

Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Correction de l'exercice 262 ▲

Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

Correction de l’exercice 265 ▲

Pour 2. Si p divise $b-a$ alors p divise aussi $b^n - a^n$ d’après la formule $(*)$.

Pour 3. On utilise le résultat de la question précédente avec $n = p-k-1$ pour écrire b^{p-k-1} en fonction de a^{p-k-1} modulo p dans

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}.$$

On peut alors conclure.

Correction de l’exercice 280 ▲

1. Soit n un nombre impair, alors il s’écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Maintenant $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 4p(p+1)+1$. Donc $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.
2. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Et $n^2 = 4p^2$. Si p est pair alors p^2 est pair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 8, donc $n^2 \equiv 0 \pmod 8$. Si p est impair alors p^2 est impair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 4 mais pas par 8, donc $n^2 \equiv 4 \pmod 8$.
3. Comme a est impair alors d’après la première question $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, et de même $c^2 \equiv 1 \pmod 8$, $c^2 \equiv 1 \pmod 8$. Donc $a^2+b^2+c^2 \equiv 1+1+1 \equiv 3 \pmod 8$. Pour l’autre reste, écrivons $a = 2p+1$ et $b = 2q+1$, $c = 2r+1$, alors $2ab = 2(2p+1)(2q+1) = 8pq+4(p+q)+2$. Alors $2(ab+bc+ca) = 8pq+8qr+8pr+8(p+q+r)+6$, donc $2(ab+bc+ca) \equiv 6 \pmod 8$.
4. Montrons par l’absurde que le nombre $a^2+b^2+c^2$ n’est pas le carré d’un nombre entier. Supposons qu’il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2+b^2+c^2 = n^2$. Nous savons que $a^2+b^2+c^2 \equiv 3 \pmod 8$. Si n est impair alors $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ et si n est pair alors $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$. Dans tous les cas n^2 n’est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l’hypothèse de départ est fausse donc $a^2+b^2+c^2$ n’est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour $2(ab+bc+ca)$.

   Pour $ab+bc+ca$ l’argument est similaire : d’une part $2(ab+bc+ca) \equiv 6 \pmod 8$ et d’autre part si, par l’absurde, on suppose $ab+bc+ca = n^2$ alors selon la parité de n nous avons $2(ab+bc+ca) \equiv 2n^2 \equiv 2 \pmod 8$ ou à $0 \pmod 8$. Dans les deux cas cela aboutit à une contradiction. Nous avons montrer que $ab+bc+ca$ n’est pas un carré.

Correction de l’exercice 286 ▲

$7^4 \equiv 1(\bmod 10)$, $7^2 \equiv 1(\bmod 4)$ et $7^{7^{7^{7}}}$ est impair donc $7^{7^{7^{7^{7}}}} \equiv 7 \equiv 3(\bmod 4)$ et $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} \equiv 7^3 \equiv 3(\bmod 10)$.

Correction de l’exercice 287 ▲

1.
2. $x = 1, y = 1$ ou $x = 2, y = 3$.

Correction de l’exercice 289 ▲

reste$= 2$.

Correction de l’exercice 293 ▲

$n^2+3n+5 \equiv (n-59)^2 - 88(\bmod 121)$.

Si 121 divise n^2+3n+5, alors $11 \mid n-59 \Rightarrow$ contradiction.

Correction de l’exercice 296 ▲

$x \equiv y(\bmod 4)$.

Correction de l’exercice 297 ▲

1.
2. Récurrence : $a^{4\times 10^{k+1}}-1=(a^{4\times 10^k}-1)(a^{4\times 10^k\times 9}+\cdots+a^{4\times 10^k\times 0})$.
3. $x=123456789^{800000001/3}$.

Correction de l'exercice 298 ▲

$56786730=2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 31\times 61$. Pour tous ces facteurs premiers, on a $\varphi(p)\mid 60$.

Correction de l'exercice 299 ▲

L'ordre de $\dot{2}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise p donc est égal à p et cet ordre divise $\varphi(q)=q-1$.

Correction de l'exercice 302 ▲

Montrons par récurrence que, pour $n\geq 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais à coup sûr pas un entier). Pour $n=2$, $H_2=\frac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé. Soit $n\geq 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2\leq k\leq n$, on ait $H_k=\frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair. (Recherche. L'idée $H_{n+1}=\frac{p_n}{q_n}+\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)p_n+q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sur que si $(n+1)p_n+q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc n pair)

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n=2k$ où $k\in\mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1}=\frac{(2k+1)p_n+q_n}{(2k+1)q_n}$ et H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n=2k-1$ où $k\geq 2$ (de sorte que $2k-1\geq 3$).

$$H_{n+1}=\sum_{i=1}^{2k}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}$$

(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}=\frac{1}{2}H_k+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}.$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est impair, on voit que $\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}$ est du type $\frac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2\leq k\leq 2k-1=n$, par hypothèse de récurrence, $H_k=\frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1}=\frac{p_k}{2q_k}+\frac{K}{2K'+1}=\frac{(2K'+1)p_k+2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$ est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $2qk(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est bien dans tous les cas de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et donc n'est pas un entier.

Correction de l'exercice 303 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 25 fournit un quotient entier q et et un reste r élément de $\{0,1,...,24\}$ tels que $n=25q+r$.

On a alors

$$E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25})))=E(\frac{25q+r+2-q}{3})=E(8q+\frac{r+2}{3})=8q+E(\frac{r+2}{3}),$$

et

$$E(\frac{8n+24}{25})=E(\frac{8(25q+r)+24}{25})=8q+E(\frac{8r+24}{25}).$$

Pour montrer l'égalité de l'énoncé, il reste donc à vérifier les 25 égalités $E(\frac{r+2}{3})=E(\frac{8r+24}{25})$, $0\leq r\leq 24$, $(*)$, ce qui peut déjà se vérifier « à la main ».

Diminuons encore le nombre de vérifications. La division euclidienne de r par 3 s'écrit $r=3k+l$ avec $0\leq l\leq 2$. Mais alors,

$$E(\frac{r+2}{3})=k+E(\frac{l+2}{3})\text{ et }E(\frac{8r+24}{25})=E(\frac{25k-k+8l+24}{25})=k+E(\frac{-k+8l+24}{25}).$$

Si $l = 0$, k varie de 0 à 8 et dans ce cas, $0 \leq \frac{-k+24}{25} = \frac{-k+8l+24}{25} \leq \frac{24}{25} < 1$. Par suite,

$$E(\frac{-k+8l+24}{25}) = 0 = E(\frac{2}{3}) = E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ quand $r \in \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.

Si $l = 1$ ou $l = 2$, $E(\frac{l+2}{3}) = 1$ et d'autre part, k varie de 0 à 7. Dans ce cas,

$$1 = \frac{-7+8+24}{25} \leq \frac{-k+8l+24}{25} \leq \frac{16+24}{25} < 2$$

et donc

$$E(\frac{-k+8l+24}{25}) = 1 = E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ pour les autres valeurs de r. Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{8n+24}{25}).}$$

Correction de l'exercice 308 ▲

Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

1. $126 = 2.3^2.7$ et $230 = 2.5.23$ donc le pgcd de 126 et 230 est 2.
2. $390 = 2.3.5.13$, $720 = 2^4.3^2.5$, $450 = 2.3^2.5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.
3. $\text{pgcd}(180,606,750) = 6$.

Correction de l'exercice 310 ▲

Soient a,b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a',b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.

Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a',b') $(a' \leqslant b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1,20),(3,17),(7,13),(9,11).$$

Pour obtenir les couples (a,b) recherchés $(a \leqslant b)$, il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18,342),(54,306),(126,234),(162,198).$$

Correction de l'exercice 314 ▲

1. $\text{pgcd}(18480,9828) = 84$;
2. $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Correction de l'exercice 316 ▲

Comme le pgcd de 955 et 183 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(m_0,n_0) = (-32,167)$. Les solutions sont exactement les couples $(m,n) = (m_0 - 83k, n_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 321 ▲

1. $a = 9b + 10$.
2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide. $a = 9b+10$, $b = 12345678 \times 10 + 9$, $10 = 1 \times 9 + 1$. Donc le pgcd vaut 1 ;
3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin : $1 = 10 - 9$, puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide : $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$. Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation : $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 12345679a - 111111112b$.

Correction de l'exercice 323 ▲

En divisant par 45 (qui est le pgcd de $1665, 1035, 45$) nous obtenons l'équation équivalente :

$$37x + 23y = 1 \qquad (E)$$

Comme le pgcd de 37 et 23 est 1, alors d'après le théorème de Bézout cette équation (E) a des solutions.

L'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd de 37 et 23 fourni les coefficients de Bézout : $37 \times 5 + 23 \times (-8) = 1$. Une solution particulière de (E) est donc $(x_0, y_0) = (5, -8)$.

Nous allons maintenant trouver l'expression générale pour les solutions de l'équation (E). Soient (x, y) une solution de l'équation $37x + 23y = 1$. Comme (x_0, y_0) est aussi solution, nous avons $37x_0 + 23y_0 = 1$. Faisons la différence de ces deux égalités pour obtenir $37(x - x_0) + 23(y - y_0) = 0$. Autrement dit

$$37(x - x_0) = -23(y - y_0) \quad (*)$$

On en déduit que $37 | 23(y - y_0)$, or $\mathrm{pgcd}(23, 37) = 1$ donc par le lemme de Gauss, $37 | (y - y_0)$. (C'est ici qu'il est important d'avoir divisé par 45 dès le début !) Cela nous permet d'écrire $y - y_0 = 37k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Repartant de l'égalité $(*)$: nous obtenons $37(x - x_0) = -23 \times 37 \times k$. Ce qui donne $x - x_0 = -23k$. Donc si (x, y) est solution de (E) alors elle est de la forme : $(x, y) = (x_0 - 23k, y_0 + 37k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, si (x, y) est de cette forme alors c'est une solution de (E) (vérifiez-le !).

Conclusion : les solutions sont

$$\left\{(5 - 23k, -8 + 37k) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction de l'exercice 355 ▲

$(a + b) \wedge m = d$.

Correction de l'exercice 356 ▲

$= |a - b|(a \wedge b)^2$ ou $3|a - b|(a \wedge b)^2$.

Correction de l'exercice 357 ▲

$$8(n^3 + n) = (2n + 1)(4n^2 - 2n + 5) - 5 \Rightarrow d = (2n + 1) \wedge 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5), & \mathrm{d} = 5 \\ \text{si } n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5), & \mathrm{d} = 1. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 358 ▲

$(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13) = 1$.

Correction de l'exercice 359 ▲

$\{a, b\} \in \big\{\{50, 600\}, \{150, 200\}\big\}$.

Correction de l'exercice 360 ▲

$\{a, b\} \in \big\{\{1, 192\}, \{3, 32\}, \{7, 126\}, \{14, 63\}\big\}$.

Correction de l'exercice 361 ▲

$\{x, y\} = \{147, 252\}$.

Correction de l'exercice 362 ▲

$x = 14k, \quad y = 15k$.

Correction de l'exercice 363 ▲

x impair, $y = 2 - x$.

Correction de l'exercice 364 ▲

$x = 1$ ou $y = 1$.

Correction de l'exercice 365 ▲

$(300,150)$, $(150,100)$, $(100,75)$, $(75,60)$, $(60,50)$.

Correction de l'exercice 366 ▲

1. $a^m - 1 \mid (a^{qm} - 1)a^r = a^n - a^r$.
2. $A \wedge (AQ + R) = A \wedge R$. Algorithme d'Euclide sur les exposants de a.
3. ssi $m \mid n$.

Correction de l'exercice 368 ▲

1.
2.
3. $x = 1 + 11k, \quad y = -1 + 7k$.

Correction de l'exercice 369 ▲

1. $x = 67 - 71k, \quad y = -89 + 95k$.
2. $x = 24 + 53k, \quad y = 9 + 20k$.
3. $x = -49 + 20k - 5m, \quad y = 49 - 20k + 4m, \quad z = -7 + 3k$.

Correction de l'exercice 371 ▲

1. $x \equiv 7422 \pmod{13860}$.
2. $x \equiv 7 \pmod{60}$.

Correction de l'exercice 372 ▲

785.

Correction de l'exercice 374 ▲

1. Nous savons que
$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$
pour $x = 2^a$ nous obtenons :
$$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$
Donc $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$.
2. Montrons la contraposée. Supposons que p ne soit pas premier. Donc $p = ab$ avec $1 < p, q < a$. Par la question précédente $2^a - 1$ divise $2^p - 1$ (et $1 < 2^a - 1 < 2^p - 1$). Donc $2^p - 1$ n'est pas un nombre premier.

3. Nous supposons $a \geq b$. Nous allons montrer que faire l'algorithme d'Euclide pour le couple $(2^a-1, 2^b-1)$ revient à faire l'algorithme d'Euclide pour (a,b). Tout d'abord rappellons la formule qui est à la base de l'algorithme d'Euclide : $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a-b,b)$. Appliqué à 2^a-1 et 2^b-1 cela donne directement $\text{pgcd}(2^a-1,2^b-1) = \text{pgcd}(2^a-2^b, 2^b-1)$. Mais $2^a-2^b = 2^b(2^{a-b}-1)$ d'où $\text{pgcd}(2^a-1,2^b-1) = \text{pgcd}(2^b(2^{a-b}-1), 2^b-1) = \text{pgcd}(2^{a-b}-1,2^b-1)$. La dernière égalité vient du fait 2^b et 2^b-1 sont premiers entre eux (deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux).

   Nous avons montrer : $\text{pgcd}(2^a-1,2^b-1) = \text{pgcd}(2^{a-b}-1,2^b-1)$. Cette formule est à mettre en parallèle de $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a-b,b)$. En itérant cette formule nous obtenons que si $a = bq+r$ alors : $\text{pgcd}(2^a-1,2^b-1) = \text{pgcd}(2^{a-bq}-1,2^b-1) = \text{pgcd}(2^r-1,2^b-1)$ à comparer avec $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a-bq,b) = \text{pgcd}(r,b)$. Nous avons notre première étape de l'algorithme d'Euclide. En itérant l'algorithme d'Euclide pour (a,b), nous nous arêtons au dernier reste non nul : $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r) = \cdots = \text{pgcd}(r_n,0) = r_n$. Ce qui va donner pour nous $\text{pgcd}(2^a-1,2^b-1) = \text{pgcd}(2^b-1,2^r-1) = \cdots = \text{pgcd}(2^{r_n}-1,2^0-1) = 2^{r_n}-1$.

   Bilan : $\text{pgcd}(2^a-1,2^b-1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)}-1$.

Correction de l'exercice 375 ▲

Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et $a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors un nombre premier divisant ab et $a+b$. Par le lemme d'Euclide comme $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$. Par exemple supposons que $p|a$. Comme $p|a+b$ alors p divise aussi $(a+b)-a$, donc $p|b$. δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux.

D'après le lemme de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a. Donc p est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 377 ▲

1. Étant donné $0 < i < p$, nous avons
$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$
Comme C_p^i est un entier alors $i!$ divise $p(p-1)\dots(p-(i+1))$. Mais $i!$ et p sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse $0<i<p$). Donc d'après le théorème de Gauss : $i!$ divise $(p-1)\dots(p-(i+1))$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ki! = (p-1)\dots(p-(i+1))$. Maintenant nous avons $C_p^i = pk$ donc p divise C_p^i.
2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat : pour p premier et $a \in \mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv a \pmod p$. Fixons p. Soit l'assertion
$$(\mathscr{H}_a) \quad a^p \equiv a \pmod p.$$
Pour $a=1$ cette assertion est vraie ! Étant donné $a \geq 1$ supposons que $\mathscr{H}_a$ soit vraie. Alors
$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i.$$
Mais d'après la question précédente pour $0<i<p$, p divise C_p^i. En termes de modulo nous obtenons :
$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p \pmod p.$$
Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $a^p \equiv a \pmod p$, donc
$$(a+1)^p \equiv a+1 \pmod p.$$
Nous venons de prouver que $\mathscr{H}_{a+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit $a \in \mathbb{N}^*$ nous avons :
$$a^p \equiv a \pmod p.$$

Correction de l'exercice 379 ▲

1. Fixons n et montrons la récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $k=0$. Supposons la formule vraie au rang k. Alors
$$\begin{aligned}(2^{2^n}-1) \times \prod_{i=0}^{k}(2^{2^{n+i}}+1) &= (2^{2^n}-1) \times \prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}}+1) \times (2^{2^{n+k}}+1) \\ &= (2^{2^{n+k}}-1) \times (2^{2^{n+k}}+1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1.\end{aligned}$$
Nous avons utiliser l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montrer la formule au rang $k+1$. Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons $m = n+k$, alors l'égalité précédente devient :

$$F_m + 2 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n}^{m-1} F_i.$$

Soit encore :

$$F_n \times (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n+1}^{m-1} F_i \quad - \quad F_m = 2.$$

Si d est un diviseur de F_n et F_m alors d divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquent $d = 1$ ou $d = 2$. Mais F_n est impair donc $d = 1$. Nous avons montrer que tous diviseurs de F_n et F_m est 1, cela signifie que F_n et F_m sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors $\{p_1, \dots, p_N\}$. Prenons alors $N+1$ nombres de la famille F_i, par exemple $\{F_1, \dots, F_{N+1}\}$. Chaque F_i, $i = 1, \dots, N+1$ est divisible par (au moins) un facteur premier p_j, $j = 1, \dots, N$. Nous avons $N+1$ nombres F_i et seulement N facteurs premiers p_j. Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts F_k et $F_{k'}$ (avec $1 \leq k, k' \leq N+1$) qui ont un facteur premier en commun. En conséquent F_k et $F_{k'}$ ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Correction de l'exercice 386 ▲

1. X est non vide car, par exemple pour $k = 2$, $4k+3 = 11$ est premier.
2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell + 4(k+\ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$. Si l'on note l'entier $k' = 4k\ell + k + \ell$ alors $(4k+1)(4\ell+1) = 4k'+1$, ce qui est bien de la forme voulue.
3. Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. Ici a n'est pas divisible par 2, supposons –par l'absurde– que a n'a pas de diviseur de la forme $4k+3$, alors tous les diviseurs de a sont de la forme $4k+1$. C'est-à-dire que a s'écrit comme produit de nombre de la forme $4k+1$, et par la question précédente a peut s'écrire $a = 4k'+1$. Donc $a \equiv 1 \pmod 4$. Mais comme $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Nous obtenons une contradiction. Donc a admet une diviseur premier p de la forme $p = 4\ell + 3$.
4. Dans l'ensemble $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ il y a tous les nombres premiers de la formes $4k+3$. Le nombre p est premier et s'écrit $p = 4\ell+3$ donc p est un élément de X, donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p = p_i$. Raisonnons modulo $p = p_i$: $a \equiv 0 \pmod p$ car p divise a. D'autre part $a = 4p_1 \dots p_n - 1$ donc $a \equiv -1 \pmod p$. (car p_i divise $p_1 \dots p_n$). Nous obtenons une contradiction, donc X est infini : il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$. Petite remarque, tous les nombres de la forme $4k+3$ ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour $k = 3$, $4k+3 = 15$ n'est pas premier.

Correction de l'exercice 387 ▲

1. Supposons que $a^n + 1$ est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que n n'est pas de la forme 2^k, c'est-à-dire que $n = p \times q$ avec p un nombre premier > 2 et $q \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la formule

$$x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1})$$

avec $x = a^q$:

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1)(1 - a^q + (a^q)^2 + \dots + (a^q)^{p-1}).$$

Donc $a^q + 1$ divise $a^n + 1$ et comme $1 < a^q + 1 < a^n + 1$ alors $a^n + 1$ n'est pas premier. Par contraposition si $a^n + 1$ est premier alor $n = 2^k$.

2. Cette conjecture est fausse, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour $n = 5$ nous obtenons :

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

Correction de l'exercice 390 ▲

a, b, c 2 à 2 premiers entre eux.

Correction de l'exercice 391 ▲

Décomposer en facteurs premiers.

Correction de l'exercice 394 ▲

Récurrence.

Correction de l'exercice 395 ▲

On suppose a,r entiers supérieurs ou égaux à 2.

$a-1 \mid a^r-1$ donc $a=2$. Si $r=pq$ alors $2^p-1 \mid 2^r-1$ donc r est premier.

La réciproque est fausse, $2^{11}-1=23\times 89$.

Correction de l'exercice 396 ▲

1.
2. $M_{11}=23\times 89$.
3.
4.

Correction de l'exercice 400 ▲

1. $(-1)^{(p-1)/2}\equiv 1 (\operatorname{mod} p)$.
2.
3.
4.

Correction de l'exercice 402 ▲

498.

Correction de l'exercice 403 ▲

$H_n \Rightarrow H_{2n} \Rightarrow H_{2n+1}$.

Correction de l'exercice 408 ▲

Remarquons d'abord que pour $z\in\mathbb{C}$, $z\bar{z}=|z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i}=\frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{9-24+12i+18i}{9+16}=\frac{-15+30i}{25}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{5}=\frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2=\frac{-8+6i}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i=-\frac{23}{25}+\frac{36}{25}i.$$

Soit $z=\frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\bar{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\bar{z}=-3$.

Correction de l'exercice 410 ▲

1. $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\sqrt{3}$.

2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$: posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $2\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Donc $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Et ensuite $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Comme $0 \leq \theta = \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des nombres positifs. Donc

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 414 ▲

$9-7i$; $\quad -6i$; $\quad -0{,}3+1{,}1i$; $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$.

Correction de l'exercice 415 ▲

$\rho = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; $\quad \rho = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{10}$; $\quad \rho = 1$, $\theta = 2\varphi + \pi$.

Correction de l'exercice 417 ▲

Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction de l'exercice 418 ▲

Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction de l'exercice 420 ▲

D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu} + e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}} + e^{-i\frac{u-v}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}}2\cos\frac{u-v}{2} \\ &= 2\cos\frac{u-v}{2}e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.

Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ alors $2\cos\frac{\theta}{2}$ est le module de z et $3\theta/2$ est son argument ; par contre si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ le module est $2|\cos\frac{\theta}{2}|$ et l'argument $3\theta/2+\pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi} = -1$).

Correction de l'exercice 421 ▲

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i.$$

On remarque $1 = i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = i^{32}$.

Correction de l'exercice 427 ▲

Écrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n}\left(z^k + \bar{z}^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}2\rho^k\cos k\theta \\
&= 2^n.\rho.\rho^2.\dots.\rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta \\
&= 2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 428 ▲

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et z le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. Soit $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Alors, $\alpha = u+v$ et $\beta = u-v$ et :

$$\begin{aligned}
z &= e^{i\alpha} + e^{i\beta} \\
&= e^{iu+iv} + e^{iu-iv} \\
&= e^{iu}(e^{iv} + e^{-iv}) \\
&= 2\cos(v)e^{iu} \\
&= 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}
\end{aligned}$$

On en déduit la forme trigonométrique de z :

$$|z| = 2|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| \quad \text{et, lorsque } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \neq 0 :$$

$$Arg(z) = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0 \\ \pi + \frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0 \end{cases}$$

(Attention, si $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$, $z = 2\cos v e^{iu}$ n'est pas la forme trigonométrique de z !).

Soit $n \in |||$. Calculons z^n de deux façons différentes : d'une part

$$z^n = (e^{i\alpha} + e^{i\beta})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p e^{ip\alpha}e^{i(n-p)\beta},$$

et d'autre part, en utilisant la forme obtenue plus haut : $z^n = 2^n\cos^n v\, e^{inu}$. En comparant les parties réelles des expressions obtenues on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta] = 2^n\cos^n\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(n\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

Correction de l'exercice 430 ▲

$$1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}})=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Comme $\theta\in]-\pi,+\pi[$ alors le module est $2\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$ et l'argument est $\frac{\theta}{2}$. Géométriquement, on trace le cercle de centre 1 et de rayon 1. L'angle en 0 du triangle $(0,1,1+e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$ et donc est le double de l'angle en 0 du triangle $(0,2,1+e^{i\theta})$ qui vaut θ.

C'est le résulat géométrique (théorème de l'angle au centre) qui affirme que pour un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

Correction de l'exercice 434 ▲

1. $|u+v|+|u-v|\geq 2|u|$ et $|u+v|+|u-v|\geq 2|v|$. Il y a égalité ssi $u=\pm v$.
2. $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leq |z_1+z_2|+|z_1-z_2|+|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$,
   $|z_1-z_2|+|z_3-z_4|\leq |z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4|\leq |z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$.

Correction de l'exercice 435 ▲

$\overline{u}=-u$.

Correction de l'exercice 436 ▲

D'abord on a $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$. On a aussi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2=1+i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x^2+y^2=\sqrt{2}\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\\y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Puisque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8})=\cos\frac{\pi}{8}>0$, on obtient $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, ou encore

$$e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ et }\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 437 ▲

Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow|z|=\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1,$$

et

$$|z|=|z-1|\Leftrightarrow OM=AM\Leftrightarrow M\in\mathrm{med}[OA]\Leftrightarrow x_M=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|\Leftrightarrow|z|=1\text{ et }\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow z=-j\text{ ou }z=-j^2.$$

Correction de l'exercice 438 ▲

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1-ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{|1+ix|}{|1+ix|} = 1$. Enfin, $z = \frac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \frac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in U \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1+i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1-i\tan\frac{\theta}{2})} = \frac{1+i\tan\frac{\theta}{2}}{1-i\tan\frac{\theta}{2}}\ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan\frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 439 ▲

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \text{ et } \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2) + i\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- 1er cas.] $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ est $\operatorname{cotan}(\frac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$ (module$=\operatorname{cotan}(\frac{\theta}{2})$ et argument$= -\frac{\pi}{2}$ (2π)).

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 2ème cas. $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Dans ce cas,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = -\operatorname{cotan}(\frac{\theta}{2}).e^{i\pi/2} = |\operatorname{cotan}(\frac{\theta}{2})|e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[-\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right].$$

- 3ème cas. $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = 0$.

2. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}]$. Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$.

Correction de l'exercice 440 ▲

$(1+i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512.$

> La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
> La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Correction de l'exercice 441 ▲

Racines carrées. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Par somme et différence des deux premières lignes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α, β) de solutions et donc deux racines carrées (opposées) $\omega = \alpha + i\beta$ de z.

En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8 - 6i$,

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 8 - 6i \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8 - 6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ \text{ou} \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de $z = 8 - 6i$ sont donc $\omega_1 = 3 - i$ et $\omega_2 = -\omega_1 = -3 + i$.

Pour les autres :

- Les racines carrées de 1 sont : $+1$ et -1.
- Les racines carrées de i sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Les racines carrées de $3 + 4i$ sont : $2 + i$ et $-2 - i$.
- Les racines carrées de $7 + 24i$ sont : $4 + 3i$ et $-4 - 3i$.

Correction de l'exercice 442 ▲

$2-i$ et $-2+i$; $5-i$ et $-5+i$.

Correction de l'exercice 443 ▲

Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 444 ▲

Soit $P(z) = az^2+bz+c$, et $\Delta = b^2-4ac$, si $\Delta \geq 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées...

Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = \overline{az^2+bz+c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\bar{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\bar{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\bar{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction de l'exercice 445 ▲

Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2+bz+c = 0$ (avec $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.

Exemple : pour $z^2-\sqrt{3}z-i = 0$, $\Delta = 3+4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2+i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Les solutions des autres équations sont :
- L'équation $z^2+z+1 = 0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^2-(1+2i)z+i-1 = 0$ a pour solutions : $1+i$, i.
- L'équation $z^2-\sqrt{3}z-i = 0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}-i)$
- L'équation $z^2-(5-14i)z-2(5i+12) = 0$ a pour solutions : $5-12i$, $-2i$.
- L'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i = 0$ a pour solutions : $2+3i$, $1+i$.
- L'équation $4z^2-2z+1 = 0$ a pour solutions : $\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^4+10z^2+169 = 0$ a pour solutions : $2+3i$, $-2-3i$, $2-3i$, $-2+3i$.
- L'équation $z^4+2z^2+4 = 0$ a pour solutions : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 450 ▲

1. $\Delta = -2i$ dont les racines carrées sont $1-i$ et $-1+i$, d'où les racines $z_1 = 5-2i$ et $z_2 = 6-3i$.
2. Une racine "évidente" $z_1 = i$, d'où la résolution complète en effectuant la division par $z-i$. On trouve $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Correction de l'exercice 453 ▲

Cercle circonscrit $\Rightarrow$ ssi $|z| = 1$.

Correction de l'exercice 454 ▲

$z_1 = -z_2 = 3-2i$, $z_3 = -z_4 = 1-i$.

Correction de l'exercice 455 ▲

$z = 1 \pm 2i$, $z = -4 \pm 2i$.

Correction de l'exercice 456 ▲

$m = 2i$.

Correction de l'exercice 457 ▲

1.
2. $\alpha = 0$ ou $\beta = t\alpha^2$, $t \geq \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 458 ▲

1.
2. Élever au carré : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2} = \underbrace{|m-\mu|^2 + |m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2} + 2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Correction de l'exercice 459 ▲

1. $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ ou $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.
2. $\Delta' = 1^2 - 2 = -1 = i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1 = \frac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1-i)$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout complexe z, on a
$$\begin{aligned} z^2 - 2z\cos\theta + 1 &= (z-\cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta = (z-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (z-\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2 \\ &= (z-\cos\theta - i\sin\theta)(z-\cos\theta + i\sin\theta) = (z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta}) \end{aligned}$$
L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$. De plus, $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
4. Soit (E) l'équation $z^2 - (6+i)z + (11+3i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (6+i)^2 - 4(11+13i) = -9-40i$. Comme $40 = 2\times 20 = 2\times(4\times 5)$ et que $4^2 - 5^2 = 16-25 = -9$, on est en droit de deviner que $\Delta = (4-5i)^2$. L'équation (E) a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \frac{6+i+4-5i}{2} = 5-2i$ et $z_2 = \frac{6+i-4+5i}{2} = 1+3i$.
5. Soit (E) l'équation $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (7+3i)^2 - 8(2+4i) = 24+10i$. Comme $10 = 2\times 5 = 2\times(5\times 1)$ et que $5^2 - 1^2 = 24$, on est en droit de deviner que $\Delta = (5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \frac{7+3i+5+i}{4} = 3+i$ et $z_2 = \frac{7+3i-5-i}{4} = \frac{1}{2}(1+i)$.

Correction de l'exercice 460 ▲

Le discriminant de l'équation $Z^2-(5-14i)Z-2(5i+12)=0$ vaut

$$\Delta=(5-14i)^2+8(5i+12)=-75-100i=25(-3-4i)=(5(1-2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions $Z_1=\frac{5-14i+5-10i}{2}=5-12i$ et $Z_2=\frac{5-14i-5+10i}{2}=-2i$. Ensuite,

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2=5-12i=(3-2i)^2 \text{ ou } z^2=-2i=(1-i)^2\\ &\Leftrightarrow z=3-2i \text{ ou } z=-3+2i \text{ ou } z=1-i \text{ ou } z=-1+i. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 464 ▲

$\frac{1}{4}(-1+i)=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}e^{\frac{3i\pi}{4}}=(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}})^3$. Les solutions sont les complexes $z_k=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{3}}$ pour $0\leq k\leq 2$. Et seul $z_0=\frac{1}{2}(1+i)$ a une puissance quatrième réelle.

Correction de l'exercice 465 ▲

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603-0{,}36603i$, $-0{,}36603+1{,}36603i$ et $-1-i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction de l'exercice 466 ▲

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

Les racines de $z^{24}=1$ sont données par $z_k=e^{2ki\pi/24}$ pour $k=0,1,\dots,23$. Ce sont donc 1, $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

Correction de l'exercice 467 ▲

1. $3, 3i, -3$ et $-3i$.
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ et $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Correction de l'exercice 468 ▲

Pour 2. Utiliser la formule d'Euler pour $\sin(x/2)$.

Pour 3. Pour $x\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$Z_n=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\exp\left(i(n-1)\frac{x}{2}\right),$$

et pour $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $Z_n=n$.

Remarquer que $Z_n=X_n+iY_n$ pour en déduire que

$$X_n=\frac{\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Y_n=\frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Correction de l'exercice 469 ▲

$$S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n=\sum_{k=0}^{n}z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ d'une suite géométrique dans le cas où $z\neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z\neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned}S_n(1-z) &= (1+z+z^2+\cdots+z^n)(1-z) \text{ développons}\\ &= 1+z+z^2+\cdots+z^n-z-z^2-\cdots-z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent}\\ &= 1-z^{n+1}.\end{aligned}$$

Donc

$$S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},\ \text{pour } z\neq 1.$$

Correction de l'exercice 470 ▲

Calcul de racine n-ième. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=1$, déjà $|z|^n=1$ et donc $|z|=1$. Écrivons $z=e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta}=e^0=1\Leftrightarrow n\theta=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Comme le polynôme z^n-1 est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k=0,\dots,n-1\right\}.$$

De plus si $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathscr{S}=\left\{\varepsilon^k,\ k=0,\dots,n-1\right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit $P(z)=\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z\neq 1$. Donc quelque soit $z\in\mathscr{S}\setminus\{1\}$ $P(z)=0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathscr{S}\setminus\{1\}$.

Pour conclure soit $Q_p(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{kp}$.
Si $p=0+\ell n$, $\ell\in\mathbb{Z}$ alors $Q_p(z)=p$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z)=\frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p}=\frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p}=\frac{1-1}{1-\varepsilon^p}=0.$$

Correction de l'exercice 478 ▲

Soient z_1,z_2,z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1\neq 0$ car sinon on aurait $z_1=z_2=z_3=0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3=(\frac{z_3}{z_1})^3=1$. Comme les trois nombres $1,(\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :
$$z_2=jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3=j^2z_1.$$
2. Soit $z\in(x^2+1)$. On a les équivalences suivantes :
$$z^6+(7-i)z^3-8-8i=0\Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2+(7-i)Z-8-8i=0$$
Etudions l'équation $Z^2+(7-i)Z-8-8i=0$. $\Delta=(7-i)^2+4(8+8i)=80+18i=(9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :
$$\begin{aligned}z^6+(7-i)z^3-8-8i=0 &\Leftrightarrow z^3\in\{-8,1+i\}\\ &\Leftrightarrow z^3=(-2)^3 \quad\text{ou}\quad z^3=(\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3\\ &\Leftrightarrow z\in\{-2,-2e^{\frac{2i\pi}{3}},-2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z\in\{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}\\ &\Leftrightarrow z\in\{-2,2e^{\frac{i\pi}{3}},2e^{-\frac{i\pi}{3}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc :
$$\{-2,2e^{\frac{i\pi}{3}},2e^{-\frac{i\pi}{3}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction de l'exercice 482 ▲

1. $z = -i\text{cotan}\frac{k\pi}{n}$.
2. $6 \mid n \Rightarrow z = j$ ou j^2. Sinon, pas de solution.
3. $z = \exp\frac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0, 1, 3, 4$.
4. $z = -1$ ou $z = \exp\frac{2ik\pi}{n}$, $1 \leq k < n$.
5. $x = \tan\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right)$.
6.
7. $z = \pm i,\ \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 483 ▲

1. Développer. $S = 2n$.
2. $\frac{1-(1+\omega)^n}{1-\omega-\omega^2} = \frac{1+(2\cos(\pi/n))^n}{1-\omega-\omega^2}$.

Correction de l'exercice 484 ▲

1. $\sum = n$ si $p \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$, 0 sinon.
2. $a_k = \sum_{x\in\mathbb{U}_n} \frac{P(x)}{nx^k}$

Correction de l'exercice 485 ▲

n impair $\Rightarrow |Z|^2 = n$,

n pair $\Rightarrow |Z|^2 = n(1+(-1)^{n/2})$.

Correction de l'exercice 486 ▲

1. $u+v = -1$, $u^2 = u+2v = -2-u$.
2. $\Sigma = \mathrm{Im}(u) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Correction de l'exercice 487 ▲

$x = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Correction de l'exercice 488 ▲

Soit $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ i(\omega_k+1)z = \omega_k - 1.$$

Maintenant, pour $k \in \{-1,0,1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}} \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{i(e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})})}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{2i\sin(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}{i(2\cos(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}))} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \tan(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})$$

Correction de l'exercice 489 ▲

Posons, pour n naturel non nul, $P=(X^2+1)^n-(X-1)^{2n}$.

$$\begin{aligned}P&=X^{2n}+(\text{termes de degré}\leq 2n-2)-X^{2n}+2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré }\leq 2n-2)\\&=2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré}\leq 2n-2).\end{aligned}$$

Donc $\deg(P)=2n-1$ et P admet dans $\mathbb{C}$, $2n-1$ racines, distinctes ou confondues.

$$\begin{aligned}(z^2+1)^n=(z-1)^{2n}&\Leftrightarrow \exists k\in\{0,...,n-1\}/\ z^2+1=\omega_k(z-1)^2 \text{ où } \omega_k=e^{2ik\pi/n}\\&\Leftrightarrow \exists k\in\{0,...,n-1\}/\ (1-\omega_k)z^2+2\omega_k z+(1-\omega_k)=0\end{aligned}$$

Si $k=0$, l'équation précédente s'écrit $2z=0$ ou encore $z=0$. Si k est élément de $[\![1,n-1]\!]$, $\Delta'_k=\omega_k^2-(1-\omega_k)^2=2\omega_k-1=2e^{2ik\pi/n}-1$. Soit d_k une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de Δ'_k (difficile à expliciter semble-t-il). On a $S=\{0\}\cup\left\{\frac{-e^{2ik\pi/n}\pm d_k}{1-e^{2ik\pi/n}}, k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$.

Correction de l'exercice 490 ▲

$i=e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$, $k\in\{0,1,2,3\}$. Ensuite, $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-2}{e^{i\pi/3}}=-2e^{-i\pi/3}=2e^{2i\pi/3}$. Les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sont donc les $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3})}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

Correction de l'exercice 491 ▲

1. Soit $z\in\mathbb{C}$. Soient M, A et B les points d'affixes resectives z, 1 et -1.

$$\begin{aligned}z\text{ solution de }(E)&\Rightarrow (z-1)^n=(z+1)^n\Rightarrow |(z-1)^n|=|(z+1)^n|\Rightarrow |z-1|^n=|z+1|^n\Rightarrow |z-1|=|z+1|\\&\Rightarrow AM=BM\Rightarrow M\in\text{med}[AB]\Rightarrow M\in(Oy)\Rightarrow z\in i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n-(-z+1)^n=(-1)^n((z+1)^n-(z-1)^n)=-(-1)^n((z-1)^n-(z+1)^n).$$

Par suite,

$$z\text{ solution de }(E)\Leftrightarrow (z-1)^n-(z+1)^n=0\Leftrightarrow(-z-1)^n-(-z+1)^n=0\Leftrightarrow -z\text{ solution de }(E).$$

3. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}z\text{ solution de }(E)&\Leftrightarrow (z-1)^n=(z+1)^n\Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!]/\ z+1=e^{2ik\pi/n}(z-1)\\&\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]/\ z=\frac{e^{2ik\pi/n}-1}{e^{2ik\pi/n}+1}\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]/\ z=\frac{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}\\&\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]/\ z=\frac{2i\sin\frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}}\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]/\ z=i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 492 ▲

1. Soit $n\geq 2$. On a

$$a_n=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2i}(e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n})=\frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}e^{ik\pi/n}\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{-2ik\pi/n}).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1}e^{ik\pi/n}=e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+...+(n-1))}=e^{i\pi(n-1)/2}(e^{i\pi/2})^{n-1}=i^{n-1},$$

et donc $\frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}e^{ik\pi/n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

Il reste à calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{-2ik\pi/n})$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leq k \leq n-1$, sont les $n-1$ racines n-ièmes de 1 distinctes de 1 et puisque $X^n - 1 = (X-1)(1+X+...+X^{n-1})$, ce sont donc les $n-1$ racines deux deux distinctes du polynôme $1+X+...+X^{n-1}$. Par suite, $1+X+...+X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{-2ik\pi/n})$, et en particulier $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = 1+1...+1 = n$.

2ème solution. Pour $1 \leq k \leq n-1$, posons $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$. Les z_k sont deux à deux distincts et racines du polynôme $P = (1-X)^n - 1 = -X + ... + (-1)^n X^n = X(-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1})$. Maintenant, $z_k = 0 \Leftrightarrow e^{-2ik\pi/n} = 1 \leq k \in n\mathbb{Z}$ (ce qui n'est pas pour $1 \leq k \leq n-1$). Donc, les z_k, $1 \leq k \leq n-1$, sont $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme de degré $n-1$: $-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1}$. Ce sont ainsi toutes les racines de ce polynôme ou encore

$$-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k).$$

En particulier, en égalant les coefficients constants,

$$(-1)^n.(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} z_k = -n,$$

et donc encore une fois $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = n$.

Finalement,

$$\forall n \geq 2,\ \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} + e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1).$$

Ensuite,

$$\prod_{k=1}^{n} e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} = e^{-ina}e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+...+n)} = e^{-ina}e^{-i(n+1)\pi/2}.$$

D'autre part, soit $P = \prod_{k=1}^{n}(X + e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \prod_{k=1}^{n}(X - (-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}))$. Pour tout k, on a $(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})})^n = (-1)^n e^{2ina}$.
Par suite, les n nombres deux à deux distincts $-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n}}$, $1 \leq k \leq n$ sont racines du polynôme $X^n - (-1)^n e^{2ina}$, de degré n. On en déduit que, $P = X^n - (-1)^n e^{2ina}$.
Par suite, $\prod_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1) = P(1) = 1 - (-1)^n e^{2ina} = 1 - e^{2ina+n\pi}$, puis

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2^n}e^{-ina}e^{-i(n+1)\pi/2}(1 - e^{2ina+n\pi}) = \frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} - e^{i(na+(n-1)\frac{\pi}{2})}) \\ &= \frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} + e^{i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}) = \frac{\cos(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

3.

$$c_n \text{ est défini} \Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ a + \frac{k\pi}{n} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a - \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \notin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour les a tels que c_n est défini, on a $c_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{i}\frac{e^{2i(a+k\pi/n)}-1}{e^{2i(a+k\pi/n)}+1}$.
Pour $1 \leq k \leq n$, posons $\omega_k = e^{2i(a+k\pi/n)}$ puis $z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$. On a donc $c_n = \frac{1}{i^n}\prod_{k=1}^{n} z_k$.
Puisque $z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$, on a $\omega_k(1 - z_k) = 1 + z_k$ et donc, pour $1 \leq k \leq n$, $\omega_k^n(1 - z_k)^n = (1 + z_k)^n$ ou encore, les z_k sont racines du polynôme $P = (1+X)^n - e^{2ina}(1-X)^n$. Maintenant, les $a + \frac{k\pi}{n}$ sont dans $[a, a+\pi[$ et donc deux à deux distincts puisque la fonction tangente est injective sur tout intervalle de cette forme.
1er cas. Si $e^{2ina} \neq (-1)^n$ alors P est de degré n et $P = (1 - (-1)^n e^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$. En évaluant en 0, on obtient

$$(1 - (-1)^n e^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(-z_k) = 1 - e^{2ina}.$$

D'où,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1 - e^{2ina}}{(-1)^n - e^{2ina}} = \frac{1 - e^{2ina}}{e^{in\pi} - e^{2ina}} = \frac{e^{ina}}{e^{in\pi/2}e^{ina}}\frac{-2i\sin(na)}{-2i\sin n(a - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{i^n}\frac{\sin(na)}{\sin n(a - \frac{\pi}{2})}.$$

Finalement, $c_n = (-1)^n \frac{\sin(na)}{\sin(n(a-\frac{\pi}{2}))}$.

Si n est pair, posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. $c_n = c_{2p} = \frac{\sin(2pa)}{\sin(2pa - p\pi)} = (-1)^p$.

Si n est impair, posons $n = 2p+1$. $c_n = c_{2p+1} = (-1)^p \tan((2p+1)a)$.

2ème cas. Si $e^{2ina} = (-1)^n$, alors $2na \in n\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ou encore $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, c_n n'est pas défini.

Correction de l'exercice 493 ▲

Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x+iy$ à $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie précisément que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A,B d'affixes respectives $3 = (3,0)$ et $5 = (5,0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A,B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2\\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-(z+\bar{z}) = 7\\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8\\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 498 ▲

En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Correction de l'exercice 499 ▲

Méthode analogue à celle de l'exercice 498. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z-z_0|$).

Correction de l'exercice 500 ▲

1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).
2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Correction de l'exercice 502 ▲

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0,u,v,u+v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u+v|,|u-v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes ! !

Correction de l'exercice 510 ▲

1. Comme $(A_0,\ldots,A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi]$,. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}}$,. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.

2. $\mathrm{Re}(1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4)=1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5})=2\cos^2(\frac{2\pi}{5})-1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5})-1=0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2+2z-1=0$. Etudions cette équation : $\Delta=20=2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5})>0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2=|\omega_2+1|^2=|\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{4\pi}{5})+1|^2=1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5})=4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI=|i/2+1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ=BI-1/2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathscr{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathscr{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction de l'exercice 511 ▲

1.
2. si $|a|\neq|b|$: une solution unique,
   si $|a|=|b|$: une droite ou $\varnothing$.

Correction de l'exercice 512 ▲

1.
2. $\mathbb{U}\setminus\{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Correction de l'exercice 514 ▲

Les diagonales se coupent en leurs milieux, ont même longueur, et sont perpendiculaires $\Rightarrow$ carré.

Correction de l'exercice 515 ▲

1. $z\in\mathbb{R}$ ou $z\in-\frac{1}{2}+i\mathbb{R}$.
2. $z\in-1+i\mathbb{R}$ ou $z\in i\mathbb{R}$ ou $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.
3. $z\in i\mathbb{R}$ ou $|z-i|=\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 516 ▲

$(0,a,a+b,a+b+c=1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\Rightarrow\{a,b,c\}=\{1,i,-i\}$.

Correction de l'exercice 518 ▲

$z=x+iy\Rightarrow$ cercles $(\pm i,\sqrt{2})$ (laborieux).

Correction de l'exercice 519 ▲

$z'=\frac{(b-a)\bar{z}+a\bar{b}-\bar{a}b}{\bar{b}-\bar{a}}$.

Correction de l'exercice 520 ▲

$d=$ orthocentre de abc.

Correction de l'exercice 522 ▲

$\omega = \frac{a(c\bar{c}-b\bar{b})+b(a\bar{a}-c\bar{c})+c(b\bar{b}-a\bar{a})}{a(\bar{c}-\bar{b})+b(\bar{a}-\bar{c})+c(\bar{b}-\bar{a})}$.

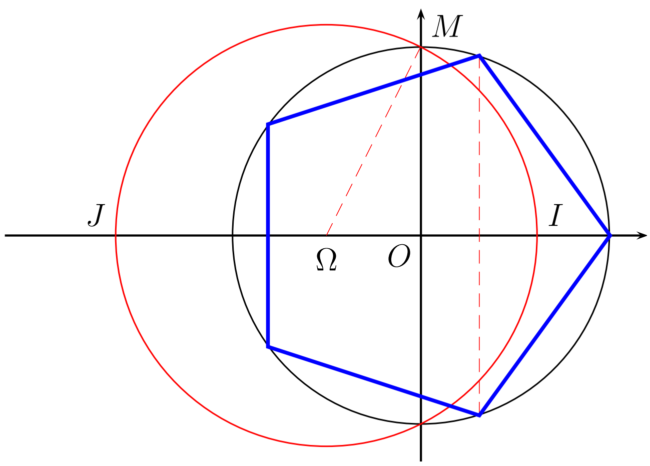
Correction de l'exercice 523 ▲

1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u = \alpha v$.
   $x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{|v|^2} \Leftrightarrow u = \frac{1}{\bar{v}}$.
2.
3. Il manque seulement les deux pôles.

Correction de l'exercice 524 ▲

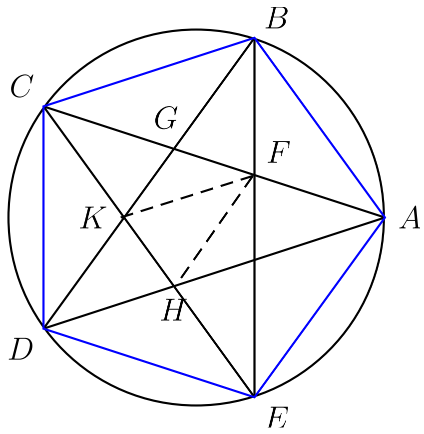
1. On a $a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $b = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. 1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$. Mais alors
$$a+b = z+z^2+z^3+z^4 = -1$$
et
$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$
a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2+X-1 = 0$ dont les racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $a > 0$. Par suite, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc,
$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$
De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2. Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de PYTHAGORE :
$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$
Donc $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O,I]$ et $[O,J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.



3. Posons $x = \frac{AF}{AC}$. D'après le théorème de THALES (je vous laisse vérifier les parallélismes),
$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$
Donc $x^2-3x+1 = 0$ et puisque $x < 1$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis

$\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1 - x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x} - 2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}} - 2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Définition du *nombre d'or*.

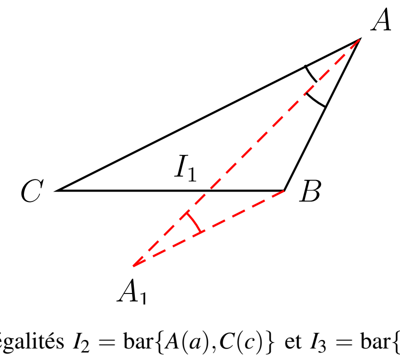
On veut que C partage le segment $[A,B]$ de telle sorte que $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a = AB$ et $x = AC$, $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} - 1 = 0$ et donc, puisque $\frac{x}{a} > 0$, $\frac{x}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618...}$$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$

Correction de l'exercice 525 ▲

1. On note I_1 le point d'intersection de la bissectrice (Δ_1) de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC). La parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_1 (puisque (AC) n'est pas parallèle à (Δ_1)) en un point A_1. Les angles alternes-internes $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{AA_1B}$ sont alors égaux. Puisque d'autre part, $\widehat{CAA_1} = \widehat{A_1AB}$, on en déduit que $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AB}$ et donc que le triangle (ABA_1) est isocèle en B. D'après le théorème de THALÈS, on a alors
$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{A_1B}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$
et donc puisque I_1 est entre B et C, $b\overrightarrow{I_1B} + c\overrightarrow{I_1C} = \vec{0}$, ou enfin $I_1 = \text{bar}\{B(b), C(c)\}$.



On a aussi bien sûr les deux autres égalités $I_2 = \text{bar}\{A(a), C(c)\}$ et $I_3 = \text{bar}\{A(a), B(b)\}$ où I_2 et I_3 sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec (AC) et (AB) respectivement. Soit alors $I' = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, on a
$$I' = \text{bar}\{A(a), I_1(b+c)\} = \text{bar}\{B(b), I_2(a+c)\} = \text{bar}\{C(c), I_3(a+b)\},$$
ce qui montre que I' est sur (AI_1), (BI_2) et (CI_3), c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite, $I' = I$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.
$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2 = z \text{ ou } z^3 = z \text{ ou } z^3 = z^2 \Leftrightarrow z \in \{-1, 0, 1\}.$$
Ensuite, pour $z \notin \{-1, 0, 1\}$,

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ z^3-z=\lambda(z^2-z)\Leftrightarrow \frac{z^3-z}{z^2-z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z+1\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}.$$

Finalement, (z,z^2,z^3) est un « vrai » triangle si et seulement si z n'est pas réel. Soit alors z un complexe non réel.

$$\begin{aligned}
O \text{ centre du cercle inscrit au triangle } (PQR) &\Leftrightarrow O=\text{bar}\{P(QR),Q(PR),R(PQ)\}\\
&\Leftrightarrow z|z^2-z^3|+z^2|z-z^3|+z^3|z-z^2|=0\Leftrightarrow z.|z|.|1-z|(|z|+z|1+z|+z^2)=0\\
&\Leftrightarrow |z|+z|1+z|+z^2=0\ (E)\ (\text{car } z\notin\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
|z|+z|1+z|+z^2=0 &\Leftrightarrow (z+\frac{|z|}{z})+|1+z|=0\Rightarrow z+\frac{|z|}{z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z+\frac{|z|}{z}=\bar{z}+\frac{|z|}{\bar{z}}\\
&\Leftrightarrow z-\bar{z}-|z|\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=0\Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-\frac{1}{|z|})=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|}=0\ (\text{car } z\neq\bar{z})\\
&\Leftrightarrow |z|=1
\end{aligned}$$

Posons donc $z=e^{i\theta}$ où $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta}+|1+e^{i\theta}|=0\Leftrightarrow 2\cos\theta+|e^{i\theta/2}|.|2\cos\frac{\theta}{2}|=0\\
&\Leftrightarrow \cos\theta+|\cos\frac{\theta}{2}|=0\Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2+|\cos\frac{\theta}{2}|-1=0\Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de l'équation } 2X^2+X-1=0\\
&\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\in\left\{\frac{1}{2},-1\right\}\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \theta\in\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow z\in\{j,j^2\}
\end{aligned}$$

Les nombres complexes solutions sont donc j et j^2.

Correction de l'exercice 526 ▲

$$\begin{aligned}
(A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C=r_{A,\pi/3}(B) \text{ ou } C=r_{A,-\pi/3}(B)\Leftrightarrow c-a=(-j^2)(b-a) \text{ ou } c-a=(-j)(b-a)\\
&\Leftrightarrow (-1-j^2)a+j^2b+c=0 \text{ ou } (-1-j)a+jb+c=0\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0\\
&\Leftrightarrow (j^2)^2a+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2+bz+c=0.
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
(A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0\\
&\Leftrightarrow (ja+j^2b+c)(j^2a+jb+c)=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0\\
&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\\
&\Leftrightarrow -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0\\
&\Leftrightarrow (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0\Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 527 ▲

A- Solutions algébriques.] Pour $z\in\mathbb{C}$, posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1.
$$|Z|=1\Leftrightarrow\frac{|1+z|^2}{|1-z|^2}=1\Leftrightarrow(1+x)^2+y^2=(1-x)^2+y^2 \text{ et } (x,y)\neq(1,0)\Leftrightarrow 4x=0\Leftrightarrow x=0.$$
L'ensemble cherché est la droite (Oy).

2.
$$\begin{aligned}|Z|=2&\Leftrightarrow(1+x)^2+y^2=4((1-x)^2+y^2)\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-10x+3=0 \text{ et } (x,y)\neq(1,0)\\&\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1=0 \text{ et } (x,y)\neq(1,0)\\&\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9} \text{ et } (x,y)\neq(1,0)\\&\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}.\end{aligned}$$
L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.
$$\begin{aligned}Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=\overline{Z}\Leftrightarrow\frac{1+z}{1-z}&=\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\\&\Leftrightarrow(1+z)(1-\bar{z})=(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow z-\bar{z}=\bar{z}-z \text{ et } z\neq1\\&\Leftrightarrow z=\bar{z} \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \text{ et } z\neq1.\end{aligned}$$
L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point $(1,0)$.

4.
$$\begin{aligned}Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=-\overline{Z}\Leftrightarrow\frac{1+z}{1-z}=-\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}&\Leftrightarrow(1+z)(1-\bar{z})=-(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z\neq1\\&\Leftrightarrow 1-z\bar{z}=-1+\bar{z} \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow|z|^2=1 \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow|z|=1 \text{ et } z\neq1.\end{aligned}$$
L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

B- Solutions géométriques. Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 et $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché. Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z.

1.
$$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow|z+1|=|z-1|\Leftrightarrow AM=BM\Leftrightarrow M\in\text{med}[AB]=(Oy).$$

2. Soit $\Omega=\text{bar}(A(1),B(-4))$. On a $x_\Omega=\frac{-1}{5}(x_A-4x_B)=\frac{5}{3}$ et $y_\Omega=\frac{-1}{5}(y_A-4y_B)=0$.
$$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow|z+1|^2=4|z-1|^2&\Leftrightarrow AM^2=4BM^2\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}^2-4\overrightarrow{BM}^2=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})^2-4(\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})^2=0\\&\Leftrightarrow-3\overrightarrow{\Omega M}^2+2(\overrightarrow{A\Omega}-4\overrightarrow{B\Omega}).\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{A\Omega}^2-4\overrightarrow{B\Omega}^2=0\\&\Leftrightarrow\Omega M^2=\frac{1}{3}(\Omega A^2-4\Omega B^2)\end{aligned}$$
Or, $\Omega A^2=(\frac{5}{3}+1)^2=\frac{64}{9}$ et $\Omega B^2=(\frac{5}{3}-1)^2=\frac{4}{9}$. Par suite,
$$\frac{1}{3}(\Omega A^2-4\Omega B^2)=\frac{1}{3}(\frac{64}{9}-\frac{16}{9})=\frac{16}{9}.$$
Ainsi,
$$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow\Omega M^2=\frac{16}{9}\Leftrightarrow\Omega M=\frac{4}{3},$$
et on retrouve le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3},0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.
$$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow z=-1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=0\ (\pi)&\Leftrightarrow M=A \text{ ou } (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=0\ (\pi)\\&\Leftrightarrow M\in(AB)\setminus\{B\}.\end{aligned}$$
et on retrouve la droite (Ox) privée du point $(1,0)$.

4.
$$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow z=-1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)&\Leftrightarrow M=A \text{ ou } \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)\\&\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B.\end{aligned}$$
et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Correction de **l'exercice 528 ▲**

Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega+3 \Leftrightarrow \omega=-3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega+1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega+2+i \Leftrightarrow \omega = 1-2i$. Comme $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de **l'exercice 531 ▲**

Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction de **l'exercice 540 ▲**

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$ ssi $x = \pi/6+k\pi/2$ ou $x=\pi/18+k\pi/3$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ssi $x = 5\pi/14+6k\pi/7$ ou $x = \pi/2+6k\pi/5$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\cos(3x) = \sin(x)$ ssi $x=\pi/8+k\pi/2$ ou $x=-\pi/4+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction de **l'exercice 541 ▲**

L'équation $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=m$ a des solutions ssi $m\in[-2,2]$ et pour $m=\sqrt{2}$, les solutions sont $x=\pi/12+2k\pi$ ou $x=-5\pi/12+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Correction de **l'exercice 542 ▲**

$\cos(5x)+\cos(3x)\le\cos x$ ssi $2\cos(4x)\cos(x)\le\cos x$ et $2\cos^2(x)-9\cos(x)+4>0$ ssi $\cos x>1/2$ ssi $x\in\,]-\pi/6+2k\pi,\pi/6+2k\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$.

Correction de **l'exercice 543 ▲**

1. $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\sin(3x)$ ssi $x=\pi/2+2k\pi$ ou $x=-\pi/10+2k\pi/5$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\cos^4(x)-\sin^4(x)=1$ ssi $x=k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction de **l'exercice 544 ▲**

1. $\frac{2^n+2\cos(n\pi/3)}{3}$.
2. $2^n\cos(n\pi/3)$.
3. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\cos\frac{n\theta}{2}$.
4. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\sin\frac{(n+2)\theta}{2}$.
5. $\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^n\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 545 ▲

1. $\frac{n\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{n\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ si $\theta\not\equiv 0(\bmod 2\pi)$.
2. $\frac{3\sin(n\theta/2)\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{4\sin(\theta/2)}-\frac{\sin(3n\theta/2)\sin\left(3(n+1)\theta/2\right)}{4\sin(3\theta/2)}$.

Correction de l'exercice 546 ▲

$x\equiv -y\equiv \pm\frac{2\pi}{3}(\bmod 2\pi)$.

Correction de l'exercice 547 ▲

1. $=3/2$.
2. $32\cos^6(\theta)=\cos 6\theta+6\cos 4\theta+15\cos 2\theta+10\Rightarrow \Sigma=\frac{15}{8}$.
3. $\Sigma_p=\frac{pC_{2p}^p}{2^{2p-1}}$.

Correction de l'exercice 548 ▲

$x\equiv 0(\bmod\frac{\pi}{n})$, $x\not\equiv\frac{\pi}{2}(\bmod\pi)$.

Correction de l'exercice 549 ▲

$\frac{1}{2}\left((x+e^{i\alpha})^n+(x+e^{-i\alpha})^n\right)=0\Leftrightarrow x=\operatorname{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\sin\alpha-\cos\alpha$.

Correction de l'exercice 550 ▲

$S=\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}+\cdots+\frac{u-u^{-1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}$.

$\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}=\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}$.

$\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}+\frac{u-u^{-1}}{u^8-u^{-8}}=\frac{u^7-u^{-7}}{u^8-u^{-8}}\ \ldots$

$\Rightarrow S=\frac{u^{2^n-1}-u^{-2^n+1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}=\frac{\sin\left((2^n-1)\theta\right)}{\sin(2^n\theta)}$.

Correction de l'exercice 551 ▲

$\tan(nx)=\frac{C_n^1\tan x-C_n^3\tan^3 x+\cdots}{C_n^0-C_n^2\tan^2 x+\cdots}$.

Correction de l'exercice 552 ▲

$z=e^{i\theta}\Rightarrow a=\tan\frac{\theta}{2}$ pour $\theta\not\equiv\pi(\bmod 2\pi)$.

Correction de l'exercice 553 ▲

1. $\sin x=0\Leftrightarrow x\in\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{0,\pi,2\pi\}$.
2. $\sin x=1\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
3. $\sin x=-1\Leftrightarrow x\in-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
4. $\cos x=1\Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{0,2\pi\}$.
5. $\cos x=-1\Leftrightarrow x\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{\pi\}$.

6. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
7. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
8. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 554 ▲

1. $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 555 ▲

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
2. $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
3. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
4. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
6. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
7. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
8. $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
9. $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
10. $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
11. $$\begin{aligned}\sin(2x) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x+\pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = -x + 2k\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{2k\pi}{3})\end{aligned}$$
    De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.
12. $$\begin{aligned}12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 &\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 556 ▲

1. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.
3. Pour $x \in [0, 2\pi]$,
$$\begin{aligned}\cos x > \cos\frac{x}{2} &\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow (2\cos\frac{x}{2} + 1)(\cos\frac{x}{2} - 1) > 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos\frac{x}{2} \neq 1\\ &\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]\end{aligned}$$

4. Pour $x \in [-\pi,\pi]$, $\cos^2 x \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi,\pi]$.
5. Pour $x \in [0,2\pi]$, $\cos^2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.
6. Pour $x \in [0,2\pi]$,

$$\cos\frac{x}{3} \leq \sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi \leq \frac{x}{3}-\frac{\pi}{4} \leq \pi+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4}+6k\pi \leq x \leq 3\pi+\frac{3\pi}{4}+6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$$

Correction de l'exercice 557 ▲

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, et puisque $\cos\frac{\pi}{8} > 0$,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.}$$

De même, puisque $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right)}$ et

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 558 ▲

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 559 ▲

Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$. • $S_1 = e^{ia_1}+e^{-ia_1} = 2\cos a_1$ • Soit $n \geq 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ alors

$$S_{n+1} = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}}\sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}}\sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$$
$$= 2\cos(a_{n+1})S_n = 2^{n+1}\cos a_1 \ldots \cos a_{n+1}.$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geq 1$, $S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$. Ensuite, pour $n \geq 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Im}(S_n) = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n.}$$

Correction de l'exercice 560 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0,\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\frac{a}{2^k} \neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.$$

$$\boxed{\forall a\in]0,\pi[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.}$$

2. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)>0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$. Puis

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{a}{2^k})\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(\frac{\sin a}{a})-\ln(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

$$\boxed{\forall a\in]0,\pi[,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).}$$

Correction de l'exercice 561 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2^{4\cos^2x+1}+16.2^{4\sin^2x-3}=20&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2x+1}+16.2^{1-4\cos^2x}=20\Leftrightarrow 2^{4\cos^2x}-10+16\times2^{-4\cos^2x}=0\\&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2x}-10+\frac{16}{2^{4\cos^2x}}=0\Leftrightarrow(2^{4\cos^2x})^2-10\times2^{4\cos^2x}+16=0\\&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2x}=2\text{ ou }2^{4\cos^2x}=8\Leftrightarrow 4\cos^2x=1\text{ ou }4\cos^2x=3\\&\Leftrightarrow\cos x=\frac12\text{ ou }\cos x=-\frac12\text{ ou }\cos x=\frac{\sqrt3}{2}\text{ ou }\cos x=-\frac{\sqrt3}{2}\\&\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 562 ▲

1. Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\text{ et }\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta)=\frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta)=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2. Soit $a\neq\pm\frac{1}{\sqrt3}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}&\Leftrightarrow(3x-x^3)(1-3a^2)=(1-3x^2)(3a-a^3)\text{ (car }\pm\frac{1}{\sqrt3}\text{ ne sont pas solution de l'équation)}\\&\Leftrightarrow(x-a)((3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3)=0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta'=16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3)=3a^4+6a^2+3=(\sqrt3(a^2+1))^2>0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{a,\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a=\tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x=\tan\theta$ (à savoir $\alpha=\text{Arctan}\,a$ et $\theta=\arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}\Leftrightarrow\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\tan(3\theta)=\tan(3\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3\theta\in3\alpha+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\in\alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Ceci refournit les solutions $x=\tan\alpha=a$, puis

$$x=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}=\frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2}=\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

et $x=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Correction de l'exercice 563 ▲

1. Pour $x\notin\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x)=\frac{\text{Im}((e^{ix})^5)}{\text{Re}((e^{ix})^5)}=\frac{5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x}{\cos^5x-10\cos^3x\sin^2x+5\cos x\sin^4x}=\frac{5\tan x-10\tan^3x+\tan^5x}{1-10\tan^2x+5\tan^4x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5x$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right),\ \tan(5x)=\frac{5\tan x-10\tan^3x+\tan^5x}{1-10\tan^2x+5\tan^4x}.}$$

2. $9°$, $-27°$, $-63°$ et $81°$ vérifient $\tan(5\times9°)=\tan(5\times(-27°))=\tan(5\times(-63°))=\tan(5\times81°)=1$. On résoud donc l'équation :

$$\tan(5x)=1\Leftrightarrow5x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $]-90°,90°[$, sont $-63°$, $-27°$, $9°$, $45°$ et $81°$. Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$, $\tan(45°)$ et $\tan(81°)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4}=1$ qui s'écrit encore :

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=0.$$

Le polynôme $X^5-5x^4-10X^3+10X^2+5X-1$ admet déjà $\tan(45°)=1$ pour racine et on a

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=(X-1)(X^4-4X^3-14X^2-4X+1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$ et $\tan(81°)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4-4X^3-14X^2-4X+1$. Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X-\tan(9°))(X+\tan(27°))(X+\tan(63°))(X-\tan(81°))$. L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)$ et on a montré que :

$$\boxed{\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)=4.}$$

Correction de l'exercice 564 ▲

Pour $x\in[0,\pi]$, posons $f(x)=\tan x+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)$.

$$\begin{aligned}f(x)\text{ existe}&\Leftrightarrow\tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x)\text{ et }\tan(4x)\text{ existent}\\&\Leftrightarrow(x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (2x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (3x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\text{ et }(4x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&\Leftrightarrow(x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}),\ (x\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z})\text{ et }(x\notin\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z})\\&\Leftrightarrow x\notin\left\{\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right\}.\end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0,\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0,\pi]$. Sur $I=\left[0,\frac{\pi}{8}\right[$ ou $I=\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right]$, puisque $f(0)=f(\pi)=0$, (E) a exactement une solution dans I. Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty,+\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci porte le total à $6+2=8$ solutions. En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty,+\infty[$. Finalement,

$$\boxed{(E)\text{ admet exactement dix solutions dans }[0,\pi].}$$

Correction de l'exercice 565 ▲

1. D'après les formules d'EULER,

$$z+z^4=e^{2i\pi/5}+e^{8i\pi/5}=e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}=2\cos\frac{2\pi}{5}=a.$$

De même,

$$z^2+z^3=e^{4i\pi/5}+e^{6i\pi/5}=e^{4i\pi/5}+e^{-4i\pi/5}=2\cos\frac{4\pi}{5}=b.$$

2. Puisque $z\neq 1$ et $z^5=e^{2i\pi}=1$,

$$1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{1-z^5}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0.$$

3. $a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$ et $ab=(z+z^4)(z^2+z^3)=z^3+z^4+z^6+z^7=z+z^2+z^3+z^4=-1$. Donc,

$$a+b=-1 \text{ et } ab=-1.$$

Ainsi, a et b sont les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ à savoir les nombres $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{4\pi}{5}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on a $a>0$ et $b>0$. Finalement,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 566 ▲

1. $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et une primitive de $x\mapsto\cos^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin(2x))$.
2. D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\cos^4 x&=\left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)+2\sin(2x)+3x)$.

3.

$$\begin{aligned}\sin^4 x&=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)-2\sin(2x)+3x)$.

4. $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1-\cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin(4x))$.
5.
$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10)\end{aligned}$$
Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\sin(6x) + \frac{3}{2}\sin(4x) - \frac{15}{2}\sin(2x) + 10x)$.
6. $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{7}\sin^7 x$.
7. $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2\sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$.
8. $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

Correction de l'exercice 567 ▲

1. Pour x réel , on a :
$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6 \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix} - 2e^{8ix} - 3e^{6ix} + 8e^{4ix} + 2e^{2ix} - 12 + 2e^{-2ix} + 8e^{-4ix} - 3e^{-6ix} - 2e^{-8ix} + e^{-10ix}) \\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6) \\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6)\end{aligned}$$
(Remarque. La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,
$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin 8x}{4} - \frac{\sin 6x}{2} + 2\sin 4x + \sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} - 6\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2}(0-0) + 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \pi\right) \\ &= -\frac{1}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} - \pi\right) = \frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.\end{aligned}$$
2. Pour x réel, on a
$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3 \sin x \\ &= \cos^4 x \sin x - 3\cos^6 x \sin x + 3\cos^8 x \sin x - \cos^{10} x \sin x.\end{aligned}$$
Par suite,
$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= -\frac{1}{5}\times\frac{1-9\sqrt{3}}{32} + \frac{3}{7}\times\frac{1-27\sqrt{3}}{128} - \frac{1}{3}\times\frac{1-81\sqrt{3}}{512} + \frac{1}{11}\times\frac{1-243\sqrt{3}}{2048} \\ &= \frac{1}{2^{11}\times 3\times 5\times 7\times 11}(-14784(1-9\sqrt{3}) + 7920(1-27\sqrt{3}) - 1540(1-81\sqrt{3}) + 105(1-243\sqrt{3})) \\ &= \frac{1}{2365440}(-8299 + 18441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 568 ▲

1. $\tan\frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}.$$

2. **1 ère solution.** Pour tout réel x,

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3}) + \sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \mathrm{Im}(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x+\frac{2\pi}{3})}) = \mathrm{Im}(e^{ix}(j^2+1+j)) = 0.$$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4}-x$, $\frac{\pi}{4}+x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \notin \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x \notin \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) &= \frac{1-\tan x}{1+\tan x} + \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \text{ (pour } x \text{ vérifiant de plus } x \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\ &= \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} + \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} = \frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos(2x)}\\ &= \frac{2}{\cos(2x)} \text{ (ce qui reste vrai pour } x \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

4. Pour $x \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

Correction de l'exercice 569 ▲

1. • Pour tout réel x, $1-2k\cos x+k^2 = (k-\cos x)^2+\sin^2 x \geq 0$. De plus,

$$1-2k\cos x+k^2 = 0 \Rightarrow k-\cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1,1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1-2k\cos x+k^2 > 0.$$

•f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π-périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0,\pi]$. Pour $x \in [0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}f_k'(x) &= \cos x(1-2k\cos x+k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}\sin x(2k\sin x)(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}\\ &= (1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(\cos x(1-2k\cos x+k^2)-k\sin^2 x)\\ &= (1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x+(1+k^2)\cos x-k)\\ &= (1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)(k-\cos x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = \frac{(k\cos x-1)(k-\cos x)}{(1-2k\cos x+k^2)^{3/2}}.}$$

1er cas : $|k|<1$ et $k \neq 0$. (si $k=0$, $f_k(x) = \sin x$) Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1) < 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos x - k$.

x	0		$\mathrm{Arccos}\,k$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(car $f_k(\mathrm{Arccos}\,k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}} = 1$).

2ème cas : $k > 1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x) > 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x - 1$.

x	0		$\text{Arccos}\,\frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\text{Arccos}\,\frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = \frac{1}{k}$).

3ème cas : $k < -1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x) < 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1-k\cos x$.

x	0		$\text{Arccos}\,\frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\text{Arccos}\,\frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = -\frac{1}{k}$).

2. Pour $k \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, posons $I_k = \int_0^{\pi} f_k(x)\,dx$.
   Si $k=0$, $I_k = \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2$. Sinon,

$$I_k = \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\frac{2k\sin x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\,dx = \frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2}-\sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k}(|k+1|-|k-1|).$$

Plus précisément, si $k \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k)-(1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k=0$. Si $k>1$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k)-(k-1)) = \frac{2}{k}$, et enfin, si $k<-1$, $I_k = \frac{-2}{k}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si } k\in]-1,1[,\ I_k = 2 \text{ et si } k \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ I_k = \frac{2}{|k|}.}$$

Correction de l'exercice 570 ▲

1. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $S_n' = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.
   1ère solution.

$$S_n + iS_n' = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,
1er cas. Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n+1$ et $S_n' = 0$.
2ème cas. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + iS_n' = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\,\frac{e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2}}{e^{-i(n+1)x/2}+e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$$
$$= e^{inx/2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \begin{cases}\frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ n+1 \text{ si } x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \begin{cases}\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0 \text{ si } x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x) \\
&= \left(\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{-x}{2}\right)+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{(2n-1)x}{2}-\sin\frac{(2n-3)x}{2}\right) \\
&+\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(2n-1)x}{2}\right) \\
&= \sin\frac{(2n+1)x}{2}+\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}
\end{aligned}$$

et donc, si $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$,...

2. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $S'_n=\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$S_n+S'_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx)+\sin^2(kx))=\sum_{k=0}^{n}1=n+1,$$

et

$$S_n-S'_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx)-\sin^2(kx))=\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

D'après 1), si $x\in\pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)=n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)=0,$$

et si $x\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n+S'_n=n+1 \text{ et } S_n-S'_n=\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n=\frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \text{ et } S'_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

3. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(kx)\right)+i\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(kx)\right) &= \sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{ix})^k1^{n-k} \\
&= (1+e^{ix})^n=(e^{ix/2}+e^{-ix/2})^n e^{inx/2}=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right).
\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(kx)=2^n\cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{nx}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(kx)=2^n\cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 571 ▲

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l}\cos a+\cos b+\cos c=0\\ \sin a+\sin b+\sin c=0\end{array}\right. &\Leftrightarrow (\cos a+\cos b+\cos c)+i(\sin a+\sin b+\sin c)=0\Leftrightarrow e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0 \\
&\Rightarrow |e^{ia}+e^{ib}|=|-e^{ic}|=1\Leftrightarrow |e^{ia/2}e^{ib/2}(e^{i(a-b)/2}+e^{-i(a-b)/2})|=1 \\
&\Leftrightarrow |\cos\frac{a-b}{2}|=\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow a-b\in\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right) \\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \exists\varepsilon\in\{-1,1\}/\ b=a+\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib}=je^{ia}$ ou $e^{ib}=j^2e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib}=je^{ia}$ ou encore $b=a+\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,

$$e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0\Leftrightarrow e^{ic}=-(e^{ia}+e^{ib})=-(1+j)e^{ia}=j^2e^{ia}\Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}/\ c=a-\frac{2\pi}{3}+2k'\pi,$$

et si $e^{ib}=j^2e^{ia}$ ou encore $b=a-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,

$$e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0\Leftrightarrow e^{ic}=-(e^{ia}+e^{ib})=-(1+j^2)e^{ia}=je^{ia}\Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}/\ c=a+\frac{2\pi}{3}+2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{(a,a+\varepsilon\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi,a-\varepsilon\tfrac{2\pi}{3}+2k'\pi),\ a\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{-1,1\},\ (k,k')\in\mathbb{Z}^2\}.}$$

Correction de l'exercice 572 ▲

$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}&=2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8})=2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8})\\&=2\left((\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8})^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\&=2(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 573 ▲

1.

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\sin(2x)\Leftrightarrow\cos(3x)=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi)\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x=-\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi)\\&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\tfrac{\pi}{10},\tfrac{\pi}{2},\tfrac{9\pi}{10},\tfrac{13\pi}{10},\tfrac{3\pi}{2},\tfrac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2. $\cos(3x)=\mathrm{Re}(e^{3ix})=\mathrm{Re}((\cos x+i\sin x)^3)=\cos^3x-3\cos x\sin^2x=\cos^3x-3\cos x(1-\cos^2x)=4\cos^3x-3\cos x.$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(3x)=4\cos^3x-3\cos x.}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\sin(2x)&\Leftrightarrow 4\cos^3x-3\cos x=2\sin x\cos x\Leftrightarrow\cos x(4\cos^2x-3-2\sin x)=0\\&\Leftrightarrow\cos x(-4\sin^2x-2\sin x+1)=0\Leftrightarrow(\cos x=0)\text{ ou }(4\sin^2x+2\sin x-1=0).\end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2x+2\sin x-1=0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x\neq0$), ou encore, l'équation $4X^2+2X-1=0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1=\sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2=\sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1>0$ et que $X_2<0$, on obtient

$$X_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }X_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10}=-\sin\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{10}=\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }\sin\tfrac{3\pi}{10}=\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{5}=\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Puis

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\tfrac{\pi}{10}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

et de même

$\boxed{\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos\frac{3\pi}{10}}$.

Correction de l'exercice 574 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k, $|\cos k| \in [0,1]$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n}|\cos k| \geq \sum_{k=1}^{n}\cos^2 k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos(2k)) = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik}) = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}})$$
$$= \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{i(n-1+2)}\frac{\sin n}{\sin 1}) = \frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)\sin n}{2\sin 1} \geq \frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}.$$

Maintenant, $\frac{1}{2\sin 1} = 0,594...$. Par suite, pour $n \geq 3$, $\frac{1}{2\sin 1} \leq 0,75 = \frac{3}{4} \leq \frac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1} \geq \frac{n}{2}-\frac{n}{4} = \frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n=1$, $|\cos 1| = 0.5... \geq 0.25 = \frac{1}{4}$ et si $n=2$, $|\cos 1|+|\cos 2| = 0.9... \geq 0.5 = \frac{2}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}|\cos k| \geq \frac{n}{4}.}$$

Correction de l'exercice 578 ▲

1. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha = a+ib$ et $\beta = c+id$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha+\beta = (a+c)+i(b+d)$ et $a+c \in \mathbb{Z}$, $b+d \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta = (ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac-bd \in \mathbb{Z}$, $ad+bc \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta = 1$. Ainsi, $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z \in (x^2+1)\cdot|z| \geq \sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)$ et si $z \in \mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$, $\sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|) \geq 1$. Si $|\alpha| \neq 1$ alors $|\alpha| > 1$ et $|1/\alpha| < 1$. On en déduit $1/\alpha = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha| = 1$, ce qui implique $\alpha \in \{1,-1,i,-i\}$.
Réciproquement, $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[i], (-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[i], i^{-1} = -i \in \mathbb{Z}[i], (-i)^{-1} = i \in \mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1,-1,i$ et $-i$.
3. Soit $\omega \in (x^2+1)$. Notons $\omega = x+iy$ avec $x,y \in \mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x) \leq x < E(x)+1$. Si $x \leq E(x)+1/2$, notons $n_x = E(x)$, et si $x > E(x)+1/2$, notons $n_x = E(x)+1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x-n_x| \leq 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $\alpha = n_x + i\cdot n_y$. $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $|\omega-\alpha|^2 = (x-n_x)^2+(y-n_y)^2 \leq 1/4+1/4 = 1/2$. Donc $|\omega-\alpha| < 1$.
4. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}[i]$, avec $\beta \neq 0$. Soit alors $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta}-q| < 1$. Soit $r = \alpha-\beta q$. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta}-q| < 1$ donc $|r| < |\beta|$.

Correction de l'exercice 585 ▲

1. À permutation près, $x=-2$, $y=-2j$ et $z=-2j^2$ (j désigne la racine cubique de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
2. À permutation près, $x=1$, $y=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 586 ▲

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1+z+...+z^{n-1}| \leq 1+|z|+|z|^2+...+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+...+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1+z+...+z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1+z+...+z^{n-1}-nz^n = 0$, alors $|z| \leq 1$.

Correction de l'exercice 587 ▲

1. Soit $z\in\mathbb{C}$. $\text{sh}\,z$ et $\text{ch}\,z$ sont définis et donc, $\text{th}\,z$ existe si et seulement si $\text{ch}\,z\neq 0$. Or,

$$\text{ch}\,z=0\Leftrightarrow e^z+e^{-z}=0\Leftrightarrow e^{2z}=-1\Leftrightarrow e^{2z}=e^{i\pi}\Leftrightarrow 2z\in i\pi+2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right).$$

$\text{th}\,z$ existe si et seulement si $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.

2. Soit $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\text{th}\,z=0\Leftrightarrow \text{sh}\,z=0\Leftrightarrow e^z=e^{-z}\Leftrightarrow e^{2z}=1\Leftrightarrow 2z\in 2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\cap i\pi\mathbb{Z}=\varnothing$, $\text{th}\,z=0$ si et seulement si $z\in i\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}|\text{th}\,z|<1&\Leftrightarrow |e^z-e^{-z}|^2<|e^z+e^{-z}|^2\Leftrightarrow (e^z-e^{-z})(e^{\bar z}-e^{-\bar z})<(e^z+e^{-z})(e^{\bar z}+e^{-\bar z})\\&\Leftrightarrow -e^{z-\bar z}-e^{-(z-\bar z)}<e^{z-\bar z}+e^{-(z-\bar z)}\Leftrightarrow 2(e^{2iy}+e^{-2iy})>0\\&\Leftrightarrow \cos(2y)>0\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l}|\text{Im}\,z|<\frac{\pi}{2}\\|\text{th}\,z|<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|y|<\frac{\pi}{2}\\\cos(2y)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow |y|<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow z\in\Delta.$$

4. Soit $z\in\Delta$. D'après 1), $\text{th}\,z$ existe et d'après 3), $|\text{th}\,z|<1$. Donc $z\in\Delta\Rightarrow \text{th}\,z\in U$. Ainsi, th est une application de Δ dans U. Soit alors $Z\in U$ et $z\in\Delta$.

$$\text{th}\,z=Z\Leftrightarrow\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=Z\Leftrightarrow e^{2z}=\frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque $Z\neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z}\neq 0$ et on peut poser $\frac{1+Z}{1-Z}=re^{i\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$.
Par suite,

$$\begin{aligned}e^{2z}=\frac{1+Z}{1-Z}&\Leftrightarrow e^{2z}=re^{i\theta}\Leftrightarrow e^{2x}=r\text{ et }2y\in\theta+2\pi\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln r\text{ et }y\in\frac{\theta}{2}+\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Maintenant, on ne peut avoir $\theta=\pi$. Dans le cas contraire, on aurait $\frac{1+Z}{1-Z}=-r\in\mathbb{R}_-^*$ puis $Z=\frac{r+1}{r-1}\in\mathbb{R}$. Par suite, puisque $|Z|<1$, on aurait $Z\in]-1,1[$ et donc $\frac{1+Z}{1-Z}\in\mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction. Donc, $\theta\in]-\pi,\pi[$ puis $\frac{\theta}{2}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Mais alors,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{th}\,z=Z\\z\in\Delta\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\ln r\\y=\frac{\theta}{2}\end{array}\right..$$

Ainsi, tout élément Z de U a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right|+\frac{i}{2}\text{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ où $\text{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ désigne l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $]-\pi,\pi[$). Finalement, th réalise donc une bijection de Δ sur U.

Correction de l'exercice 596 ▲

1. $A=3X^5+4X^2+1$, $B=X^2+2X+3$, le quotient de A par B est $3X^3-6X^2+3X+16$ et le reste $-47-41X$.
2. $A=3X^5+2X^4-X^2+1$, $B=X^3+X+2$ le quotient de A par B est $3X^2+2X-3$ et le reste est $7-9X^2-X$.
3. $A=X^4-X^3-X-2$, $B=X^2-2X+4$, le quotient de A par B est X^2+X-2 de reste $6-9X$.

Correction de l'exercice 598 ▲

$X^4+X^3-2X+1=(X^2+X+1)(2X^2-3X+1)+X^3(2-X)$.

Correction de l'exercice 602 ▲

Les solutions sont les polynômes de la forme

$$P=\frac{1}{16}(5X^7-21X^5+35X^3-35X)+A(X-1)^4(X+1)^4$$

où A est un polynôme quelconque ; une seule solution de degré ≤ 7.

Correction de l'exercice 603 ▲

1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.
2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1 + 2X + X^2)$.

Correction de l'exercice 607 ▲

Soient $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, le quotient de A par B est $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$, le reste étant $261 - 268X$.

Correction de l'exercice 610 ▲

Ce sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 613 ▲

$\operatorname{Im}\varphi = \{P \in E \text{ tel que } X - 1 \mid P\}$ (Bézout généralisé).

$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(X^3 + X^2 + X)$.

Correction de l'exercice 614 ▲

1. $\frac{\alpha(b-X)+\beta(X-a)}{b-a}$.
2. $\cos n\theta + X \sin n\theta$.

Correction de l'exercice 615 ▲

$P = \lambda((X+2)(X+3)(X+4) - 6)$.

Correction de l'exercice 616 ▲

1. $X + 1$
2. 1
3. $X^2 - iX + 1$

Correction de l'exercice 617 ▲

1. $7U = X + 3, \quad 7V = -X^3 - 3X^2 + X + 4$
2. $3U = 2X^2 - X + 1, \quad 3V = -2X^2 - X + 2$

Correction de l'exercice 618 ▲

Substituer j à $X \Rightarrow R = \begin{cases} (-1)^n - 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ ((-1)^{n+1} - 1)(X+1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ ((-1)^n + 1)X & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$

Correction de l'exercice 619 ▲

$n \equiv 0 \pmod 6$.

Correction de l'exercice 620 ▲

1.
2.
3. Faire le produit.

Correction de l'exercice 621 ▲

1. $(2^{50}-1)X+2-2^{50}$.
2. $2^{16}\left(X-\sqrt{3}\right)$.
3. $192\left(X-\sqrt{2}\right)^2$.
4.

Correction de l'exercice 622 ▲

$\lambda=\mu=-1$.

Correction de l'exercice 623 ▲

$-3X^3+X^2-X-1$.

Correction de l'exercice 624 ▲

$n=qm+r \Rightarrow X^n-1 \equiv X^r-1 (\operatorname{mod} X^m-1)$. On applique la méthode des divisions euclidiennes entre n et $m \Rightarrow$ pgcd $=X^{n\wedge m}-1$.

Correction de l'exercice 625 ▲

1.
2. Récurrence.

Correction de l'exercice 629 ▲

On prend $n\geq 2$ (sinon tout est clair).

$Q=(X-e^{ia})(X-e^{-ia})$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia}\neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia}\neq 1$ ou enfin, $a\notin \pi\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a\in\pi\mathbb{Z}$ alors, $P=0=0.Q$.

2ème cas. Si $a\notin\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}P(e^{ia}) &= \sin a(\cos(na)+i\sin(na))-\sin(na)(\cos a+i\sin a)+\sin((n-1)a)\\ &= \sin((n-1)a)-(\sin(na)\cos a-\cos(na)\sin a)=0.\end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P. P est donc divisible par Q.

$$P=P-P(e^{ia})=\sin a(X^n-e^{ina})-\sin(na)(X-e^{ia})=(X-e^{ia})(\sin a\sum_{k=0}^{n-1}X^{n-1-k}e^{ika}-\sin(na))$$
$$=(X-e^{ia})S.$$

Puis,

$$S=S-S(e^{-ia})=\sin a\sum_{k=0}^{n-1}e^{ika}(X^{n-1-k}-e^{-i(n-1-k)a})=\sin a(X-e^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}e^{ika}(\sum_{j=0}^{n-2-k}X^{n-2-k-j}e^{-ija})$$
$$=\sin a(X-e^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}(\sum_{j=0}^{n-2-k}X^{n-2-k-j}e^{i(k-j)a})=\sin a(X-e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k+j=l}e^{i(k-j)a})X^{n-2-l}$$
$$=\sin a(X-e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k=0}^{l}e^{i(2k-l)a})X^{n-2-l}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)}a = e^{-ila}\frac{1-e^{2i(l+1)a}}{1-e^{2ia}} = \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}.$$

Donc

$$S = \sin a(X-e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}X^{n-2-l} = (X-e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\sin((l+1)a)X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X-e^{ia})(X-e^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}\sin((k+1)a)X^{n-2-k} = (X^2-2X\cos a+1)\sum_{k=0}^{n-2}\sin((k+1)a).$$

Correction de l'exercice 630 ▲

1. $\text{pgcd}(X^3-X^2-X-2, X^5-2X^4+X^2-X-2) = X-2$.
2. $\text{pgcd}(X^4+X^3-2X+1, X^3+X+1) = 1$.

Correction de l'exercice 631 ▲

1. $\text{pgcd}(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1, X^4+2X^3+X+2) = X^3+1$.
2. $\text{pgcd}(X^4+X^3-3X^2-4X-1, X^3+X^2-X-1) = X+1$
3. $\text{pgcd}(X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+1, X^4+2X^3+2X^2+X+1) = 1$.

Correction de l'exercice 638 ▲

1. $D = X^2+3X+2 = A(\frac{1}{18}X-\frac{1}{6})+B(-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18})$.
2. $D = 1 = A(-X^3)+B(X^5+X^3+X+1)$.

Correction de l'exercice 647 ▲

$X^6-7X^4+8X^3-7X+7 = (X^6+8X^3+7)-(7X^4+7X) = (X^3+1)(X^3+7)-7X(X^3+1) = (X^3+1)(X^3-7X+7)$ et $3X^5-7X^3+3X^2-7 = 3X^2(X^3+1)-7(X^3+1) = (X^3+1)(3X^2-7)$. Donc,

$$(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7) = (X^3+1)((X^3-7X+7)\wedge(3X^2-7)).$$

Maintenant, pour $\varepsilon\in\{-1,1\}$, $(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})^3-7(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})+7 = -(\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})+7\neq 0$.

Les polynômes (X^3-7X+7) et $(3X^2-7)$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ et sont donc premiers entre eux. Donc, $(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7) = X^3+1$.

Correction de l'exercice 653 ▲

$$\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Correction de l'exercice 661 ▲

L'ordre de multiplicité est 2.

Correction de l'exercice 662 ▲

Pour $a=\frac{1}{64}$; la racine multiple est $-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 664 ▲

1. $\begin{cases} X^3-3 &= (X-\sqrt[3]{3})(X^2+\sqrt[3]{3}X+\sqrt[3]{9}) \\ &= (X-\sqrt[3]{3})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{cases}$

2. $\begin{cases} X^{12}-1 &= (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\times \\ & \quad (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \\ &= (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times \\ & \quad \left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\times \\ & \quad \left(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right). \end{cases}$

Correction de l'exercice 675 ▲

1. $X^6+1=-\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.
2. $X^9+X^6+X^3+1=-\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Correction de l'exercice 676 ▲

1. $\frac{n}{2^{n-1}}$.
2. $\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. $-(-n)^n$.

Correction de l'exercice 677 ▲

$\omega^{2k}-2\omega^k\cos\theta+1=(\omega^k-e^{i\theta})(\omega^k-e^{-i\theta})$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k-x)=(-1)^n(x^n-1)$.

Correction de l'exercice 679 ▲

$X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1=(X^n-e^{in\theta})(X^n-e^{-in\theta})$.

$Q=\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^ke^{i(n-1-k)\theta}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}X^le^{-i(n-1-\ell)\theta}\right)$

$=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\left(\sum_{p=0}^{k}e^{i(k-2p)\theta}\right)+\sum_{k=n}^{2n-2}X^k\left(\sum_{p=k-n+1}^{n-1}e^{i(k-2p)\theta}\right)$

$=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}+\sum_{k=n}^{2n-2}X^k\frac{\sin(2n-k-1)\theta}{\sin\theta}$.

Correction de l'exercice 680 ▲

Division de proche en proche : $Q=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\cos k\theta$.

Correction de l'exercice 681 ▲

$\iff X^2+X+1 \mid X^{2n}+pX^n+q \iff j^{2n}+pj^n+q=0$.

Correction de l'exercice 682 ▲

$(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Correction de l'exercice 683 ▲

On calcule $\operatorname{pgcd}(P(X),Q(X))=X^2+5$.

$\Rightarrow x_1 = i\sqrt{5}$ et $x_2 = -i\sqrt{5}$.

On obtient alors : $P(X) = (X^2+5)(X^2-3X+1)$.

Les deux dernières racines sont $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 684 ▲

$P = (X-2)^2(X-3)^3$.

Correction de l'exercice 685 ▲

$a = 10i$. Racines : $i, i, i, \frac{-3i+\sqrt{15}}{2}, \frac{-3i-\sqrt{15}}{2}$.

Correction de l'exercice 686 ▲

$\lambda = 0, x = 1$.

Correction de l'exercice 687 ▲

P doit être divisible par $X^2 - X + r$, $\Rightarrow r^2 - 3r + p + 1 = 2r^2 - r + q = 0$.

On calcule le pgcd de ces expressions $\Rightarrow$ CNS : $4p^2 - 4pq + q^2 + 3p + 11q - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 688 ▲

$= (-1)^{n+1}\frac{(X-1)\cdots(X-n)\big(X-(n+1)\big)}{(n+1)!}$.

Correction de l'exercice 690 ▲

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = \mathrm{Im}\big((1+xe^{i\theta})^n\big)$.
Donc $P(x) = 0 \iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + xe^{i\theta} = \lambda e^{ik\pi/n}$.
On obtient $x_k = \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\theta - k\pi/n)}, \quad 0 \le k \le n-1$.

Correction de l'exercice 692 ▲

$P = a(X-b)^\alpha$.

Correction de l'exercice 693 ▲

1. si $P(x) = 0$, alors $P\big((x-1)^2\big) = P\big((x+1)^2\big) = 0$.
   On a toujours $|x| < \max\{|x-1|, |x+1|\}$ donc, s'il y a une racine de module > 1, il n'y a pas de racine de module maximal $\Rightarrow P = 0$.
   Or $\max\{|x-1|, |x+1|\} \ge 1$ avec égalité ssi $x = 0$. Donc $P = 0$ ou $P = 1$.
2. Si x est racine, alors x^2 et $(x+1)^2$ le sont aussi.
   $\Rightarrow |x| = 0$ ou $1 \Rightarrow |x+1| = 0$ ou $1 \Rightarrow x \in \{0, -1, j, j^2\}$.
   $x = 0$ ou $x = -1 \Rightarrow P(1) = 0$: exclus.
   Donc $P = a(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$. On remplace $\Rightarrow P = (X^2+X+1)^\alpha$.
3. Seule racine possible : $1 \Rightarrow P = -(X-1)^k$.

Correction de l'exercice 695 ▲

Mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Correction de l'exercice 696 ▲

1. $P = \frac{\Phi}{X-z_k} \Rightarrow \frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k} = \frac{\Phi'(z_k)}{n}$.
2. Les deux membres sont égaux en $z_0, \dots, z_n$.
3. Décomposer Φ sur la base $\left((X-z_0)^k\right)$.
4. $\sum_k e^{2ikp/n} = 0$ pour $p < n \Rightarrow$ OK.

Correction de l'exercice 700 ▲

$x = z + \frac{1}{z}$ avec $z^6 + z^5 + \cdots + 1 = 0$.
Autres racines : $2\cos\frac{4\pi}{7}$ et $2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Correction de l'exercice 701 ▲

1. Soit $P(x) = a_n \prod_{k=1}^n (x - x_k)$. On a : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-x_k)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P'}{P}\right)(x) = \frac{P'^2 - PP''}{P^2}(x)$.
2. Pour $k = 1, x = 0$, on a : $a_0 a_2 \leq \frac{1}{2}a_1^2$.
   Pour k quelconque : on applique le cas précédent à $P^{(k-1)}$ dont les racines sont encore réelles simples : $(k-1)!a_{k-1} \times \frac{(k+1)!}{2}a_{k+1} \leq \frac{1}{2}(k!a_k)^2 \Rightarrow a_{k-1}a_{k+1} \leq \frac{k}{k+1}a_k^2$.

Correction de l'exercice 702 ▲

$Q = X^2 - 3X + 1$, $P = \left(X - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(X - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)(X^2 - X + 4)$.

Correction de l'exercice 704 ▲

1. p est premier car K est intègre.
   On a $1^p = 1$, $(xy)^p = x^p y^p$ (un corps est commutatif) et $(x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k x^k y^{p-k} = x^p + y^p$ car p divise C_p^k si $1 \leq k \leq p-1$.
2. Remarquer que $P' = 0 \Leftrightarrow P \in K[X^p]$.
   On suppose σ surjectif. Soit $P(X) = Q(X^p) = a_0 + \cdots + a_k X^{kp}$ un polynôme non constant à dérivée nulle. Il existe $b_0, \dots, b_k$ tels que $b_i^p = a_i$. Alors $P(X) = Q(X)^p$ est réductible.
   On suppose que tout polynôme irréductible a une dérivée non nulle. Soit $a \in K$ et $P(X) = X^p - a$. $P' = 0$ donc P est réductible. Soit Q un facteur unitaire irréductible de $X^p - a$. Alors Q^p et $X^p - a$ ont Q en facteur commun donc leur pgcd, D, est non constant. Mais Q^p et $X^p - a$ appartiennent à $K[X^p]$ donc D, obtenu par l'algorithme d'Euclide aussi, d'où $D = X^p - a$ et $X^p - a$ divise Q^p. Par unicité de la décomposition de Q^p en facteurs irréductibles, il existe $r \in |||$ tel que $X^p - a = Q^r$. Par examen du degré on a $r = p$ donc $\deg Q = 1$, $Q = X - b$ et finalement $b^p = a$.

Correction de l'exercice 705 ▲

$V(\alpha)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P^{(n)}(\alpha)$ ont même signe, de même pour $V(\beta)$. Comme $P^{(n)}(\alpha) = P^{(n)}(\beta)$ on en déduit que $V(\alpha) - V(\beta)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ ont même signe, donc si et seulement si P a un nombre pair de racines dans $[\alpha, \beta]$.

Décroissance de V : V est constant sur tout intervalle ne contenant aucune racine de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$. Considérons $x_0 \in [\alpha, \beta[$ tel que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \cdots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x > x_0$, $P^{(k)}(x)$ a même signe que $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(k+1)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x)$ ont même signe que $P^{(\ell)}(x_0)$ donc les nombres de changements de signe dans les sous-suites $(P^{(k)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ et $(P^{(k)}(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ sont égaux. De même si $P(x_0) = \cdots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Ceci prouve que $V(x_0^+) = V(x_0)$ pour tout $x_0 \in [\alpha, \beta[$.

On considère à présent $x_0 \in]\alpha, \beta]$ tel que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \cdots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x < x_0$ la sous-suite $(P^{(k)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ a $\ell - k - 1$ changements de signe si $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(\ell)}(x_0)$ ont même signe, $\ell - k$ changements de signe sinon tandis que la sous-suite $(P^{(k)}(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ en a un ou zéro. De même, si $P(x_0) = \cdots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$ on trouve ℓ changements de signe pour $(P(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ et zéro pour $(P(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ donc dans tous les cas $V(x_0^-) \geq V(x_0)$. Ceci achève la démonstration.

Correction de l'exercice 706 ▲

Pour $z \in \mathbb{U}$, on a $Q(z) = 0 \Leftrightarrow P(z)/z^d \overline{P}(\bar{z}) = -\omega$. Comme $\overline{P}(\bar{z}) = \overline{P(z)}$, les deux membres ont même module pour tout $z \in \mathbb{U}$, il faut et il suffit donc que les arguments soient égaux modulo 2π. Pour $a \in (x^2+1)$ avec $|a| < 1$, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(e^{i\theta} - a)$

augmente de 2π lorsque θ varie de 0 à 2π donc, vu l'hypothèse sur les racines de P, une détermination continue de $\mathrm{Arg}(P(z)/z^d\overline{P(z)})$ augmente de $2\pi d$ lorsque θ varie de 0 à 2π. Une telle détermination prend donc au moins d fois une valeur congrue à $\mathrm{Arg}(-\omega)$ modulo 2π, ce qui prouve que Q admet au moins d racines distinctes dans $\mathbb{U}$.

Correction de l'exercice 707 ▲

$f(2k\pi/n) > 0 > f((2k+1)\pi/n)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ donc f admet $2n$ racines dans $[0,2\pi[$. En posant $z = e^{ix}$, $z^n f(x)$ est un polynôme en z de degré $2n$ ayant $2n$ racines sur le cercle unité ; il n'en n'a pas ailleurs.

Correction de l'exercice 708 ▲

$(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)$.

Correction de l'exercice 709 ▲

Racines : $\alpha = 2 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\alpha}$, $\beta = 2 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\beta}$.

Factorisation de P sur $\mathbb{R}$: $P = (X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)(X^2 - 2\mathrm{Re}(\beta)X + |\beta|^2)$ et les facteurs sont irrationnels.

Correction de l'exercice 710 ▲

1. $P = |Q + iR|^2$.
2. Factoriser P.
3. Avec Maple : $P = \frac{1}{65}Q\overline{Q}$ avec $Q = 65X^2 + (49i - 67)X + (42 + 11i)$ et Q est irréductible sur $Q[i]$. Donc si $P = A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ avec A, B polynômes à coefficients entiers alors, quitte à changer B en $-B$, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}[i]$ tel que : $A + iB = \lambda Q$ et $A - iB = \overline{\lambda Q}$ d'où :
$$\begin{aligned}2A &= 65(\lambda + \overline{\lambda})X^2 + ((49i - 67)\lambda - (49i + 67)\overline{\lambda})X + ((42 + 11i)\lambda + (42 - 11i)\overline{\lambda})\\ 2iB &= 65(\lambda - \overline{\lambda})X^2 + ((49i - 67)\lambda + (49i + 67)\overline{\lambda})X + ((42 + 11i)\lambda - (42 - 11i)\overline{\lambda})\\ \lambda\overline{\lambda} &= 65.\end{aligned}$$
En particulier $65\lambda \in \mathbb{Z}[i]$, écrivons $\lambda = \frac{u+iv}{65}$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}A &= uX^2 - \frac{67u + 49v}{65}X + \frac{42u - 11v}{65}\\ B &= vX^2 + \frac{49u - 67v}{65}X + \frac{11u + 42v}{65}\\ u^2 + v^2 &= 65.\end{aligned}$$
$67u + 49v$ est divisible par 65 si et seulement si $u \equiv 8v (\mathrm{mod}\, 65)$ et dans ce cas les autres numérateurs sont aussi multiples de 65. La condition $u^2 + v^2 = 65$ donne alors $v = \pm 1, u = \pm 8$ d'où :
$$A = \pm(8X^2 - 9X + 5), \qquad B = \pm(X^2 + 5X + 2).$$

Correction de l'exercice 713 ▲

1. Si $P = QR$ alors $Q(a_i)R(a_i) = -1 \Rightarrow Q(a_i) = -R(a_i) = \pm 1$, donc $Q + R$ a n racines, donc est nul, et $P = -Q^2$: contradiction pour $x \to \infty$.
2. Même raisonnement : $P = Q^2$, donc $Q^2 - 1 = (Q - 1)(Q + 1) = (X - a_1)\dots(X - a_n)$.
On répartit les facteurs entre $Q - 1$ et $Q + 1$: $n = 2p$, contradiction.

Correction de l'exercice 714 ▲

Soit $P = QR$ avec $Q = X^{n_1} + b_{n_1-1}X^{n_1-1} + \dots + b_0X^0$ et $R = X^{n_2} + c_{n_2-1}X^{n_2-1} + \dots + c_0X^0$.

Par hypothèse sur $a_0 = b_0c_0$, p divise un et un seul des entiers b_0, c_0. Supposons que p divise $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$: alors $a_k \equiv b_kc_0 (\mathrm{mod}\, p)$ donc p divise b_k. On aboutit à « p divise le coefficient dominant de Q », ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 715 ▲

On suppose $a \neq 0$ et $X^p - a = PQ$ avec $P, Q \in K[X]$ unitaires non constants. Soit $n = \deg(P) \in [[1, p-1]]$ et $b = (-1)^n P(0) \in K$. b est le produit de cetraines p-èmes de a, donc $b^p = a^n$. De plus $n \wedge p = 1$; soit $nu + pv = 1$ une relation de Bézout. On a alors $b^{pu} = a^{nu} = a^{1-pv}$ d'où $a = (b^u/a^v)^p$ donc $b^u/a^v \in K$ est racine de $X^p - a$.

Correction de l'exercice 716 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2+X+1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1\\
&\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1\\
&(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X])\\
&\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 1+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
Si $n \in 2+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
Si $n \in 3+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 4+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.
En résumé, $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 si et seulement si n est dans $(1+6\mathbb{Z}) \cup (5+6\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 717 ▲

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels.

Pour tout réel x, on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (x-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l} ((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les a_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_i des entiers naturels et les $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.

Tout d'abord, pour tout réel x, $\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinomes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)

Donc, $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \geq 0)$.

Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} P(x) \geq 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en a_i, ce qui contredit l'hypothèse faite sur P. Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$.

Posons $A = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite $Q_1 = \prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$. Ainsi,

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2(B+iC)(B-iC) = A^2(B^2+C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Correction de l'exercice 718 ▲

Soit P un polynôme de degré n supèrieur ou égal à 2.

Posons $P = \lambda(X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_n)$ où λ est un complexe non nuls et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j\neq i}(X - z_j)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{X - z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z - z_i}}{|z - z_i|^2}.$$

En posant $\lambda_i = \frac{1}{|z-z_i|^2}$, ($\lambda_i$ est un réel strictement positif) et en conjugant, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z - z_i) = 0$ et donc

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \mathrm{bar}(z_1(\lambda_1), \ldots, z_n(\lambda_n)).$$

Correction de l'exercice 719 ▲

On suppose que $n = \deg P \geq 1$.

On pose $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k sont des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

D'après l'exercice précédent, $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - z_k}$.

Si P est divisible par P', $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / \ P = (aX + b)P'$ et donc $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / \ \frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$ ce qui montre que la fraction rationelle $\frac{P'}{P}$ a exactement un et un seul pôle complexe et donc que les z_k sont confondus.

En résumé, si P' divise P, $\exists (a,\lambda) \in \mathbb{C}^2 / \ P = \lambda(X - a)^n$ et $\lambda \neq 0$.

Réciproquement, si $P = \lambda(X - a)^n$ avec $\lambda \neq 0$, alors $P' = n\lambda(X - a)^{n-1}$ divise P.

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 720 ▲

a est solution du problème si et seulement si $X^5 - 209X + a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + 1$. Mais

$$X^5 - 209X + a = (X^2 + \alpha X + 1)(X^3 - \alpha X^2 + (\alpha^2 - 1)X - (\alpha^3 - 2\alpha)) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208)X + a + (\alpha^3 - 2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} / \left\{ \begin{array}{l} \alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \\ a = -\alpha^3 + 2\alpha \end{array} \right.$. Mais, $\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13, 16\} \Leftrightarrow \alpha \in \{-4, 4, i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\}$ et la deuxième équation fournit $a \in \{56, -56, 15i\sqrt{13}, -15i\sqrt{13}\}$.

Correction de l'exercice 721 ▲

On note que $P(1) = 1 \neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k + 2}{a_k - 1} = \sum_{k=1}^{5} (1 + \frac{3}{a_k - 1}) = 5 - 3 \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1 - a_k} = 5 - 3\frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3\frac{12}{1} = -31.$$

Correction de l'exercice 722 ▲

$$\begin{aligned}
P = X^6 - 2X^3 \cos a + 1 &= (X^3 - e^{ia})(X^3 - e^{-ia}) \\
&= (X - e^{ia/3})(X - je^{ia/3})(X - j^2e^{ia/3})(X - e^{-ia/3})(X - je^{-ia/3})(X - j^2e^{-ia/3}) \\
&= (X^2 - 2X \cos \frac{a}{3} + 1)(X^2 - 2X \cos(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}) + 1)(X^2 - 2X \cos(\frac{a}{3} - \frac{2\pi}{3}) + 1)
\end{aligned}$$

Il reste à se demander 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.

Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.

Les cas particuliers sont donc ($\frac{a}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = 0$) et ($\frac{a+2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = \pi$) et ($\frac{a-2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0, \pi]$).

1er cas. Si $a = 0$.

$$P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1) = (X-1)^2(X^2 + X + 1)^2.$$

2ème cas. Si $a = \pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P = (X+1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

3ème cas. Si a est dans $]0, \pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et clairement deux à deux distincts. Donc

$$P = (X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos\frac{a+2\pi}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos\frac{a-2\pi}{3} + 1).$$

Correction de l'exercice 723 ▲

Pour k élément de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, posons $x_k = \sin\frac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}
P &= (X - \sin\frac{\pi}{7})(X - \sin\frac{2\pi}{7})(X - \sin\frac{3\pi}{7})(X + \sin\frac{\pi}{7})(X + \sin\frac{2\pi}{7})(X + \sin\frac{3\pi}{7}) \\
&= (X^2 - \sin^2\frac{\pi}{7})(X^2 - \sin^2\frac{2\pi}{7})(X^2 - \sin^2\frac{3\pi}{7}) \\
&= (X^2 - \frac{1}{2}(1 - cos\frac{2\pi}{7}))(X^2 - \frac{1}{2}(1 - cos\frac{4\pi}{7}))(X^2 - \frac{1}{2}(1 - cos\frac{6\pi}{7})) \\
&= \frac{1}{8}Q(-2X^2 + 1)
\end{aligned}$$

où $Q(Y) = (\cos\frac{2\pi}{7} - Y)(\cos\frac{4\pi}{7} - Y)(\cos\frac{8\pi}{7} - Y)$.

Posons $\omega = e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4) = \frac{1}{8}(6 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{14} + \omega^{15}) \\
&= \frac{1}{8}(\omega^6 + \omega^7 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6)(\omega^3 + \omega^4) + (\omega^3 + \omega^4)(\omega^2 + \omega^5)) \\
&= \frac{1}{4}(2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5 + 2\omega^6) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = -\frac{1}{2}$$

Donc, $Q = \frac{1}{8} - (-\frac{1}{2})Y + (-\frac{1}{2})Y^2 - Y^3 = \frac{1}{8}(-8Y^3 - 4Y^2 + 4Y + 1)$ puis,

$$P = \frac{1}{64}(-8(-2X^2+1)^3 - 4(-2X^2+1)^2 + 4(-2X^2+1) + 1) = \frac{1}{64}(64X^6 - 112X^4 + 54X^2 - 7).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les sin est $64x^6 - 112x^4 + 54x^2 - 7 = 0$.

Maintenant, si $r = (p$ entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors, d'après l'exercice 847, p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1, -1, 7, -7\}$ et q est élément de $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. On vérifie aisément qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Correction de l'exercice 724 ▲

Posons $P = X^4 - 4X^3 - 36X^2 + \lambda X + \mu$.

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu) \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists (z,r) \in \mathbb{C}^2/ \text{ les racines de } P \text{ soient } z, z+r, z+2r, z+3r\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r) \in \mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = 4\\ \sigma_2 = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r) \in \mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l} 4z+6r = 4\\ z(3z+6r)+(z+r)(2z+5r)+(z+2r)(z+3r) = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r) \in \mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l} 2z+3r = 2\\ 6z^2+18rz+11r^2 = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r) \in \mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l} z = 1-\frac{3}{2}r\\ 6(1-\frac{3}{2}r)^2+18(1-\frac{3}{2}r)r+11r^2 = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r) \in \mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l} -\frac{5}{2}r^2+42 = 0\\ z = 1-\frac{3}{2}r\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu \end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r = 2\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis $z = 1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis les racines $z_1 = 1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_2 = 1-\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_3 = 1+\sqrt{\frac{21}{5}}$ et $z_4 = 1+3\sqrt{\frac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\lambda = z_1z_2z_3z_4 = (1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}}) = (1-9\frac{21}{5})(1-\frac{21}{5}) = \frac{2994}{25},$$

et

$$\begin{aligned}
\mu &= (1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\frac{21}{5})+(1-9\frac{21}{5})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-9\frac{21}{5})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-\frac{21}{5})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})\\
&= 2(1-\frac{21}{5})+2(1-9\frac{21}{5}) = 2(2-10\frac{21}{5}) = -80
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 725 ▲

Pour $i \in \{1,2,3\}$, on a $x_i^3+2x_i-1 = 0$ et donc $x_i^4+2x_i^2-x_i = 0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4+2S_2-S_1 = 0$ et donc

$$S_4 = -2((\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_1 = (-2)(-2.2) = 8.$$

Correction de l'exercice 726 ▲

Pour chacun des 8 numérateurs possibles, il y a $C_7^2 = 21$ dénominateurs et donc au total, $8\times 21 = 168$ termes.

$$\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = \sum \frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2\ldots x_8} = \frac{1}{\sigma_8}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \frac{1}{3}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Ensuite,

$$\sigma_1\sigma_6 = (\sum x_1)(\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = \sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

et donc,

$$\sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = \sigma_1 \sigma_6 - \sigma_7 = (-1)(0) - 1 = -1.$$

Donc, $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3} = -\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 728 ▲

1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}$.
2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}$.
3. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}$.
4. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}$.
5. $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}$.
6. $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}$.
7. $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$.
8. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}$.
9. $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 + \frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3} - \frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{X^2+X+2}$.
10. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$.
11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.
12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$.
13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} =$
$-\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \frac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}$.
20. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Correction de l'exercice 729 ▲

Commencer bien sûr par la division suivant les puissances décroissantes (la faire faire par les étudiants) : $\Phi = x+1+\Phi_1$ avec $\Phi_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
Puis factoriser le dénominateur et faire donner le type de décomposition de Φ_1 :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Expliquer qu'on obtient alors A en multipliant les deux membres de (23) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$). On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$). Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (23) par x et en passant à la limite pour $x \to \infty$ ($B = 4$). Faire remarquer que pour un cas aussi simple, les calculs peuvent se faire *de tête* en écrivant simplement les coefficients A, B, C au fur et à mesure qu'on les obtient.

$$\frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2} = x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

Correction de l'exercice 730 ▲

La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2 + \Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

Faire remarquer que la méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais qu'il resterait encore 3 coefficients à déterminer.
Il y a ici une méthode plus efficace : effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1 - 2x + x^2$:

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \tag{24}$$

En divisant les deux membres de (24) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$: méthode de l'exercice précédent, ou division suivant les puissances décroissantes de $x-2$ par $x-1$: $x-2 = (x-1) - 1$.

$$\frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x - a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x.

Correction de l'exercice 731 ▲

Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^3} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+1}. \tag{25}$$

La méthode du premier exercice permet d'obtenir A, puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (25) par x^2+1, puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$, simplifier par x^2+1, calculer D et E... (le faire faire quand même à titre d'entraînement).

On va ici se contenter de trouver A ($A = 3$), puis faire la soustraction $\Phi_1 = \Phi - \frac{A}{x}$. Faire faire le calcul aux étudiants ; leur faire remarquer que, sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 *doit* se simplifier par x. On trouve :

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}.$$

La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ par x^2+1, puis du quotient obtenu par x^2+1.

$$\frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2+1)^3} = \frac{3}{x} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle. Faire remarquer aussi comment on peut simplifier petit à petit en éliminant du dénominateur un dénominateur *simple* (méthode utilisée dans l'exercice 3 par le calcul de $\Phi - \frac{A}{x}$).

Correction de l'exercice 735 ▲

1.
2.
3. ssi $\exists\, G \in K(X)$ tel que $G \circ F = X \Rightarrow P \circ F = XQ \circ F$.

   $F = \frac{A}{B}$, $A \wedge B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A \mid (p_0 - Xq_0) \\ B \mid (p_n - Xq_n) \end{cases} \Rightarrow F$ est homographique.

4. $F = \phi(X)$.

Correction de l'exercice 737 ▲

$F = \frac{P}{Q}$. Si $P = \lambda Q$: $\operatorname{Im} F = \{\lambda\}$.

Si $P = \lambda Q + \mu$: $\operatorname{Im} F = (x^2+1)^{\setminus}\{\lambda\}$.

Sinon, $\operatorname{Im} F = (x^2+1)$.

Correction de l'exercice 738 ▲

1) $G =$cste.

2) F a un seul pôle $a \Rightarrow F = \frac{P}{(X-a)^k}$ et $G = a + \frac{1}{Q}$ avec $\deg P \leq k$.

3) $F \in (x^2+1)^{[}X] \Rightarrow G \in (x^2+1)^{[}X]$.

Correction de l'exercice 739 ▲

1.
2. $n\frac{X^n+1}{X^n-1}$.

Correction de l'exercice 740 ▲

1. $\Rightarrow \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})} = \frac{P(X)+P(\frac{1}{X})}{Q(X)+Q(\frac{1}{X})}$.
2.
3.

Correction de l'exercice 743 ▲

$I_k = \{F$ tels que $\deg F \leq -k\}$.

Correction de l'exercice 745 ▲

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)} &= \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{-3/4}{X+1} + \frac{1/12}{X-1} + \frac{1/3}{X-j} + \frac{1/3}{X-j^2}\\ &= \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{-3/4}{X+1} + \frac{1/12}{X-1} + \frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 746 ▲

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+p}p!}{k!(n-k)!(X+k)^{p+1}}$.
2. $\frac{(-1)^p p!}{2i\sin\alpha}\left(\frac{1}{(X-e^{i\alpha})^{p+1}} - \frac{1}{(X-e^{-i\alpha})^{p+1}}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^k p!(-1)^k \frac{\sin(p+1-k)\alpha}{\sin\alpha} X^k}{(X^2-2X\cos\alpha+1)^{p+1}}$.
3. $\frac{\sum_{k \text{ pair}} C_{p+1}^k p!(-1)^{p+1}\frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}X^{p+1-k} + \sum_{k \text{ impair}} C_{p+1}^k p!(-1)^p \frac{\operatorname{ch} k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}X^{p+1-k}}{(X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1)^{p+1}}$.

Correction de l'exercice 747 ▲

1. 1.
2. 1/4.
3. 1/2.

Correction de l'exercice 748 ▲

$\frac{1}{Q(a)(X-a)^2} - \frac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)} = \frac{2}{R''(a)(X-a)^2} - \frac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}$.

Correction de l'exercice 749 ▲

1. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(1+a_i^2)^n}{P'^2(a_i)(X-a_i)^2} + \frac{2na_i - P''(a_i)(1+a_i^2)/P'(a_i)}{P'^2(a_i)(X-a_i)}\right)$.
2.

Correction de l'exercice 750 ▲

1. Décomposer $1/P$ en éléments simples, et prendre $x \to \infty$.
2. Idem avec $X^k/P \Rightarrow \Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le k < n-1 \\ 1 & \text{si } k = n-1. \end{cases}$

Correction de l'exercice 751 ▲

1. $P' = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i P}{X-x_i} \Rightarrow \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X-x_i}$.
2. $P'(z) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overline{z-x_i}}{|z-x_i|^2} = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{Bar}\left(x_i, \frac{m_i}{|z-x_i|^2}\right)$.
3.
4.

Correction de l'exercice 753 ▲

$F(X+1) - F(X) = \frac{2}{X-1} - \frac{3}{X} + \frac{1}{X+1} \Rightarrow F(X) = \frac{1}{X} - \frac{2}{X-1} + \text{cste}$.

Correction de l'exercice 754 ▲

$F = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X-b_j} - \frac{1}{X-c} = \lambda \frac{\prod(X-a_i)}{(X-c)\prod(X-bj)}$ où $\lambda = -\prod \frac{c-b_i}{c-a_i}$.

Correction de l'exercice 755 ▲

$Q = (XP+P')(XP'+P) = XP^2\left(X+\frac{P'}{P}\right)\left(\frac{1}{X}+\frac{P'}{P}\right)$.

$\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{X-a_i}$, donc les expressions : $x + \frac{P'(x)}{P(x)}$ et $\frac{1}{x} + \frac{P'(x)}{P(x)}$ changent de signe entre a_i et a_{i+1}.

Cela fait au moins $2n-3$ racines distinctes ($2n-2$ si 1 n'est pas racine), plus encore une racine pour $\frac{1}{x} + \frac{P'(x)}{P(x)}$ entre 0 et a_1.

Correction de l'exercice 756 ▲

$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{(X-k)\prod_{i\neq k}(k-i)}$ donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)} = \lim_{x\to\infty} \frac{xP(x)}{Q(x)} = 1$.

Si l'on suppose $|P(k)| < \frac{n!}{2^n}$ pour tout $k \in [[0,n]]$ alors $\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}\right| < \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)}= 1$, contradiction.

Correction de l'exercice 757 ▲

1. On suppose $P \neq 0$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines de P de multiplicités $m_1, \dots, m_p$ et $n = m_1 + \dots + m_p = \deg(P)$. On a $\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{m_i}{X-\alpha_i}$ et $\sum_i \frac{-m_i}{(X-\alpha_i)^2} = \left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''}{P} - \left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{(X-\alpha)(X-\beta)} - \left(\sum_i \frac{m_i}{X-\alpha_i}\right)^2$ où α, β sont les deux racines de P manquant dans P''. Si $\alpha_i \notin \{\alpha, \beta\}$ alors en comparant les termes en $1/(X-\alpha_i)^2$ des membres extrêmes on trouve $m_i = 1$. De même si $\alpha_i = \alpha \neq \beta$ ou l'inverse. Reste le cas $\alpha_i = \alpha = \beta$ qui donne $-m_i = n(n-1) - m_i^2$ donc $m_i = n$ ce qui contredit l'hypothèse "P a deux racines distinctes".
2. Soient $\alpha_i < \alpha_j$ les deux plus petites racines réelles de P. Si α_i est aussi racine de P'' alors P et P'' changent de signe en α_i et, en remplaçant au besoin P par $-P$, P est convexe positif sur $]-\infty, \alpha_i[$ et concave négatif sur $]\alpha_i, \alpha_j[$ ce qui est absurde. Donc $\alpha_i \in \{\alpha, \beta\}$. De même pour la plus grande racine réelle de P, ce qui prouve que α et β sont réels. En identifiant les éléments de première espèce dans les deux décompositions de P'/P on obtient :

$$\forall\, i \in [[1,n]],\ \sum_{j \neq i} \frac{2}{\alpha_i - \alpha_j} = \begin{cases} n(n-1)/(\alpha - \beta) & \text{si } \alpha_i = \alpha, \\ n(n-1)/(\beta - \alpha) & \text{si } \alpha_i = \beta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier pour $\alpha_i \notin \{\alpha, \beta\}$ on a : $\sum_{j \neq i} \frac{\overline{\alpha_i} - \overline{\alpha_j}}{|\alpha_i - \alpha_j|^2} = 0$ ce qui signifie que $\overline{\alpha_i}$ est barycentre des $\overline{\alpha_j}$ avec des coefficients positifs, donc appartient à l'enveloppe convexe des $\overline{\alpha_j}$, $j \neq i$. Il en va de même sans les barres, et donc l'ensemble des racines de P n'a pas d'autres points extrémaux que α et β ; il est inclus dans $[\alpha, \beta]$ donc dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 758 ▲

1. $X^3 - 1 = (X^2+1)(X^3+X^2-1) - X^4(X+1)$.
2. $F(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan x + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 759 ▲

1. $1 = (1-X)^2(1+2X+3X^2+\dots+nX^{n-1}) + (n+1)X^n - nX^{n+1}$.
2. $= \frac{-n\cos n\theta + (n+1)\cos(n-1)\theta - \cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

Correction de l'exercice 760 ▲

1. $1 - X^2 = (1 - 2X\cos\theta + X^2)(1 + 2X\cos\theta + \dots + 2X^n\cos n\theta) + 2X^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2X^{n+2}\cos n\theta$.
2. $= \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$.

Correction de l'exercice 761 ▲

1.
2. Division de 1 par $P \Rightarrow U = 1 - 2X + X^2 + X^3 - X^4, \quad V = -1 + X^2 + X^3 + X^4$.

Correction de l'exercice 762 ▲

1. Soit $F = \frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2} = \frac{X^2+3X+5}{(X-1)(X-2)}$.
   1 et 2 ne sont pas racines du polynôme X^2+3X+5 et donc, F est bien sous forme irréductible. La partie entière de F étant clairement 1, F s'écrit sous la forme :

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2},$$

   où a et b sont deux réels.
   $a = \lim_{x \to 1}(x-1)F(x) = \frac{1+3+5}{1-2} = -9$ et $b = \lim_{x \to 2}(x-2)F(x) = \frac{4+6+5}{2-1} = 15$. Donc,

$$F = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.$$

2. Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

où a, b et c sont trois réels.
$a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \frac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$, puis $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \frac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$ et
$c = \lim_{x\to 3}(x-3)F(x) = \frac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Donc,

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

3. Soit $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

avec
$a = \lim_{x\to 0} xF(x) = 1$ et $c = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = 1$. Enfin, $x = -1$ fournit $-1 - \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et donc $b = -1$.
Pour trouver b, on peut aussi écrire (le meilleur) $0 = \lim_{x\to+\infty} xF(x) = a + b$ et donc que $b = -a = -1$.
On peut encore écrire (le moins bon ici)

$$\frac{1}{X(X-1)^2} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1-(X-1)^2-X}{X(X-1)^2} = \frac{-X^2+X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X-1}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Autre démarche.

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{X-1-X}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2}\\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.\end{aligned}$$

4. Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{2}$ puis, $x = 0$ fournit $-2a + 2b = 1$ et donc $a = 0$.

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}\right).$$

5. Soit $F = \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

$c = \lim_{x\to 2}(x-2)^3F(x) = \frac{1}{64}$ puis,

$$\begin{aligned}F - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3}\right) &= \frac{64-(X+2)^3+(X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2+48}{64(X-2)^3(X+2)^3}\\ &= -\frac{3}{16}\frac{X^2-4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16}\frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2}\end{aligned}$$

Puis, $b = \lim_{x\to 2}(x-2)^2\left(F(x) - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x+2)^3}\right)\right) = -\frac{3}{16}\frac{1}{(2+2)^2} = -\frac{3}{256}$. Enfin, $x = 0$ fournit $-\frac{1}{64} = -a - \frac{3}{512} - \frac{1}{256}$ et $a = \frac{1}{64} - \frac{5}{512} = \frac{3}{512}$. Donc,

$$F = \frac{1}{512}\left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3}\right).$$

6. Soit $F = \frac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$. Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c}}{X-j^2} + \frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$b = \lim_{z\to 1}(z-1)^2F(z) = \frac{1}{9}$ et

$$\begin{aligned}d &= \lim_{z\to j}(z-j)^2F(z) = \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2}\\ &= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9}\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{(j+j^2)X^2 - 2(j+j^2)X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)}\\ &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-X^2+2X+2}{(X-j)^2(X-j^2)} = \frac{(X^2+X+1)^2 + (X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2}\\ &= \frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}F - 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right) &= \frac{X^6}{(X^3-1)^2} - 1 - \frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2}\\ &= \frac{3X^6 - 3(X^3-1)^2 - 2X^3 - 1}{3(X^3-1)^2} = \frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2}\\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{X^3-1}.\end{aligned}$$

Mais alors, $a = \lim_{z\to 1}(z-1)(F(z) - 1 - \frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{j^2}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z-j^2)^2}) = \frac{4}{3}\frac{1}{1+1+1} = \frac{4}{9}$. De même,

$$c = \lim_{z\to j}(z-j)(F(z) - 1 - \frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{j^2}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z-j^2)^2}) = \frac{4}{3}\frac{1}{(j-1)(j-j^2)} = \frac{4j^2}{9}.$$

Donc,

$$F = 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j^2}{X-j} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{4j}{X-j^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right).$$

Si on veut la décomposition sur $\mathbb{R}$, on peut regrouper les conjugués :

$$\begin{aligned}F &= 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j^2(X-j^2) + 4j(X-j)}{X^2+X+1} + \frac{j^2(X-j^2)^2 + j(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X+4}{X^2+X+1} + \frac{-X^2+2X+2}{(X^2+X+1)^2}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X+4}{X^2+X+1} + \frac{-X^2-X-1+3X+3}{(X^2+X+1)^2}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X+3}{X^2+X+1} + \frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2}\right)\end{aligned}$$

7. Soit $F = \frac{1}{X^6+1}$.

$$F = \sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

où $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6})}$. Mais,

$$\lambda_k = \frac{1}{6\omega_k^5} = \frac{\omega_k}{6\omega_k^6} = -\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^6+1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{i}{X-i} + \frac{i}{X+i} - \frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}} - \frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}} + \frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}} + \frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}}\right).$$

8. Soit $F=\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$.

$$\begin{aligned}X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2&=(X-1)(X^4-2X^3+3X^2-4X+2)=(X-1)^2(X^3-X^2+2X-2)\\&=(X-1)^2(X^2(X-1)+2(X-1))=(X-1)^3(X^2+2).\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F est donc de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}d&=\lim_{z\to i\sqrt{2}}(z-i\sqrt{2})F(z)=\frac{(i\sqrt{2})^2+3}{(i\sqrt{2}-1)^3(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{-4+10i\sqrt{2}}\\&=-\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}=-\frac{1}{108}\frac{(2+5i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2})+(2-5i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}{X^2+2}=-\frac{1}{108}\frac{4X-20}{X^2+2}=\frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}&=\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}-\frac{-X+5}{27(X^2+2)}\\&=\frac{27(X^2+3)-(-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3(X^2+2)}\\&=\frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3}\\&=\frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3}\\&=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}).\end{aligned}$$

Finalement,

$$F=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3})-\frac{1}{108}(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}}+\frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}}).$$

9. Soit $F=\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$. Puisque F est réelle et impaire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{d}{(X-i)^3}+\frac{\overline{b}}{X+i}+\frac{\overline{c}}{(X+i)^2}+\frac{\overline{d}}{(X+i)^3}.$$

$a=\lim_{x\to 1}(x-1)F(x)=\frac{1}{(1+1)^3(1+1)}=\frac{1}{16}$. Puis,

$$\begin{aligned}F-\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})&=\frac{8X-X(X^2+1)^3}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=\frac{-X^7-3X^5-3X^3+7X}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}\\&=\frac{X(X^2-1)(-X^4-4X^2-7)}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}d&=\lim_{x\to i}(x-i)^3F(x)=\lim_{x\to i}(x-i)^3(F(x)-\frac{1}{16}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}))\\&=-\frac{1}{8}\frac{i^4+4i^2+7}{(i+i)^3}=-\frac{i}{16}\end{aligned}$$

Puis,

$$-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{i}{16}\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{i}{16}\frac{1}{(X+i)^3}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{1}{8}\frac{3X^2-1}{(X^2+1)^3}=\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}.$$

Ensuite, $c=\frac{i^2+6}{8(i+i)^2}=-\frac{5}{32}$. Puis,

$$\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}+\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})=\frac{2(X^2+6)+5(X^2-1)}{16(X^2+1)^2}=\frac{7}{16(X^2+1)}.$$

Enfin, $b=\frac{7}{16(i+i)}=-\frac{7i}{32}$. Finalement,

$$F=\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})-\frac{7i}{32}(\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i})-\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})-\frac{i}{16}(\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{1}{(X+i)^3}).$$

10. Soit $F=\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned}X^5-X^4+X^3-X^2+X-1&=X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1)=(X-1)((X^4+2X^2+1)-X^2)\\&=(X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)\\&=(X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

Püisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F=aX+b+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X-j}+\frac{\overline{d}}{X-j^2}+\frac{e}{X+j}+\frac{\overline{e}}{X-j^2}.$$

$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=1$, puis $b=\lim_{x\to+\infty}(F(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\dots}{x^5\dots}=1$. Puis, $c=\frac{1^6+1}{5-4+3-2+1}=\frac{2}{3}$, $d=\frac{j^6+1}{5j^4-4j^3+3j^2-2j+1}=\frac{2}{3j^2+3j-3}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$ et $e=\frac{(-j)^6+1}{5j^4+4j^3+3j^2+2j+1}=\frac{2}{3j^2+7j+5}=\frac{1}{2j+1}$. Donc,

$$F=X+1+\frac{2}{3}\frac{1}{X-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j^2}+\frac{1}{2j+1}\frac{1}{X+j}+\frac{1}{2j^2+1}\frac{1}{X-j^2}.$$

11. Soit $F=\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$.
La décomposition sur $\mathbb{R}$ (hors programme) s'obtiendrait de la façon suivante

$$\begin{aligned}X^7+1&=(X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X)+X+1\\&=(X^2+X+1)[(X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2)-4X-2]+X+1\\&=(X^2+X+1)^2(X^3-2X^2+X+2)-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1\\&=(X^2+X+1)^2[(X^2+X+1)(X-3)+3X+5]-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1\\&=X+1-(4X+2)(X^2+X+1)+(3X+5)(X^2+X+1)^2+(X-3)(X^2+X+1)^3\end{aligned}$$

Donc,

$$F=X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.$$

12. Soit $F=\frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$. La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F=\frac{a}{X}+\frac{b_1}{X-1}+\frac{b_2}{(X-1)^2}+\frac{b_3}{(X-1)^3}+\frac{b_4}{(X-1)^4}+\frac{c_1}{X-\sqrt{2}}+\frac{c_2}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{d_1}{X+\sqrt{2}}+\frac{d_2}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

$a=\lim_{x\to0}xF(x)=\frac{1}{4}$. Puis,

$$\begin{aligned}c_2=\lim_{x\to\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})^2F(x)&=\frac{2+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}=\frac{3}{8\sqrt{2}(4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1)}\\&=\frac{3}{8\sqrt{2}(17-12\sqrt{2})}=\frac{3}{8(-24+17\sqrt{2})}=\frac{3}{16}(24+17\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Un calcul conjugué fournit $d_2=\frac{3}{16}(24-17\sqrt{2})$. On a ensuite

$$\frac{3}{16}(\frac{24+17\sqrt{2}}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{24-17\sqrt{2}}{(X+\sqrt{2})^2})=\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}F-\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} &= \frac{2(X^2+1)-3(6X^2+17X+12)X(X-1)^4}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2}\\ &= \frac{-18X^7+21X^6+60X^5-90X^4-30X^3+95X^2-36X+2}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2}\\ &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)}\end{aligned}$$

Mais alors,

$$c_1=\frac{-18.4\sqrt{2}+21.4+24.2\sqrt{2}-48.2+18\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{-13-6\sqrt{2}}{8(17-12\sqrt{2})}=-\frac{1}{8}(365+258\sqrt{2}),$$

et par un calcul conjugué, $d_1=-\frac{1}{8}(365-258\sqrt{2})$. Ensuite,

$$-\frac{1}{8}(\frac{365+258\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}}+\frac{365-258\sqrt{2}}{X+\sqrt{2}})=-\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}F-\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}+\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)}+\frac{365X+516}{4(X^2-2)}\\ &= \frac{2(-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1)+(365X+516)X(X-1)^4}{4X(X-1)^4(X^2-2)}\\ &= \frac{365X^6-980X^5+168X^4+1684X^3-1795X^2+552X-2}{4X(X-1)^4(X^2-2)}\\ &= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4}\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}F-\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}+\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}-\frac{1}{4X} &= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4}-\frac{1}{4X}\\ &= \frac{(365X^4-980X^3+898X^2-276X+1)-(X-1)^4}{4X(X-1)^4}=\frac{364X^4-976X^3+892X^2-272X}{4X(X-1)^4}\\ &= \frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4}\end{aligned}$$

Enfin, $b_4=\lim_{x\to 1}(x-1)^4\frac{182x^3-488x^2+446x-136}{2(x-1)^4}=2$, puis

$$\frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4}-\frac{2}{(X-1)^4}=\frac{91X^3-244X^2+223X-70}{(X-1)^4}=\frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}.$$

Puis, $b_3=\lim_{x\to 1}(x-1)^3\frac{91x^2-153x+70}{(x-1)^3}=8$, puis

$$\begin{aligned}\frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}-\frac{8}{(X-1)^3} &= \frac{91X^2-153X+62}{(X-1)^3}=\frac{91X-62}{(X-1)^2}\\ &= \frac{91X-91+29}{(X-1)^2}=\frac{91}{X-1}+\frac{29}{(X-1)^2}\end{aligned}$$

ce qui fournit $b_2=29$ et $b_1=91$.

$$F=\frac{1}{4X}+\frac{91}{X-1}+\frac{29}{(X-1)^2}+\frac{8}{(X-1)^3}+\frac{2}{(X-1)^4}-\frac{365+258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X-\sqrt{2}}+\frac{3(24+17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X-\sqrt{2})^2}$$
$$-\frac{365-258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X+\sqrt{2}}+\frac{3(24-17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

13. Soit $F=\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

$$(X+1)^7-X^7-1=7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X=7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)$$
$$=7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)=7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Si on n'a pas deviné que $X^4+2X^3+3X^2+2X+1=(X^2+X+1)^2$ (par exemple, en repérant que j est racine ou encore en manipulant l'identité $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$), on peut pratiquer comme suit

$$X^4+2X^3+3X^2+2X+1=X^2(X^2+\frac{1}{X^2}+2(X+\frac{1}{X})+3)=X^2((X+\frac{1}{X})^2+2(X+\frac{1}{X})+1)$$
$$=X^2(X+\frac{1}{X}+1)^2=(X^2+X+1)^2$$

La déccomposition en éléments simples de $7F$ est donc de la forme

$$7F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X-j}+\frac{d}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c}}{X-j^2}+\frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$a=\frac{1}{(0+1)(0^2+0+1)^2}=1$ et $b=\frac{1}{(-1)(1-1+1)^2}=-1$. Puis,

$$d=\frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2}=\frac{1}{j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)}=\frac{1}{-j^2(-3j)}=\frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2})=\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}.$$

Puis,

$$7F-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^4-4X^3-4X^2+X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$
$$=\frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.$$

Mais alors,

$$c=\frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)}=\frac{5}{-3(j-j^2)}=\frac{5i}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$F=\frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j)}+\frac{3}{3(X-j)^2}-\frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j^2)}+\frac{1}{3(X-j^2)^2}).$$

Correction de **l'exercice 763 ▲**

1. Soit $P=X^n-1$ et $F=\frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de F sont simples (car $P=X^n-1$ et $P'=nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$). De plus, $P=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ où $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Donc, $F=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ où
$$\lambda_k=\frac{1}{P'(\omega_k)}=\frac{1}{n\omega_k^{n-1}}=\frac{\omega_k}{n\omega_k^n}=\frac{\omega_k}{n}.$$
Ainsi,
$$\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}.$$
2. Soit $P=(X-1)(X^n-1)=(X-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\omega_k$ où $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Soit $F=\frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, F admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$, $\leq k\leq n-1$. Donc,
$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}.$$
$\lambda_k=\frac{1}{(n+1)\omega_k^n-n\omega_k^{n-1}-1}=\frac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})}=\frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}$. Ensuite,

$$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{1^{n-1}+...+1^1+1} = \frac{1}{n}.$$

Il reste à calculer a.

$$F - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{n-(X^{n-1}+X^{n-2}+...+X+1)}{n(X-1)^2(X^{n-1}+...+X+1)} = \frac{-X^{n-2}-2X^{n-3}-...-(n-2)X-(n-1))}{n(X-1)(X^{n-1}+...+X+1)}.$$

Donc, $a = \lim_{x\to 1}(x-1)(F(x)-\frac{1}{n(x-1)^2}) = \frac{-[(n-1)+(n-2)+...+2+1]}{n(1+1...+1)} = -\frac{n-1}{2n}$.
Finalement,

$$F = \frac{1}{n}(-\frac{n-1}{2n(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_k}{\omega_k-1}\frac{1}{X-\omega_k}).$$

3. $\frac{n!}{(X-1)...(X-n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{X-k}$ avec

$$\lambda_k = \lim_{x\to k}(x-k)F(x) = \frac{n!}{\prod_{j\neq k}(j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k}C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc,

$$\frac{n!}{(X-1)...(X-n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}nC_{n-1}^{k-1}}{X-k}.$$

4. Posons $P = X^4-2X^2\cos(2a)+1$.

$$X^4-2X^2\cos(2a)+1 = (X^2-e^{2ia})(X^2-e^{-2ia}) = (X-e^{ia})(X-e^{-ia})(X+e^{ia})(X+e^{-ia})$$
$$(= (X^2-2X\cos a+1)(X^2+2X\cos a+1)).$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{ia}\neq \pm e^{-ia}$ ce qui équivaut à $a\notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
1er cas. Si $a\in\pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{4}$ puis $x=0$ fournit $0=-2a+2b$ et donc $a=b=\frac{1}{4}$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}).$$

2ème cas. Si $a\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} - \frac{a}{X+i} + \frac{b}{(X+i)^2}.$$

$b = \lim_{x\to i}(x-i)^2F(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4}$ puis $x=0$ fournit $0=2ia-2b$ et donc $a=-ib=-\frac{i}{4}$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{4}(-\frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2}).$$

3ème cas. Si $a\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$F = \frac{A}{X-e^{ia}} + \frac{\overline{A}}{X-e^{-ia}} - \frac{A}{X+e^{ia}} - \frac{\overline{A}}{X+e^{-ia}},$$

avec

$$A = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ia}+e^{ia})(e^{ia}+e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i\sin a\cos a e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4\sin(2a)}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{4\sin(2a)}(-\frac{ie^{ia}}{X-e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X-e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{X+e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X+e^{-ia}}).$$

5. Le polynôme $X^{2n}+1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(X-e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})})$ est à racines simples car n'a pas de racine commune avec sa dérivée. En posant $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})}$, on a

$$\frac{1}{X^{2n}+1} = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

où

$$\lambda_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}} = -\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\frac{1}{X^{2n}+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Correction de l'exercice 764 ▲

Pour k élément de $\{0,...,n-1\}$, posons $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Décomposons F en éléments simples (sur $\mathbb{C}$).

$$\frac{\omega X+1}{\omega^2X+\omega X+1} = \frac{\omega X+1}{(\omega X)^2+\omega X+1} = \frac{\omega X+1}{(\omega X-j)(\omega X-j^2)} = \frac{a}{\omega X-j} + \frac{b}{\omega X-j^2},$$

avec $a = \frac{\omega\frac{j}{\omega}}{\omega\frac{j}{\omega}-j^2} = \frac{j+1}{j-j^2} = -\frac{-j^2}{j-j^2} = \frac{j}{j-1}$ et de même $b = \frac{j^2+1}{j^2-j} = -\frac{1}{j-1}$. Donc,

$$F = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j}{\omega_k X-j} - \frac{1}{\omega_k X-j^2}\right) = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_{-k}}{X-j\omega_{-k}} - \frac{\omega_{-k}}{X-j^2\omega_{-k}}\right) \qquad = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k} - \frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k}\right)$$

Maintenant les n nombres $j\omega_k$ sont deux à deux distincts et vérifient $(j\omega_k)^n = j^n$ et donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X-j\omega_k) = X^n - j^n.$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}$ est donc la décomposition en éléments simples d'une fraction du type $\frac{P}{X^n-j^n}$ avec $\deg P \leq n-1$. De plus, on sait que $j\omega_k = \frac{P(j\omega_k)}{n(j\omega_k)^{n-1}}$ et donc, $\forall k \in \{0,...,n-1\}$, $P(j\omega_k) = nj^n$. Le polynôme $P - nj^n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet les n racines deux à deux distinctes $j\omega_k$ et est donc le polynôme nul. Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k} = \frac{nj^n}{X^n-j^n}.$$

De même, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k} = \frac{nj^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}$, puis

$$F = \frac{n}{j-1}\left(\frac{j^n}{X^n-j^n} - \frac{j^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}\right).$$

Si $n \in 3\mathbb{Z}$, posons $n = 3p$, $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p}{j-1}\left(\frac{1}{X^{3p}-1} - \frac{j}{X^{3p}-1}\right) = \frac{3p}{1-X^{3p}}.$$

Si $n \in 3\mathbb{Z}+1$, posons $n = 3p+1$, $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p+1}{j-1}\left(\frac{j}{X^{3p+1}-j} - \frac{1}{X^{3p+1}-j^2}\right) = \frac{(3p+1)(X^{3p+1}+1)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}.$$

Si $n \in 3\mathbb{Z}+2$, posons $n = 3p+2$, $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2} - \frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right) = \frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}.$$

Correction de l'exercice 765 ▲

Soient P et Q deux polynômes non nuls et premiers entre eux, puis soit $F = \frac{P}{Q}$. Si F est paire, alors $\frac{P(-X)}{Q(-X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$, ou encore $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$ $(*)$.

Par suite, $P(X)$ divise $P(X)Q(-X) = Q(X)P(-X)$ et $P(X)$ est premier à $Q(X)$. D'après le théorème de Gauss, $P(X)$ divise $P(-X)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(-X) = \lambda P(X)$ (car $\deg(P(-X)) = \deg(P)$). L'analyse des coefficients dominants des deux membres fournit $\lambda = (-1)^n$ où $n = \deg P$. Ceci s'écrit $P(-X) = (-1)^n P(X)$. En reportant dans $(*)$, on obtient encore $Q(-X) = (-1)^n = Q(X)$. Ainsi, si F est paire, alors P et Q sont ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs. Ce dernier cas est exclu, car alors P et Q admettraient tous deux 0 pour racine contredisant le fait qu'ils sont premiers entre eux. Finalement, si F est paire, alors P et Q sont pairs. La réciproque est claire.

$$F \text{ paire} \Leftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ sont pairs.})$$

Je vous laisse établir que

$$F \text{ impaire} \Leftrightarrow (P \text{ est impair et } Q \text{ est pair}) \text{ ou} (P \text{ est pair et } Q \text{ est impair.})$$

Correction de l'exercice 766 ▲

C'est du cours (unicité de la décomposition en éléments simples).

Correction de l'exercice 767 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i})$. Donc,

$$\left(\frac{1}{X^2+1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2i}(\left(\frac{1}{X-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X+i}\right)^{(n)}) = \frac{1}{2i}(\frac{(-1)(-2)...(-n)}{(X-i)^{n+1}} - \frac{(-1)(-2)...(-n)}{(X+i)^{n+1}})$$
$$= (-1)^n.n!\mathrm{Im}(\frac{1}{(X-i)^{n+1}}) = (-1)^n.n!\mathrm{Im}(\frac{(X+i)^{n+1}}{(X^2+1)^{n+1}}) = \frac{(-1)^n.n!\sum C_{n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{2n-2k}}{(X^2+1)^{n+1}}$$

Correction de l'exercice 768 ▲

$P' = a\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(X-x_j) = \sum_{k=1}^{n}\frac{P}{X-x_k}$, et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}.$$

Regroupons maintenant les pôles identiques, ou encore posons $P = a(X-z_1)^{\alpha_1}...(X-z_k)^{\alpha_k}$ où cette fois-ci les z_j sont deux à deux distincts. La formule ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j}{X-z_j} \quad (*).$$

Déterminons les polynômes divisibles par leur dérivée. Soit P un tel polynôme. Nécessairement $\deg P \geq 1$ puis, il existe deux complexes a et b, $a \neq 0$ tel que $P = (aX+b)P'$ ou encore $\frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$. $(*)$ montre que P a une et une seule racine. Par suite, P est de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \neq 0$, $n \geq 1$ et a quelconque.

Réciproquement, on a dans ce cas $P = \frac{1}{n}(X-a)n(X-a)^{n-1} = (\frac{1}{n}X - \frac{a}{n})P'$ et P' divise effectivement P.

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 771 ▲

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P = \frac{1}{3}(X^2 - 4X - 3)$.

Correction de l'exercice 772 ▲

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P = \frac{1}{2}(3X^3 - 4X^2 - X + 2)$.

Correction de l'exercice 791 ▲

$P(X) = -1+Q(X)\times(X-1)^n \Leftrightarrow (X+1)^n \mid Q(X)(X-1)^n-2 \Leftrightarrow X^n \mid Q(X-1)(X-2)^n-2$. Soit $2 = A(X)(X-2)^n+X^nB(X)$ la division suivant les puissances croissantes de 2 par $(X-2)^n$ à l'ordre n. On obtient $X^n \mid Q(X-1)-A(X)$ soit $Q(X) = A(X+1)+X^nR(X)$ et $\deg(P) < 2n \Leftrightarrow R = 0$. Calcul de $A(X)$ par développement limité : $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{-n}{k}x^k+O(x^n)$ donc :

$$A(X) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{-n}{k}\frac{(-1)^kX^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k-1}^k(-1)^n\frac{X^k}{2^{n+k-1}}$$

Correction de l'exercice 793 ▲

vect$(P(X),P(X+1),\dots,P(X+n))$ contient P, ΔP, $\Delta^2 P$, ..., $\Delta^n P$ donc $K_n[X]$ d'après le thm des degrés étagés.

Correction de l'exercice 794 ▲

Déjà il est nécessaire que $k = n$. Supposant ceci réalisé, la matrice de $(P_0,\dots,P_k)$ dans la base canonique de $(x^2+1)^{n[X]}$ est équivalente à la matrice de Vandermonde de $z_0,\dots,z_k$. Donc une CNS est : $k = n$ et $z_0,\dots,z_k$ sont distincts.

Correction de l'exercice 795 ▲

1. $P\circ P-X = (P\circ P-P)+(P-X)$.
2. $P(z) = z^2+3z+1 \Rightarrow z = -1,-1,-2\pm i$.

Correction de l'exercice 797 ▲

$\mathrm{Ker}\Phi = K_0[X]$, $\mathrm{Im}\,\Phi = (X-a)K_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 799 ▲

Formule de Taylor : $\frac{P^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X]$.

Correction de l'exercice 800 ▲

1.
2. Appliquer le 1) à $P(X+k)$.

Correction de l'exercice 803 ▲

$$\begin{cases} P = a(X^2+1)+bX+c \\ Q = a'(X^2+1)+b'X+c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \cos\theta(X^2-1)+2X\sin\theta \\ Q = \sin\theta(X^2-1)-2X\cos\theta. \end{cases}$$

$P\wedge Q = 1$ car $\pm i$ ne sont pas racines de P et Q.

Correction de l'exercice 804 ▲

$\deg P < 2 \Rightarrow P \in \{1,X,X+1\}$.

Correction de l'exercice 805 ▲

1. Isomorphisme $P \longmapsto P(X)+P(X+1)$.
2. $P_n' = nP_{n-1}$.
3. $P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n C_n^kP_k$ (Taylor).
4. $Q_n(X) = P_n(1-X) \Rightarrow Q_n(X)+Q_n(X+1) = 2(-1)^nX^n$.

Correction de l'exercice 806 ▲

1. Bezout généralisé.
2. $\big((1-X)P'-nP\big)(1-X)^{n-1}+\big(nQ+XQ'\big)X^{n-1}=0$.
3. $P^{(k+1)}(0)=(n+k)P^{(k)}(0)\Rightarrow P=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k-1}^{k}X^{k}$.
4.

Correction de l'exercice 808 ▲

$Q=P+P'+P''+\dots$: $Q(x)\to+\infty$ lorsque $x\to+\infty$, donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha)$ soit minimal.

Alors $0=Q'(\alpha)=Q(\alpha)-P(\alpha)\Rightarrow \min Q\geq 0$.

Correction de l'exercice 809 ▲

oui ssi P est pair.

Correction de l'exercice 810 ▲

1. $P_0(u)=2$, $P_1(u)=u$, $P_{n+1}(u)=uP_n(u)-P_{n-1}(u)$.
2. $u_k=2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $k=0,\dots,n-1$.
3.

Correction de l'exercice 811 ▲

1.
2. Trivialement vrai ou trivialement faux selon le choix qu'on a fait en **1**.
3.
4. Soit $Q\in(x^2+1)^{[X]}$ et $F_Q=\{\overline{RQ},\ R\in(x^2+1)^{n[X]}\}$. On a $F_Q=\{\overline{RQ},\ R\in(x^2+1)^{[X]}\}$ de manière évidente, donc F_Q est stable par la multiplication modulaire par X.
   Soit réciproquement F un sev de $(x^2+1)^{n[X]}$ stable par la multiplication modulaire par X. Si $(P_1,\dots,P_k)$ est une famille génératrice de F alors $Q=\mathrm{pgcd}(P_1,\dots,P_k)\in F$ d'après la relation de Bézout et la stabilité de F donc $F_Q\subset F$ et $P_i\in F_Q$ puisque Q divise P_i d'où $F\subset F_Q$ et $F=F_Q$.

Correction de l'exercice 812 ▲

Tout polynôme à coefficients complexes non constant est surjectif sur (x^2+1) donc $P((x^2+1)^{)}\subset\mathbb{R}\Leftrightarrow P=a$ (constante réelle).

On a par interpolation de Lagrange : $P(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}\Leftrightarrow P\in\mathbb{Q}[X]$.

Montrons que $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\Leftrightarrow P=aX+b$ avec $a\in\mathbb{Q}^*$, $b\in\mathbb{Q}$: la condition est clairement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons un polynôme éventuel P de degré $n\geq 2$ tel que $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$. On sait déjà que P est à coefficients rationnels, donc on peut l'écrire sous la forme : $P=\frac{a_0+a_1X+\dots+a_nX^n}{d}$ avec $a_i\in\mathbb{Z}$, $a_n\neq 0$ et $d\in|||^*$. Soit π un nombre premier ne divisant ni a_n ni d, et $x=p/q$ (forme irréductible) un rationnel tel que $P(x)=1/\pi$. On a donc : $\pi(a_0q^n+\dots+a_np^n)=dq^n$ ce qui implique que π divise q. Il vient alors : $a_np^n=dq^n/\pi-a_0q^n-\dots-a_{n-1}qp^{n-1}$ ce qui est impossible puisque π est facteur du second membre ($n\geq 2$) mais pas du premier ($p\wedge q=1$).

Correction de l'exercice 813 ▲

Clairement $E=\varnothing$ si les y_i ne sont pas distincts. Si $y_1,\dots,y_n$ sont distincts, soit $P\in E$, $n=\deg(P)$ et λ le coefficient dominant de P ($P\neq 0$ car les y_i ne sont pas tous nuls). Alors $P(X)-y_i$ a pour seule racine x_i donc $P(X)-y_i=\lambda(X-x_i)^n$. Pour $n=1$ on obtient $P(X)=y_1+\lambda(X-x_1)$ avec $\lambda\in(x^2+1)^*$. Pour $n\geq 2$ on obtient $y_2-y_1=\lambda(X-x_1)^n-\lambda(X-x_2)^n=n\lambda X^{n-1}(x_2-x_1)+\dots$ ce qui est impossible donc $E=\varnothing$.

Correction de l'exercice 814 ▲

1. Récurrence sur $\mathrm{Card}\,(S)$ en mettant le terme de plus bas degré en facteur et en dérivant le quotient.
2. Appliquer la question précédente aux suites $(\mathrm{Re}(a_s))$ et $(\mathrm{Im}(a_s))$.

Correction de l'exercice 815 ▲

Soit $f(x)=\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{x-k}$. f est strictement décroissante de 0 à $-\infty$ sur $]-\infty,0[$, de $+\infty$ à $-\infty$ sur chaque intervalle $]k,k+1[$, $1\leq k\leq 100$ et de $+\infty$ à 0 sur $]100,+\infty[$. Donc il existe $1<\alpha_1<2<\alpha_2<\dots<\alpha_{99}<100<\alpha_{100}$ tels que $E=\{x\in\mathbb{R} \text{ tq } f(x)\geq 1\}=\bigcup_{k=1}^{100}]k,\alpha_k]$. La somme des longueurs est $L=\sum_{k=1}^{100}\alpha_k-\sum_{k=1}^{100}k$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_{100}$ sont les racines du polynôme :

$$P(X)=\prod_{k=1}^{100}(X-k)-\sum_{k=1}^{100}k\prod_{i\neq k}(X-i)=X^{100}-2X^{99}\sum_{k=1}^{100}k+\dots$$

D'où $\sum_{k=1}^{100}\alpha_k=2\sum_{k=1}^{100}k$ et $L=\sum_{k=1}^{100}k=5050$.

Correction de l'exercice 816 ▲

Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Pour le sens $\Rightarrow$, il suffit de vérifier la propriété lorsque P est irréductible, strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, et le seul cas non trivial est celui où P est de la forme : $P=(X-a)^2+b^2$ avec $a>0$, $b>0$. Dans ce cas, le coefficient de X^k dans $(X+1)^\ell P(X)$ est : $C_\ell^k(a^2+b^2)-2aC_\ell^{k-1}+C_\ell^{k-2}$, en convenant que C_x^y vaut 0 si l'on n'a pas $0\leq y\leq x$. En mettant ce qui peut l'être en facteur et en ordonnant le reste suivant les puissances de k, on est rammené à montrer que la quantité :

$$k^2(a^2+b^2+2a+1)-k((a^2+b^2)(2\ell+3)+2a(\ell+2)+1)+\ell^2(a^2+b^2)$$

est strictement positive pour tout $k\in[[0,\ell+2]]$ si ℓ est choisi convenablement. Or le discriminant par rapport à k est équivalent à $-4\ell^2(2a+1)$ lorsque ℓ tend vers $+\infty$ donc un tel choix de ℓ est possible.

Correction de l'exercice 817 ▲

On suppose E fini et on montre que P est constant : il existe $a\in\mathbb{Z}$ tel que $P(a)\neq 0$. Soit $N=\prod_{p\in E}p^{1+v_p(P(a))}$. Alors pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $P(a+kN)\equiv P(a)(\bmod N)$ (formule de Taylor), donc $v_p(P(a+kN))=v_p(P(a))$ pour tous $k\in\mathbb{Z}$ et $p\in E$. Comme $P(a+kN)$ est produit d'éléments de E, on en déduit que $P(a+kN)=\pm P(a)$ pour tout k, donc P prend une infinité de fois la même valeur.

Correction de l'exercice 818 ▲

Prendre pour P_n la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$.

Correction de l'exercice 819 ▲

Analyse : on pose $P_j=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ et on considère la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{a_0}{X}+\frac{a_1}{X+1}+\dots+\frac{a_n}{X+n}=\frac{P(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

Alors $\int_{t=0}^1 t^iP_j(t)\,dt=F(i+1)=\frac{i!\,P(i+1)}{(i+n+1)!}$ donc $P(j+1)=\frac{(j+n+1)!}{j!}$ et $P(k)=0$ pour $k\in[[1,n+1]]\setminus\{j+1\}$, soit

$$\begin{aligned}P(X)&=\frac{(j+n+1)!}{j!}\prod_{k\neq j+1}\frac{X-k}{j+1-k}\\&=(-1)^{n-j}\frac{(j+n+1)!}{(j!)^2(n-j)!}\prod_{k\neq j+1}(X-k)=Q_j(X).\end{aligned}$$

Synthèse : soit Q_j le polynôme ci-dessus et $a_0,\dots,a_n$ les coefficients de la décomposition en éléments simples de $\frac{Q_j(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}$. On doit juste vérifier que les a_i sont entiers. Calcul :

$$\begin{aligned}a_i&=\frac{Q_j(-i)}{(-1)^i i!\,(n-i)!}=(-1)^{i+j}\frac{(i+j)!\,(i+n+1)!\,(j+n+1)!}{(i+j+1)!\,(i!)^2\,(j!)^2\,(n-i)!\,(n-j)!}\\&=(-1)^{i+j}C_{i+j}^iC_{i+n+1}^{i+j+1}C_{j+n+1}^jC_n^i(n+1)\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 820 ▲

$3\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=-9.$

Correction de l'exercice 821 ▲

$-\frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 822 ▲

$\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 823 ▲

$x^7 = -2x^2 + 2x - 1 \Rightarrow a^7 + b^7 + c^7 = -7$.

Correction de l'exercice 824 ▲

$\{a,b,c\} = \left\{1, -\frac{1+i}{2}, -\frac{1-i}{2}\right\}$.

Correction de l'exercice 825 ▲

$\{x,y,z\} = \{-1,1,2\}$.

Correction de l'exercice 826 ▲

$d = \frac{2}{3}$, $\{a,b,c\} = \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Correction de l'exercice 828 ▲

1. $50p^3 = 27q^2$.
2. $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 + 1 = -2p \Rightarrow$ l'une des racines de l'équation aux carrés $(-Y^3 - 2pY^2 - p^2Y + q^2)$ doit être $-p - \frac{1}{2}$.
   CNS $\Leftrightarrow 2p + 1 + 8q^2 = 0$.

Correction de l'exercice 829 ▲

$20p^3 + 27q^2 = 0$.

Correction de l'exercice 830 ▲

$b = 0,\ c = \frac{9}{100}a^2 \Rightarrow$ racines : $-3x, -x, x, 3x$ avec $x = \sqrt{\frac{-a}{10}}$.

Correction de l'exercice 831 ▲

$-P(-2-X) = X^3 + 4X^2 + 7X + 2$.

Correction de l'exercice 832 ▲

$X^3 + (2b - a^2)X^2 + (b^2 - 2ac)X - c^2$.

Correction de l'exercice 833 ▲

racine 1 : $\lambda = -6$.

racine -1 : $\lambda = -4$.

racine $\alpha\in\mathbb{U}\setminus\{\pm1\}$: les autres sont $\frac{1}{\alpha}$ et $-\lambda \Rightarrow \lambda=6$, $\alpha=\frac{1+i\sqrt{15}}{4}$.

Correction de l'exercice 834 ▲

1. Les coefficients de P sont bornés.
2. $\widetilde{P}(X^2)=(-1)^nP(X)P(-X)\Rightarrow \widetilde{P}\in\mathbb{Z}[X]$.
3. La suite $(\overset{\approx}{\widetilde{P}})$ prend un nombre fini de valeurs.

Correction de l'exercice 835 ▲

Soit $y=\gamma x+\delta$ l'équation de la droite en question. On veut que l'équation $x^4+ax^3+bx^2+(c-\gamma)x+(d-\delta)=0$ ait quatre racines distinctes en progression arithmétique. Si r est la raison de cette progression alors les racines sont $-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r$, $-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r$, $-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r$ et $-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r$. On doit donc chercher à quelle condition sur a,b,c,d il existe γ,δ,r réels tels que :

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)+\cdots+\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\right)=-b\\
&\left(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)+\ldots\\
&\qquad\qquad+\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\right)=c-\gamma\\
&\left(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\right)=\delta-d
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont satisfaites à r donné en choisissant convenablement γ et δ. La première s'écrit après simplifications : $\frac{5}{2}r^2=\frac{3}{8}a^2+b$ et la condition demandée est $3a^2+8b>0$.

Correction de l'exercice 836 ▲

Tout d'abord

$$Q=(1+X+...+X^n)'=(\frac{X^{n+1}-1}{X-1})'=\frac{(n+1)X^n(X-1)-X^{n+1}}{(X-1)^2}=\frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0=1$ et donc, $Q(\omega_0)=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1\leq k\leq n-1$, $\omega_k\neq1$ et donc, puisque $\omega_k^n=1$,

$$Q(\omega_k)=\frac{n\omega_k^{n+1}-(n+1)\omega_k^n+1}{(\omega_k-1)^2}=\frac{n\omega_k-(n+1)+1}{(\omega_k-1)^2}=\frac{n}{\omega_k-1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1}Q(\omega_k)=\frac{n(n+1)}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{n}{\omega_k-1}=\frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1)}.$$

Mais, $X^n-1=(X-1)(1+X+...+X^{n-1})$ et d'autre part $X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{2ik\pi/n})=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega_k)$. Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, $\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{2ik\pi/n})=1+X+...+X^{n-1}$ (Une autre rédaction possible est : $\forall z\in\mathbb{C}$, $(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=(z-1)(1+z+...+z^{n-1})$ et donc $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=1+z+...+z^{n-1}$ et finalement $\forall z\in\mathbb{C}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=1+z+...+z^{n-1}$ car les deux polynômes ci-contre coincident en une infinité de valeurs de z.)

En particulier, $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega_k)=1+1^2+...+1^{n-1}=n$ ou encore $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1)=(-1)^{n-1}n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1}Q(\omega_k)=\frac{n^n(n+1)}{2}\frac{1}{(-1)^{n-1}n}=\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Correction de l'exercice 837 ▲

Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair.

Sinon, posons $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

$$P(P(X))-X=P(P(X))-P(X)+P(X)-X=\sum_{k=0}^{n}a_k((P(X))^k-X^k)+(P(X)-X)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k((P(X))^k-X^k)+(P(X)-X).$$

Mais, pour $1\leq k\leq n$, $(P(X))^k-X^k)=(P(X)-X)((P(X))^{k-1}+X(P(X))^{k-2}+...+X^{k-1})$ est divisible par $P(X)-X$ et il en est donc de même de $P(P(X))-X$.

Correction de l'exercice 838 ▲

1. Posons $P=\sum_{i=0}^{l}a_iX_i$ où $l\geq 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l\neq 0$.
$$P(n+km)=\sum_{i=0}^{l}a_i(n+km)^i=\sum_{i=0}^{l}a_i(n^i+K_im)=\sum_{i=0}^{l}a_in^i+Km=m+Km=m(K+1),$$
où K est un entier relatif. $P(n+km)$ est donc un entier relatif multiple de $m=P(n)$.
2. Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)$ est premier.
Soit n un entier naturel donné et $m=P(n)$ (donc, $m\geq 2$ et en particulier $m\neq 0$). Pour tout entier relatif k, $P(n+km)$ est divisible par m mais $P(n+km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n+km)=m$. Par suite, le polynôme $Q=P-m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m\neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

Correction de l'exercice 839 ▲

1. Déjà, P_0 est dans E.
Soit n un naturel non nul. $P_n=\frac{1}{n!}(X+1)...(X+n)$ et donc, si k est élément de $\{-1,...,-n\}$, $P_n(k)=0\in\mathbb{Z}$.
Si k est un entier positif, $P_n(k)=\frac{1}{n!}(k+1)...(k+n)=C_{n+k}^{n}\in\mathbb{Z}$.
Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,
$$P_n(k)=\frac{1}{n!}(k+1)...(k+n)=(-1)^n\frac{1}{n!}(-k-1)...(-k-n)=(-1)^nC_{-k-1}^{n}\in\mathbb{Z}.$$
Ainsi, $\forall k\in\mathbb{Z},\ P_(k)\in\mathbb{Z}$, ou encore $P_(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.
2. Evident
3. Soit $P\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ tel que $\forall k\in\mathbb{Z},\ P(k)\in\mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k).
Puisque $\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg(P_k)=k$, on sait que pour tout entier naturel n, $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ (tout polynôme non nul ayant un degré n, s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des P_k).
Soit $n=\deg P$.
Il existe $n+1$ nombres complexes a_0,..., a_n tels que $P=a_0P_0+...+a_nP_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.
L'égalité $P(-1)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : a_0 est dans $\mathbb{Z}$.
L'égalité $P(-2)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : a_0-a_1 est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_1 est dans $\mathbb{Z}$.
L'égalité $P(-3)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0-2a_1+a_2$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_2 est dans $\mathbb{Z}$...
L'égalité $P(-(k+1))$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0-a_1+...+(-1)^ka_k$ est dans $\mathbb{Z}$ et si par hypothèse de récurrence, a_0,..., a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.
Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k.

Correction de l'exercice 840 ▲

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P+10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P+10)'=P'$ d'ordre au moins deux.

De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P'=\lambda(X-2)^2(X+2)^2=\lambda(X^2-4)^2=\lambda(X^4-8X^2+16)$ et enfin, nécessairement,
$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2/\ P=\lambda(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)+\mu \text{ avec } \lambda\neq 0.$$

Réciproquement, soit $P=\lambda(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)+\mu$ avec $\lambda\neq 0$.

$$
\begin{aligned}
P \text{ solution} &\Leftrightarrow P+10 \text{ divisible par } (X+2)^3 \text{ et } P-10 \text{ est divisible par } (X-2)^3\\
&\Leftrightarrow P(-2)+10=0=P'(-2)=P''(-2) \text{ et } P(2)+10=0=P'(2)=P''(2) \Leftrightarrow P(-2)=-10 \text{ et } P(2)=10\\
&\left\{\begin{array}{l}\lambda(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}-32)+\mu=-10\\ \lambda(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32)+\mu=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \mu=0 \text{ et } \lambda(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32)+\mu=10\\
&\Leftrightarrow \mu=0 \text{ et } \lambda=\frac{75}{128}
\end{aligned}
$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $P=\frac{75}{128}(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)=\frac{15}{128}X^5-\frac{25}{16}X^3+\frac{75}{8}X$.

Correction de l'exercice 841 ▲

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont clairement 0 et 1.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(X^2)=P(X)P(X+1)$.

Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Alors, a^2, a^4, a^8..., sont encore racines de P. Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $(a^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $a=0$ ou $|a|=1$ car si $|a|\in]0,1[\cap]1,+\infty[$, la suite $(|a^{2^n}|)$ est strictement monotone et en particulier les a^{2^n} sont deux à deux distincts.

De même, si a est racine de P alors $(a-1)^2$ l'est encore mais aussi $(a-1)^4$, $(a-1)^8$..., ce qui impose $a=1$ ou $|a-1|=1$.

En résumé,

$$(a \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) \Rightarrow ((a=0 \text{ ou } |a|=1) \text{ et } (a=1 \text{ ou } |a-1|=1)) \Rightarrow (a=0 \text{ ou } a=1 \text{ ou } |a|=|a-1|=1).$$

Maintenant, $|a|=|a-1|=1 \Leftrightarrow |a|=1$ et $|a|=|a-1| \Leftrightarrow a\in\mathscr{C}((0,0),1)\cap\mathrm{med}[(0,0),(1,0)]=\{-j,-j^2\}$.

Donc, si $P\in\mathbb{R}[X]$ est solution, il existe K, α, β, γ, K complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que $P=KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma$ ($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité).

Réciproquement, si $P=KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma=KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$.

$$P(X^2)=KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X4-X^2+1)^\gamma=KX^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta(X^2-\sqrt{3}X+1)^\gamma(X^2+\sqrt{3}X+1)^\gamma,$$

et

$$
\begin{aligned}
P(X)P(X+1)&=KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)\gamma K(X+1)^\alpha X^\beta(X^2+X+1)^\gamma\\
&=K^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^\beta(X+1)^\alpha(X^2-X+1)^\gamma(X^2+X+1)^\gamma.
\end{aligned}
$$

Par unicité de la décompôsition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $P=0$ ou $K=1$ et $\alpha=\beta$ et $\gamma=0$.

Les polynômes solutions sont 0 et les $(X^2-X)^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

Correction de l'exercice 842 ▲

1.

$$
\begin{aligned}
S &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ \frac{xy+xz+yz}{xyz}=1\\ xyz=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \sigma_1=1,\ \sigma_2=\sigma_3=-4\\
&\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } X^3-X^2-4X+4=0\\
&\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } (X-1)(X-2)(X+2)=0\\
&\Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)\}
\end{aligned}
$$

2. Pour $1\leq k\leq 4$, posons $S_k=x^k+y^k+z^k+t^k$. On a $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$. Calculons S_3 en fonction des σ_k. On a $\sigma_1^3=S_3+3\sum x^2y+6\sum xyz=S_3+3\sum x^2y+6\sigma_3$ $(*)$. Mais on a aussi $S_1S_2=S_3+\sum x^2y$. Donc, $\sum x^2y=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-S_3$. En reportant dans $(*)$, on obtient $\sigma_1^3=S_3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3$ et donc,

$$S_3=\frac{1}{2}(-\sigma_1^3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Calculons S_3 en fonction des σ_k. Soit $P=(X-x)(X-y)(X-z)(X-t)=X^4-\sigma_1X^3+\sigma_2X^2-\sigma_3X+\sigma_4$.

$$\begin{aligned}P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=0 &\Leftrightarrow S_4-\sigma_1S_3+\sigma_2S_2-\sigma_3S_1+4\sigma_4=0\\&\Leftrightarrow S_4=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4\\&\Leftrightarrow S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}S\Leftrightarrow&\left\{\begin{array}{l}\sigma_1=0\\-2\sigma_2=10\\3\sigma_3=0\\2\sigma_2^2-4\sigma_4=26\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma_1=0\\\sigma_2=-5\\\sigma_3=0\\\sigma_4=6\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow x,\ y,\ z,\ \text{et } t \text{ sont les 4 solutions de l'équation } X^4-5X^2+6=0\\&\Leftrightarrow (x,y,z,t) \text{ est l'une des 24 permutations du quadruplet } (\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3})\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 843 ▲

Le polynôme nul est solution. Soit P un polynôme non nul de degré n solution alors $n=n-1+n-2$ et donc $n=3$. Posons donc $P=aX^3+bX^2+cX+d$ avec $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}P(2X)=P'(X)P''(X)&\Leftrightarrow 8aX^3+4bX^2+2cX+d=(3aX^2+2bX+c)(6aX+2b)\\&\Leftrightarrow(18a^2-8a)X^3+(18ab-4b)X^2+(4b^2+6ac-2c)X+2bc-d=0\\&\Leftrightarrow 18a^2-8a=18ab-4b=4b^2+6ac-2c=2bc-d=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{4}{9}\text{ et } b=c=d=0.\end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

Correction de l'exercice 844 ▲

0 n'est pas racine de P.

On rappelle que si $r=\frac{p}{q}$, $(p\in\mathbb{Z}^*, q\in\mathbb{N}^*, p\wedge q=1)$ est racine de P, alors p divise le coefficient constant de P et q divise son coefficient dominant. Ici, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm1,\pm2,\pm4\}$ et q est élément de $\{1,2,3,4,6,12\}$ ou encore r est élément de $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{12}\}$.

Réciproquement, on trouve $P(\frac{2}{3})=P(\frac{1}{4})=0$. P est donc divisible par

$$12(X-\frac{2}{3})(X-\frac{1}{4})=(3X-2)(4X-1)=12X^2-11X+2.$$

Plus précisément, $P=(12X^2-11X+2)(X^2+X+2)=(3X-2)(4X-1)(X-\frac{-1+i\sqrt{7}}{2})(X-\frac{-1-i\sqrt{7}}{2})$.

Correction de l'exercice 845 ▲

Pour $n\geq 0$, posons $P_n=(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$. $P_n(0)=P_n(1)=P_n(\frac{1}{2})=0$. P_n admet 0, 1 et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X-1)(2X-1)=2X^3-3X^2+X$.

Si $n=0$ ou $n=1$, le quotient est nul. Si $n=2$, le quotient vaut -2.

Soit $n \geq 3$. On met succesivement $2X-1$ puis $X-1$ puis X en facteur :

$$\begin{aligned}
P_n &= ((X-1)^2)^n - (X^2)^n + (2X-1) = ((X-1)2 - X2)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + (2X-1) \\
&= (2X-1)(-\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1) = (2X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2}) \\
&= (2X-1)(-(X-1)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - (X-1)\sum_{k=0}^{2n-1}X^k) \\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1}X^k) \\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-1}X^k - 1 - (X-1)^{2n-3}) \\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^k - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^k X^k) \\
&= X(2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^k X^{k-1})
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 846 ▲

$$\begin{aligned}
1 = (X+(1-X))^{n+m-1} &= \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= (1-X)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}
\end{aligned}$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^m = 1$. De plus, pour $n \leq k \leq n+m-1$, $\deg(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$ et donc $\deg(U) < m$ et de même pour $0 \leq k \leq n-1$, $\deg(X^k(1-X)^{n-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.

Correction de l'exercice 847 ▲

On suppose $a_0 \neq 0$ de sorte que 0 n'est pas racine de P. Soient p un relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que p et q soient premiers entre eux.

Si $r = \frac{p}{q}$ est racine de P alors $a_n(\frac{p}{q})^n + \ldots + a_0 = 0$ et donc

$$a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}) \text{ et } a_0 q^n = -p(a^n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}).$$

Donc p divise $a_0 q^n$, mais p est premier à q^n et d'après le théorème de GAUSS, p divise a_0. De même q divise a_n.

Application. Soit $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4$ et soit p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p \wedge q = 1$. Si $\frac{p}{q}$ est racine de P, p divise -4 et q divise 9 de sorte que p est élément de $\{1,-1,2,-2,4,-4\}$ et q est élément de $\{1,3,9\}$ puis $\frac{p}{q}$ est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{4}{9}\}$. On trouve $P(\frac{2}{3}) = P(-\frac{1}{3}) = 0$ et P est divisible par $(3X-2)(3X+1) = 9X^2 - 3X - 2$. Plus précisément $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4 = (9X^2 - 3X - 2)(X^2+2)$ et les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 848 ▲

1.

$$\begin{aligned}
P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 &= X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2(X + \frac{1}{X}) + 3) = X^2((X+\frac{1}{X})^2 + 2(X+\frac{1}{X}) + 1) \\
&= X^2(X + \frac{1}{X} + 1)^2 = (X^2+X+1)^2 = (X-j)^2(X-j^2)^2.
\end{aligned}$$

2. 1 et -1 sont racines de P. On écrit donc $P=(X^2-1)(X^4-5X^3+6X^2-5X+1)$ puis

$$X^4-5X^3+6X^2-5X+1=X^2((X^2+\frac{1}{X^2})-5(X+\frac{1}{X})+6)=X^2((X+\frac{1}{X})^2-5(X+\frac{1}{X})+4)$$
$$=X^2(X+\frac{1}{X}-1)(X+\frac{1}{X}-4)=(X^2-X+1)(X^2-4X+1)$$

et donc, $P=(X-1)(X+1)(X+j)(X+j^2)(X-2+\sqrt{3})(X-2-\sqrt{3})$.

3.

$$P=X^7-X^6-7X^5+7X^4+7X^3-7X^2-X+1=(X^2-1)(X^5-X^4-6X^3+6X^2+X-1)$$
$$=(X-1)^2(X+1)(X^4-6X^2+1)$$
$$=(X-1)^2(X+1)(X^2(3+2\sqrt{2}))(X^2-(3-2\sqrt{2}))$$

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont 1, -1, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$,$-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 849 ▲

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4. On suppose P unitaire sans perte de généralité. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 forment un parallélogramme, notons a le centre de ce parallélogramme. Les racines de P s'écrivent alors z_1, z_2, 2_a-z_1, $2a-z_2$ et si $Q=P(X+a)$ alors $Q(-a+z_1)=Q(a-z_1)=Q(-a+z_2)=Q(a-z_2)=0$. Les racines du polynôme Q sont deux à deux opposées, ce qui équivaut à dire que le polynôme Q est bicarré ou encore de la forme $X^4+\alpha X^2+\beta$ ou enfin que

$$P=(X-a)^4+\alpha(X-a)^2+\beta.$$

Mais alors a est racine de $P'=4(X-a)^3+2\alpha(X-a)$ et de $P^{(3)}=24(X-a)$.

Réciproquement, si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune a. $P^{(3)}$ est de degré 1 et de coefficient dominant 24 et donc $P^{(3)}=24(X-a)$ puis en intégrant $P''=12(X-a)^2+\lambda$ puis $P'=4(X-a)^3+\lambda(X-a)+\mu$. La condition a est racine de P' fournit $\mu=0$ et donc $P=(X-a)^4+\alpha(X-a)^2+\beta$. Donc, le polynôme $Q=P(X+a)$ est bicarré et ses racines sont deux à deux opposées et donc de la forme $Z_1=a-z_1$, $Z_2=z1-a$, $Z_3=a-z_2$, $Z_4=z_2-a$ et on a bien $Z_1-Z_3=Z_4-Z_2$.

Correction de l'exercice 850 ▲

Si (x,y,z) est solution du système proposé noté (S), alors x, y et z sont deux à deux distincts. En effet, si par exemple $x=y$ alors $7=y^2+yz+z^2=x^2+xz+z^2=13$ ce qui est impossible. Donc,

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y^3-z^3=7(y-z)\\z^3-x^3=13(z-x)\\x^3-y^3=3(x-y)\end{array}\right..$$

En additionnant les trois équations, on obtient $-10x+4y+6z=0$ ou encore $-5x+2y+3z=0$. Donc,

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\(\frac{1}{2}(5x-3z))^2+\frac{1}{2}(5x-3z)z+z^2=7\\z^2+zx+x^2=13\\x^2+\frac{1}{2}(5x-3z)x+(\frac{1}{2}(5x-3z))^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\25x^2-20xz+7z^2=28\\z^2+zx+x^2=13\\39x^2-36xz+9z^2=12\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\xz=13-x^2-z^2\\25x^2-20(13-x^2-z^2)+7z^2=28\\39x^2-36(13-x^2-z^2)+9z^2=12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\xz=13-x^2-z^2\\5x^2+3z^2=32\end{array}\right.$$

Soit (S') le système formé des deux dernières équations. On note que $x=0$ ne fournit pas de solution et donc

$$(S')\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z^2=\frac{1}{3}(32-5x^2)\\xz=13-x^2-\frac{1}{3}(32-5x^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=\frac{2x^2+7}{3x}\\\frac{(2x^2+7)^2}{9x^2}=\frac{1}{3}(32-5x^2)\end{array}\right.$$

La deuxième équation s'écrit $(2x^2+7)^2=3x^2(32-5x^2)$ puis $19x^4-68x^2+49=0$ puis $x^2=\frac{34\pm15}{19}$ D'où les solutions $x=1$ ou $x=-1$ ou $x=\sqrt{\frac{49}{19}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{49}{19}}$. Puis, les quatre triplets solutions du système : $(1,-2,3)$, $(-1,2,-3)$, $(\frac{7}{\sqrt{19}},\frac{1}{\sqrt{19}},\frac{11}{\sqrt{19}})$ et $(-\frac{7}{\sqrt{19}},-\frac{1}{\sqrt{19}},-\frac{11}{\sqrt{19}})$.

Correction de l'exercice 851 ▲

Soit $P=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)=X^n-1$ (où $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$)

1. $\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{2}{2-\omega_k})=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4-\omega_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2-\omega_k)}=\frac{P(4)}{P(2)}=\frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1.$
2. $$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2-2\omega_k\cos a+1)&=\prod_{k=0}^{n-1}(e^{ia}-\omega_k)(e^{-ia}-\omega_k)=P(e^{ia})P(e^{-ia})=(e^{ina}-1)(e^{-ina}-1)\\&=2-e^{ina}-e^{-ina}=2(1-\cos na).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 852 ▲

L'équation proposée admet deux solutions inverses l'une de l'autre si et seulement si il existe deux complexes a et b tels que

$$X^4-21X+8=(X^2+aX+1)(X^2+bX+8)=X^4+(a+b)X^3+(9+ab)X^2+(8a+b)X+8\ (*)$$

$(*)\Leftrightarrow b=-a$ et $ab=-9$ et $8a+b=-21\Leftrightarrow a=3$ et $b=-3$. Ainsi,

$$X^4-21X+8=(X^2+3X+1)(X^2-3X+8)=(X-\frac{-3+\sqrt{5}}{2})(X-\frac{-3-\sqrt{5}}{2})(X-\frac{3+i\sqrt{15}}{2})(X-\frac{3-i\sqrt{15}}{2}).$$

Correction de l'exercice 853 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in E_1$.
   (b) Soient $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}$ deux éléments de E_1. On a donc $x+y-z=x+y+z=0$ et $x'+y'-z'=x'+y'+z'=0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z')=(x+x')+(y+y')+(z+z')=0$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+x') & (y+y') & (z+z')\end{pmatrix}$ appartient à E_1.
   (c) Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\in E_1$. Alors la relation $x+y-z=x+y+z=0$ implique que $\lambda x+\lambda y-\lambda z=\lambda x+\lambda y+\lambda z=0$ donc que $\lambda\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x & \lambda y & \lambda z\end{pmatrix}$ appartient à E_1.

   Posons $F_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a les inclusions *strictes* : $\{0\}\subset E_1$ et $E_1\subset F_1\subset\mathbb{R}^3$. Par la première on obtient $0<\dim(E_1)$, par la seconde $\dim(F_1)<3$ puis $\dim(E_1)<2$ c'est à dire $\dim(E_1)=1$.
2. $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2-z^2=0\}$ c'est à dire $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=z \text{ ou } x=-z\}$. Donc $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_2 mais $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_4 mais leur somme $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 855 ▲

1. E_1 : non si $a\neq 0$ car alors $0\notin E_1$; oui, si $a=0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y=0\}$ et $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
4. E_4 : non car le polynôme nul n'appartient pas à E_4.
5. E_5 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0)\in E_5$ mais $-(2,0)=(-2,0)\notin E_5$.

Correction de l'exercice 860 ▲

1. Sens $\Leftarrow$. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.
Sens $\Rightarrow$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x+y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x+y \in F \cup G$ alors $x+y \in F$ ou $x+y \in G$.
   - Si $x+y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x+y)+(-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.
   - Si $x+y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x+y)+(-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde.

   Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F.
2. Supposons $G \subset F$.
   - Inclusion $\supset$. Soit $x \in G+(F\cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tels que $x = a+b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x = a+b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x = a+b \in G+H$. Donc $x \in F \cap (G+H)$.
   - Inclusion $\subset$. Soit $x \in F \cap (G+H)$. $x \in G+H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x = a+b$. Maintenant $b = x-a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F \cap H$. Donc $x = a+b \in G+(F\cap H)$.

Correction de l'exercice 871 ▲

Il y a égalité.

Correction de l'exercice 872 ▲

L'intersection contient F.

Soit $\vec{u} \in \big(F+(G\cap F')\big) \cap \big(F+(G\cap G')\big)$: $\vec{u} = \vec{a}+\vec{b} = \vec{a}'+\vec{b}'$ avec $\vec{a},\vec{a}' \in F$, $\vec{b} \in G \cap F'$ et $\vec{b}' \in G \cap G'$.

Alors $\vec{b}-\vec{b}' = \vec{a}'-\vec{a} \in F \cap G = F' \cap G'$, donc $\vec{b} \in G'$, donc $\vec{b} \in F' \cap G' \subset F$.

Correction de l'exercice 875 ▲

1. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
$$(\lambda f+\mu g)(0)+(\lambda f+\mu g)(1) = \lambda(f(0)+f(1))+\mu(g(0)+g(1)) = 0.$$
Par suite, $\lambda f+\mu g$ est dans F. On a montré que :
$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall (f,g) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f+\mu g \in F.$$
F est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. Même démarche et même conclusion .
3. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
4. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Pour x élément de $[0,1]$,
$$(\lambda f+\mu g)(x)+(\lambda f+\mu g)(1-x) = \lambda(f(x)+f(1-x))+\mu(g(x)+g(1-x)) = 0$$
et $\lambda f+\mu g$ est dans F. F est un sous-espace vectoriel de E.
Remarque. Les graphes des fonctions considérés sont symétriques par rapport au point $(\frac{1}{2},0)$.
5. F contient la fonction constante 1 mais pas son opposé la fonction constante -1 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
6. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'exercice 876 ▲

Dans les cas où F est un sous-espace, on a à chaque fois trois démarches possibles pour le vérifier :

- Utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
- Obtenir F comme noyau d'une forme linéaire ou plus généralement, comme noyau d'une application linéaire.
- Obtenir F comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Je vous détaille une seule fois les trois démarches.

1. **1ère démarche.** F contient le vecteur nul $(0,\dots,0)$ et donc $F \neq \varnothing$. Soient alors $((x_1,\dots,x_n),(x_1',\dots,x_n')) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x_1',\dots,x_n') = (\lambda x_1+\mu x_1',\dots,\lambda x_n+\mu x_n')$$
avec $\lambda x_1+\mu x_1' = 0$. Donc, $\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x_1',\dots,x_n') \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2ème démarche. L'application $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est lenoyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3ème démarche.

$$\begin{aligned} F &= \{(0,x_2,...,x_n),\ (x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \{x_2(0,1,0,...,0) + ... + x_n(0,...,0,1),\ (x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \text{Vect}((0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1)). \end{aligned}$$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. F ne contient pas le vecteur nul et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. (Ici, $n \geq 2$). L'application $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1 - x_2$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. L'application $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
5. (Ici, $n \geq 2$). Les vecteurs $e_1 = (1,0,...,0)$ et $e_2 = (0,1,0...,0)$ sont dans F mais $e_1 + e_2 = (1,1,0...0)$ n'y est pas. F n'est donc pas un sous espace vectoriel de E.
   Remarque. F est la réunion des sous-espaces $\{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n /\ x_1 = 0\}$ et $\{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n /\ x_2 = 0\}$.

Correction de l'exercice 877 ▲

Il suffit de montrer que $C \subset B$.

Soit x un élément de C. Alors $x \in A + C = A + B$ et il existe $(y,z) \in A \times B$ tel que $x = y + z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x - z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y + z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Correction de l'exercice 878 ▲

Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda,\mu,-37,-3) \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 /\ (\lambda,\mu,-37,-3) = au + bv \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} a + 2b = \lambda \\ 2a - b = \mu \\ -5a + 4b = -37 \\ 3a + 7b = -3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} a + 2b = \lambda \\ 2a - b = \mu \\ a = \frac{247}{47} \\ b = -\frac{126}{47} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{247}{47} + 2(-\frac{126}{47}) \\ \mu = 2\frac{247}{47} + \frac{126}{47} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\frac{5}{47} \\ \mu = \frac{620}{47} \end{array} \right. .$$

Correction de l'exercice 879 ▲

Posons $F = \text{Vect}(a,b)$ et $G = \text{Vect}(c,d)$.

Montrons que c et d sont dans F.

$$c \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ c = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu = 1 \\ 2\lambda - \mu = 0 \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{array} \right. .$$

Puisque $3.\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1$, le système précédent admet bien un couple (λ,μ) solution et c est dans F. Plus précisément, $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$.

$$d \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ d = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 1 \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{2}{5} \\ \mu = -\frac{1}{5} \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{array} \right. .$$

Puisque $3.\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = 1$, le système précédent admet bien un couple (λ,μ) solution et d est dans F. Plus précisément, $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$. En résumé, $\{c,d\} \subset F$ et donc $G = \text{Vect}(c,d) \subset F$.

Montrons que a et b sont dans G mais les égalités $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$ et $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$ fournissent $a = c + 2d$ et $b = 2c - d$. Par suite, $\{a,b\} \subset G$ et donc $F = \text{Vect}(a,b) \subset G$. Finalement $F = G$.

Correction de l'exercice 880 ▲

1. Soit $x \in E$.
$x \in (A\cap B)+(A\cap C) \Rightarrow \exists y \in A\cap B,\ \exists z \in A\cap C/\ x = y+z$.
y et z sont dans A et donc $x = y+z$ est dans A car A est un sous-espace vectoriel de E.
Puis y est dans B et z est dans C et donc $x = y+z$ est dans $B+C$. Finalement,
$$\forall x \in E,\ [x \in (A\cap B)+(A\cap C) \Rightarrow x \in A\cap(B+C)].$$
Autre démarche.
$(A\cap B \subset B$ et $A\cap C \subset C) \Rightarrow (A\cap B)+(A\cap C) \subset B+C$ puis $(A\cap B \subset A$ et $A\cap C \subset A \Rightarrow (A\cap B)+(A\cap C) \subset A+A = A$, et finalement $(A\cap B)+(A\cap C) \subset A\cap(B+C)$.
2. Si on essaie de démontrer l'inclusion contraire, le raisonnement coince car la somme $y+z$ peut être dans A sans que ni y, ni z ne soient dans A.
Contre-exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $A = \mathbb{R}.(1,0) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $B = \mathbb{R}.(0,1)$ et $C = \mathbb{R}.(1,1)$.
$B+C = \mathbb{R}^2$ et $A\cap(B+C) = A$ mais $A\cap B = \{0\}$ et $A\cap C = \{0\}$ et donc $(A\cap B)+(A\cap C) = \{0\} \neq A\cap(B+C)$.
3. $A\cap B \subset B \Rightarrow (A\cap B)+(A\cap C) \subset B+(A\cap C)$ mais aussi $(A\cap B)+(A\cap C) \subset A+A = A$. Donc, $(A\cap B)+(A\cap C) \subset A\cap(B+(A\cap C))$.
Inversement, soit $x \in A\cap(B+(A\cap C))$ alors $x = y+z$ où y est dans B et z est dans $A\cap C$. Mais alors, x et z sont dans A et donc $y = x-z$ est dans A et même plus précisément dans $A\cap B$. Donc, $x \in (A\cap B)+(A\cap C)$. Donc, $A\cap(B+(A\cap C)) \subset (A\cap B)+(A\cap C)$ et finalement, $A\cap(B+(A\cap C)) = (A\cap B)+(A\cap C)$.

Correction de l'exercice 881 ▲

---

1. Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on pose $f((x,y,z,t)) = x-2y$, $g((x,y,z,t)) = y-2z$ et $h((x,y,z,t)) = x-y+z-t$. f, g et h sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$. Donc, $V = \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et $W = \mathrm{Ker} h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
$$(x,y,z,t) \in V \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2z \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \end{array}\right. .$$
Donc, $V = \{(4z,2z,z,t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1 = (4,2,1,0)$ et $e_2 = (0,0,0,1)$. Montrons alors que (e_1,e_2) est libre. Soit $(z,t) \in \mathbb{R}^2$.
$$ze_1 + te_2 = 0 \Rightarrow (4z,2z,z,t) = (0,0,0,0) \Rightarrow z = t = 0.$$
Donc, (e_1,e_2) est une base de V.
Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow t = x-y+z$. Donc, $W = \{(x,y,z,x-y+z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e'_1,e'_2,e'_3)$ où $e'_1 = (1,0,0,1)$, $e'_2 = (0,1,0,-1)$ et $e'_3 = (0,0,1,1)$.
Montrons alors que (e'_1,e'_2,e'_3) est libre. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Rightarrow (x,y,z,x-y+z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0.$$
Donc, (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de W. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
$$(x,y,z,t) \in V\cap W \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2z \\ x-y+z-t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \\ t = 3z \end{array}\right. .$$
Donc, $V\cap W = \{(4z,2z,z,3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e)$ où $e = (4,2,1,3)$. De plus, e étant non nul, la famille (e) est libre et est donc une base de $V\cap W$.
3. Soit $u = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.
On cherche $v = (4\alpha,2\alpha,\alpha,\beta) \in V$ et $w = (a,b,c,a-b+c) \in W$ tels que $u = v+w$.
$$u = v+w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha + a = x \\ 2\alpha + b = y \\ \alpha + c = z \\ \beta + a - b + c = t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = x-4\alpha \\ b = y-2\alpha \\ c = z-\alpha \\ \beta = -x+y-z+t-3\alpha \end{array}\right. .$$
et $\alpha = 0$, $\beta = -x+y-z+t$, $a = x$, $b = y$ et $c = z$ conviennent. Donc, $\forall u \in \mathbb{R}^4,\ \exists (v,w) \in V\times W/\ u = v+w$. On a montré que $\mathbb{R}^4 = V+W$.

Correction de l'exercice 882 ▲

---

1. Pour tout (y,y') élément de $[0,2\pi[^2$, $f((0,y)) = f((0,y'))$ et f n'est pas injective.
Montrons que f est surjective.
Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Si $X = Y = 0$, $f((0,0)) = (0,0)$.
   - Si $X = 0$ et $Y > 0$, $f((Y,\frac{\pi}{2})) = (0,Y)$ avec $(Y,\frac{\pi}{2})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X = 0$ et $Y < 0$, $f((-Y,\frac{3\pi}{2})) = (0,Y)$ avec $(-Y,\frac{3\pi}{2})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ et $Y \geq 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ et $Y \geq 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi+\text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi+\text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi+\text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi+\text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi+\text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi+\text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
2. Pour tout réel x, on a $a\cos(x-\alpha)+b\cos(x-\beta) = (a\cos\alpha+b\cos\beta)\cos x+(a\sin\alpha+b\sin\beta)\sin x$.
D'après 1), f est surjective et il existe (c,γ) élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ tel que $a\cos\alpha+b\cos\beta = c\cos\gamma$ et $a\sin\alpha+b\sin\beta = c\sin\gamma$. Donc,
$$\exists(c,\gamma)\in[0,+\infty[\times[0,2\pi[/\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(x-\beta) = c(\cos x cos\gamma+\sin x\sin\gamma) = c\cos(x-\gamma).$$
3. F est non vide car contient l'application nulle et est contenu dans E. De plus, pour x réel,
$$\begin{aligned}a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)+a'\cos(x-\alpha')+b'\cos(2x-\beta')\\ &= a\cos(x-\alpha)+a'\cos(x-\alpha')+b\cos(2x-\beta)+b'\cos(2x-\beta')\\ &= a''cos(x-\alpha'')+b''\cos(2x-\beta''),\end{aligned}$$
pour un certain $(a',b'',\alpha'',\beta'')$ (d'après 2)). F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Pour tout réel x, $\cos x = 1.\cos(x-0)+0.\cos(2x-0)$ et $x\mapsto\cos x$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\sin x = 1.\cos(x-\frac{\pi}{2})+0.\cos(2x-0)$ et $x\mapsto\sin x$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\cos(2x) = 0.\cos(x-0)+1.\cos(2x-0)$ et $x\mapsto\cos(2x)$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\sin(2x) = 0.\cos(x-0)+1.\cos(2x-\frac{\pi}{2})$ et $x\mapsto\sin(2x)$ est élément de F.
D'autre part, pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x-1 = 1-2\sin^2 x$ et donc,
$$x\mapsto 1\in F \Leftrightarrow x\mapsto\cos^2 x\in F \Leftrightarrow x\mapsto\sin^2 x\in F.$$
Montrons alors que $1\notin F$.
On suppose qu'il existe $(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta) = 1.$$
En dérivant deux fois, on obtient :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ -a\cos(x-\alpha)-4b\cos(2x-\beta) = 0,$$
et donc en additionnant
$$\forall x\in\mathbb{R},\ -3b\cos(2x-\beta) = 1,$$
ce qui est impossible (pour $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$, on trouve 0). Donc, aucune des trois dernières fonctions n'est dans F.
5. On a vu que $(x\mapsto\cos x,\ x\mapsto\sin x,\ x\mapsto\cos(2x),\ x\mapsto\sin(2x))$ est une famille d'éléments de F. Montrons que cette famille est libre.
Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.
Supposons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $a\cos x+b\sin x+c\cos(2x)+d\sin(2x) = 0$. En dérivant deux fois, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $-a\cos x-b\sin x-4c\cos(2x)-4d\sin(2x) = 0$ et en additionnant : $\forall x\in\mathbb{R}$, $-3c\cos(2x)-3d\sin(2x) = 0$. Donc,
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}a\cos x+b\sin x = 0\\ c\cos(2x)+d\sin(2x) = 0\end{array}\right. .$$
$x = 0$ fournit $a = c = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$ fournit $b = d = 0$. Donc, $(x\mapsto\cos x,\ x\mapsto\sin x,\ x\mapsto\cos(2x),\ x\mapsto\sin(2x))$ est une famille libre d'éléments de F.

Correction de l'exercice 883 ▲

1. C contient l'identité de $\mathbb{R}$, mais ne contient pas son opposé. Donc, C n'est pas un espace vectoriel.

2. Montrons que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. V est déjà non vide car contient la fonction nulle $(0 = 0 - 0)$.
Soit $(f_1, f_2) \in V^2$. Il existe $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in C^4$ tel que $f_1 = g_1 - h_1$ et $f_2 = g_2 - h_2$. Mais alors, $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$. Or, une somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et donc, $g_1 + g_2$ et $h_1 + h_2$ sont des éléments de C ou encore $f_1 + f_2$ est dans V.
Soit $f \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(g, h) \in V^2$ tel que $f = g - h$ et donc $\lambda f = \lambda g - \lambda h$.
Si $\lambda \geq 0$, λg et λh sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et λf est dans V.
Si $\lambda < 0$, on écrit $\lambda f = (-\lambda h) - (-\lambda g)$, et puisque $-\lambda g$ et $-\lambda h$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$, λf est encore dans V. V est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 884 ▲

Soit $(x, y) \in E^2$.

$(1+1).(x+y) = 1.(x+y) + 1.(x+y) = (x+y) + (x+y) = x+y+x+y$ mais aussi $(1+1).(x+y) = (1+1).x + (1+1).y = x+x+y+y$.

Enfin, $(E, +)$ étant un groupe, tout élément est régulier et en particulier x est régulier à gauche et y est régulier à droite. On a montré que pour tout couple (x, y) élément de E^2, $x + y = y + x$.

Correction de l'exercice 885 ▲

Soit $F = (A \cap B) + (A \cap C) + (B \cap C)$.

$F \subset A + A + B = A + B$ puis $F \subset A + C + C = A + C$ puis $F \subset B + C + C = B + C$ et finalement $F \subset (A+B) \cap (A+C) \cap (B+C)$.

Correction de l'exercice 886 ▲

$\Leftarrow$) Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$. Dans tous les cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.

$\Rightarrow$) Supposons que $F \not\subset G$ et que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et montrons que $G \subset F$.

F n'est pas inclus dans G et donc il existe x élément de E qui est dans F et pas dans G.

Soit y un élément de G. $x + y$ est dans $F \cup G$ car x et y y sont et car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $x + y$ est élément de G alors $x = (x+y) - y$ l'est aussi ce qui est exclu. Donc $x + y$ est élément de F et par suite $y = (x+y) - x$ est encore dans F. Ainsi, tout élément de G est dans F et donc $G \subset F$.

Correction de l'exercice 887 ▲

$\Leftarrow$) Immédiat .

$\Rightarrow$) On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, c'est l'exercice 886.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons que toute réunion de n sous-espaces de E est un sous-espace de E si et seulement si l'un de ces sous-espaces contient tous les autres.

Soient F_1,..., F_n, F_{n+1} $n+1$ sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1}$ soit un sous-espace vectoriel de E. Posons $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$.

• Si F_{n+1} contient F, c'est fini.

• Si $F_{n+1} \subset F$, alors $= F_1 \cup \ldots \cup F_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n \cup F_{n+1}$ est un sous-espace vectoriel de E. Par hypothèse de récurrence, F est l'un des F_i pour un certain i élément de $[\![1, n]\!]$. $F_i = F$ contient également F_{n+1} et contient donc tous les F_j pour j élément de $[\![1, n+1]\!]$.

• Supposons dorénavant que $F \not\subset F_{n+1}$ et que $F_{n+1} \not\subset F$ et montrons que cette situation est impossible.

Il existe un vecteur x qui est dans F_{n+1} et pas dans F et un vecteur y qui est dans F et pas dans F_{n+1}.

Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. $y - \lambda x$ est un élément de $F \cup F_{n+1}$ (puisque $F \cup F_{n+1}$ est un sous-espace) mais $y - \lambda x$ n'est pas dans F_{n+1} car alors $y = (y - \lambda x) + \lambda x$ y serait ce qui n'est pas.

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $y - \lambda x \in F$. On en déduit que pour tout scalaire λ, il existe un indice $i(\lambda)$ élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $y - \lambda x \in F_{i(\lambda)}$. Remarquons enfin que si $\lambda \neq \mu$ alors $i(\lambda) \neq i(\mu)$. En effet, si pour λ et μ deux scalaires distincts donnés, il existe un indice i élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $y - \lambda x$ et $y - \mu x$ soient dans F_i, alors $x = \frac{(y-\mu x)-(y-\lambda x)}{\mu - \lambda}$ est encore dans F_i et donc dans F, ce qui n'est pas.

Comme l'ensemble des scalaires est infini et que l'ensemble des indices ne l'est pas, on vient de montrer que cette dernière situation n'est pas possible, ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 891 ▲

1.

$$\begin{aligned}
&(x,1,y,1)\in Vect\{e_1,e_2\}\\
\Leftrightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad (x,1,y,1)=\lambda(1,2,3,4)+\mu(1,-2,3,-4)\\
\Leftrightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad (x,1,y,1)=(\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda)+(\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu)\\
\Leftrightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad (x,1,y,1)=(\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu)\\
\Rightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad 1=2(\lambda-\mu)\text{ et }1=4(\lambda-\mu)\\
\Rightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad \lambda-\mu=\frac{1}{2}\text{ et }\lambda-\mu=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x,y). Donc on ne peut pas trouver de tels x,y.

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y)\in Vect\{e_1,e_2\}\\
\Leftrightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad (x,1,1,y)=(\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu)\\
\Leftrightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad \begin{cases}x&=\lambda+\mu\\1&=2\lambda-2\mu\\1&=3\lambda+3\mu\\y&=4\lambda-4\mu\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad \begin{cases}\lambda&=\frac{5}{12}\\\mu&=-\frac{1}{12}\\x&=\frac{1}{3}\\y&=2\end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x,1,1,y)$ qui convient est $(1/3,1,1,2)$.

Correction de l'exercice 892 ▲

1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (l'origine est dans E, la somme de deux vecteurs de E est dans E, la multiplication d'un vecteur de E par un réel reste dans E).
2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E. Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $V_1=(1,-1,0,0)$. Il est bien clair que V_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur V_2 linéairement indépendant de V_1, prenons $V_2=(1,0,-1,0)$. Alors V_1,V_2 n'engendrent pas tout E ; par exemple $V_3=(1,0,0,-1)$ est dans E mais n'est pas engendré par V_1 et V_2. Montrons que (V_1,V_2,V_3) est une base de E.
   (a) (V_1,V_2,V_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3=0$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
&\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3=0\\
&\Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma&=0\\-\alpha&=0\\-\beta&=0\\-\gamma&=0\end{cases}.\\
&\Rightarrow \alpha=0,\beta=0,\gamma=0.
\end{aligned}$$

   Donc la famille est libre.

   (b) Montrons que la famille est génératrice : soit $V=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$. Il faut écrire V comme combinaison linéaire de V_1,V_2,V_3. On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α,β,γ tels que $\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3=V$. On obtient que $V=-x_2V_1-x_3V_2-x_4V_4$ (on utilise $x_1+x_2+x_3+x_4=0$).

   Bien sûr vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Correction de l’exercice 899 ▲

Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$.Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc $\dim(E) \leq 2$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants donc $\dim(E) \geq 2$ c’est à dire $\dim(E) = 2$. Un raisonnement identique montre $\dim(F) = 2$. Enfin, les égalités $\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ montrent que $F \subset E$ c’est à dire $E = F$.

Correction de l’exercice 905 ▲

$v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l’existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.

Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 & = \lambda - \mu \\ x & = -\lambda + 2\mu \\ y & = \lambda + 3\mu \\ 3 & = 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda & = 1/3 \\ \mu & = 7/3 \\ x & = 13/3 \\ y & = 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Correction de l’exercice 907 ▲

À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu’à un nombre *fini* de termes).

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons La famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu’il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l’égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu’à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Correction de l’exercice 917 ▲

$F = G$.

Correction de l’exercice 920 ▲

CNS $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq -1$.

Correction de l’exercice 922 ▲

Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. On a : $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois vecteurs u, v et w sont donc combinaisons linéaires des deux vecteurs u et u' et constituent par suite une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

Correction de l’exercice 923 ▲

1. Notons respectivement g et h, les fonctions sinus et cosinus.
   $f_a = \cos a.g + \sin a.h$, $f_b = \cos b.g + \sin b.h$ et $f_c = \cos c.g + \sin c.h$. Donc, f_a, f_b et f_c sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions g et h et constituent donc une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs donnés constituent une famille liée).
2. f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d’une famille liée.

3. Pour α réel donné et $x>0$, posons $f_\alpha(x)=x^\alpha$.
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1<...<\alpha_n$. Soit encore $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_{\alpha_k}=0\Rightarrow \forall x\in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{\alpha_k}=0\Rightarrow \forall x\in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{\alpha_k-\alpha_n}=0,$$

(en divisant les deux membres par x^{α_n}). Dans cette dernière égalité, on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient $\lambda_n=0$. Puis, par récurrence descendante, $\lambda_{n-1}=...=\lambda_1=0$. On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre et donc, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

4. Pour a réel donné et x réel, posons $f_a(x)=|x-a|$. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis a_1,...,a_n, n réels deux à deux distincts. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n\lambda_k f_{a_k}=0$.
S'il existe $i\in\{1,...,n\}$ tel que $\lambda_i\neq 0$ alors,

$$f_{a_i}=-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{k\neq i}\lambda_k f_{a_k}.$$

Mais cette dernière égalité est impossible car f_{a_i} n'est pas dérivable en a_i alors que $-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{k\neq i}\lambda_k f_{a_k}$ l'est. Donc, tous les λ_i sont nuls.

Correction de l'exercice 924 ▲

1. La matrice de la famille (e_1,e_2,e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix}3&1&7\\0&5&5\\1&0&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}$. Les trois dernières équations du système $\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=0$ d'inconnues λ, μ et ν forment un sous-système de matrice $A=\begin{pmatrix}0&5&5\\1&0&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}$.
En développant le déterminant de cette matrice suivant sa première colonne, on obtient $\det(A)=-10-2\times 10=-30\neq 0$. Ce sous-système est de CRAMER et admet donc l'unique solution $(\lambda,\mu,\nu)=(0,0,0)$. Par suite, la famille (e_1,e_2,e_3) est libre.

2.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&-2\\0&0&-2&0\\0&-2&0&0\end{vmatrix}\ (\text{pour } 2\leqslant i\leqslant 4,\ L_i\leftarrow L_i-L_1)$$
$$=\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=-8\neq 0.$$

Donc la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille libre (et donc une base de E).

3. Notons (u_1,u_2,u_3,u_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
La famille $(e_1,e_2,e_3,e_4)=(u_3,u_4,u_1,u_2)$ a même rang que la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) c'est-à-dire 4. La famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

4. La matrice de la famille (e_2,e_1,e_3,e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix}1&2&4&1\\1&-1&1&-2\\1&3&5&2\\1&1&3&0\end{pmatrix}$. Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-3&-3&-3\\1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$ $(e_5=e_1-2e_2,\ e_6=e_3-4e_2$ et $e_7=e_4-e_2)$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-3&0&0\\1&1&10&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$ $(e_8=e_6-e_5$ et $e_9=e_7-e_5)$.
La matrice ci-dessus est de rang 2. Il en est de même de la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) qui est en particulier liée. La nullité de la troisième colonne fournit $0=e_8=e_6-e_5=(e_3-4e_2)-(e_1-2e_2)=-e_1-2e_2+e_3$ et donc $e_3=e_1+2e_2$. La nullité de la quatrième colonne fournit $0=e_9=e_7-e_5=(e_4-e_2)-(e_1-2e_2)=e_4+e_2-e_1$ et donc $e_4=e_1-e_2$.

Correction de l'exercice 925 ▲

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$.

$$a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}=0\Rightarrow(a+b\sqrt{2})^2=(-c\sqrt{3})^2\Rightarrow a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}=3c^2\Rightarrow 2ab\sqrt{2}\in\mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab=0$.

Si $b=0$, puisque $a+c=0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c=0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a=0$ et finalement $a=b=c=0$.

Si $a=0$, il reste $2b^2=3c^2$. Mais $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $3q^2=2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b=c=0$ puis encore une fois $a=b=c=0$.

On a montré que $\forall(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$, $(a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}=0\Rightarrow a=b=c=0)$. Donc la famille $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

Correction de l'exercice 926 ▲

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$.

Soient a, b et c trois réels tels que $af_1+bf_2+cf_3=0$.

Première solution. Si a est non nul, la fonction $af_1+bf_2+cf_3$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $a\ln x$ et ne peut donc être égale à la fonction nulle. Donc $a=0$. Puis si b est non nul, la fonction $af_1+bf_2+cf_3=bf_2+cf_3$ est équivalente à $b\ln(\ln x)$ et ne peut être égale à la fonction nulle. Donc $b=0$. Puis $c=0$.

Deuxième solution. On effectue un développement limité à un ordre suffisant de la fonction $af_1+bf_2+cf_3$ quand x tend vers 0 :

$f_1(x)=\ln(1+x)\underset{x\to0}{=}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ puis

$$\begin{aligned}f_2(x)&=\ln(1+f_1(x))\underset{x\to0}{=}\ln\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\\&=x-x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}f_3(x)&=\ln(1+f_2(x))\underset{x\to0}{=}\ln\left(1+x-x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\right)=\left(x-x^2+\frac{7}{6}x^3\right)-\frac{1}{2}\left(x-x^2\right)^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\\&=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Par suite, $af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x)\underset{x\to0}{=}(a+b+c)x+\left(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}\right)x^2+\left(\frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2}\right)x^3+o(x^3)$. L'égalité $af_1+bf_2+cf_3=0$ fournit, par identification des parties régulières des développements limités à l'ordre trois en zéro :

$$\begin{cases}a+b+c=0\\-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}=0\\\frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2}\end{cases}\text{ ou encore }\begin{cases}a+b+c=0\\a+2b+3c=0\\2a+7b+15c=0\end{cases}.$$

Comme $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&7&15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&1\\2&5&8\end{vmatrix}=3\neq0$, on a donc $a=b=c=0$.

Correction de l'exercice 927 ▲

Soient n un entier naturel non nul puis a_1,..., a_n n réels deux à deux distincts et λ_1,..., λ_n n réels.

Supposons $\lambda_1f_{a_1}+\ldots+\lambda_nf_{a_n}=0$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. On a $\lambda_if_{a_i}=-\sum_{j\neq i}\lambda_jf_{a_j}$ et on ne peut avoir $\lambda_i\neq0$ car alors le membre de gauche est une fonction non dérivable en a_i tandis que le membre de droite l'est. Par suite, tous les λ_i sont nuls et donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Correction de l'exercice 928 ▲

Soient $a_1 < ... < a_n$ n réels deux à deux distincts et λ_1,..., λ_n n réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$ $(*)$.

Première solution. Après multiplication des deux membres de $(*)$ par $e^{-a_n x}$ puis passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. En réitérant, on obtient donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = ... = \lambda_1 = 0$.

Deuxième solution. On note f la fonction apparaissant au premier membre de $(*)$.

$$\begin{aligned} f = 0 &\Rightarrow \forall k \in [\![0,,n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \lambda_1 a_1^k + ... + \lambda_n a_n^k = 0. \end{aligned}$$

Le système prédédent d' inconnues λ_i, $1 \leqslant n$, est un système linéaire homogène à n équations et n inconnues. Son déterminant est le déterminant de Vandermonde des a_i et est non nul puisque les a_i sont deux à deux distincts. Le système est donc de CRAMER et admet l'unique solution $(0,...,0)$.

Troisième solution. (dans le cas où on se restreint à démontrer la liberté de la famille $(x \mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$).

Soient $n_1 < ... < n_p$ p entiers naturels deux à deux distincts. Supposons que pour tout réel x on ait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{n_i x} = 0$. On en déduit que pour tout réel strictement positif t, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n_i} = 0$ et donc le polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ est nul (car a une infinité de racines) ou encore les coefficients du polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ à savoir les λ_i sont tous nuls.

Quatrième solution. (pour les redoublants) L'application φ qui à f de classe C^∞ fait correspondre sa dérivée est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour a réel donné, $\varphi(f_a) = af_a$ et la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est constituée de vecteurs propres de φ (les f_a sont non nulles) associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On sait qu'une telle famille est libre.

Correction de l'exercice 929 ▲

Soient n un entier naturel non nul puis P_1,..., P_n n polynômes non nuls de degrés respectifs $d_1 < ... < d_n$.

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0$. Supposons par l'absurde que les λ_i ne soient pas tous nuls et posons $k = \text{Max}\{i \in [\![1,n]\!] /\ \lambda_i \neq 0\}$. On ne peut avoir $k = 1$ car $P_1 \neq 0$ puis

$$\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\textstyle\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\lambda_k P_k$ est un polynôme de degré d_k (car $\lambda_k \neq 0$) et $-\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ est un polynôme de degré au plus $d_{k-1} < d_k$. Donc tous les λ_k sont nuls.

La même démarche tient en remplaçant degré par valuation et en s'intéressant à la plus petite valuation au lieu du plus grand degré.

Correction de l'exercice 930 ▲

1. Pour p et q entiers relatifs, posons $I(p,q) = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\, dx$.
   Si $p \neq q$, $I(p,q) = \frac{1}{i(p-q)} \left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Soient alors p et q deux entiers naturels.
   Donc si $p \neq q$, $J(p,q)\frac{1}{2}\text{Re}(I(p,q)+I(p,-q)) = 0$ puis $K(p,q) = \frac{1}{2}\text{Im}(I(p,-q)-I(p,q)) = 0$ puis $L(p,q) = \frac{1}{2}\text{Re}(I(p,-q)-I(p,q)) = 0$.
   Si $p = q$, $J(p,p) = 2\pi$ si $p = 0$ et π si $p \neq 0$ puis $K(p,p) = 0$ puis $L(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ et 0 si $p = 0$.
2. Sur l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, l'application qui à (f,g) élément de E^2 associe $\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$ est classiquement un produit scalaire. La famille de fonctions proposée est une famille orthogonale pour ce produit scalaire et ne contient pas le vecteur nul de E. Cette famille est donc est libre.

Correction de l'exercice 931 ▲

Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$e_3 = 2e_1 + 3e_2.$$

Donc en fait nous avons $Vect(e_1,e_2,e_3) = Vect(e_1,e_2)$ et c'est un espace de dimension 2. Par la même relation on trouve que $Vect(e_1,e_2,e_3) = Vect(e_2,e_3)$

1. Vrai. $Vect\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$ est inclus dans $Vect(e_1,e_2,e_3)$, car $(1,1,0,0)=e_1+e_2$ et $(-1,1,-4,2)=-e_1+e_2$. Comme il sont de même dimension ils sont égaux.
2. Vrai. On a $(1,1,0,0)=e_1+e_2$ donc $(1,1,0,0)\in Vect(e_1,e_2)$, or $Vect(e_1,e_2)=Vect(e_2,e_3)\subset Vect(e_2,e_3,e_4)$. Donc $(1,1,0,0)\in Vect(e_1,e_2)\cap Vect(e_2,e_3,e_4)$.
3. Faux. Toujours la même relation nous donne que $Vect(e_1,e_2)\cap Vect(e_2,e_3,e_4)=Vect(e_1,e_2)$ donc est de dimension 2.
4. Faux. Encore une fois la relation donne que $Vect(e_1,e_2)+Vect(e_2,e_3,e_4)=Vect(e_1,e_2,e_4)$, or 3 vecteurs ne peuvent engendré $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4.
5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est $\{0\}$ et la somme est $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 932 ▲

1. Non. Ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs. Premier type de raisonnement, on montre que $Vect(v_1,v_2)+Vect(v_3)=Vect(v_1,v_2,v_3)$, mais 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4. Autre type de raisonnement : trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $Vect(v_1,v_2)+Vect(v_3)$: par exemple faire le calcul avec $(0,0,0,1)$.
2. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5=v_3+v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en resolvant un système.

Correction de l'exercice 935 ▲

Les fonctions de E qui ne sont pas dans F sont Les fonctions h qui vérifient $h(0)\neq 0$ **ou** $h'(0)\neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x\mapsto b$, $(b\in\mathbb{R})$, ou les homothéties $x\mapsto ax$, $(a\in\mathbb{R})$ n'appartiennent pas à F.

Posons
$$G=\left\{x\mapsto ax+b;(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$
Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.

Soit $f\in F\cap G$ alors $f(x)=ax+b$ (car $f\in G$) et $f(0)=b$ et $f'(0)=a$; mais $f\in F$ donc $f(0)=0$ donc $b=0$ et $f'(0)=0$ donc $a=0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F\cap G=\{0\}$.

Soit $h\in E$, alors remarquons que pour $f(x)=h(x)-h(0)-h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0)=0$ et $f'(0)=0$ donc $f\in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons
$$h(x)=f(x)+h(0)+h'(0)x.$$
Posons $g(x)=h(0)+h'(0)x$, alors la fonction $g\in G$ et
$$h=f+g,$$
ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E=F+G$.

En conclusion nous avons montrer que $E=F\oplus G$.

Correction de l'exercice 938 ▲

On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F\cap G=\{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2. $F+G=E$. Soit (u_n) un élément de E. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-\ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n)\in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ. Alors nous avons $u_n=\ell+u_n-\ell$, ou encore $u_n=w_n+v_n$, ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n)=(w_n)+(u_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E=F\oplus G$.

Correction de l'exercice 940 ▲

1. (a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ que l'on décompose en $P=P_1(X^2)+XP_2(X^2)$. Alors $P=(P_1+P_2)(X^2)-(1-X)P_2(X^2)=(1-X)P_1(X^2)+X(P_1+P_2)(X^2)$, ce qui prouve que les deux sommes sont égales à $\mathbb{R}[X]$. Ces sommes sont facilement directes.
   (b) Cela ne change pas A : les éléments de A sont ceux dont les parties paire et impaire sont opposées (au facteur X près), indépendamment du fait (vrai) que ces parties sont des polynômes.
2. Soit f un isomorphisme de E_1 sur E_2 et $F=\{x-f(x) \text{ tq } x\in E_1\}$. Alors $E=E_1\oplus F=E_2\oplus F$.

Correction de l'exercice 948 ▲

Les f_i sont des projecteurs commutant deux à deux, ils sont simmultanément diagonalisables. Soit e_1 tel que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geq 2$ donc les supports des restrictions des f_i à une base propre commnue sont deux à deux disjoints non vides, ce sont des singletons.

Correction de l'exercice 949 ▲

$F = \text{Vect}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, car est le noyau de la forme linéaire $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$.

Soit $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda,...,x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! \lambda \in \mathbb{R} /\ x - \lambda u \in G,$$

et donc,

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

Le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur $x = (x_1,...,x_n)$ est

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.u = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,..., \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)$$

et le projeté du même vecteur sur G parallèlement à F est

$$x - (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k).u = (x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,...,x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k).$$

Correction de l'exercice 950 ▲

On a

$$n = \dim E = \dim\,(\text{Ker}\, f + \text{Ker}\, g) = \dim\,(\text{Ker}\, f) + \dim\,(\text{Ker}\, g) - \dim\,(\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g),$$

mais aussi,

$$n = \dim\,(\text{Im}\, f) + \dim\,(\text{Im}\, g) - \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g) = 2n - \dim \text{Ker}\, f - \dim\,(\text{Ker}\, g) - \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g).$$

Par suite,

$$n + \dim\,(\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g) = \dim\,(\text{Ker}\, f) + \dim \text{Ker}\, g = n - \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g)$$

puis $n + \dim\,(\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g) = n - \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g) \Rightarrow \dim\,(\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g) + \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g) = 0$ ou encore $\dim\,(\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g) = \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g) = 0$, et finalement, $\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g = \text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g = \{0\}$. Ceci montre que les sommes proposées sont directes.

Correction de l'exercice 951 ▲

1ère solution. F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E et est donc un hyperplan de E.

Soit $x = (x_1,...,x_n)$ un élément de $F \cap G$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = (\lambda,...,\lambda)$ et $n\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. De plus $\dim(F) + \dim(G) = n - 1 + 1 = n = \dim(E) < +\infty$ et donc $F \oplus G = E$.

Soit $x = (x_1,...,x_n)$ un vecteur de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $x - (\lambda,...,\lambda) \in F \Leftrightarrow (x_1 - \lambda) + ... + (x_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Le projeté de x sur G parallèlement à F est donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(1,...,1)$ et le projeté de x sur F parallèlement à G est $x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(1,...,1)$.

2ème solution (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Posons $\overrightarrow{u} = (1,\dots,1)$.

On a $F = \overrightarrow{u}^{\perp} = G^{\perp}$. Par suite, F est le supplémentaire orthogonal de F.

Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur G est $\frac{x.u}{\|u\|^2}u = \frac{x_1+...+x_n}{n}(1,\dots,1)$.

Correction de l'exercice 952 ▲

det $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction de l'exercice 954 ▲

1. Le vecteur $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Donc dans la base (x_1, x_2, x_3) le coordonnées de x sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.
3. La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Correction de l'exercice 958 ▲

1. Faux. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$, $z = (1,1,0)$.
2. Vrai. Soit une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_p x_p = 0$. Supposons qu'un des coefficient est non nul : par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on écrit $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}x_p$. Donc x_1 est une combinaison linéaire de $\{x_2, \ldots, x_p\}$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé, donc tous les coefficients sont nuls. Donc $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 960 ▲

1. C'est une base.
2. Ce n'est pas une base : $v_3 = 4v_1 - v_2$. Donc l'espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
3. Ce n'est pas une base : $v_3 = 5v_1 - 4v_2$. Donc l'espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Correction de l'exercice 965 ▲

1. On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.
2. Plus généralement on montre qu'une famille de polynômes $\{P_k\}_{k=1,\ldots,n}$ avec $\deg P_i = i$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n$ de polynômes de degré $\leq n$.

Correction de l'exercice 969 ▲

C'est une base pour $t \neq \pm 1$.

Correction de l'exercice 979 ▲

1. C'est bien une base.

2. On cherche $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $aw_1 + bw_2 + c_3w_3 = w$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} a - b + ic & = 1 + i \\ -a + ib + c & = 1 - i \\ ia + b - c & = i \end{cases}$$

On trouve $a = 0$, $b = \frac{1}{2}(1-i)$, $c = \frac{1}{2}(1-3i)$. Donc les coordonnées de w dans la base (w_1, w_2, w_3) sont $(0, \frac{1}{2}(1-i), \frac{1}{2}(1-3i))$.

Correction de l'exercice 987 ▲

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & & & 2y & + & z \\ 3y' & = & -x & & & + & z \\ 3z' & = & -x & + & 3y & + & z. \end{array} \right.$$

Correction de l'exercice 988 ▲

$r = 3, \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{b} - 2\vec{d} - \vec{e} = \vec{0}.$

Correction de l'exercice 990 ▲

3. π_H :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x' & = & 3x & - & y & - & z \\ 4y' & = & -x & + & 3y & - & z \\ 4z' & = & -2x & - & 2y & + & 2z, \end{array} \right.$$

s_H :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x' & = & x & - & y & - & z \\ 2y' & = & -x & + & y & - & z \\ 2z' & = & -2x & - & 2y. & & \end{array} \right.$$

Correction de l'exercice 992 ▲

1. Soit n un entier naturel supèrieur ou égal à 2.
Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ ou encore tel que $n.b^2 = a^2$. Mais alors, par unicité de la décomposition d'un entier naturel supèrieur ou égal à 2 en facteurs premiers, tous les facteurs premiers de n ont un exposant pair ce qui signifie exactement que n est un carré parfait.
Si $n = 0$ ou $n = 1$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et n est d'autre part un carré parfait. On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ est un carré parfait})$$

ou encore par contraposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \text{ n'est pas un carré parfait} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}).$$

2. D'après 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.
$E = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ et donc, E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ en est une famille génératrice.
Montrons que cette famille est $\mathbb{Q}$-libre.
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$.

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 \Rightarrow (a + d\sqrt{6})^2 = (-b\sqrt{2} - c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2ad\sqrt{6} + 6d^2 = 2b^2 + 2bc\sqrt{6} + 3c^2 \\ \Rightarrow a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2 = 2(-ad + bc)\sqrt{6} \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, on obtient $a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2 = 2(-ad + bc) = 0$ (car si $bc - ad \neq 0$, $\sqrt{6} = \frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2}{2(-ad + bc)} \in \mathbb{Q}$) ou encore,

$$\begin{cases} a^2 - 3c^2 = 2b^2 - 6d^2 & (1) \\ ad = bc & (2) \end{cases}.$$

De même,

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 \Rightarrow (a+c\sqrt{3})^2=(-b\sqrt{2}-d\sqrt{6})^2 \Rightarrow (a^2+2ac\sqrt{3}+3c^2=2b^2+4bd\sqrt{3}+6d^2$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+3c^2=2b^2+6d^2 \quad (3) \\ ac=2bd \quad (4) \end{array}\right. .$$

(puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel). En additionnant et en retranchant (1) et (3), on obtient $a^2=2b^2$ et $c^2=2d^2$.Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut avoir $b\neq 0$ (car alors $\sqrt{2}=\pm\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$) ou $d\neq 0$. Donc, $b=d=0$ puis $a=c=0$. Finalement, la famille $(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre et est donc une base de E.

Correction de l'exercice 993 ▲

Première solution. Chaque P_k, $0\leqslant k\leqslant n$, est de degré $k+n-k=n$ et est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Les polynômes P_k, $0\leqslant k\leqslant n$ ont des valuations deux à deux distinctes et donc constituent une famille libre. Comme de plus $\text{card}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}=n+1=\dim(E)<+\infty$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.

Deuxième solution. La matrice carrée M de la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure. Ses coefficients diagonaux sont tous non nuls car égaux à 1. M est donc inversible et $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.

Correction de l'exercice 994 ▲

Unicité. Soit $i\in[\![0,n]\!]$. L_i doit admettre les n racines deux à deux distinctes a_j où j est différent de i et donc L_i est divisible par le polynôme $\prod_{j\neq i}(X-a_j)$. L_i doit être de degré n et donc il existe un réel non nul λ tel que $L_i=\lambda\prod_{j\neq i}(X-a_j)$. Enfin $L_i(a_i)=1$ fournit $\lambda=\frac{1}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$. Ainsi nécessairement $L_i=\prod_{j\neq i}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.

Existence. Les L_i ainsi définis conviennent.

$$\boxed{\forall i\in[\![0,n]\!],\ L_i=\prod_{j\neq i}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}.}$$

Montrons que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Soient λ_0,..., λ_n $n+1$ nombres complexes tels que $\lambda_0L_0+...+\lambda_nL_n=0$. En particulier, pour un indice i de $[\![0,n]\!]$ donné, $\sum_{j=0}^n\lambda_jL_j(a_i)=0$ et donc $\lambda_i=0$ au vu des égalités définissant les L_j. La famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

De plus les L_i sont tous dans $\mathbb{C}_n[X]$ et vérifient $\text{card}(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}=n+1=\dim\mathbb{C}_n[X]<+\infty$. Donc la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit P un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.

On écrit P dans la base $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$: $P=\sum_{j=0}^n\lambda_jL_j$. En prenant la valeur en a_i, i donné dans $[\![0,n]\!]$, on obtient $\lambda_i=P(a_i)$. D'où l'écriture générale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ P=P(a_0)L_0+...+P(a_n)L_n.}$$

Mais alors : $(\forall i\in[\![0,n]\!],\ P(a_i)=b_i)\Rightarrow P=b_0L_0+...+b_nL_n$.

Réciproquement le polynôme $P=b_0L_0+...+b_nL_n$ vérifie bien sûr les égalités demandées et est de degré inférieur ou égal à n.

Ainsi, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P(a_i)=b_i$ à savoir $P_0=\sum_{i=0}^n b_iL_i$.

Soient $P\in\mathbb{C}[X]$ et $R=(X-a_0)...(X-a_n)$ $(\deg(R)=n+1)$.

$$\begin{aligned}(\forall i\in[\![0,n]\!]\ P(a_i)=b_i) &\Leftrightarrow (\forall i\in[\![0,n]\!]\ P(a_i)=P_0(a_i))\\ &\Leftrightarrow P-P_0 \text{ admet les } n+1 \text{ racines deux à deux distinctes } a_0,...,a_n\\ &\Leftrightarrow P-P_0 \text{ est divisible par } R\Leftrightarrow \exists Q\in\mathbb{C}[X]/\ P=P_0+QR.\end{aligned}$$

Les polynômes cherchés sont les P_0+QR où Q décrit $\mathbb{C}[X]$.

Correction de l'exercice 996 ▲

1. $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc est de dimension finie. Soit $(e_1,\dots e_k)$ une base de $F\cap G$ avec $k=\dim F\cap G$.

   $(e_1,\dots e_k)$ est une famille libre dans F donc on peut la compléter en une base de F par le théorème de la base incomplète. Soit donc $(f_1,\dots,f_\ell)$ des vecteurs de F tels que $(e_1,\dots e_k,f_1,\dots,f_\ell)$ soit une base de F. Nous savons que $k+\ell=\dim F$. Remarquons que les vecteurs f_i sont dans $F\setminus G$.

   Nous repartons de la famille $(e_1,\dots e_k)$ mais cette fois nous la complétons en une base de G : soit donc $(g_1,\dots,g_m)$ des vecteurs de G tels que $(e_1,\dots e_k,g_1,\dots,g_m)$ soit une base de G. Nous savons que $k+m=\dim G$. Remarquons que les vecteurs g_i sont dans $G\setminus F$.
2. Montrons que $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_k,f_1,\dots,f_\ell,g_1,\dots,g_m)$ est une base de $F+G$.

   C'est une famille génératrice car $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots e_k,f_1,\dots,f_\ell)\subset\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et $G=\mathrm{Vect}(e_1,\dots e_k,g_1,\dots,g_m)\subset\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. Donc $F+G\subset\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

   C'est une famille libre : soit une combinaison linéaire nulle :
   $$a_1e_1+\dots a_ke_k+b_1f_1+\dots b_\ell f_\ell+c_1g_1+\dots c_mg_m=0.$$
   Notons $e=a_1e_1+\dots+a_ke_k$, $f=b_1f_1+\dots+b_\ell f_\ell$, $g=c_1g_1+\dots+c_mg_m$. Donc la combinaison linéaire devient :
   $$e+f+g=0.$$
   Donc $g=-e-f$, or e et f sont dans F donc g appartient à F. Or les vecteurs g_i ne sont pas dans F. Donc $g=c_1g_1+\dots+c_mg_m$ est nécessairement le vecteur nul. Nous obtenons $c_1g_1+\dots+c_mg_m=0$ c'est donc une combinaison linéaire nulle pour la famille libre $(g_1,\dots,g_m)$. Donc tous les coefficients $c_1,\dots,c_m$ sont nuls.

   Le reste de l'équation devient $a_1e_1+\dots+a_ke_k+b_1f_1+\dots+b_\ell f_\ell=0$, or $(e_1,\dots e_k,f_1,\dots,f_\ell)$ est une base de F donc tous les coefficients $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_\ell$ sont nuls.

   Bilan : tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base.
3. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$ alors la dimension de $F+G$ est le nombre de vecteurs de la base $\mathscr{B}$:
   $$\dim(F+G)=k+\ell+m.$$
   Or $k=\dim F\cap G$, $\ell=\dim F-k$, $m=\dim G-k$, donc
   $$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Correction de l'exercice 997 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel. Supposons que F ne soit pas de dimension finie, alors il existe $v_1,\dots,v_{n+1}$, $n+1$ vecteurs de F linéairement indépendants dans F. Mais il sont aussi linéairement indépendants dans E. Donc la dimension de E est au moins $n+1$. Contradiction.

Deux remarques :
- En fait on a même montrer que la dimension de F est plus petite que la dimension de E.
- On a utiliser le résultat suivant : si E admet une famille libre à k éléments alors la dimension de E est plus grande que k (ou est infini). Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de la base incomplète.

Correction de l'exercice 1000 ▲

E est engendré par trois vecteurs et F est engendré par deux vecteurs. Donc dim $(E)\leq 3$ et dim $(F)\leq 2$. Clairement e_4 et e_5 ne sont pas liés donc dim $(F)\geq 2$ c'est à dire dim $(F)=2$. Enfin, $\det\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}=-1\neq 0$. La famille $\{e_1,e_2,e_3\}$ est donc libre, soit dim $(E)\geq 3$ i.e. dim $(E)=3$.

$E\cap F\subset F$ donc dim $(E\cap F)\leq 2$. De plus : dim $(E+F)=$ dim $(E)+$dim $(F)-$dim $(E\cap F)$. Comme $E+F\subset\mathbb{R}^4$, on a dim $(E+F)\leq 4$ d'où on tire l'inégalité $1\geq$ dim $(E\cap F)$. Donc soit dim $(E\cap F)=1$ soit dim $(E\cap F)=2$.

Supposons que dim $(E\cap F)$ soit égale à 2. Comme $E\cap F\subset F$ on aurait dans ce cas $E\cap F=F$. En particulier il existerait $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $e_4=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, donc que dim $(E\cap F)$ n'est pas égale à 2.

On peut donc conclure : dim $(E\cap F)=1$ puis dim $(E+F)=4$.

Correction de l'exercice 1008 ▲

1. Par la formule $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$, on sait que $\dim(F+G)\leqslant\dim(F)+\dim(G)$. Pour $F=\mathrm{Im}\,u$ et $G=\mathrm{Im}\,v$ on obtient : $\dim(\mathrm{Im}\,u+\mathrm{Im}\,v)\leqslant\dim\mathrm{Im}\,u+\dim\mathrm{Im}\,v$. Or $\mathrm{Im}\,u+\mathrm{Im}\,v=\mathrm{Im}(u+v)$. Donc $\mathrm{rg}(u+v)\leq\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$.

2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$: $\text{rg}((u+v)+(-v)) \leqslant \text{rg}(u+v)+\text{rg}(-v)$, or $\text{rg}(-v)=\text{rg}(v)$ donc $\text{rg}(u) \leqslant \text{rg}(u+v)+\text{rg}(v)$. Soit $\text{rg}(u)-\text{rg}(v) \leqslant \text{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\text{rg}(u)-\text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v)$.

Correction de l'exercice 1021 ▲

$\text{codim}\, H = 0$: supplémentaire = $\{\vec{0}\}$.

$\text{codim}\, H = p$: Soit $\vec{u} \in E \setminus (H \cup K)$: Alors $H \oplus K\vec{u}$ et $K \oplus K\vec{u}$ ont un supplémentaire commun, L, donc H et K ont un supplémentaire commun : $L \oplus K\vec{u}$.

Correction de l'exercice 1022 ▲

• e_4 et e_5 ne sont clairement pas colinéaires. Donc (e_4,e_5) est une famille libre et $\dim G = \text{rg }(e_4,e_5)=2$. Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2 \leq \dim F \leq 3$. Soit alors $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda+\mu+2\nu=0 & (1) \\ 2\lambda+\mu+\nu=0 & (2) \\ 3\lambda+\mu+\nu=0 & (3) \\ 4\lambda+3\mu+\nu=0 & (4) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=0\ ((3)-(2)) \\ \nu-\lambda=0\ ((1)-(2)) \\ \lambda+\mu+2\nu=0\ (1) \end{array}\right. \Rightarrow \lambda=\mu=\nu=0.$$

On a montré que : $\forall(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=0 \Rightarrow \lambda=\mu=\nu=0)$. (e_1,e_2,e_3) est donc libre et $\dim F = \text{rg }(e_1,e_2,e_3)=3$.
• Comme $F \subset F+G$, $\dim\,(F+G) \geq 3$ ou encore $\dim\,(F+G)=3$ ou 4. De plus :

$$\dim\,(F+G)=3 \Leftrightarrow F=F+G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4,e_5\} \subset F.$$

On cherche alors $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_4=\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3$ ce qui fournit le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda+\mu+2\nu=-1 & (1) \\ 2\lambda+\mu+\nu=0 & (2) \\ 3\lambda+\mu+\nu=-1 & (3) \\ 4\lambda+3\mu+\nu=2 & (4) \end{array}\right. .$$

$(3)-(2)$ fournit $\lambda=-1$ puis $(1)-(2)$ fournit $\nu=-2$ puis (2) fournit $\mu=4$. Maintenant, (4) n'est pas vérifiée car $4\times(-1)+3\times 4-2=6\neq 2$. Le système proposé n'admet pas de solution et donc $e_4 \notin \text{Vect}(e_1,e_2,e_3)=F$. Par suite, $\dim\,(F+G)=4$. Enfin,

$$\dim\,(F\cap G)=\dim F+\dim G-\dim\,(F+G)=3+2-4=1.$$

$$\boxed{\dim(F)=3,\ \dim(G)=2,\ \dim(F+G)=4 \text{ et } \dim(F\cap G)=1.}$$

Correction de l'exercice 1023 ▲

On a $H_1 \subset H_1+H_2$ et donc $\dim\,(H_1+H_2) \geq n-1$ ou encore $\dim\,(H_1+H_2) \in \{n-1,n\}$. Donc

$$\dim\,(H_1\cap H_2)=\dim H_1+\dim H_2-\dim\,(H_1+H_2)=\left\{\begin{array}{l} (n-1)+(n-1)-(n-1)=n-1 \\ \quad\text{ou} \\ (n-1)+(n-1)-n=n-2 \end{array}\right. .$$

Maintenant, si $\dim\,(H_1+H_2)=n-1=\dim H_1=\dim H_2$, alors $H_1=H_1+H_2=H_2$ et donc en particulier, $H_1=H_2$. Réciproquement, si $H_1=H_2$ alors $H_1+H_2=H_1$ et $\dim\,(H_1+H_2)=n-1$. En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, $\dim\,(H_1\cap H_2)=n-2$ et bien sûr, si $H_1=H_2$, alors $\dim\,(H_1\cap H_2)=n-1$. Si $n=2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul. Si $n=3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Correction de l'exercice 1024 ▲

Soit f l'application de $F\times G$ dans E qui à un élément (x,y) de $F\times G$ associe $x+y$.

f est clairement linéaire et d'après le thèorème du rang

$$\dim(F\times G)=\dim(\text{Ker} f)+\dim(\text{Im} f) \text{ avec } \dim(FxG)=\dim F+\dim G \text{ et } \dim(\text{Im} f)=\dim(F+G).$$

Il reste à analyser $\mathrm{Ker} f$.

Soit $(x,y) \in E^2$. (x,y) est élément de $\mathrm{Ker} f$ si et seulement si x est dans F, y est dans G et $x+y=0$ ou encore si et seulement si x et y sont dans $F\cap G$ et $y=-x$. Donc $\mathrm{Ker} f = \{(x,-x),\ x\in F\cap G\}$.

Montrons enfin que $\mathrm{Ker} f$ est isomorphe à $F\cap G$. Soit φ l'application de $F\cap G$ dans $\mathrm{Ker} f$ qui à l'élément x de $F\cap G$ associe $(x,-x)$ dans $\mathrm{Ker} f$. φ est clairement une application linéaire, clairement injective et clairement surjective. Donc φ est un isomorphisme de $F\cap G$ sur $\mathrm{Ker} f$ et en particulier $\dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(F\cap G)$. Finalement

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).}$$

Correction de l'exercice 1025 ▲

$$\begin{aligned}\dim(F+G+H) &= \dim((F+G)+H) = \dim(F+G)+\dim H - \dim((F+G)\cap H)\\ &= \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim((F+G)\cap H).\end{aligned}$$

Maintenant , $F\cap H + G\cap H \subset (F+G)\cap H$ (car si x est dans $F\cap H+G\cap H$ il existe y dans F et dans H et z dans G et dans H tel que $x=y+z$ et x est bien dans $F+G$ et aussi dans H). Donc

$$\begin{aligned}\dim((F+G)\cap H) &\geqslant \dim(F\cap H+G\cap H) = \dim(F\cap H)+\dim(G\cap H)-\dim((F\cap H)\cap(G\cap H))\\ &= \dim(F\cap H)+\dim(G\cap H)-\dim(F\cap G\cap H)\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\dim(F+G+H) \leqslant \dim F+\dim G+\dim H-\dim(F\cap G)-\dim(F\cap H)-\dim(G\cap H)+\dim(F\cap G\cap H).}$$

Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un cas d'inégalité stricte.

Correction de l'exercice 1026 ▲

Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant 2$, $\dim(F_1+\ldots+F_n)\leqslant \dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$.

• Pour $n=2$, $\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1\cap F_2)\leqslant \dim(F_1)+\dim(F_2)$.

• Soit $n\geqslant 2$. Supposons que si $F_1,\ldots,F_n$ sont n sous-espaces de E, $\dim(F_1+\ldots+F_n)\leqslant\dim(F_1)+\dim(F_n)$.

Soient $F_1,\ldots,F_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces de E.

$$\begin{aligned}\dim(F_1+F_2+...+F_{n+1}) &\leqslant \dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1}) \text{ (d'après le cas } n=2)\\ &\leqslant \dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On sait que si la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe, on a $\dim(F_1+\ldots+F_n) = \dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$.

Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant, 2$ $[\dim(F_1+...+F_n) = \dim F_1+...+\dim F_n] \Rightarrow$ la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe].

• Pour n=2 , d'après le 1025, $\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)\Rightarrow \dim(F_1\cap F_2)=0\Rightarrow F_1\cap F_2=\{0\}$.

• Soit $n\geqslant 2$. Soient F_1,...,F_{n+1} $n+1$ sous-espaces de E tels que $\dim(F_1+...+F_{n+1}) = \dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})$.

On sait que

$$\begin{aligned}\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1}) &= \dim(F_1+...+F_{n+1})\\ &= \dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1})\\ &\leqslant \dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}),\end{aligned}$$

et donc $\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1})\leqslant 0$ puis $\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1})=0$. Par suite $(F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}=\{0\}$ et aussi $\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1}) = \dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1})$ et donc $\dim(F_1+...+F_n) = \dim(F_1)+...+\dim(F_n)$.

Mais alors, par hypothèse de récurrence, la somme $F_1+...+F_n$ est directe et si l'on rappelle que $(F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}=\{0\}$, on a montré que la somme $F_1+...+F_{n+1}$ est directe.

Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 1027 ▲

Soit $n\geqslant 3$. Montrons par récurrence que $\forall k\in [\![2,n-1]\!]$, si H_1,..., H_k sont k hyperplans de E, alors $\dim(H_1\cap...\cap H_k)\geqslant n-k$.

• Pour $k=2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

$\dim(H_1\cap H_2)=\dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1+H_2)\geqslant (n-1)+(n-1)-n=n-2$.

• Soit $k\in [\![2,n-3]\!]$. Supposons que la dimension d'une intersection de k hyperplans de E soit supérieure ou égale à $n-k$.

Soient H_1,..., H_k, H_{k+1} $k+1$ hyperplans de E.

$$\dim(H_1\cap...\cap H_k\cap H_{k+1})=\dim(H_1\cap...\cap H_k)+\dim(H_{k+1})-\dim((H_1\cap...\cap H_k)+H_{k+1})\geqslant (n-k)+(n-1)-n=n-(k+1),$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.

Pour $k=n-1$, on obtient en particulier $\dim(H_1\cap...\cap H_{n-1})\geqslant n-(n-1)=1>0$ et donc $H_1\cap...\cap H_{n-1}\neq\{0\}$.

Correction de l'exercice 1028 ▲

Si $m=n$, c'est immédiat.

Supposons $m<n$.

$$\begin{aligned} r=\dim(\text{Vect}(x_1,...,x_n)) &= \dim\left(\text{Vect}(x_1,...,x_m)+\text{Vect}(x_{m+1},...x_n)\right)\\ &\leqslant \dim(\text{Vect}(x_1,...,x_m))+\dim(\text{Vect}(x_{m+1},...,x_n))\\ &\leqslant s+(n-m)\end{aligned}$$

et donc $s\geqslant r+m-n$. On a l'égalité si et seulement si chaque inégalité est une égalité, c'est à dire si et seulement si $\text{Vect}(x_1,...,x_m)\cap \text{Vect}(x_{m+1},...x_n)=\{0\}$ (pour la première) et la famille $(x_{m+1},...,x_n)$ est libre (pour la deuxième).

Correction de l'exercice 1029 ▲

$\text{Im}(f+g)=\{f(x)+g(x),\ x\in E\}\subset\{f(x)+g(x'),\ (x,x')\in E^2\}=\text{Im}f+\text{Im}g$. Donc

$$\text{rg}(f+g)\leqslant \dim(\text{Im}f+\text{Im}g)\leqslant \text{rg}f+\text{rg}g$$

puis $\text{rg}f=\text{rg}((f+g)+(-g))\leqslant \text{rg}(f+g)+\text{rg}(-g)=\text{rg}(f+g)+\text{rg}g$ (car $\text{Im}(-g)=\{-g(x),\ x\in E\}=\{g(-x),\ x\in E\}=\{g(x'),\ x'\in E\}=\text{Im}g$) et donc $\text{rg}(f+g)\geqslant \text{rg}f-\text{rg}g$. De même , en échangeant les rôles de f et g, $\text{rg}(f+g)\geqslant \text{rg}g-\text{rg}f$ et finalement $\text{rg}(f+g)\geqslant |\text{rg}f-\text{rg}g|$.

$$\boxed{\forall (f,g)\in\mathscr{L}(E,F)^2,\ |\text{rg}f-\text{rg}g|\leqslant \text{rg}(f+g)\leqslant \text{rg}f+\text{rg}g.}$$

Correction de l'exercice 1030 ▲

$\text{Im}(g\circ f)=g(f(E))\subset g(F)$ fournit $\text{rg}(gof)\leqslant \text{rg}g$.

Soit $g'=g_{/f(E)}$. D'après le théorème du rang, on a

$$\text{rg}f=\dim(f(E))=\dim\text{Ker}g'+\dim\text{Im}g'\geqslant \dim\text{Im}g')=\text{rg}(g\circ f)$$

et donc $\text{rg}(g\circ f)\leqslant \text{Min}\{\text{rg}f,\text{rg}g\}$.

A partir du théorème du rang, on voit que l'inégalité $\text{rg}f+\text{rg}g-\dim F\leqslant \text{rg}(g\circ f)$ est équivalente à l'inégalité $\dim(\text{Ker}(g\circ f))\leqslant \dim\text{Ker}f+\dim\text{Ker}g$.

Soit $f'=f_{/\text{Ker}(g\circ f)}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(g\circ f))=\dim\text{Ker}f'+\dim\text{Im}f'$. Mais $\text{Ker}f'\subset\text{Ker}f$ puis $\text{Im}f'=\{f(x)/\ x\in E \text{ et } g(f(x))=0\}\subset\{y\in F/\ g(y)=0\}=\text{Ker}g$ et finalement $\dim\text{Ker}(g\circ f)\leqslant \dim\text{Ker}f+\dim\text{Ker}g$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G),\ \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g - \dim F \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g\}.}$$

Correction de l'exercice 1033 ▲

1. $f_1, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ sont linéaires.
2. f_2 n'est pas linéaire, en effet par exemple $f(1,1,0) + f(1,1,0)$ n'est pas égal à $f(2,2,0)$.

Correction de l'exercice 1034 ▲

Montrons que la famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x) = 0$. Alors : $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x)) = 0$. Mais comme de plus $\varphi^n = 0$, on a l'égalité $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x)) = \varphi^{n-1}(\lambda_0 x) + \varphi^n(\lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-2}(x)) = \lambda_0 \varphi^{n-1}(x)$. Comme $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.

En calculant ensuite $\varphi^{n-2}(\lambda_1 \varphi(x) + \dots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0$. La famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. Elle compte n vecteurs. Comme $\dim(E) = n$ elle est libre maximale et forme donc une base de E.

Correction de l'exercice 1040 ▲

3. $|a| \neq |b|$.

Correction de l'exercice 1041 ▲

1. Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f((x,y,z)) = xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) = x(1,1) + y(0,1) + z(-1,1) = (x-z, x+y+z).$$

On en déduit l'unicité de f.
Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire. Soient $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x-z, x+y+z) + \mu(x'-z', x'+y'+z') \\ &= \lambda f((x,y,z)) + \mu f((x',y',z')). \end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f. On a alors $f((3,-1,4)) = (3-4, 3-1+4) = (-1,6)$.
Remarque. La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car le cours donne l'expression générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2. Détermination de $\mathrm{Ker} f$.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f((x,y,z)) = (0,0) \Leftrightarrow (x-z, x+y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=x \\ y=-2x \end{array} \right.$$

Donc, $\mathrm{Ker} f = \{(x,-2x,x),\ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,1),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$. La famille $((1,-2,1))$ engendre $\mathrm{Ker} f$ et est libre. Donc, la famille $((1,-2,1))$ est une base de $\mathrm{Ker} f$. Détermination de $\mathrm{Im} f$.
Soit $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x',y') \in \mathrm{Im} f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ f((x,y,z)) = (x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} x-z=x' \\ x+y+z=y' \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \text{le système d'inconnue } (x,y,z) : \left\{ \begin{array}{l} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{array} \right. \text{ a au moins une solution.} \end{aligned}$$

Or, le triplet $(0, x'+y', -x')$ est solution et le système proposé admet une solution. Par suite, tout (x',y') de $\mathbb{R}^2$ est dans $\mathrm{Im} f$ et finalement, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Détermination d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$.
Posons $e_1 = (1,-2,1)$, $e_2 = (1,0,0)$ et $e_3 = (0,1,0)$ puis $F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ et montrons que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus F$.
Tout d'abord, $\mathrm{Ker} f \cap F = \{0\}$. En effet :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \cap F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z) = ae_1 = be_2 + ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} x = a = b \\ y = -2a = c \\ z = a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z = 0\end{aligned}$$

Vérifions ensuite que $\mathrm{Ker} f + F = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f + F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z) = ae_1 + be_2 + ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} a + b = x \\ -2a + c = y \\ a = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} a = z \\ b = x - z \\ c = y + 2z \end{array} \right.\end{aligned}$$

Le système précédent (d'inconnue (a,b,c)) admet donc toujours une solution et on a montré que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f + F$.
Finalement, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus F$ et F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$.
Vérifions enfin que F est isomorphe à $\mathrm{Im} f$. Mais, $F = \{(x,y,0), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,0) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ est clairement un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im} f (= \mathbb{R}^2)$.

Correction de l'exercice 1042 ▲

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(P,Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda (P(X+1) - P(X)) + \mu (Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q).\end{aligned}$$

   φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.
2. Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker}\ \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $P(0) = P(1) = P(2) = ...$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\mathrm{Ker}\ \varphi$ et donc

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

   Pour déterminer $\mathrm{Im}\ \varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

   Donc, $\mathrm{Im}\ (\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\ (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathrm{Ker}\ (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

   et donc $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Correction de l'exercice 1043 ▲

Soient $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda (z + a\bar{z}) + \mu (z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a-|a|^2)$ et que $if(a) = i(a+|a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, Ker $f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, Im $f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha+\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, Ker $f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, Im f est une droite vectorielle et pour déterminer Im f, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, Im $f = \text{Vect}(1+a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im }(z)$ et Im $f = i\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1044 ▲

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x,y)) = (x',y')$.
$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 / \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{cases}.$$
2. Avec les notations précédentes,
$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = (\alpha\frac{z+\bar{z}}{2} + \gamma\frac{z-\bar{z}}{2i}) + i(\beta\frac{z+\bar{z}}{2} + \delta\frac{z-\bar{z}}{2i}) \\ &= \left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$
où $a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}$ et $b = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$.
3. Réciproquement, si $z' = az + b\bar{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :
$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x+iy) + (b_1 + ib_2)(x-iy) = (a_1+b_1)x + (-a_2+b_2)y + i((a_2+b_2)x + (a_1-b_1)y)$$
et donc,
$$\begin{cases} x' = (a_1+b_1)x + (b_2-a_2)y \\ y' = (a_2+b_2)x + (a_1-b_1)y \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 1048 ▲

1. ...
2. Par définition de f et ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est
$$\operatorname{Im} f = E_1 + E_2.$$
Pour le noyau :
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2) = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\} \end{aligned}$$
Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2) \in \operatorname{Ker} f$, vérifie $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in E_2$. Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $(x,-x) \in \operatorname{Ker} f$. Donc
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,-x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$
De plus par l'application $x \mapsto (x,-x)$, $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.
3. Le théorème du rang s'écrit :
$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$
Compte tenu de l'isomorphisme entre $\operatorname{Ker} f$ et $E_1 \cap E_2$ on obtient :
$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$
Mais $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle quelques fois le théorème des quatre dimensions :
$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Correction de l'exercice 1055 ▲

Montrons ceci par récurence : Pour $n = 1$, l'assertion est triviale : $x \notin \ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. Supposons que si $x \notin \ker\varphi$ alors $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, $(n \geqslant 2)$. Fixons $x \notin \ker\varphi$, Alors par hypothèses de récurrence $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, mais $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x)) \in \operatorname{Im}\varphi$ donc $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker\varphi$ grâce à l'hypothèse sur φ. Ainsi $\varphi(\varphi^{n-1}(x)) \neq 0$, soit $\varphi^n(x) \neq 0$. Ce qui termine la récurrence.

Correction de l'exercice 1057 ▲

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\ker f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraine $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim\ker f + \operatorname{rg} f = n$, mais $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg} f = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg} f = n$ alors par la formule Du rang $\dim\ker f = \operatorname{rg} f$ c'est-à-dire $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même de dimension donc sont égaux : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 1061 ▲

On va montrer $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $y \in g(\operatorname{Ker} f)$. Il existe $x \in \operatorname{Ker} f$ tel que $y = g(x)$. Montrons $y \in \operatorname{Ker} f$:

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

On fait un raisonnement similaire pour l'image.

Correction de l'exercice 1063 ▲

Pour montrer l'égalité $\ker f \cap \operatorname{Im} f = f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.

Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(y) = 0$ et il existe x tel que $y = f(x)$. De plus $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \ker f^2$. Comme $y = f(x)$ alors $y \in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker f^2)$.

Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2) \subset f(E) = \operatorname{Im} f$. De plus $f(\ker f^2) \subset \ker f$, car si $y \in f(\ker f^2)$ il existe $x \in \ker f^2$ tel que $y = f(x)$, et $f^2(x) = 0$ implique $f(y) = 0$ donc $y \in \ker f$. Par conséquent $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 1065 ▲

1. Par exemple $f(x,y) = (0,x)$ alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. Par exemple l'identité : $f(x,y) = (x,y)$. En fait un petit exercice est de montrer que les seules applications possibles sont les applications bijectives (c'est très particulier aux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
3. L'application nulle : $f(x,y) = (0,0)$. Exercice : c'est la seule possible !

Correction de l'exercice 1068 ▲

1. Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in E$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule

   $$\phi(x) = \alpha_1\phi(e_1) + \alpha_2\phi(e_2) + \alpha_3\phi(e_3).$$

   Soit ici :

   $$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda\alpha_3 e_3.$$

   Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus !).
2. On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :

   $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \lambda\alpha_3 = 0.$$

   Si $\lambda \neq 0$ alors en resolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.

   Si $\lambda = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en resolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.

3. On peut soit faire des calcul soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\operatorname{Im}\phi$ est égal à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \operatorname{Im}\phi$:
$$\dim \operatorname{Ker}\phi + \dim \operatorname{Im}\phi = \dim E.$$
Si $\lambda \neq 0$, ϕ est injective donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim \operatorname{Im}\phi = 3$ et ϕ est surjective.
Si $\lambda = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\operatorname{Ker}\phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.
On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Correction de l'exercice 1070 ▲

1. f_1 est linéaire. Elle est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si $a \neq -2$.
2. f_2 n'est pas linéaire.
3. f_3 est linéaire. Elle est injective. Elle est surjective ssi $a = 0$ (si $a \neq 0$ alors on ne peut pas atteindre la polynôme constant égale à 1 par exemple).
4. f_4 est linéaire. Elle n'est pas injective ($f_4(1) = 0$) et est surjective.
5. f_5 est linéaire. f_5 est surjective mais pas injective.
6. f_6 est linéaire. f_6 n'est pas injective ($f_6(X-2) = 0$). f_6 est surjective.

Correction de l'exercice 1073 ▲

1. Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors la divison euclidienne de AP par B s'écrit $AP = Q.B + R$, donc en multipliant par λ on obtient : $A.(\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$. ce qui est la division euclidienne de $A.(\lambda P)$ par B, donc si $f(P) = R$ alors $f(\lambda P) = \lambda R$. Donc $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
Soient $P, P' \in E$. On écrit les division euclidienne :
$$AP = Q.B + R, \quad AP' = Q'.B + R'.$$
En additionnant :
$$A(P + P') = (Q + Q')B + (R + R')$$
qui est la division euclidienne de $A(P+P')$ par B. Donc si $f(P) = R$, $f(P') = R'$ alors $f(P+P') = R + R' = f(P) + f(P')$. Donc f est linéaire.
2. Sens $\Rightarrow$. Supposons f est bijective, donc en particulier f est surjective, en particulier il existe $P \in E$ tel que $f(P) = 1$ (1 est le polynôme constant égale à 1). La division euclidienne est donc $AP = BQ + 1$, autrement dit $AP - BQ = 1$. Par le théorème de Bézout, A et B sont premier entre eux.
3. Sens $\Leftarrow$. Supposons A, B premiers entre eux. Montrons que f est injective. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. Donc la division euclidienne s'écrit : $AP = BQ + 0$. Donc B divise AP. Comme A et B sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, alors B divise P. Or B est de degré $n+1$ et P de degré moins que n, donc la seule solution est $P = 0$. Donc f est injective. Comme $f : E \longrightarrow E$ et E est de dimension finie, alors f est bijective.

Correction de l'exercice 1077 ▲

1. Montrons que si φ est un isomorphisme, l'image de toute base de E est une base de F : soit $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et nommons $\mathscr{B}'$ la famille $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$.
   (a) $\mathscr{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$. Alors $\varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme φ est injective, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ puis, comme $\mathscr{B}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathscr{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Comme $\mathscr{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $y = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$.
2. Supposons que l'image par φ de toute base de E soit une base F. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ la base $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$.
   (a) Im (φ) contient $\mathscr{B}'$ qui est une partie génératrice de F. Donc φ est surjective.
   (b) Soit maintenant $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$. Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $\varphi(x) = 0 = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$ donc puisque $\mathscr{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\varphi(x) = 0$ alors $x = 0$: φ est injective.

Correction de l'exercice 1087 ▲

1. $\vec{u} = (\vec{u} - g \circ f(\vec{u})) + g \circ f(\vec{u})$.
2. $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.
   $f = (f \circ g) \circ f \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f \circ g) = f(\operatorname{Im} g)$.

Correction de l'exercice 1090 ▲

1. $\varphi(v \circ w) = \varphi(v) \circ w + v \circ \varphi(w)$.
2. Par récurrence $\varphi^n(v \circ w) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^k(v) \circ \varphi^{n-k}(w)$ donc si $v \in c_p$ et $w \in c_q$ alors $v \circ w \in c_{p+q-1}$.

Correction de l'exercice 1096 ▲

2. $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}_F\} \\ \operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}_F\} \\ \forall\, \vec{x}, \vec{y},\ \exists\, \vec{z} \text{ tq } f(\vec{x}) + g(\vec{y}) = (f+g)(\vec{z}). \end{cases}$

$\Rightarrow$: Donc $f(\vec{x} - \vec{z}) = g(\vec{z} - \vec{y}) = \vec{0}$. Pour $\vec{y} = \vec{0}$: $\vec{x} = (\vec{x} - \vec{z}) + \vec{z} \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

$\Leftarrow$: Soient $\vec{x} = \vec{x}_f + \vec{x}_g$ et $\vec{y} = \vec{y}_f + \vec{y}_g$: Alors $f(\vec{x}) + g(\vec{y}) = f(\vec{x}_g) + g(\vec{y}_f) = (f+g)(\vec{x}_g + \vec{y}_f)$.

Correction de l'exercice 1099 ▲

$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq \dim E$.

$f+g$ est surjective $\Rightarrow \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geq \dim E$.

Correction de l'exercice 1100 ▲

1. $\dim H + \dim K = \dim E$.
2. Si $H \oplus K \neq E$ alors $\mathscr{E}$ n'est pas stable pour $\circ$.

Correction de l'exercice 1103 ▲

3. $\dim \mathscr{K} = (\dim E)(\dim \operatorname{Ker} f) = \dim \mathscr{I}, \quad \dim(\mathscr{K} \cap \mathscr{I}) = (\operatorname{rg} f)^2$.

Correction de l'exercice 1104 ▲

$(\operatorname{rg} u)(\operatorname{rg} v)$.

Correction de l'exercice 1106 ▲

1. On a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
   En effet, si x est un vecteur de $\operatorname{Ker} f$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (car f est linéaire) et x est dans $\operatorname{Ker} f^2$.
   Montrons alors que : $[\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}]$. Supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et montrons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors, d'une part f(x) = 0 et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais alors, $f^2(y) = f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. Donc, $x = f(y) = 0$. On a montré que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Supposons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ et montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Alors $f(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Donc, $f(x) = 0$ et x est dans $\operatorname{Ker} f$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ et, puisque l'on a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, on a finalement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. On a montré que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

On a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$. En effet : $y \in \mathrm{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^2(x) = f(f(x)) \Rightarrow y \in \mathrm{Im} f$.

Supposons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ et montrons que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$. Soit $x \in E$. Puisque $f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$, il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$. Soit alors $z = f(t)$ et $y = x - f(t)$. On a bien $x = y + z$ et $z \in \mathrm{Im} f$. De plus, $f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$ et y est bien élément de $\mathrm{Ker} f$. On a donc montré que $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$.

Supposons que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$ et montrons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

Soit $x \in E$. Il existe $(y,z) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im} f$ tel que $x = y + z$. Mais alors $f(x) = f(z) \in \mathrm{Im} f^2$ car z est dans $\mathrm{Im} f$. Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ est dans $\mathrm{Im} f^2$ ce qui montre que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ et comme on a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$, on a montré que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. $Id - p$ projecteur $\Leftrightarrow (Id-p)^2 = Id - p \Leftrightarrow Id - 2p + p^2 = Id - p \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow p$ projecteur.

   Soit x un élément de E. $x \in \mathrm{Im} p \Rightarrow \exists y \in E/\ x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc, $\forall x \in E$, $(x \in \mathrm{Im} p \Rightarrow p(x) = x)$.

   Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\mathrm{Im} p$.

   Finalement, pour tout vecteur x de E, $x \in \mathrm{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (Id - p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(Id - p)$. On a montré que $\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}(Id - p)$.

   En appliquant ce qui précède à $Id - p$ qui est également un projecteur, on obtient $\mathrm{Im}(Id - p) = \mathrm{Ker}(Id - (Id - p)) = \mathrm{Ker} p$.

   Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} p^2$ et $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} p^2$, le 1) montre que $E = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p$.

3.
$$\begin{aligned}
p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p &\Leftrightarrow p \circ (Id - q) = 0 \text{ et } q \circ (Id - p) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Id - q) \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Im}(Id - p) \subset \mathrm{Ker} q \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker} q \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Ker} p \subset \mathrm{Ker} q \text{ (d'après 2))} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} q.
\end{aligned}$$

4. $p \circ q + q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = (p \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p)$ et de même, $q \circ p = q \circ p \circ p = -p \circ q \circ p$. En particulier, $p \circ q = q \circ p$ et donc $0 = p \circ q + q \circ p = 2p \circ q = 2q \circ p$ puis $p \circ q = q \circ p = 0$.

   La réciproque est immédiate.

   $p + q$ projecteur $\Leftrightarrow (p+q)^2 = p + q \Leftrightarrow p^2 + pq + qp + q^2 = p + q \Leftrightarrow pq + qp = 0 \Leftrightarrow pq = qp = 0$ (d'après ci-dessus). Ensuite, $\mathrm{Im}(p+q) = \{p(x) + q(x),\ x \in E\} \subset \{p(x) + q(y),\ (x,y) \in E^2\} = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$.

   Réciproquement, soit z un élément de $\mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z = p(x) + q(y)$. Mais alors, $p(z) = p^2(x) + pq(y) = p(x)$ et $q(z) = qp(x) + q^2(y) = q(y)$ et donc
$$z = p(x) + p(y) = p(z) + q(z) = (p+q)(z) \in \mathrm{Im}(p+q).$$
   Donc, $\mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et finalement, $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$.

   $\mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q = \{x \in E/\ p(x) = q(x) = 0\} \subset \{x \in E/\ p(x) + q(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(p+q)$.

   Réciproquement, si x est élément de $\mathrm{Ker}(p+q)$ alors $p(x) + q(x) = 0$. Par suite, $p(x) = p^2(x) + pq(x) = p(p(x) + q(x)) = p(0) = 0$ et $q(x) = qp(x) + q^2(x) = q(0) = 0$. Donc, $p(x) = q(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$. Finalement, $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$.

Correction de l'exercice 1107 ▲

1. $\Leftarrow$ Soit $(u,v)((\mathscr{L}(E))^2$. On suppose qu'il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = w \circ v$. Soit x un élément de $\mathrm{Ker} v$. Alors $v(x) = 0$ et donc $u(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$. Mais alors, x est dans $\mathrm{Ker} u$. Donc $\mathrm{Ker} v \subset Ker u$.

   $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} u$. On cherche à définir w, élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $w \circ v = u$. Il faut définir précisément w sur $\mathrm{Im} v$ car sur $E \setminus \mathrm{Im} v$, on a aucune autre contrainte que la linéarité.

   Soit y un élément de $\mathrm{Im} v$. (Il existe x élément de E tel que $y = v(x)$. On a alors envie de poser $w(y) = u(x)$ mais le problème est que y, élément de $\mathrm{Im} v$ donné peut avoir plusieurs antécédents x, x'... et on peut avoir $u(x) \neq u(x')$ de sorte que l'on n'aurait même pas défini une application w.)

   Soient x et x' deux éléments de E tels que $v(x) = v(x') = y$ alors $v(x - x') = 0$ et donc $x - x' \in \mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} u$. Par suite, $u(x - x') = 0$ ou encore $u(x) = u(x')$. En résumé, pour y élément donné de $\mathrm{Im} v$, il existe x élément de E tel que $v(x) = y$. On pose alors $w(y) = u(x)$ en notant que $w(y)$ est bien uniquement défini, car ne dépend pas du choix de l'antécédent x de y par v. w n'est pas encore défini sur E tout entier. Notons F un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Im} v$ dans E (l'existence de F est admise).

   Soit X un élément de E. Il existe deux vecteurs y et z, de $\mathrm{Im} v$ et F respectivement, tels que $X = y + z$. On pose alors $w(X) = u(x)$ où x est un antécédent quelconque de y par v (on a pris pour restriction de w à F l'application nulle). w ainsi définie est une application de E dans E car, pour X donné y est uniquement défini puis $u(x)$ est uniquement défini (mais pas nécessairement x).

   Soit x un élément de E et $y = v(x)$. $w(v(x)) = w(y) = w(y + 0) = u(x)$ (car 1)y est dans $\mathrm{Im} v$ 2)0 est dans F 3) x est un antécédent de y par v) et donc $w \circ v = u$.

   Montrons que w est linéaire. Soient, avec les notations précédentes, $X_1 = y_1 + z_1$ et $X_2 = y_2 + z_2$ ...

$$\begin{aligned} w(X_1+X_2) &= w((y_1+y_2)+(z_1+z_2)) = u(x_1+x_2) \quad (\text{car } y_1+y_2 = v(x_1)+v(x_2) = v(x_1+x2)) \\ &= u(x_1)+u(x_2) = w(X_1)+w(X_2) \end{aligned}$$

et

$$w(\lambda X) = w(\lambda y+\lambda z) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda w(X).$$

2. On applique 1) à $u = Id$.

$$v \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}v = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}v = \text{Ker}Id \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ w\circ v = Id.$$

Correction de l'exercice 1108 ▲

1. $\forall P \in E$, $f(P) = P'$ est un polynôme et donc f est une application de E vers E.
$\forall (P,Q) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)' = \lambda P'+\mu Q' = \lambda f(P)+\mu f(Q)$ et f est un endomorphisme de E.
Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}f \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant. $\text{Ker}f$ n'est pas nul et f n'est pas injective.
Soient $Q \in E$ puis P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt$. P est bien un polynôme tel que $f(P) = Q$. f est surjective.
Soit $F = \{P \in E/\ P(0) = 0\}$. F est un sous espace de E en tant que noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$. $\text{Ker}f \cap F = \{0\}$ car si un polynôme est constant et s'annule en 0, ce polynôme est nul. Enfin, si P est un polynôme quelconque, $P = P(0)+(P-P(0))$ et P s'écrit bien comme la somme d'un polynôme constant et d'un polynôme s'annulant en 0. Finalement $E = \text{Ker}f \oplus F$.
2. On montre facilement que g est un endomorphisme de E.
$P \in \text{Ker}g \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x P(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$ (en dérivant). Donc, $\text{Ker}g = \{0\}$ et donc g est injective.
Si P est dans $\text{Im}g$ alors $P(0) = 0$ ce qui montre que g n'est pas surjective. De plus, si $P(0) = 0$ alors $\int_0^x P'(t)\,dt = P(x)-P(0) = P(x)$ ce qui montre que $P = g(P')$ est dans $\text{Im}g$ et donc que $\text{Im}g = \{P \in E/\ P(0) = 0\}$.

Correction de l'exercice 1109 ▲

Soit $u = (x,y,z,t) = xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u) &= xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4) = x(2e_1+e_3)+y(-e_2+e_4)+z(e_1+2e_3)+t(e_2-e_4) \\ &= (2x+z)e_1+(-y+t)e_2+(x+2z)e_3+(y-t)e_4. \end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+z=0 \\ -y+t=0 \\ x+2z=0 \\ y-t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z=0 \\ y=t \end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker } f = \{(0,y,0,y),\ y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0,1,0,1))$.

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}((0,1,0,1)).}$$

Soit $u' = (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u' = (x',y',z',t') \in \text{Im } f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/ \left\{\begin{array}{l} 2x+z=x' \\ -y+t=y' \\ x+2z=z' \\ y-t=t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/ \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}(2x'-z') \\ z=\frac{1}{3}(-x'+2z') \\ t=y+y' \\ y'+t'=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow y'=-t' \end{aligned}$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{3}(2x'-z'),0,\frac{1}{3}(-x'+2z'),y'\right)$). Donc, $\text{Im } f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/\ y+t=0\} = \{(x,y,z,-y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1+y(e_2-e_4)+ze_3,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}(e_1,e_2-e_4,e_3)$.

$$\boxed{\text{Im } f == \{(x,y,z,-y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).}$$

Autre solution pour la détermination de Im f. Im $f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$. Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, dim (Im f) $= 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de Im f.

Correction de l'exercice 1110 ▲

Par définition, rg $(u+v) =$ dim (Im $(u+v)$).

$$\text{Im } (u+v) = \{u(x) + v(x),\ x \in E\} \subset \{u(x) + v(y),\ (x,y) \in E^2\} = \text{Im } u + \text{Im } v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim\ (\text{Im } (u+v)) \\ &\leq \dim\ (\text{Im } u + \text{Im } v) = \dim\ (\text{Im } u) + \dim\ (\text{Im } v) - \dim\ (\text{Im } u \cap \text{ Im} v) \\ &\leq \dim\ (\text{Im } u) + \dim\ (\text{Im } v) = \text{rg } u + \text{rg } v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ \text{rg } (u+v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.}$$

Ensuite,

$$\text{rg } u = \text{rg } (u + v - v) \leq \text{rg } (u+v) + \text{rg } (-v) = \text{rg } (u+v) + \text{rg } v,$$

(il est clair que Im $(-v) =$ Im v) et donc rg $u -$ rg $v \leq$ rg $(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi rg $v -$ rg $u =$ rg $(u+v)$ et finalement

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ |\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg } (u+v).}$$

Correction de l'exercice 1111 ▲

1. • **(1)⇒(2).** Si Ker $f =$ Im f, alors pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans Im $f =$ Ker f et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim$ (Ker f) + rg $f = 2$ rg f ce qui montre que n est nécessairement pair et que rg $f = \frac{n}{2}$. • **(2)⇒(3).** Si $f^2 = 0$ et $n = 2$ rg f $(\in 2\mathbb{N})$, cherchons un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = Id_E$. Posons $r =$ rg f et donc $n = 2r$, puis $F =$ Ker $f =$ Im f (dim $F = r$).
   Soit G un supplémentaire de F dans E (dim $G = r$). Soit $(e'_1, ..., e'_r)$ une base de G. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $e_i = f(e'_i)$. Montrons que la famille $(e_1, ..., e_r)$ est libre. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.
   $$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^r \lambda e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i e'_i \in \text{Ker } f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., r\},\ \lambda_i = 0,$$
   car la famille $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre. $(e_1, ..., e_r)$ est une famille libre de $F =$ Im f de cardinal r et donc une base de $F =$ Ker $f =$ Im f. Au passage, puisque $E = F \oplus G$, $(e_1, ..., e_r, e'_1, ..., e'_r)$ est une base de E. Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ g(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $[\![1, r]\!]$, on a alors :
   $$(f \circ g + g \circ f)(e_i) = f(e'_i) + g(0) = e_i + 0 = e_i,$$
   et
   $$(f \circ g + g \circ f)(e'_i) = f(e_i) + g(e_i) = 0 + e'_i = e'_i.$$
   Ainsi, les endomorphismes $f \circ g + g \circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E et donc $f \circ g + g \circ f = Id_E$. • **(3)⇒(1).** Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = Id_E$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà Im $f \subset$ Ker f. D'autre part, si x est un élément de Ker f, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in$ Im f et on a aussi Ker $f \subset$ Im f. Finalement, Ker $f =$ Im f.

2. L'existence d'une base $(e_1,...,e_p,e'_1,...,e'_p)$ de E vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec $p=r=\text{rg } f$).

Correction de **l'exercice 1112 ▲**

1. Soient k un entier naturel et x un élément de E.

$$x\in N_k \Rightarrow f^k(x)=0 \Rightarrow f(f^k(x))=f(0)=0 \Rightarrow f^{k+1}(x)=0 \Rightarrow x\in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k\in\mathbb{N},\ N_k\subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x\in I_{k+1} \Rightarrow \exists y\in E/\ x=f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z(=f(y))\in E/\ x=f^k(z)\Rightarrow x\in I_k.$$

On a montré que : $\forall k\in\mathbb{N},\ I_{k+1}\subset I_k$.

2. (a) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k=N_{k+1}$.
On a déjà $N_{k+1}\subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2}\subset N_{k+1}$.
Soit x un élément de E.

$$\begin{aligned}x\in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x)=0\Rightarrow f^{k+1}(f(x))=0\Rightarrow f(x)\in N_{k+1}=N_k\Rightarrow f^k(f(x))=0\\ &\Rightarrow f^{k+1}(x)=0\Rightarrow x\in N_{k+1}.\end{aligned}$$

(b) On a $\{0\}=N_0\subset N_1\subset N_2...$ Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors, $0=\dim N_0<\dim N_1<\dim N_2...$ Donc $\dim N_1\geq 1$, $\dim N_2\geq 2$ et par une récurrence facile, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dim N_k\geq k$. En particulier, $\dim N_{n+1}\geq n+1>n=\dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k=N_{k+1}$.
Soit p le plus petit de ces entiers k (l'existence de p est démontrée proprement de la façon suivante : si $K=\in\{k\in\mathbb{N}/\ N_k=N_{k+1}\}$, K est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément). On note que puisque f est non injectif, $\{0\}=N_0\underset{\neq}{\subset}N_1$ et donc $p\in\mathbb{N}^*$. Par définition de p, pour $k<p$, $N_k\underset{\neq}{\subset}N_{k+1}$ et, d'après le a) et puisque $N_p=N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k=p$, on a $N_k=N_p$.

(c) $0<\dim N_1<...<\dim N_p$ montre que pour $k\leq p$, on a $\dim N_k=k$ et en particulier $p\leq\dim N_p=n$.

3. Puisque $N_k\subset N_{k+1}$, $I_{k+1}\subset I_k$ et que $\dim E<+\infty$, on a :

$$N_k=N_{k+1}\Leftrightarrow \dim N_k=\dim N_{k+1}\Leftrightarrow n-\text{rg }(f^k)=n-\text{rg }(f^{k+1})\Leftrightarrow \dim\,(I_k)=\dim\,(I_{k+1})\Leftrightarrow I_k=I_{k+1}.$$

Donc, pour $k<p$, $I_k\underset{neq}{\subset}I_{k+1}$ et pour $k=p$, $I_k=I_{k+1}$.

4. Soit $x\in I_p\cap N_p$. Alors, $f^p(x)=0$ et $\exists y\in E/\ x=f^p(y)$. D'où, $f^{2p}(y)=0$ et $y\in N_{2p}=N_p$ (puisque $2p\geq p$) et donc $x=f^p(y)=0$. On a montré que $I_p\cap N_p=\{0\}$. Maintenant, le théorème du rang montre que $E=\dim\,(I_p)+\dim\,(N_p)$ et donc $E=I_p\oplus N_p$.
Posons $f_{/I_p}=f'$. f' est déjà un endomorphisme de I_p car $f'(I_p)=f(I_p)=I_{p+1}=I_p$.
Soit alors $x\in I_p$. $\exists y\in E/\ x=f^p(y)$.

$$x\in\text{Ker } f'\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow f(f^p(y))=0\Rightarrow y\in N_{p+1}=N_px=f_p(y)=0.$$

Donc $\text{Ker } f'=\{0\}$ et donc, puisque $\dim I_p<+\infty$, $f'\in\mathscr{GL}(I_p)$.

5. Soient k un entier naturel et g_k la restriction de f à I_k.
D'après le théorème du rang, $d_k=\dim\,(I_k)=\dim\,(\text{Ker } g_k)+\dim\,(\text{Im } g_k)$. Maintenant, $\text{Im } g_k=g_k(I_k)=f(I_k)=I_{k+1}$ et donc $\dim\,(\text{Im } g_k)=d_{k+1}$. D'autre part, $\text{Ker } g_k=\text{Ker } f_{/I_k}=\text{Ker } f\cap I_k$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, $d_k-d_{k+1}=\dim\,(\text{Ker } f\cap I_k)$. Puisque la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim\,(\text{Ker } f\cap I_k))_{k\in\mathbb{N}}=(d_k-d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction de **l'exercice 1113 ▲**

Soit $x\in E$.

$$x\in\text{Ker }(f-2Id)\cap\text{Ker }(f-3Id)\Rightarrow f(x)=2x \text{ et } f(x)=3x\Rightarrow 3x-2x=f(x)-f(x)=0\Rightarrow x=0.$$

Donc, $\text{Ker }(f-2Id)\cap\text{Ker }(f-3Id)=\{0\}$ (même si $f^2-5f+6Id\neq 0$).

Soit $x\in E$. On cherche y et z tels que $y\in\text{Ker }(f-2Id)$, $z\in\text{Ker }(f-3Id)$ et $x=y+z$.

Si y et z existent, y et z sont solution du système $\left\{\begin{array}{l}y+z=x\\ 2y+3z=f(x)\end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l}y=3x-f(x)\\ z=f(x)-2x\end{array}\right.$.

Réciproquement . Soient $x \in E$ puis $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.

On a bien $y + z = x$ puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6Id) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et $y \in \text{Ker } (f - 2Id)$. De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et $z \in \text{Ker } (f - 3Id)$. On a montré que $E = \text{Ker } (f - 2Id) + \text{Ker } (f - 3d)$, et finalement que

$$E = \text{Ker } (f - 2Id) \oplus \text{Ker } (f - 3d).$$

Correction de l'exercice 1114 ▲

Une condition nécessaire est bien sur $\dim F + \dim G = \dim E$ (et non pas $F \oplus G = E$).

Montrons que cette condition est suffisante. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $\dim F + \dim G = \dim E$.

Soit F' un supplémentaire de F dans E (F' existe car E est de dimension finie).

Si $G = \{0\}$ (et donc $F = E$), $f = 0$ convient.

Si $G \neq \{0\}$, il existe un isomorphisme φ de F' sur G (car F' et G ont même dimension finie) puis il existe un unique endomorphisme de E vérifiant : $f_{/F} = 0_{/F}$ et $f_{/F'} = \varphi$.

Mais alors $\text{Im} f = f(F \oplus F') = f(F) + f(F') = \{0\} + G = G$ puis $F \subset \text{Ker} f$ et pour des raisons de dimension, $F = \text{Ker} f$.

Correction de l'exercice 1115 ▲

1. $\Leftarrow$/ Si $f = 0$, f n'est pas injective (car $E \neq \{0\}$).
   Si $f \neq 0$ et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $f \circ g = 0$ alors il existe un vecteur x de E tel que $g(x) \neq 0$ et $f(g(x)) = 0$. Par suite $\text{Ker} f \neq \{0\}$ et f n'est pas injective.
   $\Rightarrow$/ Supposons f non injective et non nulle. Soient $F = \text{Ker} f$ et G un supplémentaire quelconque de F dans E. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
   Puisque $F = \text{Ker} f$, on a $f \circ p = 0$ et puisque f n'est pas nul, F est distinct de E et donc G n'est pas nul (E étant de dimension finie) ou encore p n'est pas nul. f est donc diviseur de zéro à gauche.
2. $\Leftarrow$/ Si $f = 0$, f n'est pas surjective.
   Si f n'est pas nul et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $g \circ f = 0$ alors f ne peut être surjective car sinon $g(E) = g(f(E)) = \{0\}$ contredisant $g \neq 0$.
   $\Rightarrow$/ Supposons f non surjective et non nulle.
   Soient $G = \text{Im} f$ et F un supplémentaire quelconque de G dans E puis p la projection sur F parallèlement à G. F et G sont non nuls et distincts de E et donc p n'est pas nulle et vérifie $p \circ f = 0$. f est donc diviseur de zéro à droite.

Correction de l'exercice 1116 ▲

1. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. $x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}.}$$

   Soient $k \in \mathbb{N}$ et $y \in I_{k+1} \Rightarrow \exists x \in E /\ y = f^{k+1}(x) \Rightarrow \exists x \in E /\ y = f^k(f(x)) \Rightarrow y \in I_k$.

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k.}$$

   (b) Soit $x \in N$. Il existe un entier k tel que x est dans N_k ou encore tel que $f^k(x) = 0$. Mais alors $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = 0$ et $f(x)$ est dans N_k et donc dans N. Ainsi, N est stable par f.
   Soit $y \in I$. Alors, pour tout naturel k, il existe $x_k \in E$ tel que $y = f^k(x_k)$. Mais alors, pour tout entier k, $f(y) = f(f^k(x_k)) = f^k(f(x))$ est dans I_k, et donc $f(y)$ est dans I. I est stable par f.

(c) Si $N_k = N_{k+1}$, on a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$. Donc, $f^k(f(x)) = 0$ ou encore x est dans N_{k+1}.
On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ [(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})].}$$

2. (a) Notons tout d'abord que, pour tout entier naturel k, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$. Si de plus, on est en dimension finie, alors d'après le théorème du rang,

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1}.$$

Donc $A = B$ (éventuellement $= \varnothing$).
La suite des noyaux itérés ne peut être strictement croissante pour l'inclusion car alors la suite des dimensions de ces noyaux serait une suite strictement croissante d'entiers naturels, vérifiant par une récurrence facile $\dim N_k \geqslant k$ pour tout naturel k, et en particulier $\dim N_{n+1} > \dim E$ ce qui est exclu.
Donc il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$. Soit p le plus petit de ces entiers k.
Par définition de p, N_k est strictement inclus dans N_{k+1} pour $k < p$, puis $N_p = N_{p+1}$ et d'après 1)c) pour tout entier naturel k supérieur ou égal à p on a $N_k = N_p$ (par récurrence sur $k \geqslant p$). Donc $A = \{p, p+1, p+2, ...\}$.
Enfin, $\dim(N_0) < \dim(N_1) < ... < \dim(N_p)$ et donc $\dim(N_p) \geqslant p$ ce qui impose $p \leqslant n$.

(b) On a déjà $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$. Il reste à vérifier que $I_p \cap N_p = \{0\}$.
Soit x un élément de $I_p \cap N_p$. Donc $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Mais alors $f^{2p}(y) = 0$ et y est dans $N_{2p} = N_p$ (car $2p \geqslant p$) ou encore $x = f^p(y) = 0$.

$$\boxed{E = I_p \oplus N_p.}$$

(c) Ici $N = N_p = \mathrm{Ker} f^p$ et $I = I_p = \mathrm{Im} f^p$.
Soit $f' = f_{/N}$. D'après 1)b), f' est un endomorphisme de N puis immédiatement $f'^p = 0$. Donc $f_{/N}$ est nilpotent.
Soit $f'' = f_{/I}$. f'' est d'après 1)b) un endomorphisme de I. Pour montrer que f'' est un automorphisme de I, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker} f'' = \{0\}$. Mais $\mathrm{Ker} f'' \subset \mathrm{Ker} f \subset N$ et aussi $\mathrm{Ker} f'' \subset I$. Donc $\mathrm{Ker} f'' \subset N \cap I = \{0\}$. Donc $f_{/I} \in \mathscr{GL}(I)$.

3. Il faut bien sûr chercher les exemples en dimension infinie.

(a) Soit f de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe sa dérivée P'. On vérifie aisément que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathbb{R}_k[X]$ et donc la suite des noyaux itérés est strictement croissante. La suite des I_k est par contre constante : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, A est vide et $B = \mathbb{N}$.

(b) A un polynôme P, on associe le polynôme XP. Les N_k sont tous nuls et pour $k \in \mathbb{N}$ donné, I_k est constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à k ou encore $I_k = X^k\mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, $A = \mathbb{N}$ et $B = \varnothing$.

(c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à Xn associe Xn+1 si n n'est pas une puissance de 2 et 0 si n est une puissance de 2 ($f(1) = X$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 0$, $f(X^3) = X^4$, $f(X^4) = 0$, ...)
Soit k un entier naturel.

$$f^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}} \neq 0 \text{ et } f^{2^k}(X^{2^k+1}) = f(X^{2^{k+1}}) = 0.$$

Donc, pour tout entier naturel k, N_{2^k-1} est strictement inclus dans N_k. A est vide.
Ensuite, $X^{2^{k+1}} \in I_{2^k-1}$ mais $X^{2^{k+1}} \notin I_{2^k}$. En effet, si $l \geqslant 2^{k+1}+1$, $f^{2^k}(X^l)$ est ou bien nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$ et si $l \leqslant 2^{k+1}$, $f^{2^k}(X^l) = 0$ car entre l et $2^k + l - 1$, il y a une puissance de 2 (il y a 2^k nombres entre l et $2^k + l - 1$, ensuite $2^k + l - 1 < 2^k + 2^{k+1} = 3 \times 2^k < 2^{k+2}$ et enfin l'écart entre deux puissances de 2 inférieures à 2^{k+1} vaut au maximum $2^{k+1} - 2^k = 2^k$) . Donc, I_{2^k} contient le polynôme nul ou des polynômes de degré strictement supérieur à 2^{k+1} et ne contient donc pas $X^{2^{k+1}}$. Finalement, pour tout entier naturel k, I_{2^k} est strictement inclus dans I_{2^k-1} et B est vide.

4. Pour k entier naturel donné, on note f_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim I_k = \dim \mathrm{Ker} f_k + \dim \mathrm{Im} f_k \text{ avec } \mathrm{Im} f_k = f(I_k) = I_{k+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \dim \mathrm{Ker} f_k$.
Or, pour tout entier naturel k, $\mathrm{Ker} f_{k+1} = \mathrm{Ker} f \cap I_{k+1} \subset \mathrm{Ker} f \cap I_k = \mathrm{Ker} f_k$ et donc $d_{k+1} - d_{k+2} = \dim \mathrm{Ker} f_{k+1} \leqslant \dim \mathrm{Ker} f_k = d_k - d_{k+1}$.
Finalement, pour tout entier naturel k, $d_{k+1} - d_{k+2} \leqslant d_k - d_{k+1}$ et la suite des images itérées décroît de moins en moins vite.

Correction de l'exercice 1117 ▲

---

1. Si $N = \text{Ker} f \neq \{0\}$, considérons g non nul tel que $\text{Im} g \neq \{0\}$ et $\text{Im} g \subset \text{Ker} f$.
Pour un tel g, $f \circ g = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ par hypothèse, contredisant g non nulle. Donc $\text{Ker} f = \{0\}$.
Si $\text{Im} f \neq F$, on choisit g nulle sur $\text{Im} f$ et non nulle sur un supplémentaire de $\text{Im} f$ (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors, $g \circ f = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ contredisant g non nulle. Donc $\text{Im} f = F$.
Finalement, f est bien un isomorphisme de E sur F.
2. Soit $A = \{g \in \mathscr{L}(F,E) / \ f \circ g \circ f = 0\}$. Tout d'abord A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(F,E)$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien A est le noyau de l'application linéaire de $\mathscr{L}(F,E)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ qui à g associe $f \circ g \circ f$).
Soit J un supplémentaire de $I = \text{Im} f$ dans F. Un élément g de $\mathscr{L}(F,E)$ est entièrement déterminé par ses restrictions à I et J.
$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)_{/I} = 0 \text{ et } g_{/J} \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(I) \subset N.$$
Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application G de $\mathscr{L}(I,N) \times \mathscr{L}(J,E)$ dans $\mathscr{L}(F,E)$ qui à un couple (g_1,g_2) associe l'unique application linéaire g de F dans E telle que $g_{/I} = g_1$ et $g_{/J} = g_2$. G est linéaire et injective d'image A. Donc
$$\dim A = \dim \mathscr{L}(I,N) \times \dim \mathscr{L}(J,E) = \dim \mathscr{L}(I,N) + \dim \mathscr{L}(J,E) = r(p-r) + (n-r)p = pn - r^2.$$

Correction de l'exercice 1118 ▲

1. u est dans L(E) car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n.
• Les polynômes constants sont dans $\text{Ker} u$. Réciproquement , soit Pun élément de $\text{Ker} u$ puis $Q = P - P(0)$.
Par hypothèse, $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$ et donc 0, 1, 2, ... sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P = P(0)$ et $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\text{Ker} u = \mathbb{K}_0[X]$.
• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg} u = (n+1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X+1) - P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P = a_n X^n + \ldots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n - a_n = 0$).
En résumé, $\text{Im} u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim \text{Im} u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ et donc $\text{Im} u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
$$\boxed{\text{Ker} u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \text{Im} u = \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$
2. On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.
Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\text{Ker} u = \mathbb{K}_0[X]$).
$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \tfrac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$
On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.
Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.
$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$
On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.
Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,
$$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1)-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k. \end{aligned}$$
Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Correction de l'exercice 1127 ▲

1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire. Donc $P+I=E$. Bilan : $E = P \oplus I$.
2. Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui à f associe la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Nous avons bien $\pi \circ \pi = \pi$, $\pi(f) \in P$ et $\operatorname{Ker} \pi = I$.

Correction de l'exercice 1129 ▲

1. f est bien linéaire...
2. Soit P tel que $f(P) = 0$. Alors P vérifie l'équation différentielle
$$P + (1-X)P' = 0.$$
Dont la solution est $P = \lambda(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 et une base est donnée par un seul vecteur : $X-1$.
3. Par le théorème du rang la dimension de l'image est :
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - 1 = n.$$
Il faut donc trouver n vecteurs linéairement indépendants dans $\operatorname{Im} f$. Évaluons $f(X^k)$, alors
$$f(X^k) = (1-k)X^k + kX^{k-1}.$$
Cela donne $f(1) = 1, f(X) = 1, f(X^2) = -X^2 + 2X, \ldots$ on remarque que pour $k = 2, \ldots n$, $f(X^k)$ est de degré k sans termes constant. Donc l'ensemble
$$\{f(X), f(X^2), \ldots, f(X^n)\}$$
est une famille de n vecteurs, appartenant à $\operatorname{Im} f$, et libre (car les degrés sont distincts). Donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 1141 ▲

2. (c) $g(\vec{x}) = \vec{z}$.

Correction de l'exercice 1142 ▲

3. (a) $(f+g)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f^k(\vec{x}) + g \circ f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$.
Pour $k = p$: $f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$, puis pour $k = p-1$: $f^{k-2}(\vec{x}) = \vec{0}$, etc, jusqu'à $\vec{x} = \vec{0}$.
3. (b) Même principe sur l'équation : $(f+g)(\vec{x}) = \vec{y}$.
On obtient : $(f+g)^{-1} = g^{-1} \circ \left(\mathrm{id} - g^{-1} \circ f + g^{-2} \circ f^2 - \cdots + (-1)^{p-1} g^{1-p} \circ f^{p-1}\right)$.

Correction de l'exercice 1147 ▲

$f(\vec{x}) = \alpha\vec{x} + \beta(\vec{x})\vec{u}$, $\beta \in E^*$.

Correction de l'exercice 1148 ▲

1. $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell} = \delta_{jk}\psi_{i\ell}$.
2. ψ_{11} est un projecteur non trivial.
3. Si $\sum \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$, alors en appliquant ψ_{1j} : $\lambda_j \vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0$.
4. Décomposer g sur la base (φ_{ij}).

Correction de l'exercice 1149 ▲

$g =$ une projection sur $\operatorname{Im} f$ et $h = f$.

Correction de l'exercice 1154 ▲

$f^2 = f \circ g \circ f = f \circ g = f$ donc f est une projection. g idem.

$f \circ g = f \Rightarrow \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ et donc, par symétrie, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

Réciproquement, si f, g sont deux projections de même direction, alors $f \circ g$ et f coïncident sur la base et la direction de g, donc sont égales. De même, $g \circ f = g$.

Correction de l'exercice 1155 ▲

Direction = $\operatorname{Ker} f$ et Base = $\operatorname{Im} g$.

Correction de l'exercice 1156 ▲

Direction = $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et Base = $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Correction de l'exercice 1157 ▲

Si $\lambda \neq 1$, $(\mathrm{id} - f)^{-1} = \mathrm{id} + \frac{1}{1-\lambda} f$.

Correction de l'exercice 1159 ▲

1.
2. $\begin{cases} 2x' = x - 2y - z \\ 2y' = -x - z \\ 2z' = -x - 2y + z. \end{cases}$

Correction de l'exercice 1160 ▲

Si $A = \varnothing$ c'est évident.

Sinon, A est un sous-groupe de $GL(E)$ donc $\frac{u}{\operatorname{Card} A}$ est un projecteur et $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{Card}(A) \operatorname{rg}(u)$.

Correction de l'exercice 1161 ▲

1. Soit $p (\in \mathbb{N}^*)$ l'indice de nilpotence de u.
   Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leq k \leq p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.
   Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.
   Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \operatorname{Min}\{k \in \{0, ..., p-1\} / \lambda_k \neq 0\}$.
   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i}(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x)) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ \Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1,\ p-1-i+k \geq p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0) \end{aligned}$$
   ce qui contredit la définition de i.
   Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

2. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leq n$. Par suite, $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$.
3. On applique l'exerice 1112.
Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \underset{\neq}{\subset} N_n$. Par suite (d'après l'exercice 1113, 2), c)), les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc
$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \ldots < \dim N_n = n.$$
Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, notons d_k est la dimension de N_k. Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $d_{k+1} \geq d_k$ et une récurrence facile montre que, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $d_k \geq k$.
Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $\{1, \ldots, n-1\}$, on a $d_i = \dim N_i > i$, alors, par une récurrence facile, pour $i \leq k \leq n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas. Donc,
$$\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \dim\,(N_k) = k,$$
ou encore, d'après le théorème du rang,
$\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\text{rg}\,(u^k) = n - k$, et en particulier $\text{rg}\,(u) = n - 1$.

Correction de l'exercice 1162 ▲

1ère solution. Si $f = 0$, c'est immédiat . Sinon, soit p l'indice de nilpotence de f ($p \geqslant 2$).

Par définition de p, il existe un vecteur x_0 tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ (et $f^p(x_0) = 0$).

Montrons que la famille $(f^k(x_0))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. Dans le cas contraire, il existe $a_0, \ldots, a_{p-1}$ p scalaires non tous nuls tels que $a_0 x_0 + \ldots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$.

Soit $k = \text{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!] \,/\, a_i \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow f^{p-1}\left(\sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0)\right) = 0 \\ \Rightarrow a_k f^{p-1}(x_0) = 0 \text{ (car pour } i \geqslant p,\ f^i = 0 \\ \Rightarrow a_k = 0 \text{ (car } f^{p-1}(x_0) \neq 0).\end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de k et donc la famille $(f^k(x_0))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. Puisque le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension de l'espace, on a montré que $p \leqslant n$ ou, ce qui revient au même, $f^n = 0$.

2ème solution. (pour les redoublants)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f. Le polynôme X^p est annulateur de f. Son polynôme minimal est un diviseur de X^p et donc égal à X^k pour un certain $k \in [\![1, p]\!]$. Par définition de l'indice de nilpotence, $k = p$ puis $\mu_f = X^p$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, μ_f divise χ_f qui est de degré n et en particulier $p \leqslant n$.

Correction de l'exercice 1163 ▲

On transforme légèrement l'énoncé.

Si x est un vecteur non nul tel que $(x, f(x))$ est liée alors il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Si $x = 0$, $f(x) = 0 = 0x$ et encore une fois il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Inversement, si pour tout x de E, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, alors la famille $(x, f(x))$ est liée. Donc

$$[(\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ liée}) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} /\ f(x) = \lambda_x x)].$$

Notons de plus que dans le cas où $x \neq 0$, la famille (x) est une base de la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ et en particulier, le nombre λ_x est uniquement défini.

Montrons maintenant que f est une homothétie c'est à dire montrons que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} /\ \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

Soient x_0 un vecteur non nul et fixé de E puis x un vecteur quelconque de E.

1er cas. Supposons la famille (x_0, x) libre. On a $f(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0)$ mais aussi $f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0} x_0$ et donc

$$(\lambda_{x+x_0} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0})x_0 = 0.$$

Puisque la famille (x_0,x) est libre, on obtient $\lambda_{x+x_0}-\lambda_x=\lambda_{x+x_0}-\lambda_{x_0}=0$ et donc $\lambda_x=\lambda_{x+x_0}=\lambda_{x_0}$. Ainsi, pour tout vecteur x tel que (x,x_0) libre, on a $f(x)=\lambda_{x_0}x$.

2ème cas. Supposons la famille (x_0,x) liée. Puisque x_0 est non nul, il existe un scalaire μ tel que $x=\mu x_0$. Mais alors

$$f(x)=\mu f(x_0)=\mu\lambda_{x_0}x_0=\lambda_{x_0}x.$$

Finalement, il existe un scalaire $k=\lambda_{x_0}$ tel que pour tout vecteur x, $f(x)=kx$ et f est une homothétie. La réciproque étant claire, on a montré que

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}(E),\ [(f\text{ homothétie})\Leftrightarrow(\forall x\in E,\ (x,f(x))\text{ liée})].}$$

Correction de l'exercice 1164 ▲

Remarques. 1) Soit $(G,*)$ un groupe. Le centre de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Ce centre, souvent noté Z, est un sous-groupe de $(G,*)$.

2) $(\mathscr{L}(E),\circ)$ est un magma associatif et unitaire mais non commutatif (pour $\dim E>1$) mais $(\mathscr{L}(E),\circ)$ n'est pas un groupe. Par contre $(\mathscr{GL}(E),\circ)$ est un groupe (groupe des inversibles de $(\mathscr{L}(E),\circ)$).

Soit f un endomorphisme (resp. automorphisme) de E commutant avec tous les endomorphismes (resp. les automorphismes) de E. f commute en particulier avec toutes les symétries.

Soit x un vecteur non nul de E et s la symétrie par rapport à $\text{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire donné de $\text{Vect}(x)$).

$$s(f(x))=f(s(x))=f(x).$$

Par suite, $f(x)$ est invariant par s et appartient donc à $Vect(x)$. Ainsi, si f commute avec tout endomorphisme (resp. automorphisme) de E, f vérifie nécessairement $\forall x\in E,\ (x,f(x))$ liée et d'après le 1163, f est nécessairement une homothétie. Réciproquement , les homothéties de E commutent effectivement avec tout endomorphisme de E.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes de } E \text{ qui commutent avec tout endomorphismes de } E \text{ sont les homothéties.}}$$

Pour le centre de $\mathscr{GL}(E)$, il faut enlever l'application nulle qui est une homothétie mais qui n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 1165 ▲

$\Rightarrow$/ Si $p+q$ est un projecteur alors l'égalité $(p+q)^2=p+q$ fournit $pq+qp=0$. En composant par p à droite ou à gauche , on obtient $pqp+qp=0=pq+pqp$ et donc $pq=qp$.

Cette égalité jointe à l'égalité $pq+qp=0$ fournit $pq=qp=0$.

$\Leftarrow$/ Si $pq=qp=0$, alors $(p+q)^2=p^2+pq+qp+q^2=p+q$ et $p+q$ est un projecteur.

$$\boxed{\text{Pour tous projecteurs } p \text{ et } q,\ (p+q \text{ projecteur}\Leftrightarrow p\circ q=q\circ p=0\Leftrightarrow \text{Im}q\subset\text{Ker}p \text{ et } \text{Im}p\subset\text{Ker}q).}$$

Dorénavant, $p+q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $pq=qp=0$.

On a $\text{Ker}p\cap\text{Ker}q\subset\text{Ker}(p+q)$. Inversement, pour $x\in E$,

$$x\in\text{Ker}(p+q)\Rightarrow(p+q)(x)=0\Rightarrow p(p(x)+q(x))=0\Rightarrow p(x)=0,$$

et de même $q(x)=0$. Ainsi, $\text{Ker}(p+q)\subset\text{Ker}p\cap\text{Ker}q$ et donc $\text{Ker}(p+q)=\text{Ker}p\cap\text{Ker}q$.

On a $\text{Im}(p+q)\subset\text{Im}p+\text{Im}q$. Inversement, pour $x\in E$,

$$x\in\text{Im}p+\text{Im}q\Rightarrow\exists(x_1,x_2)\in E^2/\ x=p(x_1)+q(x_2).$$

Mais alors, $(p+q)(x)=p^2(x_1)+pq(x_1)+qp(x_2)+q^2(x_2)=p(x_1)+q(x_2)=x$ et donc $x\in\text{Im}(p+q)$. Ainsi, $\text{Im}p+\text{Im}q\subset\text{Im}(p+q)$ et donc $\text{Im}(p+q)=\text{Im}p+\text{Im}q$. En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur, alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q \text{ et } \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q.}$$

Correction de l'exercice 1166 ▲

Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = Id_E$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.

Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.

$$\boxed{\text{En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.}}$$

Correction de l'exercice 1167 ▲

$\Leftarrow$/ Si $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ alors

$$(p_1 + ... + p_n)^2 = p_1^2 + ... + p_n^2 + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = p_1 + ... + p_n,$$

et $p_1 + ... + p_n$ est un projecteur.

$\Rightarrow$/ Supposons que $p = p_1 + ... + p_n$ soit un projecteur. Posons $F_i = \mathrm{Im}p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, puis $F = F_1 + ... + F_n$ et $G = \mathrm{Im}p$. On sait que la trace d'un projecteur est son rang. Par linéarité de la trace, on obtient

$$\mathrm{rg}p = \mathrm{Tr}p = \mathrm{Tr}(p_1) + ... + \mathrm{Tr}(p_n) = \mathrm{rg}(p_1) + ... + \mathrm{rg}(p_n),$$

et donc $\dim G = \dim F_1 + ... + \dim F_n \geqslant \dim F$. D'autre part, $G = \mathrm{Im}(p_1 + ... + p_n) \subset \mathrm{Im}p_1 + ... + \mathrm{Im}p_n = F_1 + ... + F_n = F$.

On obtient donc $G = F$ et aussi $\dim(F_1 + ... + F_n) = \dim F_1 + ... + \dim F_n$. D'après l'exercice 1026, $F = F_1 \oplus ... \oplus F_n$ c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_n).$$

Il reste à vérifier que pour $i \neq j$ et x dans E, $p_i(p_j(x)) = 0$ ou ce qui revient au même que pour $i \neq j$ et y dans $\mathrm{Im}(p_j)$, $p_i(y) = 0$.

Soit y dans $\mathrm{Im}(p_j)$ (et donc dans $\mathrm{Im}p$). Les égalités $y = p_j(y) = p(y)$ fournissent $\sum_{i \neq j} p_i(y) = 0$. La somme $\sum_i \mathrm{Im}(p_i)$ étant directe, on a donc $p_i(y) = 0$ pour chaque $i \neq j$ ce qu'il fallait démontrer.

$$\boxed{p_1 + \ldots + p_n \text{ projecteur} \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0.}$$

Correction de l'exercice 1168 ▲

1. D'après le 1167, $\mathrm{Im}(p_1 + ... + p_n) = \mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_n) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.
   Chaque p_i est de rang au moins 1, mais si l'un des p_i est de rang supérieur ou égal à 2 alors $n = \dim E \geqslant \mathrm{rg}(p_1 + ... + p_n) = \mathrm{rg}(p_1) + ... + \mathrm{rg}(p_n) > n$ ce qui est impossible. Donc chaque p_i est de rang 1.
2. Les images des p_i (resp. q_i) sont des droites vectorielles. Pour chaque i, notons e_i (resp. e'_i) un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(p_i)$ (resp. $\mathrm{Im}(q_i)$). D'après 1), $E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Vect}(e_n)$ ou encore $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$) est une base de E.
   Soit f l'automorphisme de E défini par $f(e_i) = e'_i$ (f est un automorphisme car l'image par f d'une base de E est une base de E).
   Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. $f \circ p_i \circ f^{-1}(e'_j) = f(p_i(e_j)) = f(\delta_{i,j} e_i) = \delta_{i,j} e'_i = q_i(e_j)$. Ainsi, les endomorphismes q_i et $f \circ p_i \circ f^{-1}$ coïncident sur une base de E et sont donc égaux.

Correction de l'exercice 1169 ▲

Soit $q = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}$.

$$q^2 = \frac{1}{n}\sum_{(g,h)\in G^2} h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais si g et h sont deux éléments de G et x est un vecteur quelconque de E, $p(g^{-1}(x))$ est dans F et donc par hypothèse $h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)$ est encore dans F (h^{-1} est dans G puisque G est un groupe). On en déduit que

$$h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1} = h\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1} = g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais alors

$$q^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{(g,h)\in G^2} g\circ p\circ g^{-1} = \frac{1}{n^2}\times n\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1} = q$$

et q est un projecteur.

Montrons que $F\subset \mathrm{Im}q$. Soit x un élément de F. Pour chaque $g\in G$, $g^{-1}(x)$ est encore dans F et donc $p(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$ puis $g(p(g^{-1}(x))) = x$. Mais alors

$$q(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} x = x,$$

ou encore x est dans $\mathrm{Im}q$. On a montré que $F\subset \mathrm{Im}q$.

Montrons que $\mathrm{Im}q\subset F$. Soit x un élément de $\mathrm{Im}q$.

$$\begin{aligned}p(x) = p(q(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}(x) \text{ (car } p\circ g^{-1}(x)\in F \text{ et donc } g\circ p\circ g^{-1}(x)\in F)\\ &= q(x) = x,\end{aligned}$$

et x est dans F. On a montré que $\mathrm{Im}q\subset F$ et finalement que $\mathrm{Im}q = F$.

$$\boxed{q \text{ est un projecteur d'image } F.}$$

Correction de l'exercice 1170 ▲

Deux cas particuliers se traitent immédiatement.

Si $f = 0$, on prend $p = 0$ et $g = Id_E$ et si $f\in\mathscr{GL}(E)$, on prend $p = Id_E$ et $g = f$.

On se place dorénavant dans le cas où $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ ne sont pas réduit à 0.

Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ dans E et G un supplémentaire de $\mathrm{Im}f$ dans E.

On sait que la restriction f' de f à F réalise un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}f$. D'autre part $\dim\mathrm{Ker}f = \dim G < +\infty$ et donc $\mathrm{Ker}f$ et G sont isomorphes. Soit φ un isomorphisme de $\mathrm{Ker}f$ sur G.

On définit une unique application linéaire g en posant $g_{/\mathrm{Ker}f} = \varphi$ et $g_{/F} = f'$.

g est un automorphisme de E. En effet,

$$g(E) = g(\mathrm{Ker}f + F) = g(\mathrm{Ker}f) + g(F) = \varphi(\mathrm{Ker}f) + f'(F) = G + \mathrm{Im}f = E,$$

(puisque φ et f' sont des isomorphismes) et donc g est surjective. Par suite g est bijective de E sur lui-même puisque $\dim E < +\infty$.

Soit p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Ker}f$. On a

$$(g\circ p)_{/\mathrm{Ker}f} = g\circ 0_{/\mathrm{Ker}f} = 0_{/\mathrm{Ker}f} = f_{/\mathrm{Ker}f} \text{ et } (g\circ p)_{/F} = g\circ Id_{/F} = f' = f_{/F}.$$

Ainsi les endomorphismes $g\circ p$ et f coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $g\circ p = f$. Finalement, si on note $P(E)$ l'ensemble des projecteurs de E,

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}(E),\ \exists g\in\mathscr{GL}(E),\ \exists p\in P(E)/\ f = g\circ p.}$$

Correction de l'exercice 1171 ▲

(Ne pas confondre : $(\forall x\in E,\ \exists p\in\mathbb{N}^*/\ f^p(x)=0)$ et $(\exists p\in\mathbb{N}^*/\ \forall x\in E,\ f^p(x)=0)$. Dans le deuxième cas, p est indépendant de x alors que dans le premier cas, p peut varier quand x varie).

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, il existe un entier non nul p_i tel que $f^{p_i}(e_i)=0$. Soit $p = \mathrm{Max}\{p_1,\dots,p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour i dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$f^p(e_i) = f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{p-p_i}(0) = 0.$$

Ainsi l'endomorphisme f^p s'annule sur une base de E et on sait que $f^p=0$.

On a donc trouvé un entier non nul p tel que $f^p=0$ et par suite f est nilpotent.

Correction de l'exercice 1172 ▲

1. A partir de $fg-gf=af+bg$ (1), on obtient après composition à droite par g, $fg-gfg=afg+bg$ ou encore $fg = g\circ\frac{1}{1-a}(fg+bId)$ (puisque $1-a\neq 0$). On en déduit
$$\mathrm{Im}(fg)\subset \mathrm{Im}g.$$
Mais alors en écrivant (1) sous la forme $f=\frac{1}{a}(fg-gf-bg)$ (puisque a n'est pas nul), on obtient
$$\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Im}g.$$
L'égalité $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Im}g$ montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}f$ est invariant par g et fournit donc l'égalité $gf=f$. On compose alors (1) à droite par f et en tenant compte de $gf=f$ et de $f^2=f$, on obtient $f-f=af+bf$ et donc $(a+b)f=0$ puis $b=-a$ puisque f n'est pas nul.
(1) s'écrit alors $fg-f=a(f-g)$. En composant à droite par g, on obtient : $a(fg-g)=0$ et donc $fg=f$ puisque a n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant $g-f=a(f-g)$ ou encore $(a+1)(g-f)=0$ et donc, puisque f et g sont distincts, $a=-1$.
2. (D'après 1), si a est distinct de 0 et de 1, nécessairement $a=-1$ et (1) s'écrit $fg-gf=-f+bg$).
Soit x un élément de $\mathrm{Ker}g$. (1) fournit $-g(f(x))=af(x)$ $(*)$ puis en prenant l'image par g, $(a+1)g(f(x))=0$. Puisque a est distinct de -1, on obtient $g(f(x))=0$ et $(*)$ fournit $af(x)=0$ puis $f(x)=0$. Donc x est élément de $\mathrm{Ker}f$. On a montré que $\mathrm{Ker}g\subset\mathrm{Ker}f$.
On en déduit $\mathrm{Im}(g-Id)\subset\mathrm{Ker}f$ et donc $f(g-Id)=0$ ou encore $fg=f$. (1) s'écrit $f-gf=af+bg$ et en composant à gauche par f, on obtient $f-fgf=af+bfg$. En tenant compte de $fg=f$, on obtient $(a+b)f=0$ et donc $b=-a$.
(1) s'écrit alors $f-gf=a(f-g)$ et en composant à gauche par g, on obtient $0=a(gf-g)$ et donc $gf=g$. (1) s'écrit enfin $f-g=a(f-g)$ et donc $a=1$.
3. Si $a=0$, (1) s'écrit $fg-gf=bg$. En composant à gauche ou à droite par g, on obtient $gfg-gf=bg$ et $fg-gfg=bg$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $fg-gf=2bg$. D'où, en tenant compte de (1), $bg=2bg$ et puisque g n'est pas nul, $b=0$. Par suite $fg-gf=0$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir $a=0$. D'après 1) et 2), $(a,b)\in\{(-1,1),(1,-1)\}$.
1er cas. $(a,b)=(-1,1)$. C'est le 1) : $fg-gf=-f+g$. On a vu successivement que $gf=f$ puis que $fg=g$ fournissant $(g-Id)f=0$ et $(f-Id)g=0$ ou encore $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Ker}(g-Id)=\mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}g\subset\mathrm{Im}f$ et donc $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}g$. Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de même image alors $gf=f$, $fg=g$ et donc $fg-gf=-f+g$. Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .
2ème cas. $(a,b)=(1,-1)$. C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

Correction de l'exercice 1173 ▲

Non, ils n'ont pas même dimension si $E\neq\{\vec{0}\}$ ou $F\neq\{\vec{0}\}$.

Correction de l'exercice 1174 ▲

On veut $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Im} f$ donc g est entièrement définie par sa restriction à un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$, application linéaire à valeurs dans $\operatorname{Ker} f$. On en déduit $\dim F = (\operatorname{codim} \operatorname{Im} f)(\dim \operatorname{Ker} f) = (\dim \operatorname{Ker} f)^2$.

Correction de l'exercice 1175 ▲

Soit $p = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} g$. Alors $g \circ p = p$, pour tout $g \in G$ donc $p^2 = p$, $F \subset \operatorname{Im} p$ et si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ d'où $g(x) = x$ pour tout $g \in G$ c'est-à-dire $x \in F$. Donc $F = \operatorname{Im} p$ et $\dim F = \operatorname{rg}(p) = \operatorname{tr}(p)$ (trace d'un projecteur).

Correction de l'exercice 1188 ▲

Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1189 ▲

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1192 ▲

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de E. Alors $M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & c+c' \\ 0 & b+b' & 0 \\ c+c' & 0 & a+a' \end{pmatrix} \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & \lambda c \\ 0 & \lambda b & 0 \\ \lambda c & 0 & \lambda a \end{pmatrix}$ appartient à E, tout comme la matrice 0. Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de E. Alors $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à E et la relation qui précéde montre que elles engendrent E. D'autre part, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est libre et engendre E. C'est une base de E.

Correction de l'exercice 1193 ▲

F est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ donc $\dim (F) \in \{0, \ldots, 4\}$. Comme $F \neq M_2(\mathbb{R})$ on a aussi $\dim (F) \neq 4$. D'autre part les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à F et sont linéairement indépendantes. En effet, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$ alors $\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc $\dim (F) \geq 3$ c'est à dire $\dim (F) = 3$. Enfin $\{M_1, M_2, M_3\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans F qui est un espace de dimension 3. C'est donc une base de F.

Correction de l'exercice 1216 ▲

1. $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
2. $U_n = A^n U_0$
3. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le rang est 1.

4. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
5. Ce sont deux vecteurs non colinéaires. On a

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. On a $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3^{n+1} & -2\cdot 3^{n+1} \\ 2\cdot 3^n & 4\cdot 3^n \end{pmatrix}$
7. Donc

$$\begin{cases} x_n &= & -137\cdot 3^{n+1} - 36\cdot 3^{n+1} \\ y_n &= & 274(3^n) + 72\cdot 3^n \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1233 ▲

2. Si $A, B \in \mathscr{D}$ et $AB = I$, alors pour $i \neq j$, $\forall\, k,\ a_{ik}b_{kj} = 0$.

Soit $a_{i1} \neq 0$: alors $b_{1j} = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $a_{i1} = b_{1i} = 1$.

Donc chaque colonne de A contient $n-1$ fois 0 et une fois 1. A est inversible $\Rightarrow A$ est une matrice de permutation.

Correction de l'exercice 1235 ▲

1.
2. $X = \begin{pmatrix} \alpha & 1+\beta \\ -2\alpha & 1-2\beta \\ 1+\alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1236 ▲

$B = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1237 ▲

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_n^2 & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1239 ▲

1. $\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = \frac{1}{n}\big((2n-1)^k + (n-1)(-1)^k\big) \\ b = \frac{1}{n}\big((2n-1)^k - (-1)^k\big). \end{cases}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k & \frac{1}{3}(4k^3+6k^2+2k) \\ 0 & 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right]^k = (x^2+y^2+z^2)^{k-1}A$.

Correction de l'exercice 1240 ▲

Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}y & \operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}y & \operatorname{ch}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y & \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y & \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x+y) & \operatorname{sh}(x+y) \\ \operatorname{sh}(x+y) & \operatorname{ch}(x+y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$A(x)A(-x) = A(-x)A(x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

et $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$.

On a aussi, pour n entier naturel non nul donné :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)...A(x) = A(x+x...+x) = A(nx),$$

ce qui reste clair pour $n=0$ car $A(x)^0 = I_2 = A(0)$. Enfin, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(nx) & \operatorname{sh}(nx) \\ \operatorname{sh}(nx) & \operatorname{ch}(nx) \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1241 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^p$. Pour $1 \leq k \leq p$, on a $f(e_k) = e_{p+1-k}$ et donc $f^2(e_k) = e_k$. Ainsi, $A^2 = I_p$. Mais alors, il est immédiat que, pour n entier naturel donné, $A^n = I_p$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.

Correction de l'exercice 1242 ▲

Pour $x \in]-1,1[$, posons $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Posons ensuite $G = \{M(x),\ x \in]-1,1[\}$.

Soit alors $x \in]-1,1[$. Posons $a = \operatorname{Argth}x$ de sorte que $x = \operatorname{th}a$. On a

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{ch}a\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{th}a \\ \operatorname{th}a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}a & \operatorname{sh}a \\ \operatorname{sh}a & \operatorname{ch}a \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$, $N(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}a & \operatorname{sh}a \\ \operatorname{sh}a & \operatorname{ch}a \end{pmatrix}$. On a ainsi $\forall x \in]-1,1[,\ M(x) = N(\operatorname{Argth}x)$ ou aussi, $\forall a \in \mathbb{R},\ N(a) = M(\operatorname{th}a)$. Par suite, $G = \{N(a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

Soit alors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}a & \operatorname{sh}a \\ \operatorname{sh}a & \operatorname{ch}a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}b & \operatorname{sh}b \\ \operatorname{sh}b & \operatorname{ch}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b & \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a \\ \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a & \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a+b) & \operatorname{sh}(a+b) \\ \operatorname{sh}(a+b) & \operatorname{ch}(a+b) \end{pmatrix} = N(a+b). \end{aligned}$$

Montrons alors que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

$N(0) = I_2 \in G$ et donc G est non vide.

$\forall a \in \mathbb{R},\ \det(N(a)) = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1 \neq 0$ et donc $G \subset \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ N(a)N(b) = N(a+b) \in G$.

$\forall a \in \mathbb{R},\ (N(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}a & -\operatorname{sh}a \\ -\operatorname{sh}a & \operatorname{ch}a \end{pmatrix} = N(-a) \in G$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Correction de l'exercice 1243 ▲

Par hypothèse, $a_{i,j} = 0$ pour $j \leqslant i+r-1$ et $bi,j = 0$ pour $j \leqslant i+s-1$.

Soient i et j deux indices tels que $j \leqslant i+r+s-1$. Le coefficient ligne i, colonne j, de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

Dans cette somme, si $k \leqslant i+r-1$, $a_{i,k}=0$. Sinon $k \geqslant i+r$ et donc $j \leqslant i+r+s-1 \leqslant k+s-1$ et dans ce cas $b_{k,j}=0$.
Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de AB est bien nul si $j \leqslant i+r+s-1$.

Correction de l'exercice 1246 ▲

1. Soit $X=\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$. $MX=\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -3&-1&1\\ 1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$ et $u(2i-3j+5k)=i+2j-3k$.
2. Soit $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
$$MX=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -3&-1&1\\ 1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0\\ -3x-y+z=0\\ x-z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-2x\\ z=x\end{array}\right..$$
Donc, $\mathrm{Ker}u=\mathrm{Vect}(i-2j+k)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}u)=1$ et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}u=2$. Or, $u(j)=i-j$ et $u(k)=j+k$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}u$ qui est un plan vectoriel et donc $\mathrm{Im}u=\mathrm{Vect}(i-j,j-k)$.
3. $$M^2=\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -3&-1&1\\ 1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -3&-1&1\\ 1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&1\\ -2&-2&-2\\ 1&1&1\end{pmatrix}$$
et
$$M^3=M^2.M=\begin{pmatrix} 1&1&1\\ -2&-2&-2\\ 1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -3&-1&1\\ 1&0&-1\end{pmatrix}=0.$$
4. $\mathrm{Ker}u^2$ est à l'évidence le plan d'équation $x+y+z=0$. Une base de $\mathrm{Ker}u^2$ est $(i-j,j-k)$ et donc $\mathrm{Ker}u^2=\mathrm{Im}u=\mathrm{Vect}(i-j,j-k)$.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}u^2$ est une droite vectorielle. Mais $u^3=0$ s'écrit encore $u\circ u^2=0$, et donc $\mathrm{Im}u^2$ est contenue dans $\mathrm{Ker}u$ qui est une droite vectorielle. Donc, $\mathrm{Im}u^2=\mathrm{Ker}u=\mathrm{Vect}(i-2j+k)$.
5. $(I-M)(I+M+M^2)=I-M^3=I$. Par suite, $I-M$ est inversible à droite et donc inversible et
$$(I-M)^{-1}=I+M+M^2=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -3&-1&1\\ 1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1&1&1\\ -2&-2&-2\\ 1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4&2&1\\ -5&-2&-1\\ 2&1&1\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1247 ▲

1. Pour P élément de $\mathbb{R}_n[X]$,
$$f(P)=e^{X^2}(Pe^{-X^2})'=e^{X^2}(P'e^{-X^2}-2XPe^{-X^2})=P'-2XP.$$
Ainsi, si P est un polynôme de degré infèrieur ou égal à n, $f(P)=P'-2XP$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, et f est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
De plus, pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]$, on a :
$$f(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)'-2X(\lambda P+\mu Q)=\lambda(P'-2XP)+\mu(Q'-2XQ)=\lambda f(P)+\mu f(Q).$$
f est élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. La matrice A cherchée est élément de $\mathscr{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$.
Pour $k=0$, $f(X^k)=f(1)=-2X$ et pour $1\leq k\leq n$, $f(X^k)=kX^{k-1}-2X^{k+1}$. On a donc :
$$A=\begin{pmatrix} 0&1&0&\dots&\dots&0\\ -2&0&2&0&&\vdots\\ 0&-2&0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ &&&\ddots&\ddots&n\\ \vdots&&&\ddots&-2&0\\ 0&\dots&&\dots&0&-2\end{pmatrix}.$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$.
Si P n'est pas nul, $-2XP$ a un degré strictement plus grand que P' et donc $f(P)$ n'est pas nul. Par suite, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ (f est donc injective) et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg} f = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 0 = n+1$, ce qui montre que $\mathrm{Im} f$ n'est pas $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (f n'est pas surjective).

Correction de l'exercice 1248 ▲

1.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m-\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_2 - \frac{1}{2}C_1, C_3 - \frac{1}{3}C_1))$$
$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m-\frac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3-C_2))$$
Si $m = \frac{7}{36}$, $\mathrm{rg}A = 2$ (on note alors que $C_1 = 6(C_2 - C_3)$) et si $m \neq \frac{7}{36}$, $\mathrm{rg}A = 3$ et A est inversible.

2.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1,C_2-C_1,C_3-C_1))$$
1er cas. si a, b et c sont deux à deux distincts.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\mathrm{rg}A = 3$.
2ème cas. Si $b = c \neq a$ (ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$). A a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 0 \end{pmatrix}$.
Donc, si $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$, $\mathrm{rg}A = 2$.
3ème cas. Si $a = b = c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1.

3. Puisque $\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{rg}(C_1, C_2 - aC_1, C_3 - C_1, C_4 - bC_1)$,
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$
1er cas. Si $a \neq b$.
$$\mathrm{rg}A = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix}$$
$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(L_1,L_2,L_3) = \mathrm{rg}(L_2,L_1,L_3)).$$
$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 2-a^2-ab \\ 1-ab & -1 & 2-b^2-ab \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (2-b^2-ab)-(2-a^2-ab) \end{pmatrix}$$
$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (a-b)(a+b) \end{pmatrix}$$
Si $|a| \neq |b|$, $\mathrm{rg}A = 4$ et si $a = -b \neq 0$, $\mathrm{rg}A = 3$.
2ème cas. Si $a = b$.
$$\mathrm{rg}A = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$
Si $a = b = \pm 1$, $\mathrm{rg}A = 1$ et si $a = b \neq \pm 1$, $\mathrm{rg}A = 2$.

4. Pour $n \geq 2$ et $j \in \{1,...,n\}$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice proposée.

$$C_j = (i+j+ij)_{1\leq i\leq n} = (i)_{1\leq i\leq n} + j(i+1)_{1\leq i\leq n} = jU+V,$$

avec $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i+1 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\forall j \in \{1,...,n\}$, $C_j \in \text{Vect}(U,V)$ ce qui montre que $\text{rg}A \leq 2$. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (lignes et colonnes 1 et 2) est inversible et finalement $\text{rg}A = 2$.

5. On suppose $n \geq 2$. La j-ème colonne de la matrice s'écrit

$$C_j = (\sin i \cos j + \sin j \cos i)_{1\leq i\leq n} = \sin jC + \cos jS \text{ avec } C = (\cos i)_{1\leq i\leq n} \text{ et } S = (\sin i)_{1\leq i\leq n}.$$

Par suite, $\forall j \in \{1,...,n\}$, $C_j \in \text{Vect}(C,S)$ ce qui montre que $\text{rg}A \leq 2$. De plus, la matrice extraite formée des termes lignes et colonnes 1 et 2 est inversible car son déterminant vaut $\sin 2\sin 4 - \sin^2 3 = -0,7... \neq 0$ et finalement $\text{rg}A = 2$.

6. Déterminons $\text{Ker}A$. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \text{Ker}A \Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n-1\},\ ax_i + bx_{i+1} = 0 \text{ et} bx_1 + ax_n = 0\ (S).$$

1er cas. Si $a = b = 0$, alors clairement $\text{rg}A = 0$.
2ème cas. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n\}\ x_i = 0$. Dans ce cas, $\text{Ker}A = \{0\}$ et donc $\text{rg}A = n$.
3ème cas. Si $a \neq 0$. Posons $\alpha = -\frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n-1\},\ x_k = \alpha x_{k+1} \text{ et } x_n = \alpha x_1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ x_k = \alpha^{-(k-1)}x_1 \text{ et } x_n = \alpha x_1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ x_k = \alpha^{k-1}x_1 \text{ et } \alpha^n x_1 = x_1\end{aligned}$$

Mais alors, si $\alpha^n \neq 1$, le système (S) admet l'unique solution $(0,...,0)$ et $\text{rg}A = n$, et si $\alpha^n = 1$, $\text{Ker}A = \text{Vect}((1,\alpha^{n-1},...,\alpha^2,\alpha))$ est de dimension 1 et $\text{rg}A = n-1$.

En résumé, si $a = b = 0$, $\text{rg}A = 0$ et si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\text{rg}A = n$. Si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in U_n$, $\text{rg}A = n-1$ et si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \notin U_n$, $\text{rg}A = n$.

Correction de l'exercice 1249 ▲

(C'est en fait un exercice sur les polynômes de TCHEBYCHEV de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format n au lieu du format 4.)

Si on note C_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, la j-ème colonne de A alors $C_j = (\cos(i+j-2)a)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ puis pour j élément de $\{1,2\}$,

$$C_{j+2} + C_j = (2\cos(i+j-1)a\cos a)_{1\leqslant i\leqslant 4} = 2\cos aC_{j+1}$$

et donc $C_3 = 2\cos aC_2 - C_1 \in \text{Vect}(C_1,C_2)$ et $C_4 = 2\cos aC_3 - C_2 \in \text{Vect}(C_2,C_3) \subset \text{Vect}(C_1,C_2)$.

Donc $\text{Vect}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \text{Vect}(C_1,C_2)$ et $\text{rg}A = \text{rg}(C_1,C_2) \leqslant 2$.

Enfin $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{vmatrix} = \cos(2a) - \cos^2 a = \cos^2 a - 1 = -\sin^2 a$.

• Si a n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$, ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, $\text{rg}A = 2$.

• Si a est dans $\pi\mathbb{Z}$, la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas, $\text{rg}A = 1$.

$$\boxed{\text{rg}(A) = 2 \text{ si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \text{rg}(A) = 1 \text{ si } a \in \pi\mathbb{Z}.}$$

Correction de l'exercice 1250 ▲

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice A. Posons encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$Cj = (i + j(i+1))_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = U + jV.$$

Donc $\text{Vect}(C_1,...,C_n) \subset \text{Vect}(U,V)$ et en particulier, $\text{rg}A \leqslant 2$. Maintenant, si $n \geqslant 2$, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc, si $n \geqslant 2$, $\text{rg}A = 2$ et si $n = 1$, $\text{rg}A = 1$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \text{rg}(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 2 \text{ et si } n = 1,\ \text{rg}(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1.}$$

Correction de l'exercice 1251 ▲

On note r le rang de A. Si $r = 0$, A est nulle et donc B est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soient $P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$. Puisque $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$ et $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$, les matrices P' et Q' sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J'_rQ' \text{ où } J'_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice J'_r et a donc même rang que J'_r. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J'_r a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\text{rg}B = p\text{rg}A.}$$

Correction de l'exercice 1252 ▲

Soit r le rang de H. Il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $H = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'égalité $HAH = \lambda_A H$ s'écrit après simplifications $J_rQAPJ_r = \lambda_A J_r$. Maintenant , quand A décrit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $B = QAP$ décrit également $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple, l'application qui à A associe QAP est une permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de réciproque l'application qui à A associe $Q^{-1}AP^{-1}$).

L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que $(\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists \lambda_B \in \mathbb{K}/\ J_rBJ_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leqslant 1$.

Un calcul par blocs fournit en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_rBJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si $r \geqslant 2$, il existe des matrices carrées B_1 de format r qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que B_1 n'est pas colinéaire à I_r. Donc $r \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 1253 ▲

$(1) \Rightarrow (2)$.

$M^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M \Rightarrow \mathrm{rg}M \leqslant \dim(\mathrm{Ker}M) = 3 - \mathrm{rg}M$ et donc $\mathrm{rg}M \leqslant 1$.

Si $\mathrm{rg}M = 0$ alors $\mathrm{Tr}M = 0$. On suppose maintenant que $\mathrm{rg}M = 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}M) = 2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}M$ alors il existe un vecteur e_3 (non nul) tel que $Me_3 = e_1$.

On complète la famille libre (e_1) de $\mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M$ en (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}M$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Rightarrow M(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 \Rightarrow ce_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en particulier $\mathrm{Tr}M = 0$.

$(2) \Rightarrow (1)$.

Si $\mathrm{rg}M = 0$, $M^2 = 0$.

Si $\mathrm{rg}M = 1$, on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 non tous nuls et trois réels v_1, v_2 et v_3 non tous nuls tels que $M = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$ ou encore il existe deux vecteurs colonnes, tous deux non nuls U et V tels que $M = U^tV$. L'égalité $\mathrm{Tr}M = 0$ fournit $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ ou encore ${}^tUV = 0$. Mais alors

$$M^2 = U^tVU^tV = U^t({}^tUV)^tV = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

Correction de l'exercice 1271 ▲

Posons : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_{4,\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons $\varphi_{\alpha,\beta}$ l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ et $F = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2\}$.
Par définition de la matrice associée à une application linéaire, $\mathrm{Im}\,(\varphi_{\alpha,\beta}) = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2, e_{3,\alpha}, e_{4,\beta}\}$. En particulier, $F \subset \mathrm{Im}\,(\varphi_{\alpha,\beta})$. Comme e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, $\mathrm{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) \geq 2$. Ainsi $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si l'un des deux vecteurs $e_{3,\alpha}$ ou $e_{4,\beta}$ n'appartient pas à F. En ce cas en effet, $\mathrm{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Or $e_{3,\alpha}$ et $e_{4,\beta}$ appartiennent à F si et seulement si il existe $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tels que : $e_{3,\alpha} = \lambda e_1 + \mu e_2$ et $e_{4,\beta} = \lambda' e_1 + \mu' e_2$. Un petit calcul montre donc que $\varphi_{\alpha,\beta}$ n'est pas surjective si et seulement si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$. Donc $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$.

Correction de l'exercice 1273 ▲

$\mathscr{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ donc est de dimension finie n^2. La famille $\{id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte n^2+1 vecteurs donc est liée c'est à dire : il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ dans $\mathbb{R}$, non tous nuls et tels que $\lambda_0 id_E + \lambda_1 \varphi + \dots + \lambda_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ répond donc à la question.

Correction de l'exercice 1280 ▲

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. *Montrons le résultat pour $n = 2$.*
   Dans ce cas, la matrice A s'écrit
   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
   et les hypothèses deviennent
   $$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ et } |a_{22}| > |a_{21}|.$$
   La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or
   $$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
   et, compte tenu des hypothèses,
   $$|a_{11}a_{22}| = |a_{11}||a_{22}| > |a_{12}||a_{21}| = |a_{12}a_{21}|,$$
   ainsi$|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$ donc $a_{12}a_{21} \neq a_{12}a_{21}$ et le déterminant est non nul.

2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geq 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

Calculons les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrons que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geq 2$, on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |b_{ij}|.$$

On a

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{11}}{a \quad _{i1}} \text{ si } j \geq 2 \text{ et } b_{i1} = a_{i1}.$$

par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2, j\neq i} |b_{ij}| &= \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}| \\
&\leq \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{1j}||a_{11}|}{|} a_{i1}| \\
&= \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{\sum} {}_{j=2, j\neq i} |a_{1j}|.
\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, pour $i = 1$, on a

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

donc

$$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

D'où, en remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2, j\neq i} |b_{ij}| &< \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|} a_{1i}| \\
&= \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|} a_{1i}| \\
&< |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|} a_{1i}| \\
&\leq \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{11}}{a \quad _{1i}} \right| = |b_{ii}|.
\end{aligned}$$

3. *Démontrons le résultat de Hadamard pour n quelconque.*
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée $n \times n$, vérifiant pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

On veut démontrer que A est inversible.
Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question 1). Soit n arbitrairement fixé, supposons le résultat vrai pour $n-1$ et démontrons le pour n.
On a $\det A = \det B$ où B est la matrice construite dans la question 2)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & (b_{ij\,(2\leq i,j\leq n)}) & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

Or, la matrice $(b_{ij\,(2\leq i,j\leq n)})$ est une matrice carrée d'ordre $n-1$ qui vérifie les hypothèses de Hadamard, d'après la question 2). Elle est donc inversible par hypothèse de récurrence. Et, par conséquent, la matrice A est inversible car $a_{11} \neq 0$.

Correction de l'exercice 1281 ▲

Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A.B = 0$.

1. Démontrons que $\mathrm{Im}\, B \subset \ker A$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\, B$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Bx$, d'où $Ay = ABx = 0$, ainsi $y \in \ker A$ ce qui prouve l'inclusion.

2. On suppose que le rang de A est égal à $n-1$, déterminons le rang de B.
   On a $\mathrm{rg}B = \dim \mathrm{Im}B$ et on sait que $\dim \mathrm{Im}A + \dim \ker A = n$ par conséquent, si $\mathrm{rg}A = n-1$ on a $\dim \ker A = 1$ et l'inclusion $\mathrm{Im}B \subset \ker A$ implique $\dim \mathrm{Im}B \leq 1$ or, B est supposée non nulle d'où $\dim \mathrm{Im}B = 1 = \mathrm{rg}B$.

Correction de l'exercice 1284 ▲

1. $\phi(P) = (-X-1)^{n-1}P\left(-\frac{1}{X+1}\right)$.
2. I.

Correction de l'exercice 1285 ▲

f n'est pas nul et donc $\dim(\mathrm{Ker}f) \leq 2$. Puisque $f^2 = 0$, $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}f$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}f) \geq \mathrm{rg}f = 3 - \dim(\mathrm{Ker}f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}f) \geq \frac{3}{2}$.

Finalement, $\dim(\mathrm{Ker}f) = 2$. $\mathrm{Ker}f$ est un plan vectoriel et $\mathrm{Im}f$ est une droite vectorielle contenue dans $\mathrm{Ker}f$.

f n'est pas nul et donc il existe e_1 tel que $f(e_1) \neq 0$ (et en particulier $e_1 \neq 0$). Posons $e_2 = f(e_1)$. Puisque $f^2 = 0$, $f(e_2) = f^2(e_1) = 0$ et e_2 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_3 de $\mathrm{Ker}f$ tel que (e_2, e_3) soit une base de $\mathrm{Ker}f$.

Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0 \Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = 0 \Rightarrow \alpha e_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ (car } e_2 \neq 0).$$

Puis, comme $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, on obtient $\beta = \gamma = 0$ (car la famille (e_2, e_3) est libre).

Finalement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et on a montré que (e_1, e_2, e_3) est libre. Puisque cette famille est de cardinal 3, c'est une base de R^3. Dans cette base, la matrice A de f s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1288 ▲

1.
2. $M^{-1} = \frac{-a}{b(na+b)}U + \frac{1}{b}I$.
3.
4. $$M^n = \frac{(na+b)^n - b^n}{n}U + b^n I \Rightarrow \begin{cases} n \text{ pair} & : a = 0, \text{ ou } -\frac{2b}{n},\ b = \pm 1 \\ n \text{ impair} & : a = 0,\ b = 1. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1289 ▲

2. $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1291 ▲

1.
2. Si A est diagonale : $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $a_{k\ell} \neq 0$: $M = I - \frac{\mathrm{tr}A}{a_{k\ell}}E_{\ell k}$.

Correction de l'exercice 1293 ▲

3. $X = -A$ ou $X = \frac{1}{2}A$ ou $X = A - I$ ou $X = -\frac{1}{2}A - I$.

Correction de l'exercice 1294 ▲

1. $J^2 = J$.
2. $JM = MJ$.
3. $k = \text{rg}J$.

Correction de l'exercice 1295 ▲

1. $\frac{A+(2-n)I}{n-1}$.
2. $\frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} a+(n-2)b & & (-b) \\ & \ddots & \\ (-b) & & a+(n-2)b \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & \pm 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & 1/a_n \\ & \dots & \\ 1/a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\text{diag}(\lambda_i) - \frac{1}{1+\lambda_1+\dots+\lambda_n}(\lambda_i\lambda_j)$.

Correction de l'exercice 1296 ▲

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, $B^{-1} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1297 ▲

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$ la famille d'éléments de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

Par définition, on a

$$\forall i \in \{1,...,n-1\},\ e'_i = ie_i + \sum_{j=i+1}^{n} e_j \text{ et } e'_n = ne_n.$$

En retranchant membre à membre ces égalités, on obtient

$$\forall i \in \{1,...,n-1\},\ e'_i - e'_{i+1} = i(e_i - e_{i+1}) \text{ et } e'_n = ne_n,$$

ou encore

$$\forall i \in \{1,...,n-1\},\ e_i - e_{i+1} = \frac{1}{i}(e'_i - e'_{i+1}) \text{ et } e_n = \frac{1}{n}e'_n.$$

Mais alors, pour $i \in \{1,...,n-1\}$, on a

$$e_i = \sum_{j=i}^{n-1}(e_j - e_{j+1}) + e_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}(e'_j - e'_{j+1}) + \frac{1}{n}e'_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j + \frac{1}{n}e'_n$$
$$= \frac{1}{i}e'_i + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j$$
$$= \frac{1}{i}e'_i - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j(j-1)}e'_j$$

Mais alors, $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(e_1,...,e_n) \subset \mathrm{Vect}(e'_1,...,e'_n)$, ce qui montre que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1,...,e'_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}^n$ et donc une base de $\mathbb{C}^n$. Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} = (a'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \text{ où } a'_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i} \text{ si } i = j \\ -\frac{1}{i(i-1)} \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 1298 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de A. Supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_i|,\ i \in \{1,...,n\}\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$.

Mais alors,

$$AX = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0$$
$$\Rightarrow |a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = |-\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j| \leq \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|.|x_j| \leq |x_{i_0}|\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0} \leq \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Donc, il est absurde de supposer que $\mathrm{Ker}A$ contient un vecteur non nul et A est bien inversible.

Correction de l'exercice 1299 ▲

Soient k et l deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$. Le coefficient ligne k, colonne l de $A\overline{A}$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{n}\omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)} = \sum_{j=1}^{n}(\omega^{k-l})^{j-1}.$$

1er cas. Si $k = l$, $\omega^{k-l} = 1$, et le coefficient vaut $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$.

2ème cas. Si $k \neq l$. On a $-(n-1) \leq k-l \leq n-1$ avec $k-l \neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n. Par suite, $\omega^{k-l} \neq 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n}(\omega^{k-l})^{j-1} = \frac{1-(\omega^{k-l})^n}{1-\omega} = \frac{1-1^{k-l}}{1-\omega} = 0.$$

En résumé, $A\overline{A} = nI_n$. Donc A est inversible à gauche et donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Correction de l'exercice 1300 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, associe le polynôme $P(X+1)$.

Par la formule du binôme de NEWTON, on voit que A est la matrice de f dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. f est clairement un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, sa réciproque étant l'application qui, à un polynôme P associe le polynôme $P(X-1)$.

A est donc inversible et $A^{-1} = (b_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $b_{i,j} = (-1)^{i+j}C_j^i$ si $i \leq j$.

Correction de l'exercice 1301 ▲

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle f.

Pour $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(M)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}m_{i,j}$ où les $a_{i,j}$ sont n^2 scalaires indépendants de M et non tous nuls.

1er cas. Supposons qu'il existe deux indices distincts k et l tels que $a_{k,l}\neq 0$. Soit $M=I_n-\frac{\sum_{i=1}^n a_{i,i}}{a_{k,l}}E_{k,l}$. M est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et M est dans H car $f(M)=\sum_{i=1}^n a_{i,i}-a_{k,l}\frac{\sum_{i=1}^n a_{i,i}}{a_{k,l}}=0$.

2ème cas. Si tous les $a_{k,l}$, $k\neq l$, sont nuls, H contient la matrice inversible $\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&&\ddots&0\\ 0&&&\ddots&1\\ 1&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1302 ▲

$A=\begin{pmatrix}1&2&0&\dots&\dots&0\\ 0&1&3&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ &&&&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&\ddots&n-1\\ 0&\dots&&\dots&0&1\end{pmatrix}=I+N$ où $N=\begin{pmatrix}0&2&0&\dots&\dots&0\\ 0&0&3&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ &&&&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&\ddots&n-1\\ 0&\dots&&\dots&0&0\end{pmatrix}$.

N est nilpotente et donc $N^n=0$. Par suite,

$$I=I-(-N)^n=(I+N)(I-N+...+(-N)^{n-1}).$$

Ainsi A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $I-N+...+(-N)^{n-1}$.

Calcul de N^p pour $1\leqslant p\leqslant n$.

$$N^2=\left(\sum_{j=2}^n jE_{j-1,j}\right)^2=\sum_{2\leqslant j,k\leqslant n}jkE_{j-1,j}E_{k-1,k}=\sum_{j=2}^{n-1}j(j+1)E_{j-1,j}E_{j,j+1}=\sum_{j=3}^n j(j-1)jE_{j-2,j}.$$

c'est-à-dire $N^2=\begin{pmatrix}0&0&2\times 3&0&\dots&0\\ \vdots&&\ddots&3\times 4&\ddots&\vdots\\ &&&\ddots&\ddots&0\\ &&&&\ddots&(n-1)n\\ \vdots&&&&&0\\ 0&\dots&&\dots&0&0\end{pmatrix}$.

Ensuite, $N^3=\left(\sum_{j=3}^n(j-1)jE_{j-2,j}\right)\left(\sum_{k=2}^n kE_{k-1,k}\right))=\sum_{j=4}^n j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}$.

Supposons que pour p donné dans $[\![1,n-1]\!]$, $N^p=\sum_{j=p+1}^n j(j-1)...(j-p+1)E_{j-p,j}$.

Alors $N^{p+1}=\left(\sum_{j=p+1}^n j(j-1)...(j-p+1)E_{j-p,j}\right)\left(\sum_{k=2}^n kE_{k-1,k}\right)=\sum_{j=p+2}^n j(j-1)...(j-p)E_{j-p-1,j}$. Ainsi

$$\boxed{A^{-1}=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\text{ où }a_{i,j}=0\text{ si }i>j,\ 1\text{ si }i=j\text{ et }(-1)^{i+j-2}\prod_{k=0}^{j-i-1}(j-k)\text{ sinon.}}$$

Correction de l'exercice 1303 ▲

On inverse A en l'interprétant comme une matrice de passage.

Soit $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e'_1,...,e_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

$$A\text{ inversible}\Leftrightarrow(e'_1,...,e'_n)\text{ base de }E\Leftrightarrow\mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)\subset\mathrm{Vect}(e'_1,...,e'_n)\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ e_i\in\mathrm{Vect}(e'_1,...,e'_n).$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Soit $u = e_1 + ... + e_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e'_i = a_ie_i + u$ ce qui fournit $e_i = \frac{1}{a_i}(e'_i - u)$.

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient $u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}e'_i - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)u$ et donc $\lambda u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}e'_i$ où $\lambda = 1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$.

1er cas. Si $\lambda \neq 0$, on peut exprimer u en fonction des e'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et donc les e_i fonction des e'_i. Dans ce cas A est inversible. Plus précisément, $u = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}e'_i$ puis, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = \frac{1}{a_i}\left(e'_i - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}e'_j\right)$ et enfin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \dots & \dots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \dots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix} \text{ où } \lambda = 1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

2ème cas. Si $\lambda = 0$, on a $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}e'_i = 0$ ce qui montre que la famille $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée et donc que A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 1304 ▲

Notons A la matrice de l'énoncé. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = (X+1)^k$. f coïncide donc sur la base $\mathscr{B}$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)$ et f est donc cet endomorphisme.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque l'application qui à un polynôme P associe $P(X-1)$. Par suite, A est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

Le coefficient ligne i, colonne j, de A^{-1} vaut donc 0 si $i > j$ et $(-1)^{i+j}\binom{j}{i}$ si $i \leqslant j$.

Correction de l'exercice 1305 ▲

Calculons $A\overline{A}$. Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\overline{A}$ vaut

$$\sum_{u=1}^n \omega^{(j-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^n \left(\omega^{j-k}\right)^{u-1}.$$

• Si $j = k$, ce coefficient vaut n.

• Si $j \neq k$, puisque $j-k$ est strictement compris entre $-n$ et n et que $j-k$ n'est pas nul, ω^{j-k} est différent de 1. Le coefficient ligne j, colonne k, de $A\overline{A}$ est donc égal à $\frac{1-\left(\omega^{j-k}\right)^n}{1-\omega^{j-k}} = \frac{1-1}{1-\omega^{j-k}} = 0$.

Finalement, $A\overline{A} = nI_n$. Ainsi, A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Correction de l'exercice 1306 ▲

Montrons que Ker$A$ est réduit à $\{0\}$. Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul X_0 tel que $AX_0 = 0$. Posons $X_0 = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i}|a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_1|,...,|x_n|\}$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$. De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|,$$

et puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient après simplification $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$ ce qui contredit les hypothèses.

Donc Ker$A = \{0\}$ et A est inversible.

Correction de l'exercice 1308 ▲

Il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 1309 ▲

$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1310 ▲

$P=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&2a&3a+2b&4a+3b+2c\\0&0&4a&12a+4b\\0&0&0&8a\end{pmatrix}$ est inversible pour $a\neq 0$.

Correction de l'exercice 1311 ▲

$N=P^{-1}AP$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1312 ▲

$B-I$ est inversible.

Correction de l'exercice 1314 ▲

oui, $P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1317 ▲

1. $\mathrm{rg}u=\mathrm{rg}(u(i),u(j),u(k))=rg(u(j),u(k),u(i))$. La matrice de cette dernière famille dans la base (i,j,k) est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

   Cette dernière famille est de rang 3. Donc, $\mathrm{rg}u=3$ et u est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Posons $e_1=u(i)$, $e_2=u(j)$ et $e_3=u(k)$.

$$\left\{\begin{array}{l}e_1=k\\e_2=i-3k\\e_3=j+3k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=e_1\\i=3e_1+e_2\\j=-3e_1+e_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u^{-1}(k)=i\\u^{-1}(i)=3i+j\\u^{-1}(j)=-3i+k\end{array}\right.$$

   et

$$A^{-1}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})=\begin{pmatrix}3&-3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. (Questions 2) et 3)). Posons $e_1=xi+yj+zk$ (e_1, e_2 et e_3 désignent d'autres vecteurs que ceux du 1)).

$$u(e_1)=e_1\Leftrightarrow(u-Id)(e_1)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x+y=0\\-y+z=0\\x-3y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z.$$

   On prend $e_1=i+j+k$.
   Posons $e_2=xi+yj+zk$.

$$u(e_2)=e_1+e_2 \Leftrightarrow (u-Id)(e_2)=e_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-x+y=1\\ -y+z=1\\ x-3y+2z=1\end{array}\right. \Leftrightarrow y=x+1 \text{ et } z=x+2.$$

On prend $e_2=j+2k$.
Posons $e_3=xi+yj+zk$.

$$u(e_3)=e_2+e_3 \Leftrightarrow (u-Id)(e_3)=e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-x+y=0\\ -y+z=1\\ x-3y+2z=2\end{array}\right. \Leftrightarrow y=x \text{ et } z=x+1.$$

On prend $e_3=k$.

La matrice de la famille (e_1,e_2,e_3) dans la base (i,j,k) est $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l}e_1=i+j+k\\ e_2=j+2k\\ e_3=k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}k=e_3\\ j=e_2-2e_3\\ i=e_1-e_2+e_3\end{array}\right.,$$

et

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

3. Voir question précédente.

4. Soit T est la matrice de u dans la base (e_1,e_2,e_3). $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Les formules de changement de bases s'écrivent $T=P^{-1}AP$ ou encore $A=PTP^{-1}$. Par suite, pour tout relatif n, $A^n=PT^nP^{-1}$.
Posons $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ puis $N^3=0$.
Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$T^n=(I+N)^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Cette formule reste claire pour $n=0$ et $n=1$. Pour $n=-1$, $(I+N)(I-N+N^2)=I+N^3=I$ et donc

$$T^{-1}=(I+N)^{-1}=I-N+N^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{(-1)(-1-1)}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

et la formule reste vraie pour $n=-1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n}=(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)^{-1}$ mais $(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)(I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2)=I$ et donc $T^{-n}=I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ T^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}A^n=PT^nP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\1&n+1&n(n+1)/2\\1&n+2&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}(n-1)(n-2)/2&-n(n-2)&n(n-1)/2\\n(n-1)/2&-(n-1)(n+1)&n(n+1)/2\\n(n+1)/2&-n(n+2)&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui fournit $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$.

Correction de l'exercice 1318 ▲

Si $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables alors nécessairement $\text{Tr}(M(a)) = \text{Tr}(N(a))$. Or, pour tout scalaire a, $\text{Tr}(M(a)) = 4-3a = \text{Tr}(N(a))$. La trace ne fournit aucun renseignement.

On doit aussi avoir $\det(M(a)) = \det(N(a))$. Or, $\det(N(a)) = (1-a)^2(2-a)$ et

$$\begin{aligned}\det(M(a)) &= (4-a)(a^2-1-2)+6(1-a+1)+2(2-1-a) = (4-a)(a^2-3)+14-8a = -a^3+4a^2-5a+2\\ &= (a-1)^2(2-a) = \det(N(a)).\end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (i,j,k)$ de $\mathbb{K}^3$.

Le problème posé équivaut à l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $f(e_1) = (1-a)e_1$, $f(e_2) = (1-a)e_2+e_1$ et $f(e_3) = (2-a)e_3$. Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{K}^3$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3x+y-z=0\\ -6x-2y+2z=0\\ 2x+y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-2x\\ z=x\end{array}\right.$. On peut prendre $e_1 = (1,-2,1)$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z)+(1,-2,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3x+y-z=1\\ -6x-2y+2z=-2\\ 2x+y=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-2x-1\\ z=x-2\end{array}\right.$. On peut prendre $e_2 = (0,-1,-2)$.

• $f((x,y,z)) = (2-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+y-z=0\\ -6x-3y+2z=0\\ 2x+y-z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-2x\\ z=0\end{array}\right.$. On peut prendre $e_3 = (1,-2,0)$.

La matrice de la famille $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est $P = \begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-1&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}$. $\det P = -4+4+1 = 1 \neq 0$ et donc la famille $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$. Puisque $\text{Mat}_{\mathscr{B}_0} f = M(a)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}} f = N(a)$, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables.

Correction de l'exercice 1319 ▲

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe P élément de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).

Posons $P = Q+iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais cet exercice n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.

On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout réel x, $(Q+xR)B = A(Q+xR)$.

Maintenant, $\det(Q+xR)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2=-1$) est $\det P$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x, éventuellement nul, tels que $\det(Q+xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q+x_0R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0A = BP_0$ et A et B sont bien semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 1327 ▲

1.

2. Pour $i<j$, on doit avoir $M(I+E_{ij}) = (I+E_{ij})M \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}a_{ki}=0 & \text{si } k\neq i\\ a_{jk}=0 & \text{si } k\neq j\end{array}\right. \Rightarrow M = \begin{pmatrix}1&0&\dots&0&*\\ &\ddots&\ddots&&0\\ &&\ddots&\ddots&\vdots\\ &0&&\ddots&0\\ &&&&1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1328 ▲

$(\alpha+\text{tr}A)\text{tr}X = \text{tr}B$.

Si $\alpha(\alpha+\mathrm{tr}A)\neq 0$: solution unique : $X=\frac{1}{\alpha}\left(B-\frac{\mathrm{tr}B}{\alpha+\mathrm{tr}A}A\right)$.
Si $\alpha=0$: solutions ssi A et B sont proportionnelles.
Si $\alpha+\mathrm{tr}A=0$: solutions ssi $\mathrm{tr}B=0$: $X=\frac{1}{\alpha}B+\lambda A$.

Correction de l'exercice 1334 ▲

2. $u_{|\operatorname{Im}v}=\mathrm{id}\Rightarrow \mathrm{tr}\big(u_{|\operatorname{Im}v}\big)=\mathrm{rg}v\Rightarrow \mathrm{tr}\big(v_{|\operatorname{Im}v}\big)=k\,\mathrm{rg}v$.

Correction de l'exercice 1336 ▲

$M_k=A^kM_0+S_kB$ avec $S_k=I+A+\cdots+A^{k-1}=(I-A^k)(I-A)^{-1}$ si $I-A$ est inversible.

Correction de l'exercice 1337 ▲

1. $A^3-(\lambda+\mu)A^2+\lambda\mu A=0$.
2. $U=\frac{\mu A-A^2}{\lambda(\mu-\lambda)}$, $V=\frac{\lambda A-A^2}{\mu(\lambda-\mu)}$ et la valeur propre est 0, λ ou μ.

Correction de l'exercice 1340 ▲

1. Compacité.
2. Si $x_1=0$, on pose $Y=\begin{pmatrix}\alpha\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$:

   $R(Y)\geq\min\Big(a_{11}+\frac{a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}{\alpha},\frac{\alpha a_{21}}{x_2}+R(X_0),\ldots,\frac{\alpha a_{n1}}{x_n}+R(X_0)\Big)>R(X_0)$ pour $\alpha>0$ assez petit.
3. Si $y_1>0$, on pose $X=X_0+\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$:

   $AX-RX=Y+\alpha\begin{pmatrix}a_{11}-R\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$, donc pour $\alpha>0$ assez petit, $R(X)>R$.
4. Inégalité triangulaire.

Correction de l'exercice 1341 ▲

1.
2. La base canonique de E est $(F_{ij}=E_{ij}-E_{ji})_{1\leq i<j\leq n}$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: Si $M\in E$, la coordonnée de M suivant F_{ij} est le coefficient d'indices i,j de M. En particulier, en notant $A=(a_{ij})$, la coordonnée de $f(F_{ij})$ suivant F_{ij} est $a_{ii}+a_{jj}$, donc :
$$\mathrm{tr}f=\sum_{i,j}(a_{ii}+a_{jj})=(n-1)\mathrm{tr}A.$$

Correction de l'exercice 1343 ▲

Soit φ un tel morphisme. Alors pour toute matrice $M\in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\dot{0}=p\varphi(M)=\varphi(M^p)$, donc φ s'annule sur toute matrice qui est une puissance p-ème. Notons $P(i,j,\alpha)$ la matrice de l'opération élémentaire $L_i\leftarrow L_i+\alpha L_j$, qui est aussi la matrice de l'opération élémentaire $C_j\leftarrow C_j+\alpha C_i$. Toute matrice $M\in GL_n(\mathbb{R})$ peut être transformée, à l'aide de ces seules opérations élémentaires, en une matrice $M'=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\det(M))$ par une adaptation de l'algorithme de Gauss. Comme $P(i,j,\alpha)=P(i,j,\alpha/p)^p$ et $\det(M)=\pm(|\det(M)|^{1/p})^p$, on obtient : $\varphi(M)=\dot{0}$ si $\det(M)>0$ et $\varphi(M)=\varphi(\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1))=x$ si $\det(M)<0$. Réciproquement, la fonction φ ainsi définie est effectivement un morphisme de groupe si et seulement si $2x=\dot{0}$, soit $x=\dot{0}$ pour p impair, et $x\in\{\dot{0},\dot{q}\}$ pour $p=2q$.

Correction de l'exercice 1344 ▲

1. La démonstration la plus simple apparaîtra dans le chapitre suivant : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ou encore si et seulement si aucun des coefficients diagonaux n'est nul.

   Pour l'instant, le plus simple est d'utiliser le rang d'une matrice. Si aucun des coefficients diagonaux n'est nul, on sait que le rang de la matrice est son format et donc que cette matrice est inversible.

   Réciproquement, notons $(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que A soit une matrice triangulaire inférieure dont le coefficient ligne i, colonne i, est nul. Si $i=n$, la dernière colonne de A est nulle et A n'est pas de rang n et donc n'est pas inversible. Si $i<n$, alors les $n-i+1$ dernières colonnes sont dans $\text{Vect}(e_{i+1},...,e_n)$ qui est de dimension au plus $n-i(<n-i+1)$, et encore une fois, la famille des colonnes de A est liée.

2. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}'=(e_n,...,e_1)$. $\mathscr{B}'$ est encore une base de $\mathbb{K}^n$. Soit alors P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ puis A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $A'=P^{-1}AP$ et donc que A et A' sont semblables.

   Vérifions alors que A' est une matrice triangulaire inférieure. Pour $i\in\{1,...,n\}$, posons $e'_i=e_{n+1-i}$. A est triangulaire supérieure. Donc, pour tout i, $f(e_i)\in\text{Vect}(e_1,...,e_i)$. Mais alors, pour tout $i\in\{1,...,n\}$, $f(e'_{n+1-i})\in\text{Vect}(e'_n,...,e'_{n+1-i})$ ou encore, pour tout $i\in\{1,...,n\}$, $f(e'_i)\in\text{Vect}(e'_n,...,e'_i)$. Ceci montre que A' est une matrice triangulaire inférieure.

Correction de l'exercice 1345 ▲

1. $E=\text{Vect}(I,J)$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La famille (I,J) est clairement libre et donc est une base de E. Par suite, $\dim E=2$.

2. $J^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=2J-I$. Plus généralement, pour $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$,
$$M(x,y)M(x',y')=(xI+yJ)(x'I+y'J)=xx'I+(xy'+yx')J+yy'J^2=(xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J\ (*).$$
   Montrons alors que $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.
   E contient $I=1.I+0.J$. $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$ et, d'après $(*)$, E est stable pour $\times$. Donc, $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

3. Soit $((x,y),(x',y'))\in(\mathbb{R}^2)^2$.
$$M(x,y)M(x',y')=I\Leftrightarrow(xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J=I\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}xx'-yy'=1\\yx'+(x+2y)y'=0\end{array}\right..$$
   Le déterminant de ce dernier système d'inconnues x' et y' vaut $x(x+2y)+y^2=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$. Si $y\neq-x$, ce système admet un et seule couple solution. Par suite, si $y\neq-x$, il existe $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tel que $M(x,y)M(x',y')=I$. Dans ce cas, la matrice $M(x,y)$ est inversible dans E.

   Si $y=-x$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}x(x'+y')=1\\-x(x'+y')=0\end{array}\right.$ et n'a clairement pas de solution.

4. (a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$M(x,y)^2=I\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\2y(x+y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=1\end{array}\right.\text{ ou}\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x+y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=-1\end{array}\right..$$
   Dans E, l'équation $X^2=I$ admet exactement deux solutions à savoir I et $-I$.

   (b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$M(x,y)^2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=0\\2y(x+y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=0\end{array}\right.\text{ ou}\left\{\begin{array}{l}y=-x\\0=0\end{array}\right.\Leftrightarrow y=-x.$$
   Dans E, l'équation $X^2=0$ admet pour solutions les matrices de la forme $\lambda(J-I)=\begin{pmatrix}0&\lambda\\0&0\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

   (c) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}M(x,y)^2=M(x,y)&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=x\\2y(x+y)=y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=x\\y(2x+2y-1)=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=x\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=-x+\frac12\\x^2-(-x+\frac12)^2=x\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}\frac14=0\\y=-x+\frac12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right..\end{aligned}$$
   Dans E, l'équation $X^2=X$ admet exactement deux solutions à savoir 0 et I.

Correction de l'exercice 1346 ▲

Soit (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On cherche $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ et $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ tels que

$$f\circ g(e_1)=-e_2+e_3,\ f\circ g(e_2)=-e_1+e_3 \text{ et } f\circ g(e_3)=-e_1-e_2+2e_3(=f\circ g(e_1+e_2)).$$

On pose $g(e_1)=i$, $g(e_2)=j$ et $g(e_3)=i+j$, puis $f(i)=-e_2+e_3$ et $f(j)=-e_1+e_3$. Les applications linéaires f et g conviennent, ou encore si on pose

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

alors $AB=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

A et B désignent maintenant deux matrices quelconques, éléments de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ respectivement, telles que $AB=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

Calculons $(AB)^2$. On obtient

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=AB.$$

Mais alors, en multipliant les deux membres de cette égalité par B à gauche et A à droite, on obtient

$$(BA)^3=(BA)^2\ (*).$$

Notons alors que

$$\text{rg}(BA)\geq\text{rg}(ABAB)=\text{rg}((AB)^2)=\text{rg}(AB)=2,$$

et donc, BA étant une matrice carrée de format 2, $\text{rg}(BA)=2$. BA est donc une matrice inversible. Par suite, on peut simplifier les deux membres de l'égalité $(*)$ par $(BA)^2$ et on obtient $BA=I_2$.

Correction de l'exercice 1347 ▲

Soit $A=(a_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A commute avec toute matrice, en particulier : $\forall(i,j)\in\{1,...,n\}^2$, $AE_{i,j}=E_{i,j}A$. Maintenant,

$$AE_{i,j}=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}E_{k,j} \text{ et } E_{i,j}A=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n}a_{j,l}E_{i,l}.$$

On note que si $k\neq i$ ou $l\neq j$, $E_{k,j}\neq E_{i,l}$. Puisque la famille $(E_{i,j})$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient : si $k\neq i$, $a_{k,i}=0$. D'autre part, le coefficient de $E_{i,j}$ est $a_{i,i}$ dans la première somme et $a_{j,j}$ dans la deuxième. Ces coefficients doivent être égaux.

Finalement, si A commute avec toute matrice, ses coefficients non diagonaux sont nuls et ses coefficients diagonaux sont égaux. Par suite, il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $A=\lambda I_n$. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, A commute avec toute matrice.

Correction de l'exercice 1348 ▲

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H=\text{Ker}f$.

Pour $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, posons $f(A)=\sum_{1\leq i,j\leq n}\alpha_{i,j}a_{i,j}$.

1er cas. Supposons $\exists(i,j)\in\{1,...,n\}^2/\ i\neq j$ et $\alpha_{i,j}\neq 0$. On pose alors $S=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,k}$ et on considère $A=\sum_{k=1}^{n}E_{k,k}-\frac{S}{\alpha_{i,j}}E_{i,j}$.
A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et est donc inversible.
De plus, $f(A)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,k}-\frac{S}{\alpha_{i,j}}\alpha_{i,j}=S-S=0$ et A est élément de H.

2ème cas. Supposons $\forall(i,j)\in\{1,...,n\}^2$, $(i\neq j\Rightarrow\alpha_{i,j}=0)$. Alors, $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,i}a_{i,i}$. Soit $A=E_{n,1}+E_{2,1}+E_{3,2}+...+E_{n-1,n}$. A est inversible car par exemple égale à la matrice de passage de la base canonique $(e_1,e_2,...,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $(e_n,e_1,...,e_{n-1})$. De plus, $f(A)=0$.

Correction de l'exercice 1350 ▲

1. Soit $(i,j)\in\{1,...,p\}\times\{1,...,r\}$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $M+N$ est la somme du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice M et du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice N ou encore la somme du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A et du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A'. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc
$$M+N=\begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D'\end{pmatrix}.$$
2. Posons $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D'\end{pmatrix}$ où $A\in\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $B\in\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C\in\mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $D\in\mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K})$, puis $A'\in\mathscr{M}_{t,p}(\mathbb{K})$, $B'\in\mathscr{M}_{u,p}(\mathbb{K})$, $C'\in\mathscr{M}_{t,q}(\mathbb{K})$, $D'\in\mathscr{M}_{u,q}(\mathbb{K})$ (le découpage de M en colonne est le même que le découpage de N en lignes).
Soit alors $(i,j)\in\{1,...,r\}\times\{1,...,t\}$. Le coefficient ligne i, colonne j de la matrice MN vaut
$$\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}=\sum_{k=1}^{p} m_{i,k}n_{k,j}+\sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}.$$
Mais, $\sum_{k=1}^{p} m_{i,k}n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit AA' et $\sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit BC'. Finalement, $\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit $AA'+BC'$. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc
$$MN=\begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD'\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1351 ▲

1. Un vecteur non nul x est colinéaire à son image si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $u(x)=\lambda x$. Les nombres λ correspondants sont les complexes tels qu'il existe un vecteur $x\neq 0$ dans $\text{Ker}(u-\lambda Id)$ ou encore tels que $A-\lambda I_4\notin\mathscr{GL}_4(\mathbb{C})$.
Le déterminant de $A-\lambda I_4$ vaut :
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 & 0\\ -12 & -7-\lambda & 0 & 0\\ 20 & 11 & -6-\lambda & -12\\ -12 & -6 & 6 & 11-\lambda\end{vmatrix} &= (7-\lambda)\begin{vmatrix} -7-\lambda & 0 & 0\\ 11 & -6-\lambda & -12\\ -6 & 6 & 11-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -12 & 0 & 0\\ 20 & -6-\lambda & -12\\ -12 & 6 & 11-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(7-\lambda)(-7-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -12\\ 6 & 11-\lambda\end{vmatrix}-4(-12)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -12\\ 6 & 11-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-7)(\lambda+7)(\lambda^2-5\lambda+6)+48(\lambda^2-5\lambda+6)\\ &=(\lambda^2-5\lambda+6)(\lambda^2-49+48)=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)\end{aligned}$$
Ainsi, $A-\lambda I_4\notin\mathscr{GL}_4(\mathbb{C})\Leftrightarrow\lambda\in\{-1,1,2,3\}$.
- Cas $\lambda=-1$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.
$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in\text{Ker}(u+Id)&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 8x+4y=0\\ -12x-6y=0\\ 20x+11y-5z-12t=0\\ -12x-6y+6z+12t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-2x\\ -2x-5z-12t=0\\ z+2t=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-2x\\ z=-2t\\ -2x-2t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-2x\\ t=-x\\ z=2x\end{array}\right..\end{aligned}$$
Donc, $\text{Ker}(u+Id)=\text{Vect}(e_1)$ où $e_1=(1,-2,2,-1)$.
- Cas $\lambda=1$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u - Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x + 4y = 0 \\ -12x - 8y = 0 \\ 20x + 11y - 7z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 10t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ 20x + 11y - 7z - 12t = 0 \\ -6x - 3y + 3z + 5t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ 14z + 24t = 7x \\ 6z + 10t = 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \\ t = 0 \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u - Id) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (2, -3, 1, 0)$.
- Cas $\lambda = 2$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u - Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 4y = 0 \\ -12x - 9y = 0 \\ 20x + 11y - 8z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 9t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 02z + 3t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = 0 \\ z = -\frac{3}{2}t \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u - 2Id) = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0, 0, 3, -2)$.
-Cas $\lambda = 3$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u - Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x + 4y = 0 \\ -12x - 10y = 0 \\ 20x + 11y - 9z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 8t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 03z + 4t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = 0 \\ z = -\frac{4}{3}t \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u - 3Id) = \mathrm{Vect}(e_4)$ où $e_4 = (0, 0, 4, -3)$.

Soit P la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) dans la base canonique (i, j, k, l). On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Montrons que P est inversible et déterminons son inverse.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i - 2j + 2k - l \\ e_2 = 2i - 3j + k \\ e_3 = 3k - 2l \\ e_4 = 4k - 3l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 3e_3 - 2e_4 \\ l = 4e_3 - 3e_4 \\ e_1 = i - 2j + 2(3e_3 - 2e_4) - (4e_3 - 3e_4) \\ e_2 = 2i - 3j + (3e_3 - 2e_4) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 3e_3 - 2e_4 \\ l = 4e_3 - 3e_4 \\ i - 2j = e_1 - 2e_3 + e_4 \\ 2i - 3j = e_2 - 3e_3 + 2e_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 3e_3 - 2e_4 \\ l = 4e_3 - 3e_4 \\ i = -3e_1 + 2e_2 + e_4 \\ j = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Vect}(i, j, k, l) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Donc, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de $\mathbb{C}^4$ et donc une base de $\mathbb{C}^4$. Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Les formules de changement de bases s'écrivent $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 2, 3)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons A^n.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3(-1)^n & -2(-1)^n & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 3.2^n & 4.2^n \\ 3^n & 0 & -2.3^n & -3.3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3(-1)^n+4 & -2(-1)^n+2 & 0 & 0 \\ 6(-1)^n-6 & 4(-1)^n-3 & 0 & 0 \\ -6(-1)^n+2+4.3^n & -4(-1)^n+1+3.2^n & 9.2^n-8.3^n & 12(2^n-3^n) \\ 3((-1)^n-3^n) & 2((-1)^n-2^n) & 6(3^n-2^n) & -8.2^n+9.3^n \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1352 ▲

Cherchons une matrice A de format $(3,2)$ et une matrice B de format $(2,3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Posons $E = \mathbb{R}^2$ et notons (i,j) la base canonique de E.

Posons $F = \mathbb{R}^3$ et notons (e_1,e_2,e_3) la base canonique de F.

Le problème posé matriciellement peut aussi s'énoncer en termes d'applications linéaires : trouvons $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $f\circ g(e_1) = 8e_1+2e_2-2e_3$, $f\circ g(e_2) = 2e_1+5e_2+4e_3$ et $f\circ g(e_3) = -2e_1+4e_2+5e_3$.

Remarquons tout d'abord que le problème posé n'a pas nécessairement de solution car par exemple $\text{rg}(f\circ g) \leqslant \text{Min}\{f,g\} \leqslant \dim E = 2$ et si la matrice proposée est de rang 3 (c'est à dire inversible), le problème posé n'a pas de solution.

Ici, $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8\times 9 - 2\times 18 - 2\times 18 = 0$ et la matrice proposée est de rang au plus 2 puis de rang 2 car ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.

Une relation de dépendance des colonnes est $C_1 = 2C_2 - 2C_3$.

Un couple (f,g) solution devra vérifier $f\circ g(e_1) = 2f\circ g(e_2) - 2f\circ g(e_3)$.

Prenons n'importe quoi ou presque pour $g(e_2)$ et $g(e_3)$ mais ensuite prenons $g(e_1) = 2g(e_2) - 2g(e_3)$.

Par exemple, posons $g(e_2) = i$, $g(e_3) = j$ et $g(e_1) = 2i-2j$ puis $f(i) = 2e_1+5e_2+4e_3$ et $f(j) = -2e_1+4e_2+5e_3$ ou encore soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Soient A et B deux matrices de formats respectifs $(3,2)$ et $(2,3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculons BA (il n'y a bien sûr pas unicité de A et B, mais l'énoncé suggère que le produit BA doit être indépendant de A et B).

Tout d'abord

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9AB.$$

De plus, $\text{rg}(BA) \geqslant \text{rg}(A(BA)B) = \text{rg}((AB)^2) = \text{rg}(9AB) = \text{rg}(AB) = 2$ et donc $\text{rg}(BA) = 2$ puis $BA \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.

De l'égalité $(AB)^2 = 9AB$, on tire après multiplication à gauche par B et à droite par A, $(BA)^3 = 9(BA)^2$ et, puisque BA est une matrice carrée inversible et donc simplifiable pour la multiplication des matrices, $BA = 9I_2$.

$$\boxed{BA = 9I_2.}$$

Correction de l'exercice 1353 ▲

Soit $A = \sum_{M\in G} M$. Alors $A^2 = \sum_{(M,N)\in G^2} MN$.

Soit $M \in G$ fixée. Considérons l'application φ de G dans G qui à un élément N de G associe MN. Puisque G est stable pour le produit, φ est bien une application. Plus précisément, φ est une permutation de G car l'application ψ de G dans lui-même qui à un élément N de G associe $M^{-1}N$ vérifie $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = Id_G$. On en déduit que

$$A^2 = \sum_{M \in G} \left(\sum_{N \in G} MN\right) = \sum_{M \in G} A = pA \text{ où } p = \text{card}(G).$$

Finalement, la matrice $P = \frac{1}{p}A$ est idempotente car $\left(\frac{1}{p}A\right)^2 = \frac{1}{p^2}pA = \frac{1}{p}A$. Comme A est une matrice de projection, on sait que $\text{rg}P = \text{Tr}P = \sum_{M \in G} \text{Tr}M = 0$ et donc $P = 0$ ou encore $\sum_{M \in G} M = 0$.

Correction de l'exercice 1354 ▲

Par la même méthode qu'au 1353, on voit que $f = \frac{1}{p}\sum_{g \in G} g$ est un projecteur et donc $\frac{1}{p}\sum_{g \in G} \text{Tr}g = \text{rg}f$. Maintenant, si x est un élément de F alors pour tout g dans G, $g(x) = x$ et donc $f(x) = x$. Ainsi, un élément x de F est dans $\text{Im}f$.

Inversement, soit x un élément de $\text{Im}f$. Pour $g \in G$,

$$g(x) = g(f(x)) = \frac{1}{p}\sum_{h \in G} g \circ h(x) = \frac{1}{p}\sum_{h \in G} h(x) = f(x) = x.$$

(Comme au 1353, l'application qui, pour $g \in G$ fixé, associe à un élément h de G l'élément $g \circ h$, est une permutation de G).

Ainsi, l'élément x de $\text{Im}f$ est dans F. On a montré que $F = \text{Im}f$. Puisque f est un projecteur, on en déduit que

$$\dim F = \text{rg}f = \text{Tr}f = \frac{1}{p}\sum_{g \in G} \text{Tr}g.$$

Correction de l'exercice 1355 ▲

Comme à l'exercice 1353, la matrice $A = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} A_k$ est idempotente et donc $\text{Tr}A = \text{rg}A$ d'après le 1166. Par suite, $\text{Tr}(A_1) + \ldots + \text{Tr}A_p = p\text{rg}A$ est un entier divisible par p.

Correction de l'exercice 1356 ▲

On note $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\text{Tr}f = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ désigne la (i,j)-ème coordonnée de $f(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$ dans la base $\mathscr{B}$.

Mais pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ donné,

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j}$ puis

$$\text{Tr}f = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(a_{i,i} + a_{j,j}) = 2\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,i} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) = 2\sum_{j=1}^{n} \text{Tr}A = 2n\text{Tr}A.$$

$$\boxed{\text{Tr}f = 2n\text{Tr}A.}$$

Correction de l'exercice 1357 ▲

Si M est solution, nécessairement $a\text{Tr}M + (\text{Tr}M)(\text{Tr}A) = \text{Tr}B$ ou encore $(\text{Tr}M)(a + \text{Tr}A) = \text{Tr}B$.

1er cas. Si $\text{Tr}A \neq -a$ alors nécessairement $\text{Tr}M = \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}$ puis $M = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)$.

Réciproquement, si $M = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)$ alors

$$aM+(TrM)A = B - \frac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}A + \frac{1}{a}\left(\mathrm{Tr}B - \frac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}\mathrm{Tr}A\right)A = B.$$

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}A \neq -a,\ \mathscr{S} = \left\{\frac{1}{a}\left(B - \frac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}A\right)\right\}.}$$

2ème cas. Si $\mathrm{Tr}A = -a$ et $\mathrm{Tr}B \neq 0$, il n'y a pas de solution .

3ème cas. Si $\mathrm{Tr}A = -a$ et $\mathrm{Tr}B = 0$, M est nécessairement de la forme $\frac{1}{a}B + \lambda A$ où λ est un réel quelconque.

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $M = \frac{1}{a}B + \lambda A$. Alors

$$aM + (\mathrm{Tr}M)A = B + a\lambda A + \left(\frac{1}{a}\mathrm{Tr}B + \lambda \mathrm{Tr}A\right)A = B + a\lambda A - a\lambda A = B,$$

et toute matrice de la forme $B + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}A = -a,\ \mathscr{S} = \varnothing \text{ si } \mathrm{Tr}B \neq 0 \text{ et } \mathscr{S} = \{B + \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ si } \mathrm{Tr}B = 0.}$$

Correction de l'exercice 1358 ▲

1. $E = \mathrm{Vect}(I,J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille (I,J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc $\dim E = 2$.
2. Puisque $(E,+,.)$ est un espace vectoriel, $(E,+)$ est un groupe commutatif.
   Ensuite, $I^2 = I \in E$, $IJ = JI = J \in E$ et $J^2 = (I + E_{1,2})^2 = I + 2E_{1,2} = I + 2(J-I) - I = 2J - I \in E$. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est interne dans E et commutative. De plus, $I \in E$ et finalement E est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Remarque. $M(x,y)M(x',y') = xx'I + (xy' + yx')J + yy'(2J - I) = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J$.
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \text{ est inversible dans } E &\Leftrightarrow \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2/; (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J = I \\ &\Leftrightarrow \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2/; \left\{\begin{array}{l} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x+2y)y' = 0 \end{array}\right. \text{ (car la famille } (I,J) \text{ est libre)} \quad (*). \end{aligned}$$

   Le déterminant de ce système d'inconnue (x',y') est $x(x+2y) + y^2 = (x+y)^2$.
   • Si $x + y \neq 0$, le système $(*)$ admet une et une seule solution. Dans ce cas, $M(x,y)$ est inversible dans E.
   • Si $x + y = 0$, le système $(*)$ s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x(x'+y') = 1 \\ -x(x'+y') = 0 \end{array}\right.$ et n'a pas de solution. Dans ce cas, $M(x,y)$ n'est pas inversible dans E.

$$\boxed{M(x,y) \text{ est inversible dans } E \Leftrightarrow x + y \neq 0.}$$

   Remarque. Puisque $I \in E$, $M(x,y)$ est inversible dans E si et seulement si $M(x,y)$ est inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Posons $X = xI + yJ$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) D'après 1), $X^2 = (x^2 - y^2)I + (2xy + 2y^2)J$. Donc

$$\begin{aligned} X^2 = I &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \text{ (car la famille } (I,J) \text{ est libre)} \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 1) \text{ ou } (y = -xet0 = 1) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x = -1) \\ &\Leftrightarrow X = I \text{ ou } X = -I. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{I, -I\}.}$$

   (b)

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 0) \text{ ou } (y = -xet0 = 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x(I - J),\ x \in \mathbb{R}\}.}$$

Remarque. L'équation $X^2 = 0$, de degré 2, admet une infinité de solutions dans E ce qui montre une nouvelle fois que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

(c)

$$\begin{aligned}X^2 = X &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x \text{ et } 2xy + 2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x+2y-1) = 0 \text{ et } x^2 - y^2 = x\\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = x) \text{ ou } (2(x+y) = 1 \text{ et } (x+y)(x-y) = x) \Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = I) \text{ ou } (2(x+y) = 1 \text{ et } x-y = 2x)\\ &\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = I.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0, I\}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M(x,y) = xI + y(I+N) = (x+y)I + yN$.

Puisque I et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\begin{aligned}(M(x,y))^n &= ((x+y)I + yN) = (x+y)^n I + ny(x+y)^{n-1}N \text{ (car } N^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 2)\\ &= \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M(x,y))^n = \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 1359 ▲

$\{0\}$ est un idéal bilatère de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Soit I un idéal non nul de de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$. Montrons que $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il existe une matrice A non nulle dans I. Pour tout quadruplet d'indices (i,j,k,l), I contient le produit

$$E_{i,j}AE_{k,l} = \sum_{1 \leqslant u,v \leqslant n} a_{u,v}E_{i,j}E_{u,v}E_{k,l} = a_{j,k}E_{i,l}.$$

A est non nulle et on peut choisir j et k tels que $a_{j,k}$ soit non nul. I contient alors $a_{j,k}E_{i,l}\frac{1}{a_{j,k}}I_n = E_{i,l}$. Finalement I contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}I_nE_{i,j} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

$$\boxed{\text{Les idéaux bilatères de l'anneau } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times) \text{ sont } \{0\} \text{ et } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Correction de l'exercice 1360 ▲

Non, car $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}(I_n)$.

Correction de l'exercice 1361 ▲

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, posons $f(A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j}a_{i,j}$ où les $\alpha_{i,j}$ sont indépendants de A (les $\alpha_{i,j}$ sont les $f(E_{i,j})$).

Soient i et j deux entiers distincts pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$\alpha_{i,i} = f\left(E_{i,i}\right) = f\left(E_{i,j}E_{j,i}\right) = f\left(E_{j,i}E_{i,j}\right) = f\left(E_{j,j}\right) = \alpha_{j,j},$$

et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant α la valeur commune des $\alpha_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pour toute matrice A on a $f(A) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \alpha \mathrm{Tr} A$ où α est indépendant de A. (Réciproquement, les $f = \alpha \mathrm{Tr}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont des formes linéaires vérifiant $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$.)

Correction de l'exercice 1362 ▲

Puisque $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi, \pi[$ tel que

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin\theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice A_n s'écrit alors $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ et donc

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2} \times o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(o(1)) \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Ensuite, en notant ε le signe de a, $\theta_n = \varepsilon \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et on en déduit que

$$n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin(\theta_n) = n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\to} a.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 1363 ▲

Soient i et j deux indices pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$f(E_{i,j}) = E_{i,j}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & {}^tA \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1364 ▲

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 + A^{p-2}BA^2 - \dots + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0}(A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1}) = \sum_{k=0} A^{p-k-1}(AB-BA)A^k = \sum_{k=0} A^{p-k-1}AA^k \sum_{k=0} A^p \\ &= pA^p. \end{aligned}$$

Donc $2010 \times \mathrm{Tr}(A^{2010}) = \mathrm{Tr}(2010\, A^{2010}) = \mathrm{Tr}(A^{2010}B) - \mathrm{Tr}(BA^{2010}) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A^{2010}) = 0$.

Correction de l'exercice 1365 ▲

1. Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B. Puisque A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,
• si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et donc $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
• si $k \leqslant p-1$ alors $p+q-1-k \geqslant q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.
Finalement, $(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ et $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.
Les sommes définissant $\exp A$, $\exp B$ et $\exp(A+B)$ sont finies car A, B et $A+B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j\right) \text{ (toutes les sommes sont finies)} \\ &= \exp A \times \exp B.\end{aligned}$$

2. Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A. Donc $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n$. $\exp A$ est inversible à gauche et donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.
3. Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1366 ▲

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r+x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r+x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp'-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.
De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'} \frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.
2. *Méthode "classique"*. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p,q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow$ p^2 impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Autre méthode. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p,q \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cet ensemble $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ qui est non vide car $q \in \mathcal{N}$. On peut alors prendre le plus petit élément de $\mathcal{N}$: $n_0 = \min \mathcal{N}$. En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Il se trouve que n_1 appartient aussi à $\mathcal{N}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0. Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2}-1) < n_0$ et est non nul.
Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathcal{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Ceci fournit une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r)$. D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction de l'exercice 1372 ▲

1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\text{pgcd}(\alpha,\beta)=1$. Pour $p(\frac{\alpha}{\beta})=0$, alors $\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n = 0.$$
En factorisant tous les termes de cette somme sauf le premier par β, nous écrivons $a_n\alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n\alpha^n$, mais comme β et α^n sont premier entre eux alors par le lemme de Gauss β divise a_n. De même en factorisant par α tous les termes de la somme ci-dessus, sauf le dernier, nous obtenons $\alpha q' + a_0\beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0.
2. Notons $\gamma = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5+2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $\left(\gamma^2-5\right)^2 = 4\times 2\times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2-5)^2 - 24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Vu notre choix de p, nous avons $p(\gamma)=0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus haut degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction de l'exercice 1374 ▲

1. Soit $p = 1997\,1997\ldots1997$ et $q = 1\,0000\,0000\ldots0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.
2. Remarquons que $10\,000\times M = 1997,1997\,1997\ldots$ Alors $10\,000\times M - M = 1997$; donc $9999\times M = 1997$ d'où $M = \frac{1997}{9999}$.
3. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$, $0,222\ldots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction de l'exercice 1376 ▲

Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel. Il s'écrit alors $\frac{p}{q}$ avec $p \geqslant 0, q > 0$ des entiers. On obtient $q\ln 3 = p\ln 2$. En prenant l'exponentielle nous obtenons : $\exp(q\ln 3) = \exp(p\ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p \geq 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde. Donc $p=0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q=0$. La seule solution possible est $p=0$, $q=0$. Ce qui contredit $q \neq 0$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 1379 ▲

Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$; autrement dit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=0,\ldots,N-1}\{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell+1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M'$. De même en posant $m = \min_{n=0,\ldots,N-1}\{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell-1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m'$.

Correction de l'exercice 1380 ▲

Il est facile de se convaincre que (u_n) n'a pas de limite, mais plus délicat d'en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$
n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers deux limites ℓ et ℓ'. Alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = \ell + \ell'$.

De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doit forcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante.

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite (u_n) n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).

Rappel. Une *sous-suite* de (u_n) (on dit aussi *suite extraite* de (u_n)) est une suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de ||| dans |||. Cette fonction ϕ correspond “au choix des indices qu'on veut garder” dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite (u_n) que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). On a que $v_n = 1+1/2n \to 1$ et que $w_n = -1+1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :

Théorème : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ (le théorème est encore vrai si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$). Alors, toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.

Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = \ell$ et $\lim w_n = \ell$ donc $\ell = 1$ et $\ell = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 1385 ▲

Pour $r < 0$, on a $\left|r-\sqrt{a}\right| \geq \frac{1}{q^2}$.

Pour $r \geq 0$, on pose $a = \frac{m}{n}$: $|r^2 - a| = \left|\frac{p^2}{q^2} - \frac{m}{n}\right| \geq \frac{1}{nq^2}$.

Donc $\left|r-\sqrt{a}\right| \geq \frac{1}{nq^2\left|r+\sqrt{a}\right|} \geq \frac{1/n\sqrt{a}}{q^2}$.

Correction de l'exercice 1386 ▲

$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a+\sqrt{b}} \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b} \Leftrightarrow b+4xy-4\sqrt{bxy} = (x+y-a)^2$.

$\Rightarrow$: $bxy = r^2 \Rightarrow \sqrt{b}\left(1-\frac{2r}{b}\right) = x+y-a \Rightarrow r = \frac{b}{2}$ et $x+y = a \Rightarrow (x-y)^2 = a^2-b$.

$\Leftarrow$: $a^2 - b = u^2$. On prend $x = \frac{a+u}{2}$ et $y = \frac{a-u}{2}$ $\Rightarrow x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b}$.

Correction de l'exercice 1387 ▲

$= \frac{q-1}{2}$.

Correction de l'exercice 1388 ▲

Si $p \in P$: $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n}{p} \in A$ avec $n \wedge p = 1$.

Alors pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{nx+py}{p} \in A$, donc $\frac{1}{p}\mathbb{Z} \subset A$.

Correction de l'exercice 1390 ▲

1. Si $x_n = \frac{p}{q} \neq 0$: $\frac{1}{k_n} \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{k_n-1}, \Rightarrow x_{n+1} = \frac{k_n p - q}{k_n q}$ et $0 \leq k_n p - q < p$. Donc la suite des numérateurs est strictement décroissante.
2. Car $x_{n+1} = \frac{p}{q} - \frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n-1} - \frac{1}{k_n}$.
3. $n_p > n_{p-1}(n_{p-1}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-1}} + \frac{1}{n_p} < \frac{1}{n_{p-1}-1}$.
   $n_{p-1} - 1 \geq n_{p-2}(n_{p-2}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-2}} + \frac{1}{n_{p-1}-1} \leq \frac{1}{n_{p-2}-1}$, etc.
   Finalement, $x < \frac{1}{n_0-1} \Rightarrow n_0 = k_0$.
   (cf. INA opt. 1977)

Correction de l'exercice 1391 ▲

1. Pour $x = \frac{p}{q}$, on peut prendre : $m = qc - pd$, et $n = pb - qa$.
2. (m,n) est unique à un facteur près.
3. $\frac{ma+nc}{mb+nd} - \frac{a}{b} = \frac{n(bc-ad)}{b(mb+nd)}$, et $\frac{c}{d} - \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m(bc-ad)}{d(mb+nd)}$.

Correction de l'exercice 1392 ▲

1. $x=-\frac{1}{2}$.
2. $x=\frac{2}{3}$.
3. Pas de solution.

Correction de l'exercice 1393 ▲

1. $x^y=y^x \Leftrightarrow \frac{p^{p'q}}{q^{p'q}}=\frac{p'^{pq'}}{q'^{pq'}}$ (formes irréductibles)
$\Rightarrow \begin{cases} p^{p'q}=p'^{pq'} \\ q^{p'q}=q'^{pq'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^b=p'^a \\ q^b=q'^a. \end{cases}$
Comme $a\wedge b=1$, on décompose p,p',q,q' en facteurs premiers $\Rightarrow$ le résultat.
2. $\left(pq'=m^an^b,\ p'q=m^bn^a,\ m\wedge n=1,\ a<b\right)\Rightarrow d=m^an^a,\ a=n^{b-a}$ et $b=m^{b-a}$.
3. $m\geq n+1$ donc si $b-a\geq 2$, on a : $m^{b-a}-n^{b-a}=(m-n)(m^{b-a-1}+\dots+n^{b-a-1})>b-a$.
Donc $b-a=1=m-n$, $a=n$, $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Ces valeurs conviennent.

Correction de l'exercice 1394 ▲

1. Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.
$$\sqrt[n]{m}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow \exists(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2/\ \sqrt[n]{m}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow \exists(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2/\ a^n=m\times b^n.$$
Tout d'abord, si $b=1$, $m=a^n$ et m est une puissance n-ième parfaite. Ensuite, $a=1$ est impossible car $m\times b^n\geq 2$. Supposons alors que a et b soient des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n=m\times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m. Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n-ième parfaite. Réciproquement, si m est une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :
$$\boxed{\forall(m,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})^2,\ \sqrt[n]{m}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt[n]{m}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n\text{-ième parfaite.}}$$
Par suite, si m n'est pas une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel.
2. $$\log 2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2/\ \log 2=\frac{a}{b}\Rightarrow\exists(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2/\ 10^{a/b}=2\Rightarrow\exists(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2/\ 10^a=2^b$$
$$\Rightarrow\exists(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2/\ 5^a=2^{b-a}.$$
Puisque $5^a>1$, ceci impose $b-a\in\mathbb{N}^*$. Mais alors, l'égalité ci-dessus est impossible pour $a\neq 0$ et $b\neq 0$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a montré par l'absurde que
$$\boxed{\log 2 \text{ est irrationnel.}}$$
3. Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi=\frac{p}{q}$. Pour n entier naturel non nul donné, posons
$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}x^n(p-qx)^n\sin x\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^{p/q}x^n(p-qx)^n\sin x\,dx.$$
• Tout d'abord, pour $0\leq x\leq\frac{p}{q}$, on a $0\leq x(p-qx)=\frac{p}{2q}\left(p-\frac{p}{2q}\times q\right)=\frac{p^2}{4q}$, et donc (puisque $0\leq\sin x\leq 1$ pour $x\in[0,\pi]$),
$$0\leq I_n\leq\frac{1}{n!}\int_0^{p/q}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n dx=\frac{\pi}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$
D'après le résultat admis par l'énoncé, $\frac{\pi}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite (I_n) converge et $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$. • Ensuite, puisque pour x élément de $[0,\pi]$, on a $x^n(p-qx)^n\sin x\geq 0$, pour n entier naturel non nul donné, on a
$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}x^n(p-qx)^n\sin x\,dx\geq\frac{1}{n!}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}x^n(p-qx)^n\sin x\,dx\geq\frac{1}{n!}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{p}{4q}\left(p-\frac{p}{4q}\times q\right)\right)^n\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}n!}\left(\frac{3p^2}{16q}\right)^n>0.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. • Vérifions enfin que, pour tout entier naturel non nul n, I_n est un entier (relatif). Soit $P_n = \frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et 0 et $\frac{p}{q}$ sont racines d'ordre n de P_n et donc, pour $0 \leq k \leq n$, racines d'ordre $n-k$ de $P_n^{(k)}$. En particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $0 \leq k < n$, des entiers relatifs. De même, puisque $\deg P_n = 2n$, pour $k \geq 2n+1$, $P_n^{(k)} \geq 0$ et en particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $Pn^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $k \geq 2n+1$, des entiers relatifs. Soit k un entier tel que $n \leq k \leq 2n$.

$$\frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n = \frac{1}{n!}x^n\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{n-i}(-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{n!}p^{n-i}(-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n}\frac{C_n^{k-n}}{n!}p^{2n-k}(-1)^{k-n}q^{k-n}x^k.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times (\text{coefficient de } x^k) = (-1)^{k-n}\frac{k!}{n!}C_n^{k-n}p^{2n-k}q^{k-n}.$$

ce qui montre que $P_n^{(k)}(0)$ est entier relatif (puisque $n \leq k \leq 2n$). Puis, comme $P_n\left(\frac{p}{q}-x\right) = P_n(x)$, on a encore $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}-x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$ et en particulier $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. On a montré que pour tout entier naturel k, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des entiers relatifs. Montrons alors que I_n est un entier relatif. Une première intégration par parties fournit : $I_n = [-P_n(x)\cos x]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx$. cos prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$ de même que P_n. Par suite,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Une deuxième intégration par parties fournit : $\int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx = [P_n'(x)\sin x]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x)\sin x\,dx$. sin prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$, de même que P_n' et

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x)\sin x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

En renouvelant les intégrations par parties et puisque sin et cos prennent des valeurs entières en 0 et π de même que les dérivées succesives de P_n, on en déduit que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\sin x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Mais,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\sin x\,dx = \int_0^{p/q}\frac{1}{n!}(-q)^n(2n)!\sin x\,dx = 2(-q)^n(2n)(2n-1)...(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Donc pour tout naturel n, I_n est un entier relatif, strictement positif d'après plus haut. On en déduit que pour tout naturel n, $I_n \geq 1$. Cette dernière constatation contredit le fait que la suite (I_n) converge vers 0. L'hypothèse π est rationnel est donc absurde et par suite,

$$\boxed{\pi \text{ est irrationnel.}}$$

4. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt$. • Pour $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = e-1$ et donc, $e = 1 + \int_0^1 e^t\,dt = \sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!}e^t\,dt$. • Soit $n \geq 0$. Supposons que $e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt$. Une intégrations par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)\times n!}e^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence. Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt < e\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / e = \frac{a}{b}$. Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$, ce qui s'écrit encore après multiplication des trois membres par $bn!$

$$0 < a \times n! - b\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a \times (3b)! - b\sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $a \times n! - b\sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il etait donc absurde de supposer que e est rationnel et finalement,

$$\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$$

5. Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ est

$$(X - \cos\tfrac{2\pi}{7})(X - \cos\tfrac{4\pi}{7})(X - \cos\tfrac{6\pi}{7}) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)X^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)X - \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculons alors ces trois coefficients. Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a d'après les formules d'EULER

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5) + (\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4) + (\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4))\\ &= \frac{1}{4}((\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4) + (\omega^4+\omega^5+\omega^2+\omega^3) + (\omega^5+\omega^6+\omega+\omega^2))\\ &= \frac{2(-1)}{4} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4)\\ &= \frac{1}{8}(\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4)(\omega^3+\omega^4) = \frac{1}{8}(\omega^6+1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont donc solution de l'équation $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$ ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r = \frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3, on en déduit d'après le théorème de GAUSS que q divise 8. De même, l'égalité $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$ montre que p divise q^3 et donc que p divise 1. Ainsi, $p \in \{-1, 1\}$ et $q \in \{1, 2, 4, 8\}$ ou encore $r \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$. On vérifie alors aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier,

$$\boxed{\cos\tfrac{2\pi}{7} \text{ est irrationnel.}}$$

6. On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Soit $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} &\Rightarrow (\alpha - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 8 + 2\sqrt{15}\\ &\Rightarrow (\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6)^2 = 60 \Rightarrow \alpha^4 + 8\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2 - 6) = 0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2} = \frac{\alpha^4+8\alpha^2-24}{4\alpha(\alpha^2-6)} \in \mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2 > 2+3+5 = 10 > 6$). Donc

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \text{ est irrationnel.}}$$

Correction de l'exercice 1395 ▲

Soient k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à k.

$$\begin{aligned}\binom{n+10\times k!}{k} &= \frac{(n+10\times k!)(n+10\times k!-1)...(n+10\times k!-k+1)}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)+10\times k!\times K}{k!} \quad \text{(pour un certain entier } K)\\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+10K=\binom{n}{k}+10K.\end{aligned}$$

La différence $\binom{n+10\times k!}{k}-\binom{n}{k}$ est donc divisible par 10. Par suite, $\binom{n+10\times k!}{k}$ et $\binom{n}{k}$ ont même chiffre des unités en base 10. Ainsi, $\forall n\geq k,\ u_{n+10\times k!}=u_n$ et donc la suite u est donc $10k!$-périodique. On sait alors que

$$\boxed{0,u_ku_{k+1}u_{k+2}...\text{ est rationnel.}}$$

Correction de l'exercice 1396 ▲

Soit x un irrationnel et $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x (p_n entier relatif et q_n entier naturel non nul, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Donc :

$$\exists A>0/\ (\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n\geq n_0/\ q_n\geq A)$$

ou encore, il existe une suite extraite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bornée.

La suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Mais alors, on peut extraire de la suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante et en particulier convergente.

La suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}=(\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.

Ainsi, on peut extraire de la suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(p_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ constante. La suite $((q_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également constante car extraite de la suite constante $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et finalement, on a extrait de la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ constante.

Mais la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x et donc la suite extraite $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. Puisque $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}=x$ et donc x est rationnel. Contradiction .

Donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Enfin si $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite bornée $(p_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Mais alors, la suite $(\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $x=0$ contredisant l'irrationnalité de x. Donc, la suite $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+_infty$.

Correction de l'exercice 1397 ▲

Explicitons la formule pour $\max(x,y)$. Si $x\geqslant y$, alors $|x-y|=x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+x-y)=x$. De même si $x\leqslant y$, alors $|x-y|=-x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y-x+y)=y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z)=\max\big(\max(x,y),z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y)+z+|\max(x,y)-z|}{2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)+z+\left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)-z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1398 ▲

$(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A=+\infty$). D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A=0$.

Correction de l'exercice 1399 ▲

1. $[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4},+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,-1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction de l'exercice 1409 ▲

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\sup A$ est un majorant de A, c'est-à-dire, pour tout $a\in A$, $a\leqslant \sup A$. De même, pour tout $b\in B$, $b\leq \sup B$. On veut montrer que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$. Soit donc $x\in A+B$. Cela signifie que x est de la forme $a+b$ pour un $a\in A$ et un $b\in B$. Or $a\leqslant \sup A$, et $b\leq \sup B$, donc $x=a+b\leqslant \sup A+\sup B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x\in A+B$ cela signifie que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon>0$, $\sup A+\sup B-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. On prend donc un $\varepsilon>0$ quelconque, et on veut montrer que $\sup A+\sup B-\varepsilon$ ne majore pas $A+B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, $\sup A-\varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a>\sup A-\varepsilon/2$. *Attention : $\sup A-\varepsilon/2$ n'est pas forcément dans A ; $\sup A$ non plus.* De la même manière, il existe $b\in B$ tel que $b>\sup B-\varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x=a+b$ est un élément de $A+B$, et il vérifie $x>(\sup A-\varepsilon/2)+(\sup B-\varepsilon/2)=\sup A+\sup B-\varepsilon$. Ceci implique que $\sup A+\sup B-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$.
3. $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon>0$, $\sup A+\sup B-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\sup A+\sup B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, c'est donc la borne supérieure de $A+B$. Autrement dit $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Correction de l'exercice 1410 ▲

1. Vrai.
2. Faux. C'est vrai avec l'hypothèse $B\subset A$ et non $A\subset B$.
3. Vrai.
4. Faux. Il y a égalité.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction de l'exercice 1420 ▲

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β. Pour tout $(a,b)\in A\times B$, on a $a+b\leq\alpha+\beta$. Ceci montre que $A+B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et donc que $\sup(A+B)$ existe dans $\mathbb{R}$. (De plus, puisque $\alpha+\beta$ est un majorant de $A+B$, on a déjà $\sup(A+B)\leq\alpha+\beta$). Soit alors $\varepsilon>0$. Il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a\leq\alpha$ et $\beta-\frac{\varepsilon}{2}<b\leq\beta$, et donc tels que $\alpha+\beta-\varepsilon<a+b\leq\alpha+\beta$.

En résumé,

$$\textbf{(1)}\ \forall(a,b)\in A\times B,\ a+b\leq\alpha+\beta \text{ et } \textbf{(2)}\ \forall\varepsilon>0,\ \exists(a,b)\in A\times B/\ a+b>\alpha+\beta-\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sup(A+B)=\alpha+\beta=\sup A+\sup B.}$$

Pour les bornes inférieures, on peut refaire le travail précédent en l'adaptant ou appliquer le résultat précédent aux ensembles $-A$ et $-B$ car $\mathrm{Inf}A=-\sup(-A)$.

Correction de l'exercice 1421 ▲

Posons pour n entier naturel non nul $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$ de sorte que $A=\{u_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}=\left\{0,\frac{1}{2}+1,\frac{1}{3}-1,\frac{1}{4}+1,\frac{1}{5}-1,\ldots\right\}$. Pour $n\geq1$, $u_{2n}=1+\frac{1}{2n}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1<u_{2n}\leq\frac{3}{2}$. Pour $n\geq1$, $u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_{2n-1}\leq0$. Par suite, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_n\leq\frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus $-1\leq\inf A\leq\sup A\leq\frac{3}{2}$. Ensuite, $\frac{3}{2}=u_2\in A$. Donc,

$$\boxed{\sup A = \max A = \frac{3}{2}.}$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, ona $-1 \leq \inf A \leq u_{2n-1} = -1+\frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient

$$\boxed{\inf A = -1}$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Correction de l'exercice 1422 ▲

Posons $B = \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\}$. A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans $\mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq yM$, et donc $y-x \leq M-m$ et $x-y \leq M-m$ ou encore $|y-x| \leq M-m$. Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0,y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$. Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

1. $\forall (x,y) \in A^2,\ |y-x| \leq \sup A - \inf A$ et
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2 /\ |y-x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$.

$$\boxed{\sup \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.}$$

Correction de l'exercice 1423 ▲

1. $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide. Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$ et donc $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.
2. Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Inversement, supposons par exemple $\sup A \geq \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$. a est dans A et donc dans $A \cup B$. En résumé, $\forall x \in (A \cup B),\ x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in (A \cup B) /\ \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$ et donc

$$\boxed{\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.}$$

3. D'après l'exercice 1420, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
4. Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1428 ▲

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b)$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Évaluons la différence $2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$:

$$2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction de l'exercice 1434 ▲

1. Calculons d'abord $f(0)$. Nous savons $f(1) = f(1+0) = f(1)+f(0)$, donc $f(0) = 0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n = 1$, nous avons bien $f(1) = 1 \times f(1)$. Si $f(n) = nf(1)$ alors $f(n+1) = f(n)+f(1) = nf(1)+f(1) = (n+1)f(1)$.
2. $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1)+f(1)$. Donc $f(-1) = -f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$.
3. Soit $q = \frac{a}{b}$. Alors $f(a) = f(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b})+\cdots+f(\frac{a}{b})$ (b termes dans ces sommes). Donc $f(a) = bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1) = bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$.
4. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x. Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :
$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \leq x \leq \cdots \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$
Alors comme $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i) \leq f(x) \leq f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1) \leq f(x) \leq \beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$. Soit $f(x) = xf(1)$.

Correction de l'exercice 1445 ▲

1. $a = bq+r \Rightarrow \sum = \underbrace{q+q+\cdots+q}_{b-r}+\underbrace{(q+1)+\cdots+(q+1)}_{r} = bq+r = a.$
2.

Correction de l'exercice 1446 ▲

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$.

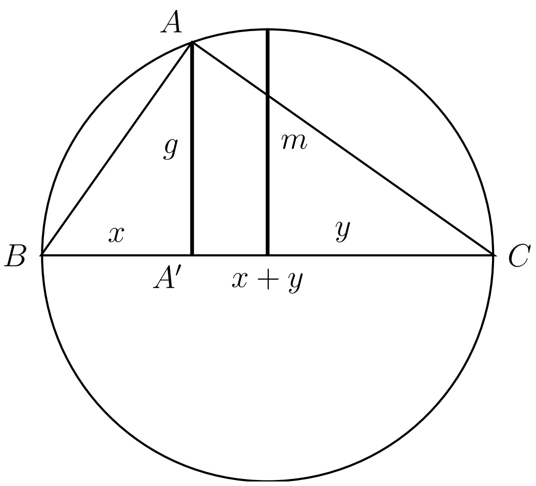
1. On a déjà $x = \frac{x+x}{2} \leq \frac{x+y}{2} = m \leq \frac{y+y}{2} = y$ et donc $\boxed{x \leq m \leq y}$.
(on peut aussi écrire : $m - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} \geq 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leq \sqrt{xy} = g \leq \sqrt{y.y} = y$ et donc $\boxed{x \leq g \leq y}$.
3. $m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ et donc, $\boxed{x \leq g \leq m \leq y}$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est comprise entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ce qui fournit $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{x}$, ou encore $\boxed{x \leq h \leq y}$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ ou encore $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$ et finalement
$$\boxed{x \leq h \leq g \leq m \leq y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.}$$

Remarque 1. On a $h = \frac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.

Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B.A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.

On accolle deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypothénuse ce segment (de longueur $x+y$) noté [BC], tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \frac{x+y}{2}$, le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B.A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Correction de l'exercice 1447 ▲

Si l'un des réels a, b ou c est strictement plus grand que 1, alors l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est négatif (puisque a, b et c sont positifs) et donc inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Sinon, les trois réels a, b et c sont dans $[0,1]$. Le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ vaut

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Mais, pour $x \in [0,1]$, $x(1-x)$ est positif et d'autre part, $x(1-x) = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$. Par suite,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4^3}.$$

Il est alors impossible que les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soient strictement plus grand que $\frac{1}{4}$, leur produit étant dans ce cas strictement plus grand que $\frac{1}{4^3}$.

On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 1448 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $E(x) \leq x < E(x)+1$ puis $E(x)+1 \leq x+1 < (E(x)+1)+1$. Comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $E(x+1) = E(x)+1$.
2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $E(x)+E(y) \leq x+y$. Ainsi, $E(x)+E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, on a donc $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.

   Améliorons. $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $E(y) \leq y < E(y)+1$ fournit $E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$ et donc $E(x+y)$ vaut, suivant le cas, $E(x)+E(y)$ ou $E(x)+E(y)+1$ (et est dans tous les cas supérieur ou égal à $E(x)+E(y)$).
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $k = E(x)$ et $l = E(y)$.

   1er cas. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l, k+l+1[$ et donc $E(x+y) = k+l$, puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = k+l+k+l = 2k+2l$. D'autre part, $2x \in [2k, 2k+1[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.

   2ème cas. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[$ et donc $E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$,puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l$ ou $2k+2l+1$. D'autre part, $2x \in [2k+1, 2k+2[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l+1$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

   3ème cas. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on a de même $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

   4ème cas. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on a $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x)+E(2y)$.

   Finalement, on a dans tous les cas $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

Correction de l'exercice 1449 ▲

p est déterminé par l'encadrement : $10^p \leq n < 10^{p+1}$ qui s'écrit encore $p \leq \frac{\ln n}{\ln 10} < p+1$. Par suite,

$$\boxed{p = E(\log_{10}(n)).}$$

$$\boxed{\text{Le nombre de chiffres d'un entier } n \text{ en base 10 est donc } E(\log_{10}(n))+1.}$$

Correction de l'exercice 1450 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

   $$1 \leq k \leq x \Leftrightarrow 1 \leq k \leq E(x).$$

   Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.
2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.

3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leq 2k \leq x \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2})+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même, il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.
De même,

$$0 \leq 2k+1 \leq x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E(\frac{x-1}{2}).$$

Il y a donc $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.
4. Il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x+2y = n \Leftrightarrow x = n-2y.$$

Donc, (x,y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n-2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leq 2y \leq n$. Il y a donc $E(\frac{n}{2})+1$ couples solutions.
6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y = 1000$ qui s'écrit encore $x+2y = 100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2})+1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.
7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$2x+3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2}.$$

Donc,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n-3y = (n-y)-2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n-3y$ est pair si et seulement si $n-y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n. Ainsi,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}))+1 = E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.
2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1 = E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.
Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 1451 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leq k \leq x \Leftrightarrow 1 \leq k \leq E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.
2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.
3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leq 2k \leq x \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2})+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même, il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.
De même,

$$0 \leq 2k+1 \leq x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E(\frac{x-1}{2}).$$

Il y a donc $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.
4. Il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x+2y=n \Leftrightarrow x=n-2y.$$

Donc, (x,y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n-2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leq 2y \leq n$. Il y a donc $E(\frac{n}{2})+1$ couples solutions.

6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y=1000$ qui s'écrit encore $x+2y=100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2})+1=51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$2x+3y=n \Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2}.$$

Donc,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n-3y=(n-y)-2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n-3y$ est pair si et seulement si $n-y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n. Ainsi,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}))+1=E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.

2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1=E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.

Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 1452 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) \leq x < E(x)+1 \Rightarrow nE(x) \leq nx < nE(x)+n \Rightarrow nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n \Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$$
$$\Rightarrow E(\frac{E(nx)}{n})=E(x).$$

Correction de l'exercice 1453 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n) \in [-1,1]^n$ tels que $x_1+x_2+...+x_n=0$.

On écrit

$$(x_1+2x_2+...+nx_n)=(x_1+x_2+...+x_n)+(x_2+x_3+....+x_n)+(x_3+...+x_n)+...+(x_{n-1}+x_n)+x_n,$$

avec $x_1+...+x_n=0$ et donc $x_2+...+x_n=-x_1$ ...

1er cas. Si $n=2p$ est pair, alors $\frac{n^2}{4}=p^2$ et donc, $E(\frac{n^2}{4})=p^2=\frac{n^2}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|x_1+2x_2+...+nx_n| &\leq |x_1+x_2+...+x_{2p}|+|x_2+....+x_{2p}|+...+|x_p+...+x_{2p}| \\
&+|x_{p+1}+...+x_{2p}|...+|x_{2p-1}+x_{2p}|+|x_{2p}| \\
&=0+|-x_1|+|-x_1-x_2|+...+|-x_1+...-x_{p-1}| \\
&+|x_{p+1}+...+x_{2p}|...+|x_{2p-1}+x_{2p}|+|x_{2p}| \\
&\leq 0+1+2+...+(p-1)+p+(p-1)+...+1=2\frac{p(p-1)}{2}+p=p^2=E(\frac{n^2}{4})
\end{aligned}$$

2ème cas. Si $n=2p+1$ est impair, alors $\frac{n^2}{4}=p^2+p+\frac{1}{4}$ et donc, $E(\frac{n^2}{4})=p^2+p=\frac{n^2-1}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}|x_1+2x_2+\ldots+nx_n| &\leq |x_1+x_2+\ldots+x_{2p+1}|+\ldots+|x_{p+1}+\ldots+x_{2p+1}|\\ &+|x_{p+2}+\ldots+x_{2p+1}|\ldots+|x_{2p+1}|\\ &=0+|-x_1|+|-x_1-x_2|+\ldots+|-x_1+\ldots-x_p|\\ &+|x_{p+2}+\ldots+x_{2p+1}|\ldots+|x_{2p+1}|\\ &\leq 0+1+2+\ldots+(p-1)+p+p+(p-1)+\ldots+1=2\frac{p(p+1)}{2}=p^2+p=E(\frac{n^2}{4})\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |x_1+2x_2+\ldots+nx_n|\leq E(\tfrac{n^2}{4}).}$$

Correction de l'exercice 1454 ▲

Pour $n=1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n=1$.

Soit $n\geq 1$. Supposons que $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2(n+1)-1}\frac{(-1)^k}{k+1}&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}\\ &=\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2(n+1)}=\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+2}^{2(n+1)}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n\geq 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ (identité de CATALAN).

Correction de l'exercice 1455 ▲

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire. Sinon, pour x réel, posons

   $$f(x)=\textstyle\sum_{k=1}^n(a_k+xb_k)^2=\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^n a_k^2.$$

   f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

   $$0\geq\Delta'=\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

   ou encore $\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
2.
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^n a_k^2+2\sum_{k=1}^n a_kb_k+\sum_{k=1}^n b_k^2\leq\sum_{k=1}^n a_k^2+2\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|+\sum_{k=1}^n b_k^2\\ &\leq\sum_{k=1}^n a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}+\sum_{k=1}^n b_k^2\quad(\text{CAUCHY-SCHWARZ})\\ &=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\right)^2\end{aligned}$$

   et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

Correction de l'exercice 1456 ▲

Pour $x\geq 1$, $x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2\geq 0$. De même, $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2\geq 0$. Donc, si on pose $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x\geq 1$ et pour $x\geq 1$, $f(x)=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$. Par suite,

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-1|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \text{ et } \sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \text{ et } \sqrt{x-1}=1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 1457 ▲

1. Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$ ($\{0\}=0.\mathbb{Z}$ est du type voulu). Il existe dans G un réel non nul x_0. Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A=G\cap]0,+\infty[$. D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne inférieure que l'on note a.

   1er cas. Si $a=0$, montrons dans ce cas que G est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q},+)$). Soient x un réel et ε un réel strictement positif. Puisque $\inf A=\inf(G\cap]0,+\infty[)=0$, il existe dans G un élément g tel que $0<g<\varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel que $ng\leq x-\varepsilon<(n+1)g$ à savoir $n=E\left(\frac{x-\varepsilon}{g}\right)$. Soit $y=(n+1)g$. D'une part, y est dans G (si $n+1=0$, $(n+1)g=0\in G$, si $n+1>0$, $(n+1)g=g+g+...+g\in G$ et si $n+1<0$, $(n+1)g=-(-(n+1)g)\in G$) et d'autre part

   $$x-\varepsilon<(n+1)g=ng+g<x-\varepsilon+\varepsilon=x.$$

   On a montré que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ x-\varepsilon<y<x$ et donc

   $$\boxed{\text{si } G\neq\{0\} \text{ et si } \inf(G\cap]0,+\infty[)=0,\ G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

   2ème cas. Si $a>0$, montrons dans ce cas que $G=a\mathbb{Z}$. Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G. Mais si a n'est pas élément de G, par définition de a, il existe un réel x dans $G\cap]a,2a[$ puis il existe un réel y dans $G\cap]a,x[$. Le réel $x-y$ est alors dans $G\cap]0,a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G. Montrons alors que $G=a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G, G contient encore $a+a=2a$, puis $a+a+a=3a$ et plus généralement tous les na, $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque G contient aussi les opposés de ces nombres et également $0=0\times a$, G contient finalement tous les na, $n\in\mathbb{Z}$. On a ainsi montré que $a\mathbb{Z}\subset G$. Réciproquement, soit x un élément de G et $n=E\left(\frac{x}{a}\right)$ $(\in\mathbb{Z})$. Alors, $n\leq\frac{x}{a}<n+1$ puis $0\leq x-na<a$. Or, x est dans G et na est dans G. Donc, $x-na$ est dans $G\cap[0,a[=\{0\}$, puis $x=na\in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G=a\mathbb{Z}$.

   $$\boxed{\text{si } \inf(G\cap]0,+\infty[)=a>0,\ G=a\mathbb{Z}.}$$

2. Soit $G=\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$. On vérifie aisément que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel n,

   $$(\sqrt{2}-1)^n\in G\cap]0,+\infty[.$$

   Or, $0<\sqrt{2}-1<1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^n=0$. Ceci montre que $\inf(G\cap]0;+\infty[)=0$ et donc que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. (a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f=\{T\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)\}$. 0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G\neq\varnothing$. De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour x réel donné :

   $$f(x+(T-T'))=f((x-T')+T)=f(x-T')=f(x-T'+T')=f(x),$$

   et $T-T'$ est encore un élément de G. On a montré que

   $$\boxed{G_f \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{R},+).}$$

   (b) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a+b\sqrt{2}$, $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante. Soit x un réel quelconque. On va montrer que $f(x)=f(0)$. Remarque préliminaire : soit T une période strictement positive de f. Il existe un entier relatif p tel que $pT\leq x<(p+1)T$ à savoir $p=E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a alors $f(x)=f(x-pT)$ avec $0\leq x-pT<T$. Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque G_f est dense dans $\mathbb{R}$, il existe dans G_f un réel T_n tel que $0<T_n<\frac{1}{n}$ (ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty}T_n=0$). Mais alors, puisque $0<x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n<T_n$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty}x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n=0$. Maintenant, la suite $\left(f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $f(x)$) et donc convergente vers $f(x)$. On en déduit que

   $$\begin{aligned} f(x)&=\lim_{n\to+\infty}f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right) \quad \text{(par continuité de } f \text{ en 0)}\\ &=f(0)\end{aligned}$$

   ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 1458 ▲

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$ et donc tel que $x < r^3 < x+\varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 1459 ▲

1. Par définition est l'unique nombre $E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que
$$E(x) \leq x < E(x)+1.$$
2. Pour le réel kx, $(k = 1,\dots,n)$ l'encadrement précédent s'écrit $E(kx) \leq kx < E(kx)+1$. Ces deux inégalités s'écrivent aussi $E(kx) \leq kx$ et $E(kx) > kx-1$, d'où l'encadrement $kx-1 < E(kx) \leq kx$. On somme cet encadrement, k variant de 1 à n, pour obtenir :
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx.$$
Ce qui donne
$$x\cdot\sum_{k=1}^{n} k \quad -n < n^2\cdot u_n \leq x\cdot\sum_{k=1}^{n} k.$$
3. On se rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc nous obtenons l'encadrement :
$$x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$
$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ tend vers $\frac{1}{2}$, donc par le théorème des gendarmes (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$.
4. Chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels $(2u_n)$ tend vers x. Chaque réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1461 ▲

1. Vrai. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite (c'est un résultat du cours).
2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.
3. Vrai. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :
$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel
$$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$
Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que
$$2p+1 \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors
$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction de l'exercice 1468 ▲

1. Suite non convergente car non bornée.
2. Suite convergente vers 0.

3. Suite non convergente car la sous-suite $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ est toujours plus grande que 1. Alors que la sous-suite $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est toujours plus petite que 0.

Correction de l'exercice 1469 ▲

Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Dans l'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.

La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que} \;\; (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons un N correspondant. Et pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 1470 ▲

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $x \in [n, n+1]$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Par calcul de l'intégrale nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue précédemment : nous obtenons $H_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln(1) = 0$) et donne $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ alors $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$ d'après la première question. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
Enfin comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ alors $H_n \geqslant \ln(n)$ et donc $u_n \geqslant 0$.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel γ. Ce réel γ s'appelle *la constante d'Euler* (d'après Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ $0,5772156649\ldots$ mais on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Correction de l'exercice 1474 ▲

1. $u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1$. Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pour tout n alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geq 2$, nous avons $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 1499 ▲

1.
2. $\ell = \pi$.

Correction de l'exercice 1503 ▲

$\frac{x}{2}$.

Correction de l'exercice 1507 ▲

1. $u_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.
2.
3.
4.

Correction de l'exercice 1508 ▲

Si $|a| < 1$, à partir d'un certain rang, $\left|\frac{a}{1+a^n}\right| < \alpha < 1 \Rightarrow \lim = 0$.

Si $|a| > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 \Rightarrow u_n \to 0$.

Correction de l'exercice 1511 ▲

$\lim S_n = \lim u_n$.

Si $u_n = (3i/2)^n$, alors (u_n) diverge, mais $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 1516 ▲

1. $1 \leq S(n+1) \leq S(n)+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{S(n+1)}{S(n)} \leq 2$.
2. $\inf = 0$ $(99\dots 99)$, $\sup = 2$ $(100\dots 00)$.
3.

Correction de l'exercice 1520 ▲

1. Sinon, on construit une sous-suite strictement croissante.
2. La suite $(\min(x_0,\dots,x_n))$ converge vers 0, et prend une infinité de valeurs différentes.

Correction de l'exercice 1523 ▲

$u_{2n} - u_n \geq \frac{1+\dots+n}{4n^2} \geq \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 1524 ▲

1. Par récurrence, $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$.
2. $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n+\sqrt{2(n-1)}} \Rightarrow \lim = 1$.
3. $\sqrt{n+\sqrt{n-1}} \leq u_n \leq \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{2(n-2)}}} \Rightarrow \lim = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1525 ▲

Soit $\ell = \inf\{b_n \,|\, n \in |||^*\}$, $\varepsilon > 0$ et $p \in |||^*$ tel que $b_p \leq \ell+\varepsilon$. Pour $n \in |||^*$ on effectue la division euclidienne de n par p : $n = pq+r$ d'où $a_n \leq a_p^q a_r$ et $b_n \leq b_p + \frac{\ln a_r}{n} \leq \ell + 2\varepsilon$ pour n assez grand.

Correction de l'exercice 1526 ▲

Si $e^{i\alpha}$ n'est pas valeur d'adhérence alors il existe $\delta > 0$ tel que $|e^{ih(n)} - e^{i\alpha}| > \delta$ pour tout n assez grand donc l'ensemble $\bigcup_{k\in||}[\alpha - \delta + 2k\pi, \alpha - \delta + 2k\pi]$ ne contient aucun terme de la suite $(h(n))$ pour n assez grand ce qui contredit les hypothèses $h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $h(n+1) - h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 1527 ▲

Soit E l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n). Si $u_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$ alors $u_{n_k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda + \lambda^2$ donc E est stable par l'application $f : x \mapsto x + x^2$. En fait E est invariant par cette application car la suite (u_{n_k-1}) admet une valeur d'adhérence $\mu \in E$ et on a $\mu^2 + \mu = \lambda$. En particulier l'intervalle $[\inf(E), \sup(E)]$ est invariant par f ce qui implique $\sup(E) = \inf(E) = 0$.

Correction de l'exercice 1528 ▲

Soit ℓ une valeur d'adhérence de (x_n). Si l'on suppose que (x_n) ne converge pas vers ℓ alors il existe un voisinage $[a,b]$ de ℓ tel qu'il y a une infinité de termes dans $[a,b]$ et une infinité hors de $[a,b]$. Ceci implique que $[c,d] = f([a,b])$ n'est pas inclus dans $[a,b]$ et que $[c,d] \setminus [a,b]$ contient une infinité de termes, donc (x_n) a une deuxième valeur d'adhérence dans $[c,d] \setminus]a,b[$.

Correction de l'exercice 1529 ▲

Les suites $(\ln(u_n)/2^n)$ et $(\ln(1+u_n)/2^n)$ sont adjacentes.

Correction de l'exercice 1530 ▲

Supposons sans perte de généralité u croissante (quite à remplacer u par $-u$). Dans ce cas, ou bien u converge, ou bien u tend vers $+\infty$. Supposons que u tende vers $+\infty$, et montrons qu'il en est de même pour la suite v. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que pour n naturel supérieur ou égal à n_0, $u_n \geq 2A$. Pour $n \geq n_0 + 1$, on a alors,

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tend vers $2A$ et donc, il existe un rang n_1 à partir duquel $v_n \geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1} > A$. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geq n_1 \Rightarrow v_n > A)$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par contraposition, si v ne tend pas vers $+\infty$, la suite u ne tend pas vers $+\infty$ et donc converge, d'après la remarque initiale.

Correction de l'exercice 1531 ▲

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k)\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$ et, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient pour $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1),$$

et pour $n \geq 2$,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n,$$

cette dernière inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx\leq 0$$

car la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ décroit sur $[n,n+1]$. De même,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}\,dx=\int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx\geq 0$$

car la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ décroit sur $[n+1,n+2]$. Enfin,

$$u_n-v_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et donc la suite $u-v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement, la suite u décroit, la suite v croit et la suite $u-v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite. Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n\leq\gamma\leq u_n$, et en particulier, $v_3\leq\gamma\leq u_1$ avec $v_3=0,5...$ et $u_1=1$. Donc, $\gamma\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Plus précisément, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$0\leq u_n-v_n\leq\frac{10^{-2}}{2}\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 0,005\Leftrightarrow\frac{1}{n}\leq e^{0,005}-1\Leftrightarrow n\geq\frac{1}{e^{0,005}-1}=199,5...\Leftrightarrow n\geq 200.$$

Donc $0\leq\gamma-v_{100}\leq\frac{10^{-2}}{2}$ et une valeur approchée de v_{200} à $\frac{10^{-2}}{2}$ près (c'est-à-dire arrondie à la 3 ème décimale la plus proche) est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. On trouve $\gamma=0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisément,

$$\boxed{\gamma=0,5772156649...\ (\gamma \text{ est la constante d'EULER}).}$$

Correction de **l'exercice 1532 ▲**

Posons $\alpha=\text{Arccos}\frac{a}{b}$. α existe car $0<\frac{a}{b}<1$ et est élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $a=b\cos\alpha$. Enfin, pour tout entier naturel n, $\frac{\alpha}{2^n}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\cos\frac{\alpha}{2^n}>0$. On a $u_0=b\cos\alpha$ et $v_0=b$ puis $u_1=\frac{1}{2}(u_0+v_0)=\frac{b}{2}(1+\cos\alpha)=b\cos^2\frac{\alpha}{2}$ et $v_1=\sqrt{u_1v_0}=\sqrt{b\cos^2\frac{\alpha}{2}\times b}=b\cos\frac{\alpha}{2}$ puis $u_2=\frac{b}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1+\cos\frac{\alpha}{2})=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}$ et $v_2=\sqrt{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}\times b\cos\frac{\alpha}{2}}=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}$... Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n=b\prod_{k=1}^n\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$. C'est vrai pour $n=1$ et si pour $n\geq 1$ donné, on a $v_n=b\prod_{k=1}^n\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$ alors,

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}+v_n)=v_n\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}=v_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\ (\text{car}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}>0),$$

et donc, $v_{n+1}=b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ puis $u_{n+1}=v_{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$. On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=b\prod_{k=1}^n\cos\frac{\alpha}{2^k}\text{ et }u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n>0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}<1$. La suite v est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n>0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}\right)>\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

La suite u est strictement croissante. Maintenant, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}v_n&=b\prod_{k=1}^n\cos\frac{\alpha}{2^k}=b\prod_{k=1}^n\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}}\\&=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}\end{aligned}$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $v_n\sim\frac{\sin\alpha}{2^n\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, puis $u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}\sim v_n\sim\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Ainsi, les suites u et v sont adjacentes de limite commune $b\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Correction de **l'exercice 1533 ▲**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.}$$

2. Quand n tend vers $+\infty$, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$. Donc, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1 puis, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers $e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour n entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n\ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n+o(1/n))} = e^{-1+o(1)}$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{e} = 0.36... < 1$. On sait alors que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.}$$

4. Pour $n \geq 1$, $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leq u_n \leq \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$. Or, $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ et $\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$ tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite u converge et a pour limite 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1.}$$

5. Quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)} = e^{2\ln n/n} = e^{o(1)}$, et donc $\sqrt[n]{n^2}$ tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.}$$

6. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.
7. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \sim \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{6}$.
8. $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}}$. Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right)'(x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'(x).$$

Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n}+1}{(\frac{1}{2}-1)^2} \to 4$ (d'après un théorème de croissances comparées). Finalement,

$$\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} \to 2^{4/2} = 4.$$

Correction de l'exercice 1534 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$4(n+u_n) = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \Leftrightarrow u_n = -n+\frac{1}{4}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = -\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+o(1) = \frac{1}{2}+o(1).$$

La suite (u_n) converge et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1535 ▲

Supposons que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tende vers le réel positif ℓ.

- Supposons que $0 \leq \ell < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.
  ε est un réel strictement positif et donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2})$.
  Pour $n \geq n_0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Supposons que $\ell > 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2})$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|u_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit, pour α réel et n entier naturel non nul, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha\frac{\ln n}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et ceci pour toute valeur de α. Mais, si $\alpha < 0$, u_n tend vers 0, si $\alpha = 0$, u_n tend vers 1 et si $\alpha > 0$, u_n tend vers $+\infty$. Donc, si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Correction de l'exercice 1536 ▲

1. Supposons $\ell > 0$. Soit ε un réel strictement positif, élément de $]0,\ell[$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2})$. Pour $n > n_0$, puisque $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}\cdots\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}u_{n_0}$, on a $u_{n_0}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leq u_n \leq u_{n_0}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, et donc
$$(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (u_{n_0})^{1/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$, et le membre de droite rend vers $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, on peut trouver un entier naturel $n_1 \geq n_0$ tel que, pour $n \geq n_1$, $(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell - \varepsilon$, et $(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell + \varepsilon$. Pour $n \geq n_1$, on a alors $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geq n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon)$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers ℓ. On traite de façon analogue le cas $\ell = 0$.
2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit u la suite définie par
$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1}b^p.$$
(on part de 1 puis on multiplie alternativement par a ou b). Alors, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}}b^{\frac{p}{2p+1}} \to \sqrt{ab}$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{ab}$ (et en particulier converge). On a bien sûr $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ et $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fausse.
3. (a) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \binom{2n}{n}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$
Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{n^n}{n!}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

   (c) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n}n!}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$
$$= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}.$$

Maintenant, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n\ln(1+1/n)} = e^{-2n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-2+o(1)}$, et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $27e^{-2}$. Par suite, $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ tend vers $\frac{27}{e^2}$.

Correction de l'exercice 1537 ▲

D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour v en échangeant les rôles de u et v.

Correction de l'exercice 1538 ▲

Si $u_n^2 \to 0$, alors $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \to 0$ et donc $u_n \to 0$. Si $u_n^2 \to \ell \neq 0$, alors $(u_n) = (\frac{u_n^3}{u_n^2})$ converge. (L'exercice n'a d'intérêt que si la suite u est une suite complexe, car si u est une suite réelle, on écrit immédiatement $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (et non pas $u_n = \sqrt{u_n^2}$)).

Correction de l'exercice 1539 ▲

Les suites u et v sont définies à partir du rang 1 et strictement positives. Pour tout naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1)\ln(n+2)+n\ln n-(2n+1)\ln(n+1)}.$$

Pour x réel strictement positif, posons alors $f(x) = (x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+1}{x+1}-2\ln(x+1)\\
&= \frac{x+2-1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+2-1}{x+1}-2\ln(x+1)\\
&= -\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}+\ln x+\ln(x+2)-2\ln(x+1).
\end{aligned}$$

De même, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+1}\\
&= \frac{x(x+1)^2-x(x+2)^2+(x+1)^2(x+2)^2+x(x+1)^2(x+2)-2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\
&= \frac{-2x^2-3x+(x^2+2x+1)(x^2+4x+4)+(x^2+2x)(x^2+2x+1)-2(x^2+x)(x^2+4x+4)}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\
&= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0.
\end{aligned}$$

f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $x>0$,

$$f'(x) < \lim_{t\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+1}+\ln\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right) = 0.$$

Donc, f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Or, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)\\
&= (x+(x+1)-(2x+1))\ln x+(x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}-2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, et donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $0+0+2-2=0$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, pour tout réel $x>0$, on a $f(x) > \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. f est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(n)>0$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{f(n)} > 1$. La suite u est strictement croissante. (Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction $x\mapsto$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sur $]0,+\infty[$.) On montre de manière analogue que la suite v est strictement décroissante. Enfin, puisque u_n tend vers e, et que $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$ tend vers e, les suites u et v sont adjacentes. (Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul n, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Par exemple, pour $n=10$, on obtient $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} < e < \left(\frac{11}{10}\right)^{11}$ et donc, $2,59... < e < 2,85...$ et pour $n=100$, on obtient $1,01^{100} < e < 1,01^{101}$ et donc $2,70... < e < 2,73...$ Ces deux suites convergent vers e lentement).

Correction de l'exercice 1540 ▲

Il est immédiat que u croit strictement et que $v-u$ est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour n entier naturel donné,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)\times(n+1)!} < 0,$$

et la suite v est strictement décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir e).

(Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\times n!}$ et $n=5$ fournit par exemple $2,716... < e < 2,718...$).

Correction de l'exercice 1541 ▲

Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = 0.$$

De même,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = 0.$$

La suite u est strictement croissante et la suite v est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n-u_n = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

et la suite $v-u$ converge vers 0. Les suites u et v sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite.

Correction de l'exercice 1542 ▲

L'égalité proposée est vraie pour $n=2$ car $\cos\frac{\pi}{2^2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $n \geq 2$. Supposons que $\cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

Alors, puisque $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) > 0$ (car $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$),

$$\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}})} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}},\ (n \text{ radicaux}).$$

On a montré par récurrence que, pour $n \geq 2$, $\cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

Ensuite, pour $n \geq 2$,

$$\sin(\frac{\pi}{2^n}) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux})$$

Enfin,

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}} = 2^n.2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}} = \pi$.

Correction de l'exercice 1543 ▲

1. Pour x réel positif, posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$. f et g sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

et

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1) > 0.$$

f et g sont donc strictement croissantes sur $[0,+\infty[$ et en particulier, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$ et de même, $g(x) > g(0) = 0$. Finalement, f et g sont strictement positives sur $]0,+\infty[$ ou encore,

$$\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x).$$

2. Soit k un entier naturel non nul.
D'après 1), $\ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} < (1+\frac{1}{k})\ln(1+\frac{1}{k})$, ce qui fournit $k\ln(1+\frac{1}{k}) < 1 < (k+1)Ln(1+\frac{1}{k})$, puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 < (1+\frac{1}{k})^k < e < (1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n} k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod_{k=1}^{n} k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}\frac{n+1}{n}(n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini de même que $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, on a montré que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 1544 ▲

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$, $u_5 = 1$,... c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 \text{ si } n \text{ est premier} \end{cases}.$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $n \geq 2$, l'entier kn est composé et donc, pour $n \geq 2$, $u_{kn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si p_n est le n-ième nombre premier, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. La suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est constante égale à 1. En particulier, la suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge bien que toutes les suites $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 pour $k \geq 2$.

Correction de l'exercice 1545 ▲

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, injective. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Soient A un réel puis $m = \text{Max}(0, 1+E(A))$.

Puisque f est injective, on a $\text{card}(f^{-1}(\{0,1,...,m\}) \geq m+1$. En particulier, $f^{-1}(\{0,1,...,m\})$ est fini (éventuellement vide).

Posons $n_0 = 1 + \begin{cases} 0 \text{ si } f^{-1}(\{0,1,...,m\}) = \emptyset \\ \text{Max} f^{-1}(\{0,1,...,m\}) \text{ sinon} \end{cases}.$

Par définition de n_0, si $n \geq n_0$, n n'est pas élément de $f^{-1}(\{0,1,...,m\})$ et donc $f(n) > m > A$.

On a montré que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geq n_0 \Rightarrow f(n) > A)$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Correction de l'exercice 1546 ▲

1. Posons $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$. Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La suite u est donc q-périodique et de même la suite v est q-périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante (en effet, soient T une période strictement positive de u et ℓ la limite de u. Soit $k \in \{0,...,T-1\}$. $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}| \to |\ell - \ell| = 0$ quand n tend vers l'infini).

Or, si $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, alors $u_1 \neq u_0$ et la suite u n'est pas constante et donc diverge, et si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la suite u est constante et donc converge.

2. (a) et b)) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na)\cos a + \cos(na)\sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\sin a \neq 0$ et donc $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$. Par suite, si v converge alors u converge. De même, à partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na)\cos a - \sin(na)\sin a$, on voit que si u converge alors v converge. Les suites u et v sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite u converge, alors la suite v converge. Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v. D'après ce qui précède, ℓ et ℓ' sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{array}\right. .$$

Le déterminant de ce système vaut $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$ car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ce système admet donc l'unique solution $\ell = \ell' = 0$ ce qui contredit l'égalité $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Donc, les suites u et v divergent.

3. (a) Soit $E' = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que E' est dense dans $\mathbb{R}$ et montrons que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont dense dans $[-1,1]$.

   Soient x un réel de $[-1,1]$ et $b = \mathrm{Arccos}\, x$, de sorte que $b \in [0,\pi]$ et que $x = \cos b$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Pour n entier naturel et k entier relatif donnés, on a :

$$\begin{aligned} |u_n - x| &= |\cos(na) - \cos b| = |\cos(na + 2k\pi) - \cos b| = 2|\sin(\frac{na+2k\pi-b}{2})\sin(\frac{na+2k\pi+b}{2})| \\ &\leq 2\left|\frac{na+2k\pi-b}{2}\right| \text{ (l'inégalité } |\sin x| \leq |x| \text{ valable pour tout réel } x \text{ est classique)} \\ &= |na + 2k\pi - b| \end{aligned}$$

   En résumé, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x| \leq |na + 2k\pi - b|$. Maintenant, si E' est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}|$ tels que $|na + 2k\pi - b| < \varepsilon$ et donc $|u_n - x| < \varepsilon$.

   Finalement, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même, on montre que $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

   Il reste donc à démontrer que E' est dense dans $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$. E est un sous groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$ et donc est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = \inf(E \cap]0,+\infty[) > 0$, soit dense dans $\mathbb{R}$ si $\inf(E \cap]0,+\infty[) = 0$.

   Supposons par l'absurde que $\inf(E \cap]0,+\infty[) > 0$. Puisque $E = \alpha\mathbb{Z}$ et que 2π est dans E, il existe un entier naturel non nul q tel que $2\pi = q\alpha$, et donc tel que $\alpha = \frac{2\pi}{q}$.

   Mais alors, a étant aussi dans E, il existe un entier relatif p tel que $a = p\alpha = \frac{2p\pi}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$. Ceci est exclu et donc, E est dense $\mathbb{R}$.

   (c) Soit x dans $[-1,1]$. D'après ce qui précède, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\cos(na) - x| < \varepsilon$ et donc $|u_{|n|} - x| < \varepsilon$, ce qui montre que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même, $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Correction de l'exercice 1547 ▲

La suite u n'est pas majorée. Donc, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N} /\ u_n > M$. En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N} /\ u_{n_0} \geq 0$.

Soit $k = 0$. Supposons avoir construit des entiers n_0, n_1,..., n_k tels que $n_0 < n_1 < ... < n_k$ et $\forall i \in \{0,...,k\}$, $u_{n_i} \geq i$.

On ne peut avoir : $\forall n > n_k$, $u_n < k+1$ car sinon la suite u est majorée par le nombre $\mathrm{Max}\{u_0, u_1, ..., u_{n_k}, k+1\}$). Par suite, $\exists n_{k+1} > n_k /\ u_{n_{k+1}} \geq k+1$.

On vient de construire par récurrence une suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite u telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \geq k$ et en particulier telle que $\lim_{k \to +\infty} u_{n_k} = +\infty$.

Correction de l'exercice 1548 ▲

Si u converge vers un réel ℓ, alors $\ell \in [0,1]$ puis, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell(1-\ell) \geq \frac{1}{4}$, et donc $(\ell - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ et finalement $\ell = \frac{1}{2}$. Par suite, si u converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

De plus, puisque la suite u est à valeurs dans $]0,1[$, pour n naturel donné, on a :

$$u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - u_n)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n),$$

et puisque $1-u_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

u est croissante et majorée. Donc u converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (amusant).

Correction de l'exercice 1549 ▲

1. Pour tout réel a,

$$e^{i(2p+1)a} = (\cos a + i \sin a)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} C_{2p+1}^{j} \cos^{2p+1-j} a (i \sin a)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)a) = \operatorname{Im}(e^{i(2p+1)a}) = \sum_{j=0}^{p} C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} a (-1)^j \sin^{2j+1} a.$$

Pour $1 \leq k \leq p$, en posant $a = \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \sum_{j=0}^{p} C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1} \neq 0$. En divisant les deux membres de $(*)$ par $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} \operatorname{cotan}^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$. Or, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan} x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan}^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.

Ces p nombres deux à deux distintcs sont racines du polynôme $P = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} X^{p-j}$, qui est de degré p. Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-C_{2p+1}^{3}}{C_{2p+1}^{1}} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} (1 + \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2. Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite (un) est strictement croissante. De plus, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3. Pour x élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$, posons $f(x)=x-\sin x$ et $g(x)=\tan x-x$. f et g sont dérivables sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=1-\cos x$ et $g'(x)=\tan^2 x$. f' et g' sont strictement positives sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et donc strictement croissantes sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Comme $f(0)=g(0)=0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
Donc, $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $0<\sin x<x<\tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $0<\text{cotan}\, x<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$.
4. Pour $1\leq k\leq p$, $0<\frac{k\pi}{2p+1}<\frac{\pi}{2}$ et donc $0<\text{cotan}\,\frac{k\pi}{2p+1}<\frac{2p+1}{k\pi}<\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2p+1}}$. Puis, $\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}<(\frac{(2p+1)^2}{\pi^2})\frac{1}{k^2}<\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2p+1}}$.
En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}<u_p=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2p+1}}=\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc la suite (u_p) tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 1550 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\leq \text{Arcsin}^x\leq(\frac{\pi}{2})^n$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{n!}\int_0^1(\frac{\pi}{2})^n dx=\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. $0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+0}\,dx=\frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx-\int_0^\pi\sin x\,dx\right|=\left|\int_0^\pi\frac{-x\sin x}{x+n}\,dx\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{-x\sin x}{x+n}\,dx\right|\leq\int_0^\pi\frac{\pi}{0+n}\,dx=\frac{\pi^2}{n}.$$

Or, $\frac{\pi^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx$ tend vers $\int_0^\pi\sin x\,dx=2$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 1554 ▲

1. La fonction polynomiale $P(x):=x^3-3x+1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $P'(x)=3x^2-3$, qui est strictement négative sur $]-1,+1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $]-1,+1[$. Comme $P(0)=1>0$ et $P(1/2)=-3/8<0$ il en résulte grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel unique $\alpha\in]0,1/2[$ tel que $P(\alpha)=0$.
2. Comme $f(x)-x=(x^3-3x+1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans $]0,1/2[$.
3. Comme $f'(x)=(x^2+2)/3>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0)=1/9$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^+)=[1/9,+\infty[$. Comme $x_1=f(x_0)=1/9>0$ alors $x_1>x_0=0$; f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit par récurrence que $x_{n+1}>x_n$ pour tout $n\in|||$ ce qui prouve que la suite (x_n) est croissante.
4. Un calcul simple montre que $f(1/2)<1/2$. Comme $0=x_0<1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n<1/2$ pour tout $n\in|||$ (en effet si $x_n<1/2$ alors $x_{n+1}=f(x_n)<f(1/2)<1/2$).
5. D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers un nombre réel $\ell\in]0,1/2]$. De plus comme $x_{n+1}=f(x_n)$ pour tout $n\in|||$, on en déduit par continuité de f que $\ell=f(\ell)$. Comme $f(1/2)<1/2$, On en déduit que $\ell\in]0,1/2[$ et vérifie l'équation $f(\ell)=\ell$. D'après la question 2, on en déduit que $\ell=\alpha$ et donc (x_n) converge vers α.

Correction de l'exercice 1578 ▲

1. $u_n\searrow\sqrt{a}$, et $u_n-\sqrt{a}<\frac{a-\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.
2. $u_{2n}\to 0$, $u_{2n+1}\to 1$.
3. Si $0\leq u_0\leq 1$: $u_n\searrow 0$, sinon $u_n\searrow -\infty$.

$\frac{1}{4}<\alpha$: $u_n\to\infty$.
$-\frac{3}{4}<\alpha\leq\frac{1}{4}$: $u_n\to\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.
$-1<\alpha\leq-\frac{3}{4}$: 1 point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

4.

5. Si $u_0 > -\frac{1}{2}$, $u_n \to \infty$; si $u_0 < -\frac{1}{2}$, $u_n \to -1$.
6. $u_n \to \frac{1}{2}$.
7. Thm du point fixe sur $]-\infty, \frac{7}{4}] \Rightarrow u_n \to 1$.
8. Si $u_0 \neq 1$, $\exists\, n$ tq $4 - 3u_n < 0 \Rightarrow$ suite finie.
9. $u_n \to \alpha \approx 0.39754$.
10. 1 est point fixe, il y a deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.
11.

$1 < \alpha$: $u_n \to 0$ si $u_0 < 1$, $u_n \to \infty$ si $u_0 > 1$.
$-1 < \alpha < 1$: $u_n \to 1$.
$\alpha \leq -1$: si $u_0 \neq 1$, (u_n) diverge.

12.

$e^{1/e} < \alpha$: $u_n \to \infty$.
$1 < \alpha < e^{1/e}$: 2 pts fixes, $\beta < \gamma$. $u_n \to \beta$ si $u_0 < \gamma$, et $u_n \to \infty$ si $u_0 > \gamma$.
$e^{-e} \leq \alpha < 1$: 1 pt fixe, β, et $u_n \to \beta$.
$\alpha < e^{-e}$: 1 point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 1579 ▲

CV (vers 0) ssi $|ka_0| < 1$.

Correction de l'exercice 1581 ▲

$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 1582 ▲

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geq u_n$. Il n'y a pas de point fixe.

Correction de l'exercice 1585 ▲

$y_n - x_n = \text{cste} \Rightarrow x_n \to 0,\ y_n \to y_0 - x_0$.

Correction de l'exercice 1586 ▲

$y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{3^n}$ et $y_n + x_n = y_0 + x_0 \Rightarrow x_n, y_n \longrightarrow \frac{y_0 + x_0}{2}$.

Correction de l'exercice 1587 ▲

$x_n y_n = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} \Rightarrow x_n, y_n \to \sqrt{x_0 y_0}$.

Correction de l'exercice 1588 ▲

1.
2. $\ell = b\frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Correction de l'exercice 1589 ▲

1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\big((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\big)$.
2. $3c_{n+1} - 3b_{n+1} = a_n + b_n + c_n - 3\sqrt[3]{a_n b_n c_n} \geq 0 \Rightarrow b_{n+1} \leq c_{n+1}$.
   $\frac{3}{a_{n+1}} - \frac{3}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} - \frac{3}{\sqrt[3]{a_n b_n c_n}} \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq b_{n+1}$.

   Donc (a_n) croît et (c_n) décroît : $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, $c_n \longrightarrow c$ avec $\begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b^2 = ac \\ 2c = a + b \end{cases} \Rightarrow a = b = c$.

Correction de l'exercice 1590 ▲

Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \searrow 0$ et pour $u_0 < 0$ on a $u_n \nearrow 0$. $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $u_{n+1} \sim \frac{1}{2}u_n$ et la série $\sum u_n$ converge absolument (d'Alembert).

Correction de l'exercice 1591 ▲

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle dont tous les éléments sont points fixes par f. S'il y a plusieurs valeurs d'adhérence il faut passer de l'une à l'autre avec une longueur de saut qui tend vers zéro, on doit tomber sur point fixe entre les deux, contradiction.

Correction de l'exercice 1592 ▲

1. Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Pour n entier naturel donné, on a alors
$$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}-1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n-3}{u_n} = 3\frac{u_n-1}{u_n}.$$
Par suite, $\frac{u_n-1}{u_n} = 3^n\frac{u_0-1}{u_0}$, puis $u_n = \frac{u_0}{u_0-3^n(u_0-1)}$.
2. Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Pour n entier naturel donné, on a alors
$$\frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{4(u_n-1)}{u_n}-2} = \frac{u_n}{2(u_n-2)} = \frac{u_n-2+2}{2(u_n-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n-2}.$$
Par suite, $\frac{1}{u_n-2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{u_0-2}$, puis $u_n = 2 + \frac{2(u_0-2)}{(u_0-2)n+2}$.

Correction de l'exercice 1593 ▲

Pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \end{cases}$. La dernière relation montre que la suite $v - u$ garde un signe constant puis les deux premières relations montrent que pour tout entier naturel n, $\text{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \text{sgn}(v_n - u_n)$ et $\text{sgn}(v_{n+1} - v_n) = -\text{sgn}(v_n - u_n)$. Les suites u et v sont donc monotones de sens de variation opposés. Si par exemple $u_0 \leq v_0$, alors, pour tout naturel n, on a :

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0.$$

Dans ce cas, la suite u est croissante et majorée par v_0 et donc converge vers un certain réel ℓ. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 et donc converge vers un certain réel ℓ'. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell = \frac{2\ell+\ell'}{3}$ et donc $\ell = \ell'$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si $u_0 > v_0$, il suffit d'échanger les rôles de u et v. **Calcul des suites u et v.** Pour n entier naturel donné, on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. La suite $v - u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout naturel n, on a donc $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$. D'autre part, pour n entier naturel donné, $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$. La suite $v + u$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, on a $v_n + u_n = v_0 + u_0$. En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right).$$

En particulier, $\ell = \ell' = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Correction de l'exercice 1594 ▲

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$ et donc, $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_0 - v_0)$. De même, en échangeant les rôles de u, v et w, $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(v_0 - w_0)$ et $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(w_0 - v_0)$ (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation). On a aussi, $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et donc, pour tout naturel n, $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$. Ainsi, u_n, v_n et w_n sont solutions du système

$$\begin{cases} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(w_0 - u_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{cases}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n, on a

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = \frac{1}{3}\left((u_0+v_0+w_0)+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2u_0-v_0-w_0)\right) \\ v_n = \frac{1}{3}\left((u_0+v_0+w_0)+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-u_0+2v_0-w_0)\right) \\ w_n = \frac{1}{3}\left((u_0+v_0+w_0)+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-u_0-v_0+2w_0)\right) \end{array}\right. .$$

Les suites u, v et w convergent vers $\frac{u_0+v_0+w_0}{3}$.

Correction de l'exercice 1595 ▲

Montrons tout d'abord que :

$$\forall (x,y,z) \in]0,+\infty[^3,\ (x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}).$$

Posons $m = \frac{x+y+z}{3}$, $g = \sqrt[3]{xyz}$ et $h = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Soient y et z deux réels strictement positifs tels que $y \leq z$. Pour $x \in]0,y]$, posons

$$u(x) = \ln m - \ln g = \ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z).$$

u est dérivable sur $]0,y]$ et pour $x \in]0,y]$,

$$u'(x) = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x+x+x} - \frac{1}{3x} = 0.$$

u est donc décroissante sur $]0,y]$ et pour x dans $]0,y]$, $u(x) \geq u(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. Soit z un réel strictement positif fixé. Pour $y \in]0,z]$, posons $v(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. v est dérivable sur $]0,z]$ et pour $y \in]0,z]$,

$$v'(y) = \frac{2}{2y+z} - \frac{2}{3z} \leq \frac{2}{3z} - \frac{2}{3z} = 0.$$

v est donc décroissante sur $]0,z]$ et pour y dans $]0,z]$, on a $v(y) \geq v(z) = 0$. On vient de montrer que $g \leq m$. En appliquant ce résultat à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$, on obtient $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$ et donc $h \leq g$. Enfin, $m \leq \frac{z+z+z}{3} = z$ et $h \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}} = x$. Finalement,

$$\boxed{x \leq h \leq g \leq m \leq z.}$$

Ce résultat préliminaire étant établi, puisque $0 < u_0 < v_0 < w_0$, par récurrence, les suites u, v et w sont définies puis, pour tout naturel n, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$, et de plus $u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \leq w_0$. La suite u est croissante et majorée par w_0 et donc converge. La suite w est décroissante et minorée par u_0 et donc converge. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$, la suite v converge. Soient alors a, b et c les limites respectives des suites u, v et w. Puisque pour tout entier naturel n, on a $0 < u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n$, on a déjà par passage à la limite $0 < u_0 \leq a \leq b \leq c$. Toujours par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{a} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ b = \sqrt[3]{abc} \\ c = \frac{a+b+c}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2bc = ab+ac \\ b^2 = ac \\ a+b = 2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 2c-a \\ a^2-5ac+4c^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = c) \text{ ou } (a = 4c \text{ et } b = -2c).$$

$b = -2c$ est impossible car b et c sont strictement positifs et donc, $a = b = c$. Les suites u, v et w convergent vers une limite commune.

Correction de l'exercice 1596 ▲

Tout d'abord , on montre facilement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, u_n existe et $u_n \geq 1$. Mais alors, pour tout entier naturel non nul n, $1 \leq u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leq 1+n$. Par suite, pour $n \geq 2$, $1 \leq u_n \leq n$, ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq u_n \leq n.$$

Supposons momentanément que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ. Dans ce cas :

$$1+\frac{n}{u_n} = 1+\frac{n}{\sqrt{n}+\ell+o(1)} = 1+\sqrt{n}\frac{1}{1+\frac{\ell}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1+\sqrt{n}\left(1-\frac{\ell}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n}+1-\ell+o(1).$$

D'autre part,

$$u_{n+1}=\sqrt{n+1}+\ell+o(1)=\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}+\ell+o(1)=\sqrt{n}+\ell+o(1),$$

et donc $\ell-(1-\ell)=o(1)$ ou encore $2\ell-1=0$. Donc, si la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell=\frac{1}{2}$. Il reste à démontrer que la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge. On note que pour tout entier naturel non nul,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n}(-u_n^2+u_n+n)=\frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})-u_n\right)\left(u_n-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4n+1})\right).$$

Montrons par récurrence que pour $n\geq 1$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})\leq u_n\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$. Posons $v_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ et $w_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$.

Si $n=1$, $v_1=1\leq u_1=1\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=w_1$.

Soit $n\geq 1$. Supposons que $v_n\leq u_n\leq w_n$. Alors,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1}\leq u_{n+1}=1+\frac{n}{u_n}\leq 1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}.$$

Mais, pour $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5})-(1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1})\right)&=\operatorname{sgn}((1+\sqrt{4n+5})(1+\sqrt{4n-3})-2(2n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&=\operatorname{sgn}(\sqrt{4n+5}(1+\sqrt{4n-3})-(4n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&=\operatorname{sgn}((4n+5)(1+\sqrt{4n-3})^2-(4n+1+\sqrt{4n-3})^2)\ \text{(par croissance de } x\mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\
&=\operatorname{sgn}((4n+5)(4n-2+2\sqrt{4n-3})-((4n+1)^2+2(4n+1)\sqrt{4n-3}+4n-3))\\
&=\operatorname{sgn}(-8+8\sqrt{4n-3})=\operatorname{sgn}(\sqrt{4n-3}-1)=\operatorname{sgn}((4n-3)-1)=\operatorname{sgn}(n-1)=+
\end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1}\leq 1+1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}\leq w_{n+1}$.

D'autre part,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1}=\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1}+1}=\frac{(\sqrt{4n+1}+1)^2}{2(\sqrt{4n+1}+1)}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})=v_{n+1},$$

et donc $v_{n+1}\leq u_{n+1}\leq w_{n+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})\leq u_n\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1}),$$

(ce qui montre au passage que u est croissante).

Donc, pour $n\geq 1$,

$$\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\sqrt{n}\leq u_n-\sqrt{n}\leq\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}-\sqrt{n},$$

ou encore, pour tout $n\geq 1$,

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}}\leq u_n-\sqrt{n}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}}.$$

Maintenant, comme les deux suites $(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}})$ et $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}})$ convergent toutes deux vers $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de la limite par encadrements, la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1597 ▲

1. Posons $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ de sorte que $A=I+J$. On a $J^2=2j$ et donc, plus généralement : $\forall k\geq 1,\ J^k=2^{k-1}J$. Mais alors, puisque I et J commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit pour n entier naturel non nul donné :

$$A^n=(I+J)^n=I+\sum_{k=1}^{n}C_n^kJ^k=I+(\sum_{k=1}^{n}C_n^k2^{k-1})J=I+\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^k-1)J$$
$$=I+\frac{1}{2}((1+2)^n-1)J=I+\frac{1}{2}(3^n-1)J=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}$$

ce qui reste vrai pour $n=0$. Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}.$$

Poour n entier naturel donné, posons $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $X_{n+1}=A.X_n$ et donc,

$$X_n=A^n.X_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2}\\ \frac{3^n-1}{2}\end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3^n+1}{2}\text{ et }v_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n)$. Donc, la suite $u+v$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0+v_0=1$. On en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+v_n=3^n\ (I).$$

De même, pour tout entier naturel n $u_{n+1}-v_{n+1}=u_n-v_n$. Donc, la suite $u+v$ est une suite constante. Puisque $u_0-v_0=1$, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-v_n=1\ (II).$$

En additionnant et en retranchant (I) et (II), on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3^n+1}{2}\text{ et }v_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

Correction de l'exercice 1598 ▲

1. Pour $x\geq -1$, posons $f(x)=\sqrt{1+x}$ et $g(x)=f(x)-x$.
Soit $u_0\in I=[-1,+\infty[$. f est définie sur I et de plus $f(I)=[0,+\infty[\subset[-1,+\infty[$. On en déduit, par une démonstration par récurrence, que la suite u est définie.
Si la suite u converge, puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq -1$, sa limite ℓ vérifie $\ell\geq -1$. Puisque f est continue sur $[-1,+\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\lim_{n\to+\infty}u_n)=f(ell).$$

et ℓ est un point fixe de f. Or, pour $x\geq -1$,

$$\sqrt{1+x}=x\Leftrightarrow 1+x=x^2\text{ et }x\geq 0\Leftrightarrow (x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ ou }x=\frac{1+\sqrt{5}}{2})\text{ et }x\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ainsi, si la suite (u_n) converge, c'est vers le nombre $\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Pour $x\geq -1$,

$$\operatorname{sgn}(f(x)-\alpha)=\operatorname{sgn}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\alpha})=\operatorname{sgn}((1+x)-(1+\alpha))\quad(\text{par croissance de }x\mapsto x^2\text{ sur }[0,+\infty[)$$
$$=\operatorname{sgn}(x-\alpha).$$

Ainsi, les intervalles $[-1,\alpha[$ et $]\alpha,+\infty[$ sont stables par f. Donc, si $-1\leq u_0<\alpha$, alors par récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leq u_n<\alpha$ et si $u_0>\alpha$, alors par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>\alpha$.
Soit $x\geq -1$. Si $x\in[-1,0]$, $\sqrt{1+x}-x\geq 0$ et si $x\geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(g(x)) &= \mathrm{sgn}(\sqrt{1+x}-x)\\ &= \mathrm{sgn}((1+x)-x^2) \quad \text{(par croissance de } x\mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &= \mathrm{sgn}(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2})(-x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-x) = \mathrm{sgn}(\alpha - x) \text{ (car ici } x\geq 0).\end{aligned}$$

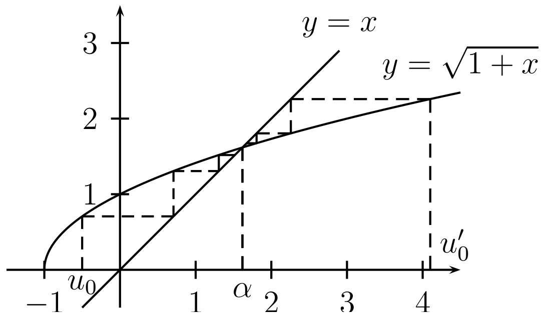
On en déduit que, si $x\in[-1,\alpha[$, $f(x)>x$, et si $x\in]\alpha,+\infty[$, $f(x)<x$. Mais alors, si $-1\leq u_0<\alpha$, puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leq u_n<\alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1}=f(u_n)>u_n.$$

La suite u est donc strictement croissante, majorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α.
Si $u_0>\alpha$, puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>\alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1}=f(u_n)<u_n.$$

La suite u est donc strictement décroissante, minorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α. Enfin, si $u_0=\alpha$, la suite u est constante.
En résumé,
si $u_0\in[-1,\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la suite u est strictement croissante, convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$,
si $u_0\in]\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$,
si $u_0=\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la suite u est constante et en particulier convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Ainsi, dans tous les cas, la suite u est convergente et $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



2. Si $u_0>0$, alors puisque f est définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ et que I est stable par f ($\forall x>0,\ \ln(1+x)>\ln 1=0$), la suite u est définie et est strictement positive. Si la suite u converge, sa limite ℓ est un réel positif **ou nul**. Par continuité de f sur $[0,+\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\lim_{n\to+\infty}u_n)=f(\ell).$$

Pour $x>-1$, posons $g(x)=\ln(1+x)-x$. g est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x>-1$,

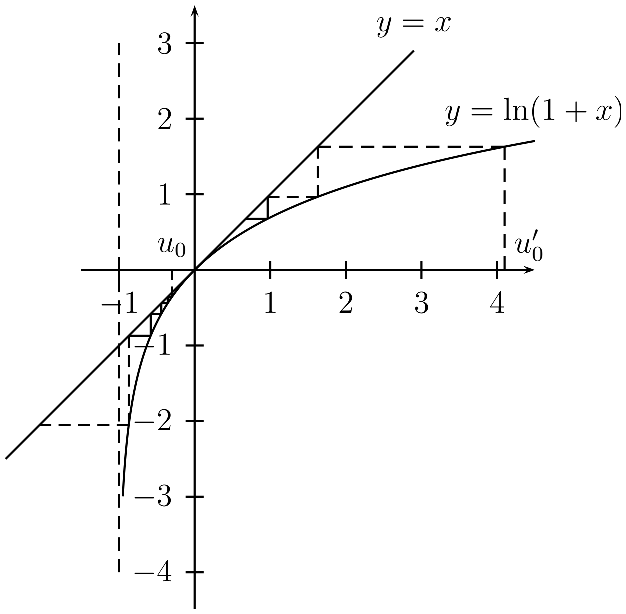
$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}.$$

g' est strictement positive sur $]-1,0[$ et strictement négative sur $]0,+\infty[$. g est donc strictement croissante sur $]-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, si $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $g(x)<0$. En particulier, pour $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $f(x)\neq x$. Puisque $f(0)=0$, f admet dans $]-1,+\infty[$ un et un seul point fixe à savoir 0.
En résumé, si $u_0>0$, la suite u est définie, strictement positive, et de plus, si la suite u converge, alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
Mais, pour n entier naturel donné,

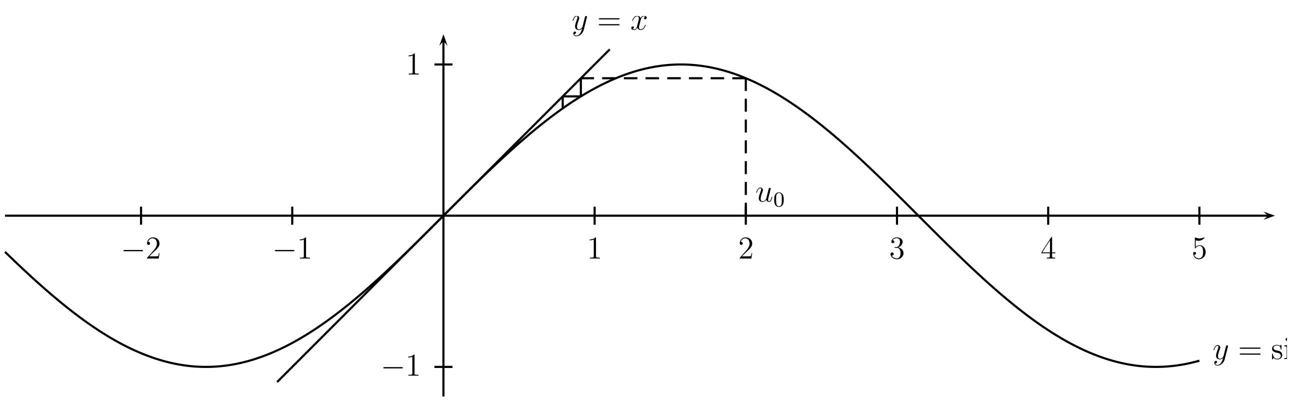
$$u_{n+1}-u_n=\ln(1+u_n)-u_n<0.$$

Par suite, la suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc, d'après ce qui précède, converge vers 0.
Si $u_0=0$, la suite u est constante. Il reste donc à étudier le cas où $u_0\in]-1,0[$. Montrons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0}\leq -1$. Dans le cas contraire, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>-1$. Comme précédemment, par récurrence, la suite u est à valeurs dans $]-1,0[$ et strictement décroissante. Etant minorée par -1, la suite u converge vers un certain réel ℓ.
Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ -1<u_n\leq u_0<0$, on a $-1\leq\ell\leq u_0<0$. Donc, ou bien $\ell=-1$, ou bien f est continue en ℓ et ℓ est un point fixe de f élément de $]-1,0[$.
On a vu que f n'admet pas de point fixe dans $]-1,0[$ et donc ce dernier cas est exclu. Ensuite, si $\ell=-1$, il existe un rang N tel que $u_N\leq -0.9$. Mais alors, $u_{N+1}=\leq\ln(-0,9+1)=-2,3...<-1$ ce qui constitue de nouveau une contradiction.

Donc, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leq -1$ et la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.
En résumé,
si $u_0 \in]0,+\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,
si $u_0 = 0$, la suite u est constante,
et si $u_0 \in]-1,0[$, la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.



3. Pour tout choix de u_0, $u_1 \in [-1,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante. Si $u_0 \in [-1,0[$, considérons la suite u' définie par $u'_0 = -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_{n+1} = \sin(u'_n)$. La fonction $x \mapsto \sin x$, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = -u_n$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0,1]$.
   Puisque $]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin]0,1] \subset]0,1]$ et l'intervalle $I =]0,1]$ est stable par f. Ainsi, si $u_0 \in]0,1]$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.
   Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin x - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $]0,1]$ et donc strictement décroissante sur $[0,1]$. On en déduit que pour $x \in]0,1]$, $g(x) < g(0) = 0$.
   Mais alors, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers $\ell \in [0,1]$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0,1]$ et donc, ℓ est un point fixe de f. L'étude de g montre que f a un et un seul point fixe dans $[0,1]$ à savoir 0. La suite u est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   L'étude préliminaire montre la suite u converge vers 0 pour tout choix de u_0.



4. Si u_0 est un réel quelconque, $u_1 \in [-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ puis $u_2 \in [0,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [0,1]$.
   On a $\cos([0,1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0,504...,1] \subset [0,1]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos x$ laisse stable l'intervalle $I = [0,1]$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
   Pour $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = \cos x - x$. g est somme de deux focntions strictement décroissantes sur $[0,1]$ et est donc strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, g est continue sur $[0,1]$ et vérifie $g(0) = \cos 0 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois sur $[0,1]$ en un certain réel α. Ainsi, f admet sur $[0,1]$ un unique point fixe, à savoir α. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, on sait que si la suite u converge, c'est vers α.
   La fonction $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leq \sin 1 < 1.$$

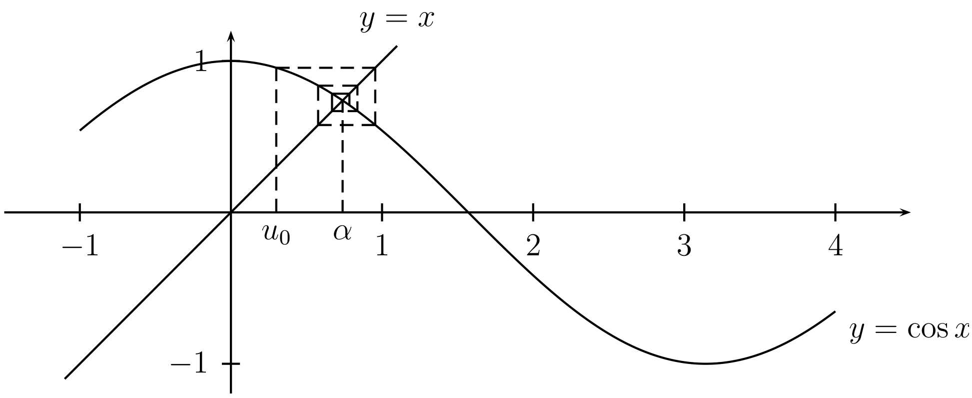
L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |\cos x - \cos y| \leq \sin 1 |x-y|$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \sin 1 |u_n - \alpha|,$$

et donc, pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Comme $0 \leq \sin 1 < 1$, la suite $(\sin 1)^n$ converge vers 0, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. On peut noter que puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où $u_0 \in [0,1]$. On peut noter également que si $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin 1)} = 26,6...$, alors $(\sin 1)^n < 10^{-2}$. Par suite, u_{27} est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. La machine fournit $\alpha = 0,73...$ (et même $\alpha = 0,739087042.....$).



5. Si u_0 est un réel quelconque, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [-1,1]$. On supposera sans perte de généralité que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante et d'autre part, l'étude du cas $u_0 \in [-1,0[$ se ramème, comme en 3), à l'étude du cas $u_0 \in]0,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0,1]$.

   Si $x \in]0,1]$, alors $2x \in]0,2] \subset]0,\pi[$ et donc $\sin(2x) \in]0,1]$. L'intervalle $I =]0,1]$ est donc stable par la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin(2x)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin(2x) - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = 2\cos(2x) - 1$. g est donc strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, 1]$. On en déduit que si $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) > g(0) = 0$. D'autre part, g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, 1]$ et vérifie $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ et $g(1) = \sin 2 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois en un certain réel $\alpha \in]\frac{\pi}{4}, 1[$.

   En résumé, g s'annule une et une seule fois sur $]0,1]$ en un certain réel $\alpha \in]\frac{\pi}{4}, 1[$, g est strictement positive sur $]0,\alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha, 1]$.

   Supposons que $u_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et montrons par l'absurde que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$. Dans le cas contraire, tous les u_n sont dans $]0, \frac{\pi}{4}[$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

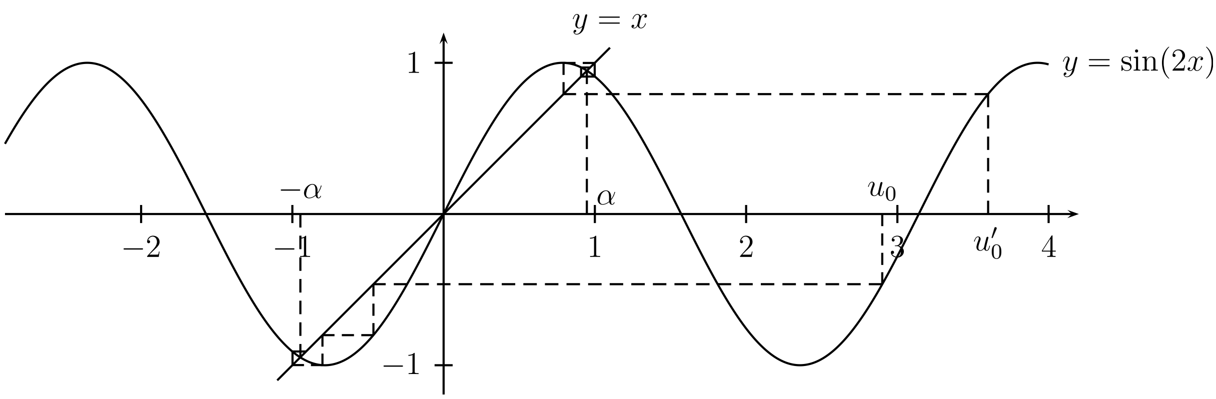
   La suite u est donc strictement croissante. Etant majorée par $\frac{\pi}{4}$, la suite u converge. Comme g est continue sur $[u_0, \frac{\pi}{4}]$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [u_0, \frac{\pi}{4}]$, on sait que la limite de u est un point fixe de f élément de $[u_0, \frac{\pi}{4}]$. Mais l'étude de g a montré que f n'admet pas de point fixe dans cet intervalle (u_0 étant strictement positif). On aboutit à une contradiction.

   Donc, ou bien $u_0 \in [\frac{\pi}{4}, 1]$, ou bien $u_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et dans ce cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$. Dans tous les cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$. Mais alors, puisque $f([\frac{\pi}{4}, 1]) = [\sin 2, \sin \frac{\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{4}, 1]$ (car $\sin 2 = 0,909... > 0,785... = \frac{\pi}{4}$), pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \in [\frac{\pi}{4}, 1]$.

   Pour $x \in [\frac{\pi}{4}, 1]$, $|g'(x)| = |2\cos(2x)| \leq |2\cos 2|$. L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall n \geq n_0,\ |u_{n+1} - \alpha| \leq |2\cos 2|.|u_n - \alpha|$, puis que

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \alpha| \leq |2\cos 2|^{n-n_0} |u_{n_0} - \alpha|.$$

   Comme $|2\cos 2| = 0,83... < 1$, on en déduit que la suite u converge vers α. La machine donne par ailleurs $\alpha = 0,947....$



6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

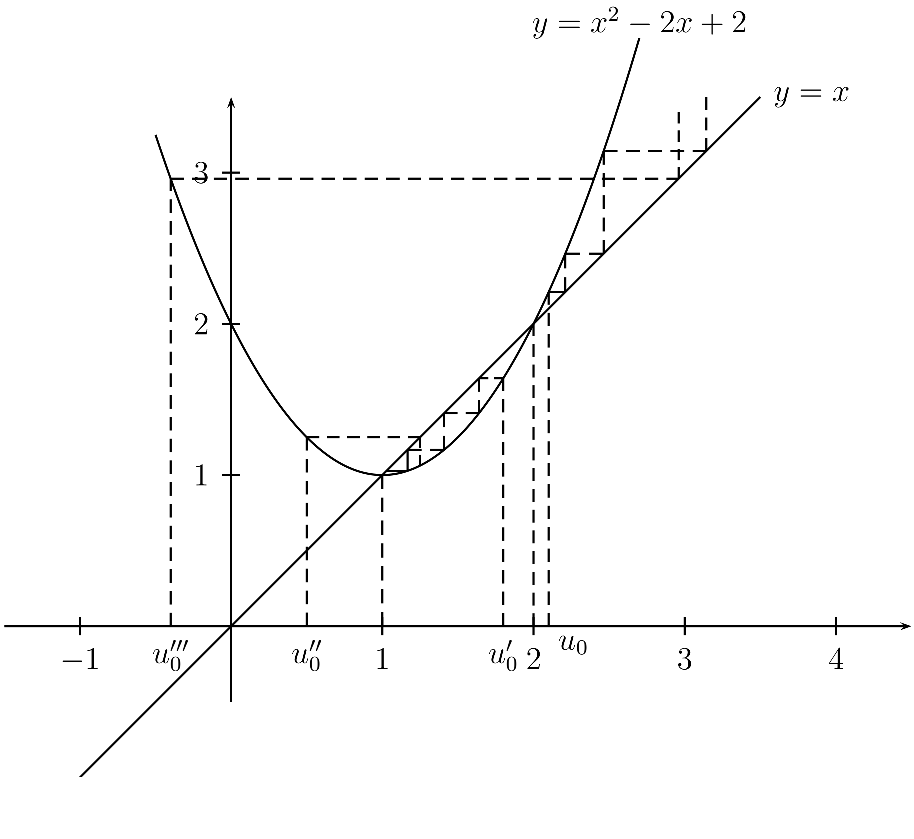
$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc, si la suite u converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) \quad (I) \\ &u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \quad (II) \\ &u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2) \quad (III). \end{aligned}$$

1er cas. Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, la suite u est constante.
2ème cas. Si $u_0 \in]1,2[$, (II) et (III) permettent de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]1,2[$. (I) montre alors que la suite u est strictement décroissante. Etant minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \in [1, u_0] \subset [1,2[$. Dans ce cas, la suite (u_n) converge vers 1.
3ème cas. Si $u_0 \in]2, +\infty[$, (III) permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. Mais alors, (I) montre que la suite u est strictement croissante. Si u converge, c'est vers un réel $\ell \in [u_0, +\infty[\subset]2, +\infty[$. f n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite u diverge et, u étant strictement croissante, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
4ème cas. Si $u_0 \in]0,1[$, alors $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in]1,2[$ ce qui ramène au deuxième cas. La suite u converge vers 1.
5ème cas. Si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite u est constante à partir du rang 1. Dans ce cas, la suite u converge vers 2.
6ème cas. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = u_n^2 - 2u_n + 2 > 2$, ce qui ramène au troisième cas. La suite u tend vers $+\infty$.

En résumé, si $u_0 \in]0,2[$, la suite u converge vers 1, si $u_0 \in \{0,2\}$, la suite u converge vers 2 et si $u_0 \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, la suite u tend vers $+\infty$.



Correction de l'exercice 1599 ▲

1. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = \sin x$. On a $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0,1] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, puisque $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il est connu que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$ et de plus, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = x \Leftrightarrow x = 0$. La suite u est à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel ℓ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ qui vérifie (f étant continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) $f(\ell) = \ell$ ou encore $\ell = 0$. En résumé,

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement positive, strictement décroissante et converge vers } 0.}$$

2. Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0 , on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = (\sin u_n)^{\alpha} - u_n^{\alpha} &\underset{n\to+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^{\alpha} - u_n^{\alpha} \\
&= u_n^{\alpha}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^{\alpha} - 1\right) = u_n^{\alpha}\left(-\alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \\
&= -\alpha\frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2})
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$ on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de Cesaro, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou encore $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou enfin,

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Par suite, puisque la suite u est strictement positive,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

Correction de l'exercice 1600 ▲

Il est immédiat par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ et donc, puisque la suite u est strictement positive, $u_{n+1} < u_n$. La suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$ ou encore $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$ ou encore $\ell = 0$.

$$\boxed{u \text{ est strictement positive, strictement décroissante et converge vers } 0.}$$

Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0,

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}(e^{-\alpha u_n} - 1) = u_n^{\alpha}(-\alpha u_n + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient en particulier $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$. Puis, comme au numéro précédent, $\frac{1}{u_n} = n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

Correction de l'exercice 1601 ▲

Remarquons d'abord que $1-\frac{1}{k^2}=\frac{1-k^2}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n=\frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 1606 ▲

1. 0.
2. 1.
3. $7/30$.
4. $1/2$.
5. 1.
6. $-3/2$.
7. 1.
8. 3.
9. 1 ; 2.
10. $3/4$.
11. 0.
12. 0.
13. $1/3$.

Correction de l'exercice 1607 ▲

1.
$$\begin{aligned}u_{n+1}^2-a&=\frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2-a\\&=\frac{1}{4u_n^2}(u_n^4-2au_n^2+a^2)\\&=\frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2}\end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n\geqslant 0$ on a $u_n>0$. D'après l'égalité précédente pour $n\geqslant 0$, $u_{n+1}^2-a\geqslant 0$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$.

   Soit $n\geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2}\leqslant 1$ car $u_n\geqslant\sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$ et donc $u_{n+1}\leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell>0$. D'après la relation

   $$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$$

   quand $n\to+\infty$ alors $u_n\to\ell$ et $u_{n+1}\to\ell$. À la limite nous obtenons la relation

   $$\ell=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{a}{\ell}\right).$$

   La seule solution positive est $\ell=\sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation

   $$u_{n+1}^2-a=\frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$$

   s'écrit aussi

   $$(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})=\frac{(u_n-\sqrt{a})^2(u_n+\sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-\sqrt{a} &= (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2\\
&\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2\\
&\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n=1$, $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$. Si la proposition est vraie rang n, alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-\sqrt{a} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2\\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2\\
&\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}
\end{aligned}$$

6. Soit $u_0=3$, alors $u_1=\frac{1}{2}(3+\frac{10}{3})=3,166\ldots$. Comme $3\leqslant\sqrt{10}\leqslant u_1$ donc $u_1-\sqrt{10}\leq 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k=0,17$. Pour que l'erreur $u_n-\sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53\times10^{-10}$. Nous obtenons $u_4=3,16227766\ldots$ Bilan $\sqrt{10}=3,16227766\ldots$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule. Le nombre de chiffres exacts double à chaque itération, avec u_5 nous aurions (au moins) 16 chiffres exacts, et avec u_6 au moins 32...

Correction de l'exercice 1608 ▲

1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}(\frac{2}{n}-1).$$

Donc à partir de $n\geq 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Comme $u_n\leq v_n\leq v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell\in\mathbb{R}$. De même $v_n\geq u_n\geq u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell'\in\mathbb{R}$. De plus $v_n-u_n=\frac{1}{n!}$. Et donc (v_n-u_n) tend vers 0 ce qui prouve que $\ell=\ell'$.

3. Supposons que $\ell\in\mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell=\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n\geq 2$:

$$u_n\leq\frac{p}{q}\leq v_n.$$

Ecrivons cette égalité pour $n=q$: $u_q\leq\frac{p}{q}\leq v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q\leq q!\frac{p}{q}\leq q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q=u_q+\frac{1}{q!}$ donc :

$$q!u_q\leq q!\frac{p}{q}\leq q!u_q+1.$$

Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q+1=q!v_q$. Nous obtenons que $\ell=\frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell=u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q<u_{q+1}<\cdots<\ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell=v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e=\exp(1)$.

Correction de l'exercice 1609 ▲

1. Si $u_0\leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0)\leqslant f(u_1)$ donc $u_1\leqslant u_2$, ensuite $f(u_1)\leqslant f(u_2)$ soit $u_2\leqslant u_3$,... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0\leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.
Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1}=f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell=f(\ell)$.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ et $f([0,4]) \subset [0,4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x+5 = x(x+3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de l'équation du second degré $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\dots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \dots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \dots)$.
4. La fonction f définie par $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cet intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\dots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ' sa limite. Les limites ℓ et ℓ' sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1-f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\dots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell = 1$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell' = 0$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 1610 ▲

1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,
$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$
ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.
2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités
$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2$$
$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$
on obtient
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$
De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$
on obtient
$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Il faut avant tout remarquer que pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (qui est u_{n+1}) et arithmétique (qui est v_{n+1}) sont strictement positives.
   (a) On veut montrer que pour chaque n, $u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.
   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.
   (c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite ℓ. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite ℓ'. Nous savons maintenant que $u_n \to \ell$, donc aussi $u_{n+1} \to \ell$, et $v_n \to \ell'$; la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ s'écrit à la limite :
   $$\ell = \sqrt{\ell \ell'}.$$
   De même la relation $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ donnerait à la limite :
   $$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$
   Un petit calcul avec l'une ou l'autre de ces égalités implique $\ell = \ell'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.

Définition Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :
Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que (u_n) et (v_n) vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction de **l'exercice 1612 ▲**

Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \; - 1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \quad (\text{car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

   Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

   Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc $a_n < a_{n-1}$. Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
   Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

   Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

   Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.
   Pour résumer, nous avons montré que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

   Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

   qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f_n(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des “gendarmes”). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 1631 ▲

1. Tout d'abord, pour $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n}$ existe et est élément de $[-1,1]$. Donc, Arccos $\frac{n-1}{n}$ existe pour tout entier naturel non nul n.
   Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{n-1}{n}$ tend vers 1 et donc Arccos $\frac{n-1}{n}$ tend vers 0. Mais alors,
   $$\operatorname{Arccos}\frac{n-1}{n} \sim \sin(\operatorname{Arccos}\frac{n-1}{n}) = \sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$
2. Arccos $\frac{1}{n}$ tend vers 1 et donc Arccos $\frac{1}{n} \sim 1$.
3. $\operatorname{ch}(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2}e^{\sqrt{n}}$.
4. $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim n.\frac{1}{n} = 1$ et donc, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers e. Par suite, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$.
5. Argch$n$ existe pour $n \geq 1$ et comme, pour $n \geq 1$, $n^4+n^2-1 \geq n^4 > 0$, $\frac{\operatorname{Argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$ existe pour $n \geq 1$.
   $$\operatorname{Argch} n = \ln(n+\sqrt{n^2-1}) \sim \ln(n+n) = \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \sim \ln n.$$
   Donc, $\frac{\operatorname{Argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n^4}} = \frac{\ln n}{n^2}$.
6. $-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}+1) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}(\frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - 1 + o(1)$, et donc
   $$(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1+o(1)} \sim e^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1} = \frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}.$$
7. $$\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln\sin\frac{1}{n}) \sim (\cos\frac{1}{n} - 1)\ln(\frac{1}{n}) \sim (-\frac{1}{2n^2})(-\ln n) = \frac{\ln n}{2n^2}.$$
8. $(\operatorname{Arctan} n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{n})^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})))^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1-\frac{6}{5n\pi}+o(\frac{1}{n}))$, et donc
   $$(\frac{\pi}{2})^{3/5} - (\operatorname{Arctan} n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1-1+\frac{6}{5n\pi}+o(\frac{1}{n})) \sim (\frac{\pi}{2})^{3/5}\frac{6}{5n\pi}$$
9. Tout d'abord, pour $n \geq 1$, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$, et donc $1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq 0$, puis $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ existe. Ensuite, quand n tend vers $+\infty$,
   $$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$$

Correction de l'exercice 1632 ▲

Pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}.$$

Mais, pour $0 \leq k \leq n-2$, $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\ldots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ (le produit contenant au moins les deux premiers facteurs. Par suite,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leq \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\frac{1}{n}$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$ tend vers 1 et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!.$$

Correction de l'exercice 1633 ▲

1. Soit $\varepsilon > 0$.
Les suites u et v sont équivalentes et la suite v est strictement positive. Donc, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} v_n$. Soit $n > n_0$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| &= \frac{|U_n - V_n|}{V_n} \leq \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n} |u_k - v_k| \\ &\leq \frac{1}{V_n}\left(\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k\right) \\ &\leq \frac{1}{V_n}\left(\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} V_n\right) = \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Maintenant, l'expression $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$ est constante quand n varie, et d'autre part, V_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $\frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un rang $n_1 > n_0$ tel que, pour $n \geq n_1$, $\frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geq n_1$, on a alors $\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \varepsilon\right.$$

Ainsi, la suite $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc $U_n \sim V_n$.

2. $$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}.$$

Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
En résumé, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 0$, de plus quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ et enfin, $\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après 1),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} \sim 2\sqrt{n}.$$

$$(n+1)\ln(n+1) - n\ln n = (n+1-n)\ln n + (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + 1 + o(1) \sim \ln n.$$

Comme $\sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$ et que les suites considéres sont positives, on en déduit que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k \sim \sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1) \sim n\ln n.$$

Correction de l'exercice 1634 ▲

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned}n\left(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}\right) &= 1 + \frac{n}{n+1} - 2 + n(-1)^n\left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) = \frac{(-1)^n n(\ln(n+1) - \ln n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) \\ &= \frac{(-1)^n n\ln(1+1/n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) = \frac{(-1)^n(1+o(1))}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) = o(1).\end{aligned}$$

Donc, $n(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}) = o(1)$, ou encore $u_n + u_{n+1} = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou enfin, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$. Pourtant, u_n est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ et pas du tout à $\frac{1}{n}$ ($|nu_n| = \frac{n}{\ln n} \to +\infty$).

Supposons maintenant que $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$ et montrons que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

On pose $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Il s'agit maintenant de montrer que $v_n = o(\frac{1}{n})$ sous l'hypothèse $v_n + v_{2n} = o(\frac{1}{n})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $n|v_n + v_{2n}| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Soient $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$|v_n| = |v_n + v_{2n} - v_{2n} - v_{4n} + \ldots + (-1)^p(v_{2^pn} + v_{2^{p+1}n}) + (-1)^{p+1}v_{2^{p+1}n}| \leq \sum_{k=0}^{p} |v_{2^kn} + v_{2^{k+1}n}| + |v_{2^{p+1}n}|$$

$$\frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^kn} + |v_{2^{p+1}n}| = \frac{\varepsilon}{4n}\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}} + |v_{2^{p+1}n}|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2n} + |v_{2^{p+1}n}|$$

Maintenant, la suite u tend vers 0, et il en est de même de la suite v. Par suite, pour chaque $n \geq n_0$, il est possible de choisir p tel que $|v_{2^{p+1}n}| < \frac{\varepsilon}{2n}$.

En résumé, si n est un entier donné supérieur ou égal à n_0, $n|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |nv_n| < \varepsilon.$$

Par suite, $v_n = o(\frac{1}{n})$ et donc $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou encore $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 1635 ▲

1. Il est immédiat que la suite u est définie et à valeurs dans $[-1, \frac{\pi}{2}]$.
   Plus précisément, $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et si pour $n \geq 0$, $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$, alors $u_{n+1} \in]0, 1] \subset]0, \frac{\pi}{2}]$. On a montré par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
   Montrons que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x > x$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x) = x - \sin x$. f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 1 - \cos x$. Par suite, f' est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mais alors, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f(x) > f(0) = 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante. Puisque la suite u est d'autre part minorée par 0, la suite u converge vers un réel noté ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$. Mais alors, par continuité de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc en ℓ, on a

   $$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sin(u_n) = \sin(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \sin(\ell).$$

   Or, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x < x$ et en particulier $\sin x \neq x$. Donc, $\ell = 0$.
   La suite u est strictement positive, strictement décroissante, de limite nulle.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

   $$u_{n+1}^{\alpha} = (\sin(u_n))^{\alpha} = (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^{\alpha} = u_n^{\alpha}(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{\alpha} = u_n^{\alpha}(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)) = u_n^{\alpha} - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}).$$

   et donc, $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = -\frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$. En prenant $\alpha = -2$, on obtient alors

   $$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

   D'après le lemme de CÉSARO, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend également vers $\frac{1}{3}$. Mais,

   $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}).$$

   Ainsi, $\frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}) = \frac{1}{3} + o(1)$ puis, $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) = \frac{n}{3} + o(n)$. Donc, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$, puis $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ et enfin, puisque la suite u est strictement positive,

   $$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Correction de l'exercice 1649 ▲

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dont les solution sont $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

pour α, β des réels que nous allons calculer grâce à u_0 et u_1. En effet $u_0 = 1 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$ donc $\alpha + \beta = 1$. Et comme $u_1 = 1 = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ nous obtenons $\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$. En résolvant ces deux équations nous obtenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda)$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu)$. Nous écrivons donc pour finir :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}\right).$$

Correction de l'exercice 1651 ▲

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

Or la suite $(2^n)_n$ tend vers $+\infty$. Donc si $(u_n)_n$ est bornée alors $\alpha = 0$. Donc $(u_n)_n$ est la suite constante égale à β. Réciproquement toute suite constante qui vérifie $u_n = \beta$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Donc les suites cherchées sont les suites constantes.

Correction de l'exercice 1655 ▲

1. $u_n = \frac{1}{3}((a+2b) + 2(a-b)(-\frac{1}{2})^n)$.
2.
3. $v_n = \lambda \times \mu^{(-\frac{1}{2})^n}$.
4.

Correction de l'exercice 1656 ▲

1. $u_n = \frac{n^2}{4} - n + \frac{3}{8}(1-(-1)^n)$.
2. $u_n = \frac{n-1}{3} + aj^n + bj^{2n}$.

Correction de l'exercice 1657 ▲

$2u_n = u_0 + v_0 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - v_0), \quad 2v_n = u_0 + v_0 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - v_0).$

Correction de l'exercice 1658 ▲

1. $u_n^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^{k-p} u_{n+p}$.
2.

Correction de l'exercice 1659 ▲

1.
2. $6T_n = \left(3+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n + \left(3-\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$.

Correction de **l'exercice 1661 ▲**

1. L'équation caractéristique est $4z^2-4z-3=0$. Ses solutions sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Les suites cherchées sont les suites de la forme $(u_n)=\left(\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes). Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite u, λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)$ et $\mu=\frac{1}{4}(u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

2. Clairement $u_{2n}=\frac{1}{4^n}u_0$ et $u_{2n+1}=\frac{1}{4^n}u_1$ et donc $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}(1+(-1)^n)u_0+2\times\frac{1}{2^n}(1-(-1)^n)u_1\right)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left((1+(-1)^n)u_0+2(1-(-1)^n)u_1\right).}$$

3. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a=4a+3a+12$ et donc $a=-4$. Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4+\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=4+u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=4+u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)$ et $\mu=\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-4+\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

4. La suite $v=\frac{1}{u}$ est solution de la récurrence $2v_{n+2}=v_{n+1}-v_n$ et donc, (v_n) est de la forme $\left(\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$ et donc $u_n=\frac{1}{\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

5. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $(\lambda+\mu 2^n)$. 1 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme $u_n=an^4+bn^3+cn^2+dn$. Pour $n\geq 2$, on a

$$\begin{aligned}u_n-3u_{n-1}+2u_{n-2}&=(an^4+bn^3+cn^2+dn)-3(a(n-1)^4+b(n-1)^3+c(n-1)^2+d(n-1))\\&\quad+2(a(n-2)^4+b(n-2)^3+c(n-2)^2+d(n-2))\\&=a(n^4-3(n-1)^4+2(n-2)^4)+b(n^3-3(n-1)^3+2(n-2)^3)\\&\quad+c(n^2-3(n-1)^2+2(n-2)^2)+d(n-3(n-1)+2(n-2))\\&=a(-4n^3+30n^2-52n+29)+b(-3n^2+15n-13)+c(-2n+5)+d(-1)\\&=n^3(-4a)+n^2(30a-3b)+n(-52a+15b-2c)+29a-13b+5c-d.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u\text{ est solution}&\Leftrightarrow -4a=1\text{ et }30a-3b=0\text{ et }-52a+15b-2c=0\text{ et }29a-13b+5c-d=0\\&\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4},\ b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{49}{4},\ d=-36.\end{aligned}$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme $\left(-\frac{1}{4}(n^3+10n^2+49n+144)+\lambda+\mu 2^n\right)$.

6. Pour tout complexe z, $z^3-6z^2+11z-6=(z-1)(z-2)(z-3)$ et les suites solutions sont les suites de la forme $(\alpha+\beta 2^n+\gamma 3^n)$.

7. Pour tout complexe z, $z^4-2z^3+2z^2-2z+1=(z^2+1)^2-2z(z^2+1)=(z-1)^2(z^2+1)$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n$. 1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $u_n=an^7+bn^6+cn^5+dn^4+en^3+fn^2$. Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+4}-2u_{n+3}+2u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = a((n+4)^7-2(n+3)^7+2(n+2)^7-2(n+1)^7+n^7)$$
$$+b((n+4)^6-2(n+3)^6+2(n+2)^6-2(n+1)^6+n^6)$$
$$+c((n+4)^5-2(n+3)^5+2(n+2)^5-2(n+1)^5+n^5)$$
$$+d((n+4)^4-2(n+3)^4+2(n+2)^4-2(n+1)^4+n^4)$$
$$+e((n+4)^3-2(n+3)^3+2(n+2)^3-2(n+1)^3+n^3)$$
$$+f((n+4)^2-2(n+3)^2+2(n+2)^2-2(n+1)^2+n^2)$$
$$=a(84n^5+840n^4+4340n^3+12600n^2+19348n+12264)$$
$$+b(60n^4+480n^3+1860n^2+3600n+2764)$$
$$+c(40n^3+240n^2+620n+600)+d(24n^2+96n+124)+e(12n+24)+4f$$
$$=n^5(84a)+n^4(840a+60b)+n^3(4340a+480b+40c)+n^2(12600a+1860b+240c+24d)$$
$$+n(19348a+3600b+620c+96d+12e)+(12264a+2764b+600c+124d+24e+4f)$$

u est solution si et seulement si $84a=1$ et donc $a=\frac{1}{84}$, puis $840a+60b=0$ et donc $b=-\frac{1}{6}$, puis $4340a+480b+40c=0$ et donc $c=\frac{17}{24}$, puis $12600a+1860b+240c+24d=0$ et donc $d=-\frac{5}{12}$ puis $19348a+3600b+620c+96d+12e=0$ et donc $e=-\frac{59}{24}$ puis $12264a+2764b+600c+124d+24e+4f=0$ et donc $f=\frac{1}{12}$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{168}(2n^7-28n^6+119n^5-70n^4-413n^3+14n^2)+\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4.$$

Correction de l'exercice 1672 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$$

2. Soit $a\in]0,\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, pour tout naturel non nul k, on a $0<\frac{a}{2^k}\leq\frac{a}{2}<\frac{\pi}{2}$ et donc $\sin\frac{a}{2^k}\neq 0$.
On sait alors que pour tout réel x, $\sin(2x)=2\sin x\cos x$. Par suite, pour tout naturel k,

$$\sin(2.\frac{a}{2^k})=2\sin\frac{2^k}{\cos}\frac{a}{2^k}\quad\text{et donc}\quad\cos\frac{a}{2^k}=\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a/2^k)}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)}=\frac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)}.$$

Correction de l'exercice 1673 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}$. Pour $k\in\{0,...,n\}$, posons $u_k=\frac{C_n^k}{n^k}$ puis $v_k=\frac{u_{k+1}}{u_k}$. Pour $k\in\{1,...,n-1\}$, on a alors

$$v_k=\frac{C_n^{k+1}.n^k}{C_n^k.n^{k+1}}=\frac{1}{n}.\frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n-k}{n(k+1)}=\frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)}=-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n(k+1)}$$
$$\leq-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{2n}\ (\text{car } k\geq 1)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}$$

Ainsi, pour $k\in\{1,...,n-1\}$, $u_{k+1}\leq\frac{1}{2}u_k$ et donc, immédiatement par récurrence,

$$u_k\leq\frac{1}{2^{k-1}}u_1=\frac{1}{2^{k-1}}\frac{n}{n}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

En tenant compte de $u_0=1$, on a alors pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}u_k\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2(1-\frac{1}{2^n})=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Correction de l'exercice 1674 ▲

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $1\leq k\leq n$, on a

$$kx-1<E(kx)\leq kx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}\leq\frac{x+2x+...+nx}{n^2}=\frac{n(n+1)x}{2n^2}=\frac{(n+1)x}{2n},$$

et aussi,

$$\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}>\frac{(x-1)+(2x-1)+...+(nx-1)}{n^2}=\frac{n(n+1)x/2-n}{n^2}=\frac{(n+1)x}{2n}-\frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout naturel non nul,

$$\frac{(n+1)x}{2n}-\frac{1}{n}<\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}\leq\frac{(n+1)x}{2n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}=\frac{x}{2}.}$$

Correction de l'exercice 1675 ▲

1. Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n\geq n_0$ alors $|u_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0.

$$\begin{aligned}|v_n-\ell| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k-\ell\right|=\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell)\right|\\ &\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-\ell|=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k-\ell|\\ &\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\\ &=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

   Maintenant, $\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|$ est une expression constante quand n varie et donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|=0$. Par suite, il existe un entier $n_1\geq n_0$ tel que pour $n\geq n_1$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geq n_1$, on a alors $|v_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N}/\ (\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_1\Rightarrow|v_n-\ell|<\varepsilon)$. La suite (v_n) est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell$.

   $$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ converge vers } \ell \text{ alors la suite } v \text{ converge vers } \ell.}$$

   La réciproque est fausse. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons $u_n=(-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n|\leq\frac{1}{n+1}$. Par suite, la suite (v_n) converge et $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.
2. Si u est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $|u_n|\leq M$. Pour n entier naturel donné, on a alors

   $$|v_n|\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k|\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}M=\frac{1}{n+1}(n+1)M=M.$$

   La suite v est donc bornée.

   $$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ est bornée alors la suite } v \text{ est bornée.}}$$

La réciproque est fausse. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \left\{\begin{array}{l} p \text{ si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\ -p \text{ si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{array}\right.$. u n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2p}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Mais, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \frac{1}{n+1} \times u_n = \frac{n}{2(n+1)}$, et dans tous les cas $|v_n| \leq \frac{1}{n+1}\frac{n}{2} \leq \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ et la suite v est bornée.

3. Si u est croissante, pour n entier naturel donné on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)\sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k) \geq 0. \end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ est croissante alors la suite } v \text{ est croissante.}}$$

Correction de l'exercice 1676 ▲

Pour n naturel non nul et x réel positif, posons $f_n(x) = x^n + x - 1$.

Pour $x \geq 0$, $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et donc $u_1 = \frac{1}{2}$.

Pour $n \geq 2$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geq 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.

f_n est ainsi continue et strictemnt croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f_n(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$, et en particulier,

$$\exists! x \in [0, +\infty[/\ f_n(x) = 0.$$

Soit u_n ce nombre. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et que $f_n(1) = 1 > 0$, par stricte croissance de f_n sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.$$

La suite u est donc bornée.

Ensuite, pour n entier naturel donné et puisque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ puis, par stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est bornée et strictement croissante. Donc, la suite u converge vers un réel ℓ, élément de $[0, 1]$.

Si $0 \leq \ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, on a $1 - u_n = u_n^n \leq (\frac{1+\ell}{2})^n$ et quand n tend vers vers $+\infty$, on obtient $1 - \ell \leq 0$ ce qui est en contradiction avec $0 \leq \ell < 1$. Donc, $\ell = 1$.

Correction de l'exercice 1677 ▲

Soit x dans $[-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$.

Soit $\theta = \text{Arcsin}\, x$ (donc θ est élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x = \sin\theta$). Pour k entier naturel non nul donné, il existe un entier n_k tel que $\ln(n_k) \leq \theta + 2k\pi < \ln(n_k + 1)$ à savoir $n_k = E(e^{\theta + 2k\pi})$.

Mais,

$$0 < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) = \ln(1 + \frac{1}{n_k}) < \frac{1}{n_k}$$

(d'après l'inégalité classique $\ln(1 + x) < x$ pour $x > 0$, obtenue par exemple par l'étude de la fonction $f\ :\ x \mapsto \ln(1 + x) - x$). Donc,

$$0 \leq \theta + 2k\pi - \ln(n_k) < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) < \frac{1}{n_k},$$

puis

$$\begin{aligned}|\sin(\theta)-\sin(\ln(n_k))| &= 2|\sin(\frac{\theta+2k\pi-\ln(n_k)}{2})\cos(\frac{\theta+2k\pi+\ln(n_k)}{2})|\\ &\leq 2\left|\frac{\theta+2k\pi-\ln(n_k)}{2}\right| = |\theta+2k\pi-\ln(n_k)| < \frac{1}{n_k}.\end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif.

Puisque $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, on peut trouver un entier k tel que $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ et pour cet entier k, on a $|\sin\theta - \sin(\ln(n_k))| < \varepsilon$.

On a montré que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* / |x - \sin(\ln n)| < \varepsilon$, et donc $\{\sin(\ln n),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Correction de l'exercice 1678 ▲

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)$. $\{(\sin(n\alpha),\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel α de $]0,\pi[$, $f(\alpha)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Si α est dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geq \sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$. Soit n_0 l'entier naturel tel que $(n_0-1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$ (n_0 existe car la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha = (n_0-1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geq |\sin(n_0\alpha)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α est dans $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$, on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n(\pi-\alpha)|) = f(\pi-\alpha) \geq f(\frac{\pi}{3}),$$

car $\pi - \alpha$ est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$.

On a montré que $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geq f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = \mathrm{Min}_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Correction de l'exercice 1699 ▲

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. • Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1\times(1+3)}{4\times(1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}) = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1700 ▲

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$. Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère demonstration. Pour $k \geq 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$ ou encore $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$ ou enfin $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2ème demonstration. On écrit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = (n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1) = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

3ème demonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1+2+\ldots+n$ points. D'où le résultat.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & * & \dots & & & \dots & * \\ * & * & & \ddots & & & & & \vdots \\ * & * & * & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & * & * & * \\ \vdots & & & & & \ddots & & * & * \\ * & \dots & & & \dots & * & * & & * \end{array}$$

4ème démonstration. Dans le triangle de PASCAL, on sait que pour n et p entiers naturels donnés,

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Donc, pour $n \geq 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1+2+\ldots+n = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_k^1 = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(C_{k+1}^2 - C_k^2\right) = 1 + (C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour $k \geq 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Pour $k \geq 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$, on a

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n) = \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1) + 2n + 1) \\ &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1))}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

Pour $k \geq 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}((n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n) \\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1)) \\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Soit p un entier naturel. Pour $k \geq 1$,

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^j.$$

Donc, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} k^j\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^j\right) = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

D'où la formule de récurrence :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \textstyle\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} S_j = (n+1)^{p+1} - 1.}$$

Correction de l'exercice 1701 ▲

1. Pour tout naturel non nul k, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k, on a $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Calcul de $\mathbf{S_1}$. Posons $P_1 = aX^2 + bX + c$. On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$P_1(X+1) - P_1(X) = X \Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a+b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_2}$. Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a+b+c.$$

Par suite,

$$P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 \Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a+2b = 0 \text{ et } a+b+c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6}$$
$$\Leftarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}.$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_3}$. Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$P_3(X+1) - P_3(X) = a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X)$$
$$= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d.$$

Par suite,

$$P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 \Leftrightarrow 4a = 1,\ 6a+3b = 0,\ 4a+3b+2c = 0 \text{ et } a+b+c+d = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0$$
$$\Leftarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} = \frac{X^2(X-1)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_4}$. Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$P_4(X+1) - P_4(X) = a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2)$$
$$+ e((X+1) - X)$$
$$= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}P_4(X+1)-P_4(X)=X^4 &\Leftrightarrow 5a=1,\ 10a+4b=0,\ 10a+6b+3c=0,\ 5a+4b+3c+2d=0\\ &\text{ et } a+b+c+d+e=0\\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{3},\ d=0 \text{ et } e=-\frac{1}{30}\\ &\Leftarrow P_4=\frac{X^5}{5}-\frac{X^4}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X}{30}=\frac{X(X-1)(6X^3-9X^2+X+1)}{30}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\sum_{k=1}^{n}(P_4(k+1)-P_4(k))=P_4(n+1)-P_4(1)=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n\in\mathbb{N}^*,\\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\\ \text{et } \sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   On rappelle que

   $$\boxed{\forall (a,b)\in]0,+\infty[^2,\ \operatorname{Arctan} a-\operatorname{Arctan} b=\operatorname{Arctan}\frac{a-b}{1+ab}.}$$

   Soit alors k un entier naturel non nul. On a

   $$\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{Arctan}\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}=\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}k.$$

   Par suite,

   $$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}=\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}k)=\operatorname{Arctan}(n+1)-\operatorname{Arctan}1=\operatorname{Arctan}(n+1)-\frac{\pi}{4}.$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   Pour k entier naturel non nul donné, on a

   $$\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2}=\operatorname{Arctan}\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)}=\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k-1).$$

   Par suite,

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2}&=\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k-1))=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}(k-1)\\ &=\sum_{k=2}^{n+1}\operatorname{Arctan}k-\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Arctan}k=\operatorname{Arctan}(n+1)+\operatorname{Arctan}n-\operatorname{Arctan}1-\operatorname{Arctan}0\\ &=\operatorname{Arctan}(n+1)+\operatorname{Arctan}n-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1702 ▲

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les n^2 couples (i,j) tels que $1\leq i,j\leq n$, il y en a n tels que $i=j$ et donc $n^2-n=n(n-1)$ tels que $1\leq i,j\leq n$ et $i\neq j$. Comme il y a autant de couples (i,j) tels que $i>j$ que de couples (i,j) tels que $i<j$, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i,j) tels que $1\leq i<j\leq n$. Finalement,

   $$\sum_{1\leq i<j\leq n}1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   $$\sum_{1\leq i,j\leq n}j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}j\right)=\sum_{j=1}^{n}nj=n\sum_{j=1}^{n}j=n.\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}.$$

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n} j &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}(j-1)j = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j\\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-1\right)\\ &= \frac{n(n+1)^2}{6}.\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \left(\sum_{1\leq i\leq n} i\right)\left(\sum_{1\leq j\leq n} j\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leq h,k\leq n} h^2k^2 = \sum_{h=1}^{n}\left(h^2\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{h=1}^{n} h^2\right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2.$$

Comme d'autre part, $\sum_{h=1}^{n} h^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, on a

$$\sum_{1\leq h,k\leq n} h^4 = \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h^4\right) = \sum_{h=1}^{n} nh^4 = n\sum_{h=1}^{n} h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr $\sum_{1\leq h,k\leq n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n^5}\left(2.5\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\right)\\ &= \frac{1}{n^5}\left(2n^6-2n^6+n^5\left(\frac{15}{3}-\frac{12}{2}\right)+\text{termes de degré au plus 4}\right)\\ &= -1+\text{termes tendant vers 0}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.$$

Correction de l'exercice 1703 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2,..., a_n$, n réels strictement positifs.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i} + \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right) = n + \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)$$

Pour $x>0$, posons alors $f(x) = x+\frac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f est donc strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. f admet ainsi un minimum en 1. Par suite,

$$\forall x>0,\ f(x) \geq f(1) = 1+\frac{1}{1} = 2.$$

(**Remarque.** L'inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique permet aussi d'obtenir le résultat :

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} = 1.)$$

On en déduit alors que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} \geq n + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2 = n+2\frac{n^2-n}{2} = n^2.$$

Correction de l'exercice 1704 ▲

Soit r la raison de la suite u. Pour tout entier naturel k, on a

$$\frac{r}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_{k+1}-u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}.$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$r\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}}\right) = \frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}.$$

Si $r \neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$, et si $r=0$ (et $u_0 \neq 0$), u est constante et le résultat est immédiat.

Correction de l'exercice 1705 ▲

Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a, b et c tels que, pour entier naturel non nul k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{2k+1} \ (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1)+bk(2k+1)+ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2+(3a+b+c)k+a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{array}\right.,$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right).$$

Ensuite, d'après l'exercice 1531, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n+\gamma+o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = H_{n+1}-1 = -1+\ln(n+1)+\gamma+o(1) = \ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\gamma-1+o(1) = \ln n+\gamma-1+o(1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} &= -1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = -1+H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n \\ &= \ln(2n+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)-1+o(1) = \ln 2+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma-1+o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)\end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2} = 6\left(\ln n+\gamma+\ln n+\gamma-1-4\left(\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1\right)\right) = 6(3-4\ln 2)+o(1).$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2} = 6(3-4\ln 2).}$$

Correction de l'exercice 1706 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n}-\frac{1}{n}\right)^2$ et donc $0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Correction de l'exercice 1707 ▲

Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \frac{u_n+1-1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} = \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1 - \frac{1}{1+u_1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. Mais alors la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^{\ell}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1 - \frac{1}{P}$.

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Correction de l'exercice 1708 ▲

Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$.

Si $\frac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ est divergente car $\sum_{k=1}^{n} \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge ce qui est aussi le cas si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0.

Donc, dans tous les cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.

Si $\alpha \leqslant 1$, puisque S_n tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang on a $S_n^{\alpha} \leqslant S_n$ et donc $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \geqslant \frac{u_n}{S_n}$. Donc, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, puisque la suite (S_n) est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\alpha}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^{\alpha}} \leqslant \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Correction de l'exercice 1709 ▲

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Correction de l'exercice 1710 ▲

(On applique la règle de RAABE-DUHAMEL qui n'est pas un résultat de cours.) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et « on sait » qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^a}$.

Correction de l'exercice 1844 ▲

La suite $\left((-1)^n\frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\frac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right|=\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\leqslant\int_0^1 t^{3n+3}\,dt=\frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Correction de l'exercice 1721 ▲

1.
2.
3. Soit (r_n) une énumération de Q. On pose $f(x)=\sum_{r_n<x}\frac{1}{(n+1)^2}$. f est strictement croissante car pour $x<y$ il existe $n\in|||$ tel que $x<r_n<y$ donc $f(y)-f(x)\geq\frac{1}{(n+1)^2}$. Si $x\in\mathbb{Q}$, $x=r_k$ alors $f(x^+)-f(x^-)\geq\frac{1}{(k+1)^2}$ d'où f est discontinue en x. Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $n\in|||$ alors il existe un voisinage de x ne contenant aucun r_i, $i\leq n$ d'où $f(x^+)-f(x^-)\leq\sum_{i>n}\frac{1}{(i+1)^2}$ et f est continue en x.

Correction de l'exercice 1722 ▲

Soit $[a,b]$ de longueur supérieure ou égale à $2\zeta(2)$ et $F_n=[a,b]\setminus(I_1\cup\cdots\cup I_n)$. Alors (F_n) vérifie le théorème des fermés emboités dans un compact.

Correction de l'exercice 1723 ▲

1. Regroupement à $i+j$ constant $\Rightarrow$ CV ssi $\alpha>2$.
2. Pour $\alpha\geq 1$ on a par convexité : $2^{1-\alpha}(i+j)^\alpha\leq i^\alpha+j^\alpha\leq(i+j)^\alpha$ donc il y a convergence ssi $\alpha>2$.
3. Il y a une infinité de termes supérieurs à $1/4$.
4. $\frac{1}{a^p+b^q}\leq\frac{1}{2\sqrt{a^p}\sqrt{b^q}}\Rightarrow$ sommable.

Correction de **l'exercice 1724 ▲**

$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{k!}=2e.$

Correction de **l'exercice 1725 ▲**

$-\frac{7}{8}\zeta(3).$

Correction de **l'exercice 1726 ▲**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,n-1}$ diverge.
2. $\sum_{p=0}^{\infty}a_{n,p}=\frac{1}{4n^2}$ si $n\neq 0$, $-\frac{\pi^2}{6}$ si $n=0$. $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a_{n,p}=-\frac{\pi^2}{8}=-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,p}$.

Correction de **l'exercice 1727 ▲**

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}=\sum_{(n,p)\in|||}^{+\infty}x^{(p+1)(2n+1)}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{1-x^{2p+2}}.$

Correction de **l'exercice 1729 ▲**

1. $|t|<1$.
2. $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}t^{kn}$ et on peut échanger les deux sommes car il y a convergence absolue.
3. On suppose $t\in\,]0,1[$. $\frac{d}{dx}\left(\frac{t^x}{1-t^x}\right)=\frac{t^x\ln t}{(1-t^x)^2}<0$ donc le critère des séries alternées s'applique, le reste est majoré en valeur absolue par le premier terme du reste. $0\leq\frac{t^k(1-t)}{1-t^k}=\frac{t}{1+\frac{1}{t}+\dots+\frac{1}{t^{k-1}}}\leq\frac{1}{k}$ donc le terme général converge uniformément vers 0.
   Par interversion de limite (puisqu'il y a convergence uniforme) on obtient $\lim_{t\to 1^-}(1-t)S(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$.
4. $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}t^{kn}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{kn=p}(-1)^{k-1}t^p=\sum_{p=1}^{\infty}\sigma(p)t^p$
   avec $\sigma(p)=$ (nombre de diviseurs impairs de p) $-$ (nombre de diviseurs pairs de p) $=\sigma_i(p)-\sigma_p(p)$. Si $p=2^{\alpha}q$ avec q impair alors $\sigma_p(p)=\alpha\sigma_i(p)=\alpha\sigma_i(q)$ donc $\sigma(p)>0$ ssi p est impair *(très joli exercice)*.

Correction de **l'exercice 1730 ▲**

1. Il y a convergence si $|z|<1$. On a alors $f(z)=\sum_{(n,p)\in|||^2}z^{anp+bn+cp}$. Il y a aussi convergence pour $|z|>1$ lorsque $a>b$ et on a dans ce cas : $f(z)=\sum_{(n,p)\in|||\times|||^*}z^{-anp+bn-cp}$ (non symétrique en b,c).
2. $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}d_nz^n$ avec $d_n=$ nombre de diviseurs de n dans $[[1,n-1]]$.

Correction de **l'exercice 1731 ▲**

$A=\zeta(2)^2$, $B=\zeta(2)\zeta(4)$, $C=A/\zeta(4)=5/2$.

Correction de **l'exercice 1732 ▲**

$\ln 2+\frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Correction de **l'exercice 1735 ▲**

La série converge pour tout $x\notin\{-2,-3,\dots\}$ car le critère des séries alternées s'applique à partir d'un certain rang (fonction de x). Il en va de même pour toutes les séries obtenues par dérivations successives terme à terme, et ces séries convergent localement uniformément (le reste d'une série vérifiant le CSA est majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme figurant dans le reste) donc f est $\mathscr{C}^{\infty}$.

Pour $|x|<2$ on a

$$f(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{-x}{k}\right)^n=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{k^{n+1}}x^n=(1-\ln 2)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-(1-2^{-n})\zeta(n+1))x^n.$$

Correction de l'exercice 1736 ▲

$\cos(x+iy)=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y\Rightarrow\cos z\in[-1,1]$ si et seulement si $z\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1737 ▲

Mettre $1+\frac{z}{n}$ sous forme trigonométrique.

Correction de l'exercice 1738 ▲

Développement en série.

Correction de l'exercice 1739 ▲

$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|^2=\frac{e^{2x}+1-2e^x\cos y}{x^2+y^2}$. Après simplifications, on est ramené à prouver que $x^2(1-\cos y)\le y^2(\operatorname{ch} x-1)$, ce qui est vrai car on peut caser $\frac{1}{2}x^2y^2$ entre les deux. Il y a égalité si et seulement si $y=0$.

Correction de l'exercice 1741 ▲

$e^{x+iy}=x+iy\Leftrightarrow\begin{cases}x=y/\tan y\\ e^{-y/\tan y}=\sin y/y.\end{cases}$ Au voisinage de $2k\pi^+$, $e^{-y/\tan y}<\sin y/y$ (point plat) et au voisinage de $(2k+1)\pi^-$, $e^{-y/\tan y}>\sin y/y$ (limite infinie).

Correction de l'exercice 1742 ▲

1. $z\equiv\pm i\ln(2+\sqrt{3})(\operatorname{mod} 2\pi)$.
2. $z\equiv i\pi(\operatorname{mod} 2i\pi)$.
3. $z\equiv 0(\operatorname{mod} 2\pi)$ ou $z\equiv 0(\operatorname{mod} 2j\pi)$ ou $z\equiv 0(\operatorname{mod} 2j^2\pi)$.
4. $\Leftrightarrow 6e^{2iz}-(7+5i)e^{iz}+2=0\Leftrightarrow\begin{cases}e^{iz}=1+i & :\ z\equiv\pi/4-i\ln\sqrt{2}(\operatorname{mod} 2\pi)\\ e^{iz}=(1-i)/6: & z\equiv-\pi/4-i\ln(\sqrt{2}/6)(\operatorname{mod} 2\pi).\end{cases}$

Correction de l'exercice 1743 ▲

$|\cos(x+iy)|^2=\cos^2x+\operatorname{sh}^2y=\operatorname{ch}^2y-\sin^2x\Rightarrow\sup=\operatorname{ch}1$.

$|\sin(x+iy)|^2=\sin^2x+\operatorname{sh}^2y=\operatorname{ch}^2y-\cos^2x$. À x fixé, le module augmente avec $|y|$, donc le maximum est atteint au bord du disque.

$\varphi(\theta)=\sin^2\cos\theta+\operatorname{sh}^2\sin\theta\Rightarrow\varphi'(\theta)=\sin 2\theta\left(\frac{\operatorname{sh}(2\sin\theta)}{2\sin\theta}-\frac{\sin(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\right)\Rightarrow\sup=\operatorname{sh}1$.

Correction de l'exercice 1745 ▲

Si x est vecteur propre de M il l'est aussi de $\exp(M)$ donc $x=ke_1$ et la valeur propre associée est $\alpha\in(x^2+1)$ tel que $e^\alpha=2i$ ($\alpha=\ln 2+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$). On a donc $M=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}$, $\exp(M)=\begin{pmatrix}e^\alpha&e^\alpha\beta\\0&e^\alpha\end{pmatrix}$ d'où $\beta=\frac{1-i}{2}$.

Correction de l'exercice 1750 ▲

1. $\sim-\frac{e}{2n}\Rightarrow$ DV.

2. $\sim \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} e^{n(\alpha-2)} \Rightarrow$ CV ssi $\alpha < 2$.
3. $\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.
4. $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.
5. $\sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.
6. cv ssi $|a| \neq 1$.
7. Série alternée $\Rightarrow$ CV.
8. Série alternée $\Rightarrow$ CV.
9. Harmonique + alternée $\Rightarrow$ DV.
10. d'Alembert $\Rightarrow$ CV.
11. $\leq \frac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$ CV.
12. $= \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ CV.
13. Décomposition en 3 séries alternées $\Rightarrow$ CV.
14. $= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.
15. Regroupement de termes $\Rightarrow$ DV.
16. Regroupement par paquets + CSI $\Rightarrow$ CV.
17. Terme général ne tend pas vers zéro, DV.
18. $= \frac{1}{n^{\ln\ln n}} \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1751 ▲

$P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + C$.

Correction de l'exercice 1752 ▲

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ converge.

Correction de l'exercice 1753 ▲

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$, il y a convergence ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 1754 ▲

Effectuer un développement asymptotique pour les deux premières. Elles convergent si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. La troisième diverge par comparaison série-intégrale.

Correction de l'exercice 1755 ▲

$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} \to ab$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-2}} \to ab$ (lorsque $n \to \infty$) donc il y a convergence si $|ab| < 1$.

Correction de l'exercice 1757 ▲

$n = 21$, $S \approx 0.65314389$.

Correction de l'exercice 1758 ▲

$1 \Rightarrow 2$ par comparaison série-intégrale. Contre-exemple pour $(2) \not\Rightarrow (1)$: $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$, $f(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

Correction de l'exercice 1759 ▲

$\frac{n^2}{(n^2+1)^2} - \frac{1}{n^2-1} = -\frac{3n^2+1}{(n^2+1)^2(n^2-1)} \geq -\frac{4}{n^4}$ pour $n \geq 3$.

Donc $S = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n^2+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} + R_N$ avec $-\frac{4}{3N^3} \leq R_N \leq 0$ et $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{N+\frac{1}{2}}{N(N+1)}$.

Pour $N = 25$ on obtient : $0.76981 < S < 0.76990$.

Correction de l'exercice 1761 ▲

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $n^2 u_n \to \infty$ (lorsque $n \to \infty$) donc $u_n v_n \sim 1/n^2$. Alors les suites $(\sqrt{u_n})$ et $(\sqrt{v_n})$ sont de carrés sommables tandis que la suite $(\sqrt{u_n v_n})$ n'est pas sommable, c'est absurde.

Si $\sum u_n$ diverge on ne peut rien dire : avec $u_n = 1$ on a $\sum v_n$ convergente tandis qu'avec $u_n = \frac{1}{n}$ on a $\sum v_n$ divergente.

Correction de l'exercice 1762 ▲

1. $u_1 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)} \leq 1$.
2. $\ln\big((1+a_1)\dots(1+a_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to +\infty \Rightarrow \sum u_n = 1$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 1763 ▲

Regroupement de termes par valeur constante de $p_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{10^p - 10^{p-1}}{a^p} = \frac{9}{a-10}$.

Correction de l'exercice 1765 ▲

1.
2. $|v_n| = O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1766 ▲

Série alternée.

Correction de l'exercice 1767 ▲

1. $\frac{3}{4}$.
2. $\frac{1}{4}$.
3. $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \frac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \frac{1}{pp!}$.
4. $\frac{23}{144}$.
5. $\ln 3$.
6. $-\ln 2$.
7. $\ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.
8. $\frac{1}{\alpha} - 2\text{cotan}(2\alpha)$.
9. $109 - 40e$.
10. $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x| < 1$ par récurrence.
11. $\frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| > 1$.
12. $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1}$.
    $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{qn+n} - \frac{1}{q+1}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{(N+1)n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k}\right) = \ln n$.

Correction de l'exercice 1768 ▲

Si $n+1$ n'est pas un carré alors $u_n = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 1769 ▲

1. $y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$, $y = e^{-x}\sin x + e^{-2x}(cx+d)$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n e^{-n\pi}(e^{\pi}+1)}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1770 ▲

$\frac{\pi^2}{3} - 3$.

Correction de l'exercice 1771 ▲

$\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} = \frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \Rightarrow s_n = 18 - 24\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{6}{n+1} \to 18 - 24\ln 2$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 1772 ▲

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2,\ b=1,\ S=-\ln 2.$$

Correction de l'exercice 1773 ▲

$\tan s_n = n+1$ par récurrence et $s_n \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1} \le 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 2$.

Correction de l'exercice 1774 ▲

1. $\sim \frac{a}{n^2}$.
2. $S(a) \ge \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}(k+a) - \operatorname{Arctan} k \to \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \cdots + \operatorname{Arctan}\frac{1}{n} \Rightarrow S(a) \to +\infty$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 1775 ▲

Le déport maximal entre la première pièce et la dernière pour une pile de n pièces est $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(n-1)}$ (en diamètre d'une pièce). Il dépasse 1 pour $n > 4$.

Correction de l'exercice 1776 ▲

1. $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
2. $\ln(\ln n)$.

Correction de l'exercice 1777 ▲

$u_n \sim n\ln^2 n \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1778 ▲

2997.

Correction de l'exercice 1779 ▲

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Correction de l'exercice 1781 ▲

$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t} < 0$

$S_{n+1} - S_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt > 0.$

Correction de l'exercice 1782 ▲

$\frac{u_{n,k}}{k} = \frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right]$, donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n,k}}{k}$ est une somme de Riemann pour l'intégrale $I = \int_{t=0}^{1} \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt$. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$, donc $v_n \to I$ lorsque $n \to \infty$.

Calcul de I : $I_n = \int_{t=1/n}^{1} \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \int_{t=\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\,dt = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \to 1 - \gamma = I$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 1783 ▲

1. Comparaison série-intégrale : $u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$.
2. Comparaison série-intégrale encore (v_n est la somme des aires entre les rectangles aux points entiers et la courbe de $t \to \ln(t)/t$).
3. $v_n - \ell = -\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_{t=k}^{k+1} \frac{\ln t}{t}\, dt - \frac{\ln(k+1)}{k+1}\right) = -\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ avec $w_k \sim \frac{\ln k}{2k^2}$ donc $v_n - \ell \sim -\int_{t=n}^{+\infty} \frac{\ln t}{2t^2}\, dt \sim -\frac{\ln n}{2n}$.

Correction de l'exercice 1784 ▲

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln n}{2n}.$

Correction de l'exercice 1785 ▲

1.
2.
3.
4.
5. $S_n + \frac{1}{\ln(n+1)} \le S \le S_n + \frac{1}{\ln n}$. Pour $n = 60$: $2.06857 < S < 2.06956$.

Correction de l'exercice 1787 ▲

Si $u_n \to 0$, alors $v_n \sim u_n$; sinon, $v_n \not\to 0$.

Correction de l'exercice 1788 ▲

1.
2. $\frac{r}{(1-r)^2}$.

Correction de l'exercice 1789 ▲

On remarque déjà que $\sum u_i$ diverge car $u_n \sim \frac{U_n}{n\alpha} \ge \frac{U_1}{n\alpha}$. On calcule $\sum_{k=0}^{n} ku_k$ par parties :

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1}) = nU_n - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Comme $U_n \sim \alpha n u_n$, terme général strictement positif d'une série divergente, on a $\sum_{k=0}^{n} U_k \sim \alpha \sum_{k=0}^{n} ku_k$ d'où : $(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim nU_n$ et lorsque $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim \frac{nU_n}{(1+\alpha)n^2 u_n} \to \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Correction de l'exercice 1790 ▲

$S_n = \sum_{k=0}^n ku_k \Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \frac{S_n}{n}$.

Correction de l'exercice 1791 ▲

1.
2.
3. $kr^k = k(u_k - u_{k+1})$ avec $u_k = \frac{r^k}{1-r}$ donc $\sum_{k=1}^\infty kr^k = \sum_{k=1}^\infty \frac{r^k}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$.

   De même, $S_n = \sum_{k=n}^\infty kr^k = \frac{(n-1)r^n}{1-r} + \sum_{k=n}^\infty \frac{r^k}{1-r} = \frac{nr^n}{1-r} + \frac{r^{n+1}}{(1-r)^2}$.

   $k^2r^k = k(S_k - S_{k+1})$ et (S_k) décroît d'où $\sum_{k=1}^\infty k^2r^k = \sum_{k=1}^\infty S(k) = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{kr^k}{1-r} + \frac{r^{k+1}}{(1-r)^2}\right) = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Correction de l'exercice 1792 ▲

1.
2. $p_n = \frac{u_0}{S_n} \to 0$ donc la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Correction de l'exercice 1793 ▲

Méthode des rectangles : $\sum_{k=0}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geq \int_{t=a_{n+1}}^{a_0} \frac{dt}{t} \to +\infty$ lorsque $k \to \infty$.

Si $a_k \sim a_{k+1}$ la série donnée diverge donc. Sinon, elle diverge aussi car son terme général ne tend pas vers 0.

Correction de l'exercice 1794 ▲

$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \sum_{k/2<n\leq k} \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N-1} u_k \leq \sum_{n=1}^N v_n \leq 2\sum_{k=1}^{2N-1} u_k$.

Correction de l'exercice 1795 ▲

$\sum_{k=1}^n v_k + nv_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge aussi (SP majorées) et $nv_n \to \ell \Rightarrow \ell = 0$.

Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge, alors $nv_n \to +\infty$, contradiction.

Correction de l'exercice 1796 ▲

$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n ku_k \sum_{p=k}^n \frac{1}{p^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{ku_k}{k-1} \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1797 ▲

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}} u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$.

Correction de l'exercice 1798 ▲

Pour $n > 2$, $u_{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $u_{n+2} > \frac{1}{(n+1)e^{1/n}} \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

Correction de l'exercice 1801 ▲

1.
2. $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{a-b+1}{n+b-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a-b+1>0, v_n \to +\infty \\ \text{si } a-b+1=0, v_n = \text{cste} \\ \text{si } a-b+1<0, v_n \to 0. \end{cases}$
3. $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \Rightarrow (n+b)u_{n+1} + (b-a-1)\sum_{k=1}^n u_k - au_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty u_k = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}$.

Correction de l'exercice 1802 ▲

La suite (u_n) est croissante donc tend vers $\ell \in]0,+\infty]$. On a ℓ fini si et seulement si la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n) = \sum \frac{1}{n^a u_n}$ est convergente, soit si et seulement si $a > 1$.

Pour $a < 1$ on a $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{2}{n^a} + o\left(\frac{2}{n^a}\right)$ donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim \frac{2}{n^a}$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-a}}{1-a}}$ (sommation des relations de comparaison).

Pour $a = 1$ on a de même $u_n \sim \sqrt{2\ln n}$.

Correction de l'exercice 1803 ▲

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv et vaut $\zeta(\alpha)^2$.

$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{2N} u_n \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \sum u_n$ dv.

Correction de l'exercice 1805 ▲

$\frac{a}{(1-a)^2}$ et $\frac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

Correction de l'exercice 1807 ▲

1. Césaro.
2. $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - v_n$.

Correction de l'exercice 1808 ▲

$|a_n| \leq M \Rightarrow \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}\right| \leq M \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq M \int_{t=1}^{\infty} \frac{dt}{t^p} = \frac{M}{p-1} \Rightarrow a_1 = 0$.

Correction de l'exercice 1809 ▲

Démonstration pour x_1 : $\sum x_n = 0$, $\sum x_{2n} = 0 \Rightarrow \sum_{n \text{ impair}} x_n = 0$. On retire les multiples impairs de 3 ($\sum x_{3n} - \sum x_{6n} = 0$) $\Rightarrow \sum_{n\not\equiv 0[2];n\not\equiv 0[3]} x_n = 0$. On retire les multiples restants de $5, 7, \ldots$ On obtient ainsi une suite $(s_p)_{p \text{ premier}}$ nulle qui converge vers x_1, donc $x_1 = 0$.

Peut-on se passer de la convergence absolue ?

Correction de l'exercice 1810 ▲

1. Récurrence sur p.
2. Transformation d'Abel et interversion de sommations : $\sum_{n=0}^{p} v_n = \sum_{k=0}^{p} \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p} \sum_{n=0}^{k} u_n$.
   Théorème de Césaro $\Rightarrow \sum v_n = 2\sum u_n$.

Correction de l'exercice 1811 ▲

1. $nu_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, $nu_{2n+1} \leq \sum_{k=n+2}^{2n+1} u_k$.
2. $\varepsilon > 0$: Pour k suffisament grand, $u_k \leq \frac{\varepsilon}{k}$, donc $u_k \geq \frac{1}{n} \Rightarrow k \leq n\varepsilon$. Alors $\sum_{u_k \geq 1/n} \frac{1}{u_k} \leq n^2\varepsilon + Kn$.

Correction de l'exercice 1812 ▲

1. TAF : $\exists\, x_n \in [R_{n+1}, R_n]$ tel que $R_n^{1-p} - R_{n+1}^{1-p} = (1-p)\frac{R_n - R_{n+1}}{x_n^p} \geq (1-p)\frac{a_n}{R_n^p}$. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leq \frac{A^{1-p}}{1-p}$.
2. C'est $\frac{1}{1-p}$: Pour $a_n = k^n$, $A^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} = \frac{1-k}{1-k^{1-p}} \to \frac{1}{1-p}$ lorsque $k \to 1^-$.

Correction de l'exercice 1813 ▲

(u_n) est croissante. Si la suite (u_n) converge alors $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leq M(u_{n+1} - u_n)$ donc les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées. Si $\sum a_n$ converge, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0}$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Correction de l'exercice 1818 ▲

Transformaton d'Abel.

Correction de l'exercice 1819 ▲

Transformation d'Abel + découpage, $v_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 1820 ▲

$|u_n| + |v_n| \leq (|u_1| + |v_1|) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)$ et le produit infini est trivialement convergent.

Correction de l'exercice 1821 ▲

1.
2. (a) $1 + S_N \leq P_N$ n'est plus triviale mais reste vraie par récurrence (la différence est une fonction décroissante de a_1).
   (b)
3. La suite $(P_N e^{-S_N})$ est positive décroissante donc converge, ce qui entraîne la convergence de (P_N). On a $P_N \to 0$ ssi $P_N e^{-S_N} \to 0$ (lorsque $N \to \infty$) soit ssi la série de terme général $\ln(1 + a_n) - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}$ diverge.
4. (a) Démontrer l'inégalité en développant les deux membres. Sachant que la suite (P_N) est bornée on en déduit qu'elle est de Cauchy donc converge.
   (b)

Correction de l'exercice 1822 ▲

On a $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}}$. Soit $a \in [0, 1[$ et M_a, m_a le maximum et le minimum de f sur $[0, a]$. D'après la relation précédente, $m_a \geq m_{a^2}$ et $M_a \leq M_{a^2}$ donc en fait $m_a = m_{a^2}$ et $M_a = M_{a^2}$.

On en déduit $f([0,a]) = f([0,a^2]) = \cdots = f([0,a^{2^k}]) = \cdots = \{f(0)\}$. Donc f est constante et réciproquement les fonctions constantes conviennent.

Correction de l'exercice 1823 ▲

Soit $(p_0, p_1, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers et $S_k = \sum_{P(n) \leq k} \frac{1}{n}$. On a $S_k = S_{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^i} = \frac{p_k}{p_k - 1} S_{k-1}$, ce qui prouve que S_k est fini. La série demandée est $\frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k - S_{k-1}}{p_k} = \frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{p_k^2}$.

Montrons que $S_k \leq 2\sqrt{p_k}$, ceci prouvera la convergence. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$, et si c'est vrai pour $k - 1$ avec $k \geq 2$ alors on obtient $S_k \leq 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k p_{k-1}}{(p_k - 1)^2}} \leq 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k(p_k - 2)}{(p_k - 1)^2}} \leq 2\sqrt{p_k}$.

Remarque : on a en réalité $S_k \sim e^{\gamma} \ln(p_k)$ où γ est la constante d'Euler (formule de Mertens).

Correction de l'exercice 1824 ▲

1. Soit $n \geq 3$.

$$\sum_{i=3}^{n} i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\frac{(1+(2n-1))n}{2}=n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)=\frac{(19+3n+10)(n-2)}{2}=\frac{1}{2}(3n+29)(n-2)=\frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n=1,\underbrace{11...1}_{n}$. On a

$$u_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}=1+\frac{1}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=1+\frac{1}{9}(1-\frac{1}{10^n})=\frac{10}{9}-\frac{1}{9.10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{9.10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers $\frac{10}{9}$.

$$\boxed{1,11111....=\frac{10}{9}.}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n=0,\underbrace{99...9}_{n}$. On a

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}=\frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=1-\frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers 1.

$$\boxed{0,9999....=1.}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n=\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$. On a

$$u_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k=\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ 1 \text{ si } n \text{ est impair}\end{array}\right..$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=1.}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}&=\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\pi/2})(=\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n}i^k))\\&=\mathrm{Re}(\frac{1-e^{(n+1)i\pi/2}}{1-e^{i\pi/2}})=\mathrm{Re}(\frac{e^{i(n+1)\pi/4}}{e^{i\pi/4}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{-2i\sin\frac{\pi}{4}})=\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}+\frac{1}{2}=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } n\in 4\mathbb{N}\cup(4\mathbb{N}+1)\\ 0 \text{ si } n\in(4\mathbb{N}+2)\cup(4\mathbb{N}+3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi+\cos\frac{3\pi}{2}=1+0-1+0=0$, on a immédiatement $S_{4n}=1$, $S_{4n+1}=S_{4n}+0=1$, $S_{4n+2}=S_{4n+1}-1=0$ et $S_{4n+3}=S_{4n+2}+0=0$.

6. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Posons $C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n+iS_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta))=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k.$$

- 1er cas. Si $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta}\neq 1$. Par suite,

$$C_n+iS_n=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=e^{i\theta(n+1-1)/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}=e^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n=\mathrm{Re}(C_n+iS_n)=\frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n=\mathrm{Im}(C_n+iS_n)=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

- 2ème cas. Si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n=n+1$ et $S_n=0$.
Finalement,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \left\{\begin{array}{l}\frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}\\ n+1 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}\end{array}\right. \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) = \left\{\begin{array}{l}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}\end{array}\right. .}$

7. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}(1-(-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \ln(1+x).}$$

En particulier,

$$\boxed{\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}.$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raion $q = 2$ et de premier terme $u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, pour n enteir naturel donné, $u_n - 3 = -2.2^n$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 3(n+1) - 2\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

Correction de l'exercice 1825 ▲

Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2$. On remarque que pour tout réel x, $f(x) \geq 0$. En développant les n carrés, on obtient,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(b_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + a_k^2) = (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)x^2 + 2(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)x + (\sum_{k=1}^{n} a_k^2).$$

1er cas. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$, f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est alors négatif ou nul. Ceci fournit

$$0 \geq \Delta' = (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 - (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)(\sum_{k=1}^{n} a_k^2),$$

et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2ème cas. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, alors tous les b_k sont nuls et l'inégalité est immédiate.

Finalement, dans tous les cas,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.}$$

Cette inégalité est encore valable en remplaçant les a_k et les b_k par leurs valeurs absolues, ce qui fournit les inégalités intermédiaires.

Retrouvons alors l'inégalité de l'exercice 1703. Puisque les a_k sont strictement positifs, on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{a_i}}^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2 = n^2.$$

Correction de l'exercice 1826 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} = \text{Im}(\sum_{k=1}^{n} e^{ik/n^2}) = \text{Im}\left(e^{i/n^2}\frac{1-e^{ni/n^2}}{1-e^{i/n^2}}\right) = \text{Im}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n^2}}\right) = \frac{\sin\frac{n+1}{2n^2}\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n^2}}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} (\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))^{-1}$$
$$= (1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))(\frac{1}{2}+o(\frac{1}{n}))(1+o(\frac{1}{n}))^{-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}),$$

(on peut aussi partir de l'encadrement $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$).

Correction de l'exercice 1827 ▲

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n \geqslant 1$, u_n existe
$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.
2. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n \geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et
$$\ln(u_n) = \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln 2\ln(n)+o(1).$$
Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2\ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha \leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.
4. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(\text{ch}\, n)}$. u_n existe pour $n \geqslant 2$. $\ln(\text{ch}\, n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $un \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} > 0$.
Vérifions alors que la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge. La fonction $x \to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Par suite, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx$$
Par suite, pour $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k\ln k}{\geqslant} \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$
Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n diverge.
5. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \text{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geqslant 1$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\text{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1-1+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{n}} > 0$$
terme général d'une série de RIEMANN divergente. La série de terme général un diverge.
6. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$. De plus,
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

7. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis $n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8.
$$\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

10. $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ puis

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + o(1).$$

Par suite,

$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

11. $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

Correction de l'exercice 1828 ▲

1. Si P n'est pas unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

$$u_n = n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4} - \left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{a}{3} + \left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

• Si $a \neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.

• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$ et $b = \frac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3 + \frac{3}{2}X + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha} S(n)$. Pour $n \geqslant 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc $\forall n \geqslant 2$, $S(n) \leqslant \frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

3. $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Par suite, $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et par suite $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. La série de terme général u_n diverge.

4. On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.
Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ ou encore $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$.
Par suite, $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\frac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.
Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.
Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\right)$.
Soit $n \geqslant$. Alors $\frac{1}{p_n} < 1$ et la série de terme général $\frac{1}{p_n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$.
Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1 < p_2 \ldots < p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.
Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) \text{ (car } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \ldots 0 \leqslant \beta_n \leqslant \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \ldots,\ p_n^{\beta_n}}\right) \\
&\geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lim_{N \to +\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\right) = +\infty$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) = +\infty$.

La série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$.
(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p \times 10^p + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$ où $\forall i \in [\![0,p]\!]$, $a_i \in \{0,1;...,9\}$ et $a_p \neq 0$. Alors $c(n) = p+1$.
Déterminons p est en fonction de n. On a $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ et donc $p = E(\log(n))$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n(E(\log n)+1)^\alpha}.$$

Par suite, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln^\alpha(10)}{n \ln^\alpha(n)}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$ (séries de BERTRAND).
Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.
La série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente (voir l'exercice 1827, 4)). Par suite, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{1}{n \ln^\alpha(n)}$ est divergente car $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n \ln^\alpha(n)} \geqslant \frac{1}{n \ln n}$.
Soit $\alpha > 1$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, pour $k \geqslant 3$,

$$\frac{1}{k \ln^\alpha k} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln^\alpha x}\, dx$$

puis, pour $n \geqslant 3$, en sommant pour $k \in [\![3,n]\!]$

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\alpha k} \leqslant \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln^\alpha x}\, dx = \int_2^n \frac{1}{x \ln^\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\frac{1}{k\ln^{\alpha}k}$, est majorée et donc la série de terme général $\frac{1}{k\ln^{\alpha}k}$ converge.

6 Soit $n \geqslant 2$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln^a(n+1)}{(n+1)^b} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1$$

et d'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

6. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \tan(u_n) \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{2a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$.

7. La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour $k \geqslant 1$, $\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leqslant \frac{2}{5}((n+1)^{5/2}-1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^n k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > \frac{7}{2}$.

8. Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geqslant \frac{1}{n^\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} + \ldots + \frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme $\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leqslant 3$, on a $\alpha - 2 \leqslant 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 3$,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leqslant \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de RIEMANN convergente,} \end{aligned}$$

et, puisque $\alpha - 2 > 1$, la série de terme général u_n converge. Finalement, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Correction de l'exercice 1829 ▲

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}+(n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2. (la suite $\left(\frac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroisante à partir d'un certain rang).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes et la série de terme général $-\frac{1}{2n}$ est divergente. Si la série de terme général u_n convergeait alors la série de terme général $-\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4. Si $\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors les deux premières séries divergent et la dernière converge.
Soit $\alpha\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $v_n=e^{in\alpha}$ et $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ de sorte que $u_n=\varepsilon_n v_n$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons encore $V_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$.
Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, posons enfin $R_n^p=\sum_{k=1}^{n+p}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k$. (On effectue alors une transformation d'ABEL).

$$\begin{aligned}R_n^p&=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k(V_k-V_{k-1})=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_{k-1}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_k-\sum_{k=n}^{n+p-1}\varepsilon_{k+1}V_k\\&=\varepsilon_{n+p}V_{n+p}-\varepsilon_{n+1}V_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})V_k.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=e^{i\alpha}\frac{e^{in\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}=e^{i\alpha}\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|V_n|\leqslant\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$. Par suite, pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$

$$\begin{aligned}|R_n^p|&=\left|\frac{1}{n+p}V_{n+p}-\frac{1}{n+1}V_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)V_k\right|\\&\leqslant\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}\left(\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)\\&=\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}\left(\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{2}{|\sin(\alpha/2)|(n+1)}\\&\leqslant\frac{2}{n|\sin(\alpha/2)|}.\end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif. Pour $n\geqslant E\left(\frac{2}{\varepsilon|\sin(\alpha/2)|}\right)+1$ et p entier naturel non nul quelconque, on a $|R_n^p|<\varepsilon$.
On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall(n,p)\in\mathbb{N}^*,\ (n\geqslant n_0\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n+p}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k\right|<\varepsilon$.
Ainsi, la série de terme général u_n vérifie le critère de CAUCHY et est donc convergente. Il en est de même des séries de termes généraux respectifs $\frac{\cos(n\alpha)}{n}=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$.

5. Pour $x\in]0,+\infty[$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>e$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}<0$.
Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

6. • Si $\deg P\geqslant\deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.
• Si $\deg P\leqslant\deg Q-2$, $u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.
• Si $\deg P=\deg Q-1$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^n\frac{\mathrm{dom}P}{n\,\mathrm{dom}Q}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.
En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg P<\deg Q$.

7. $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ puis pour $n\geqslant 2$, $n!e=1+n+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.
Pour $0\leqslant k\leqslant n-2$, $\frac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$. Pour $n\geqslant 2$, on obtient

$$\sin(n!\pi e)=\sin\left(2K_n\pi+(n+1)\pi+\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour $k\geqslant n+3$, $\frac{n!}{k!}=\frac{1}{k(k-1)\ldots(n+1)}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\leqslant\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}}=\frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que $\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement , $\sin(n!\pi e)\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
$\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.
Si $p\geqslant 2$, $|\sin^p(n!\pi e)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Correction de l'exercice 1830 ▲

---

1. $\frac{n+1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\frac{n+1}{3^n}$ converge.

1er calcul. Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\\ &= (S-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $S = \frac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}.}$$

2ème calcul. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = f_n'(x) = \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = \frac{1}{3}$, on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^{n-1}} + 1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S = \frac{9}{4}$.

2. Pour $k \geqslant 3$, $\frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8(k-2)} + \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\times\frac{3}{2} + \frac{5}{8}\times\frac{7}{12} + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1).\end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme $\frac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} = 3$ puis $1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} = 1 + j^2 + j^4 = 0$. Par suite,

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n + j^n + (j^2)^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\mathrm{Re}(e^{-i\sqrt{3}/2})\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e + \frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).}$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right)\\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

   Posons $S=\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$ puis pour $n\geqslant 2$, $S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$. Puisque la série converge $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{p\to+\infty}S_{2p+1}$ avec

$$S_{2p+1}=\sum_{k=2}^{2p+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{p}(\ln(2k)-\ln(2k+1)+\ln(2k+1)-\ln(2k))=0$$

   et quand p tend vers $+\infty$, on obtient $S=0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=0.}$$

6. Si $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors, pour tout entier naturel n, $\frac{a}{2^n}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)>0$.
   Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1+O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)\text{ (produit télescopique)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\times\frac{a}{2^n}}\right)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).$$

$$\boxed{\forall a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).}$$

7. Vérifions que pour tout réel x on a $\mathrm{th}(2x)=\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2x}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
   $\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\frac{1}{4}((e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2)=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})=\mathrm{ch}(2x)$ et $2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})=\mathrm{sh}(2x)$ puis

$$\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2x}=\frac{2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x}=\frac{\mathrm{sh}(2x)}{\mathrm{ch}(2x)}=\mathrm{th}(2x).$$

   Par suite, pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\mathrm{th}\,x=\frac{2}{\mathrm{th}(2x)}-\frac{1}{\mathrm{th}\,x}$. Mais alors, pour $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\mathrm{th}\,\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{\mathrm{th}\,\frac{a}{2^k}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{2^k\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2^k}}\right)$$
$$=\frac{2}{\mathrm{th}(2a)}-\frac{1}{2^n\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2^n}}\text{ (somme télescopique)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{2}{\mathrm{th}(2a)}-\frac{1}{a},$$

   ce qui reste vrai quand $a=0$.

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{2}{\mathrm{th}(2a)}-\frac{1}{a}.}$$

Correction de l'exercice 1831 ▲

Il faut vérifier que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$0<(2n)u_{2n}=2(\underbrace{u_{2n}+\ldots+u_{2n}}_{n})\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\text{ (car la suite }u\text{ est décroissante)}$$
$$=2(S_{2n}-S_n).$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim_{n\to+\infty} 2(S_{2n}-S_n) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$.

Ensuite, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$ ou encore que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n=0 \\ \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré parfait non nul} \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$. La suite u est positive et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$. Pourtant, $p^2 u_{p^2} = 1 \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ et la suite (nu_n) admet une suite extraite convergeant vers 1. On a donc pas $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Correction de l'exercice 1832 ▲

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrons que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$, $n\geqslant 1$, ne vérifie pas le critère de CAUCHY. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{2n}-S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k) \\ &\geqslant \frac{1}{4n^2}(1+2+\ldots+n) \text{ (car les } n \text{ entiers } \sigma(k),\ 1\leqslant k\leqslant n, \text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts)} \\ &= \frac{n(n+1)}{8n^2} \geqslant \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Si la suite (S_n) converge, on doit avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n) = 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, $n\geqslant 1$, diverge.

Correction de l'exercice 1833 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(1+u_n)$, $w_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $t_n = \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors $0 \leqslant u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. Dans ce cas, les séries de termes généraux u_n, v_n et w_n sont de même nature.

D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_n}{1+u_n^e} \leqslant t_n \leqslant u_n$ puis $\frac{1}{1+u_n^e} \leqslant \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1$et donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Les séries de termes généraux u_n et t_n sont aussi de même nature.

• Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n est grossièrement divergente. Puisque $u_n = e^{v_n}-1$, v_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général v_n est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.

De même, puisque $w_n = \frac{u_n}{1+u_n} < 1$, on a $u_n = \frac{w_n}{1-w_n}$ et w_n ne peut tendre vers 0.

Enfin, puisque u_n ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel N, il existe $n = n(N) \geqslant N$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$. Pour cet ε et ces n, on a $t_n \geqslant \int_0^\varepsilon \frac{dx}{1+x^e} > 0$ (fonction continue, positive et non nulle) et la suite t_n ne tend pas vers 0. Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

Correction de l'exercice 1834 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n = (n+1)!\left(e-\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k} \end{aligned}$$

On a $0 < \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \frac{1}{(n+2)^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^5}$. On en déduit que $\sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$
\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\\
&+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{19}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{9}{n}\right)+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Correction de l'exercice 1835 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $(2+\sqrt{3})^n=A_n+B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n\sqrt{3}$. Par suite, $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2A_n$ est un entier pair. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\sin\left(2A_n\pi-\pi(2-\sqrt{3})^n\right)=-\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right).$$

Mais $0<2-\sqrt{3}<1$ et donc $(2-\sqrt{3})^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$. On en déduit que $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\pi(2-\sqrt{3})^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge.

Correction de l'exercice 1836 ▲

Si $\alpha<0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{-2\alpha}$ et si $\alpha=0$, $u_n=1+(-1)^n$. Donc si $\alpha\leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n diverge grossièrement dans ce cas.

On suppose dorénavant que $\alpha>0$. Pour tout entier naturel non nul n, $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^\alpha}$ et donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $\alpha>1$.

Il reste à étudier le cas où $0<\alpha\leqslant 1$. On a $u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}$. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ou encore si et seulement si $\alpha>\frac{1}{2}$.

En résumé

Si $\alpha\leqslant 0$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge grossièrement,

si $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,

si $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est semi convergente,

si $\alpha>1$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolument.

Correction de l'exercice 1837 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Il est connu que $H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right)+\ldots\\
&+\left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2mp-1}\right)-\left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2mq}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=H_{2mp}-\frac{1}{2}(H_{mp}+H_{mq})\\
&\underset{m\to+\infty}{=}(\ln(2mp)+\gamma)-\frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma)+o(1)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)+o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q)\leqslant n<(m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n=E\left(\frac{n}{p+q}\right)$.

$$\begin{aligned}
|S_n-S_{m_n(p+q)}| &\leqslant \frac{1}{2m_np+1}+\ldots+\frac{1}{2(m_n+1)p-1}+\frac{1}{2m_nq+2}+\frac{1}{2(m_n+1)q}\\
&\leqslant \frac{p}{2m_np+1}+\frac{q}{2m_nq+2}\leqslant\frac{1}{2m_n}+\frac{1}{2m_n}=\frac{1}{m_n}.
\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon>0$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty}m_n=+\infty$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\frac{1}{m_n}<\frac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left|S_n-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| &\leqslant |S_n-S_{m_n(p+q)}|+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|\leqslant\frac{1}{m_n}+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|S_n-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right|<\varepsilon\right)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Correction de l'exercice 1838 ▲

La série proposée est le produit de CAUCHY de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n\geqslant 1$, par elle même.

- Si $\alpha>1$, on sait que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge absolument et donc que la série proposée converge.
- Si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, pour $0<k<n$ on a $0<k(n-k)\leqslant\frac{n}{2}\left(n-\frac{n}{2}\right)=\frac{n^2}{4}$. Donc $u_n\geqslant\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}$ avec $\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$. Comme $2\alpha-1\leqslant 1$, la série proposée diverge.
- Si $\alpha<0$, $u_n\geqslant\frac{1}{(n-1)^\alpha}$ et donc u_n ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 1839 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
2n^3-3n^2+1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1)-15n^2-22n-11=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53n+79\\
&=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{15}{(n+1)!}+\frac{53}{(n+2)!}-\frac{80}{(n+3)!}\right)=2e-15(e-1)+53(e-2)-80\left(e-\frac{5}{2}\right)\\
&=-40e+111.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} = -40e+111.}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1} u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$ puis

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(k+a+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n}(k+a)u_k = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $a > 1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\frac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n. Donc $\ell = 0$ et

$$\text{si } a > 1,\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si $0 < a < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{1\times2\times\ldots\times n}{2\times3\ldots\times(n+1)} = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Correction de l'exercice 1840 ▲

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Correction de l'exercice 1841 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, $k \geqslant 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$0 < \frac{1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)}\\
&= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \text{ (somme télescopique)}\\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ou encore $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$.

Or $-\frac{1}{k^2(k-1)} + \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ puis

$\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} - \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$ et donc

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}\\
&= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}
\end{aligned}$$

Ensuite $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^4}$ ou encore $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)}\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{N(N-1)}\right) = \frac{1}{2n(n-1)}\\
&= \frac{1}{2n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} - \frac{1}{k(k-1)(k-2)} \right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{N(N-1)(N-2)} \right) = \frac{2}{3n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{2}{3n^3} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{3n^3} \left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

et finalement

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4}\right) + \left(\frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4}\right) - \frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Correction de l'exercice 1842 ▲

1. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, en décroissant à partir du rang 3 (fourni par l'étude de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $[e,+\infty[$) et donc la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$, $n \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p}$.
   $(-1)^k \frac{\ln k}{k}$ n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang et on ne peut donc lui appliquer la règle de l'équivalence des restes.
   Par contre, puisque la série de terme général $(-1)^k \frac{\ln k}{k}$ converge, on sait que l'on peut associer les termes à volonté et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$R_{2k-1} = \sum_{p=2k}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} = \sum_{p=k}^{+\infty} \left(\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \right).$$

   Puisque la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$ et donc sur $[3,+\infty[$, pour $p \geqslant 2$, $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \geqslant 0$ et on peut utiliser la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes.
   Cherchons déjà un équivalent plus simple de $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$ quand p tend vers $+\infty$.

   $$\begin{aligned}
   \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} &= \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p}\left(\ln(2p) + \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{-1} \\
   &\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p}\left(\ln(2p) + \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\
   &\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p + \ln 2}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \\
   &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{4p^2}.
   \end{aligned}$$

   et donc $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4} \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{\ln p}{p^2}$.
   Cherchons maintenant un équivalent simple de $\frac{\ln p}{p^2}$ de la forme $v_p - v_{p+1}$.
   Soit $v_p = \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}$ (suggéré par $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2}$). Alors

   $$\begin{aligned}
   v_p - v_{p+1} &= \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\
   &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{p^2}.
   \end{aligned}$$

   D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4} \sum_{p=k}^{+\infty} \left(\frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}\right) = \frac{\ln k}{4k}$ (série télescopique).

Puis, $R_{2k}=R_{2k-1}-\frac{\ln(2k)}{2k}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{\ln k}{4k}-\frac{\ln(2k)}{2k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{\ln k}{4k}-\frac{\ln k}{2k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln k}{4k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.
En résumé, $R_{2k-1}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{\ln k}{4k}$ et $R_{2k}\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln k}{4k}$.
On peut unifier : $R_{2k-1}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{\ln k}{4k}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(2k-1)}{2(2k-1)}$ et $R_{2k}\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln k}{4k}\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln(2k)}{2(2k)}$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p}\underset{n\to+\infty}{\sim}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{2n}.}$$

2. $\sum n^n$ est une série à termes positifs grossièrement divergente.
1 ère solution.
$0<n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n-(n-1)^{n-1}$ car $\frac{n^n-(n-1)^{n-1}}{n^n}=1-\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{1}{ne}+o\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}1$.
D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$\sum_{p=1}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{p=2}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{p=2}^{n}(p^p-(p-1)^{p-1})=n^n-1\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n.$$

(La somme est équivalente à son dernier terme.)
2 ème solution. Pour $n\geqslant 3$, $0\leqslant\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p\leqslant\frac{1}{n^n}\times(n-2)(n-2)^{n-2}\leqslant\frac{n^{n-1}}{n^n}=\frac{1}{n}$. Donc $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p$. On en déduit que $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n}p^p=1+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}+\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p\underset{n\to+\infty}{=}1+o(1)+o(1)=1+o(1)$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n.}$$

Correction de l'exercice 1843 ▲

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}$, $\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N>p$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\,n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}&=\frac{1}{2p}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\,n\neq p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{2p}\left(\sum_{1-p\leqslant k\leqslant N-p,\,k\neq 0}\frac{1}{k}-\sum_{p+1\leqslant k\leqslant N+p,\,k\neq 2p}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p}+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\frac{1}{N-p+1}+\ldots+\frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p-1$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque $2p-1$ est constant quand N varie, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\,n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p}=\frac{3}{4p^2}\text{ puis }\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\,n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\,p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\,p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2}=-\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\,p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double $\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\,n\neq p}$ n'est pas sommable.

Correction de l'exercice 1844 ▲

La suite $\left((-1)^n\frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\frac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right|=\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\leqslant\int_0^1 t^{3n+3}\,dt=\frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Correction de l'exercice 1845 ▲

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on a $nv_n-(n-1)v_{n-1}=u_n$ ce qui reste vrai pour $n=1$ si on pose de plus $v_0=0$. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$v_n^2-2u_nv_n=v_n^2-2(nv_n-(n-1)v_{n-1})v_n=-(2n-1)v_n^2+2(n-1)v_{n-1}v_n$$
$$\leqslant -(2n-1)v_n^2+(n-1)(v_{n-1}2+v_n^2)=(n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2.$$

Mais alors, pour $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n^2-2u_nv_n)\leqslant\sum_{n=1}^{N}((n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2)=-nv_n^2\leqslant 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}2u_nv_n\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}\ \text{(inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}.$$

Si $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}>0$, on obtient après simplification par $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}$ puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}=0$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}u_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2(\geqslant 0)$ est majorée. Donc la série de terme général v_n^2 converge et de plus, quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2.$$

Correction de l'exercice 1846 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt$$
$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Or $\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\,dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt$. On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$

Correction de l'exercice 1847 ▲

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$: $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \leq |f(x)-f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :
La fonction $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

Correction de l'exercice 1850 ▲

1. $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2})$. Comme $f(a) = f(b)$ alors nous obtenons que $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$. Donc ou bien $g(a) \leq 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \geq 0$ ou bien $g(a) \geq 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.
2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$. Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$. Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{2}) = f(c)$. Donc $d(c+\frac{1}{2}) - d(c) = 4(c+\frac{1}{2}) - 4c = 2$. Donc entre c et $c+\frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction de l'exercice 1851 ▲

Il existe $x < 0$ tel que $f(x) < 0$ et $y > 0$ tel que $f(y) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Donc f s'annule. Les polynômes de degré impair vérifient les propriétés des limites, donc s'annulent. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.

Correction de l'exercice 1853 ▲

Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1. Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction de l'exercice 1854 ▲

Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > A$, $\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$. Nous venons de montrer que f est bornée "à l'infini". La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe m,M tels que pour tout $x \in [0,A]$, $m \leq f(x) \leq M$. En prenant $M' = \max(M, \ell+1)$, et $m' = \min(m, \ell-1)$ nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m' \leq f(x) \leq M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Correction de l'exercice 1861 ▲

1. Si $f(0) = 0$ et c'est fini, on a trouver le point fixe ! Sinon $f(0)$ n'est pas nul. Donc $f(0) > 0$ et $0 \in E$. Donc E n'est pas vide.
2. Maintenant E est un partie de $[0,1]$ non vide donc $\sup E$ existe et est fini. Notons $c = \sup E \in [0,1]$. Nous allons montrer que c est un point fixe.
3. Nous approchons ici $c = \sup E$ par des éléments de E : Soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \to c$ et $x_n \leq c$. Une telle suite existe d'après les propriétés de $c = \sup E$. Comme $x_n \in E$ alors $x_n < f(x_n)$. Et comme f est croissante $f(x_n) \leq f(c)$. Donc pour tout n, $x_n < f(c)$; comme $x_n \to c$ alors à la limite nous avons $c \leq f(c)$.
4. Si $c = 1$ alors $f(1) = 1$ et nous avons notre point fixe. Sinon, nous utilisons maintenant le fait que les élements supérieurs à $\sup E$ ne sont pas dans E : Soit (t_n) une suite telle que $t_n \to c$, $t_n \geq c$ et telle que $f(t_n) \leq t_n$. Une telle suite existe car sinon c ne serait pas égal à $\sup E$. Nous avons $f(c) \leq f(t_n) \leq t_n$ et donc à la limite $f(c) \leq c$.
   Nous concluons donc que $c \leq f(c) \leq c$, donc $f(c) = c$ et c est un point fixe de f.

Correction de l'exercice 1868 ▲

1. Soit $x \in [0,1]$ et $y = f(x) \in [0,1]$. Alors $f(y) = y$ car $f(f(x)) = f(x)$. Donc $E_f \neq \varnothing$. Nous venons de montrer que $I = f([0,1])$ est inclus dans E_f.
2. Montrons réciproquement E_f est inclus dans I. Soit $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$ alors $x \in I = f([0,1])$ (car $x = f(x)$!). Ainsi $E_f = I = f([0,1])$. Mais l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle donc E_f est un intervalle.
3. La réciproque est vraie : une fonction continue pour laquelle $E_f = f([0,1])$ vérifie aussi $f \circ f = f$. En effet pour $x \in [0,1]$ et $y = f(x)$ alors $y \in f([0,1])$ donc $y \in E_f$. Donc $f(y) = y$, autrement dit $f(f(x)) = f(x)$.
   Les fonctions continues qui vérifient $f \circ = f$ sont donc exactement les fonctions continues telles que $E_f = f([0,1])$. Pour une telle fonction si l'on note $[a,b] = E_f$ alors f est définie sur $[0,a]$ par n'importe qu'elle fonction continue prenant ses valeurs entre a et b, et valant a en a : $f([0,a]) \subset [a,b]$ et $f(a) = a$. Elle est ensuite définie par l'identité sur $[a,b]$: pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = x$. Et enfin sur $[b,1]$ elle est définie par n'importe quelle fonction continue prenant ses valeurs entre a et b, et valant b en b : $f([b,1]) \subset [a,b]$ et $f(b) = b$.

Correction de l'exercice 1870 ▲

Non, par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Avec $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f n'est pas continue (en 0), mais pour tout a,b et pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Correction de l'exercice 1877 ▲

1. Pour tout $x \in]a,b[$, on a $x \in [a,b]$ donc $f(x) \leq \sup_{a \leq t \leq b} f(t)$. Par conséquent $\sup_{a \leq t \leq b} f(t)$ est un majorant de f sur l'intervalle $]a,b[$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{a<x<b} f(x) \leq \sup_{a \leq t \leq b} f(t)$.
2. f est continue sur un intervalle fermé et borné, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. Soit x_0 le réel où le maximum est atteint : $f(x_0) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$.
   - si $x_0 = a$, considérons la suite $a_n = a + 1/n$. Pour $n \geq \frac{1}{b-a}$ on a $a_n \in [a,b]$, donc on peut considérer la suite $(f(a_n))_{n \geq \frac{1}{b-a}}$. Or a_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue, ceci implique que $f(a_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in |||, f(x_0) - \varepsilon \leq f(a_n) \leq f(x_0)$, ce qui implique que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
   - si $x_0 = b$ on obtient le résultat de manière identique en considérant la suite $b_n = b - 1/n$.

– si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ est majoré par le sup de f sur $]a,b[$, donc

$$f(x_0) \leq \sup_{a<x<b} f(x) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_0)$$

donc $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.

3. Avec la fonction g, on a $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ car pour chaque $x \in]0,1[$, $g(x) = 0$, et $\sup_{0\leq x\leq 1} g(x) = 1$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La propriété démontrée précédemment n'est pas vraie dans notre cas, car la fonction g ne remplit pas la condition essentielle d'être continue.

Correction de l'exercice 1888 ▲

1. $f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1.
2. Sinon $f - g$ est de signe constant, par exemple positif. Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a) > a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Correction de l'exercice 1890 ▲

En posant $b = f(a)$ on a $(f(a) - a) + (f(b) - b) = 0$ donc $x \mapsto f(x) - x$ s'annule entre a et b. De même, s'il existe $k \in |||^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f^k(a) = a$ alors $(f(a) - a) + (f^2(a) - f(a)) + \cdots + (f^k(a) - f^{k-1}(a)) = 0$ donc $f(x) - x$ s'annule entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.

Correction de l'exercice 1893 ▲

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f est discontinue en a. Il existe une suite a_n telle que $a_n \to a$ et $|f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Alors $f(a) \pm \varepsilon$ a une infinité d'antécédents.
2.

Correction de l'exercice 1901 ▲

Si f n'est pas identiquement nulle, alors $f(0) = \pm 1$ et f est paire, de signe constant.

Par récurrence, $\forall\, p \in |||$, $f(px) = \pm f^{p^2}(x) \Rightarrow$ par densité, $f(x) = \pm \lambda^{x^2}$.

Correction de l'exercice 1902 ▲

$\omega(\delta) \to 0 \Leftrightarrow f$ (lorsque $\delta \to 0^+$) est uniformément continue.

Continuité en $\delta > 0$: on remarque que ω est croissante donc $\omega(\delta^-)$ et $\omega(\delta^+)$ existent et encadrent $\omega(\delta)$. Si $\delta_n \to \delta^+$ (lorsque $n \to \infty$), soient x_n, y_n tels que $\omega(\delta_n) = |f(x_n) - f(y_n)|$ et $|x_n - y_n| \leq \delta_n$. On extrait de (x_n, y_n) une suite convergente vers (x, y) avec $|x - y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta^+)$ d'où $\omega(\delta^+) \leq \omega(\delta)$ puis $\omega(\delta^+) = \omega(\delta)$.

On a aussi $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ tq } |x - y| < \delta\} \leq \omega(\delta^-)$ d'où $\omega(\delta^-) = \omega(\delta)$.

Correction de l'exercice 1903 ▲

f admet des points fixes car l'application $x \mapsto f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1. Si E est l'ensemble des points fixes de f alors E est stable par g donc $f - g$ a des signes opposés en $\min(E)$ et $\max(E)$.

Correction de l'exercice 1904 ▲

1. Non. Si φ est lipschitzienne alors $\varphi(x) = O(\|x\|)$ lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini, donc toute fonction f à décroissance suffisament rapide vers $-\infty$ n'est pas minorable par une fonction lipschitzienne. Contre-exemple explicite : $f(x) = -\|x\|^2$.
2. CNS : $x \mapsto f(x) + k\|x\|$ est minorée.

3. On pose $\varphi(x) = \sup\{g(x),\ g\ k\text{-lipschitzienne minorant } f\}$. Il suffit de vérifier que φ est k-lipschitzienne, ce sera alors la plus grande fonction k-lipschitzienne minorant f. Soient $x,y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ et g_x, g_y des fonctions k-lipschitziennes minorant f telles que $g_y(x) \leq \varphi(x) \leq g_x(x) + \varepsilon$ et $g_x(y) \leq \varphi(y) \leq g_y(y) + \varepsilon$. On a :

$$\varphi(y) \leq g_y(y) + \varepsilon \leq g_y(x) + k\|x-y\| + \varepsilon \leq \varphi(x) + k\|x-y\| + \varepsilon,$$
$$\varphi(y) \geq g_x(y) \geq g_x(x) - k\|x-y\| \geq \varphi(x) - k\|x-y\| - \varepsilon.$$

Donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k\|x-y\| + \varepsilon$ et on fait tendre ε vers 0^+.

Correction de l'exercice 1905 ▲

Soit pour $x > 0$, $\ell(x) = \lim_{n\to+\infty} f(nx)$. On a $\ell(kx) = \ell(x)$ pour tout $k \in |||^*$ d'où aussi pour tout $k \in \mathbb{Q}^{+*}$. Montrons alors que $f(x) \to \ell(1)$ lorsque $x \to +\infty$: soit $\varepsilon > 0$ et δ associé dans la définition de l'uniforme continuité de f. On choisit un rationnel $\alpha \in]0, \delta[$ et un entier N tel que $|f(n\alpha) - \ell(1)| = |f(n\alpha) - \ell(\alpha)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Alors $|f(x) - \ell(1)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \geq N\alpha$.

Correction de l'exercice 1906 ▲

Il existe $a > 0$ tel que f est définie et continue sur $[a, +\infty[$.

1er cas. Supposons que ℓ est réel. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists A_1 \geq a/\ \forall X \in [a,+\infty[,\ (X \geq A_1 \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(X+1) - f(X) < \ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit $X \geq A_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < \sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1) - f(X+k)) = f(X+n) - f(X) < \sum_{k=0}^{n-1}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}),$$

et on a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_1 \geq a/\ \forall X \geq A_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^N*,\ n(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < f(X+n) - f(X) < n(\ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit de nouveau $\varepsilon > 0$. Soit ensuite $x \geq A_1 + 1$ puis $n = E(x - A_1) \in \mathbb{N}^*$ puis $X = x - n$.

On a $X = x - E(x - A_1) \geq x - (x - A_1) = A_1$ et donc $n(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < f(x) - f(x-n) < n(l + \frac{\varepsilon}{2})$ ou encore

$$\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Ensuite,

$$1 - \frac{A_1+1}{x} = \frac{x - A_1 - 1}{x} \leq \frac{n}{x} = \frac{E(x-A_1)}{x} \leq \frac{x - A_1}{x} = 1 - \frac{A_1}{x},$$

et comme $1 - \frac{A_1+1}{x}$ et $1 - \frac{A_1}{x}$ tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{n}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Puis, puisque f est continue sur le segment $[A_1, A_1+1]$, f est bornée sur ce segment. Or $n \leq x - A_1 < n+1$ s'écrit encore $A_1 \leq x - n < A_1 + 1$ et donc, en posant $M = \sup\{|f(t)|,\ t \in [A_1, A_1+1]\}$, on a $\left|\frac{x-n)}{x}\right| \leq \frac{M}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En résumé, $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell - \frac{\varepsilon}{2})$ et $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2})$ tendent respectivement vers $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc trouver un réel $A_2 \geq a$ tel que $x \geq A_2 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) > (\ell - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon$ et un réel $A_3 \geq a$ tel que $x \geq A_2 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) < \ell + \varepsilon$.

Soit $A = \mathrm{Max}(A_1, A_2, A_3)$ et $x \geq A$. On a $\ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $(\exists A \geq a/\ \forall x \geq A,\ \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$ et donc $\lim_{x\to+\infty} = \ell$.

2ème cas. Supposons $\ell = +\infty$ (si $\ell = -\infty$, remplacer f par $-f$).

Soit $B > 0$. $\exists A_1 \geq a/\ \forall X \geq A_1,\ f(X+1) - f(X) \geq 2B$.

Pour $X \geq A_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(X+n) - f(X) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1) - f(X+k)) \geq 2nB$.

Soient $x \geq 1 + A_1$, $n = E(x - A_1)$ et $X = x - n$. On a $f(x) - f(x-n) \geq 2nB$ et donc,

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x},$$

qui tend vers $2B$ quand x tend vers $+\infty$ (démarche identique au 1er cas).

Donc $\exists A \geq A_1 > a$ tel que $x \geq A \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x} > B$.

Finalement : $(\forall B>0,\ \exists A>a/\ (\forall x\geq A,\ \frac{f(x)}{x}>B$ et donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

Correction de l'exercice 1907 ▲

Pour $x\neq 0$, posons $g(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$. f est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe $a>0$ tel que $]-a,a[\subset D_f$. Mais alors, $]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}\subset D_g$.

Soit $x\in]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{x}{2^k})-f(\frac{x}{2^{k+1}}))+f(\frac{x}{2^n})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x}{2^{k+1}}g(\frac{x}{2^{k+1}})+f(\frac{x}{2^n}).$$

Par suite, pour $x\in]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right|+\left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque par hypothèse, g tend vers 0 quand x tend vers 0,

$$\exists\alpha\in]0,\frac{a}{2}[/\ \forall X\in]-\alpha,\alpha[,\ |g(X)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour $x\in]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$ et pour k dans $N*$, $\frac{x}{2^k}$ est dans $]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$ et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\varepsilon}{2}(1-\frac{1}{2^n})<\frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|$. On a ainsi montré que

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Mais, à x fixé, $\frac{f(x/2^n)}{x}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, on peut choisir n tel que $\frac{f(x/2^n)}{x}<\frac{\varepsilon}{2}$ et on a alors $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ (\forall x\in D_f,\ 0<|x|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon,$$

ce qui montre que (f est dérivable en 0 et que) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

Correction de l'exercice 1908 ▲

$\mathrm{Min}(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\mathrm{Max}(f,g)=\frac{1}{2}(f-g+|f-g|)$ sont continues en x_0 en vertu de théorèmes généraux.

Correction de l'exercice 1909 ▲

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $z\in A$. $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$. Or, $forallz\in A,\ |x-z|\geq d(x,A)$ et donc $d(x,A)-|x-y|$ est un minorant de $\{|y-z|,\ z\in A\}$. Par suite, $d(x,A)-|x-y|\leq d(y,A)$. On a montré que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ d(x,A)-d(y,A)\leq|y-x|.$$

En échangeant les roles de x et y, on a aussi montré que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ d(y,A)-d(x,A)\leq|y-x|$.

Finalement, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \|f(y)-f(x)|\leq|y-x|$. Ainsi, f est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1910 ▲

Soit $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Pour $x\neq5$,

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{3x-1}{x-5}-\frac{3x_0-1}{x_0-5}\right|=\frac{14|x-x_0|}{|x-5|.|x_0-5|}.$$

Puis, pour $x\in]x_0-\frac{|x_0-5|}{2},x_0+\frac{|x_0-5|}{2}[$, on a $|x-5|>\frac{|x_0-5|}{2}[(>0)$, et donc,

$$\forall x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[,\ |f(x) - f(x_0)| = \frac{28}{(x_0-5)^2}|x - x_0|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ puis $\alpha = \text{Min}\{\frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}\}(> 0)$.

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2}|x - x_0| < \frac{28}{(x_0-5)^2}\frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28} = \varepsilon.$$

On a monté que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\},\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Correction de l'exercice 1911 ▲

Soit χ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$. Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}Q \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n})$ existe, $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$ existe et$\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$ (bien que $\lim_{n\to+\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} x_0 + \frac{\pi}{n} = x_0$. Ainsi, pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0.

Correction de l'exercice 1912 ▲

Soit a un réel strcitement positif. On peut déjà noter que $\lim_{x\to a,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} f(x) = 0$. Donc, si f a une limite quand x tend vers a, ce ne peut être que 0 et f est donc discontinue en tout rationnel strictement positif.

a désigne toujours un réel strictement positif fixé. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit x un réel strictement positif tel que $f(x) \geq \varepsilon$.

x est nécessairement rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux vérifiant $\frac{1}{p+q} \geq \varepsilon$ et donc

$$2 \leq p + q \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) vérifiant ces inégalités et donc, il n'y a qu'un nombre fini de réels strictement positifs x tels que $f(x) \geq \varepsilon$.

Par suite, $\exists \alpha > 0$ tel que aucun des réels x de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ne vérifie $f(x) \geq \varepsilon$. Donc,

$$\forall a > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x > 0,\ (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon),$$

ou encore

$$\forall a > 0,\ \lim_{x\to a,\ x\neq a} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Correction de l'exercice 1913 ▲

Donnons tout d'abord une expression plus explicite de $f(x)$ pour chaque réel x.

Si $x > 1$, alors $\frac{1}{x} \in]0, 1[$ et donc, $f(x) = 0$.

Si $\exists p \in \mathbb{N}^* /\ x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, $f(x) = px$.

$f(0) = 1$ (et plus généralement, $\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ f(\frac{1}{p}) = 1$).

Si $x \leq -1$, alors $\frac{1}{x} \in [-1, 0[$ et donc, $f(x) = -x$.

Enfin, si $\exists p \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ tel que $x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, alors $\frac{1}{p+1} < x \leq \frac{1}{p}(< 0)$ fournit, par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$, $p \leq \frac{1}{x} < p + 1(< 0)$ et donc $f(x) = px$.

Etude en 0. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$ et donc $1 - x < f(x) \leq 1$ si $x > 0$ et $1 \leq f(x) < 1 - x$ si $x < 0$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - 1 \leq |x|,$$

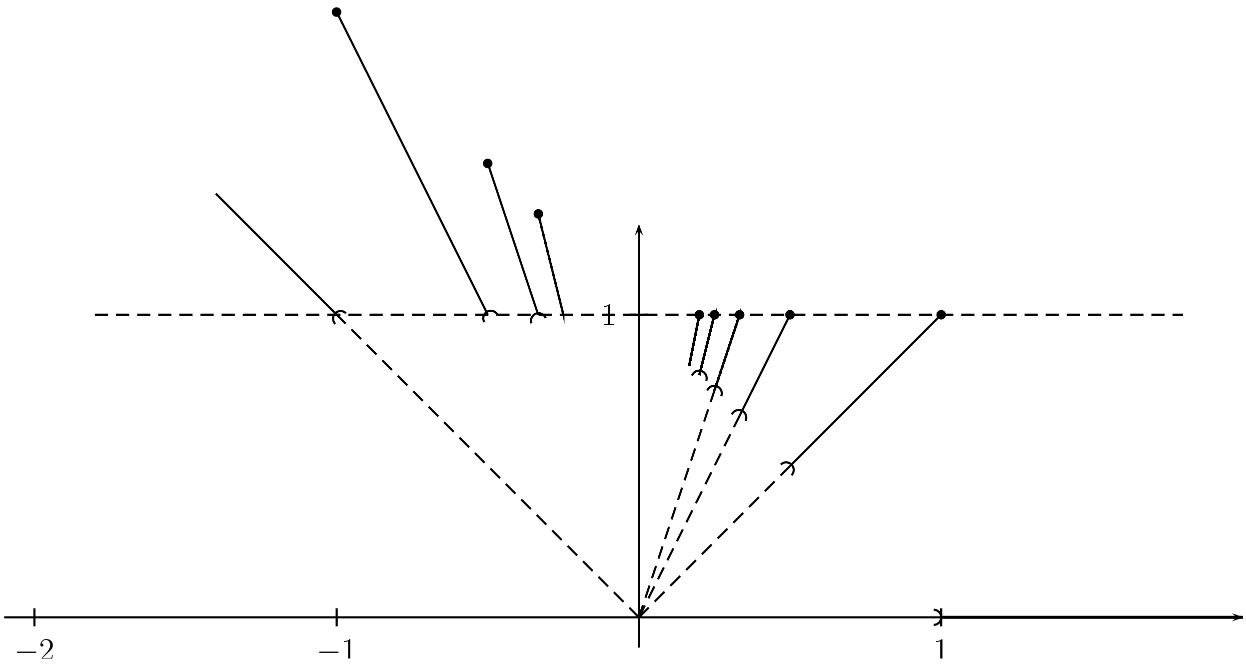
et $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. f est donc continue en 0.

f est affine sur chaque intervalle de la forme $]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}]$ pour p élément de $\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$ et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque $\frac{1}{p}$. f est affine sur $]-\infty,-1]$ et aussi sur $]1,+\infty[$ et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en $\frac{1}{p}$, pour p entier relatif non nul donné. Mais,

$$f(\frac{1}{p}^+) = \lim_{x\to\frac{1}{p},\, x>\frac{1}{p}} (x(p-1)) = 1-\frac{1}{p} \neq 1 = f(\frac{1}{p}).$$

f est donc discontinue à droite en tout $\frac{1}{p}$ où p est un entier relatif non nul donné.

Graphe de f :



Correction de l'exercice 1914 ▲

Soit $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x\in(\mathbb{Q}\cap[0,1])\setminus\{0,\frac{1}{2}\} \\ 1-x \text{ si } x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1] \\ 0 \text{ si } x=\frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ si } x=0 \end{cases}$. f est bien une application définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. De plus, si $x\in(\mathbb{Q}\cap[0,1])\setminus\{0,\frac{1}{2}\}$, alors $f(f(x)) = f(x) = x$.

Si $x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$, alors $1-x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$ et donc $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$.

Enfin, $f(f(0)) = f(\frac{1}{2}) = 0$ et $f(f(\frac{1}{2})) = f(0) = \frac{1}{2}$.

Finalement, $f\circ f = Id_{[0,1]}$ et f, étant une involution de $[0,1]$, est une permutation de $[0,1]$.

Soit a un réel de $[0,1]$. On note que $\lim_{x\to a,\, x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} f(x) = 1-a$ et $\lim_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = a$. Donc, si f a une limite en a, nécessairement $1-a = a$ et donc $a = \frac{1}{2}$. Mais, si $a = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q},\, x\neq a} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\frac{1}{2})$ et donc f est discontinue en tout point de $[0,1]$.

Correction de l'exercice 1915 ▲

Soit T une période strictement positive de f. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.

Soit x un réel. $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(x) = f(x+nT)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = \ell.$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \ell$ et donc, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1916 ▲

Voir la correction de l'exercice 1909.

Correction de l'exercice 1917 ▲

Soit $E = \{x \in [a,b] / f(x) \geq x\}$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car a est dans E) et majorée (par b). Donc, E admet une borne supèrieure c vérifiant $a \leq c \leq b$.

Montrons que $f(c) = c$.

Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E / b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. Puisque f est à valeurs dans $[a,b]$ et que les x_n sont dans E, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$x_n \leq f(x_n) \leq b \ (*).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers b (théorème des gendarmes) et donc, f étant croissante sur $[a,b]$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(b^-) \leq f(b)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $b \leq f(b^-) \leq f(b) \leq b$ et donc $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe de f.

Si $c \in [a,b[$, par définition de c, pour x dans $]c,b]$, $f(x) < x$ (car x n'est pas dans E) et par passage à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient : $f(c)(\leq f(c+)) \leq c$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E / c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. x_n étant dans E, on a $f(x_n) \geq x_n$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $f(c) \geq f(c^-) \geq c$. Finalement, $f(c) = c$ et dans tous les cas, f admet au moins un point fixe.

Correction de l'exercice 1918 ▲

Puisque f est croissante sur $[a,b]$, on sait que f admet en tout point x_0 de $]a,b[$ une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ puis une limite à droite en a élément de $[f(a), +\infty[$ et une limite à gauche en b élément de $]-\infty, f(b)]$.

Si f est discontinue en un x_0 de $]a,b[$, alors on a $f(x_0^-) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f(x_0^+)$. Mais, si par exemple $f(x_0^-) < f(x_0)$ alors, $\forall x \in [a, x_0[\ (\neq \emptyset)$, $f(x) \leq f(x_0-)$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Donc $]f(x_0^-), f(x_0)[\cap f([a,b]) = \emptyset$ ce qui est exclu puisque d'autre part $]f(x_0^-), f(x_0)[\neq \emptyset$ et $]f(x_0^-), f(x_0)[\subset [f(a), f(b)]$ (la démarche est identique si $f(x_0^+) > f(x_0)$). Donc, f est continue sur $]a,b[$. Par une démarche analogue, f est aussi continue en a ou b et donc sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 1919 ▲

Posons $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^+$, $(x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $(x,y) \in [A, +\infty[^2$. Alors, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0,A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Donc, $\exists \alpha > 0 / \forall (x,y) \in [0,A]^2$, $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$.

Résumons. $\alpha > 0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x - y| < \alpha$.

Si $(x,y) \in [0,A]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Si $(x,y) \in [A, +\infty[^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Si enfin on a $x \leq A \leq y$, alors, puisque $|A - x| \leq |x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A, +\infty[$, on a $|f(y) - f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall (x,y) \in [0, +\infty[^2$, $(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 1920 ▲

Soit T une pèriode strictement positive de f. f est continue sur le segment $[0,T]$ et donc est bornée sur ce segment. f est par suite bornée sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité.

Soit $\varepsilon > 0$.

f est continue sur le segment $[0,T]$ et donc, d'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists \alpha \in]0, T[/ \forall (x,y) \in [0,T], \ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient x et y deux réels tels que $|x-y|<\alpha$. Si il existe un entier naturel k tel que $(x,y)\in[kT,(k+1)T]$, alors $x-kT\in[0,T]$, $y-kT\in[0,T]$, puis $|(x-kT)-(y-kT)|=|y-x|<\alpha$ et donc $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Sinon, en supposant par exemple que $x\leq y$, puisque l'on a choisi $\alpha<T$,

$$\exists k\in\mathbb{Z}/\ (k-1)T\leq x\leq kT\leq y\leq (k+1)T.$$

Mais alors, $|x-kT|=|y-x|<\alpha$ et $|y-kT|\leq|y-x|<\alpha$. Par suite,

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(kT)|+|f(y)-f(kT)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x-y|<\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (|x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1921 ▲

Commençons par la fin, trouver un tel δ montrera que

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-(-3)|<\varepsilon$$

autrement dit la limite de f en $x_0=0$ est -3. Comme $f(0)=-3$ alors cela montre aussi que f est continue en $x_0=0$.

On nous donne un $\varepsilon>0$, à nous de trouver ce fameux δ. Tout d'abord

$$|f(x)+3|=\left|\frac{2x+3}{3x-1}+3\right|=\frac{11|x|}{|3x-1|}.$$

Donc notre condition devient :

$$|f(x)+3|<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\frac{11|x|}{|3x-1|}<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad|x|<\varepsilon\frac{|3x-1|}{11}.$$

Comme nous voulons éviter les problèmes en $x=\frac{1}{3}$ pour lequel la fonction f n'est pas définie, nous allons nous placer "loin" de $\frac{1}{3}$. Considérons seulement les $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<\frac{1}{6}$. Nous avons :

$$|x|<\frac{1}{6}\Rightarrow-\frac{1}{6}<x<+\frac{1}{6}\quad\Rightarrow\quad-\frac{3}{2}<3x-1<-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}<|3x-1|.$$

Et maintenant explicitons δ : prenons $\delta<\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}$. Alors pour $|x|<\delta$ nous avons

$$|x|<\delta=\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}<\varepsilon\cdot|3x-1|\cdot\frac{1}{11}$$

ce qui implique par les équivalences précédentes que $|f(x)+3|<\varepsilon$.

Il y a juste une petite correction à apporter à notre δ : au cours de nos calculs nous avons supposé que $|x|<\frac{1}{6}$, mais rien ne garantie que $\delta\leq\frac{1}{6}$ (car δ dépend de ε qui pourrait bien être très grand, même si habituellement ce sont les ε petits qui nous intéressent). Au final le δ qui convient est donc :

$$\delta=\min(\frac{1}{6},\frac{\varepsilon}{22}).$$

Remarque finale : bien sûr on savait dès le début que f est continue en $x_0=0$. En effet f est le quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas en x_0. Donc nous savons dès le départ qu'un tel δ existe, mais ici nous avons fait plus, nous avons trouvé une formule explicite pour ce δ.

Correction de l'exercice 1922 ▲

1. Le graphe est composé d'une portion de droite au dessus des $x\in]-\infty,1[$; d'une portion de parabole pour les $x\in[1,4]$, d'une portion d'une autre parabole pour les $x\in]4,+\infty$. (Cette dernière branche est bien une parabole, mais elle n'est pas dans le sens "habituel", en effet si $y=8\sqrt{x}$ alors $y^2=64x$ et c'est bien l'équation d'une parabole.)

   On "voit" immédiatemment sur le graphe que la fonction est continue (les portions se recollent !). On "voit" aussi que la fonction est bijective.

2. La fonction est continue sur $]-\infty,1[$, $]1,4[$ et $]4,+\infty[$ car sur chacun des ces intervalles elle y est définie par une fonction continue. Il faut examiner ce qui se passe en $x=1$ et $x=4$. Pour $x<1$, $f(x)=x$, donc la limite à gauche (c'est-à-dire $x\to1$ avec $x<1$) est donc $+1$. Pour $x\geq1$, $f(x)=x^2$ donc la limite à droite vaut aussi $+1$. Comme on a $f(1)=+1$ alors les limites à gauche, à droite et la valeur en 1 coïncident donc f est continue en $x=1$.

   Même travail en $x=4$. Pour $x\in[1,4]$, $f(x)=x^2$ donc la limite à gauche en $x=4$ est $+16$. On a aussi $f(4)=+16$. Enfin pour $x>4$, $f(x)=8\sqrt{x}$, donc la limite à droite en $x=4$ est aussi $+16$. Ainsi f est continue en $x=4$.

   Conclusion : f est continue en tout point $x\in\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Le graphe devrait vous aider : tout d'abord il vous aide à se convaincre que f est bien bijective et que la formule pour la bijection réciproque dépend d'intervalles. Petit rappel : le graphe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient comme symétrique du graphe de f par rapport à la bissectrice d'équation $(y=x)$ (dans un repère orthonormal).

   Ici on se contente de donner directement la formule de f^{-1}. Pour $x\in]-\infty,1[$, $f(x)=x$. Donc la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y)=y$ pour tout $y\in]-\infty,1[$. Pour $x\in[1,4]$, $f(x)=x^2$. L'image de l'intervalle $[1,4]$ est l'intervalle $[1,16]$. Donc pour chaque $y\in[1,16]$, la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$. Enfin pour $x\in]4,+\infty[$, $f(x)=8\sqrt{x}$. L'image de l'intervalle $]4,+\infty[$ est donc $]16,+\infty[$ et f^{-1} est définie par $f^{-1}(y)=\frac{1}{64}y^2$ pour chaque $y\in]16,+\infty[$.

   Nous avons définie $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de telle sorte que f^{-1} soit la bijection réciproque de f.

   C'est un bon exercice de montrer que f est bijective sans calculer f^{-1} : vous pouvez par exemple montrer que f est injective et surjective. Un autre argument est d'utiliser un résultat du cours : f est continue, strictement croissante avec une limite $-\infty$ en$-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et on sait même que la bijection réciproque est continue).

Correction de l'exercice 1923 ▲

Soit $x_0\neq0$, alors la fonction f est continue en x_0, car elle s'exprime sous la forme d'un quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas en x_0. Reste à étudier la continuité en 0. Mais

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0)$$

donc f est continue en 0.

Correction de l'exercice 1928 ▲

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x=0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

   $$|f(x)|=|\sin x||\sin 1/x|\leq|\sin x|.$$

   Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0)=0$, nous obtenons une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui est continue.

2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. Il faut remarquer que g est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $k(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$: en effet $g(x)=\frac{k(x)-k(0)}{x-0}$. Donc si k est dérivable en 0 alors la limite de g en 0 est égale à la valeur de k' en 0.

   Or la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ donc $k'(0)=0$. Bilan : en posant $g(0)=0$ nous obtenons une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. h est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

   $$h(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{(1+x)}.$$

   Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1)=-\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuement, car en -1, h n'admet de limite finie.

Correction de l'exercice 1931 ▲

Fixons $x\in\mathbb{R}$ et soit $y=x/2$, comme $f(y)=f(2y)$ nous obtenons $f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Puis en prenant $y=\frac{1}{4}x$, nous obtenons $f(\frac{1}{4}x)=f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Par une récurrence facile nous avons

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f(\frac{1}{2^n}x)=f(x).$$

Notons (u_n) la suite définie par $u_n=\frac{1}{2^n}x$ alors $u_n\to0$ quand $n\to+\infty$. Par la continuité de f en 0 nous savons alors que : $f(u_n)\to f(0)$ quand $n\to+\infty$. Mais $f(u_n)=f(\frac{1}{2^n}x)=f(x)$, donc $(f(u_n))_n$ est une suite constante égale à $f(x)$, et donc la limite de cette suite est

$f(x)$! Donc $f(x) = f(0)$. Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous venons de montrer que f est une fonction constante.

Correction de l'exercice 1941 ▲

Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée" :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n}, et donc $f(x)$, tendent vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n-m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n-m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n-m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction de l'exercice 1944 ▲

1. Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+np) = f(x).$$
Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$. Supposons, par l'absurde, que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \to +\infty$ alors $f(x_n) \to \ell$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n) : $y_n \to +\infty$ donc $f(y_n) \to \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons
$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
F est un ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F, alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leq y_0 \leq \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :
$$\forall x \geq x_0 \qquad f(x) \geq f(x_0) = y_0 \geq \ell - \varepsilon.$$
De plus par la définition de ℓ :
$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \leq \ell.$$
Les deux propriétés précédentes s'écrivent :
$$\forall x \geq x_0 \qquad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell.$$
Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ.

Correction de l'exercice 1948 ▲

1. $\frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\frac{|x|}{x}$. Si $x>0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x=0$ est $+2$. Si $x<0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x=0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x=0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\frac{|x|}{x}=x-2$ pour $x<0$. Donc la limite quand $x\to-\infty$ est $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x\to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=1-\cos x$. Lorsque $x\to\pi$ la limite est donc 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=\frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. Lorsque $x\to 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\times\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Lorsque $x\to+\infty$, la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité $a^3-1=(a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a=\sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :
$$\frac{a-1}{x^2}=\frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)}=\frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)}=\frac{1}{1+a+a^2}.$$
Lors que $x\to 0$, alors $a\to 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.
Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$
Pour la fonction $f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a=0$:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{3}.$$
8. $\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+\cdots+x^n$. Donc si $x\to 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$ et $a=1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1)=n$.

Correction de l'exercice 1955 ▲

1. $-\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $\frac{3}{2}$
6. $-\infty$
7. 0
8. 0
9. 0
10. 0
11. -2
12. $-\infty$
13. 1
14. e^4
15. 1
16. e
17. e
18. 0
19. 0

20. 0

Correction de l'exercice 1960 ▲

1. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$$
en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x)=x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1})(x-\alpha)=x^k-\alpha^k$. Donc la limite en $x=\alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}=\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\times\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$
Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\alpha.$$
2. La fonction $f(x)=\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$ s'écrit aussi $f(x)=\frac{1-\cos x}{\cos x(\cos 2x-\cos x)}$. Or $\cos 2x=2\cos^2x-1$. Posons $u=\cos x$, alors
$$f(x)=\frac{1-u}{u(2u^2-u-1)}=\frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)}=\frac{1}{u(-1-2u)}$$
Lorsque x tend vers 0, $u=\cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.
3.
$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}&=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}\end{aligned}$$
Quand $x\to+\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ et $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}\to 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. La fonction s'écrit
$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}=\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$
Notons $g(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée
$$g(x)=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$
Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x\to\alpha^+$. Et maintenant $f(x)=\frac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.
5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1<E(y)\leq y$. Donc pour $y>0$, $\frac{y-1}{y}<\frac{E(y)}{y}\leq 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$. En posant $y=1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x})=\frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.
6.
$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{1}{x+3}.$$
La limite de $\frac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\frac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x\mapsto e^x$ en la valeur $x=2$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. Soit $f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \geq 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \frac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.
$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x}.$$
Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta > 0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Correction de l'exercice 1966 ▲

Réponse : $\frac{2}{3}$

Correction de l'exercice 1967 ▲

1. Comme $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq +1$ alors $1 \leq 2+\sin\frac{1}{x} \leq +3$. Donc pour $x > 0$, nous obtenons $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} \leq x$. On obtient une inégalité similaire pour $x < 0$. Cela implique $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} = 0$.
2. Sachant que $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ lorsque $t \to 0$, on peut le reformuler ainsi $\ln(1+t) = t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$. Donc $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x}\mu(e^{-x})$. Maintenant
$$\begin{aligned}(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^{-x}\mu(e^{-x})\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(-x+\ln\mu(e^{-x})\right)\right)\\ &= \exp\left(-1+\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x}\right)\end{aligned}$$
$\mu(e^{-x}) \to 1$ donc $\ln\mu(e^{-x}) \to 0$, donc $\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
Bilan : la limite est $\exp(-1) = \frac{1}{e}$.
3.
4. Sachant $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$, on reformule ceci en $e^x - 1 = x\cdot\mu(x)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$. Cela donne $\ln(e^x-1) = \ln(x\cdot\mu(x)) = \ln x + \ln\mu(x)$.
$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} &= \exp\left(\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln x+\ln\mu(x)}\ln x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right)\end{aligned}$$
Maintenant $\mu(x) \to 1$ donc $\ln\mu(x) \to 0$, et $\ln x \to -\infty$ lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{\ln\mu(x)}{\ln x} \to 0$. Cela donne
$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Correction de l'exercice 1968 ▲

Réponse : 1.

Correction de **l'exercice 1969 ▲**

Supposons $a \geq b$. Alors
$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or $0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$, donc $0 \leq (\frac{b}{a})^x \leq 1$ pour tout $x \geq 1$. Donc $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leq 1^{\frac{1}{x}}$. Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers 1. Conclusion : si $a \geq b$ alors $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a$. Si $b \geq a$ alors cette limite vaudrait b. Cela se résume dans le cas général où a,b sont quelconques par $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a,b)$.

Correction de **l'exercice 1970 ▲**

Soit
$$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$$

$a^x \to 1$, $b^x \to 1$ donc $\frac{a^x+b^x}{2} \to 1$ lorsque $x \to 0$ et nous sommes face à une forme indéterminée. Nous savons que $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Autrement dit il existe un fonction μ telle que $\ln(1+t) = t\cdot\mu(t)$ avec $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.
Appliquons cela à $g(x) = \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$. Alors
$$g(x) = \ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\mu(x)$$

où $\mu(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$. (Nous écrivons pour simplifier $\mu(x)$ au lieu de $\mu(\frac{a^x+b^x}{2}-1)$.)

Nous savons aussi que $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$. Autrement dit il existe un fonction ν telle que $e^t - 1 = t\cdot\nu(t)$ avec $\nu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.
Appliquons ceci :

$$\begin{aligned}
\frac{a^x+b^x}{2} - 1 &= \frac{1}{2}(e^{x\ln a}+e^{x\ln b}) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(e^{x\ln a}-1+e^{x\ln b}-1) \\
&= \frac{1}{2}(x\ln a\cdot\nu(x\ln a)+x\ln b\cdot\nu(x\ln b)) \\
&= \frac{1}{2}x(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b))
\end{aligned}$$

Reste à rassembler tous les éléments du puzzle :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}g(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\mu(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot x(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b))\cdot\mu(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b))\cdot\mu(x)\right)
\end{aligned}$$

Or $\mu(x) \to 1$, $\nu(x\ln a) \to 1$, $\nu(x\ln b) \to 1$ lorsque $x \to 0$. Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right) = \sqrt{ab}.$$

Correction de l'exercice 1972 ▲

Pour $x > 0$, $(x^x)^x = e^{x\ln(x^x)} = e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x > 0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x)).$$

Or, $x^2 - x^x = -x^x(1 - x^{2-x}) = -e^{x\ln x}(1 - e^{(2-x)\ln x})$. Quand x tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1 - e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis $x^2 - x^x$ tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2 - x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x))$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.}$$

Correction de l'exercice 1973 ▲

(a) Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x)\times(5-2x) \geq 0$, soit $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$.

(b) Il faut $x^2 - 2x - 5 \geq 0$, soit $x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$.

(c) Il faut $4x + 3 > 0$ soit $x > -\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

Correction de l'exercice 1977 ▲

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1, 1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant) et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geq 1$. Conclusion :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Correction de l'exercice 1989 ▲

$\alpha = \inf(A) \Rightarrow f(\alpha^+) \leq \alpha$ et $f(\alpha^-) \geq \alpha$.

Correction de l'exercice 1990 ▲

Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f(b) < f(a)$. On note $E = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < f(a)\}$ et $c = \inf(E)$. On a $c \in E$ et $c > a$ par hypothèse et donc $f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) \geq f(a)$, absurde.

Correction de l'exercice 1991 ▲

Injectivité évidente.

Monotonie : pour $a < b < c$ on a $|a-b| < |a-c|$ et $|c-b| < |c-a|$ d'où les mêmes inégalités pour $f(a), f(b), f(c)$ ce qui prouve que $f(b)$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.

Continuité : soit $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $x = a - \delta$, $y = a + \delta$ et $z = a - 4\delta$. On a $2\delta = |x-y| < |x-z| = 3\delta$ donc $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$ et en faisant tendre δ vers 0^+ : $|f(a^-) - f(a^+)| \leq |f(a^-) - f(a^-)| = 0$.

Affine : soient $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $z = x + h$ et $x - h < y < x$. On a $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(x+h)|$ d'où en faisant tendre y vers $(x-h)^+$: $|f(x) - f(x-h)| \leq |f(x) - f(x+h)|$. On obtient l'inégalité inverse en permutant y et z, donc $f(x-h)$ et $f(x+h)$ sont équidistants de $f(x)$ et, par injectivité de f : $f(x) = \frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$ ce qui permet de conclure avec la continuité de f.

Correction de l'exercice 1994 ▲

(a) Étudier les logs.
(b) Idem.

Correction de l'exercice 1995 ▲

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{(1+ax)\ln(1+ax)} - \frac{b}{(1+bx)\ln(1+bx)}$.
Pour $x \geq 0$ fixé, la fonction $t \longmapsto \frac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 1998 ▲

(a) Oui ssi $|a| > |b|$.
(b) Oui ssi $|a| < |b|$.

Correction de l'exercice 1999 ▲

$= \frac{\operatorname{ch}(nx/2)\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$.

Correction de l'exercice 2000 ▲

$x = -\frac{2}{3}a$.

Correction de l'exercice 2001 ▲

$2\coth 2x - \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 2002 ▲

$\coth\frac{x}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 2004 ▲

Poser $X = e^x$, $Y = e^y$: $\Rightarrow \begin{cases} X+Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b}. \end{cases}$ Il y a des solutions si et seulement si $a \geq \sqrt{b^2+4}$.

Correction de l'exercice 2006 ▲

$= x + \ln\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2007 ▲

$x = \frac{5}{4}$.

Correction de l'exercice 2008 ▲

(a) $F(x) = \operatorname{Argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.
(b) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2x-1}{\sqrt{5}+2x+1}\right|$.

Correction de l'exercice 2009 ▲

(a) Étude de $x \mapsto \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_p}{a}\right)^x$.
(b) $x_a > x_b$.
(c) $x_a \to \ell$. Si $\ell > 0$, $a^{a_a} \to +\infty$, mais $a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a} \to a_1^\ell + \cdots + a_p^\ell$.
Donc $\ell = 0$, et $x_a \ln a \to \ln p$.

Correction de l'exercice 2010 ▲

(a) Pour $x=1$ on a $f\circ f(y)=yf(1)$ donc f est injective et pour $y=1$: $f(xf(1))=f(x)$ d'où $f(1)=1$.

(b) $f(xy)=f(xf(f(y)))=f(y)f(x)$.
Pour $0<x<1$ on a $f(x^n)=f(x)^n\to+\infty$ (lorsque $n\to\infty$) donc $f(x)>1$ ce qui entraîne par morphisme la décroissance de f. Enfin f est monotone et $f(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ donc f n'a pas de saut et est continue.

(c) En tant que morphisme continu, f est de la forme $x\mapsto x^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et l'involutivité et la décroissance donnent $\alpha=-1$.

Correction de l'exercice 2011 ▲

(a) $4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=2 \iff \theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(\operatorname{mod}2\pi)$.

(b) $\sin\theta+\cdots+\sin4\theta=2\sin\theta\cos\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=4\sin(5\theta/2)\cos\theta\cos(\theta/2)$
$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0 \iff \cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos(2\pi/5)$ ou $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin(2\pi/5)$
$\Rightarrow$ modulo 2π, $\theta\in\{0,\pi,\pi/2,3\pi/2,2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5\}$.

(c) $\cos\theta\in\left\{-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \iff \theta\equiv\pm\frac{2\pi}{3}(\operatorname{mod}2\pi)$ ou $\theta\equiv\frac{\pi}{4}(\operatorname{mod}\frac{\pi}{2})$.

(d) $2\sin(3\theta/2)\sin(\theta/2)=2\sin(3\theta/2)\cos(3\theta/2) \iff \theta\equiv0(\operatorname{mod}\frac{2\pi}{3})$ ou $\theta\equiv\frac{\pi}{4}(\operatorname{mod}\pi)$ ou $\theta\equiv\frac{3\pi}{2}(\operatorname{mod}2\pi)$.

(e) $2\cos4\theta\cos3\theta=\cos4\theta \iff \theta\equiv\frac{\pi}{8}(\operatorname{mod}\frac{\pi}{4})$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{9}(\operatorname{mod}\frac{2\pi}{3})$.

(f) $2\cos7\theta\cos5\theta=\sqrt{3}\cos5\theta \iff \theta\equiv\frac{\pi}{10}(\operatorname{mod}\frac{\pi}{5})$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{42}(\operatorname{mod}\frac{2\pi}{7})$.

(g) $\theta\equiv0\operatorname{mod}\frac{\pi}{3}$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{12}(\operatorname{mod}\frac{\pi}{2})$.

(h) $\cos^3\theta\sin3\theta+\cos3\theta\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin4\theta\Rightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{8}(\operatorname{mod}\frac{\pi}{2})$.

(i) $\theta\equiv0(\operatorname{mod}\frac{\pi}{8})$.

(j) $\sin\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{6}(\operatorname{mod}2\pi)$ ou $\theta\equiv\frac{5\pi}{6}(\operatorname{mod}2\pi)$.

(k) $\theta\equiv0,\pm\arctan\sqrt{5}(\operatorname{mod}\pi)$.

(l) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)$.
$\cos\theta+\sin\theta=0 \iff \theta\equiv-\frac{\pi}{4}(\operatorname{mod}\pi)$.
$$\cos\theta-\sin\theta=\cos\theta\sin\theta\Rightarrow(\cos\theta\sin\theta)^2+2\cos\theta\sin\theta=1\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{2}.\end{cases}$$
Les valeurs trouvées conviennent.

(m) $\tan x=\tan y=\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2012 ▲

(a) $-\frac{2\pi}{3}<\theta(\operatorname{mod}2\pi)<\frac{\pi}{3}$.

(b) $2\alpha<\theta(\operatorname{mod}2\pi)<2\pi$ avec $\begin{cases}\cos\alpha=2/\sqrt{5}\\ \sin\alpha=1/\sqrt{5}.\end{cases}$

Correction de l'exercice 2014 ▲

(a) $1-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$,
$\cos\beta+\cos\gamma=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

(b) $=1$.

Correction de l'exercice 2016 ▲

$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$.
$$S_n=\begin{cases}\frac{\tan((n+1)\theta)-\tan\theta}{\sin\theta} & \text{si } \sin\theta\neq0\\ n & \text{si } \theta\equiv0(\operatorname{mod}2\pi)\\ -n & \text{si } \theta\equiv\pi(\operatorname{mod}2\pi).\end{cases}$$

Correction de l'exercice 2017 ▲

linéariser : $\sum = \frac{1}{4}\left(3^n \sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right)$.

Correction de l'exercice 2018 ▲

$\text{cotan}x - 2\text{cotan}2x = \tan x$, $\sum = \frac{1}{2^n}\text{cotan}\frac{\alpha}{2^n} - 2\text{cotan}2\alpha$.

Correction de l'exercice 2019 ▲

$\theta = \frac{\pi}{7}$: $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin 3\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin 3\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta}$.

Correction de l'exercice 2020 ▲

(a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est paire, alors, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x),$$

et donc f' est impaire. De même, si f est impaire, pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$, et par dérivation on obtient pour tout réel x, $f'(-x) = f'(x)$. f' est donc paire.

$$\boxed{(f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire}) \text{ et } (f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire.})}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons f paire. Par suite, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Immédiatement par récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f(x).$$

Ceci montre que $f^{(n)}$ a la parité de n, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ est une fonction paire quand n est un entier pair et est une fonction impaire quand n est un entier impair. De même, si f est impaire et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n.

(c) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire et F une primitive de f. Montrons que F est paire. Pour x réel, posons $g(x) = F(x) - F(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et par suite, pour tout réel x, $g(x) = g(0) = F(0) - F(0) = 0$. Ainsi, g est la fonction nulle et donc, pour tout réel x, $F(x) = F(-x)$. On a montré que F est paire. Par contre, si f est paire, F n'est pas nécessairement impaire. Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto 1$ est paire, mais $F\ :\ x \mapsto x+1$ est une primitive de f qui n'est pas impaire.

(d) On montre aisément en dérivant une ou plusieurs fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$, que les dérivées successives d'une fonction T-périodique sont T-périodiques. Par contre, il n'en est pas de même des primitives. Par exemple, si pour tout réel x, $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, f est π-périodique, mais la fonction $F\ :\ x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$, qui est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, n'est pas π-périodique ni même périodique tout court.

Correction de l'exercice 2021 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour x réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout naturel non nul n, on a $u_n = f(n)$. f est définie sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x/x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}e^{\ln x/x}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0,e[$ et strictement négative sur $]e,+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. En particulier, pour $n \geq 3$,

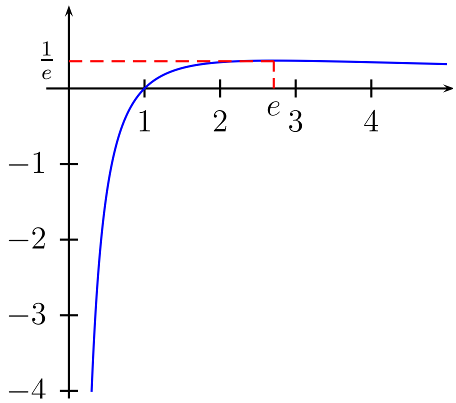
$$u_n = f(n) \leq f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$. Enfin, $\sqrt{2} = 1,41... < 1,44.. = \sqrt[3]{3}$ (on peut aussi constater que $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$). Finalement,

$$\boxed{\text{Max}\,\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} = \sqrt[3]{3} = 1,44...}$$

Correction de l'exercice 2022 ▲

(a) Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :



(b) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$. On a alors

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \ln(a^b) = \ln(b^a) \Leftrightarrow b\ln a = a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Si $a \geq 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, on a alors $f(a) > f(b)$ et en particulier, $f(a) \neq f(b)$. a n'est donc pas solution. $a = 1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b = b^a \Rightarrow 1^b = b^1 \Rightarrow b = 1 = a$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a = 2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b) = f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ a au plus une solution dans $[e,+\infty[$. Enfin, comme $2^4 = 16 = 4^2$, on a montré que : il existe un et un seul couple (a,b) d'entiers naturels non nuls tel que $a < b$ et $a^b = b^a$, à savoir $(2,4)$.

Correction de l'exercice 2023 ▲

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq \ln 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq 2 \text{ et } x+1 \neq 0\\
&\Leftrightarrow -2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} + 2 \geq 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1} - 2 \leq 0 \text{ et } x \neq -1\\
&\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1} \geq 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0 \text{ et } x \neq -1\\
&\Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty,-\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \text{ et } \left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3},+\infty\right[\right) \text{ et } x \neq -1\\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup \left]-1,-\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3},+\infty\right[
\end{aligned}$$

(b) Pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} \Leftrightarrow \ln x(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0\\
&\Leftrightarrow \ln x \times \sqrt{x}(2-\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.
\end{aligned}$$

(c) $\operatorname{Argch} 3 = \ln(3+\sqrt{3^2-1}) = \ln(3+\sqrt{8})$ et $\operatorname{Argth}\frac{7}{9} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}\right) = \ln\sqrt{8}$. Donc, $\operatorname{Argch} 3 - \operatorname{Argth}\frac{7}{9} = \ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Argsh} x = \operatorname{Argch} 3 - \operatorname{Argth}\frac{7}{9} &\Leftrightarrow x = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)}{4}.
\end{aligned}$$

(d) Pour $x \in]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1\right\}$,

$$\begin{aligned}
\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10)=0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x}+2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)}+3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)}=0\\
&\Leftrightarrow \frac{(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))+2\ln x(\ln x+2\ln(10))+3\ln x(\ln x+\ln(10))}{\ln x(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))}=0\\
&\Leftrightarrow 6\ln^2 x+10\ln(10)\times\ln x+2\ln^2(10)=0\\
&\Leftrightarrow \ln x\in\left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6},\frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}\\
&\Leftrightarrow x\in\left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6},10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.
\end{aligned}$$

Comme aucun de ces deux nombres n'est dans $\left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1\right\}$, $\mathscr{S}=\left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6},10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}$.

(e) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1)=3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)\Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1}=4\times 3^{x-\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-3}=3^{x-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow (2x-3)\ln 2=\left(x-\frac{3}{2}\right)\ln 3\\
&\Leftrightarrow x=\frac{3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2-\ln 3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

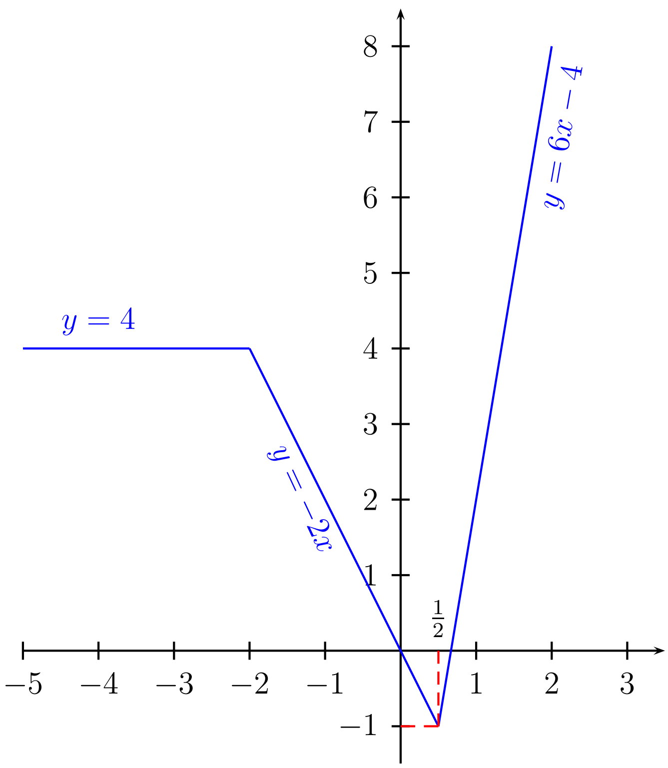
Correction de l'exercice 2024 ▲

On notera $\mathscr{C}_i$ le graphe de f_i.

(a) f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$1/2$	$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$

On en déduit $\mathscr{C}_1$.



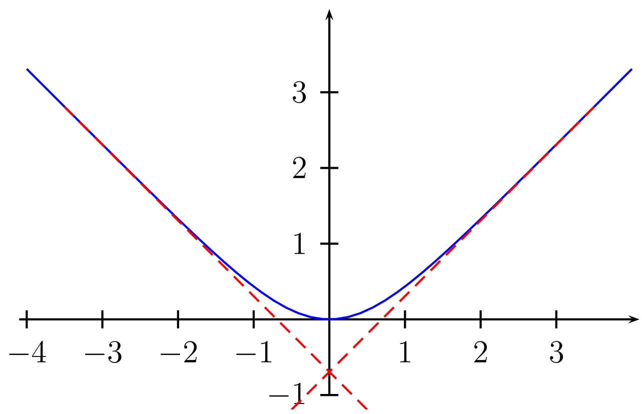
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch} x \geq 1$ et donc $f_2(x)$ existe et $f_2(x) \geq 0$. f_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Puisque la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. f_2 est paire et donc f_2' est impaire. Par suite, $f_2'(0) = 0$ et $\mathscr{C}_2$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f_2(0)) = (0,0)$. **Etude en** $+\infty$. Pour $x \geq 0$,

$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})) = \ln(e^x + e^{-x}\right) - \ln 2 = \ln(e^x(1+e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1+e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}(f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite (Oy), la droite (D') d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $-\infty$. Enfin, pour tout réel x,

$$f_2(x) - (x - \ln 2) = \ln(1+e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\mathscr{C}_2$.



(c) f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. **Etude en** $-\infty$. Soit $x \leq -1$.

$$f_3(x) = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $x - \sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$. **Etude en** $+\infty$. Immédiatement, $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x \geq 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$f_3(x) - 2x = -x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(f_3(x) - 2x) = 0$ et donc que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_3$ en $+\infty$. **Etude en** 1. Pour $x > 1$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)} = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim_{x\to1,\, x>1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to1,\, x<1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. On en déduit que f_3 n'est pas dérivable en 1, mais que $\mathscr{C}_3$ admet deux demi-tangentes parallèles à (Oy) au point de $\mathscr{C}_3$ d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en -1. **Etude des variations de $\mathbf{f_3}$**. Pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x > 1$, on a $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ et donc, $f_3'(x) > 0$. Si $x < -1$, on a

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

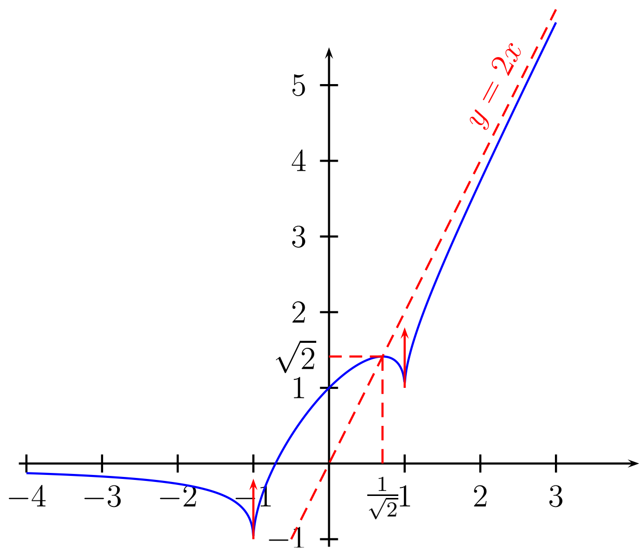
et donc, $x+\sqrt{x^2-1}<0$ puis $f_3'(x)<0$. Ainsi, f_3 est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Pour $x\in]-1,1[$, $f_3(x)=x+\sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x\in]-1,0]$, on a clairement $f_3'(x)>0$. Si x$\in[0,1[$, par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\operatorname{sgn}(f_3'(x))=\operatorname{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x)=\operatorname{sgn}((-x^2+1)-x^2)=\operatorname{sgn}(1-2x^2)=\operatorname{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}))=\operatorname{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}}-x).$$

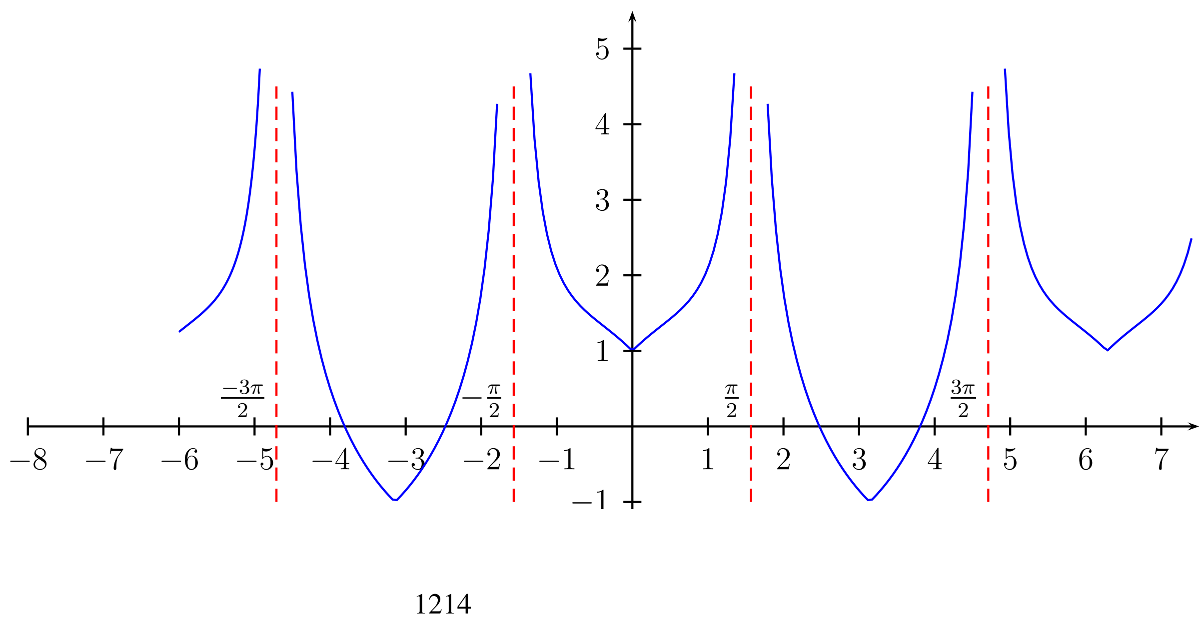
Donc, f_3' est strictement positive sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En résumé, f_3' est strictement négative sur $]-\infty,-1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1,+\infty[$. f_3 est donc strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1,+\infty[$. On en déduit $\mathscr{C}_3$.



(d) f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, 2π-périodique et paire. On étudie donc f_4 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$. **Etude des variations de $\mathbf{f_4}$**. Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x)=\tan x+\cos x$ et donc,

$$f_4'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\geq 1-1=0,$$

avec égalité si et seulement si $\sin x=\cos^2 x=1$ ce qui est impossible. Donc, f_4' est strictement positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et f_4 est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $f_4(x)=-\tan x+\cos x$ et f_4 est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$. On a immédiatement $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f_4(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} f_4(x)=+\infty$. On en déduit $\mathscr{C}_4$.



(e) Soit $x > 0$. x n'est pas nul donc $\frac{1}{x}$ existe puis $1+\frac{1}{x} > 0$ et $f_6(x)$ existe. **Etude en 0**. Pour $x > 0$, $x\ln(1+\frac{1}{x}) = -x\ln x + x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln(1+\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_5(x) = \exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))$ tend vers 1. Posons encore $f_5(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f_5 en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))-1\right) = \frac{\exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = +\infty.$$

Ainsi, f_5 n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_5$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f_5(0)) = (0,1)$. **Etude en** $+\infty$. Pour $x > 0$, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = e.$$

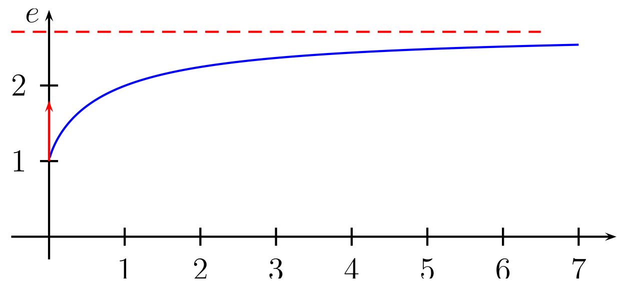
Etude des variations de $\mathbf{f_5}$. Pour $x > 0$, $f_5(x) > 0$ puis $\ln(f_5(x)) = x\ln(1+\frac{1}{x})$. Par suite, pour $x > 0$,

$$f_5'(x) = f_5(x)\ln(f_5)'(x) = f_5(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right) = f_5(x)g(x),$$

où $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$. Sur $]0,+\infty[$, f_5' est du signe de g. Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0,+\infty[$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5'. f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty($. On en déduit $\mathscr{C}_5$.



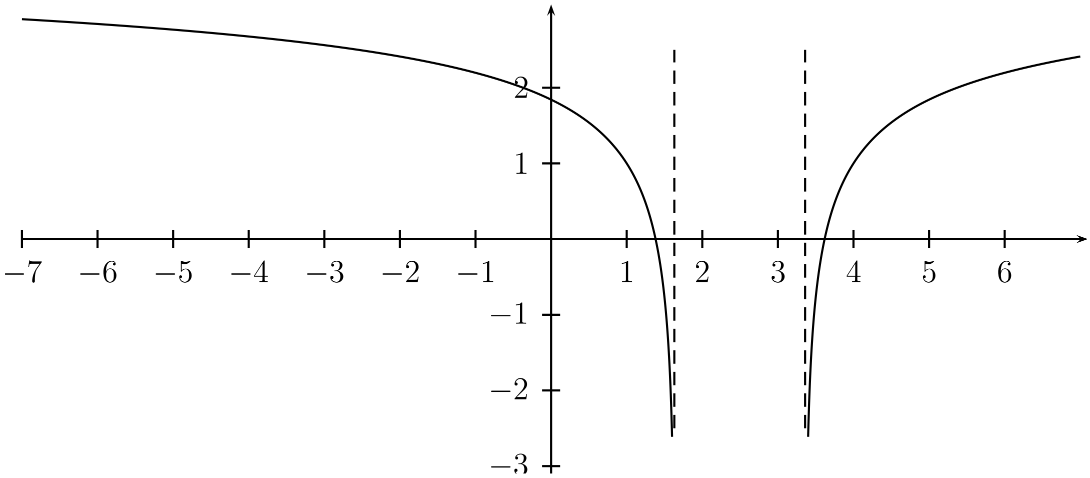
(f) **Domaine de définition de $\mathbf{f_6}$**. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f_6(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow x^2-5x+6 > 0 \text{ et } 1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6) > 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 > 0 \text{ et } \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}} < 1\\
&\Leftrightarrow x^2-5x+6 > 0 \text{ et } \ln(x^2-5x+6) > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6 > \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty[= \mathscr{D}_f.
\end{aligned}$$

Variations de $\mathbf{f_6}$. La fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$, la fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme néperien est strictement croissante. La fonction $x \mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_6 est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$. **Axe de symétrie** Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow \frac{5}{2}-x \in \mathscr{D}_f$ et de plus, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}-x\right) + 6 = x^2-5x+6$. Par suite,

$$\forall x \in D,\ f_6(\frac{5}{2}-x) = f_6(x).$$

$\mathscr{C}_6$ admet donc la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.
Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit $\mathscr{C}_6$.



Correction de l'exercice 2025 ▲

On a $0 \leq f(0) \leq 1$ et $0 \leq f(1) \leq 1$. Donc $|f(1) - f(0)| \leq 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1) - f(0)| \geq 1$. Par suite, $|f(1) - f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) \in \{(0,1), (1,0)\}$.
Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$.
Soit $x \in [0,1]$. On a $|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|$ ce qui fournit $f(x) \geq x$. On a aussi $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$ ce qui fournit $1 - f(x) \geq 1 - x$ et donc $f(x) \leq x$. Finalement, $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$ et $f = Id$.
Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0,1]$, $g(x) = 1 - f(x)$. Alors, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$. Enfin,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| \geq |y - x|.$$

D'après l'étude du premier cas, $g = Id$ et donc $f = 1 - Id$. Réciproquement, Id et $1 - Id$ sont bien bien solutions du problème.

Correction de l'exercice 2026 ▲

(a) f_1 est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, f_1 est paire. On étudiera f_1 sur $[0,+\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).
Etude en 0 (à gauche et à droite).

$$\begin{aligned} f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x(1 - x^2 + x^4 + o(x^4))] \\ &= (1+x^2)(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + o(x^5)) = (1+x^2)(\frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + o(x^2)) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2x^2}{15} + o(x^2). \end{aligned}$$

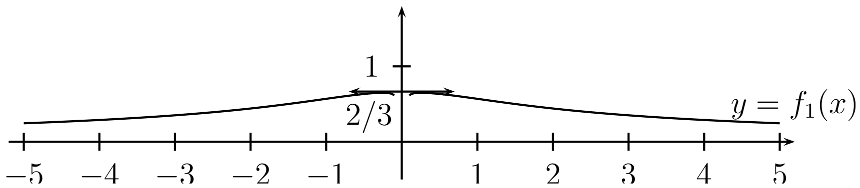
Par suite, f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = \frac{2}{3}$. Puisque f_1 admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$. C_1 admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y = \frac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x) - \frac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.
Etude en $+\infty$ (et $-\infty$). $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et de même $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.
Dérivée, variations.
Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^2})(\operatorname{Arctan} x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2})\\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}(\operatorname{Arctan} x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\operatorname{Arctan} x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)})\\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\operatorname{Arctan} x+\frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2))}=\frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}$$

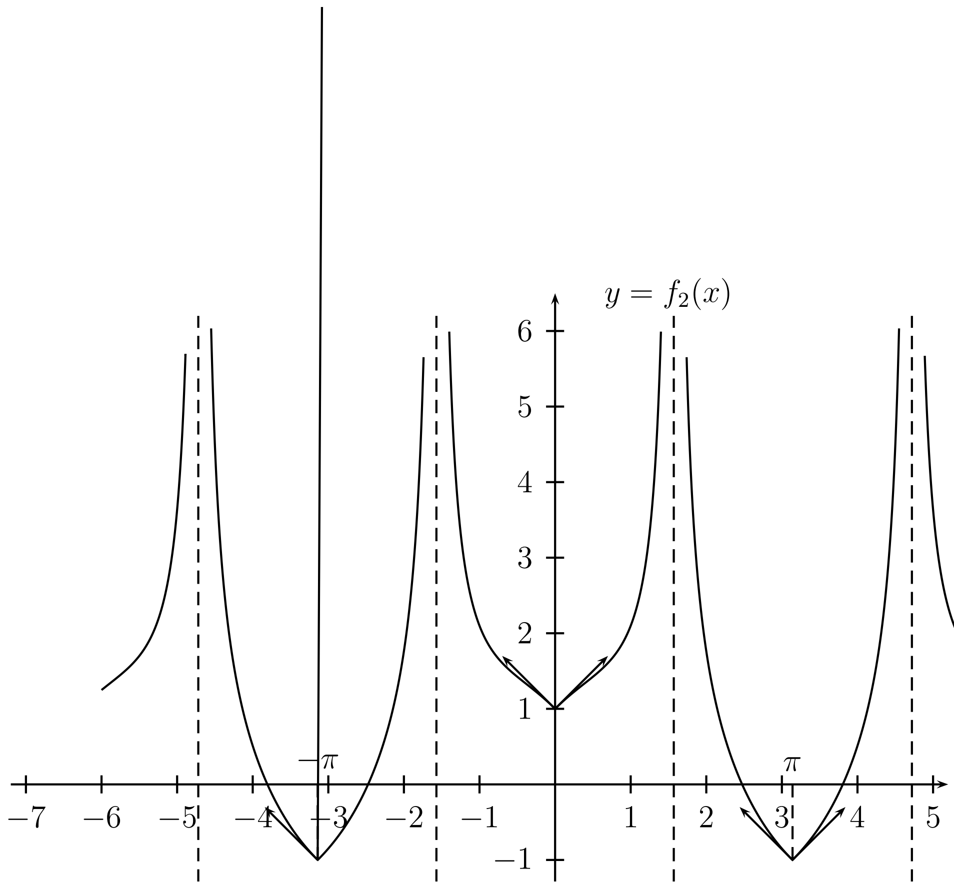
où, pour tout réel x, $g(x)=-\operatorname{Arctan} x+\frac{3x}{3+x^2}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$g'(x)=3\frac{(3+x^2)-2x^2}{(3+x^2)^2}-\frac{1+x^2}{=}\frac{3(3-x^2)(1+x^2)-(3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2}=\frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.$$

g' est donc strictement négative sur $]0,+\infty[$ et par suite, g est donc strictement décroisante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0)=0$, pour $x>0$, $g(x)<0$. Finalement, f_1' est strictement négative sur $]0,+\infty[$ et f_1 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
Le tableau de variations de f_1 n'apporte rien de plus.
Graphe



(b) f_2 est définie sur $D=\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$, paire et 2π-périodique. f_2 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_2 sur $[0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$.
Etude en $\frac{\pi}{2}$.
$f(x)\underset{x\to\pi/2}{\sim}|\tan x|$ et donc, $\lim_{x\to\pi/2}f(x)=+\infty$. C_2 admet la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.
Dérivabilité et dérivée.
f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x)=\varepsilon\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x$ où ε est le signe de $\tan x$.
f_2 est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0)=1$. Par symétrie, f_2 est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)'_g(0)=-1$. f_2 n'est pas dérivable en 0.
De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_2)'_g(\pi)=-1$ et $(f_2)'_d(\pi)=1$, et n'est donc pas dérivable en π.
Variations.
f_2 est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$. Puis, pour x élément de $]0,\frac{\pi}{2}[$, $f_2'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x>1-1=0$. f_2' est strictement positive sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et donc f_2 est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.
Graphe.



(c) Pour x réel, posons $P(x) = x^3+12x^2+60x+120$. Pour tout réel x, on a $P'(x) = 3(x^2+8x+20) = 3((x+4)^2+4) > 0$. P est une fonction polynôme de degré 3 strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une et une seule fois en un certain réel noté α. De plus, $P(-5)P(-4) < 0$ et $\alpha \in]-5,-4[$.
Enfin, P est strictement négatif sur $]-\infty,\alpha[$ et strictement positif sur $]\alpha,+\infty[$.
f_3 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$, et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$,

$$f_3(x) = x - \ln\left|\frac{P(x)}{P(-x)}\right| = x - \ln|P(x)| + \ln|P(-x)|.$$

Notons que f_3 est impaire.
Dérivabilité et dérivée.
f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$,

$$f_3'(x) = 1 - \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P'(-x)}{P(-x)} = \frac{P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)& \\
&= ((12x^2+120)+(x^3+60x))((12x^2+120)-(x^3+60x)) \\
&\quad -3((x^2+20)+8x)((12x^2+120)-(x^3+60x))) - 3((x^2+20)-8x))((12x^2+120)+(x^3+60x)) \\
&= 144(x^2+10)^2 - x^2(x^2+60)^2 - 6((x^2+20)(12x^2+120) - (8x)(x^3+60x)) \\
&= (-x^6+24x^4-720x^2+14400) - 6(4x^4-120x^2+2400) = -x^6,
\end{aligned}$$

et donc $f_3'(x) = \frac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.
Etude en $+\infty$.

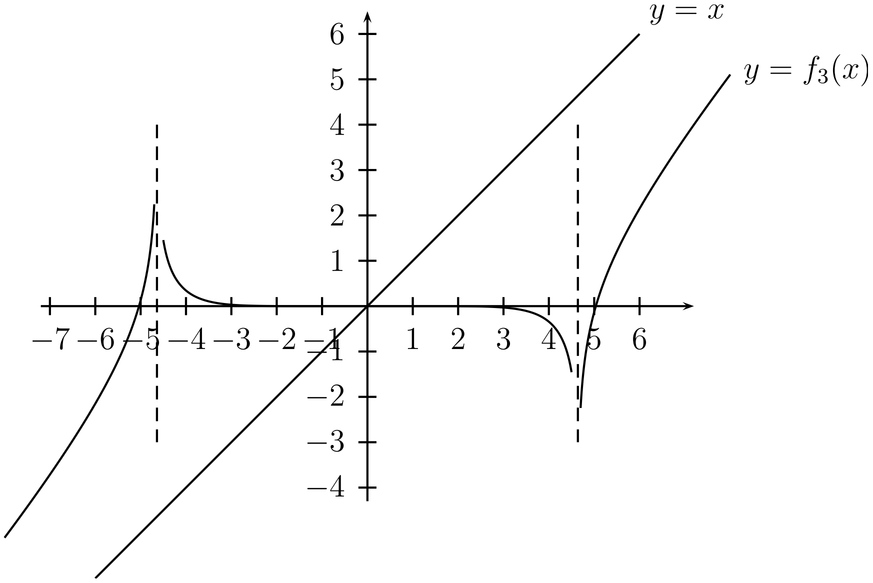
$$f_3(x) - x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln(1+\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) + \ln(1-\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) = -\frac{24}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

On en déduit tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ (resp.$\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$, puis que C_3 admet en $+\infty$ (resp.$-\infty$) la droite d'équation $y = x$ pour droite asymptote et que C_3 est au-dessous (resp. au-dessus) de cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$).

Variations.
D'une part, $f_3'(0) = 0$. D'autre part, pour $x > 0$, $P(x) > 0$. f_3' est donc du signe de $-P(-x)$ sur $]0,+\infty[\setminus\{\alpha\}$. Ainsi, f_3' est strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$.
On en déduit le tableau de variations de f_3.

x	0		α		$+\infty$
$f_3'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_3	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



(d) f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$f_4(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}} = \frac{1}{x}e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f_4(x)}.$$

Ce genre de constatation peut servir à calculer $\lim_{x\to+\infty} f_4(x)$ si l'on connait $\lim_{x\to 0,\, x>0} f_4(x)$, obtenir les variations de f_4 sur $]0,1[$ si on les connait sur $]1,+\infty[$ ...
On peut aussi noter que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_4(-x)f_4(x) = -x^2$ et donc, pour $x \neq 0$, $f_4(-x) = \frac{-x^2}{f_4(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de f_4 en -1 de l'étude en 1.
Etude en $+\infty$ et $-\infty$.
Puisque $\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, on a $f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$ ce qui montre déjà que $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = -\infty$ et que C_4 admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y = x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{2}{x}(1-\frac{1}{x^2})^{-1} = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x^2}),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + (\frac{2}{x}) + (\frac{2}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2}) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

On en déduit que

$$f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x + 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}).$$

Par suite, C_4 admet la droite d'équation $y = x+2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f_4(x) - (x+2)$ étant localement le signe de $\frac{2}{x}$, C_4 est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.
Etude en 1 (et -1).
Clairement, $\lim_{x\to 1,\, x>1} f_4(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1,\, x>-1} f_4(x) = -\infty$. Ensuite, $\lim_{x\to 1,\, x<1} f_4(x) = 0$ et $\lim_{x\to -1,\, x<-1} f_4(x) = 0$.
On prolonge f_4 par continuité à gauche en 1 en posant $f_4(1) = 0$, et de même en -1 et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté f_4.

f_4 est continue sur $]-1,1]$, de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ (voir dérivée-variations),

$$f_4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to 1,\, x<1}{\to} 0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, f_4 est de classe C^1 sur $]-1,1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1) = 0$.
De même, f_4 est dérivable à gauche en -1 et $f_g'(-1) = 0$. C_4 admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe (Ox).

Dérivée. Variations.

f_4 est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} &= (\ln|f_4|)'(x) = (\ln|x| + \frac{2x}{x^2-1})'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)^2 - 2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \neq 0,\ f4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

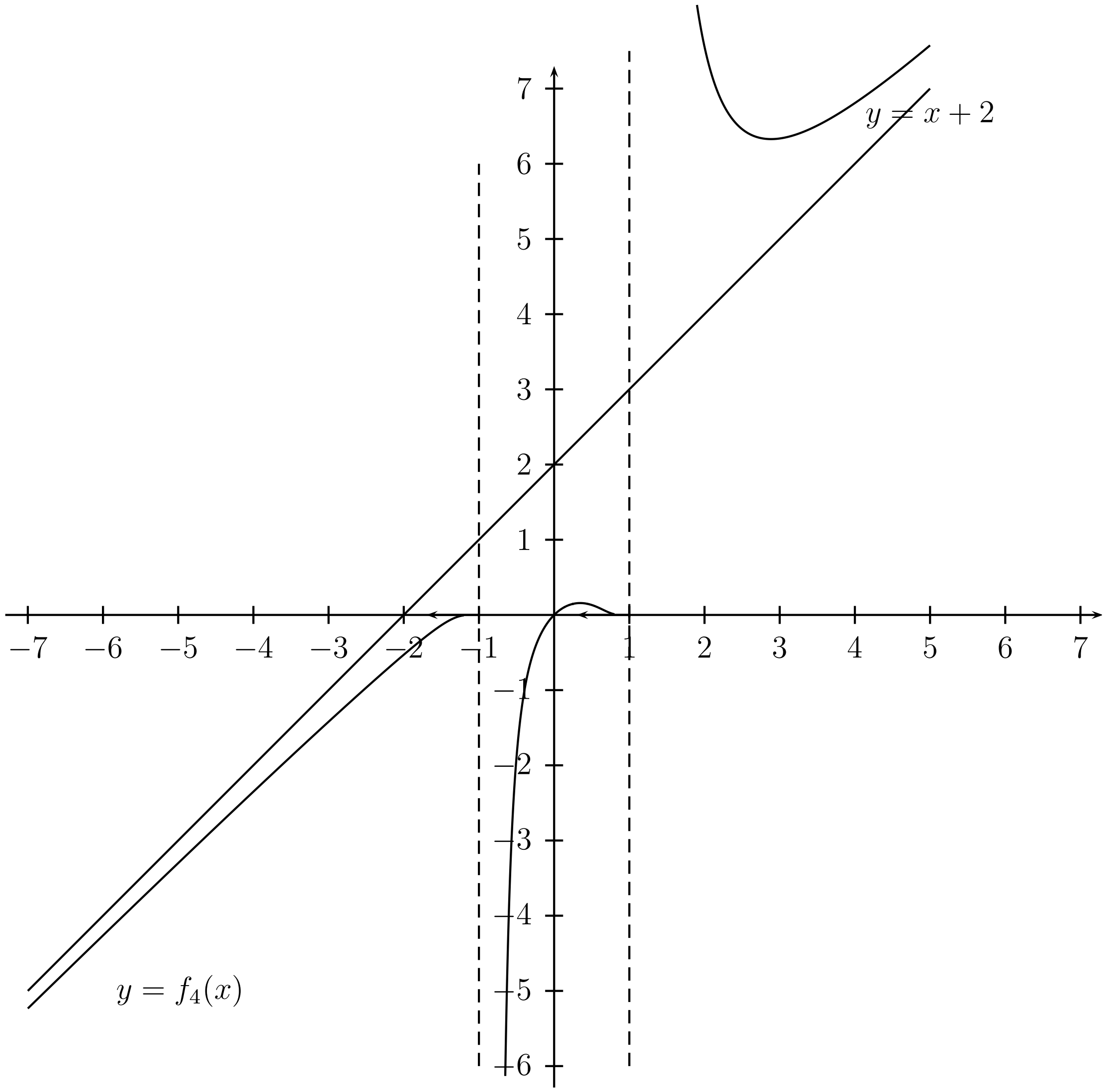
ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de f_4' en 0.
f_4' est donc du signe de $P(x) = x^4-2x^3-2x^2-2x+1$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2((x^2+\frac{1}{x^2}) - 2(x+\frac{1}{x}) - 2) = x^2((x+\frac{1}{x})^2 - 2(x+\frac{1}{x}) - 4) = \\ &= x^2(x+\frac{1}{x} - (1-\sqrt{5})(x+\frac{1}{x} - (1+\sqrt{5})) = (x^2-(1-\sqrt{5})x+1)(x^2-(1+\sqrt{5})x+1),\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.
Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}-1)^2 - 4 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - (1-\sqrt{5})x + 1 > 0$.
Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}+1)^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{5}})2,89... > 1$ et $\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha}0,34... \in]0,1[$. On en déduit le tableau de variation de f_4.

x	$-\infty$		-1		0	β		1		α		$+\infty$
$f_4'(x)$		$+$	$\Vert$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0		$+$
f_4	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert -\infty$	$\nearrow$		$0,15...$	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	$6,34...$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



(e) Si $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ et si $x < 0$, $e^x - 1 < 0$. Donc, pour $x \neq 0$, > 0 et f_5 est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$,

$$f_5(-x) = -\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-x}-1}{-x} = -\frac{1}{x}\ln(e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x} = 1 - f(x).$$

Donc, pour tout réel non nul x, $f(x) + f(-x) = 1$. Le point de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de C_5.

Etude en 0.

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\ln(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = \frac{1}{x}((\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}) - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x + o(x).$$

Ainsi, f_5 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0) = \frac{1}{2}$. Le prolongement, encore noté f_5, admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 avec $f_5'(0) = \frac{1}{24}$. Une équation de la tangente à C_5 en le point d'abscisse 0 est $y = \frac{1}{24}x + \frac{1}{2}$. Par symétrie, ce point est un point d'inflexion.

Etude en $+\infty$.

$$f_5(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}(\ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x}) - \ln x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 - e^{-x}}{x} = 1 + o(1).$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = 1$. Par symétrie, $\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - f_5(-x)) = 1 - 1 = 0$.

Dérivée. Variations.

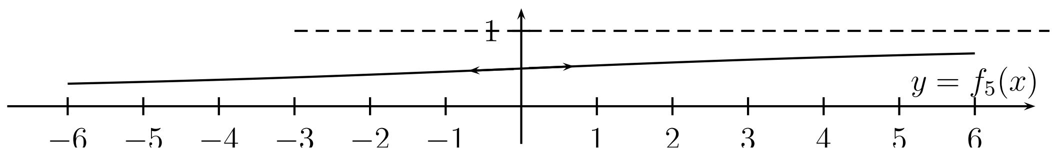
f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, (puisque $\ln\frac{e^x-1}{x} = \ln\left|\frac{e^x-1}{x}\right| = \ln|e^x - 1| - \ln|x|$),

$$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{1}{x}(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}(-\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{xe^x}{e^x-1} - 1).$$

f_5' est, sur $\mathbb{R}^*$, du signe de $g(x) = -\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{xe^x}{e^x-1} + -1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x réel non nul,

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{x}+\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^x.e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-xe^x(e^x-1)+(e^x-1)^2+xe^x(e^x-x-1)}{x(e^x-1)^2}\\ &= \frac{(e^x-1)^2-x^2e^x}{x(e^x-1)^2} = \frac{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2-x^2}{x(e^{x/2}-e^{-x/2})^2}\\ &= \frac{(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2-x^2}{x(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2} = \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}-(\frac{x}{2})^2}{x\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

L'inégalité $\mathrm{sh}x > x$, valable pour $x > 0$, est classique (par exemple, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit pour $x > 0$, $\mathrm{sh}x = x + \int_0^x (x-t)\,\mathrm{sh}t\,dt > x$.) Par suite, g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, et donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En tenant compte de $g(0^+) = 0$, g est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5' et f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Par symétrie et continuité en 0, f_5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Graphe.



(f) f_6 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux.
Etude en 1.
$f_6(x) - f_6(1) = x - 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en 1 mais que C_6 admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).
Etude en -1.
$f_6(x) - f_6(-1) = x + 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to -1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x+1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en -1 mais que C_6 admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).
Etude en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f_6(x) = x + x(1-\frac{1}{x^2})^{1/2} = x + x(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})) = 2x - \frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x}),$$

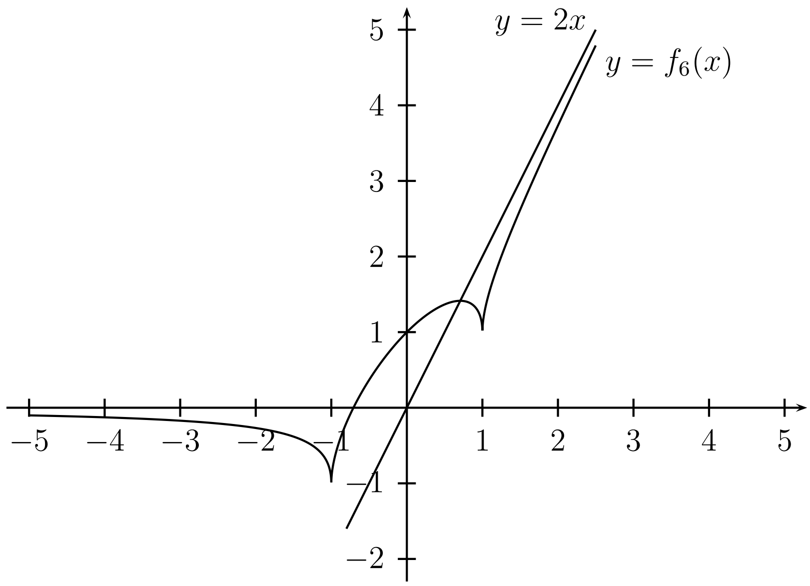
ce qui montre tout à la fois que $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$, puis que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_6 en $+\infty$ et que C_6 est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.
Etude en $-\infty$.
Au voisinage de $-\infty$, on a, $f_6(x) = x - x(1+o(\frac{1}{x})) = o(1)$, et $\lim_{x\to-\infty} f_6(x) = 0$.
Dérivée. Variations.
Soit ε le signe de x^2-1. Pour $x \neq \pm 1$,

$$f_6'(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}+\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}.$$

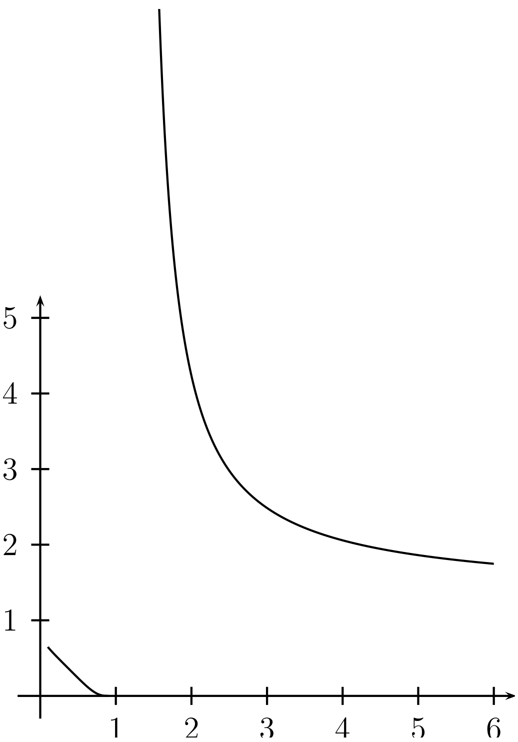
Si $-1 < x \leq 0$, (de sorte que $\varepsilon x > 0$) ou $x > 1$, $f_6'(x) > 0$.
Si $x < -1$, $\mathrm{sgn}(f_6'(x)) = \mathrm{sgn}(x+\sqrt{x^2-1}) = \mathrm{sgn}(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = -$ et $f_6'(x) < 0$.
Si $0 \leq x < 1$. $\mathrm{sgn}(f_6'(x)) = \mathrm{sgn}(-x+\sqrt{x^2-1}) = \mathrm{sgn}(-x^2-(x^2-1)) = \mathrm{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}}-x)$.
D'où le tableau de variations de f_6 :

x	$-\infty$		-1		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f_6'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_6	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$-\infty$

Graphe.



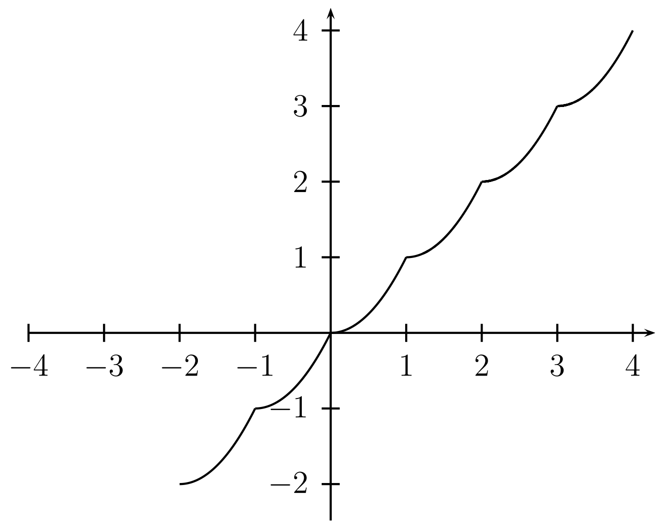
(g)



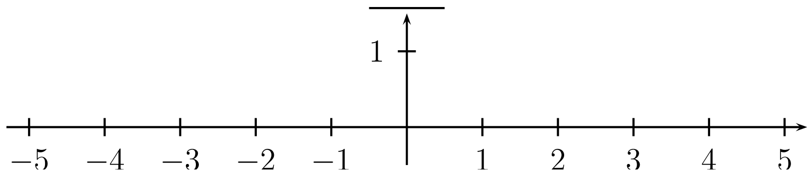
(h)

(i)

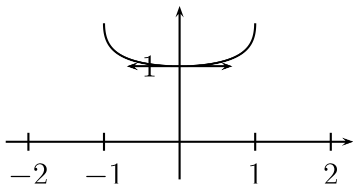
(j)



(k)



(l)



(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

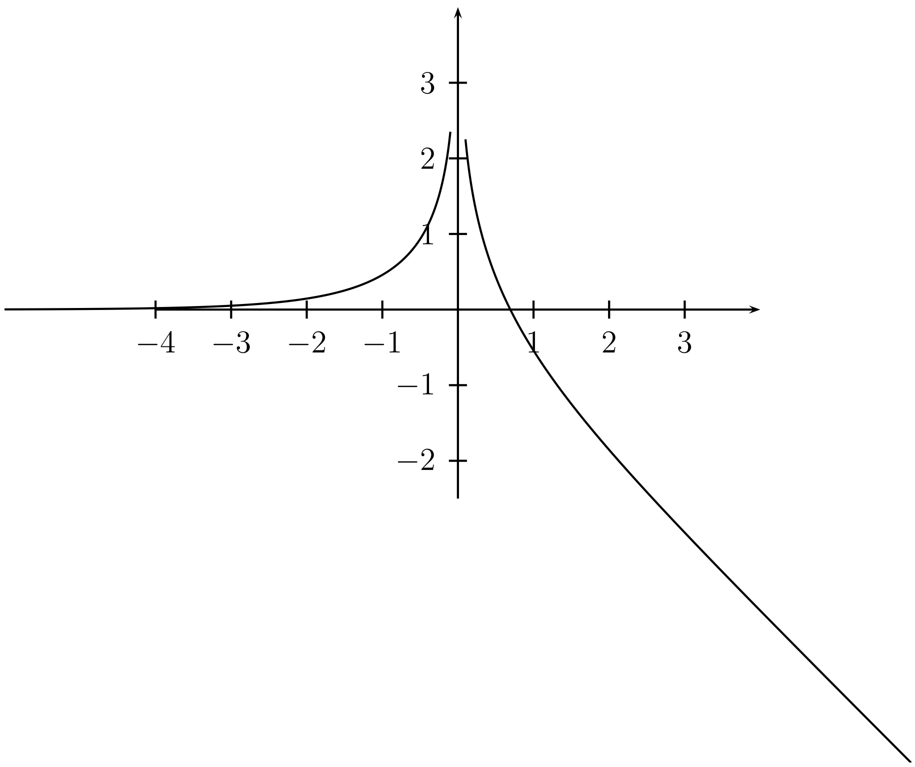
(s)

(t)

(u)

(v)

(w)



Correction de l'exercice 2035 ▲

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = -1/2.$$

Correction de l'exercice 2036 ▲

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = 0.$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)} = 1/6.$

(c) $\lim_{x\to 0} (\ln(e+x))^{x^{-1}} = e^{e^{-1}}.$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{x^{-1}} = e^{-1}.$

Correction de l'exercice 2038 ▲

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{8x^3}$

(c) $\frac{a^3}{b^3}$

(d) -1

(e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(f) $\frac{1}{2}x^2$

(g) $-\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$

(h) $\sqrt{e}$

(i) $\frac{1}{\pi}$

(j) 1

(k) x

Correction de l'exercice 2040 ▲

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

$$n!^2 = \prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\prod_{k=1}^{n}k = \prod_{k=1}^{n}k(n+1-k).$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $[0,\frac{n+1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{n+1}{2},n+1]$. Puisque $f(1) = f(n) = n$, on en déduit que pour $x \in [2,n-1]$, $f(x) > n$. Puisque $n \geq 3$, on a $n-1 \geq 2$ et on peut écrire

$$n!^2 = n^2\prod_{k=2}^{n-1}k(n+1-k) > n^2\prod_{k=2}^{n-2}n = n^n,$$

et donc,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

Correction de l'exercice 2041 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.
- C'est clair pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Alors,

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x| &= |\sin nx\cos x + \cos nx\sin x| \leq |\sin nx|.|\cos x| + |\cos nx|.|\sin x|\\ &\leq |\sin nx| + |\sin x|\\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin x|}$.

Correction de l'exercice 2042 ▲

Pour $x \in [a,b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a,b]$ puisque f l'est. De plus, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ ou encore, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2043 ▲

Puisque $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell \in [0,1[$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$. Mais alors, $f(A) < A$ (et $f(0) \geq 0$) ce qui ramène à la situation de l'exercice 2042 : pour $x \in [0,A]$, soit $g(x) = f(x) - x$...

Correction de l'exercice 2044 ▲

Soit $x > 0$. Pour tout naturel n, $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = \ldots = f(x^{1/2^n})$. Or, à x fixé, $\lim_{n\to+\infty} x^{1/2^n} = 1$ et, f étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

f est donc constante sur $]0,+\infty[$, puis sur $[0,+\infty[$ par continuité de f en 0.
Pour $x \geq 0$, posons $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Pour $x \geq 0$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. f vérifie donc : $\forall x \geq 0,\ f(x^2) = f(x)$, mais f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^+$.

Correction de l'exercice 2045 ▲

Soit f un morphisme de $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On sait déjà $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ et donc $f(0) = 0$. Puis, pour x réel donné, $f(-x) + f(x) = f(-x+x) = f(0) = 0$ et donc, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ (f est donc impaire). On a aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = f(x) + \ldots + f(x) = nf(x)$. De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x).$$

Soit $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(n.1) = nf(1) = an$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $nf(\frac{1}{n}) = f(n\frac{1}{n}) = f(1) = a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{1}{n}) = a\frac{1}{n}$.
Puis, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = pa\frac{1}{q} = a\frac{p}{q}$.
Finalement,

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar.$$

Maintenant, si l'on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
Soit x un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x.
f étant continue en x, on a :

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} r_n) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} ar_n = ax.$$

Donc, si f est un morphisme continu de $(\mathbb{R},+)$, f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

Correction de l'exercice 2046 ▲

Soient a et b deux réels fixés tels que $0 < a < b$. Trouvons les entiers naturels non nuls k tels que $]ka,kb[\cap](k+1)a,(k+1)b[\neq\emptyset$. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, posons $I_k =]ka,kb[$.

$$I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow ka < (k+1)a < kb < (k+1)b \Leftrightarrow k > \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow k \geq E(\frac{a}{b-a})+1.$$

Posons $k_0 = E(\frac{a}{b-a})+1$. Pour $k \geq k_0$, on a donc $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ et donc $\bigcup_{k\geq k_0}]ka,kb[=]k_0a,+\infty[$.

Maintenant, si $k_0 = 1$, $\bigcup_{k\geq k_0}]ka,kb[=]a,+\infty[$ et si $k_0 > 1$, $\bigcup_{k\geq k_0}]ka,kb[= (\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka,kb[)\cup]k_0a,+\infty[$. Mais, si x est dans $\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka,kb[$, alors $x < (k_0-1)b < k_0a$ et donc, $(\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka,kb[)\cap]k_0a,+\infty[=\emptyset$. La plus petite valeur de A est donc $(E(\frac{a}{b-a})+1)a$.

Correction de l'exercice 2047 ▲

Si f est strictement monotone sur I, on sait que f est injective.
Réciproquement, supposons f injective et continue sur I et montrons que f est strictement monotone.
Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. On peut alors trouver trois réels a, b et c dans l'intervalle I tels que

$$a < b < c \text{ et } ((f(b) \geq f(a) \text{ et } f(b) \geq f(c)) \text{ ou } (f(b) \leq f(a) \text{ et } f(b) \leq f(c))).$$

Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera que $a < b < c$ et $f(b) \geq f(a)$ et $f(b) \geq f(c)$.
Puisque f est injective, on a même $a < b < c$ et $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Soit $M = \text{Max}\{f(a), f(c)\}$. On a $M < f(b)$. M est élément de $[f(a), f(b)]$ et, puisque f est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = M$. De plus, on ne peut avoir $\alpha = b$ car $f(\alpha) = M \neq f(b)$ (et f injective). Donc,

$$\exists \alpha \in [a,b[/\ f(\alpha) = M.$$

De même, puisque M est élément de $[f(c), f(b)]$, $\exists \beta \in]b,c]/\ f(\beta) = M$. Ainsi, on a trouvé dans I deux réels α et β vérifiant $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ ce qui contredit l'injectivité de f.
Donc, f est strictement monotone sur I.

Correction de l'exercice 2048 ▲

Soit f la fonction caractéristique de Q. Le groupe des périodes de f est $\mathbb{Q}$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ x + r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

et donc
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(x+r) = f(x)$. Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ x + r \in \mathbb{Q}, \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

et donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall r\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $f(x+r)\neq f(x)$.

Correction de l'exercice 2049 ▲

Id est solution.

Réciproquement, soit f une bijection de $[0,1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x\in[0,1]$, $f(2x-f(x))=x$. Nécessairement, $\forall x\in[0,1]$, $0\leq 2x-f(x)\leq 1$ et donc $\forall x\in[0,1]$, $2x-1\leq f(x)\leq 2x$.

Soit f^{-1} la réciproque de f.

$$\begin{aligned}\forall x\in[0,1],\ f(2x-f(x))=x &\Leftrightarrow \forall x\in[0,1],\ 2x-f(x)=f^{-1}(x)\\ &\Leftrightarrow \forall y\in[0,1],\ f(f(y))-2f(y)+y=0\ (\text{car } \forall x\in[0,1],\ \exists! y\ [0,1]/\ x=f(y))\end{aligned}$$

Soit $y\in[0,1]$ et $u_0=y$. En posant $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$, on définit une suite de réels de $[0,1]$ (car $[0,1]$ est stable par f). La condition $\forall y\in[0,1]$, $f(f(y))-2f(y)+y=0$ fournit $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$, ou encore $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n$. La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore u est arithmétique. Mais, u est également bornée et donc u est constante.

En particulier, $u_1=u_0$ ce qui fournit $f(y)=y$. On a montré que $\forall y\in[0,1]$, $f(y)=y$ et donc $f=Id$.

Correction de l'exercice 2050 ▲

(a) Soit n un entier naturel non nul donné. Pour x élément de $[0,1-\frac{1}{n}]$, posons $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$.
g est définie et continue sur $[0,1-\frac{1}{n}]$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n}))=f(1)-f(0)=0.$$

Maintenant, s'il existe un entier k élément de $\{0,...,n-1\}$ tel que $g(\frac{k}{n})=0$, on a trouvé un réel x de $[0,1]$ tel que $f(x+\frac{1}{n})=f(x)$ (à savoir $x=\frac{k}{n}$).
Sinon, tous les $g(\frac{k}{n})$ sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels g prend des valeurs de signes contraires. Puisque g est continue sur $[0,1-\frac{1}{n}]$, le théorème des valeurs intermédiares permet d'affirmer que g s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation $f(x+\frac{1}{n})=f(x)$.

(b) Soit $a\in]0,1[$ tel que $\frac{1}{a}\notin\mathbb{N}^*$. Soit, pour $x\in[0,1]$, $f(x)=|\sin\frac{\pi x}{a}|-x|\sin\frac{\pi}{a}|$. f est continue sur $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$ mais,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+a)-f(x)=(|\sin\frac{\pi(x+a)}{a}|-|\sin\frac{\pi x}{a}|)-((x+a)-x)|\sin\frac{\pi}{a}|=-a|\sin\frac{\pi}{a}|\neq 0.$$

(c) (a) et b)) Soit $g(t)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant t exprimé en heures, $0\leq t\leq 1$, puis, pour $t\in[0,1]$, $f(t)=g(t)-20t$. f est continue sur $[0,1]$ (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérife $f(0)=f(1)=0$.
D'après 1), $\exists t_1\in[0,\frac{1}{2}]$, $\exists t_2\in[0,\frac{19}{20}]$ tels que $f(t_1+\frac{1}{2})=f(t_1)$ et $f(t_2+\frac{1}{20})=f(t_2)$ ce qui s'écrit encore $g(t_1+\frac{1}{2})-g(t_1)=10$ et $g(t_2+\frac{1}{20})-g(t_2)=1$.
c) Posons pour $0\leq t\leq 1$, $f(t)=|\sin\frac{4\pi t}{3}|-\frac{t\sqrt{3}}{2}$ et donc, $g(t)=|\sin\frac{4\pi t}{3}|+(20-\frac{\sqrt{3}}{2})t$. $\forall t\in[0,\frac{1}{4}]$, $f(t+\frac{3}{4})-f(t)\neq 0$ ou encore $g(t+\frac{3}{4})-g(t)\neq 15$.

Correction de l'exercice 2051 ▲

(a) La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x=0$. En effet $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x\mapsto\cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x\mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".
Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=x\cos\frac{1}{x}.$$

Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x\to 0$) car $|\cos(1/x)|\leq 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$.

(b) Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

(c) La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

- Donc pour $x \geq 1$ on a $f_3(x) = x$; pour $0 \leq x < 1$ on a $f_3(x) = -x$; pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
- La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Attention ! La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x \to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x \to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
- La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 2052 ▲

La fonction f est continue et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Le seul problème est en $x = 1$.

Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x \to 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc $a + b + 1 = 1$. Autrement dit $b = -a$.

Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction f restreinte à $]0, 1]$ est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x = 1$. Donc $f'_g(1) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$, lorsque $x \to 1$ avec $x > 1$. Or

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x - 1} = \frac{ax^2 - ax}{x - 1} = \frac{ax(x-1)}{x-1} = ax.$$

Donc f est dérivable à droite et $f'_d(1) = a$. Afin que f soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est $a = \frac{1}{2}$.

Le seul couple (a, b) que rend f dérivable sur $]0, +\infty[$ est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 2053 ▲

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

(a) Comme $|\sin(1/x)| \leq 1$ alors f tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc en prolongeant f par $f(0) = 0$, la fonction f prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Le taux d'accroissement est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(c) Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction de l'exercice 2054 ▲

(a) Selon que $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

(b) La dérivée de $\sin^2 x$ est $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x$, $-4\sin 2x$, $-8\cos 2x$, $16\sin 2x$,... Et selon que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.

(c) $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ et on dérive...

Correction de l'exercice 2062 ▲

La limite de f en 0 est 0, donc f est continue en 0. De même le taux d'accroissement de f en 0 est $f(x)/x$ qui tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En dehors de 0, on a $f'(x) = 2e^{-x^{-2}}x^{-3}$ donc f' est continue en 0.

On continue de la même façon en remarquant que si $f^{(n)}(x) = P(1/x)\exp(-1/x^2)$ où P est un polynôme et $f^{(n)}(0) = 0$. Donc $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 si x tend vers 0. Donc $f^{(n)}$ est continue. De plus $f^{(n)}$ est dérivable en 0 car son taux d'accroissement vaut $1/xP(1/x)\exp(-1/x^2)$ qui tend vers 0, donc $f^{(n+1)}(0) = 0$. En dehors de 0 on $f^{(n+1)}(x) = Q(1/x)\exp(-1/x^2)$ où Q est un polynôme. Et on recommence...

Correction de l'exercice 2076 ▲

(a) Pour $n \geq 1$, on a d'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)} \text{ (car } (x^{n-1})^{(n)}) = 0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}\frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-k}}\\ &\text{(car } (\ln(1+x))^{(n-k)} = (\frac{1}{1+x})^{(n-k-1)}).\end{aligned}$$

Puis, pour $x = 0$, $(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(0) = n.(n-1)! = n!$, et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(x) &= -\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\frac{x}{x+1})^{n-k} = -\frac{(n-1)!}{x}((1-\frac{x}{x+1})^{n}-1)\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\frac{(x+1)^n-1}{(x+1)^n}.\end{aligned}$$

(b) On sait dériver facilement des sommes ou plus généralement des combinaisons linéaires. Donc, on linéarise :

$$\begin{aligned}\cos^3 x\sin(2x) &= \frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})^3(-\frac{1}{4})(e^{2ix}-e^{-2ix}) = -\frac{1}{32}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix})\\ &= -\frac{1}{32}(e^{5ix}+e^{3ix}-2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-3ix}+e^{-5ix}) = -\frac{1}{16}(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x))\end{aligned}$$

Puis, pour n naturel donné :

$$(\cos^3 x\sin 2x)^{(n)} = -\frac{1}{16}(5^n\cos(5x+n\frac{\pi}{2})+3^n\cos(3x+n\frac{\pi}{2})-2cos(x+n\frac{\pi}{2})),$$

expression que l'on peut détailler suivant la congruence de n modulo 4.

(c) On sait dériver des objets simples et donc on décompose en éléments simples :

$$\frac{X^2+1}{(X-1)^3} = \frac{X^2-2X+1+2X-2+2}{(X-1)^3} = \frac{1}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{2}{(X-1)^3}.$$

Puis, pour n entier naturel donné,

$$\begin{aligned}\left(\frac{X^2+1}{(X-1)^3}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+1}}+2\frac{(-1)^n(n+1)!}{(X-1)^{n+2}}+\frac{(-1)^n(n+2)!}{(X-1)^{n+3}}\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+3}}((X-1)^2+2(n+1)(X-1)+(n+2)(n+1))\\ &= \frac{(-1)^n n!(X^2+2nX+n^2+n+1)}{(X-1)^{n+3}}.\end{aligned}$$

(d) La fonction proposée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux. La formule de LEIBNIZ fournit pour $n \geq 3$:

$$
\begin{aligned}
((x^3+2x-7)e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} \\
&= ((x^3+2x-7)+n(3x^2+2)+\frac{n(n-1)}{2}(6x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.6)e^x \\
&= (x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+n^3-3n^2+4n-7)e^x.
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 2077 ▲

$Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. Les valeurs -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q_n'(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$. Même chose en -1. Enfin $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1,1[$ telle que $Q_n'(c) = 0$.

Donc $Q_n'(-1) = 0$, $Q_n'(c) = 0$, $Q_n'(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q_n'', qui s'ajoutent aux racines -1 et $+1$.

On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines. Par constructions ces racines sont réelles distinctes, donc simples.

Correction de l'exercice 2079 ▲

(a) Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3,...) il existe $x_1' < x_2' < x_3'$ des racines de P_n'. On applique deux fois le théorème Rolle entre x_1' et x_2' et entre x_2' et x_3'. On obtient deux racines distinctes pour P_n''. Or $P_n'' = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

(b) *Autre méthode :* Le résultat est évident si $n \leq 3$. On suppose donc $n \geq 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P_n'(X) = nX^{n-1} + a$ s'annule en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction de l'exercice 2080 ▲

Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction de l'exercice 2083 ▲

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a,b]$. Le théorème des accroissement finis assure l'existence d'un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce c. En effet $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implique $\alpha(b^2-a^2) + \beta(b-a) = (2\alpha c + \beta)(b-a)$. Donc $c = \frac{a+b}{2}$.

Géométriquement, le graphe $\mathscr{P}$ de f est une parabole. Si l'on prend deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathscr{P}$ qui passe en $M = (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$. L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.

Correction de l'exercice 2086 ▲

(a) Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. Il existe $c \in]x,y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y-x)$. Soit $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y-x)$. Donc $\frac{\ln y - \ln x}{y-x} = \frac{1}{c}$. Or $x < c < y$ donc $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. Ce qui donne les inégalités recherchées.

(b) $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. Et $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0,1]$. Or $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ d'après la première question et de même $f'(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x,y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.

(c) Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Correction de l'exercice 2087 ▲

Le théorème des accroissements finis donne : $\ln(n+1)-\ln(n)=\frac{1}{c_n}(n+1-n)=\frac{1}{c_n}$, avec $c_n\in[n,n+1]$. Or $c_n\geq n$ donc $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{c_n}$. Donc :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k)=\ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est téléscopique et $\ln 1=0$. Donc $S_n\geq\ln(n+1)$, donc $S_n\to+\infty$.

Correction de l'exercice 2089 ▲

Pour simplifier nous supposons $x>0$.

(a) Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit $f(x)=e^x-1-x$. Alors il existe $c\in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$. Soit $f(x)=(e^c-1)x$. Soit maintenant $g(x)=e^x-1$ alors, par le théorème des accroissements finis sur $[0,c]$ il existe $d\in]0,c[$ tel que $g(c)-g(0)=g'(d)(c-0)$, soit $e^c-1=e^dc$. Donc $e^x-1-x=f(x)=(e^c-1)x=e^dcx$. Comme $d\leq c\leq x$, alors $e^x-1-x\leq e^xx^2$.
Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur $1/2$.

(b) Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant $f(t)=e^t-1-t-k\frac{t^2}{2}$. Nous avons $f(0)=0$, $x>0$ étant fixé, nous choisisons k tel que $f(x)=0$, (un tel k existe car $e^x-1-x>0$ et $x^2>0$). Comme $f(0)=0=f(x)$ alors par Rolle il existe $c\in]0,x[$ tel que $f'(c)=0$. Mais $f'(t)=e^t-t-kt$, donc $f'(0)=0$. Maintenant $f'(0)=0=f'(c)$ donc il existe (par Rolle toujours !) $d\in]0,c[$ tel que $f''(d)=0$. Or $f''(t)=e^t-k$, donc $f''(d)=0$ donne $k=e^d$. Ainsi $f(x)=0$ devient $e^x-1-x=e^d\frac{x^2}{2}$. Comme $d\leq x$ alors $e^x-1-x\leq e^x\frac{x^2}{2}$.

Correction de l'exercice 2091 ▲

On a déjà $g(b)=f(b)-f(b)=0$. Puisque $a\neq b$, on peut choisir A tel que $g(a)=0$ (à savoir $A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)$.
Avec les hypothèses faites sur f, g est d'autre part continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Le théorème de ROLLE permet alors d'affirmer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$.
Pour $x\in]a,b[$, on a

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+A\frac{(b-x)^n}{n!}\\&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+A\frac{(b-x)^n}{n!}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+A\frac{(b-x)^n}{n!}\\&=\frac{(b-x)^n}{n!}(A-f^{(n+1)}(x)).\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\frac{(b-c)^n}{n!}(A-f^{(n+1)}(c))=0$, et donc, puisque $c\neq b$, tel que $A=f^{(n+1)}(c)$.
L'égalité $g(a)=0$ s'éxrit alors

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

pour un certain réel c de $]a,b[$.

Correction de l'exercice 2092 ▲

Pour $x\in[a,b]$, posons $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b)=g(a)=0$ (c'est-à-dire $A=\frac{1}{(b-a)^3}(f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a)))$.
$f\in C^2([a,b],\mathbb{R})\cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$ et donc $g\in C^1([a,b],\mathbb{R})\cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$. Pour $x\in[a,b]$, on a :

$$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}(f'(x)+f'(a))-\frac{x-a}{2}f''(x)-3A(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x)=\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{2}f''(x)-\frac{x-a}{2}f^{(3)}(x)-6A(x-a)=\frac{x-a}{2}(-12A-f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie de plus $g(a)=g(b)$. Donc, d'après le théorème de ROLLE, il existe $d\in]a,b[$ tel que $g'(d)=0$. De même, g' est continue sur $[a,d]\subset[a,b]$, dérivable sur $]a,d[(\neq\emptyset)$ et vérifie de plus $g'(a)=g'(d)(=0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe $c\in]a,d[\subset]a,b[$ tel que $g''(c)=0$ ou encore tel que $A=-\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (puisque $c\neq a$).
En écrivant explicitement l'égalité $g(b)=0$, on a montré que :

$$\exists c\in]a,b[/\ f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a))-\frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})\cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, la formule précédente s'écrit :

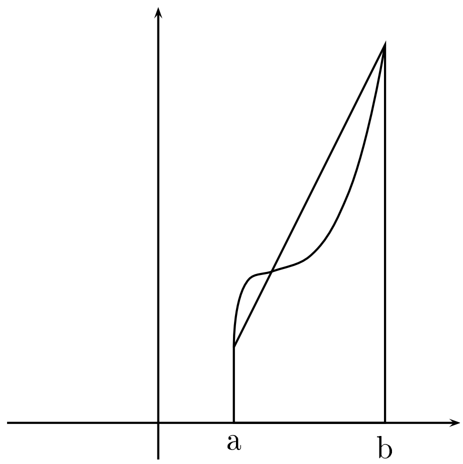
$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)=\frac{b-a}{2}(F'(b)+F'(a))-\frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3=\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))-\frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Donc, si $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})\cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$,

$$\exists c\in]a,b[/\ \int_a^b f(t)\,dt=\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))-\frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique.
Si f est positive, $A_1=\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire du domaine $D=\{M(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ a\leq x\leq b \text{ et } 0\leq y\leq f(x)\}$ et $A_2=\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$ est l'aire du trapèze $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\f(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\f(a)\end{pmatrix}$. Si $M_2=\sup\{|f''(x)|,\ x\in[a,b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|A_1-A_2|\leq M_2\frac{(b-a)^3}{12}.$$



Correction de l'exercice 2093 ▲

(a) $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ et donc, L_n est de degré $2n-n=n$. Puis, $\mathrm{dom}(L_n)=\mathrm{dom}((X^{2n})^{(n)})=\frac{(2n)!}{n!}$.

(b) 1 et -1 sont racines d'ordre n de A_n et donc racines d'ordre $n-k$ de $A_n^{(k)}$, pour tout k élément de $\{0,...,n\}$.
Montrons par récurrence sur k que $\forall k\in\{0,...,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle $]-1,1[$.
Pour $k=1$, A_n est continu sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus, $A_n(0)=A_n(1)=0$ et d'après le théorème de ROLLE, A_n' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.
Soit k élément de $\{1,...,n-1\}$. Supposons que $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. $A_n^{(k)}$ s'annule de plus en 1 et -1 car $k\leq n-1$ et donc s'annule en $k+2$ valeurs au moins de l'intervalle $[-1,1]$. D'après le théorème de ROLLE, $A_n^{(k+1)}$ s'annule en au moins $k+1$ points de $]-1,1[$ (au moins une fois par intervalle ouvert).
On a montré que $\forall k\in\{0,...,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. En particulier, $A_n^{(n)}=L_n$ s'annule en au moins n réels deux à deux distincts de $]-1,1[$. Puisque L_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de L_n, toutes réelles, simples et dans $]-1,1[$.

Correction de l'exercice 2094 ▲

Montrons que $(\forall x>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$. Soit $x>0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$$
$$\Leftrightarrow x(\ln(x+1)-\ln x)<1<(x+1)(\ln(x+1)-\ln x)\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}.$$

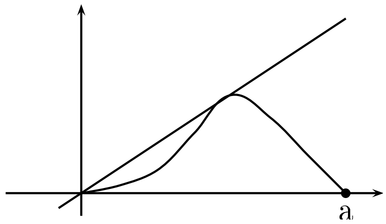
Soit x un réel strictement positif fixé. Pour $t\in[x,x+1]$, posons $f(t)=\ln t$. f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x,x+1[$ tel que $f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c\in]x,x+1[/\ \ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Correction de l'exercice 2095 ▲



Soit x_0 un réel non nul. Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. (T_{x_0}) passe par l'origine si et seulement si

$$x_0f'(x_0)-f(x_0)=0.$$

Pour x réel, on pose $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}\text{ si }x\neq0\\0\text{ si }x=0\end{cases}$ (g est « la fonction pente à l'origine »).

Puisque f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, g est déjà continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Puisque f est dérivable en 0 et que $f(0)=f'(0)=0$, g est de plus continue en 0.

Finalement, g est continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et vérifie $g(0)=g(a)(=0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe un réel x_0 dans $]0,a[$ tel que $g'(x_0)=0$. Puisque x_0 n'est pas nul, on a $g'(x_0)=\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}$. L'égalité $g'(x_0)=0$ s'écrit $x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$ et, d'après le début de l'exercice, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Correction de l'exercice 2096 ▲

En pensant à l'expression développée de Δ, on voit que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\Delta(a)=\Delta(b)(=0)$ (un déterminant ayant deux colonnes identiques est nul).

Donc, d'après le théorème de ROLLE, $\exists c\in]a,b[/\ \Delta'(c)=0$.

Mais, pour $x\in]a,b[$, $\Delta'(x)=f'(x)(g(a)-g(b))-g'(x)(f(a)-f(b))$ (dérivée d'un déterminant). L'égalité $\Delta'(c)=0$ s'écrit : $f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a))$ ce qu'il fallait démontrer.

(Remarque. Ce résultat généralise le théorème des accroissements finis ($g=Id$ « est » le théorème des accroissements finis.))

Correction de l'exercice 2098 ▲

(a) Pour tout $n\geq2$ on a : $P_n(0)=-1$ et $P_n(1)=3$. Comme l'application $X\mapsto P_n(X)$ est continue, elle s'annule en (au moins) un point de l'intervalle $]0,1[$. Comme par ailleurs, pour tout X positif, $P_n'(X)=nX^{n-1}+(n-1)X^{n-2}+2X+1$ est strictement positif, l'application $X\mapsto P_n(X)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en au plus un point de $\mathbb{R}_+$. En conséquence P_n a une unique racine positive λ_n qui de plus satisfait à l'inégalité $0<\lambda_n<1$.

(b) Pour tout $X\in]0,1[, P_n(X)-P_{n-1}(X)=X^n-X^{n-2}<0$. En particulier $P_n(\lambda_{n-1})<0$ donc $\lambda_n>\lambda_{n-1}$. La suite $(\lambda_n)_{n\geq2}$ est donc croissante et majorée (cf 1.) : elle est convergente.

(c) Pour tout $n \geq 2$ on a : $\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} = -\lambda_n^2 - \lambda_n + 1$. Or $P_n\left(\frac{3}{4}\right) > \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 1 > 0$ donc la suite $(\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1})_{n \in |||}$ satisfait aux inégalités $0 < \lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} < \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ et converge vers 0. Il en va de même de la suite $(-\lambda_n^2 - \lambda_n + 1)_{n \geq 2}$. En passant à la limite, on obtient l'égalité : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. La seule solution positive de cette équation étant $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on a l'égalité : $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarques

(a) L'inégalité $0 < \lambda_n < 1$ (pour tout $n \geq 2$) n'implique pas que $(\lambda_n^n)_{n \geq 2}$ converge vers 0. Par exemple la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ converge vers $\frac{1}{e}$. (Pour le vérifier appliquer le 1. du problème à $\log(v_n)$.)

(b) La propriété $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right) = 0$ n'implique pas que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right) = 0$. Par exemple... $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \log(2)$.

Correction de l'exercice 2102 ▲

(a) $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)$. Comme f est continue, ε est continue sur $]a,b[-\{c\}$ et la continuité en c de ε équivaut à la dérivabilité de f en c. L'unicité est évidente.

(b) Pour tout $n \geq 1, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} < 0$ (par exemple parce que $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$ donc $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} < 2 \times \frac{1}{2n}$) donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Elle est minorée (par 0) donc elle converge.

(c) Pour tout $0 \leq k \leq n$, $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$ donc $(n+1) \times \frac{1}{2n} \leq S_n \leq (n+1) \times \frac{1}{n}$ d'où, en passant à la limite, l'inégalité $\frac{1}{2} \leq S \leq 1$.

(d) Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$. Pour tous $n,k \in |||, n > 0$, on a l'égalité :

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

donc $\sigma_n(f) - f'(0)S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$. Comme, pour tout $k \geq 0$, on a $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$, on en déduit les inégalités :

$$|\sigma_n(f) - f'(0)S_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leq \frac{n+1}{n}\max_{0 \leq k \leq n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|.$$

Comme $\max_{0 \leq k \leq n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leq \sup_{x \in [0,\frac{1}{n}]} |\varepsilon(x)|$, cette quantité converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini (puisque ε est continue et s'annule en 0).

(e) Des égalités $\log\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \log\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \log(n+k+1) - \log(n+k)$ on déduit que :

$$\sigma_n(f) = \log(2n+1) - \log(n) = \log\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \log\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Comme la fonction logarithme est continue, $(\sigma_n(f))_{n \geq 1}$ converge vers $\log(2)$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi $S = \log(2)$.

(f) Par les deux questions qui précédent il est immédiat que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \log(2)$.

(g) Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$.
On pose, pour tous $n,k \in |||, n > 0$:

$$\sigma_n(p,f) = \sum_{k=0}^{pn} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \text{ et } S_{n,p} = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}.$$

Pour tous $n,k \in |||, n > 0$ on a l'égalité : $f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$ d'où

$$|\sigma_n(p,f) - f'(0)S_{n,p}| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{pn}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leq \frac{pn+1}{n}\sup_{x \in [0,\frac{1}{n}]}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

donc cette différence converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Lorsque f est la fonction $x \mapsto \log(1+x)$, on obtient (comme précédemment) que :

$$\sigma_n(p,f) = \log((p+1)n+1) - \log(n) = \log\left(1 + p + \frac{1}{n}\right)$$

puis que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(p,f) = \log(p+1)$ c'est à dire $S_p = \log(p+1)$.

Correction de l'exercice 2107 ▲

$y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \Rightarrow \frac{n}{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$.

Correction de l'exercice 2113 ▲

(a)

(b) $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \to 0$.
TAF entre x et $x/2 \Rightarrow 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq xf'(x) \leq 0 \Rightarrow xf'(x) \to 0$.

Correction de l'exercice 2119 ▲

(a) Fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(b) $f(x) - xf'(x) = -x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Donc, $x \mapsto \frac{f(x)-p}{x} \searrow$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x} \nearrow$.

(c) $p \leq f(x) - mx \leq f(x) - xf'(x)$.

Correction de l'exercice 2120 ▲

(a) Soient $x < y$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \frac{f(y)-f(0)}{y-0} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y} + f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.

(b) Pour $x < y$: $f(x+y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ avec $t = \frac{x}{x-y} < 0$,
donc $f(x+y) - f(x) - f(y) \leq \frac{xy}{x-y}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right) \leq 0$.

Correction de l'exercice 2124 ▲

(a)

(b) Prendre x tel que $f(x)$ soit maximal.

(c)

(d)

Correction de l'exercice 2125 ▲

Pour a_0 : $\left|f(a_0+h) - f(a_0) - |h|\right| \leq \frac{|h|}{2}$.

Correction de l'exercice 2128 ▲

Soit $F(x) = x^2 + xG(x)$. On a pour $h > 0$: $f(x) \leq \frac{F(x+xh)-F(x)}{xh} = 2x + xh + \frac{G(x+xh)-G(x)}{h} + G(x+xh)$. Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $y \geq A \Rightarrow |G(y)| \leq \varepsilon^2$. On prend $h = \varepsilon/\sqrt{x}$ et on obtient $f(x) - 2x - \varepsilon\sqrt{x} \leq \varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2$ d'où $f(x) \leq 2x + o(\sqrt{x})$. L'inégalité inverse se montre de même.

Correction de l'exercice 2129 ▲

$f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$, $f''(x) = 2(1-k)^2 + 6(1+k)x$. Nous avons $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^3$. Donc si $k \neq 1$ alors, la dérivée seconde étant non nulle en $x = 0$, 0 est un extremum (maximum ou minimum) local. Si $k = 1$ alors $f(x) = 2x^3$ et bien sûr 0 n'est pas un extremum local. Dans tous les cas 0 n'est ni un minimum global, ni un maximum global (regardez les limites en $+\infty$ et $-\infty$).

Correction de l'exercice 2134 ▲

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$ donc les extremums appartiennent à $\{0, \frac{3}{4}\}$. Comme $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$, donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum local (qui est même un minimum global). Par contre $f''(0) = 0$ et $f'''(0) \neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas local, pensez à un fonction du type $x \mapsto x^3$).

Correction de l'exercice 2135 ▲

(a) $f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x$, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$. Les points d'inflexion sont les racines de f''_λ, donc si $\lambda \geq 0$ il n'y a pas de point d'inflexion, si $\lambda < 0$ alors il y a un point d'inflexion en $x_\lambda = \ln(-2/\lambda)$.

(b) Si $\lambda \geq 0$ alors f''_λ est toujours strictement positive, donc f'_λ est strictement croissante, en $-\infty$ la limite de f'_λ est $-\infty$, en $+\infty$ la limite de f'_λ est $+\infty$, donc il existe un unique réel y_λ tel que $f'_\lambda(y_\lambda) = 0$. f_λ est décroissante sur $]-\infty, y_\lambda]$ et croissante sur $[y_\lambda, +\infty[$. Et en y_λ nous avons un minimum absolu.

(c) Nous supposons $\lambda < 0$. Alors f''_λ s'annule seulement en x_λ. f'_λ est croissante sur $]-\infty, x_\lambda]$ et décroissante sur $[x_\lambda, +\infty[$. Donc f'_λ a des racines si et seulement si $f'(x_\lambda) \geq 0$. Or $f'(x_\lambda) = -2 + 2x_\lambda$.

i. Si $\lambda = -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$. Comme $f''_\lambda(x_\lambda) = 0$ et f'''_λ ne s'annule pas alors x_λ est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum local.

ii. Si $\lambda > -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) < 0$ donc f'_λ est négative donc f est strictement décroissante. Il n'y a pas d'extremum local.

iii. Si $-2/e < \lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) > 0$. Donc f'_λ s'annule en deux points, une fois sur $]-\infty, x_\lambda[$ et une sur $]x_\lambda, +\infty[$. Ce sont des extremums locaux (minimum et maximum respectivement).

Correction de l'exercice 2139 ▲

Le théorème de Rolle dit que si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.

(a) Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a,b]$ tel que $g(x_0) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a,x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a,x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.

(b) D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.

(c) Pour chaque $x \in]a,b[$, on peut appliquer la question 2. aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x,b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x,b[$, dépendant de x tel que

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Alors, comme $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x\to b^-} c(x) = b$, (car $c(x) \in]x,b[$) on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de "règle de l'Hôpital".

(d) Considérons les deux fonctions $f(x) = \operatorname{Arccos} x$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [0,1]$. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ et $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, $g'(x) = -x/\sqrt{1-x^2} \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$. En appliquant les résultats de la question 3., on en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Correction de l'exercice 2140 ▲

(a) i. Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient pour $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}.$$

ii. Par l'expression précédente $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent on obtient : $f'(x) \leq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

(b) i. Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geq f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

ii. En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise (le cas du couple $(0,0)$ étant trivial).

Correction de **l'exercice 2141 ▲**

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.

On a
$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$
or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0)=0$.

(b) On a
$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$
donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est
$$\frac{f'(t)-f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$
et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0)=0$.

(c) i. On a déjà trouvé que $f'(t)=-e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t)=P_1(t)/t^2e^{1/t}$ si on pose $P_1(t)=-1$.
Par ailleurs, $f''(t)=e^{1/t}/t^4+e^{1/t}(2/t^3)=\frac{1+2t}{t^4}e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n=2$ en posant $P_2(t)=1+2t$.

ii. Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ d'où
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n}-P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t}+\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2-(2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} \end{aligned}$$
donc la formule est vraie au rang $n+1$ avec
$$P_{n+1}(t)=P_n'(t)t^2-(2nt+1)P_n(t).$$

(d) Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.

Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que pour tout $n\in |||$, $f^{(n)}(0)=0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)}(0)=0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :
$$\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n+1} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$
et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0)=0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$.

Par conséquent, f est de classe C^∞.

Correction de **l'exercice 2144 ▲**

Contre-exemple : $f(t)=t^2$ si $t\geq 0$ et $f(t)=-t^2$ si $t<0$.

Correction de **l'exercice 2149 ▲**

Poser $g(x)=\int_{t=0}^x f^2(t)\,dt$. On obtient $(g^3)'(x)\to 3\ell^2$ lorsque $x\to+\infty$, ce qui implique (classiquement) que $g^3(x)\sim 3\ell^2x$, puis $f(x)\sim\sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Correction de **l'exercice 2153 ▲**

TAF $\Rightarrow \ell=\sqrt{2}$.

Correction de **l'exercice 2159 ▲**

Dériver par rapport à a puis par rapport à b.

Correction de l'exercice 2163 ▲

(a)

(b) $f^{(n)}(1) = 2^n n!$, $f^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$.

(c)

Correction de l'exercice 2167 ▲

$\frac{f'(0)}{2}$.

Correction de l'exercice 2169 ▲

$f = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 2172 ▲

(a) AF $\Rightarrow \exists\, w(x)$ compris entre $u(x)$ et $v(x)$ tel que $\frac{u^v - v^v}{u-v} = vw^{v-1} \to a^a$.

(b) $u^v - v^u = (u^v - v^v) + (v^v - v^u) = (u-v)(vw_1^{v-1} - (\ln v)v^{w_2})$
$u^u - v^v = (u-v)w_3^{w_3}(1+\ln w_2)$
$\Rightarrow \lim = \frac{1-\ln a}{1+\ln a}$.

Correction de l'exercice 2173 ▲

(a)

(b) Pour $k \geq 0$, la suite (u_n) est croissante et $\ln u_n \leq \frac{k}{1-k}$.
Pour $k < 0$, (u_{2n}) décroît et converge, et $u_{2n+1} \sim u_{2n}$.

Correction de l'exercice 2175 ▲

$(1+x^2)f^{(n+1)} + 2nxf^{(n)} + n(n-1)f^{(n-1)} = 0$ pour $n \geq 1$.
$g^{(n+1)} = 3x^2 g^{(n)} + 6nxg^{(n-1)} + 3n(n-1)g^{(n-2)}$ pour $n \geq 0$.

Correction de l'exercice 2176 ▲

$(-1)^n e^{-x}\big(x^3 + (2-3n)x^2 + (3n^2 - 7n)x + (-n^3 + 5n^2 - 4n - 5)\big)$.

Correction de l'exercice 2177 ▲

$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + n\frac{\pi}{6})$.

Correction de l'exercice 2178 ▲

$\frac{d^n}{dx^n}\big(x^n(1-x)^n\big) = \sum_{k=0}^{n} n!\,\big(C_n^k\big)^2 (-1)^{n-k} x^{n-k}(1-x)^k$.
coefficient de $x^n = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \big(C_n^k\big)^2 = (-1)^n A_{2n}^n$.

Correction de l'exercice 2179 ▲

$\frac{(n-1)!}{t}$, $\qquad \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} \exp(1/t)$.

Correction de l'exercice 2180 ▲

(a) $a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + 2(2k-n)a_{n,k}$.

(b) $a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$.

Correction de l'exercice 2185 ▲

(a) Au point d'abscisse α tq $\ln\alpha = \frac{a\ln a}{1-a} + 1$ pour $\mathscr{C}$, et $\alpha' = a\alpha$ pour $\mathscr{C}'$.

(b) Centre = $\left(0, \frac{a\ln a}{1-a}\right)$, rapport = a.

Correction de l'exercice 2186 ▲

Si f change de signe, soit par exemple $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $a < b$ et $c = \sup\{x \text{ tq } f_{|[a,x]} \text{ est croissante}\}$. Alors f est croissante sur $[a,c]$ et $f(c) = 0$, contradiction.

Correction de l'exercice 2187 ▲

Si l'on pose $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2}\,dt$, on constate que $a(x) = F^{-1}(1+F(x))$ ce qui prouve l'existence, l'unicité et le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de a. Pour la symétrie, il faut montrer que $a(-a(x)) = -x$ soit $\int_{t=-a(x)}^{-x} e^{t^2}\,dt = 1$ ce qui est immédiat.

Correction de l'exercice 2188 ▲

Toute fonction linéaire $\varphi : x \mapsto ax$ convient. Réciproquement, si φ est solution alors $\varphi(0) = 0$. On note $a = \varphi'(0)$ et $\psi(x) = \varphi(x) - ax$: ψ est également solution et $\psi'(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in |||$ alors $\psi(x) = 2^n\psi(x/2^n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où $\psi = 0$ et $\varphi(x) = ax$.

Correction de l'exercice 2189 ▲

(a) $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = m^{-1/m}$.

(b)

(c)

(d) f et f' ont des limites nulles en 0^+ et infinies en $+\infty$ donc $f(x) = o_{x\to 0^+}(x)$ et $x = o_{x\to+\infty}(f(x))$, ce qui implique que $f(x) - x$ s'annule sur $]0,+\infty[$. S'il y a deux points fixes, $a < b$, alors par le thm. des accroissements finis l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution dans $]0,a[$ et une dans $]a,b[$, en contradiction avec la bijectivité de $f' = f^{-1}$.

(e) On note a le point fixe de f, b celui de g et on suppose $a \neq b$, par exemple $a < b$. On a $g(x) < x$ pour $x \in]0,b[$ donc $g(a) < a = f(a)$. Par conséquent $g(x) < x \leq f(x)$ si $x \in [a,b[$; soit $]c,b[$ le plus grand intervalle sur lequel $g(x) < f(x)$. On a $0 \leq c < a$, $g(c^+) = f(c^+) \leq c$ et f, g sont strictement croissantes, donc $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$ pour $x \in]c,b[$. Ainsi $g - f$ est strictement croissante sur $]c,b[$ a une limite nulle en c^+ et est négative en b, c'est absurde.

Remarque : le point fixe est le nombre d'or m. De plus, si f et g sont deux éléments de E distincts alors $f - g$ n'est de signe constant sur aucun voisinage de m^- (même démonstration).

Correction de l'exercice 2190 ▲

On a $f' \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier elle admet des limites finies, a et b en $-\infty$ et $+\infty$ avec $-1 \leq b \leq a \leq 1$.

Supposons $a > 0$: soit $\alpha \in]0,a[$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \leq x_0,\ f(x) \geq a - \alpha > 0$, d'où $f'(x) \leq -1 + \sqrt{a-\alpha} < 0$. Ceci est incompatible avec le caractère borné de f, donc on a en fait $a \leq 0$. On montre de même que $b \geq 0$ et comme $b \leq a$, on a finalement $a = b = 0$.

Correction de l'exercice 2191 ▲

f' est continue sur le segment $[a,b]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit $M = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$, et soit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et b (c'est-à-dire $\forall x \in [a,b],\ g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) =$) puis $h = f - g$. On va montrer que $h = 0$ sous l'hypothèse $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

h est dérivable sur $[a,b]$ et, pour $x \in [a,b]$, $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) - M \leq 0$. h est donc décroissante sur $[a,b]$. Par suite, $\forall x \in [a,b],\ 0 = h(b) \leq h(x) \leq h(a) = 0$. Ainsi, $\forall x \in [a,b],\ h(x) = 0$, ou encore $f = g$. f est donc affine sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2192 ▲

Supposons que f est convexe sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ (a et b réels ou infinis).

Soit $x_0 \in I$. On sait que la fonction pente en x_0 est croissante.

Pour $x \neq x_0$, posons $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Soit x' un élément de $]x_0,b[$. $\forall x \in]a,x_0[$, on a $g(x) < g(x')$, ce qui montre que g est majorée au voisinage de x_0 à gauche. Etant croissante, g admet une limite réelle quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou encore, $\lim_{x \to x_0,\, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$. f est donc dérivable à gauche en x_0. On montre de même que f est dérivable à droite en x_0.

Finalement, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. En particulier, f est continue à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$ et donc continue sur $]a,b[$.

Correction de l'exercice 2193 ▲

(a) La fonction $f\ :\ x \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Par suite, f est concave sur $]0,+\infty[$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x_1,...,x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall (\alpha_1,...,\alpha_n) \in (]0,1[)^n,\ (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \Rightarrow \ln(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln(x_k),$$

et donc par croissance de f sur $]0,+\infty[$,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Si l'un des x_k est nul, l'inégalité précédente est immédiate.

En choisissant en particulier $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$, de sorte que $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in (]0,1[)^n$ et que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,...,x_n) \in ([0,+\infty[)^n,\ \sqrt[n]{x_1...x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1+...+x_n).$$

(b) i. Soient p et q deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (de sorte que l'on a même $\frac{1}{p} < \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et donc $p > 1$ et aussi $q > 1$).

Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité proposée est immédiate.

Soit alors a un réel strictement positif puis, pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{a^p}{p}+\frac{x^q}{q}-ax$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (car $q > 1$) et pour $x \geq 0$, $f'(x) = x^{q-1}-a$. q étant un réel strictement plus grand que 1, $q-1$ est strictement positif et donc, la fonction $x \mapsto x^{q-1}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Par suite,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{q-1} > a \Leftrightarrow x > a^{1/(q-1)}.$$

f est donc strictement décroissante sur $[0,a^{1/(q-1)}]$ et strictement croissante sur $[a^{1/(q-1)},+\infty[$. Ainsi,

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \geq f(a^{1/(q-1)}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a.a^{1/(q-1)}.$$

Maintenant, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ fournit $q = \frac{p}{p-1}$ puis $q-1 = \frac{1}{p-1}$. Par suite, $\frac{q}{q-1} = p$. Il en résulte que

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a.a^{1/(q-1)} = (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)a^p = 0.$$

f est donc positive sur $[0,+\infty[$, ce qui fournit $f(b) \geq 0$. De plus,

$$f(b) = 0 \Leftrightarrow b = a^{1/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^{q/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^p.$$

ii. Soient $A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ et $B = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$.

Si $A = 0$, alors $\forall k \in \{1,...,n\}$, $a_k = 0$ et l'inégalité est immédiate. De même, si $B = 0$.

Si $A > 0$ et $B > 0$, montrons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{1/p}}\frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leq 1$.

D'après a),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{1/p}}\frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leq \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{B}) = \frac{1}{pA}.A + \frac{1}{qB}.B = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

iii. Pour $p > 1$, la fonction $x \mapsto x^p$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$. Donc, la fonction $x \mapsto x^p$ est strictement convexe sur $]0,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$ par continuité en 0. Donc,

$$\forall(x_1,...,x_n)\in(]0,+\infty[)^n,\ \forall(\lambda_1,...,\lambda_n)\in([0,+\infty[)^n\setminus\{(0,...,0)\},\ \left(\frac{\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k}{\sum_{k=1}^n\lambda_k}\right)^p\leq\frac{\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k^p}{\sum_{k=1}^n\lambda_k},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k\leq(\sum_{k=1}^n\lambda_k)^{1-\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

On applique alors ce qui précède à $\lambda_k=|b_k|^q$ puis $x_k=\lambda_k^{-1/p}|a_k|$ (de sorte que $\lambda_kx_k=|a_kb_k|$) et on obtient l'inégalité désirée.

iv. Pour $p=q=2$, c'est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ démontrée dans une planche précédente.

Correction de l'exercice 2194 ▲

---

f est de classe $^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux.

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists P_n\in\mathbb{R}[X]/\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.

C'est vrai pour $n=0$ avec $P_0=1$.

Soit $n\geq 0$. Supposons que $\exists P_n\in\mathbb{R}[X]/\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$. Alors, pour $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x)=(\frac{2}{x^3}\frac{P_n(x)}{x^{3n}}+(P_n'(x)\frac{1}{x^{3n}}-3nP_n(x)\frac{1}{x^{3n+1}})e^{-1/x^2}=\frac{P_{n+1}(x)}{3^{3(n+1)}}e^{-1/x^2},$$

où $P_n+1=2P_n+X^3P_n'-3nX^2P_n$ est un polynôme. On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists P_n\in\mathbb{R}[X]/\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0)=0$.

Pour $n=0$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, $\lim_{x\to 0,\,x\neq 0}f(x)=0=f(0)$. Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n\geq 0$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0)=0$. Alors, d'une part f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, d'après les théorèmes de croissances comparées, $f^{(n+1)}(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, $x\neq 0$. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0,\,x\neq 0}f^{(n+1)}(x)=0$.

On a montré par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0)=0$. f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2195 ▲

(a) Soit m un élément de $]f'(a),f'(b)[$. Puisque $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ et que $\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=f'(b)$, on a (en prenant par exemple $\varepsilon=\mathrm{Min}\{m-f'(a),f'(b)-m\}>0$)

$$\exists h_1>0/\ \forall h\in]0,h_1[,\ (a+h\in I\Rightarrow\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<m \text{ et}$$
$$\exists h_2>0/\ \forall h\in]0,h_2[\ (b+h\in I\Rightarrow\frac{f(b+h)-f(b)}{h}>m.$$

L'ensemble $E=\{h\in]0,\mathrm{Min}\{h_1,h_2\}[/\ a+h \text{ et } b+h \text{ sont dans } I\}$ n'est pas vide (car I est ouvert) et pour tous les h de E, on a : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<m<\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.

$h>0$ est ainsi dorénavant fixé.

(b) La fonction f est continue sur I et donc, la fonction $g\ :\ x\mapsto\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $g(a)<m<g(b)$, $\exists y\in[a,b]/\ g(y)=m$ ou encore $\exists y\in[a,b]/\ \frac{f(y+h)-f(y)}{h}=m$.

Maintenant, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists x\in]y,y+h[\subset I/\ m=\frac{f(y+h)-f(y)}{h}=f'(x)$.

Donc une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue mais vérifie tout de même le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de DARBOUX).

Correction de l'exercice 2196 ▲

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}=\frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{(\sqrt{x})^2/2}\to-\frac{1}{2}.$$

f est donc dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=-\frac{1}{2}$.

Autre solution. f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. Pour $x\neq 0$, $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$. Quand x tend vers 0, f' tend vers $-\frac{1}{2}$. En résumé, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2197 ▲

Soit $n \geq 2$ le degré de P.

(a) Si P admet n racines réelles simples, le théorème de ROLLE fournit au moins $n-1$ racines réelles deux à deux distinctes pour P'. Mais, puisque P' est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines de P', nécessairement toutes réelles et simples.

(Le résultat tombe en défaut si les racines de P ne sont pas toutes réelles. Par exemple, $P = X^3 - 1$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ mais $P' = 3X^2$ admet une racine double)

(b) Séparons les racines simples et les racines multiples de P. Posons $P = (X-a_1)...(X-a_k)(X-b_1)^{\alpha_1}...(X-b_l)^{\alpha_l}$ où les a_i et les b_j sont $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et les α_j des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement $k=0$ ou $l=0$ et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

P s'annule déjà en $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et le théorème de ROLLE fournit $k+l-1$ racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des a_i et des b_j. D'autre part, les b_j sont racines d'ordre α_j de P et donc d'ordre $\alpha_j - 1$ de P'. On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal à $k+l-1+\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j - 1) = k + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j - 1 = n-1$ racines réelles et c'est fini.

Correction de l'exercice 2198 ▲

Puisque $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$, $\exists A > 0/\ \forall x > 0,\ (x \geq A \Rightarrow xf'(x) \geq \frac{1}{2})$.

Soit x un réel fixé supérieur ou égal à A. $\forall t \in [A,x],\ f'(t) \geq \frac{1}{2x}$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\int_A^x f'(t)\,dt \geq \int_A^x \frac{1}{2t}\,dt$ ce qui fournit :

$$\forall x \geq A,\ f(x) \geq f(A) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln A),$$

et montre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 2199 ▲

$$\forall x \in \mathbb{R} f(\frac{x}{2}+3) = f(f\circ f(x)) = f\circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3.$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}f'(\frac{x}{2}+3) = \frac{1}{2}f'(x)$,
et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(\frac{x}{2}+3) = f'(x).$$

Soit alors x un réel donné et u la suite définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(x) = f'(u_n)$. Maintenant, u est une suite arithmético-géométrique et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 6 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 6)$$

ce qui montre que la suite u converge vers 6. La suite $(f'(u_n))_{n\geq 0}$ est constante, de valeur $f'(x)$. f' étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f'(6),$$

ce qui montre que la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que f est affine.
Réciproquement, pour x réel, posons $f(x) = ax+b$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a(ax+b)+b = \frac{x}{2}+3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a^2 - \frac{1}{2})x + ab + b - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \text{ et } (a+1)b = 3 \Leftrightarrow (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2-\sqrt{2})) \text{ ou } (a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2+\sqrt{2})). \end{aligned}$$

On trouve deux fonctions solutions, les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2-\sqrt{2}) \text{ et } f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2+\sqrt{2}).$$

Correction de l'exercice 2200 ▲

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Pour x réel, posons $g(x) = e^x f(x)$. g est dérivable sur R et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$. Il s'agit donc maintenant de montrer que si $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g'(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq A \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < e^{-x}g'(x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}e^x \leq g'(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}e^x).$$

Pour x réel donné supérieur ou égal à A, on obtient en intégrant sur $[A,x]$:

$$-\frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A) = \int_A^x -\frac{\varepsilon}{2}e^t\, dt \leq \int_A^x g'(t)\, dt = g(x) - g(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A),$$

et donc

$$\forall x \geq A,\ g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) \leq e^{-x}g(x) \leq g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}).$$

Maintenant, $g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x})$ et $g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x})$ tendent respectivement vers $-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc,

$$\exists B \geq A/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq B \Rightarrow g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) > -\varepsilon \text{ et } < g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) < \varepsilon.$$

Pour $x \geq B$, on a donc $-\varepsilon < e^{-x}g(x) < \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B > 0/\ \forall x \in \mathbb{R}$, $(x \geq B \Rightarrow |e - xg(x)| < \varepsilon)$ et donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 2208 ▲

$f'(a)f'''(a) - f''(a)^2$.

Correction de l'exercice 2211 ▲

(a) Formule de Taylor Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0.

(b) Sinon, la fonction $g : x \mapsto f(x) - (1-2x)^n$ est monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et nulle en 0 et $\frac{1}{2}$, donc identiquement nulle. Impossible car $g^{(n)}(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Correction de l'exercice 2212 ▲

(a) Formule de Taylor pour f et f' $\Rightarrow \lambda = 1/180$.

(b)

Correction de l'exercice 2213 ▲

(a) Formule de Taylor pour calculer $f(a)$ et $f(b)$ à partir de $f(x)$.

(b) Étudier $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \pm M(x-a)^2/2$.

Correction de l'exercice 2214 ▲

Appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 de x à a et de x à $-a$.

Correction de l'exercice 2215 ▲

$f^{(n)}(a + h\theta_h) = f^{(n)}(a) + h\theta_h f^{(n+1)}(a + \theta' h) = f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta'' h)$.

Correction de l'exercice 2217 ▲

(a) $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x + \theta h) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x + \theta h)$.

(b) $h = 2\sqrt{\alpha/\beta} \Rightarrow |f'| \leq 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Correction de l'exercice 2218 ▲

(a) $= f(x+y)+\frac{y^2}{2}(M-f''(z))$.

(b) $\Delta \leq 0$.

(c) $\sqrt{f}$ est affine.

Correction de l'exercice 2220 ▲

Soit $\varepsilon > 0$: $f(x+\varepsilon x) = f(x)+\varepsilon x f'(x)+\frac{\varepsilon^2 x^2}{2}f''(x+\varepsilon\theta x) \Rightarrow xf'(x) = \frac{f(x+\varepsilon x)-f(x)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon x^2}{2}f''(x+\varepsilon\theta x)$.

Correction de l'exercice 2221 ▲

Si $Q = P\circ f$ alors $Q' = f'\times(P'\circ f)$ a autant de racines que P' d'où $p=q$, $f(y_i) = x_i$ et $Q(y_i) = P(x_i)$. De plus, au voisinage de y_i :

$$\lambda_i(y-y_i)^{n_i} \sim Q'(y) = f'(y)\times P'(f(y)) \sim f'(y_i)\times\mu_i(f(y)-x_i)^{m_i} \sim \mu_i f'(y_i)^{1+m_i}(y-y_i)^{m_i}$$

d'où $m_i = n_i$.

Réciproquement, si $p=q$, $P(x_i) = Q(y_i)$ et $m_i = n_i$ alors en posant $x_0 = y_0 = -\infty$ et $x_{p+1} = y_{p+1} = +\infty$, P induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]x_i,x_{i+1}[$ sur $P(]x_i,x_{i+1}[) = Q(]x_i,x_{i+1}[)$ (les limites de P et Q en $+\infty$ sont égales à $+\infty$ vu les coefficients dominants de P et Q ; celles en $-\infty$ s'en déduisent en comptant les changements de signe pour P' ou pour Q' et on trouve le même compte puisque $m_i = n_i$). On note f_i la fonction réciproque de $P_{|]x_i,x_{i+1}[}$ et f définie par $f(y) = f_i(Q(y))$ si $y_i < y < y_{i+1}$ et $f(y_i) = x_i$. f ainsi définie est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ à dérivée non nulle sauf peut-être aux y_i, et $P\circ f = Q$. Reste à étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ en y_i et à vérifier que $f'(y_i)\neq 0$.

Au voisinage de y_i, par intégration des DL de P et Q on a :

$$\frac{\lambda_i}{1+m_i}(y-y_i)^{1+m_i} \sim Q(y)-Q(y_i) = P(f(y))-P(f(y_i)) \sim \frac{\mu_i}{1+m_i}(f(y)-f(y_i))^{1+m_i}$$

d'où $\frac{f(y)-f(y_i)}{y-y_i} \to \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$ lorsque $y\to y_i$, car les taux d'accroissement de f sont positifs. Ceci prouve que f est dérivable en y_i et $f'(y_i) = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)} \neq 0$. Enfin on a, lorsque $y\to y_i$:

$$f'(y) = \frac{Q'(y)}{P'(f(y))} \sim \frac{\lambda_i(y-y_i)^{m_i}}{\mu_i(f(y)-f(y_i))^{m_i}} \to \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-m_i/(1+m_i)} = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$$

et donc f est $\mathscr{C}^1$ en y_i.

Correction de l'exercice 2222 ▲

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 2 permet d'écrire

$$\begin{aligned}&f(x+y) = f(x)+yf'(x)+\tfrac{y^2}{2}f''(x)+\textstyle\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \text{ et}\\ &f(x-y) = f(x)-yf'(x)+\tfrac{y^2}{2}f''(x)\textstyle\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(f(x)^2) &\geq f(x+y)f(x-y)\\
&= (f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x)+\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt)\times\\
&\quad (f(x)-yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x)+\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt)\\
&= (f(x))^2+y^2(f(x)f''(x)-(f'(x))^2)\\
&\quad +(f(x)-yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x))\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\\
&\quad +(f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x))\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\ (*)\end{aligned}$$

Maintenant, pour $y\in[-1,1]$, ($f^{(3)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur le segment $[-1,1]$),

$$\left|\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right|\leq|y|.\frac{y^2}{2}\mathrm{Max}\{|f^{(3)}(t)|,\ t\in[x-1,x+1]\},$$

et donc,

$$\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right|\leq|y|\mathrm{Max}\{|f^{(3)}(t)|,\ t\in[x-1,x+1]\}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right|$ tend vers 0 quand y tend vers 0. De même, $\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right|$ tend vers 0 quand y tend vers 0.

On simplifie alors $(f(x)^2$ dans les deux membres de $(*)$. On divise les deux nouveaux membres par y^2 pour $y\neq 0$ puis on fait tendre y vers 0 à x fixé. On obtient $0\geq f(x)f''(x)-(f'(x))^2$, qui est l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 2223 ▲

Soit $x\in[0,1]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$.
D'après la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit

$$\sin x=x-\int_0^x(x-t)\sin t\,dt\leq x,$$

car pour $t\in[0,x]$, $(x-t)\geq 0$ et pour $t\in[0,x]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin t\geq 0$.
De même, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 3 fournit

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^3}{6}\sin t\,dt\geq x-\frac{x^3}{6}.$$

Donc, $\forall x\in[0,1]$, $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$.
Soient alors $n\geq 1$ et $k\in\{1,...,n\}$. On a $0\leq\frac{1}{(n+k)^2}\leq 1$ et donc

$$\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6(n+k)^6}\leq\sin\frac{1}{(n+k)^2}\leq\frac{1}{(n+k)^2},$$

puis en sommant

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{6(n+k)^6}\leq\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}.$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}=\frac{1}{n}\left(\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx+o(1)\right)=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

D'autre part,

$$0\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{6(n+k)^6}\leq n.\frac{1}{6n^6}=\frac{1}{6n^5},$$

et donc, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{6(n+k)^6}=o(\frac{1}{n})$.

On en déduit que $2n(\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6(n+k)^6})=2n(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))=1+o(1)$ et que $2n\frac{1}{(n+k)^2}=1+o(1)$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $2n\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}.$$

Correction de l'exercice 2224 ▲

(a) $\ln(\cos x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o\left(x^6\right)$.

(b) $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right)$.

(c) $\sin(\tan x)=x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{55}{1008}x^7+o\left(x^7\right)$.

(d) $(\ln(1+x))^2=x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+o\left(x^4\right)$.

(e) $\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.

(f) $\sin^6 x = x^6 + o\left(x^6\right)$.

Correction de l'exercice 2226 ▲

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\tan(x)-\arcsin(x)} = -1.$$

Correction de l'exercice 2227 ▲

(a) $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.

(b) $\dfrac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.

(c) $\ln(\tan(1/2x+1/4\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.

(d) $\ln\sin x = \ln(1/2\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

(e) $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x} = 2/3\,\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^4})$.

(f) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}ex^2 - \frac{7}{16}ex^3 + o\left(x^3\right)$.

(g) $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right) = 1/8\,\frac{\sqrt{2}}{x^2} + o(x^{-5})$.

Correction de l'exercice 2234 ▲

$\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ donc $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x}$ d'où $\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right)\ln x = \left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}\right)} - 1\right)\ln x \sim x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}\right)\ln x \sim 1$ d'où la limite égale à 1.

Correction de l'exercice 4093 ▲

A 1.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\phi^{(n-m)}(t)(z-a)f^{(m+1)}(a+t(z-a))\Big]\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^{m+1}\phi^{(n-m)}(t)f^{(m+1)}(a+t(z-a))
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice de sommation $m = m'+1$ dans la deuxième somme ; tous les termes s'éliminent deux à deux, à l'exception du premier terme de la première somme et du dernier terme de la deuxième somme, d'où le résultat demandé.

2.a. Plus généralement, on a le résultat suivant : si une fonction f est nulle en zéro et de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant zéro, $g(t) = f(t)/t$ est prolongeable par continuité en zéro et son prolongement est de classe C^n. Gardons nous de déduire fallacieusement ce résultat de l'existence d'un développement limité d'ordre n de g. On montre à l'aide d'un développement limité d'ordre 1 de f que g est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = f'(0)$. Par ailleurs, g est de classe C^{n+1} sur $I\setminus\{0\}$. Faisons l'hypothèse de récurrence $g^{(k-1)}(t) = \frac{f^{(k)}(0)}{k} + \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{t}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!} + o(t^{n-k+1})$ $(1 \le k \le n,\ t \ne 0)$. En dérivant k fois l'identité $f(t) = tg(t)$, on obtient que $\forall t \ne 0\ \ g^{(k)}(t) = \frac{f^{(k)}(t)-kg^{(k-1)}(t)}{t}$. Or $f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0) + f^{(k+1)}(0)\frac{t}{1!} + \cdots + f^{(n+1)}(0)\frac{t^{n+1-k}}{(n-k)!} + o(t^{n+1-k})$. En substituant ces développements limités dans l'identité précédente, on montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang suivant, donc pour tout entier k

de 1 à $n+1$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $g^{(k)}(0)$ existe et est égale à $f^{(k+1)}(0)/(k+1)$ $(0 \leq k \leq n)$. Du développement limité de $g^{(k)}$ (tronqué à l'ordre 1) et de l'hypothèse de récurrence, il résulte que $g^{(k)}$ est continue et dérivable en zéro et que, si $k < n$, $g^{(k+1)}(0) = f^{(k+2)}(0)/(k+2)$, ce qui prouve par récurrence que g est n fois continument dérivable sur I.

Par conséquent, $t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en une fonction indéfiniment dérivable sur R. Cette fonction ne s'annulant jamais, son inverse est également définie et indéfiniment dérivable sur R.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$ est paire car

$$\begin{aligned}\frac{-t}{e^{-t}-1} + \frac{-t}{2} &= \frac{-te^t}{1-e^t} - \frac{t}{2}\\ &= \frac{te^t - t + t}{e^t - 1} - \frac{t}{2}\\ &= \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Donc le développement limité de $\frac{t}{e^t-1}$, dont l'existence est garantie par le fait que la fonction est indéfiniment dérivable, est de la forme demandée par l'énoncé.

Par conséquent

$$\frac{t}{e^t-1}(e^{zt}-1) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{b_1 t^2}{2!} + \frac{b_2 t^4}{4!} + \cdots + \frac{b_N t^{2N}}{(2N)!} + o(t^n)\right) \times \left(zt + \frac{z^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n t^n}{n!} + o(t^n)\right)$$

et $\phi_n(z)/n!$ est le coefficient de t^n dans ce développement :

$$\phi_n(z)/n! = \frac{z^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b_1}{2!}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b_2}{4!}\frac{z^{n-4}}{(n-4)!} + \cdots + \frac{b_N}{(2N)!}\frac{z^{n-2N}}{(n-2N)!},$$

d'où l'expression de ϕ_n demandée.

2.b.

$$\begin{aligned}\phi_n(z+1) - \phi_n(z) &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1} - t\frac{e^{(z+1)t}-1}{e^t-1}\right)\\ &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(te^{zt}\right)\end{aligned}$$

Comme $t \mapsto te^{zt}$ est de classe C^∞ et que son développement limité d'ordre n en $t=0$ est $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{k!}t^{k+1} + o(t^n)$, il vient $\phi_n(z+1) - \phi_n(z) = nz^{n-1}$.

3. (i) est obtenue en dérivant autant de fois que nécessaire l'identité précédente et en donnant à z la valeur zéro. (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont des conséquences immédiates de 2.a.

4.a. On applique la question 1 au polynôme ϕ_{2n} de degré 2n et on intègre entre 0 et 1. Il vient

$$\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m(z-a)^m\left[\phi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z) - \phi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right] = -(2n)!\big(f(z)-f(a)\big) + (z-a)^{2n+1}\int_0^1 \phi_{2n}(t)f\Big(a+(z-a)t\Big)dt$$

en tenant compte du fait que $\phi_{2n}^{(2n)} = (2n)!$

On obtient l'égalité demandée en substituant aux dérivées itérées de ϕ_{2n} les expressions déterminées dans la question 3.

4.b. Appliquons la question précédente en remplaçant f par une primitive de F et z par ω. Il vient

$$\begin{aligned}0 = \int_a^{a+\omega} F(t)dt - \frac{\omega}{2}(F(a+\omega)+F(a))\\ + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+\omega) - F^{(2m-1)}(a)\right]\\ - \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t)F^{(2n)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

Lorsqu'on somme les égalités obtenues en remplaçant a successivement par lui-même, $a+\omega$, …, $a+(r-1)\omega$, on obtient le résultat demandé, certains termes se simplifiant deux à deux.

B 1. On a pour tout $x > 0$ fixé

$$u_k(x) = \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + x\ln\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{x}{k} - \frac{x}{k+1} + O(\frac{1}{k^2}) = O(\frac{1}{k^2})$$

Donc la série $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ converge.

2.

$$\begin{aligned}
&\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1)\\
&\qquad = \ln(x+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}\Big[-\ln(k)+(x+1)\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\Big]\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}x(\ln(k)-\ln(k+1))-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n}u_k(x)+\ln(x+n+1)-\ln(n+1)
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(x+n+1)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$ tend vers zéro ; on obtient donc par passage à la limite l'égalité souhaitée.

3. Pour tout $k\geq 1$ entier, $u_k(1)=0$, donc $G(1)=0$ et on prouve aisément par récurrence à l'aide de la question précédente que pour tout entier strictement positif n, $G(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, égalité de laquelle on déduit immédiatement le résultat demandé.

4. immédiat

5. C'est une application directe de la question A.4.b.
$T_{p,n}(x,y)=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\phi_{2p}(t)\sum_{m=0}^{n-1}f^{(2p)}(m+t)dt=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^n\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$

6. L'intégrande dans l'expression de $T_{p,n}(x,y)$ est majorée en valeur absolue par le produit de la borne supérieure de la fonction continue ϕ_{2p} sur le segment $[0,1]$ et de la valeur absolue de $f^{(2p)}$.

On prouve aisément par récurrence que $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)=O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right)$ (quand $t\to+\infty$). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$ est absolument convergente, ce qui prouve que $T_{p,n}(x,y)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

7. D'après les questions 4 et 5,

$$\begin{aligned}
G(y)-G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]+\ln y-\ln x\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}[\ln(y+k)-\ln(x+k)]+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\right\}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\Bigg\{(y+n)\ln(y+n)-(y+n)-y\ln y+y-(x+n)\ln(x+n)\\
&\qquad +(x+n)+x\ln x-x+\frac{1}{2}\big(\ln y-\ln x+\ln(y+n)-\ln(x+n)\big)\\
&\qquad +\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-\frac{1}{y^{2h-1}}+\frac{1}{x^{2h-1}}\big)+T_{p,n}(x,y)+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Or $(y+n)\ln(y+n)-(x+n)\ln(x+n)=(y-x)\ln n+y-x+o(1)$ quand $n\to+\infty$. On obtient donc après simplifications $G(y)-G(x)=g(x)-g(y)+R_n(x,y)$, ce qu'il fallait démontrer.

8. D'après la question 5 et l'expression des dérivées successives de f donnée dans la question 6, $T_{p,n}(x,y)$ est majoré en valeur absolue par le produit d'une constante et de l'intégrale $\int_0^n\left|\frac{1}{(y+t)^{2p}}-\frac{1}{(x+t)^{2p}}\right|dt$. $|R_p(x,y)|$ est majoré de la même façon en remplaçant la borne finale d'intégration n par $+\infty$. L'argument de la valeur absolue gardant un signe constant, l'intégrale majorante est égale à $\frac{1}{2p-1}\left[\left|\frac{1}{(y+t)^{2p-1}}-\frac{1}{(x+t)^{2p-1}}\right|\right]_0^{+\infty}$ et on obtient ainsi l'estimée souhaitée.

9. On a $g(m)=m\ln m-m-\frac{1}{2}\ln m+o(1)$ et $G(m)=-\ln(m-1)!=-\ln m!+\ln m$ pour m entier, donc le résultat demandé découle immédiatement de la formule de Stirling $m!\sim\sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m}$.

10. Le résultat demandé est obtenu à partir de l'égalité de la question 7 par passage à la limite. On fait tendre x vers $+\infty$ par valeurs entières et on tient compte de l'estimée obtenue dans la question 8.

11. En calculant les premiers termes du développement limité de la question A.2.a, on trouve $b_1=1/6$, $b_2=-1/30$, $b_3=1/42$. Des questions 3 et 10, il résulte que

$$\begin{aligned}
\ln(m!) &= -G(m)+\ln m\\
&= m\ln m-m+\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{12}\frac{1}{m}-\frac{1}{360}\frac{1}{m^3}+\frac{1}{1260}\frac{1}{m^5}+O(\frac{1}{m^7})
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2237 ▲

$e^{1/3}\left(1+\frac{7}{90}x^2+o(x^3)\right)$.

Correction de l'exercice 2238 ▲

(a) Si $x\in]0,\pi[$, $\sin x>0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$) et de plus $(\sin x)^{1/(2x-\pi)}=e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\sin x)\sim\sin x-1=-\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2=-\frac{(2x-\pi)^2}{8}.$$

Donc, $\frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi}\sim-\frac{2x-\pi}{8}\to 0$ et enfin $(\sin x)^{1/(2x-\pi)}=e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}\to e^0=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}=1.}$$

(b) Si $x\in]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $|\tan x|>0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ et de plus $|\tan x|^{\cos x}=e^{\cos x\ln(|\tan x|)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$\ln|\tan x|=\ln|\sin x|-\ln|\cos x|\sim-\ln|\cos x|,$$

puis $\cos x\ln|\tan x|\sim-\cos x\ln|\cos x|\to 0$ (car, quand u tend vers 0, $u\ln u\to 0$). Donc, $|\tan x|^{\cos x}=e^{\cos x\ln|\tan x|}\to e^0=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan x|^{\cos x}=1.}$$

(c) Quand n tend vers $+\infty$, $\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\to\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=1$ (et on est en présence d'une indétermination du type $1^{+\infty}$). Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi}{3n+1}&=\cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{18n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sin\frac{n\pi}{6n+1}&=\sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-1}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{72n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Puis,

$$n\ln\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)=n\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{24}+o(1),$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n=e^{\sqrt{3}\pi/24}.}$$

(d) Quand x tend vers 0, $\ln(\cos x)\sim\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x|\ln(\cos x)\sim-\frac{x^2}{2}\ln|x|\to 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|}\to e^0=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}=1.}$$

(e) Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1-\sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon = \mathrm{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon|\sin h|e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h|+\frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or, quand h tend vers 0,

$$\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} = \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h|+1}{1-\cos h} = \frac{(-\frac{h^2}{2}+o(h^2))(\ln|h|+o(\ln|h|))+1}{\frac{h^2}{2}+o(h^2)} = \frac{1+o(1)}{\frac{h^2}{2}+o(h^2)} \sim \frac{2}{h^2},$$

et donc, quand h tend vers 0, $\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} \sim \frac{2}{h^2} \to +\infty$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2,\, x<\pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to\pi/2,\, x>\pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = -\infty.}$$

(f) Pour $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour $x \notin \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc, $\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3$.

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1} = -3.}$$

(g) Quand x tend vers 0,

$$\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\, x} = \frac{1+x+o(x)}{1+x+o(x)} = (1+x+o(x)(1-x+o(x)) = 1+o(x).$$

Puis, quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\, x}\right) = \frac{\ln(1+o(x))}{x+o(x)} = \frac{o(x)}{x+o(x)} = \frac{o(1)}{1+o(1)} \to 0.$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\, x}\right)^{1/\sin x} = 1.}$$

(h) Quand x tend vers e par valeurs inférieures, $\ln(x)$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \to 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \to 1$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} (\ln x)^{\ln(e-x)} = 1.}$$

(i) Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $x\ln x \to 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \sim x\ln x \sim 1 \times (x-1) = x-1.$$

Ensuite, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers 0 et donc

$$\ln(1-\sqrt{x^2-1}) \sim -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} \sim \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>e}} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}=0.}$$

(j) Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(\mathrm{ch}\,x-1)\sim\ln(\mathrm{ch}\,x)\sim\ln\left(\frac{e^x}{2}\right)=x-\ln 2\sim x,$$

et donc

$$\frac{x\ln(\mathrm{ch}\,x-1)}{x^2+1}\sim\frac{x\times x}{x^2}=1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(\mathrm{ch}\,x-1)}{x^2+1}=1.}$$

(k) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\ln(x-x^2)+x-\ln x=x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim-\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$(\sin x)^x=e^{x\ln(\sin x)}=e^{x\ln(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}=e^{x\ln x}e^{x\ln(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}=x^xe^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right),$$

et,

$$x^{\sin x}=e^{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\ln x}=e^{x\ln x}e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)}=x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right).$$

Donc,

$$(\sin x)^x-x^{\sin x}=x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right)=x^x\left(\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right)\sim\frac{x^3\ln x}{6},$$

et enfin

$$\frac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{\ln(x-x2)+x-\ln x}\sim\frac{x^3\ln x/6}{-x^2/2}=-\frac{x\ln x}{3}\to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{\ln(x-x2)+x-\ln x}=0.}$$

(l) Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)=\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\to 0.$$

Donc, $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x=\exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)\to e^0=1.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x=1.}$$

(m) Quand x tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{(\mathrm{Arcsin}\,x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{Arcsin}\,x+\frac{\pi}{4}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\mathrm{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim\frac{1}{2}\times\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\mathrm{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\mathrm{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\to\frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\mathrm{Arcsin})'(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} = \frac{\pi}{4}.}$$

(n) Quand x tend vers $+\infty$,

$$x\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right) = x\ln\left(\cos\frac{1}{x}-\tan a\sin\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(1-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= -\tan a + o(1),$$

et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}.}$$

Correction de l'exercice 2239 ▲

(a)

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+(x^2+x^3)+(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3+o(x^7) = 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).}$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)\right)^{-1} = 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^7)$$
$$= 1+\frac{x^2}{2}+x^4\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o(x^7) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{5}{24}x^4+\tfrac{61}{720}x^6+o(x^7).}$$

(b)

(c) **Remarques.**

i. Pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, on a $0<\frac{x}{\tan x}<1$ et donc la fonction $x\mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).

ii. Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\tan x}\to 1$ et donc $\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).

iii. La fonction $x\mapsto \operatorname{Arccos} x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (donc à priori, c'est mal parti).

iv. La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

• Recherche d'un équivalent simple de $\operatorname{Arccos} x$ en 1 à gauche. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\operatorname{Arccos} x\to 0$ et donc,

$$\operatorname{Arccos} x \sim \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

• Déterminons un équivalent simple de $\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction $x\mapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus). • Déterminons un équivalent simple de $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}} \sim \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x)$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^{-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\right)^{1/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{45}+o(x^5)\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{x^2}{15}+o(x^2)\right)^{1/2}\\ &= \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3),\end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &= \left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right) = \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right)\\ &= \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3),\end{aligned}$$

et finalement,

$$g(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3)\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3)\right) = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3) \sim \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\tfrac{x}{\tan x}}\right) \underset{x\to 0}{=} \tfrac{|x|}{\sqrt{3}}+\tfrac{4|x|^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).}$$

(Ce n'est pas un développement limité).

(d) La fonction $x \mapsto \tan x$ est trois fois dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et admet donc en $\frac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG. $\tan\frac{\pi}{4}=1$ puis $(\tan)'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\frac{\pi}{4}=2$. Ensuite, $(\tan)''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$ et $(\tan)''(\frac{\pi}{4})=4$. Enfin,

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4})=16$. Finalement,

$$\boxed{\tan x \underset{x\to\pi/4}{=} 1+2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^2+\tfrac{8}{3}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3\right).}$$

$$\frac{1}{x^2}\ln(\operatorname{ch}x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right) = \frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2),$$

et donc

$$(\operatorname{ch}x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)} = e^{1/2}e^{-\frac{x^2}{12}+o(x^2)} = \sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{12}x^2+o(x^2).$$

(e)

$$\boxed{(\operatorname{ch}x)^{1/x^2} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{e}-\tfrac{\sqrt{e}}{12}x^2+o(x^2).}$$

(f) $\tan^3 x(\cos(x^2)-1) = \tan x\times\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ et un équivalent de $\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ en 0 est $-\frac{x^6}{2}$. On écrit donc $\tan x$ à l'ordre 2. De même, un équivalent de $\tan^3 x$ est x^3 et on écrit donc $\cos(x^2)-1$ à l'ordre 5.

$$\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} (x+o(x^2))^3\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right) = (x^3+o(x^4))\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right) = -\frac{x^7}{2}+o(x^8).$$

$$\boxed{\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^7}{2}+o(x^8).}$$

(g) On pose $h=x-1$ ou encore $x=1+h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2}\\ &\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)\left(1-2h+\frac{(-2)(-3)}{2}h^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3+o(h^3)\right)\\ &= \left(\ln 2+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)\right)(1-2h+3h^2-4h^3+o(h^3))\\ &= \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)h+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)h^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)h^3+o(h^3).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} \ln 2+\left(\tfrac{1}{2}-2\ln 2\right)(x-1)+\left(3\ln 2-\tfrac{9}{8}\right)(x-1)^2+\left(-4\ln 2+\tfrac{43}{24}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

(h) Pour x réel, posons $f(x)=\mathrm{Arctan}(\cos x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour x réel, $f'(x)=-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned}f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)^{-1}\\ &= -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(2-x^2+o(x^3)\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).\end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\mathrm{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arctan}(\cos 0)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5) = \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).$$

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).}$$

(i) Pour $x>-1$, posons $f(x)=\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x>-1$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}}\\ &= \frac{1}{2\times 3\times\sqrt{2}}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}(1+x)^{-1/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{2x}{3}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{4}+o(x)\right)\\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x+o(x)\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{17x}{12}+o(x)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}x-\frac{17}{144\sqrt{2}}x^2+o(x^2).}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3+o(x^7)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+o(x^7).\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o(x^8)$. Ensuite,

$$\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} = (\text{Arcsin}\,x)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o(x^7)\right)^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1-2\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}\right)+3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}\right)^2-4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3+o(x^7)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(-\frac{5}{56}+\frac{3}{40}-\frac{1}{54}\right)x^4+o(x^5)$$
$$= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{31x^4}{945}+o(x^5).$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{31x^4}{945}+o(x^5).}$$

(j)

(k) Pour x réel, posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel $g(x) = F(x^2)-F(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x) = 2xF'(x^2)-F'(x) = 2xf(x^2)-f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Puis,

$$g'(x) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(1-\frac{1}{2}x^8+o(x^8)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+o(x^9)\right) = -1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o(x^9).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0) = 0$, on obtient

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2+\frac{x^5}{10}-\frac{x^9}{24}-\frac{x^{10}}{10}+o(x^{10}).}$$

(l)

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right) = \ln(e^x)+\ln\left(1-e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\right)$$
$$= x+\ln\left(1-(1+o(1))\left(\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)\right) = x+\ln\left(1-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right) = x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})$$

$$\boxed{\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100}).}$$

(m) Posons $h = x-\pi$ ou encore $x = \pi+h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)} = \sqrt[3]{4(\pi^3+(\pi+h)^3)} = \sqrt[3]{8\pi^3+12\pi^2 h+12\pi h^2+4h^3}$$
$$\underset{h\to 0}{=} 2\pi\left(1+\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)^{1/3}$$
$$= 2\pi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{3h}{2\pi}\right)^3+o(h^3)\right)$$
$$= 2\pi+h+h^2\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\right)+h^3\left(\frac{1}{3\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{5}{12\pi^2}\right)+o(h^3)$$
$$= 2\pi+h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3).$$

Puis,

$$\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) = \tan\left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3)\right)$$
$$= \left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}\right)+\frac{1}{3}h^3+o(h^3) = h+\frac{h^2}{2\pi}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)h^3+o(h^3).$$

Finalement,

$$\boxed{\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x\to\pi}{=} (x-1)+\frac{1}{2\pi}(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

Correction de l'exercice 2240 ▲

Puisque $a>0$, $b>0$ et que pour tout réel x, $\frac{a^x+b^x}{2}>0$, f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$

Etude en 0.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)&=\ln\left(\frac{e^{x\ln a}+e^{x\ln b}}{2}\right)\underset{x\to 0}{=}\ln\left(1+x\left(\frac{1}{2}\ln a+\frac{1}{2}\ln b\right)+x^2\left(\frac{1}{4}\ln^2 a+\frac{1}{4}\ln^2 b\right)+o(x^2)\right)\\&=\ln\left(1+x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}+o(x^2)\right)=x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}-\frac{1}{2}(x\ln\sqrt{ab})^2+o(x^2)\\&=x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{1}{8}(\ln^2 a-2\ln a\ln b+\ln^2 b)x^2+o(x^2)=x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{1}{8}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)+o(x^2).\end{aligned}$$

Enfin,

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\exp(\ln(\sqrt{ab})+\frac{1}{8}\ln^2\frac{a}{b}x+o(x))=\sqrt{ab}(1+\frac{1}{8}x\ln^2\frac{a}{b}+o(x)).$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=\sqrt{ab}$. Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b}(>0)$. **Etude en** $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}(a^x+b^x)\right)&=\frac{1}{x}\left(\ln(b^x)-\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)\right)=\frac{1}{x}(x\ln b+o(x))\quad(\text{car } 0<\frac{a}{b}<1)\\&=\ln b+o(1).\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b(=\mathrm{Max}\{a,b\})$. **Etude en** $-\infty$. Pour tout réel x,

$$f(-x)=\left(\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\right)^{-1/x}=\left(\frac{a^x+b^x}{2a^xb^x}\right)^{-1/x}=\frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to+\infty}f(-X)=\lim_{X\to+\infty}\frac{ab}{f(X)}=\frac{ab}{b}=a\quad(=\mathrm{Min}\{a,b\}).$$

Dérivée et variations. f est dérivable sur $]-\infty,0\cup]0,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour $x\neq 0$ (puisque $f>0$ sur $\mathbb{R}^*$),

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln f)'(x)=\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+\frac{1}{x}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

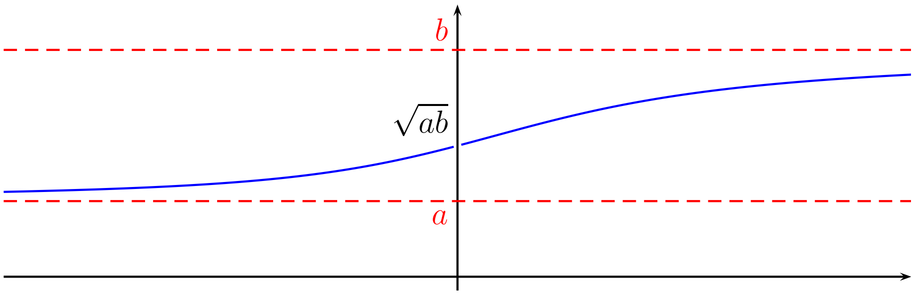
f' a le même signe que $(\ln f)'$ qui, elle-même, a le même signe que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+x\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}+\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}+x\frac{(a^x\ln^2 a+b^x\ln^2 b)(a^x+b^x)-(a^x\ln a+b^x\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}\\&=x\frac{(ab)^x(\ln a-\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}.\end{aligned}$$

g' est donc strictement négative sur $]-\infty,0[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$. Par suite, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. g' admet donc un minimum global strict en 0 et puisque $g(0)=0$, on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. De même, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. En tant compte de l'étude en 0, on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le **graphe de** f a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités $\lim_{x\to-\infty} f < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{x\to+\infty} f$ fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Correction de l'exercice 2241 ▲

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2-3} = x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/2} = x\left(1-\frac{3}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = x-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1} = 2x\left(1+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} = 2x\left(1+\frac{7}{24x}-\frac{49}{576x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x+\frac{7}{12}-\frac{49}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x-\frac{7}{12}-\frac{383}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet donc en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y=-x-\frac{7}{12}$. De plus, le signe de $f(x)-\left(-x-\frac{7}{12}\right)$ est, au voisinage de $+\infty$, le signe de $-\frac{383}{288x}$. Donc la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y=-x-\frac{7}{12}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'exercice 2242 ▲

---

f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en tant que fraction rationelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel n, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x+x^3+\ldots+x^{2n+1}+o(x^{2n+1}),$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité et d'après la formule de TAYLOR-YOUNG, on obtient

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(2n)}(0)=0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)!.}$$

Ensuite, pour $x\notin\{-1,1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

Correction de l'exercice 2243 ▲

(a)
$$\sqrt{x^2+3x+5}-x+1 \underset{x\to-\infty}{\sim} -x-x=-2x,$$

et,

$$\sqrt{x^2+3x+5}-x+1 = \frac{(x^2+3x+5)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+5}+x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x+2x}{x+x} = \frac{5}{2}.$$

(b) $3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x$ et $3x^2-6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$. Ensuite, quand x tend vers 1, $3x^2-6x$ tend vers $-3\neq 0$ et donc, $3x^2-6x \underset{x\to 1}{\sim} -3$. Enfin, $3x^2-6x = 3x(x-2) \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2)$.

$$\boxed{3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x \qquad 3x^2-6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2 \qquad 3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -3 \qquad 3x^2-6x \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2).}$$

(c)

$$(x-x^2)\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{=} (x-x^2)\ln x+(x-x^2)\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = x\ln x - x^2\ln x + o(x^2\ln x).$$

Ensuite,

$$\sin x\ln(x-x^2) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(\ln x+\ln(1-x)) = (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(\ln x - x+o(x)) = x\ln x+o(x^2\ln x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x} &= e^{x\ln x}(e^{-x^2\ln x+o(x^2\ln x)}-e^{o(x^2\ln x)}) = e^{x\ln x}(1-x^2\ln x-1+o(x^2\ln x))\\ &= (1+o(1))(-x^2\ln x+o(x^2\ln x)) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.\end{aligned}$$

$$\boxed{(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.}$$

(d) $\text{th}\,x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{=} (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+o(e^{-2x})) = 1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})$, et donc $\text{th}\,x\ln x = (1-2e^{-2x}+o(e^{-2x}))\ln x = \ln x+o(1)$. Par suite,

$$x^{\text{th}x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

(e) **Tentative à l'ordre 3.**
$\tan(\sin x) \underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = \left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{3}(x)^3+o(x^3) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, et,
$\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}(x)^3+o(x^3) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$. L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent. **Tentative à l'ordre 5.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right) = \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{2}{15}(x)^5+o(x^5)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+x^5\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)+o(x^5) = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+\frac{1}{120}(x)^5+o(x^5)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5) = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5).\end{aligned}$$

Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$. L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto\sin(\tan x)$ et $x\mapsto\tan(\sin x)$ est très fort. **Tentative à l'ordre 7.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)\\ &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\\ &= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{3}\left(3\times\frac{1}{120}+3\times\frac{1}{36}\right)+\frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7)\\ &= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17}{x^7}315+o(x^7)\right)\\
&= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^5-\frac{1}{5040}(x)^7+o(x^7)\\
&= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{6}\left(3\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{120}\times\frac{5}{3}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7)\\
&= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{15}-\frac{1}{18}+\frac{1}{72}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}-\frac{1}{72}\right)x^7+o(x^7)=\frac{x^7}{30}+o(x^7),$$

et donc

$$\boxed{\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^7}{30}.}$$

Correction de l'exercice 2244 ▲

Pour $n \geq 5$, on a

$$u_n = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0 \leq n^3\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leq n^3(n-4)\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc, $\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et de même $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$\begin{aligned}u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k! \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).}$$

Correction de l'exercice 2245 ▲

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)^{-1}-1\right)\\
&= \frac{1}{x^2}\left(-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)\\
&= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+x^3\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+x^4\left(-\frac{1}{120}+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{24}\right)-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+o(x^4)\right)\\
&= -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).}$$

$$x\ln(x+1)-(x+1)\ln x = x\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x + x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$
$$= -\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

(b) $$\boxed{x\ln(x+1)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x+1-\tfrac{1}{2x}+\tfrac{1}{3x^2}-\tfrac{1}{4x^3}+o\left(\tfrac{1}{x^3}\right).}$$

Correction de l'exercice 2246 ▲

(a)
$$f_n(a)=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(a-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

$$f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{=} e^{a+b}\left(1-\frac{(a+b)^2}{2n}\right)-e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1-\frac{b^2}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=e^{a+b}\frac{-(a+b)^2+a^2+b^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{ab\,e^{a+b}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, si $ab\neq 0$, $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{ab\,e^{a+b}}{n}$. Si $ab=0$, il est clair que $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)=0$.

(b) $e^{-a}f_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-a+\left(a-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\left(-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc
$$e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 2247 ▲

Pour n entier naturel donné, posons $I_n=\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$. • Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in I_n$, posons $f(x)=\tan x-x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n, $f'(x)=\tan^2 x$. Ainsi, f est dérivable sur I_n et f' est strictement positive sur $I_n\setminus\{n\pi\}$. Donc f est strictement croissante sur I_n.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. f est continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n)=\mathbb{R}$. En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists! x_n\in I_n/\ f(x_n)=0$ (ou encore tel que $\tan x_n=x_n$. • On a $x_0=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f(n\pi)=-n\pi<0$ et donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\in]n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$. En particulier,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi+O(1).}$$

• Posons alors $y_n=x_n-n\pi$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $y_n\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan(y_n)=\tan(x_n)=n\pi+y_n$ et donc, puisque $y_n\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\pi}{2}>y_n=\text{Arctan}(y_n+n\pi)\geq\text{Arctan}(n\pi).$$
Puisque $\text{Arctan}(n\pi)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on a $y_n=\frac{\pi}{2}+o(1)$ ou encore

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi+\tfrac{\pi}{2}+o(1).}$$

• Posons maintenant $z_n=y_n-\frac{\pi}{2}=x_n-n\pi-\frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $z_n\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et d'autre part $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan\left(z_n+\frac{\pi}{2}\right)=n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n$ et donc $-\text{cotan}(z_n)=n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\text{cotan}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi,$$

ou encore $z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi+\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{1}{n\pi}+o\left(\tfrac{1}{n}\right).}$$

• Posons enfin $t_n=z_n+\frac{1}{n\pi}=x_n-n\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que

$$-\cot\left(t_n-\frac{1}{n\pi}\right)=-\cot(z_n)=n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+o(\frac{1}{n}).$$

Par suite,

$$-\tan\left(t_n-\frac{1}{n\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)^{-1}=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi}-t_n=\text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2n^2\pi}+o(\frac{1}{n^2})\right)=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n=\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$\boxed{x_n\underset{n\to+\infty}{=}n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction de l'exercice 2248 ▲

(a) Pour $x>0$, posons $f(x)=x+\ln x$. f est continue sur $]0,+\infty[$, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0,+\infty[$. f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0,\,x>0}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$. En particulier,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{R},\ \exists!x_k\in]0,+\infty[/\ f(x_k)=k.}$$

(b) $f\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{k}{2}+\ln\frac{k}{2}<k$ pour k suffisament grand (car $k-(\frac{k}{2}+\ln\frac{k}{2})=\frac{k}{2}-\ln\frac{k}{2}\underset{k\to+\infty}{\to}+\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées). Donc, pour k suffisament grand, $f\left(\frac{k}{2}\right)<f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $x_k>\frac{k}{2}$ pour k suffisament grand et donc que $\lim_{k\to+\infty}x_k=+\infty$. Mais alors, $k=x_k+\ln x_k\sim x_k$ et donc, quand k tend vers $+\infty$,

$$\boxed{x_k\underset{k\to+\infty}{=}k+o(k).}$$

Posons $y_k=x_k-k$. On a $y_k=o(k)$ et de plus $y_k+\ln(y_k+k)=0$ ce qui s'écrit :

$$y_k=-\ln(k+y_k)=-\ln(k+o(k))=-\ln k+\ln(1+o(1))=-\ln k+o(1).$$

Donc,

$$\boxed{x_k\underset{k\to+\infty}{=}k-\ln k+o(1).}$$

Posons $z_k=y_k+\ln k=x_k-k+\ln k$. Alors, $z_k=o(1)$ et $-\ln k+z_k=-\ln(k-\ln k+z_k)$. Par suite,

$$z_k=\ln k-\ln(k-\ln k+o(1))=-\ln\left(1-\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right)=\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{x_k\underset{k\to+\infty}{=}k-\ln k+\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right).}$$

Correction de l'exercice 2249 ▲

(a) $x^3\sin\frac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{=}O(x^3)$ et en particulier $x^3\sin\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{=}o(x^2)$. Donc, en tenant compte de $f(0)=1$,

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}1+x+x^2+o(x^2).$$

f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

(b) $f(x)\underset{x\to 0}{=}1+x+o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0)=f'(0)=1$. f est d'autre part dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x\neq 0$, $f'(x)=1+2x+3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$.

(c) f' est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite en 0. f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Correction de l'exercice 2250 ▲

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o(x^4)$, et donc

$$\text{Arcsin}\,x \underset{x\to0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5).$$

Puis,

$$\frac{1}{\text{Arcsin}\,x} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right) = \frac{1}{x}-\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}+o(x^3),$$

et donc,

$$\boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{Arcsin}\,x} \underset{x\to0}{=} \frac{x}{6}+\frac{17x^3}{360}+o(x^3).}$$

La fonction f proposée se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. Le prolongement est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{6}$. La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y=\frac{x}{6}$. Le signe de la différence $f(x)-\frac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\frac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y=\frac{x}{6}$.

Correction de l'exercice 2251 ▲

(a) $\text{Arccos}\,x \underset{x\to1^-}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x\mapsto \text{Arccos}\,x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

2) Puisque $\text{Arccos}\,x \underset{x\to1^-}{=} o(1)$,

$$\text{Arccos}\,x \underset{x\to1^-}{\sim} \sin(\text{Arccos}\,x)=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

$$\boxed{\text{Arccos}\,x \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.}$$

Correction de l'exercice 2252 ▲

(a) Quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k+2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k\right)+o(x^n)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+3+(-1)^k}{4}x^k+o(x^n).$$

(b) On a aussi,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \underset{x\to0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n}x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n}x^{2q}\right)+o(x^n)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k}1\right)x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_k=\frac{2k+3+(-1)^k}{4}.}$$

(a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).

Correction de l'exercice 2254 ▲

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan(x)-x^4}{\cos(x^2)-1}=0.$$

Correction de l'exercice 2268 ▲

(a) La fonction g est définie en x sauf si $\sin(x)=0$ ou $x=0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

(b) On peut prolonger g en une fonction continue en 0 si et seulement si elle y admet une limite. Elle est dérivable en ce point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Toutefois, comme l'énoncé demande la position du graphe de g par rapport à sa tangente en 0, nous allons calculer directement le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.

Le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+x^5\varepsilon_1(x)$.

Or $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon_2(x)$. Donc $\sin^3 x = x^3-\dfrac{x^5}{2}+\dfrac{13x^7}{120}+x^7\varepsilon_3(x)$ et $\dfrac{1}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{x^3}(1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9x^4}{40}+x^4\varepsilon_4(x))$.
On en déduit que :
$\dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^3}(x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{31x^5}{120}+x^5\varepsilon_5(x))-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{31x^2}{120}+x^2\varepsilon_5(x).$

Ainsi on peut prolonger g en une fonction continue en 0 en posant $g(0)=\dfrac{1}{6}$. La fonction obtenue est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. La tangente en 0 à son graphe est la droite d'équation $y=\dfrac{1}{6}$. Enfin le graphe de g est au-dessus de cette droite au voisinage de 0.

Correction de l'exercice 2277 ▲

$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}=0 \Rightarrow L=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^n a_k$.

Correction de l'exercice 2278 ▲

$v_p=\left(\frac{2^{1+1/p}-1}{1+1/p}\right)^p$, $w_n=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$, $v=w=\frac{4}{e}$.

Correction de l'exercice 2279 ▲

$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)\to\frac{f'(0)}{2}$ lorsque $n\to\infty$. $\left(\text{Utiliser } |f(x)-xf'(0)|\le\frac{1}{2}\sup_{0\le t\le 1}|f''(t)| \text{ pour } 0\le x\le 1\right)$

Correction de l'exercice 2280 ▲

(a) $y=1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}$.

(b) $y=-\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}$.

(c) $y=-\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}$.

(d) $y=e^3(1-4x+16x^2)$.

(e) $y=-1+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}$.

(f) $y=\sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{5x^2}{128}\right)$.

Correction de l'exercice 2281 ▲

$h\le k\le g\le f$.

Correction de l'exercice 2282 ▲

(a) $y=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}$.

(b) $y=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}$.

(c) $y = 2x - \frac{4}{3x}$.

(d) $y = \frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3x^2}$.

(e) $y = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi/4-1}{x}$.

(f) $y = \frac{\pi x}{2} + \pi - 1 + \frac{5\pi/4-2}{x}$.

(g) $y = x + \frac{1}{2} - \frac{9}{8x}$.

Correction de l'exercice 2283 ▲

(a)

(b)

(c)

(d) $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 2284 ▲

(a) $f_n'(x) = 0 \iff \operatorname{cotan} x = nx$.

(b) 0.

(c) $x_n \tan x_n = \frac{1}{n}$.

(d) $\ln\left(\frac{y_n}{x_n}\right) \to -\frac{1}{e} \Rightarrow y_n \sim \frac{1}{\sqrt{ne}}$.

Correction de l'exercice 2285 ▲

(a)

(b) i.

ii. $a \sim e^{-b} \Rightarrow a\ln b \to 0 \Rightarrow b^a \to 1$.

Correction de l'exercice 2286 ▲

Existence et unicité de x_n par étude de f sur $[3, +\infty[$ (pour $x \leq 3$ on ne peut pas avoir $0 < f(x) < 1$). On a facilement $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.

$\ln(x_n - 2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln(x_n) \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{x_n}\right) = -\frac{\ln(x_n)}{n} \Rightarrow x_n \ln(x_n) \sim 2n \Rightarrow x_n \sim \frac{2n}{\ln n}$.

Correction de l'exercice 2287 ▲

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Correction de l'exercice 2288 ▲

Existence et unicité de x_n par étude de la fonction $x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}^+$. On a clairement $x_n \to +\infty$ (lorsque $n \to \infty$) et $n = e^{x_n} + x_n$ d'où :

$$\ln n = \ln(e^{x_n} + x_n) = x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n}) = x_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}).$$

On en déduit $x_n \sim \ln n$. Écrivons $x_n = \ln n + y_n$:

$$0 = y_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$$

d'où $y_n \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) et $y_n \sim -x_n e^{-x_n} \sim -\frac{\ln n}{n} e^{-y_n} \sim -\frac{\ln n}{n}$. Écrivons maintenant $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\ln n}{n} + z_n + (\ln n + y_n)\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\ &= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\ &= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} e^{-2y_n} + o\left(\frac{x_n^2 e^{-2y_n}}{n^2}\right) \\ &= z_n + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \end{aligned}$$

d'où $z_n \sim -\frac{\ln^2 n}{2n^2}$ et finalement, $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 2289 ▲

(a)

(b)

$$nx_n^n(x_n-1) = x_n^n + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{n+1}(x_n) = \frac{n+1}{n}\left(x_n^{n+1} + \frac{x_n}{2}\right) - x_n^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{x_n^{n+1}}{n} + \frac{(n+1)x_n - n}{2n} > 0$$
$$\Rightarrow x_{n+1} < x_n.$$

Donc la suite (x_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge vers $\ell \geq 1$.
$0 \leq x_n - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2nx_n^n} \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) donc $\ell = 1$.
Soit $y_n = n(x_n - 1) = 1 + \frac{1}{2x_n^n}$. On a $f(y_n) = \frac{\ln(2(y_n-1))}{y_n} = -\frac{\ln x_n}{x_n - 1} = -g(x_n)$ et f, g sont strictement coissantes sur $[1, +\infty[$ donc les suites (x_n) et (y_n) varient en sens contraire. On en déduit que la suite (y_n) décroît donc admet une limite $\lambda \geq 1$, soit $x_n = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $x_n^n \to e^\lambda$ (lorsque $n \to \infty$) d'où $\lambda = 1 + \frac{1}{2e^\lambda}$.

Correction de l'exercice 2290 ▲

(a) $-\frac{11x^3}{3}$.
(b) $\frac{x^5}{4}$.
(c) $-\frac{h^2\sqrt{3}}{24}$.
(d) $\frac{1}{12x}$.
(e) $|x|$.

Correction de l'exercice 2291 ▲

$a = -5/12$, $b = 1/12$, $\Delta \sim -x^6/480$.

Correction de l'exercice 2292 ▲

$a = -7/60$, $b = 1/20$, $\Delta \sim 11x^7/50400$.

Correction de l'exercice 2294 ▲

(a) $(3a\alpha(\alpha - a) + 2(b\alpha - a\beta))X^7$.
(b) $-x^7/30 + o_{x \to 0}(x^7)$.

Correction de l'exercice 2297 ▲

$\sim x$ pour k impair, et $= 1 + x\ln(x) + o_{x\to 0}(x\ln x) \sim 1$ si k est pair ≥ 2.

Correction de l'exercice 2300 ▲

(a)
(b) $e\left(1 - \frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln^2 2}{2!x^2} - \cdots + (-1)^n \frac{\ln^n 2}{n!x^n}\right) + o(x^{-n})$.

Correction de l'exercice 2302 ▲

$f^{-1}(y) = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2 y^2}{a_1^3} + o(y^2)$.

Correction de l'exercice 2303 ▲

$(1-e^x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{kx} = \sum_{p=0}^{n+2} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^p\right) \frac{x^p}{p!} + o(x^{n+2})$,
$(1-e^x)^n = (-x)^n \left(1 + \frac{nx}{2} + \frac{n(3n+1)}{24}x^2 + o(x^2)\right)$.

Correction de l'exercice 2311 ▲

On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue seule, et β l'angle d'observation du piedestal seul. Nous avons le deux identités :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{p+s}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{p}{x}.$$

En utilisante la relation $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ on obtient

$$\tan\alpha = \frac{sx}{x^2+p(p+s)}.$$

Maintenant l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction tan est croissante sur cet intervalle, donc maximiser α est équivalent à maximiser $\tan\alpha$. Étudions la fonction $f(x) = \frac{sx}{x^2+p(p+s)}$ définie sur $x \in [0, +\infty[$. Après calculs f' ne s'annule qu'en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ qui donne le maximum de f (en 0 et $+\infty$ l'angle est nul). Donc la distance optimale de vision est $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.
En complément on peut calculer l'angle maximum α_0 correspondant : par la relation $\tan\alpha_0 = f(x_0) = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$, on obtient $\alpha_0 = \operatorname{Arctan}\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

Correction de l'exercice 2312 ▲

(a) Soit $f(a) = \operatorname{Arcsin} a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0,1[$. Alors $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{-a^2}{1-a^2}$ donc $f'(a) \leq 0$. Ainsi f est strictement décroissante et $f(0) = 0$ donc $f(a) < 0$ pout tout $a \in]0,1[$.

(b) Si $g(a) = \operatorname{Arctan} a - \frac{a}{1+a^2}$ alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2313 ▲

(a) $\sin^2 y = 1-\cos^2 y$ donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Donc $\sin \operatorname{Arccos} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 \operatorname{Arccos} x} = \pm\sqrt{1-x^2}$ et comme $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$ on a $\sin \operatorname{Arccos} x = +\sqrt{1-x^2}$.

(b) De la même manière on trouve la même formule pour : $\cos \operatorname{Arcsin} x = +\sqrt{1-x^2}$.

(c) Commençons par calculer $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$. On utilise $1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1-\sin^2 y}$ avec $y = \operatorname{Arctan} x$. Cela donne $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. En étudiant les signes de $\sin(y)$, $\cos(y)$ nous obtenons $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Il ne reste plus qu'à linéariser $\sin(3y)$: $\sin(3y) = 3\sin y \cos^2 y - \sin^3 y$, ce qui s'écrit aussi $\sin(3y) = 4\sin y \cos^2 y - \sin y$. Ces formules s'obtiennent à la main en écrivant d'abord $\sin(3y) = \sin(2y+y) = \sin(2y)\cos(y) + \cdots$. Ou alors à l'aide des nombres complexes et de la formule de Moivre en développant $\cos(3y) + i\sin(3y) = (\cos y + i\sin y)^3 = \cos^3 y + 3i\cos^2 y \sin y + \cdots$ puis identifiants les parties imaginaires.
Maintenant
$$\sin(3\operatorname{Arctan} x) = \sin(3y) = 4\sin y \cos^2 y - \sin y = 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction de l'exercice 2315 ▲

(a) En prenant le sinus de l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}$ on obtient $x = \sin(\operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5})$, donc $x = \frac{2}{5}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{2}{5}$. En utilisant la formule $\cos\operatorname{Arcsin} x = +\sqrt{1-x^2}$. On obtient $x = \frac{2}{5}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$.

(b) En prenant le cosinus de l'équation $\operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4}$ on obtient $x = \cos(2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4})$ on utilise la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

(c) En prenant la tangente et à l'aide de $\tan(a+b) = \cdots$ on obtient : $x = \tan(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 2318 ▲

(a) Soit f la fonction sur $[-1,1]$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ pour chaque $x \in]-1,1[$; donc f est une fonction constante sur l'intervalle $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Soit $g(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. On a $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition. $g(x) = c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0,+\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2323 ▲

$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Correction de l'exercice 2324 ▲

$\arctan a + \arctan b \equiv \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \pmod{\pi}$.

Correction de l'exercice 2325 ▲

$x = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$.

Correction de l'exercice 2326 ▲

$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow x \equiv \frac{3\pi}{10} \pmod{\frac{2\pi}{5}}$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Donc $x = \frac{3\pi}{10}$.

Correction de l'exercice 2327 ▲

(a) $x > -1 \Rightarrow = \frac{\pi}{4} - \arctan x$, $\quad x < -1 \Rightarrow = -\frac{3\pi}{4} - \arctan x$.

(b) $= \frac{1}{2} \arccos x$.

(c) $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow = \arcsin x + \frac{3\pi}{4}$, $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \Rightarrow = \arcsin x - \frac{\pi}{4}$.

(d) $= \frac{\pi}{4}$.

(e) $f(x) = 0$ pour $x \in]-\infty,0[$;
$f(x) = \pi$ pour $x \in]0,1[$;
$f(x) = 0$ pour $x \in]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2328 ▲

$D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\quad f(x) = \frac{1}{2} - x^2 - x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.

Correction de l'exercice 2329 ▲

$\cos(3\arctan x) = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. $\quad \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Correction de l'exercice 2330 ▲

$f(x) = 0$ pour $x \in]0,\pi/2[$; $f(x) = 2x - \pi$ pour $x \in]\pi/2,\pi[$; $f(x) = 3\pi - 2x$ pour $x \in]\pi,3\pi/2[$; $f(x) = 0$ pour $x \in]3\pi/2,2[$.

Correction de l'exercice 2331 ▲

$f(x) = -8\arctan x - 2\pi$ pour $x \in]-\infty,-1[$, solution $-\sqrt{3}$;
$f(x) = -4\arctan x$ pour $x \in]-1,0[$, solution $-1/\sqrt{3}$;
$f(x) = 4\arctan x$ pour $x \in]0,1[$, solution $1/\sqrt{3}$;
$f(x) = 2\pi$ pour $x \in]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2332 ▲

$f(x) = x + \pi/4$ pour $x \in]-\pi, -\pi/2[$;
$f(x) = -\pi/4$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$;
$f(x) = x - 3\pi/4$ pour $x \in]\pi/2, \pi[$.

Correction de l'exercice 2333 ▲

$= \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$.

Correction de l'exercice 2334 ▲

(a) $x = \frac{1}{6}$.
(b) $x = \pm 1\sqrt{2}$.
(c) $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
(d) $x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5,\ -1 \pm \sqrt{3}$. Seule la solution $x = 5$ convient.

Correction de l'exercice 2337 ▲

$\sin\big(2g(x)\big) = \sin(f(x))$.
$f(x) = -\pi - 2g(x)$ pour $x \in]-\infty, \sin a - \cos a[$;
$f(x) = 2g(x)$ pour $x \in]\sin a - \cos a, \sin a + \cos a[$;
$f(x) = \pi - 2g(x)$ pour $x \in]\sin a + \cos a, +\infty[$.

Correction de l'exercice 2341 ▲

Arcsin$x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\sin(\text{Arcsin}\,x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\sin(\text{Arcsin}\,x) = x$.

5. $\text{Arcsin}(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc
$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$
De plus, on a $k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$ et donc
$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$
De plus, $k \leq \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4}\right)$.
6. Arccos$x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\text{Arccos}\,x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\cos(\text{Arccos}\,x) = x$.
7. $\text{Arccos}(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0, \pi]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$, alors $\text{Arccos}(\cos x) = x - 2k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leq x < 2k\pi$ alors $\text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.
8. Pour tout réel x, $\tan(\text{Arctan}\,x) = x$.
9. $\text{Arctan}(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dans ce cas, $\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2342 ▲

(a) **1ère solution**. Posons $f(x) = \text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x$ pour x dans $[-1,1]$. f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
Donc f est constante sur $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.
$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x = \frac{\pi}{2}.}$$
2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \text{Arccos}\,x$. Mais alors,
$$\text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x = \theta + \text{Arcsin}\left(\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$
(car $\frac{\pi}{2} - \theta$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

(b) **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x}$. f est impaire. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\,\text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2}\text{sgn}(x).}$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \text{Arctan}\,x$. Mais alors,

$$\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x} = \theta + \text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \theta + \text{Arctan}\left(\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

(c) $\cos^2(\text{Arctan}\,a) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}\,a)} = \frac{1}{1+a^2}$. De plus , $\text{Arctan}\,a$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\text{Arctan}\,a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\text{Arctan}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ puis

$$\sin(\text{Arctan}\,a) = \cos(\text{Arctan}\,a)\tan(\text{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}\,a) = \frac{1}{1+a^2} \text{ et } \sin(\text{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

(d) D'après 3),

$$\cos(\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b) = \cos(\text{Arctan}\,a)\cos(\text{Arctan}\,b) - \sin(\text{Arctan}\,a)\sin(\text{Arctan}\,b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b) \neq 0$ et donc que $\tan(\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b)$ existe. On a immédiatement,

$$\tan(\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b) > 0$ et donc $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b) < 0$ et donc $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b$ est dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b - \pi$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\boxed{\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b = \begin{cases} \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 2343 ▲

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\,\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\,\sqrt{t}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \text{Arcsin}\,\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arcsin}\,\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\,\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $t \mapsto \text{Arccos}\,\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arccos}\,\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\,\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x\,\text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - 2\sin x\cos x\,\text{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2\sin x\cos x\,(\text{Arcsin}(|\sin x|) - \text{Arccos}(|\cos x|)). \end{aligned}$$

On note alors que f est π-pérodique et paire. Pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 2\sin x\cos x(x-x) = 0$. f est donc constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \text{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{1/2} \text{Arccos}\sqrt{t}dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 2344 ▲

(a) **1ère solution.** Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}x\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}'(x).$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x) = \text{Arctan}\,x + C$. $x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \text{Arctan}\,x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \text{Arctan}\,x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta = \cos\theta\tan\theta \text{ (car } \cos\theta > 0)\\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \text{Arcsin}(\sin\theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)\\ &= \text{Arctan}\,x.\end{aligned}$$

(b) **1ère solution.** Pour tout réel x, $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq -1+2 = 1$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$). f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\,\text{Arctan}\,x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\,\text{Arctan}\,x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\,\text{Arctan}\,|x|.}$$

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $\theta = \text{Arctan}\,x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \text{Arccos}(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta \text{ si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta \text{ si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases} = \begin{cases} 2\,\text{Arctan}\,x \text{ si } x \geq 0 \\ -2\,\text{Arctan}\,x \text{ si } x \leq 0 \end{cases} = 2\,\text{Arctan}\,|x|.$$

(c) La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ car pour x élément de $[-1,1]$, $1-x^2$ est élément de $[0,1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0. $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1,1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Pour x dans $]-1,0[\cup]0,1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0,1[$, $f_3'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2}\text{Arcsin})'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0,1]$ (par continuité) $f_3(x) = -\frac{1}{2}\text{Arcsin}\,x + C$. $x = 1$ fournit $C = \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x.}$$

Si x est dans $]-1,0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2}\operatorname{Arcsin})'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1,0]$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + C'$. $x = 0$ fournit $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{4}.}$$

(d) f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1 < x < 0$, $f(x) = \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} f(t) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \operatorname{Arctan} 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Pour $x < -1$, $f(x) = \lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\},\ f_4(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x \in]-1,0[\end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 2345 ▲

$0 \leq \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in [0,\frac{\pi}{2}[$, on a donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$. De même, $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} \in [0,\frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 2346 ▲

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2342 dans un cas particulier)

Soient a et b deux réels positifs. Alors, $\operatorname{Arctan} a \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan} b \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} a) - \tan(\operatorname{Arctan} b)}{1+\tan(\operatorname{Arctan} a)\tan(\operatorname{Arctan} b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\boxed{\forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0,\ \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2} = \operatorname{Arctan}\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1} \operatorname{Arctan} k - \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Arctan} k \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) + \operatorname{Arctan} n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 2347 ▲

(a) f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

(b) Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = 2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1} + (x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

(c) Pour x élément de $\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0,x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Enfin, puisque $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x\neq 0$, on a les résultats suivants : sur $]-\infty,0[$, $f'>0$, sur $]0,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$, sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. Comme $f'(0) = 1 > 0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0,\frac{1}{2}\right[$.

Correction de l'exercice 2348 ▲

(a) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\operatorname{Arcsin}x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin}x)\cos(\operatorname{Arcsin}x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

(b) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\operatorname{Arccos}x) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos}x)-1 = 2x^2-1$.

(c) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}x) = \frac{1}{2}(1-\cos(\operatorname{Arccos}x)) = \frac{1-x}{2}$.

(d) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \operatorname{Max}\{x,-x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1}+x > 0$ et $\sqrt{x^2+1}-x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right) = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0.$$

(e) L'expression proposée est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire. Soit alors $x>0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= \ln\left(\frac{x^2-1}{2x}+\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2})\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2})\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+x^2+1)\right) = \ln x \end{aligned}$$

Par imparité, si $x<0$, $\operatorname{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x)$. En résumé, en notant ε le signe de x,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \operatorname{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \varepsilon\ln|x|.}$$

(f) L'expression proposée existe si et seulement si $2x^2-1\in[1,+\infty[$ ou encore $x^2\in[1,+\infty[$ ou enfin $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. Cette expression est paire. Soit donc $x\in[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Argch}(2x^2-1)&=\ln(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1})=\ln(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})=\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)\\&=2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=2\operatorname{Argch}x\end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\boxed{\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[,\ \operatorname{Argch}(2x^2-1)=2\operatorname{Argch}|x|.}$$

(g) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\text{ existe}&\Leftrightarrow\operatorname{ch}x+1\neq0\text{ et }\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\geq0\text{ et }\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\in]-1,1[\\&\Leftrightarrow\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\in[0,1[\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\geq0$ et d'autre part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}=\frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1}=1-\frac{2}{\operatorname{ch}x+1}<1$. L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}&=\frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}-\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}=\frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1)-(\operatorname{ch}x-1)}=\frac{2\operatorname{ch}x+2\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{2}\\&=\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x}=\operatorname{ch}x+|\operatorname{sh}x|=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=e^x\end{aligned}$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\operatorname{Argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}=\frac{1}{2}\ln(e^x)=\frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{Argth}\left(\sqrt{\tfrac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right)=\tfrac{|x|}{2}.}$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)

(h) Pour $x>0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}=\frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=1.$$

Correction de l'exercice 2349 ▲

(a) $\operatorname{ch}x=2\Leftrightarrow x=\pm\operatorname{Argch}2=\pm\ln(2+\sqrt{2^2-1})=\pm\ln(2+\sqrt{3})$. Les solutions sont $\ln(2+\sqrt{3})$ et $-\ln(2+\sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2-\sqrt{3})$ car $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$).

(b) Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(2x)=\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})&\Rightarrow\sin(\operatorname{Arcsin}(2x))=\sin(\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2}))\\&\Leftrightarrow2x=x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2}+x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow x=0\text{ ou }\sqrt{1-2x^2}+\sqrt{2-2x^2}=2\\&\Leftrightarrow x=0\text{ ou }1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)}=4\\&\Leftrightarrow x=0\text{ ou }2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)}=1+4x^2\\&\Leftrightarrow x=0\text{ ou }4(4x^4-6x^2+2)=(4x^2+1)^2\\&\Leftrightarrow x=0\text{ ou }32x^2=7\Leftrightarrow x=0\text{ ou }x=\sqrt{\frac{7}{32}}\text{ ou }x=-\sqrt{\frac{7}{32}}\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) et $\text{Arcsin}\,x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Mais,

$$0 \leq \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2\,\text{Arcsin}\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\,\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\text{Arcsin}(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \text{Arcsin}(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2},0]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{Arcsin}\,x$ existe si et seulement si $x \in [-1,1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1]\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1,1]$, $\sin(2\,\text{Arcsin}(x)) = 2\sin(\text{Arcsin}\,x)\cos(\text{Arcsin}\,x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus,
$\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned}x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2\,\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } \text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

Correction de l'exercice 2350 ▲

Il faut prendre garde au fait que les nombres $x_k = \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.
1er cas. Si n est pair, posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}) + \sum_{k=p}^{2p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}) + \sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p})\end{aligned}$$

Or, $\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p}) = \text{cotan}^2(\pi - \frac{\pi}{4p} - \frac{k\pi}{2p}) = \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$ et donc $S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$.
Mais cette fois ci,

$$0 \leq k \leq p-1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p} \leq \frac{\pi}{4p} + \frac{(p-1)\pi}{2p} = \frac{(2p-1)\pi}{4p} < \frac{2p\pi}{4p} = \frac{\pi}{2}.$$

et comme, la fonction $x \mapsto \text{cotan}^2 x$ est strictement décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, les x_k, $0 \leq k \leq p-1$, sont deux à deux distincts.
Pour $0 \leq k \leq p-1$, posons $y_k = \text{cotan}(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$.

$$\begin{aligned}y_k = i\frac{e^{(2k+1)i\pi/4p}+1}{e^{(2k+1)i\pi/4p}-1} &\Rightarrow e^{(2k+1)i\pi/4p}(y-k-i) = y_k + i\\ &\Rightarrow (y_k+i)^{2p} = e^{(2k+1)i\pi}(y_k-i)^{2p} = (-1)^{2k+1}(y_k-i)^{2p} = -(y_k-i)^{2p}\\ &\Rightarrow (y_k+i)^{2p} + (y_k-i)^{2p} = 0 \Rightarrow 2(y_k^{2p} - C_{2p}^2 y_k^{2p-2} + \ldots + (-1)^p) = 0\\ &\Rightarrow x_k^p - C_{2p}^2 x_k^{p-1} + \ldots + (-1)^p = 0.\end{aligned}$$

Les p nombres deux à deux distincts x_k sont racines de l'équation de degré p : $z^p - C_{2p}^2 z^{p-1} + \ldots + (-1)^p = 0$ qui est de degré p. On en déduit que

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1} x_k = 2C_{2p}^2 = n(n-1).$$

2ème cas. Si n est impair, posons $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) + \text{cotan}^2 \frac{\pi}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \\ &= 2\sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \end{aligned}$$

La même démarche amène alors à $S_n = 2C_{2p+1}^2 = n(n-1)$.
Dans tous les cas,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n(n-1).$$

Correction de l'exercice 2351 ▲

Posons $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et enfin $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Pour $x \in D$, posons $f(x) = \tan x - x$. La fonction f est dérivable sur D et pour $x \in D$, $f'(x) = \tan^2 x$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur chaque I_n et s'annule donc au plus une fois dans chaque I_n.
$f(0) = 0$ et donc f s'annule exactement une fois dans I_0 en $x_0 = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur I_n et de plus $f\left(\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+\right) \times f\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-\right) = -\infty \times +\infty < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois dans I_n et donc exactement une fois dans I_n.
L'équation $\tan x = x$ admet donc dans chaque intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$, une et une seule solution notée x_n. De plus, $\forall n \geqslant 1$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
Pour $n \geqslant 1$, $n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$ et donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ puis $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$ et même

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Ensuite, puisque $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$, $x_n - n\pi = \text{Arctan}(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Alors d'après ce qui précède, $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. De plus, l'égalité $\tan(x_n) = x_n$ fournit $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$ ou encore

$$n\pi + \tfrac{\pi}{2} + y_n = -\text{cotan}(y_n).$$

Puisque $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, on obtient $n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{y_n}$ ou encore $y_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n\pi} + o\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

Posons $z_n = y_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. D'après ce qui précède, $\tan\left(-\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}$ et aussi $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction de l'exercice 2352 ▲

1ère solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $1 + \frac{z}{n} = r_n e^{i\theta}$ où $r_n \geqslant 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ de sorte que

$$\left(1 + \tfrac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}.$$

Puisque $1+\frac{z}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, pour n assez grand on a $r_n > 0$ et $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Mais alors pour n assez grand

$$r_n = \sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right).$$

Maintenant, $r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(x+o(1))$ et donc r_n^n tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$.
Ensuite $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} n\operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} y+o(1)$ et donc $n\theta_n$ tend vers y quand n tend vers $+\infty$.
Finalement, $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n^n\, e^{in\theta_n}$ tend vers $e^x \times e^{iy} = e^z$.

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

2ème solution. Le résultat est connu quand z est réel. Soit $z\in\mathbb{C}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^n \left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right| |z|^k.$$

Maintenant, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^n \left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right| |z|^k = \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1+\frac{|z|^n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|z|}-e^{|z|} = 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ tend vers e^z quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Correction de l'exercice 2354 ▲

(a) Si f existe alors pour $x=1$ on a $f(\operatorname{ch}1)=e$ et pour $x=-1$ on a $f(\operatorname{ch}-1)=f(\operatorname{ch}1)=1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t=\operatorname{ch}1$).

(b) Notons $X=e^x$, l'équation devient
$$f(X)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}(X+\frac{1}{X}).$$
Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, alors l'unique façon de définir f sur $]0,+\infty[$ est par la formule $f(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$.

(c) Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0)=c\in\mathbb{R}$ et $f(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ pour $t>0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t>0$ et $t\to 0$ est $+\infty$.

Correction de l'exercice 2355 ▲

(a) Par la formule du binôme de Newton nous avons $\operatorname{ch}^3 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}\right)$. Et de même $\operatorname{sh}^3 x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}\right)$. Donc $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{sh}^3 x)=\frac{1}{8}e^{-x}(6e^x+2e^{-3x})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}$ qui tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) $x-\ln(\operatorname{ch}x)=x-\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})=x-\ln(e^x+e^{-x})+\ln 2=x-\ln(e^x(1+e^{-2x}))+\ln 2=x-x+\ln(1+e^{-2x})+\ln 2=\ln(1+e^{-2x})+\ln 2$. Lorsque $x\to+\infty$, $\ln(1+e^{-2x})\to 0$ donc $x-\ln(\operatorname{ch}x)\to\ln 2$.

Correction de l'exercice 2360 ▲

Soit $x=\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(a)
$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2}=\frac{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin(y+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\cos(y)}.$$

(b) De même $\operatorname{sh}x=\tan y$.

(c) $\operatorname{th}x=\sin y$.

Ce sont des formules classiques utiles à connaître.

Correction de l'exercice 2369 ▲

(a) Soit $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et comme $f(0) = 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ pour $x > 0$. Ce qui donne l'inégalité recherchée.

(b) De même avec $g(x) = e^x - x - 1$, $g'(x) = e^x - 1$. Sur $[0,+\infty[$ $g'(x) \geq 0$ et g est croissante sur $]-\infty,0]$, $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante. Comme $g(0) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$.

Correction de l'exercice 2372 ▲

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln x} = e^{x\ln y} \Leftrightarrow y\ln x = x\ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

donc f est croissante sur $[1,e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e)[=]0,1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1,e[$ et une dans $]e,+\infty[$.

Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, nous allons distinguer trois cas : $y = 1$, $y = 2$ et $y \geq 3$. Si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoudre $f(x) = 0$ et alors $x = 1$. Si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0,1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur $]0,e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e,+\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.

Si $y \geq 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $f(x) = f(y)$ dans $]e,+\infty[$ qui est $x = y$, et une solution x dans l'intervalle $]1,e[$. Mais comme x est un entier alors $x = 2$ (c'est le seul entier appartenant à $]1,e[$) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à $4^2 = 2^4$.

Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2,4)$ et $(4,2)$.

Correction de l'exercice 2374 ▲

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b & \text{et} & \mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b, \\ \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b & \text{et} & \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a \\ \mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a+\mathrm{th}\,b}{1+\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b} & \text{et} & \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\,a-\mathrm{th}\,b}{1-\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}. \end{array}}$$

Deux démonstrations :

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \frac{1}{4}((e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b}) + (e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b}) = \mathrm{ch}(a+b).$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)} = \frac{\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b} = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b$. En appliquant à $a = b = x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + sh^2 x = 2ch^2 x - 1 = 2sh^2 x + 1,\ \mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x \text{ et } \mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2 x}.}$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)),\ \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)) \text{ et } \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2} \text{ et } \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}.$$

Correction de l'exercice 2375 ▲

• Pour tout réel x, $\mathrm{ch}\,x > 0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{sh}\,x \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} - 1 = \mathrm{th}\,x - 1 < 0.$$

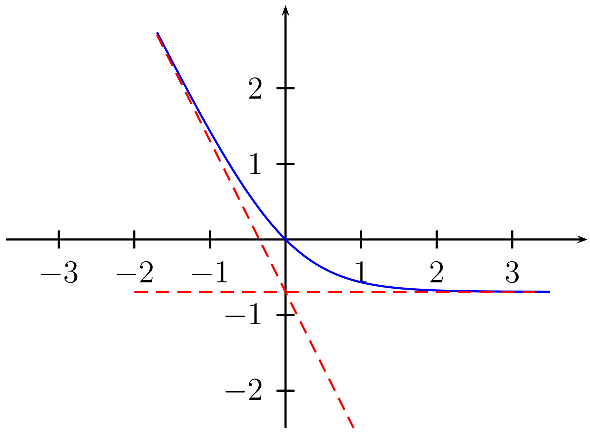
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. • Etude en $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$$f(x) = \ln\frac{e^x+e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1+e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1+e^{2x}).$$

Donc, $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1+e^{2x})$. Or, d'une part $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{2x}) = 0$ et donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1+e^{2x}) > 0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. • Etude en $+\infty$.

$$f(x) = \ln\frac{e^x+e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1+e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. • Graphe.



Correction de l'exercice 2376 ▲

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx}\right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100 \operatorname{sh} 2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par e^x. Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2}(1-e^{-100x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2-100x}(e^{100x}-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-e^{100x})(e^{x+2} - e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\tfrac{4}{101}\right\}.}$$

Correction de l'exercice 2377 ▲

On a vu au 2374 que pour tout réel x, $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1+\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th} x + \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.}$$

Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\operatorname{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 2404 ▲

(a) On trouve $\int_0^3 f(t)dt = +3$. Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x=0, x=1, x=2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale. Ensuite on revient à la définition de $\int_0^3 f(t)dt$: pour la subdivision de $[0,3]$ définie par $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$, on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteint et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine).

(b) C'est la même chose, mais au lieu d'aller jusqu'à 3 on s'arrête à x, on trouve

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3-2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ -9+4x & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

(c) Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points $x=1$ et $x=2$, mais les limites à droite et à gauche de F sont égales en ces points donc F est continue. Par contre F n'est pas dérivable en $x=1$ ni en $x=2$.

Correction de l'exercice 2405 ▲

(a) En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$. Notons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$. On a utilisé que la somme des entiers de 0 à $n-1$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Donc S_n tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(b) Même travail : $\int_1^2 g(x)dx$ est la limite de $S'_n = \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+k\frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})$. En séparant la somme en trois nous obtenons : $S'_n = \frac{1}{n}(n + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Donc à la limite on trouve $S'_n \to 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Donc $\int_1^2 g(x)dx = 7/3$. Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

(c) Même chose pour $\int_0^x h(t)dt$ qui est la limite de $S''_n = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{x}{n}})^k$. Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique, donc $S''_n = \frac{x}{n}\frac{1-(e^{\frac{x}{n}})^n}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n}\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}} = (1-e^x)\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ qui tend vers $e^x - 1$. Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u = \frac{x}{n}$ on a $\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{1-e^u}{u}$ qui tend vers -1 lorsque $u \to 0$ (ce qui est équivalent à $n \to +\infty$).

Correction de l'exercice 2406 ▲

(a) On calcul d'abord $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$. Par le théorème de Riemann-Darboux c'est la limite de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot f(x_k).$$

Pour $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ (on obtient en fait un somme de Riemann) :

$$S_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{i\pi}{2n}})^k.$$

Ce qui est une somme géométrique de somme $S_n = (1-i)\frac{\frac{\pi}{2n}}{1-e^{i\frac{\pi}{2n}}}$. La limite de ce taux d'accroissement est $1+i$ (en posant $u = \frac{\pi}{2n}$ et en remarquant que $\frac{e^{iu}-1}{u} \to i$ quand $u \to 0$). Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt = 1+i$. Mais $e^{it} = \cos t + i\sin t$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1+i$. Par identification des parties réelles et imaginaires on trouve : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1$.

(b) On veut $x_k = aq^k$ ce qui donne bien $x_0 = a$, mais il faut aussi $x_n = b$ donc $aq^n = b$, donc $q^n = \frac{b}{a}$ soit $q = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$. Nous cherchons la limite de $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot g(x_k)$. Il est n'est pas trop dur de montrer que $S'_n = n(q-1)$. Pour trouver la limite quand $n \to +\infty$ c'est plus délicat car q dépend de n : $S'_n = n(q-1) = n((\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} - 1) = n(e^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}} - 1)$. En posant $u = \frac{1}{n}$ et en remarquant que l'on obtient un taux d'accroissement on calcule : $S'_n = \frac{1}{u}(e^{u\ln\frac{b}{a}} - 1) \to \ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$. Donc $\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a$.

(c) À l'aide des sommes géométrique est des taux d'accroissement on trouve

$$\int_a^b \alpha^t\,dt = \frac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha}.$$

Correction de l'exercice 2407 ▲

(a) Oui.
(b) Non.
(c) Non.
(d) Non.

Correction de l'exercice 2408 ▲

(a) Écrivons la continuité de f en x_0 avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on ait $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Avec notre choix de ε cela donne pour $t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ que $f(t) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$. Pour évaluer $\int_a^b f(t)\,dt$ nous la coupons en trois morceaux par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0-\delta} f(t)dt + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt + \int_{x_0+\delta}^{b} f(t)dt.$$

Comme f est positive alors par positivité de l'intégrale $\int_a^{x_0-\delta} f(t)dt \geqslant 0$ et $\int_{x_0+\delta}^b f(t)dt \geqslant 0$. Pour le terme du milieu on a $f(t) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ donc $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}dt = 2\delta\frac{f(x_0)}{2}$. (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 2\delta\frac{f(x_0)}{2} > 0$.
Donc pour une fonction continue et positive f, si elle est strictement positive en un point alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$. Par contraposition pour une fonction continue et positive si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f est identiquement nulle.

(b) Soit f est tout le temps positive, soit elle tout le temps négative, soit elle change (au moins un fois) de signe. Dans le premier cas f est identiquement nulle par la première question, dans le second cas c'est pareil (en appliquant la première question à $-f$). Pour le troisième cas c'est le théorème des valeurs intermédiaires que affirme qu'il existe c tel que $f(c) = 0$.

(c) Posons $g(t) = f(t) - t$. Alors $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} = 0$. Donc par la question précédente, g étant continue, il existe $d \in [0,1]$ tel que $g(d) = 0$, ce qui est équivalent à $f(d) = d$.

Correction de l'exercice 2409 ▲

Notons $I = \int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n}dt$. Comme $f(t) \leqslant m$ pour tout $t \in [a,b]$ alors $I \leqslant 1$. Ceci implique que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$. Fixons $\alpha > 0$ (aussi petit que l'on veut). Comme f est continue et m est sa borne supérieure sur $[a,b]$ alors il existe un intervalle $[x,y]$, $(x < y)$, sur le quel $f(t) \geqslant m - \alpha$. Comme f est positive alors

$$I \geqslant \int_x^y \frac{f(t)^n}{m^n}dt \geqslant \int_x^y \frac{(m-\alpha)^n}{m^n} = (y-x)\left(\frac{m-\alpha}{m}\right)^n$$

.
Donc $I^{\frac{1}{n}} \geqslant (y-x)^{\frac{1}{n}}\frac{m-\alpha}{m}$. Quand $n \to +\infty$ on a $(y-x)^{\frac{1}{n}} \to 1$, donc à la limite nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{m-\alpha}{m}$.
Comme α est quelconque, nous pouvons le choisir aussi proche de 0 de sorte que $\frac{m-\alpha}{m}$ est aussi proche de 1 que désiré.
Donc $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$.
En conclusion nous trouvons que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} = 1$ ce qui était l'égalité recherchée.

Correction de l'exercice 2410 ▲

Soit $\alpha > 0$ fixé. Soit $0 < x_0 < 1$ tel que pour tout $x \in [0,x_0]$, $f(x) \leqslant 1 - \alpha$. Ce x_0 existe bien car f est strictement croissante et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Séparons l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^n(t)dt &= \int_0^{x_0} f^n(t)dt + \int_{x_0}^1 f^n(t)dt \\
&\leqslant \int_0^{x_0} (1-\alpha)^n dt + \int_{x_0}^1 1^n dt \\
&\leqslant x_0(1-\alpha)^n + (1-x_0) \\
&\leqslant (1-\alpha)^n + (1-x_0) \quad \text{car } x_0 \leqslant 1
\end{aligned}$$

Soit maintenant donné un $\varepsilon > 0$, on choisit $\alpha > 0$ tel que $1 - x_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (en remarquant que si $\alpha \to 0$ alors $x_0(\alpha) \to 1$), puis il existe n assez grand tel que $(1-\alpha)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n assez grand tel que $\int_0^1 f^n(t)dt \leqslant \varepsilon$. Donc $\int_0^1 f^n(t)dt \to 0$.

Correction de l'exercice 2411 ▲

(a) Vrai.

(b) Vrai.

(c) Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x$ alors F est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

(d) Vrai.

(e) Vrai.

(f) Faux. Faire la calcul avec la fonction $f(x) = 1+\sin(x)$ par exemple.

(g) Vrai.

Correction de l'exercice 2412 ▲

(a) Commençons plus simplement avec la fonction

$$H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt.$$

En fait H est la composition de la fonction $x \mapsto v(x)$ avec la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:

$$H = G \circ v.$$

La fonction v est dérivable et la fonction G aussi (c'est une primitive) donc la composée $H = G \circ v$ est dérivable, de plus $H'(x) = v'(x) \cdot G'(v(x))$. En pratique comme $G'(x) = f(x)$ cela donne $H'(x) = v'(x)f(v(x))$.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de connaître cette formule mais il est important de savoir refaire ce petit raisonnement.

On montrerait de même que la fonction $x \to \int_{u(x)}^a f(t)dt$ est dérivable de dérivée $-u'(x)f(u(x))$. Revenons à notre fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \int_{u(x)}^a f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$, c'est la somme de deux fonctions dérivables donc est dérivable de dérivée :

$$F'(x) = v(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

(b) On applique ceci à $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$ nous obtenons :

$$G'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2+(2x)^4} - \frac{1}{1+x^2+x^4}.$$

Correction de l'exercice 2413 ▲

(a) F est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. F est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Pour vois cela il suffit d'écrire $F(x) = \int_x^a \frac{dt}{\ln t} + \int_a^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. La première de ces fonctions est continue et dérivable (c'est une primitive), la seconde est la composée de $x \mapsto x^2$ avec $x \mapsto \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ et est donc aussi continue et dérivable. On pourrait même calculer la dérivée.

(b) Notons $f(t) = \frac{1}{\ln t}$ et $g(t) = \frac{1}{t\ln t}$. On se place sur $]1,+\infty[$. Bien évidemment $g(t) \leqslant f(t)$, mais nous avons aussi que pour $\varepsilon > 0$ fixé il existe $x > 1$ tel que pour tout $t \in [1,x^2]$ on ait $\frac{1}{t} \leqslant 1+\varepsilon$ donc sur $]1,x^2]$ nous avons $f(t) \leqslant (1+\varepsilon)g(t)$. Par intégration de l'inégalité $g(t) \leqslant f(t) \leqslant (1+\varepsilon)g(t)$ sur $[x,x^2]$ nous obtenons pour x assez proche de 1 :

$$H(x) \leqslant F(x) \leqslant (1+\varepsilon)H(x).$$

Il ne reste plus qu'a calculer $H(x)$. En fait $g(t) = \frac{1}{t\ln t}$ est la dérivée de la fonction $h(t) = \ln(\ln t)$. Donc

$$\begin{aligned} H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} &= [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln x) \\ &= \ln(2\ln x) - \ln(\ln x) = \ln \frac{2\ln x}{\ln x} \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé et $x > 1$ assez proche de 1, l'encadrement

$$\ln 2 \leqslant F(x) \leqslant (1+\varepsilon)\ln 2.$$

Donc la limite de $F(x)$ quand $x \to 1^+$ est $\ln 2$.

Correction de l'exercice 2420 ▲

(a)

(b)

(c) $\frac{1}{2}f(0)$.

Correction de l'exercice 2424 ▲

DL de $1-\cos u \Rightarrow \lim = \frac{1}{2}\ln(b/a)$.

Correction de l'exercice 2426 ▲

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } b_n < -1 \\ -(b_n-1)^2/4 & \text{si } -1 \leq b_n \leq 1 \\ 0 & \text{si } b_n > 1, \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n < -1 \\ (a_n+1)^2/4 & \text{si } -1 \leq a_n \leq 1 \\ a_n & \text{si } a_n > 1. \end{cases}$$

Donc $a_{n+1} = f(a_{n-1})$, $b_{n+1} = g(b_{n-1})$. Point fixe : $a_n \to \sqrt{8}-3$, $b_n \to 3-\sqrt{8}$.

Correction de l'exercice 2428 ▲

$\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 2429 ▲

$u = \pi - t \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{1+\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t}\,dt = \pi$.

Correction de l'exercice 2431 ▲

f est continue sur le segment $[a,b]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Puisque f est strictement positive sur $[a,b]$, ce maximum est strictement positif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}$. Par croissance de l'intégrale, on a déjà

$$u_n \leq \left(\int_a^b M^n\,dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n},$$

(car $\forall x \in [a,b]$, $0 \leq f(x) \leq M \Rightarrow \forall x \in [a,b]$, $(f(x))^n \leq M^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$).
D'autre part, par continuité de f en x_0 tel que $f(x_0) = M$, pour $\varepsilon \in]0,2M[$ donné, $\exists [\alpha,\beta] \subset [a,b] /\ \alpha < \beta$ et $\forall x \in [\alpha,\beta]$, $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on a alors

$$u_n \geq \left(\int_\alpha^\beta (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \geq \left(\int_\alpha^\beta (M-\frac{\varepsilon}{2})^n\,dx\right)^{1/n} = (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}.$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon \in]0,2M[,\ \exists (\alpha,\beta) \in [a,b]^2 /\ \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} \leq u_n \leq M(b-a)^{1/n}.$$

Mais, $\lim_{n\to+\infty} M(b-a)^{1/n} = M$ et $\lim_{n\to+\infty}(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} = (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}$.
Par suite, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1$, $M(b-a)^{1/n} < M+\varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_2$, $(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} > M-\varepsilon$.
Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1,n_2\}$. Pour $n \geq n_0$, on a $M-\varepsilon < u_n < M+\varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - M| < \varepsilon),$$

et donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = M$.
Plus généralement, si g continue sur $[a,b]$, g admet un minimum m_1 et un maximum M_1 sur cet intervalle, tous deux strictement positifs puisque g est strictement positive. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} \leq M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right),$$

et comme d'après l'étude du cas $g=1$, on a $\lim_{n\to+\infty} m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} = M$, le théorème de la limite par encadrements permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} = M$. On a montré que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} = \mathrm{Max}\{f(x),\ x\in[a,b]\}.$$

Correction de l'exercice 2432 ▲

(a) Soient m un réel strictement positif et, pour $t\in\mathbb{R}$, $f_m(t)=e^{mt}$. f_m est bien un élément de E et de plus,

$$\begin{aligned}\varphi(f_m) &= \frac{1}{m^2}(e^{mb}-e^{ma})(e^{-ma}-e^{-mb})\\ &= \frac{1}{m^2}e^{m(a+b)/2}(e^{m(b-a)/2}+e^{-m(b-a)/2})e^{-m(a+b)/2}(e^{m(b-a)/2}+e^{-m(b-a)/2})\\ &= \frac{4\,\mathrm{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$ et $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

(b) Soit f continue et strictement positive sur $[a,b]$. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ montre que :

$$\varphi(f)=\int_a^b\left(\sqrt{f(t)}\right)^2\,dt\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2\,dt \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2=(b-a)^2,$$

avec égalité si et seulement si la famille de fonctions $(\sqrt{f(t)},\frac{1}{\sqrt{f(t)}})$ est liée ou encore si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\ \forall t\in[a,b],\ \sqrt{f(t)}=\lambda\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ ou enfin si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\ \forall t\in[a,b],\ f(t)=\lambda$, c'est-à-dire que f est une constante strictement positive.

Tout ceci montre que $\varphi(E)$ admet un minimum égal à $(b-a)^2$ et obtenu pour toute fonction f qui est une constante strictement positive.

Correction de l'exercice 2433 ▲

(a) Soit $\varepsilon>0$ donné. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_1=\{a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^{\sigma_1}\leq \underline{S}_f^{\sigma_1}+\frac{\varepsilon}{2}$. Puisque g est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_2=\{b_0=a<b_1<\cdots<b_p=b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_g^{\sigma_2}\leq \underline{S}_g^{\sigma_2}+\frac{\varepsilon}{2}$. On note $\sigma_1\cup\sigma_2=\{c_0=a<c_1<\cdots<c_{q-1}<c_q=b\}$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en ordonnant l'ensemble $\{a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_n\}$ par ordre croissant, puis en identifiant les points qui apparaissent plusieurs fois (on obtient une subdivision de $[a,b]$ en q intervalles avec $max\{n,p\}\leq q\leq n+p$). Puisque $\sigma_1\cup\sigma_2$ est une subdivision *plus fine* que σ_1, on a :

$$\overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leq\overline{S}_f^{\sigma_1}\quad\text{et}\quad\underline{S}_f^{\sigma_1}\leq\underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}.\tag{26}$$

De même,

$$\overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leq\overline{S}_g^{\sigma_2}\quad\text{et}\quad\underline{S}_g^{\sigma_2}\leq\underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}.\tag{27}$$

De plus, sur un intervalle $]c_{k-1},c_k[$ donné, on a :

$$\begin{aligned}\sup\{f(x)+g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\} &\leq \sup\{f(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}\\ &\quad+\sup\{g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\inf\{f(x)+g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\} &\geq \inf\{f(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}\\ &\quad+\inf\{g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leq\overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}+\overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2},\tag{28}$$

et

$$\underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}+\underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leq\underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}.\tag{29}$$

En utilisant les inégalités (41), (40), (28) et (29), il vient alors :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leq\overline{S}_f^{\sigma_1}+\overline{S}_g^{\sigma_2}\leq\underline{S}_f^{\sigma_1}+\underline{S}_g^{\sigma_2}+\varepsilon\leq\underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}+\varepsilon.$$

D'après le théorème rappelé en introduction, on en déduit que $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, de l'inégalité

$$\underline{S}_f^{\sigma_1}+\underline{S}_g^{\sigma_2}\leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2},$$

on déduit que

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\underline{S}_f^{\sigma_1}+\underline{S}_g^{\sigma_2}\right)\leq \sup_{\sigma_1,\sigma_2}\underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}.$$

Or

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\underline{S}_f^{\sigma_1}+\underline{S}_g^{\sigma_2}\right)=\sup_{\sigma_1}\underline{S}_f^{\sigma_1}+\sup_{\sigma_2}\underline{S}_g^{\sigma_2}=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}=\sup_{\sigma}\underline{S}_{f+g}^{\sigma}=\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\leq\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$

De même, l'inégalité

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leq \overline{S}_f^{\sigma_1}+\overline{S}_g^{\sigma_2}$$

implique $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$. En conclusion, $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$.

(b) · Pour $\lambda=0$ il n'y a rien a démontrer.
· Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda>0$, alors pour tout subdivision $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\inf\{\lambda f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}=\lambda\inf\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}$$
$$\sup\{\lambda f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}=\lambda\sup\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}.$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma}=\lambda\underline{S}_f^{\sigma}$ et $\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}=\lambda\overline{S}_f^{\sigma}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma}\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma}=\lambda\sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma}=\lambda\int_a^b f(x)\,dx=\lambda\inf_{\sigma}\overline{S}_f^{\sigma}=\inf_{\sigma}\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$.
· Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda<0$, alors pour tout subdivision $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\inf\{\lambda f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}=\lambda\sup\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}$$
$$\sup\{\lambda f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}=\lambda\inf\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}.$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma}=\lambda\overline{S}_f^{\sigma}$ et $\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}=\lambda\underline{S}_f^{\sigma}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma}\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma}=\lambda\inf_{\sigma}\overline{S}_f^{\sigma}=\lambda\int_a^b f(x)\,dx=\lambda\sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma}=\inf_{\sigma}\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$.

(c) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t\in[a,b]$, $f(t)\leq g(t)$. Soit $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors

$$\inf\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}\leq\inf\{g(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}.$$

Il en découle que

$$\sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma}\leq\sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma},$$

c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$.

(d) Soit $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$ donné. Il existe $N>0$ tel que $\forall i>N$, $\sup_{[a,b]}|f_i(t)-f(t)|<\varepsilon$. En particulier, $f_i(t)-\varepsilon<f(t)<f_i(t)+\varepsilon$. Pour un tel i, on en déduit que pour toute subdivision $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$, on a

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[}f\leq\sup_{]a_{k-1},a_k[}f_i+\varepsilon\quad\text{et}\quad\inf_{]a_{k-1},a_k[}f\geq\inf_{]a_{k-1},a_k[}f_i-\varepsilon$$

En particulier :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[}f-\inf_{]a_{k-1},a_k[}f\leq\sup_{]a_{k-1},a_k[}f_i-\inf_{]a_{k-1},a_k[}f_i+2\varepsilon.$$

Il en découle que :

$$\overline{S}_f^{\sigma}-\underline{S}_f^{\sigma}\leq\overline{S}_{f_i}^{\sigma}-\underline{S}_{f_i}^{\sigma}+2\varepsilon(b-a).$$

Comme f_i est Riemann-intégrable, d'après le théorème de l'introduction, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_{f_i}^{\sigma}-\underline{S}_{f_i}^{\sigma}\leq\varepsilon$. On en déduit que

$$\overline{S}_f^{\sigma}-\underline{S}_f^{\sigma}\leq\varepsilon\left(1+2(b-a)\right),$$

ce qui implique que f est Riemann-intégrable.

Correction de l'exercice 2434 ▲

Soit f une fonction croissante $[a,b]$. Pour montrer que f est Riemann-intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon>0$ donné, une subdivision de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^\sigma-\underline{S}_f^\sigma<\varepsilon$. Soit $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$ la subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a

$$\inf_{]a_{k-1},a_k[} f=f(a_{k-1}) \quad \text{et} \quad \sup_{]a_{k-1},a_k[} f=f(a_k).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\overline{S}_f^\sigma-\underline{S}_f^\sigma &= \sum_{k=1}^n (a_k-a_{k-1})(f(a_k)-f(a_{k-1}))\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^n (f(a_k)-f(a_{k-1}))\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b)-f(a)).\end{aligned}$$

Pour n assez grand, la subdivision régulière de $[a,b]$ satisfait $\overline{S}_f^\sigma-\underline{S}_f^\sigma<\varepsilon$. D'autre part, si g est décroissante, $f=-g$ est croissante, donc g est Riemann-intégrable par l'exercice précédent (question 2.) avec $\lambda=-1$.

Correction de l'exercice 2435 ▲

Une fonction f continue sur $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$. En particulier, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n>0$ tel que

$$|x-y|<\left(\frac{b-a}{n}\right)\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Soit $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$ la subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f-\inf_{]a_{k-1},a_k[} f\leq 2\varepsilon.$$

Il vient alors :

$$\overline{S}_f^\sigma-\underline{S}_f^\sigma\leq\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^n 2\varepsilon=(b-a)2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure grâce au théorème de l'introduction que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2436 ▲

(a) Considérons la fonction $f : [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a :

$$\overline{S}_f^\sigma=1 \quad \text{et} \quad \underline{S}_f^\sigma=0.$$

On en déduit que $1=\sup_\sigma\overline{S}_f^\sigma\neq\inf_\sigma\underline{S}_f^\sigma=0$, ce qui implique que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

(b) Considérons la fonction $g : [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{si} \quad x=\frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux}\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ ou } x=0\end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a :

$$\underline{S}_g^\sigma=0.$$

Pour tout $\varepsilon>0$ donné, la fonction g prend des valeurs supérieures à $\frac{\varepsilon}{b-a}$ en un nombre fini de points seulement (les points $\frac{k}{q}$, avec $\frac{1}{q}>\frac{\varepsilon}{b-a}$ ce qui équivaut à $q<\frac{b-a}{\varepsilon}$). Notons x_i, $i=1,\dots,p$ ces points ordonnés par ordre (strictement) croissant.

Sur $[0,1]\setminus\{x_1,\dots,x_p\}$ la fonction g prend des valeurs $\leq\varepsilon$ et ≥ 0. Ainsi avec la subdivision $\sigma=\{x_1,\dots,x_p\}$ nous obtenons :

$$0\leq\overline{S}_g^\sigma\leq\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

Comme On en conclut que g est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2437 ▲

cf André Gramain, *Intégration*, p. 7, Hermann (1998).

Correction de l'exercice 2438 ▲

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit $f_n :]0,1]\to\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=ne^{-nx}$. Pour tout $x\in]0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty} ne^{-nx}=0$. On en déduit que la suite de fonctions f_n converge ponctuellement (ou *simplement*) vers la fonction identiquement nulle $f\equiv 0$. On a $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ mais

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=1-e^{-n},$$

et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=1$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,1]$, car pour tout $\varepsilon>0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{]0,-\frac{1}{n}\log\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)[}|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon.$$

Correction de l'exercice 2439 ▲

Soit $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.
Notons $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$, $k=1,\dots,n$ les points où
Soit $a_0=a$, $a_{n+1}=b$ et $a_k=a+\frac{2k+1}{2n}$ pour $k=1,\dots,n$.
Considérons la subdivision $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_k<\cdots<a_n=b\}$ de $[a,b]$. Cette subdivision est presque régulière, seul le premier intervalle et le dernier ont des longueurs différentes. Pour $k=1,\dots,n-1$, x_k est le milieu de $]a_k,a_{k+1}[$.
Notons $m_k=\inf\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}$ et $M_k=\sup\{f(x),x\in]a_{k-1},a_k[\}$.
Donc pour $k=1,\dots,n-1$ on a $m_k\le f(x_k)\le M_k$. Mais il faut aussi tenir compte de $f(x_n)=f(b)$ et des premiers et derniers intervalles. D'où pour la minoration :

$$\underline{S}_f^{\sigma}=(m_0+m_n)\frac{b-a}{2n}+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k\le(m_0+m_n)\frac{b-a}{2n}+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k).$$

Cela donne

$$\underline{S}_f^{\sigma}-(m_0+m_n+2f(b))\frac{b-a}{2n}\le\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k).$$

Quand n tend vers $+\infty$ on trouve que $\underline{S}_f^{\sigma}\to\int_a^b f$ et $(m_0+m_n+2f(b))\frac{b-a}{2n}\to 0$ cela donne l'inégalité :

$$\int_a^b f\le\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k).$$

La somme $\overline{S}_f^{\sigma}$ conduit de manière similaire à l'inégalité inverse, d'où :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

On a :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{k}{n}=-\log(\cos 1)$ b) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}=-2\ln 2+1.$

Correction de l'exercice 2440 ▲

(a)

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=-\int_a^b f(a+b-x)(a+b-x)'dx$$

$$=-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(t)dt=-\int_b^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt$$

où $\varphi:[a,b]\to[a,b]$, $\varphi(x)=a+b-x$ est une fonction de classe C^1.

(b) *a)*

$$I := \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

où $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = \cos x$ est une fonction de classe C^1.
b)

$$J := \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan(\frac{\pi}{4} - x)\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx = \frac{\pi}{4}\log 2 - J$$

d'où la valeur de l'intégrale est $J = \frac{\pi}{8}\log 2$.

Correction de l'exercice 2447 ▲

(a) Soit $u_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale ce calcule facilement : $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que u_n converge vers $\frac{\pi}{4}$.

(b) Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I = \int_0^1 g(x)dx$.
Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2 + 2[\arctan x]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Correction de l'exercice 2448 ▲

(a)

(b) $\ln k$.

(c) $\frac{\pi}{8}$.

(d) $\frac{4}{e}$.

(e) $\frac{1}{3}\int_{t=0}^{3\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=\int_{t=0}^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

(f) $\frac{4}{3}n\sqrt{n}$.

(g) $\frac{4}{\pi}$.

Correction de l'exercice 2451 ▲

(a)

(b) $\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 2453 ▲

(a) Pour $n\geq 1$,

$$u_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x)=x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx)$$
$$=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi})$$
$$=\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}.$$

(b) On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n)=\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k)-\ln k))=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{a}{k}).$$

La suite de nombres a, $\frac{a}{2}$,..., $\frac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0,a]$ » mais malheureusement son pas $a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.
Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.
Posons $v_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n=\sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{a+n+1}{n+1}\rightarrow 1,$$

et donc $\lim_{n\rightarrow+\infty}u_n=1$.

(c) Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour $1\leq k\leq n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n}\leq\frac{n+k}{n^2+k}\leq\frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)$\times$nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2}\leq u_n\leq\frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)}\leq u_n\leq\frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

(d) Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.
Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1 \leq k \leq n-2$, on a $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{Arcsin}(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \text{Arcsin}(1-\frac{1}{n}) - \text{Arcsin}\,\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\text{Arcsin}\,1 = \frac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\frac{\pi}{2}$.

(e) Pour $1 \leq k \leq n$, $\sqrt{k}-1 \leq E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de RIEMANN $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

(f) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

(g) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \ln 2$.

(h) Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$. f est continue sur $[0,1]$ (théorèmes de croissances comparées). Donc, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Pour $x \in [0,1]$, posons $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(0) = \lim_{x\to 0,\, x>0} F(x) = \lim_{x\to 0,\, x>0} \left[e^{-1/t}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0,\, x>0} (e^{-1} - e^{-1/x}) = \frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2454 ▲

Supposons f de classe C^2 sur $[0,1]$. Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})) = \sum_{k=0}^{n-1}(F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})).$$

f est de classe C^2 sur le segment $[0,1]$. Par suite, $F^{(3)} = f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0,1]$, l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 3 appliquée à F sur le segment $[0,1]$ fournit

$$\left|F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})\right| \leq \frac{(1/n)^3 M_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}|F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/n)^3 M_2}{6} = \frac{M_2}{6n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]=O(\frac{1}{n^2})$, ou encore $\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]=o(\frac{1}{n})$, ou enfin,

$$u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})+o(\frac{1}{n}).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})=\frac{1}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n}).$$

Or, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$. Par suite, la somme de RIEMANN $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f'(t)\,dt=f(1)-f(0)$ et donc

$$\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n})=\frac{1}{2n}(f(1)-f(0)+o(1))=\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})=\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

Correction de l'exercice 2455 ▲

$$S=\frac{\pi}{(1-\lambda^2)^{3/2}}.$$

Correction de l'exercice 2456 ▲

$$L=\frac{3\pi a}{2},\quad A_1=\frac{5\pi-9\sqrt{3}}{32}a^2,\quad A_2=\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}a^2.$$

Correction de l'exercice 2457 ▲

$A=4\pi^2Rr,\quad V=2\pi^2Rr^2.$

Correction de l'exercice 2458 ▲

$$L=8R,\quad A=3\pi R^2,\quad V_1=5\pi^2R^3,\quad V_2=6\pi^3R^3,\quad A_1=\frac{64\pi R^2}{3},\quad A_2=16\pi^2R^2.$$

Correction de l'exercice 2459 ▲

$$L=8(n+1)r=8\frac{n+1}{n}R,\quad A=\pi(n+1)(n+2)r^2=\pi\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}R^2,\quad S=\frac{128\pi R^2}{5},\quad V=\frac{64\pi R^3}{3}.$$

Correction de l'exercice 2460 ▲

$L=4R\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right).$

Correction de l'exercice 2461 ▲

$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2}R^2.$

Correction de l'exercice 2462 ▲

Aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y=\frac{x^2}{2}$ et $y=\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ (résoudre $\frac{x^2}{2}=\frac{1}{x^2+1}$).

Correction de l'exercice 2478 ▲

(a) On pose $t=\frac{1}{x}$ et donc $x=\frac{1}{t}$ et $dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$. On obtient

$$I=\int_{1/a}^{a}\frac{\ln x}{x^2+1}\,dx=-\int_{a}^{1/a}\frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2}+1}\frac{1}{t^2}\,dt=-\int_{1/a}^{a}\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt=-I,$$

et donc, $I=0$.

(b) (p et q sont des entiers naturels)
$\cos(px)\cos(qx)=\frac{1}{2}(\cos(p+q)x+\cos(p-q)x)$ et donc,
Premier cas. Si $p\neq q$,

$$\int_0^{\pi}\cos(px)\cos(qx)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q}+\frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^{\pi}=0.$$

Deuxième cas. Si $p=q\neq 0$,

$$\int_0^{\pi}\cos(px)\cos(qx)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2px))\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Troisième cas. Si $p=q=0$. $\int_0^{\pi}\cos(px)\cos(qx)\,dx=\int_0^{\pi}\,dx=\pi$.
La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\int_0^{\pi}\sin(px)\sin(qx)\,dx=0$ si $p\neq q$ et $\frac{\pi}{2}$ si $p=q\neq 0$ puis $\int_0^{\pi}\sin(px)\cos(qx)\,dx=0$ pour tout choix de p et q.

(c) La courbe d'équation $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-(a+b)x+ab=0\\ y\geq 0\end{array}\right.$ est le demi-cercle de diamètre $[\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}]$. Par suite, si $a\leq b$, $I=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a>b$, $I=-\frac{\pi(b-a)^2}{8}$.

(d) L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales. Chacune d'elles est la somme des aires de deux triangles. Ainsi, $I=\frac{1}{2}((1^2+3^2)+(2^2+2^2)+(3^2+1^2)+4^2)=22$.

(e) On pose $u=\frac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned}I&=\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}x\,dx=\int_{2}^{1/2}(1+u^2)\operatorname{Arctan}u\frac{-du}{u^2}=\int_{1/2}^{2}(1+\frac{1}{u^2})(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}u)\,du\\&=\frac{\pi}{2}((2-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-2))-I).\end{aligned}$$

Par suite, $I=\frac{3\pi}{2}-I$ et donc $I=\frac{3\pi}{4}$.

(f) $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x(x-1)}\,dx+\int_0^1\sqrt{1+x(1-x)}\,dx=I_1+I_2$.
Pour I_1, $1+x(x-1)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ et on pose $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t$ et donc $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\,dt$.

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2t+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\,dt=\frac{3}{4}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\operatorname{ch}^2t\,dt=\frac{3}{16}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt\\&=\frac{3}{16}(\frac{1}{2}(e^{-2\ln(\sqrt{3})}-e^{2\ln(2-\sqrt{3})})-\frac{1}{2}(e^{2\ln(\sqrt{3})}-e^{-2\ln(2-\sqrt{3})})+2(-\ln(\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})))\\&=\frac{3}{16}(\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-(2-\sqrt{3})^2)-\frac{1}{2}(3-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2})-2\ln(2\sqrt{3}-3))\\&=\frac{3}{16}(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(-(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2))-2\ln(2\sqrt{3}-3))\\&=-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3).\end{aligned}$$

Pour I_2, $1+x(1-x)=-x^2+x+1=-(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2$ et on pose $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$ et donc $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt$.

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2t}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt=\frac{3}{4}\int_{-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos^2t\,dt=\frac{3}{8}\int_{-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}(1+\cos(2t))\,dt\\&=\frac{3}{8}(2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}+2\left[\sin t\cos t\right]_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{4}\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}\\&=\frac{3}{4}\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{10}...\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\,dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,-du=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2u}\,du-\int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{1+\cos^2u}\,du\\&=-\pi\left[\operatorname{Arctan}(\cos u)\right]_0^{\pi}-I=\frac{\pi^2}{2}-I,\end{aligned}$$

et donc, $I=\frac{\pi^2}{4}$.

(h) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $I_n=\int_1^x \ln^n t\,dt$.

$$I_{n+1}=\left[t\ln^{n+1}t\right]_1^x-(n+1)\int_1^x t\ln^n t\frac{1}{t}\,dt=x\ln^{n+1}x-(n+1)I_n.$$

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}+\frac{I_n}{n!}=\frac{x(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$, et de plus, $I_1=x\ln x-x+1$.
Soit $n\geq 2$.

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{I_k}{k!}+\frac{I_{k+1}}{(k+1)!}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{I_k}{k!}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{I_k}{k!}=-I_1-(-1)^n\frac{I_n}{n!},$$

Par suite,

$$I_n=(-1)^n n!\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!}-x\ln x+x-1\right)=(-1)^n n!\left(1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x(\ln x)^k}{k!}\right).$$

Correction de l'exercice 2489 ▲

a-$\int\sin^8x\cos^3x\,dx=\frac{1}{9}\sin^9x-\frac{1}{11}\sin^{11}x+c$ sur $\mathbb{R}$.
b-$\int\cos^4x\,dx=\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+c$ sur $\mathbb{R}$.
c-$\int\cos^{2003}x\sin x\,dx=-\frac{1}{2004}\cos^{2004}x+c$ sur $\mathbb{R}$.
d-$\int\frac{1}{\sin x}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$ sur $]k\pi,(k+1)\pi[$ (changement de variable $u=\cos x$ ou $u=\tan\frac{x}{2}$).
e-$\int\frac{1}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (changement de variable $u=\sin x$ ou $u=\tan\frac{x}{2}$).
f-$\int\frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx=-\frac{1}{5}\ln(2-\sin x)+\frac{7}{10}\ln|1+2\sin x|+c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}[2\pi],-\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$ (changement de variable $u=\sin x$).
g-$\int\frac{1}{7+\tan x}dx=\frac{7}{50}x+\frac{1}{50}\ln|\tan x+7|+\frac{1}{50}\ln|\cos x|+c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}$ (changement de variable $u=\tan x$).
h-$\int\frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx=\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}}\right)+c$ sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ (changement de variable $u=\tan(x/2)$).

Correction de l'exercice 2490 ▲

(a) Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est positive donc I_n est positive. De plus le $\sin x\leqslant 1$ donc la suite $(\sin^n x)_n$ est décroissante.

(b)

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n+1}x\,dx.$$

En posant $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=\sin^{n+1}x$ et en intégrant par parties nous obtenons

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2x)\sin^n x\,dx=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}.$$

Donc $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$.
Un petit calcul donne $I_0=\frac{\pi}{2}$ et $I_1=1$. Donc par récurrence pour n pair nous obtenons que

$$I_n=\frac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n}\frac{\pi}{2},$$

et pour n impair :

$$I_n=\frac{2.4\ldots(n-1)}{1.3\ldots n}.$$

Avec le changement de variable $u=\cos x$, on montre assez facilement que $\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)^n dx=2\int_0^1\left(x^2-1\right)^n dx=2I_{2n+1}$.

(c) Comme (I_n) est décroissante alors $I_{n+2}\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$, en divisant le tout par $I_n>0$ nous obtenons $\frac{I_{n+2}}{I_n}\leqslant\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant 1$. Mais nous avons déjà calculer $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers $+1$ donc $I_n\sim I_{n+1}$.

(d) Lorsque l'on calcule $(n+1)I_nI_{n+1}$ à l'aide des expressions explicitées à la deuxième question nous obtenons une fraction qui se simplifie presque complètement : $(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}$.
Maintenant

$$I_n^2\sim I_n\times I_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}\sim\frac{\pi}{2n},$$

donc

$$I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(e)
$$\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)}=(2n+1)\frac{2}{\pi}I_{2n}\sim(2n+1)\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}\sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Correction de l'exercice 2492 ▲

(a) $I_0=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4}$ et $I_1=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=[-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4}=\frac{\ln 2}{2}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{n+1}.$$
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(I_{2k-2}+I_{2k})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{2k-2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{2k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kI_{2k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^kI_{2k}=I_0-(-1)^nI_{2n}.\end{aligned}$$
Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{2n}=(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.
De même, $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}=I_1-(-1)^nI_{2n+1}$ et donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

(b) Soient $\varepsilon\in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
$$0\leq I_n=\int_0^{\pi/4-\varepsilon/2}\tan^n x\,dx+\int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4}\tan^n x\,dx\leq\frac{\pi}{4}\tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2}.$$
Maintenant, $0<\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2})<1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2})=0$. Par suite, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour $n\geq n_0$, $0\leq\tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2})<\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geq n_0$, on a alors $0\leq I_n<\varepsilon$.
Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que u_n tend vers $\ln 2$ et v_n tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2493 ▲

Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.

(a) $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+k$.

(b) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+k$.

(c) $\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-4)^2+k$.

(d) $\frac{4x}{(x-2)^2}=\frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+k$.

(e) $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+k$.

(f) $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2}=\frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})}+\frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2}+\frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)}+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right|+k$.

(g) $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}+\frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)}+\frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.

(h) $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.

(i) $\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{3(t+1)}-\frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})+k$.

(j) $\frac{x^3+2}{(x+1)^2}=x-2+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+k$.

(k) $\frac{x+1}{x(x-2)^2}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{3}{2(x-2)^2}$. Primitives : $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{2(x-2)}+k$.

(l) $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}=\frac{1}{2}(x^3-x^2+3)-\frac{3}{2x}$. Primitives : $\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}\ln|x|+k$.

(m) $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}=\frac{1}{4^3(x+1)}+\frac{1-x}{4^3(x^2+3)}+\frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2}-\frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
Primitives : $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2}-\frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)}-\frac{1}{2^7}\ln(x^2+3)-\frac{1}{3\sqrt{3}2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})+\frac{1}{4^3}\ln|x+1|+k$.

(n) $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}=x^2-2-\frac{1}{x}+\frac{x+4}{x^2+1}+\frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
Primitives : $\frac{x^3}{3}-2x-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\arctan x-\frac{6x+1}{2(x^2+1)}+k$.

(o) $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.
Primitives : $-\frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-1| - \arctan x + k$.

Correction de l'exercice 2494 ▲

(a) $\frac{1}{x^2+2}$ est un élément simple. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Décomposition : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}$. Intégrale : $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3$.

(c) Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3 ! $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln 3$.

(d) On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples : $\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4}$, mais il est bien plus simple de faire le changement de variables $x^2 = u$. Alors $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}$.

(e) La décomposition de $\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$ est $x+18+\frac{163}{x-4}+\frac{507}{(x-4)^2}+\frac{565}{(x-4)^3}$; les primitives sont $\frac{x^2}{2}+18x-\frac{1014x-3491}{2(x-4)^2}+163\ln|x-4|+C$. Enfin, $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx = \frac{5565}{32} - 326\ln 2$.

(f) Décomposition : $\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}$. Primitives : $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$, d'où $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4)$.

(g) Décomposition : $\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}$. Les primitives sont : $x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. Intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx = 6+\frac{7\ln 3-3\ln 7}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(h) Décomposition : $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$, d'où $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\frac{3}{2} + 2\arctan\frac{1}{7}$.

(i) La décomposition est $\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1 + \frac{4/3}{(x-1)^2} + \frac{11/9}{x-1} - \frac{11/9}{x+2}$. On trouve alors $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{5}{3} - \frac{22}{9}\ln 2$.

(j) La décomposition de $\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$ est $\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$; les primitives sont $-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. Enfin $\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx = \frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(k) Décomposition de la fraction rationnelle : $\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1} - \frac{2x+5}{x^2+4}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right| + 3\arctan x - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$. Alors $\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right| + 3\arctan a - \frac{5}{2}\arctan\frac{a}{2} + 2\ln 2$. Enfin $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4} + 2\ln 2$.

(l) Pour factoriser le dénominateur, penser à faire $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$; on trouve alors $\frac{1}{x^4+1} = \frac{(x\sqrt{2}+2)/4}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{(x\sqrt{2}-2)/4}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Les primitives s'écrivent

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\Big) + C$$

ce qui donne $\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{33+20\sqrt{2}}{17} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\pi - \arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)$.

Correction de l'exercice 2497 ▲

(a) Pour $x > 0$ on a $\frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, donc

$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

(c) Soit $S_n = (I_0+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-\cdots\pm(I_{n-1}+I_n)$. Par la question précédente nous avons $S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\pm\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Mais d'autre part cette somme étant télescopique nous avons $S_n = I_0 \pm I_n$. Alors la limite de S_n et donc de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (quand $n\to+\infty$) est donc I_0 car $I_n \to 0$. Un petit calcul montre que $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Donc la somme alternée des entiers converge vers $\ln 2$.

Correction de l'exercice 2501 ▲

$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}(x-\ln|\cos x+\sin x|)+c$ sur $\mathbb{R}$

$\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+c$ sur $\mathbb{R}$ (en calculant la somme et la différence).

Correction de l'exercice 2502 ▲

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = 1$ (changement de variables $u = \tan\frac{x}{2}$).

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (utiliser la précédente).

Correction de l'exercice 2507 ▲

(a) Changement de variable $u = \sin^2 x$ (ou d'abord $u = \sin x$) ; $e^{\sin^2 x} + C$.

(b) Deux méthodes : changement de variable $u = \sin t$ (ou $u = \sinh t$), ou linéarisation.
$\frac{1}{15}(15\sin t - 10\sin^3 t + 3\sin^5 t) + C$ ou $\frac{1}{80}\sin 5t + \frac{5}{48}\sin 3t + \frac{5}{8}\sin t + C$;
$\sinh t + \frac{1}{3}\sinh^3 t + C$ ou $\frac{1}{12}\sinh 3t + \frac{3}{4}\sinh t + C$;
$\frac{1}{32}(\sin 4t + 8\sin 2t + 12t) + C$; $\frac{1}{32}(\sinh 4t - 8\sinh 2t + 12t) + C$.

(c) Intégrations par parties : $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$.

(d) Intégration par parties : $x\ln x - x + C$; $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$; $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

(e) Intégrations par parties : $\frac{1}{2}(\sinh t \sin t - \cosh t \cos t) + C$.

(f) Changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$; $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ sur chaque intervalle...

(g) Changement de variable $x = a\sin u$; $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$.

(h) Changement de variable $u = e^x$; $\frac{2}{3}\sqrt{e^x + 1}(e^x - 2) + C$.

(i) Intégrations par parties : $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$;
$\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx) + C$.

(j) Changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$.

(k) Changement de variable $t = \arcsin x$; $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$.

(l) Changements de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, $t = 1 + u$; $\arctan(\tan\frac{x}{2} + 1) + C$ sur chaque intervalle... Mais, au fait, ne cherchait-on pas une primitive *sur* $\mathbf{R}$?

(m) Changement de variable $x^3 = u^2$; $\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}} + C$.

(n) Multiplier et diviser par $\cosh x - \sinh x$, ou passer en e^x ; $\frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{\cosh 2x}{4} + C$ ou $\frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$.

Correction de l'exercice 2515 ▲

a-$\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$ sur $\mathbb{R}$ (intégration par parties)

b-$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

c-$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln|\ln x| + c$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (changement de variable : $u = \ln x$)

d-$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}(x-2)(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$ sur $]-1,+\infty[$ (changement de variable : $u = \sqrt{x+1}$ ou intégration par parties)

e-$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$ sur $]-1,1[$ (intégration par parties)

f-$\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$ sur $\mathbb{R}$ (changement de variable : $u = \exp x$)

g-$\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \arccos\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ sur $]0,4[$ (changement de variable : $u = \frac{1}{2}x - 1$)

h-$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \arcsin(\ln x) + c$ sur $\left]\frac{1}{e}, e\right[$ (changement de variable : $u = lnx$)

i-$\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx = x - 2\ln\left(1 + \sqrt{\exp x + 1}\right) + c$ sur $\mathbb{R}$ (changement de variable : $u = \sqrt{\exp x + 1}$)

j-$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c$ sur $\mathbb{R}$

k-$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$ (décomposition en éléments simples)

l-$\int \cos x \exp x dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\exp x + c$ sur $\mathbb{R}$ (deux intégrations par parties)

Correction de l'exercice 2516 ▲

a-$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{32}$ (changement de variables ou intégration par parties).

b-$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx = \frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u = \frac{1}{x}$ et $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$).

c-$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = 1$ (intégration par parties).

d-$\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 dx = \pi^2 + 4$ (2 intégrations par parties).

e-$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (changement de variables ou intégration par parties).

f-$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (changement de variables $u=\arcsin\frac{x}{2}$).

g-$\int_1^2 x^2\ln x dx = \frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ (intégration par parties).

h-$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ (changement de variables $u=\frac{x+2}{\sqrt{3}}$).

i-$\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx = 3\ln 2-1$ (décomposition en éléments simples).

Correction de l'exercice 2523 ▲

Pour t réel, posons $g(t)=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ puis, pour x réel, $G(x)=\int_1^x g(t)\,dt$. Puisque g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 et $G'=g$ (G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1). Plus précisément, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, f est définie et de classe C^∞ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

Etude en 1.

Pour $x\neq 1$,

$$f(x)=\frac{G(x)}{x-1}=\frac{G(1)+G'(1)(x-1)+\frac{G''(1)}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{x-1}=g(1)+g'(1)(x-1)+o((x-1)).$$

Donc, f admet en 1 un développement limité d'ordre 1. Par suite, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=g(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ puis le prolongement est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}g'(1)$. Or, pour tout réel x, $g'(x)=2x\frac{1}{\sqrt{1+x^8}}+x2.(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}})=2x\frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$ et $g'(1)=0$. Donc, $f'(1)=0$.

Dérivée. Variations

Pour $x\neq 1$, $f'(x)=\frac{G'(x)(x-1)-G(x)}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $h(x)=G'(x)(x-1)-G(x)$ dont la dérivée est $h'(x)=G''(x)(x-1)+G'(x)-G'(x)=(x-1)g'(x)$. h' est du signe de $2x(1-x^8)(x-1)$ ou encore du signe de $-2x(1+x)$. h est donc décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $[-1,0]$.

Maintenant, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $G'(x)(x-1)=g(x)(x-1)\sim x\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}$ et donc $G'(x)(x-1)$ tend vers 0. Ensuite, pour $x\geq 1$

$$0\leq G(x)\leq \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}}\,dt=1-\frac{1}{x}\leq 1,$$

et G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Comme G est croissante sur $\mathbb{R}$, G a une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Cette limite est strictement positive en $+\infty$ et strictement négative en $-\infty$. Par suite, h a une limite strictement positive en $-\infty$ et une limite strictement négative en $+\infty$. Sur $[0,+\infty[$, h est décroissante et s'annule en 1. Donc, h est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.

Ensuite,

$$h(-1)=\int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt-\sqrt{2}=2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt-\sqrt{2}<2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt-\sqrt{2}=0,$$

et $h(-1)<0$. h s'annule donc, une et une seule fois sur $]-\infty,-1[$ en un certain réel α et une et une seule fois sur $]-1,0[$ en un certain réel β. De plus, h est strictement positive sur $]-\infty,\alpha[$, strictement négative sur $]\alpha,\beta[$, strictement positive sur $]\beta,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$.

f est strictement croissante sur $]-\infty,\alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$, strictement croissante sur $[\beta,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Etude en l'infini.

En $+\infty$ ou $-\infty$, G a une limite réelle et donc f tend vers 0.

Correction de l'exercice 2524 ▲

(a) La fonction $t\mapsto e^{t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x\mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

La fonction $t\mapsto e^{t^2}$ est paire et donc la fonction $x\mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est impaire. Comme la fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est paire, f est impaire.

(b) Pour x réel, $f'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+e^{-x^2}e^{x^2}=-2xf(x)+1$.

(c) Pour $x\geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt=\int_1^x \frac{1}{2t}.2te^{t^2}\,dt=\left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x+\frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt=\frac{e^{x^2}}{2x}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt,$$

et donc,

$$\begin{aligned}|1-2xf(x)| &= \left|1-2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt\right|\\ &\leq xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il reste le premier.
Pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned}0 \leq xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt &= xe^{-x^2}\int_1^{x-1}\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt\\ &\leq x(x-1)e^{-x^2}\frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2}e^{x^2}\int_{x-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt\\ &= x(x-1)e^{-2x+1} + x\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement, $1-2xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou encore, $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

(d) Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,dt$ puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$. Ensuite, $f'(1) = 1-2f(1) = 1-2e^{-1}\int_0^1 e^{t^2}\,dt$. Or, la méthode des rectangles fournit $\int_0^1 e^{t^2}\,dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$, et donc $f'(1) < 0$ puis $g(1) < 0$. Enfin, comme en 0^+, $g(x) \sim \frac{1}{2x}f'(0) = \frac{1}{2x}$, $g(0^+) = +\infty$.
Donc, g s'annule exactement une fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel x_0 de $]0,1[$.

(e) g est strictement positive sur $]0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,+\infty[$. Il en de même de f'. f est ainsi strictement croissante sur $[0,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2525 ▲

(a) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, quand t tend vers 0, $f(t) \sim \frac{t^2}{t} = t$ et $\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} f(t) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

(b) f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, $F' = f$ est positive sur $[0,+\infty[$, de sorte que F est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que F admet en $+\infty$ une limite dans $]-\infty,+\infty]$.
Vérifions alors que F est majorée sur $\mathbb{R}$. On contate que $t^2.\frac{t^2}{e^t-1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, il existe un réel A tel que pour $t \geq A$, $0 \leq t^2.\frac{t^2}{e^t-1} \leq 1$ ou encore $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$. Pour $x \geq A$, on a alors

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt \leq \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{1}{t^2}\,dt\\ &= \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leq \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A}.\end{aligned}$$

F est croissante et majorée et donc a une limite réelle ℓ quand n tend vers $+\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}f(t) = t^2e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} &= t^2e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-t})^k + \frac{(e^{-t})^n}{1-e^{-t}}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2e^{-(k+1)t} + \frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}e^{-nt} = \sum_{k=1}^{n} t^2e^{-kt} + f_n(t)\ (*),\end{aligned}$$

où $f_n(t) = \frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}e^{-nt}$ pour $t > 0$. En posant de plus $f_n(0) = 0$, d'une part, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et d'autre part, l'égalité $(*)$ reste vraie quand $t = 0$. En intégrant, on obtient

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt + \int_0^x f_n(t)\,dt\ (**).$$

Soient alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt = \left[-\frac{1}{k}t^2 e^{-kt}\right]_0^x + \frac{2}{k}\int_0^x t e^{-kt}\,dt = -\frac{1}{k}x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k}\left(\left[-\frac{1}{k}te^{-kt}\right]_0^x + \frac{1}{k}\int_0^x e^{-kt}\,dt\right)$$
$$= -\frac{1}{k}x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2}xe^{-kx} - \frac{2}{k^3}e^{-kx} + \frac{2}{k^3}.$$

Puisque $k > 0$, quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt = \frac{2}{k^3}$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans $(**)$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt\ (***).$$

Vérifions enfin que $\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt\right) = 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2 e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et a une limite réelle en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0,+\infty[$. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$0 \leq \int_0^x f_n(t)\,dt \leq M\int_0^x e^{-nt}\,dt = \frac{M}{n}(1-e^{-nx}).$$

A $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt \leq \frac{M}{n},$$

puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt\right) = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ puis quand n tend vers $+\infty$ dans $(***)$, on obtient enfin

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt = 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

Correction de l'exercice 2526 ▲

(a) I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{\overline{b}}{X+j^2},$$

où $a = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3(-j)^2} = \frac{j}{3}$. Par suite,

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{X^2-X+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right).$$

Mais alors,

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

(b) I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + C$.

(c) $X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X-1) - (X-1) = (X^2-1)(X-1) = (X-1)^2(X+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de $f = \frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}$ est de la forme $aX^2 + bX + c + \frac{d_1}{X-1} + \frac{d_2}{(X-1)^2} + \frac{e}{X+1}$.

Détermination de a, b et c. La division euclidienne de X^5 par $X^3 - X^2 - X + 1$ s'écrit $X^5 = (X^2+X+2)(X^3 - X^2 - X + 1) + 2X^2 + X - 2$. On a donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = 2$.

$e = \lim_{x\to-1}(x+1)f(x) = \frac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}$. Puis, $d_2 = \lim_{x\to1}(x-1)^2 f(x) = \frac{1^5}{1+1} = \frac{1}{2}$. Enfin, $x=0$ fournit $0 = c - d_1 + d_2 + e$ et donc, $d_1 = -2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. Finalement,

$$\frac{X^5}{X^3-X^2-X+1} = X^2+X+2-\frac{9}{4}\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$, on a sur I

$$\int \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.$$

(d) Sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}\,dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^5}\,dx = \frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{3}{2}\int \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^5}\,dx\\ &= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{3}{2}\int \frac{1}{((\frac{\sqrt{3}}{2}u)^2+\frac{3}{4})^5}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \text{ (en posant } x+\frac{1}{2}=\frac{u\sqrt{3}}{2})\\ &= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int \frac{1}{(u^2+1)^5}\,du.\end{aligned}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons alors $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Une intégration par parties fournit

$$I_n = \frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n\right)$. Mais alors,

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8}I_4 = \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6}I_3\\ &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4}I_2\\ &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}I_1\\ &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\operatorname{Arctan}u+C.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$u^2+1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1 = \frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}(x^2+x+1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int \frac{1}{(u^2+1)^5}\,du &= \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\left(\frac{1}{8}\frac{3^4}{4^4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{3^3}{4^3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{3^2}{4^2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^2}\right.\\ &\left.+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{3}{4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right).\\ &= \frac{1}{8}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{36}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}+\frac{35}{108}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{35}{54}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\\ &+\frac{70\sqrt{3}}{81}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\end{aligned}$$

(il reste encore à réduire au même dénominateur).

(e) On pose $u=x^2$ et donc $du = 2xdx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2})\,du\\ &= \frac{1}{2}(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1})+C\\ &= \frac{1}{2}(\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})+C.\end{aligned}$$

(f) $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx + \int \frac{x}{x^6+1}\,dx$.
Ensuite, en posant $u = x^3$ et donc $du = 3x^2\,dx$,

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(x^3) + C,$$

et en posant $u = x^2$ et donc $du = 2x\,dx$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3+1}\,du = \frac{1}{6}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2-u+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C \text{ (voir 1))}\\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(x^3) + \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C.$$

(g) $\frac{1}{X^4+1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_k}{X-z_k}$ où $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$. De plus, $\lambda_k = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^4+1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\pi/4}}{X-e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/4}}{X-e^{-i\pi/4}} + \frac{-e^{i\pi/4}}{X+e^{i\pi/4}} + \frac{-e^{-i\pi/4}}{X+e^{-i\pi/4}}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right).\end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{1}{(X-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2},$$

et donc,

$$\int \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - \sqrt{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x-1) + C,$$

et de même,

$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \sqrt{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x+1) + C.$$

Finalement,

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \sqrt{2}(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x-1) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x+1)) + C.$$

(h) Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,dx &= \frac{x}{x^4+1} + \int \frac{4x^4}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^4+1} + 4\int \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{x^4+1} + 4\int \frac{1}{x^4+1}\,dx - 4\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx\end{aligned}$$

Et donc,

$$\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^4+1} + 3\int \frac{1}{x^4+1}\,dx\right) = \ldots$$

(i) Posons $R = \frac{1}{X^8+X^4+1}$.

$$\begin{aligned}X^8+X^4+1 &= \frac{X^{12}-1}{X^4-1} = \frac{\prod_{k=0}^{11}(X-e^{2ik\pi/12})}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)}\\ &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X+e^{i\pi/6})(X+e^{-i\pi/6})(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

R est réelle et paire. Donc,

$$R=\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}-\frac{a}{X+j}-\frac{\overline{a}}{X+j^2}+\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}.$$

$a=\frac{1}{8j^7+4j^3}=\frac{1}{4(2j+1)}=\frac{2j^2+1}{4(2j+1)(2j^2+1)}=\frac{-1-2j}{12}$ et donc,

$$\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}=\frac{1}{12}(\frac{-1-2j}{X-j}+\frac{-1-2j^2}{X-j^2})=\frac{1}{4}\frac{1}{X^2+X+1}=\frac{1}{4}\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2},$$

et par parité,

$$\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}-\frac{a}{X+j}-\frac{\overline{a}}{X+j^2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}).$$

Ensuite, $b=\frac{1}{8e^{7i\pi/6}+4e^{3i\pi/6}}=\frac{1}{4e^{i\pi/6}(-2-j^2)}=\frac{e^{-i\pi/6}}{4(-1+j)}=\frac{e^{-i\pi/6}(-1+j^2)}{12}=\frac{e^{-i\pi/6}(-2-j)}{12}=\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{12}$, et donc,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}=\frac{1}{12}(\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{-2e^{i\pi/6}+i}{X-e^{-i\pi/6}})=\frac{1}{12}\frac{-2\sqrt{3}X+3}{X^2-\sqrt{3}X+1}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

Par parité,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}.$$

Finalement,

$$\int\frac{1}{x^8+x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C.$$

(j) En posant $u=x^2$ et donc $du=2x\,dx$, on obtient $\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(u^2+1)^3}$.

Pour $n\geq 1$, posons $I_n=\int\frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$. Une intégration par parties fournit :

$$I_n=\frac{u}{(u^2+1)^n}+\int\frac{u.(-n)(2u)}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int\frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du$$
$$=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $\forall n\geq 1,\ I_{n+1}=\frac{1}{2n}(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n)$.

On en déduit que

$$I_3=\frac{1}{4}(\frac{u}{(u^2+1)^2}+3I_2)=\frac{u}{4(u^2+1)^2}+\frac{3}{8(u^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{Arctan}u+C,$$

et finalement que

$$\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{16}(\frac{2x^2}{(x^4+1)^2}+\frac{3}{x^4+1}+3\operatorname{Arctan}(x^2))+C.$$

(k)

$$(X+1)^7-X^7-1=7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X=7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)$$
$$=7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)=7X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

Par suite,

$$\frac{7}{(X+1)^7-X^7-1}=\frac{1}{X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c_1}{X-j}+\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_1}}{X-j^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}.$$

$a=\lim_{x\to 0}xR(x)=1$, $b=\lim_{x\to -1}(x+1)R(x)=-1$, et
$c_2=\lim_{x\to j}(x-j)^2R(x)=\frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2}=-\frac{1}{j^2(1-2j+j^2)}=\frac{1}{3}$. Puis,

$$\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}=\frac{1}{3}(\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2},$$

et

$$R-(\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}) = \frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2}-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$
$$= \frac{-2X(X+1)(X^2+X+1)+3+3X(X+1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.$$

Puis, $c_2 = \frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)} = -\frac{5}{j-j^2} = \frac{5(j-j^2)}{(j-j^2)(j^2-j)} = \frac{5(j-j^2)}{3}$.
Ainsi,

$$\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1} = \frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{3}(\frac{5(j-j^2)}{X-j}+\frac{5(j^2-j)}{X-j^2}+\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}))$$
$$= \frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{X^2+X+1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}))$$
$$= \frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2})).$$

Finalement,

$$\int \frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx = \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}(\frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2})\right)+C$$
$$= \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)+C.$$

Correction de l'exercice 2527 ▲

(a) On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ et donc $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int 2\frac{1}{1-t^2}\,dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$
$$= \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C...$$

ou bien, en posant $u=x+\frac{\pi}{2}$, (voir 2))

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos(u-\frac{\pi}{2})}\,du = \int \frac{1}{\sin u}\,du = \ln|\tan\frac{u}{2}|+C = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.$$

Ensuite, en posant $t=e^x$ et donc $dx=\frac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\operatorname{Arctan}(e^x)+C,$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x+1}\,dx = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)+C.$$

(b) En posant $t=\tan\frac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C = \ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

(c) $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|+C$ et $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln|\operatorname{sh} x|+C$.

(d) $\int \frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-\sin x|+C$.

(e) $\frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x}+\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2+3\tan^2 x}d(\tan x)$, et en posant $u=\tan x$,

$$\int \frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2+3u^2}\,du = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{\frac{3}{2}}u)+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x)+C.$$

(f) Posons $I=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ et $J=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$. Alors, $I+J=\int dx=x+C$ et $I-J=\int\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx=\ln|\cos x+\sin x|+C$. En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$I=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx=\frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$

ou bien, en posant $u=x-\frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int\frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}\,dx=\int\frac{\cos(u+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos u}\,du=\frac{1}{2}\int(1-\frac{\sin u}{\cos u})\,du=\frac{1}{2}(u+\ln|\cos u|)+C\\&=\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}+\ln|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)|)+C=\frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.\end{aligned}$$

(g)

$$\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\,dx=\frac{4\cos^3x-3\cos x}{4\sin x-4\sin^3x}=\frac{1}{4}\frac{4\cos^3x-3\cos x}{\sin x(1-\sin^2x)}=\frac{1}{4}(\frac{4\cos x}{\sin x}-\frac{3}{\sin x\cos x})=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sin(2x)}.$$

Par suite,

$$\int\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\,dx=\ln|\sin x|-\frac{3}{4}\ln|\tan x|+C.$$

(h) $\cos^4x+\sin^4x=(\cos^2x+\sin^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos^4x+\sin^4x}\,dx&=\int\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\,dx=\int\frac{1}{2-\sin^2u}\,du\text{ (en posant }u=2x)\\&=\int\frac{1}{1+\cos^2u}\,du=\int\frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\,\frac{dv}{1+v^2}\text{ (en posant }v=\tan u)\\&=\int\frac{dv}{v^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{v}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4x+\cos^4x+1}\,dx&=\frac{2\sin^2x}{1-2\sin^2x\cos^2x+1}\cos x\,dx=\frac{2\sin^2x}{2-2\sin^2x(1-\sin^2x)}\cos x\,dx\\&=\frac{u^2}{u^4-u^2+1}\,du\text{ (en posant }u=\sin x).\end{aligned}$$

Maintenant, $u^4-u^2+1=\frac{u^6+1}{u^2+1}=(u-e^{i\pi/6})(u-e^{-i\pi/6})(u+e^{i\pi/6})(u+e^{-i\pi/6})$, et donc,

$$\frac{u^2}{u^4-u^2+1}=\frac{a}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{a}}{u-e^{-i\pi/6}}-\frac{a}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{a}}{u+e^{-i\pi/6}},$$

ou $a=\frac{(e^{i\pi/6})^2}{(e^{i\pi/6}-e^{-i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6})}=\frac{(e^{i\pi/6})^2}{i.2e^{i\pi/6}.\sqrt{3}}=\frac{-ie^{i\pi/6}}{2\sqrt{3}}$, et donc

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{u^4-u^2+1}&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{-ie^{i\pi/6}}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{ie^{-i\pi/6}}{u-e^{-i\pi/6}}+\frac{ie^{i\pi/6}}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{ie^{-i\pi/6}}{u+e^{-i\pi/6}})\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{u}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{3}u+1})\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{2}\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{1}{2}\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2+\sqrt{3}u+1})\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1})+\frac{1}{4}(\frac{1}{(u+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{(u-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2})\end{aligned}$$

et donc,

$$\int\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4x+\cos^4x+1}\,dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin^2x-\sqrt{3}\sin x+1}{\sin^2x+\sqrt{3}\sin x+1}\right|+\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan}(2\sin x-\sqrt{3})+\operatorname{Arctan}(2\sin x+\sqrt{3})+C.$$

(j) En posant $u=\sin x$, on obtient

$$\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\,dx=\frac{\sin x}{1+3\sin x-4\sin^3x}\frac{1}{\cos^2x}\cos x\,dx=\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}\,du$$

Or, $1+3u-4u^3=(u+1)(-4u^2-4u-1)=-(u-1)(2u+1)^2$ et donc, $(1+3u-4u^3)(1-u^2)=(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2$ et donc,

$$\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}=\frac{a}{u+1}+\frac{b_1}{u-1}+\frac{b_2}{(u-1)^2}+\frac{c_1}{2u+1}+\frac{c_2}{(2u+1)^2}.$$

$a=\lim_{u\to-1}(u+1)f(u)=\frac{-1}{(-1-1)^2(-2+1)^2}=-\frac{1}{4}$, $b_2=\frac{1}{(1+1)(2+1)^2}=\frac{1}{18}$
et $c_2=\frac{-1/2}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-1)^2}=-\frac{4}{9}$.
Ensuite, $u=0$ fournit $0=a-b_1+b_2+c_1+c_2$ ou encore $c_1-b_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{4}{9}=\frac{23}{36}$. D'autre part, en multipliant par u, puis en faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $0=a+b_1+c_1$ et donc $b_1+c_1=\frac{1}{4}$ et donc, $c_1=\frac{4}{9}$ et $b_1=-\frac{7}{36}$.
Finalement,

$$\frac{u}{(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2}=-\frac{1}{4(u+1)}-\frac{7}{36(u-1)}+\frac{1}{18(u-1)^2}+\frac{4}{9(2u+1)}-\frac{4}{9(2u+1)^2}.$$

Finalement,

$$\int\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\,dx=-\frac{1}{4}\ln(\sin x+1)-\frac{7}{36}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{18(\sin x-1)}+\frac{2}{9}\ln|2\sin x+1|+\frac{2}{9}\frac{1}{2\sin x+1}+C$$

(k) (voir 6))

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}\,dx&=\int\frac{\frac{1}{2}((\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x))+((\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}\,dx\\&=\frac{3}{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{1}{2}\int dx\\&=\frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x|+\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{\cos(3x)}\,dx&=\int\frac{\sin x}{4\cos^3x-3\cos x}\,dx=\int\frac{1}{3u-4u^3}\,du\ \text{(en posant } u=\cos x)\\&=\int\left(\frac{1}{3u}-\frac{1}{3(2u-\sqrt{3})}-\frac{1}{3(2u+\sqrt{3})}\right)du\\&=\frac{1}{3}\left(\ln|\cos x|-\frac{1}{2}\ln|2\cos x-\sqrt{3}|-\frac{1}{2}\ln|2\cos x+\sqrt{3}|\right)+C.\end{aligned}$$

(m) Dans tous les cas, on pose $t=\tan x$ et donc $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\sin^2x}\,dx=\int\frac{1}{\alpha+\beta\tan^2x}\frac{dx}{\cos^2x}=\int\frac{dt}{\alpha+\beta t^2}.$$

Si $\beta=0$ et $\alpha\neq0$, $\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\sin^2x}\,dx=\frac{1}{\alpha}\tan x+C$.
Si $\beta\neq0$ et $\alpha\beta>0$,

$$\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\sin^2x}\,dx=\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x\right)+C.$$

Si $\beta\neq0$ et $\alpha\beta<0$,

$$\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\sin^2x}\,dx=\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{t^2-(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt=\frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\tan x+\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right|+C.$$

(n)

$$\begin{aligned}\int\frac{\operatorname{ch}^3x}{1+\operatorname{sh}x}\,dx&=\int\frac{1+\operatorname{sh}^2x}{1+\operatorname{sh}x}\operatorname{ch}x\,dx\\&=\int\frac{u^2+1}{u+1}\,du\ \text{(en posant } u=\operatorname{sh}x)\\&=\int\left(u-1+\frac{2}{u+1}\right)du=\frac{\operatorname{sh}^2x}{2}-\operatorname{sh}x+2\ln|1+\operatorname{sh}x|+C.\end{aligned}$$

(o) On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\int \sqrt{\operatorname{ch}x - 1}\, dx = \int \frac{\sqrt{(\operatorname{ch}x-1)(\operatorname{ch}x+1)}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}}\, dx = \operatorname{sgn}(x)\int \frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}}\, dx$$
$$= 2\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\operatorname{ch}x+1} + C.$$

(p)

$$\int \frac{\operatorname{th}x}{\operatorname{ch}x+1}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch}x(\operatorname{ch}x+1)} \operatorname{sh}x\, dx$$
$$= \int \frac{1}{u(u+1)}\, du \text{ (en posant } u = \operatorname{ch}x)$$
$$= \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})\, du = \ln \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x+1} + C.$$

(q) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}^6 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}^6 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sh}x}{(\operatorname{ch}^2 x-1)^3}\, dx = \int \frac{1}{(u^2-1)^3}\, du$ (en posant $u = \operatorname{ch}x$).

(r)

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{ch}x}\, dx = \int \frac{1+\operatorname{ch}x}{1-\operatorname{ch}^2 x}\, dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx - \int \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx$$
$$= \coth x + \frac{1}{\operatorname{sh}x} + C.$$

Correction de l'exercice 2528 ▲

(a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\, dx = \operatorname{Argsh}\frac{x+1}{2} + C$$
$$= \ln(\frac{x+1}{2} + \sqrt{(\frac{x+1}{2})^2+1}) + C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C.$$

Puis,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int (x+1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\, dx$$
$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\, dx$$
$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\, dx,$$

et donc,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C.$$

(On peut aussi poser $x+1 = 2\operatorname{sh}u$).

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\, dx = \operatorname{Arcsin}(x-1) + C.$

(c) On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6} x^5 dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\, du$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1} 2v\, dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\, dv = \frac{1}{3}(v + \int \frac{1}{v^2-1}\, dv) = \frac{1}{3}(v + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|) + C$$
$$= \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|) + C$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\int \frac{u}{u^2-1}2u\,du + \int \frac{v}{1-v^2}2v\,dv\Big) \text{ (en posant } u=\sqrt{1+x} \text{ et } v=\sqrt{1-x})\\ &= \int (1+\frac{1}{u^2-1})\,du + \int (-1+\frac{1}{1-v^2}\,dv\\ &= u-v+\frac{1}{2}\Big(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\Big)+C\\ &= \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}\Big(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\Big)+C.\end{aligned}$$

(e) On pose $u=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x=\frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx=\frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2}\,du$. Sur $]1,+\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx &= -2\int u\frac{2u}{(u^2-1)^2}\,du\\ &= 2\frac{u}{u^2-1} - 2\int \frac{u^2-1}{}du\\ &= \frac{2u}{u^2-1} + 2\ln\left||\frac{1+u}{1-u}\right| + C\\ &= 2\sqrt{x^2-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right| + C\end{aligned}$$

(f) On note ε le signe de x.
$\sqrt{x^4-x^2+1} = \varepsilon x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1} = \varepsilon x\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}$ puis, $\frac{x^2+1}{x}.\frac{1}{x} = 1+\frac{1}{x^2} = (x-\frac{1}{x})'$. On pose donc $u=x-\frac{1}{x}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx &= \varepsilon\int \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}}.\frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x}\,dx = \varepsilon\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \varepsilon\,\mathrm{Argsh}(x-\frac{1}{x})+C\\ &= \varepsilon\ln\Big(\frac{x^2-1+\varepsilon\sqrt{x^4-x^2+1}}{x}\Big)+C.\end{aligned}$$

(g) Sur $]0,1]$, on pose déjà $u=\sqrt{x}$ et donc, $x=u^2$, $dx=2u\,du$.

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-u}{u}}2u\,du = 2\int \sqrt{u(1-u)}\,du = 2\int \sqrt{(\frac{1}{2})^2-(u-\frac{1}{2})^2}\,du.$$

Puis, on pose $u-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin v$ et donc $du=\frac{1}{2}\cos v\,dv$. On note que $x\in]0,1]\Rightarrow u\in]0,1]\Rightarrow v=\mathrm{Arcsin}(2u-1)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow \cos v\geq 0$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx &= 2\int \sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin^2 v)}\frac{1}{2}\cos v\,dv = \frac{1}{2}\int \cos^2 v\,dv = \frac{1}{4}\int (1+\cos(2v))\,dv\\ &= \frac{1}{4}(v+\frac{1}{2}\sin(2v))+C = \frac{1}{4}(v+\sin v\cos v)+C\\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{Arcsin}(2\sqrt{x}-1)+(2\sqrt{x}-1)\sqrt{1-(2\sqrt{x}-1)^2})+C\\ &\ \frac{1}{4}(\mathrm{Arcsin}(2\sqrt{x}-1)+2(2\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-x})+C\end{aligned}$$

(h) On pose $x=\mathrm{sh}\,t$ puis $u=e^t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{1+\mathrm{ch}\,t}\mathrm{ch}\,t\,dt = \int \frac{\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}\frac{du}{u} = \int \frac{u^2+1}{u(u^2+2u+1)}\,du = \int (\frac{1}{u}-\frac{2}{(u+1)^2})\,du\\ &= \ln|u|+\frac{2}{u+1}+C.\end{aligned}$$

Maintenant, $t=\mathrm{Argsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ et donc, $u=x+\sqrt{x^2+1}$. Finalement,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{2}{x+\sqrt{x^2+1}}+C.$$

(i) On pose $u = \frac{1}{x}$ puis $v = \sqrt[3]{u^3+1} = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$ et donc $v^3 = u^3+1$ puis $v^2\,dv = u^2\,du$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{u})^3+1}}{\frac{1}{u^2}}\,\frac{-du}{u^2} = -\int \frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u}\,du = -\int \frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u^3}u^2\,du \\
&= -\int \frac{v}{v^3-1}v^2\,dv = \int (-1-\frac{1}{(v-1)(v^2+v+1)})\,dv \\
&= \int (-1-\frac{1}{3}\frac{1}{v-1}+\frac{1}{3}\frac{v+2}{v^2+v+1})\,dv \\
&= -v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(v+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dv \\
&= -v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\ln(v^2+v+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}(\frac{2v+1}{\sqrt{3}})+C\ldots
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2529 ▲

(a) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x|+C$.

(b) $\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x+\sqrt{1-x^2}+C$.

(c) $\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

(d) $\int \mathrm{Arccos}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arccos}\,x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Arccos}\,x - \sqrt{1-x^2}+C$.

(e) $\int \mathrm{Argsh}\,x\,dx = x\,\mathrm{Argsh}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Argsh}\,x - \sqrt{1+x^2}+C$.

(f) $\int \mathrm{Argch}\,x\,dx = x\,\mathrm{Argch}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = x\,\mathrm{Argch}\,x - \sqrt{x^2-1}+C$.

(g) $\int \mathrm{Argth}\,x\,dx = x\,\mathrm{Argth}\,x - \int \frac{x}{1-x^2}\,dx = x\,\mathrm{Argth}\,x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$ (on est sur $]-1,1[$).

(h) $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = x\ln(1+x^2)-2x+2\,\mathrm{Arctan}\,x+C$.

(i)

$$\begin{aligned}
\int e^{\mathrm{Arccos}\,x}\,dx &= xe^{\mathrm{Arccos}\,x} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\mathrm{Arccos}\,x}\,dx \\
&= xe^{\mathrm{Arccos}\,x} - \sqrt{1-x^2}e^{\mathrm{Arccos}\,x} + \int \sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\mathrm{Arccos}\,x}\,dx
\end{aligned}$$

et donc, $\int e^{\mathrm{Arccos}\,x}\,dx = \frac{1}{2}(xe^{\mathrm{Arccos}\,x} - \sqrt{1-x^2}e^{\mathrm{Arccos}\,x})+C$.

(j)

$$\begin{aligned}
\int \cos x\ln(1+\cos x)\,dx &= \sin x\ln(1+\cos x) - \int \sin x\frac{-\sin x}{1+\cos x}\,dx = \sin x\ln(1+\cos x) - \int \frac{\cos^2 x-1}{\cos x+1}\,dx \\
&= \sin x\ln(1+\cos x) - \int (\cos x-1)\,dx = \sin x\ln(1+\cos x)-\sin x+x+C.
\end{aligned}$$

(k) $\int \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}\,x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$.

Dans la dernière intégrale, on pose $u=\sqrt{x}$ et donc $x=u^2$ puis, $dx = 2u\,du$. On obtient $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du$. Mais,

$$\begin{aligned}
\frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u-1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u+1))+C,$$

et donc,

$$\int \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}) - \sqrt{2}(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2x}-1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2x}+1))+C.$$

(l) $\frac{x}{(x+1)^2}e^x = \frac{1}{x+1}e^x - \frac{1}{(x+1)^2}e^x = \left(\frac{1}{x+1}e^x\right)'$ et donc $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$.

(m) $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x\,dx = \int e^{x\ln x - x}\,d(x\ln x - x) = e^{x\ln x - x} + C = \left(\frac{x}{e}\right)^x\,dx$.

(n) $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$.

(o)

$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\,dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+i\alpha)x}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right) + C = \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}\mathrm{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x)) + C$$
$$= \frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x))}{a^2+\alpha^2} + C$$

(p) $\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$ et donc $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

(q) En posant $u = x^n$ et donc $du = nx^{n-1}dx$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du,$$

puis en posant $v = \sqrt{u+1}$ et donc $u = v^2-1$ et $du = 2vdv$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du = \int \frac{v}{v^2-1}\,2vdv = 2\int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv = 2v + \ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right| + C.$$

Finalement,

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \frac{1}{n}(2\sqrt{x^n+1} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}}\right|) + C.$$

(r) $\int x^2e^x\sin x\,dx = \mathrm{Im}(\int x^2e^{(1+i)x}\,dx)$. Or,

$$\int x^2e^{(1+i)x}\,dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}\,dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}(x\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int e^{(1+i)x}\,dx)$$
$$= x^2\frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2} + ixe^{(1+i)x} - i\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + C$$
$$= e^x(\frac{1}{2}x^2(1-i)(\cos x + i\sin x) + ix(\cos x + i\sin x) - \frac{1}{2}(1+i)(\cos x + i\sin x) + C.$$

Par suite,

$$\int x^2e^x\sin x\,dx = e^x(\frac{x^2}{2}(\cos x + \sin x) - x\sin x - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)) + C.$$

Correction de l'exercice 2530 ▲

Si $c \neq d$, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si il existe A et B tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-d)^2}\ (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ -2(Ad+Bc) = -(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} B = 1-A \\ A(d-c)+c = \frac{1}{2}(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} A = \frac{a+b-2c}{2(d-c)} \\ B = \frac{2d-a-b}{2(d-c)} \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{a+b-2c}{2(d-c)}d^2 + \frac{2d-a-b}{2(d-c)}c^2 = ab$$
$$\Leftrightarrow d^2(a+b-2c) + c^2(2d-a-b) = 2ab(d-c) \Leftrightarrow (a+b)(d^2-c^2) - 2cd(d-c) = 2ab(d-c)$$
$$\Leftrightarrow 2cd + (a+b)(c+d) = 2ab \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab-cd).$$

Si $c = d$, il existe trois nombres A, B et C tels que $(x-a)(x-b) = A(x-c)^2 + B(x-c) + C$ et donc tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^4} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-c)^3} + \frac{C}{(x-c)^4}.$$

Dans ce cas, les primitives sont rationnelles. Finalement, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si $c = d$ ou ($c \neq d$ et $(a+b)(c+d) = 2(ab-cd)$).

Correction de l'exercice 2531 ▲

(a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ est convergente (en fait elle vaut $\sqrt{\pi}$).

(b) $\int_1^{\infty} x^x dx$ est divergente.

(c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(x^{-1})}{\ln(1+x)} dx$ est divergente.

(d) $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(2+\sqrt{3})$.

(e) $\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx = 1/12\,\pi$.

(f) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2$.

(g) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sinh(x)} dx = -\ln \operatorname{th}(1/2)$.

Correction de l'exercice 2542 ▲

Réponses : $\frac{\pi}{2} - \ln 2, \pi, \frac{1}{(n-1)^2}$.

Correction de l'exercice 2568 ▲

$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $-1 < x < 1$.

Correction de l'exercice 2569 ▲

$\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 2570 ▲

$2nI_n - (2n+2)I_{n+1} = 0 \Rightarrow I_n = -\frac{\pi}{4n}$.

Correction de l'exercice 2571 ▲

$I_n + I_{n+2} = \frac{2I_{n+1}}{\sin\alpha} \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^n$.

Correction de l'exercice 2572 ▲

$I_n = \pi\sqrt{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{3}{4k}\right)$.

Correction de l'exercice 2573 ▲

Décomposer en éléments simples et intégrer. On obtient $I_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1}\ln k$.

Correction de l'exercice 2574 ▲

(a)

(b)

(c) $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \Rightarrow A_n = \frac{n\pi}{2}$.
$A_n - B_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ pour $n \geq 1$.

(d) $J = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2578 ▲

$1-\gamma$.

Correction de l'exercice 2579 ▲

(a) Intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\left(\ln t-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{k}\right)dt\\ &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt+\left(\ln k-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Soit $I_k=\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt$. On pose $t=ku$:

$$\begin{aligned}I_k &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_{u=0}^{+\infty}(ue^{-u})^k\ln u\,du\\ &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_{u=0}^{+\infty} d\left(\frac{(ue^{-u})^{k-1}}{k-1}\right)\frac{u^2e^{-u}\ln u}{1-u}\\ &= -\frac{k^{k+1}}{k!(k-1)}\int_{u=0}^{+\infty}(ue^{-u})^{k-1}d\left(\frac{u^2e^{-u}\ln u}{1-u}\right).\end{aligned}$$

Comme $0\le ue^{-u}\le e^{-1}$, il reste $\sqrt{k}$ au dénominateur multiplié par quelque chose de borné.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt &= \int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt-\int_{t=1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\\ &= \lim_{x\to0^+}\left(-\ln x-\int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)\\ &= \lim_{x\to0^+}\left((e^{-x}-1)\ln x-\int_{t=x}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right)\\ &= -\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt.\end{aligned}$$

(c) $\int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=(t=-\ln(1-u))=\int_{u=1-e^{-x}}^{1}\frac{-du}{\ln(1-u)}$.

Correction de l'exercice 2581 ▲

$\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2583 ▲

(a) En supposant f positive décroissante, $\int_0^{+\infty}f\le tg(t)\le tf(0)+\int_0^{+\infty}f$.

(b) $\int_{u=Pt}^{Qt}f(u)\,du-\sum_{n=P}^{Q-1}tf(nt)=\int_{u=Pt}^{Qt}(f(u)-f(t[u/t]))\,du=\int_{u=Pt}^{Qt}t(1-\{u/t\})f'(u)\,du\to0$ lorsque $P,Q\to\infty$.
Donc la série de terme général $tf(nt)$ est de Cauchy ; elle converge.
On a alors $\int_0^{+\infty}f-tg(t)=\int_{u=0}^{+\infty}t(1-\{u/t\})f'(u)\,du\to0$ lorsque $t\to0^+$.

(c) $\int_0^{+\infty}2f-2tg(t)=\int_{u=0}^{+\infty}tf'(u)\,du+\int_{u=0}^{+\infty}t(1-2\{u/t\})f'(u)\,du=tf(0)-\int_{u=0}^{+\infty}t^2\{u/t\}(1-\{u/t\})f''(u)\,du$.

Correction de l'exercice 2586 ▲

$0\le xf(x)\le2\int_{t=x/2}^{x}f(t)\,dt\to0$ (lorsque $x\to+\infty$).

$\int_{t=1}^{x}t(f(t)-f(t+1))\,dt=\int_{t=1}^{2}tf(t)\,dt+\int_{t=2}^{x}f(t)\,dt-\int_{t=x}^{x+1}(t-1)f(t)\,dt\to\int_{t=1}^{2}tf(t)\,dt+\int_{t=2}^{+\infty}f(t)\,dt$ (lorsque $x\to+\infty$).

Correction de l'exercice 2588 ▲

(a) $\int_{t=x}^{y} \frac{f(at)}{t}\,dt = \int_{t=ax}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,dt \Rightarrow \int_{t=x}^{y} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt = \int_{t=ax}^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_{t=y}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

On obtient $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt = (L-\ell)\ln a$.

(b) $I = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt = \ln 2$.

Correction de l'exercice 2589 ▲

(a)

(b) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 2590 ▲

$\int_{t=a}^{b} F(t)\,dt = \int_{u=a-1}^{a+1} \frac{u-(a-1)}{2} f(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + \int_{u=b-1}^{b+1} \frac{b+1-u}{2} f(u)\,du$.

$= \varphi(a+1) - \frac{1}{2}\int_{u=a-1}^{a+1} \varphi(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{u=b-1}^{b+1} \varphi(u)\,du - \varphi(b-1)$ où φ est une primitive de f.

Correction de l'exercice 2591 ▲

Soit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$: $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,dt = F(x) - \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} F(t)\,dt$.

Correction de l'exercice 2594 ▲

(a)

(b) e^{-x}/x.

(c) $-\ln x$.

Correction de l'exercice 2595 ▲

(a)

(b) $I_n = \sqrt{n}K_{2n+1}$, $J_n = \sqrt{n}K_{2n-1}$.

(c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 2596 ▲

$I_n = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$.

Correction de l'exercice 2597 ▲

Intégrale trivialement convergente. Couper en $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$, changer x en $\frac{1}{x}$ dans l'une des intégrales, regrouper et poser $u = x - \frac{1}{x}$. On obtient $I = \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 2598 ▲

L'intégrale converge par parties.

Correction de l'exercice 2599 ▲

$\int^{x} \cos(P(t))\,dt = \left[\frac{\sin(P(t))}{P'(t)}\right]^{x} - \int^{x} \sin(P(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P'(t)}\right)dt$.

Correction de l'exercice 2600 ▲

$I = J$ par changement $u \mapsto 1/u$.

$I + J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2603 ▲

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{X}\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,dx &= \left[x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right]_{x=0}^{X}+\int_{x=0}^{X}\sin x\,dx\\ &= X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt+1-\cos X\\ &= X\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=X}^{+\infty}-X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt+1-\cos X\\ &= -X\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_{t=X}^{+\infty}-X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{2\sin t}{t^3}\,dt+1\\ &\to 1 \text{ lorsque } X\to+\infty\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2604 ▲

$2|ff''|\leq f^2+f''^2$ donc ff'' est intégrable. On en déduit que f'^2 admet une limite finie en $+\infty$, et cette limite est nulle sans quoi f^2 ne serait pas intégrable (si $f'(x)\to\ell$ lorsque $x\to+\infty$ alors $f(x)/x\to\ell$). Ainsi f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, f est lipschitzienne et donc uniformément continue. De plus,

$$\int_{t=0}^{X}f'^2(t)\,dt=f(X)f'(X)-f(0)f'(0)-\int_{t=0}^{X}f(t)f''(t)\,dt$$

donc $f(X)f'(X)$ admet en $+\infty$ une limite finie ou $+\infty$, et le cas $f(X)f'(X)=\frac{1}{2}(f^2)'(X)\to+\infty$ lorsque $X\to+\infty$ contredit l'intégrabilité de f^2 donc ce cas est impossible, ce qui prouve que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, ff' est intégrable (produit de deux fonctions de carrés intégrables) donc f^2 admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite vaut zéro par intégrabilité de f^2.

Correction de l'exercice 2605 ▲

On pose $u_n=\int_{t=n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=\int_{t=0}^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt$. Par encadrement du dénominateur on a $u_n\sim\frac{2}{n\pi}$, d'où $u_0+\cdots+u_n\sim\frac{2\ln n}{\pi}$ et, par encadrement encore, l'intégrale arrêtée en x est équivalente à $\frac{2\ln x}{\pi}$.

Correction de l'exercice 2606 ▲

(a) Pour $x\geqslant 0$, $x^2+4x+1\geqslant 0$ et donc la fonction $f\ :\ x\mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2--\sqrt{x^2+4x+1}=\frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}}\sim 32x$. Comme la fonction $x\mapsto\frac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n ?est pas intégrable sur $[0;+\infty[$.

(b) Pour $x\geqslant 1$, $1+\frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f\ :\ x\mapsto e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}=e-\frac{e}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ puis $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e}{2x}$. Puisque la fonction $x\mapsto\frac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

(c) La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{\ln x}{x+e^x}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

• En 0, $\frac{\ln x}{x+e^x}\sim\ln x$ et donc $f(x)\underset{x\to0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\frac{1}{2}<1$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.

• En $+\infty$, $f(x)\sim\frac{\ln x}{e^x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $2>1$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(d) La fonction $x\mapsto\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $f\ :\ x\mapsto\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

En $+\infty$, $\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right)=\frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{2}{3}\ln x-\ln 3+O\left(\frac{1}{x}\right)$. Par suite, $\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+o(1)$.

Mais alors $x^2f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+2\ln x+o(1)\right)$ et donc $\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$. Finalement $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(e) La fonction $f\ :\ x\mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x)=\exp\left(-\sqrt{x^2-x}+2\ln x\right)=\exp(-x+o(x))$ et donc $x^2f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$. $f(x)$ est ainsi négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

(f) La fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \to 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.

• Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp\left(-\ln^2 x + 2\ln x\right) \to 0$. Donc f est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(g) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $f(x) \sim \frac{5x-3x}{x^5/3} = \frac{2}{x^{2/3}} > 0$. Puisque $\frac{2}{3} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.

• En $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \frac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\frac{5}{3} > 1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(h) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

• En 0, $f(x) \sim -\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• En 1, $f(x) \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} \sim \frac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.

• En $+\infty$, $x^{3/2} f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

(i) La fonction$f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.

f est positive et équivalente en 0 à droite à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ puis par parité sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut par parité $2\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\, dx$.

(j) La fonction$f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f est donc intégrable sur $]-1,1[$.

(k) La fonction$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\frac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0,1[$.

(l) La fonction$f : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{Arccos}(1-x)}$ est continue et positive sur $]0,1]$.

En 0, $\mathrm{Arccos}(1-x) = o(1)$. Donc $\mathrm{Arccos}(1-x) \sim \sin(\mathrm{Arccos}(1-x)) = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{x}$. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0,1[$.

Correction de l'exercice 2607 ▲

(a) Pour tout couple de réels (a,b), la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.

1er cas. Si $a > 1$, $x^{(a+1)/2} f(x) = \frac{1}{x^{(a-1)/2} \ln^b x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ car $\frac{a-1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\frac{a+1}{2} > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

2ème cas. Si $a < 1$, $x^{(a+1)/2} f(x) = \frac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ car $\frac{1-a}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\frac{a+1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$.

3ème cas. Si $a = 1$. Pour $X > 2$ fixé , en posant $t = \ln x$ et donc $dt = \frac{dx}{x}$ on obtient

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln^b}\, dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b}.$$

Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $b > 1$.

En résumé ,

$$\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x} \text{ est intégrable sur } [2,+\infty[\text{ si et seulement si } a > 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b > 1).}$$

(En particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\frac{1}{x}$ en $+\infty$).

(b) Pour tout réel a, la fonction $f\ :\ x \mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout réel x de$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{f(x)}$.

• **Etude en** 0 **à droite.** $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a > -1$.

• **Etude en** $\frac{\pi}{2}$ **à gauche.**$f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a < 1$.

En résumé, f est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $-1 < a < 1$.

(c) Pour $x \geqslant 1$, $1 + \frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a,b) de réels, la fonction $f\ :\ x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} (1-a) + \frac{1-b}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $a \neq 1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = 1$ et $b \neq 1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1-b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = b = 1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En résumé, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a = b = 1$.

(d) Pour tout couple (a,b) de réels, la fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{x^a(1+x^b)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• **Etude en** 0**.**

-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a + b < 1$.

• **Etude en** $+\infty$**.**

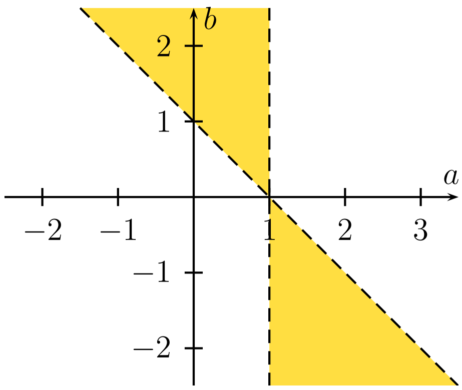
-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a + b > 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si (($b \geqslant 0$ et $a < 1$) ou ($b < 0$ et $a + b < 1$)) et (($b > 0$ et $a + b > 1$) ou ($b \leqslant 0$ et $a > 1$)) ce qui équivaut à ($b > 0$ et $a + b > 1$ et $a < 1$) ou ($b < 0$ et $a > 1$ et $a + b < 1$).

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.



Correction de l'exercice 2608 ▲

(a) Soient ε et X deux réels tels que $0 < \varepsilon < X$. Les deux fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_1^X + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1-\cos X}{X} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

• La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.

• $\left|\frac{1-\cos X}{X}\right| \leqslant \frac{1}{X}$ et donc $\lim_{X\to+\infty} \frac{1-\cos X}{X} = 0$.

• $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim_{\varepsilon\to\varepsilon} \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(u)}{4u^2}\,2du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \text{ converge et de plus } \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.}$$

(b) La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Sur $]0,1[$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,1]$. Puisque f est équivalente en 0 à $\frac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge en 0 si et seulement si $a>0$. On suppose dorénavant $a>0$.

• Soit $X>1$. Les deux fonction $x\mapsto -\cos x$ et $x\mapsto\frac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_1^X\frac{\sin x}{x^a}\,dx=\left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_1^X-a\int_1^X\frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx=-\frac{\cos X}{X^a}+\cos 1-a\int_1^X\frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx.$$

Maintenant, $\left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right|\leqslant\frac{1}{x^{a+1}}$ et puisque $a+1>1$, la fonction $x\mapsto\frac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X\mapsto\int_1^X\frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X\mapsto-\frac{\cos X}{X^a}+\cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ converge en $+\infty$.

Finalement

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx \text{ converge si et seulement si } a>0.}$$

(c) Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t=x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2}\,dx=\int_1^{X^2}\frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,dt=\frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}+e^i-\frac{1}{2}\int_1^X\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,dt\right)$$

Maintenant, $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}=0$ car $\left|\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right|=\frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t\mapsto\frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\left|\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\right|=\frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty}e^{ix^2}\,dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x\mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a montré que

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty}e^{ix^2}\,dx \text{ converge.}}$$

On en déduit encore que les intégrales $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ et $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de FRESNEL).

(d) La fonction $f\ :\ x\mapsto x^3\sin(x^8)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $X>0$. Le changement de variables $t=x^4$ fournit

$$\int_0^X x^3\sin(x^8)dx=\frac{1}{4}\int_0^{X^4}\sin(t^2)\,dt=\frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\int_0^{X^4}e^{it^2}\,dt\right).$$

D'après 3), $\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,dt$ est une intégrale convergente et donc $\int_0^{+\infty}x^3\sin(x^8)\,dx$ converge.

(e) La fonction $f\ :\ x\mapsto\cos(e^x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $X>0$. Le changement de variables $t=e^x$ fournit

$$\int_0^X\cos(e^x)\,dx=\int_1^{e^X}\frac{\cos t}{t}\,dt.$$

On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$ converge .

(f) Pour tout réel $x\geqslant 0$, $1+x^3\sin^2 x\geqslant 1>0$ et donc la fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale proposée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0,+\infty[$, intégrabilité elle-même équivalente à la convergence de la série numérique de terme général $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $u_n\geqslant 0$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
u_n&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx=\int_0^\pi\frac{1}{1+(u+n\pi)^3\sin^2 u}\,du\\
&\leqslant\int_0^\pi\frac{1}{1+n^3\pi^3\sin^2}\,du=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+n^3\pi^3\sin^2 u}\,du\\
&\leqslant 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+n^3\pi^3\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}\,du \text{ (par concavité de la fonction sinus sur } [0,\pi])\\
&=2\times\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{(n\pi)^{3/2}}\frac{1}{1+v^2}\,dv\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+v^2}\,dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et la série de terme général u_n converge. On en déduit que la fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2609 ▲

Existence et calcul de :

1) (** I) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ 2) (très long) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$
3) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ 8) (***) $\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{Arctan}x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 10) (I très long) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (calcul pour $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ 12) (*** I) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Correction de l'exercice 2610 ▲

La fonction $f\ :\ x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x)\sim\ln x=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Soient $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$. Le changement de variables $x=\frac{\pi}{2}-t$ fournit J existe et $J=I$. Par suite,

$$\begin{aligned}2I=I+J&=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2x))\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du\\&=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,du\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{0}\ln(\sin(\pi-t))\,(-dt)\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+I.\end{aligned}$$

Par suite, $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

(b) Pour $n\geqslant 2$, posons $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $0<\frac{k\pi}{2n}<\frac{\pi}{2}$ et donc $P_n>0$. D'autre part, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\frac{n\pi}{2n}=1$. On en déduit que

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$\begin{aligned}P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\frac{e^{ik\pi/(2n)}-e^{-ik\pi/(2n)}}{2i}&=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(-e^{-ik\pi/(2n)}\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)\\&=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}(-1)^{2n-1}(e^{-i\pi/2})^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=\frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n-1$ dont les racines sont les $2n-1$ racines $2n$-èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1}=1+X+X^2+\ldots+X^{2n-1}$$

et donc $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=Q(1)=2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=P_n=\sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0\leqslant k\leqslant n$, posons alors $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=\frac{\pi}{2}$ est une subdivision de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ à pas constant égal à $\frac{\pi}{2n}$.
Puisque la fonction $x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_k))\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx$ puis en sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi}{2n}\ln(P_n) \leqslant \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$$

De même, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\sin x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{2n}\ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n \geqslant 2$, $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n) + \int_0^{\pi/(2n)} \ln(\sin x)\,dx \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n) = \ln n - (n-1)\ln 2$ et donc $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$ tend vers $-\frac{\pi\ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\int_0^{\pi/(2n)} \ln(\sin x)\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x\ :\mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$), on a redémontré que $I = -\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 2611 ▲

La fonction $f\ :\ t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0;1[$.

1ère solution. (à la main, sans utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Pour $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1} = \frac{-\ln t}{1-t} = -\sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}$$

Pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = -t^n \ln t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chaque fonction f_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, est continue sur $]0,1]$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0,1]$ et donc sur $]0,1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t} = \frac{\ln t}{t-1} + \sum_{k=0}^{n} t^k \ln t$ et

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t\,dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt$$

• La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{t\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0,1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n |g(t)|\,dt \leqslant M\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt = 0$. On en déduit que la série de terme général $-\int_0^1 t^k \ln t\,dt$ converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^k \ln t)\,dt.$$

• Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_\varepsilon^1 (-t^k \ln t)\,dt = \left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_\varepsilon^1 + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_\varepsilon^1 (-t^k \ln t)\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

2ème solution. (utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et de plus, la fonction f est continue sur $]0,1[$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 2612 ▲

La fonction $f\ :\ t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0,x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u = t^2$ et on obtient $\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u}\,du$ et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt.$$

On note alors que, puisque $x \in]0,1[$, $x^2 < x$. Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t\ln t < 0$ et donc $\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{\ln t}t$ puis par croissance de l'intégrale, $\int_{x^2}^x \frac{x}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t\ln t}\,dt$ et donc

$$x^2\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dtx \leqslant x\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt$$

Maintenant, $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0,1[$,

$$x^2\ln 2 \leqslant \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt \leqslant x\ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2.}$$

Correction de l'exercice 2613 ▲

(a) La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2}\sim\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right).$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right)'\,dt = \frac{1}{2x}e^{-x^2},$$

et donc

$$\boxed{e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

(b) Pour $a>0$ fixé, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice 2608)) puis

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx &= -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx + O(1)\\ &\underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{1}{x}\,dx + \int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx + O(1) \underset{a\to0}{=} -\ln a + \int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx + O(1).\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1-\cos x}{x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}$ et en particulier, $\frac{1-\cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x\mapsto\frac{1-\cos x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$ et en particulier, $\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\ln a + O(1)$ et finalement

$$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{\sim} -\ln a.}$$

(c) Soit $a>0$.

$$\left|\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx - \frac{1}{a^2}\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^3+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,dx\right| = \int_0^1\frac{x^3}{(x^3+a^2)a^2}\,dx \leqslant \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{=} \frac{1}{a^2}+o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.}$$

Correction de l'exercice 2614 ▲

• **Domaine de définition.** Soit $x\in\mathbb{R}$.

Si $x<0$, la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x,0[\subset[x,x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.

Si $0<x<1$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t<0$ pour tout t de $]0,1[$.

Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x,x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.

Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } D=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ et strictement positive sur } D.}$$

• **Dérivabilité.** Soit I l'un des deux intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur I. Soit F une primitive de cette fonction sur I.

Si $x\in]0,1[$, on a $[x^2,x]\subset]0,1[$ et donc $f(x)=F(x^2)-F(x)$. De même, si $x\in]1,+\infty[$.

On en déduit que f est de classe C^1 sur D. De plus, pour $x\in D$,

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

• **Variations.** f' est strictement positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).

• **Etude en 0.** Soit $x \in]0,1[$. On a $0 < x^2 < x < 1$ et de plus la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2,x] \subset]0,1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0,1[$. Donc, $\frac{x-x^2}{\ln x} \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \frac{x-x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement).

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,

- f est continue sur $[0,1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0,1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $f'(0) = 0$.

• **Etude en 1.** On a vu à l'exercice 2612 que $\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue). On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).

Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(1) = 1$.

En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et d'après plus haut f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• **Etude en $+\infty$.** Pour $x > 1$, $f(x) \geqslant x^2 - x\ln x$. Donc $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

• **Convexité.** Pour $x \in D$, $f''(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.

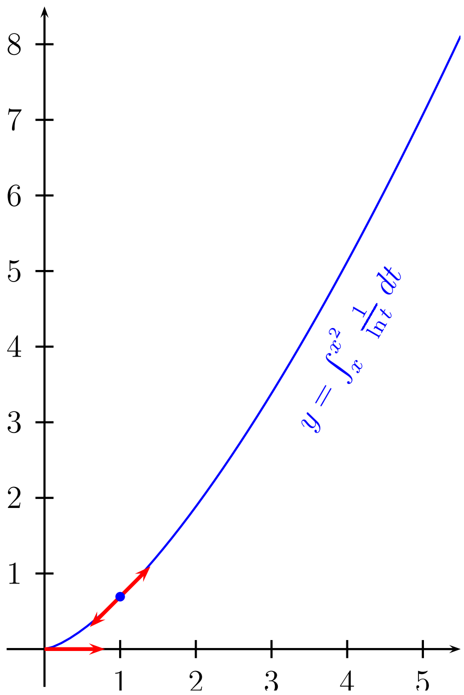
En 1, en posant $x = 1+h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h)-h}{(1+h)\ln^2(1+h)} = \frac{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-h}{h^2+o(h^2)} = \frac{1}{2} + o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Pour $x \neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. La fonction g est stictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.

• **Graphe.**



Correction de l'exercice 2615 ▲

La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$.

Soient X un réel élément de $[2,+\infty[$ et $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx.$$

Or, $\left|\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{X-n}{n} \leqslant \frac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{X\to+\infty}\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = 0$.
D'autre part, la suite $\left((-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ est de signe alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $k \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.
Il en est de même de $\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1\times 3\times\ldots\times(2n-1))^2\times(2n+1)}{(2\times 4\times\ldots\times(2n))^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\right).$$

D'après la formule de STIRLING,

$$\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{4n}}\times\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4}\times(2n) = \frac{2}{\pi}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 2616 ▲

(a) Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, pour $x \geqslant 2$ on a

$$0 \leqslant xf(x) = 2\left(x-\frac{x}{2}\right)f(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt = 2\left(/dintx/2+\infty f(t)\,dt - \int_x^{+\infty} f(t)\,dt\right)$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) La fonction $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Soit $X \geqslant 1$.

$$\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx = \int_1^X xf(x)\,dx - \int_2^{X+1}(x-1)f(x)\,dx = \int_1^X xf(x)\,dx - \int_2^{X+1} xf(x)\,dx + \int_2^{X+1} f(x)\,dx$$
$$= \int_1^2 xf(x)\,dx - \int_X^{X+1} xf(x)\,dx + \int_2^{X+1} f(x)\,dx.$$

Maintenant $0 \leqslant \int_X^{X+1} xf(x)\,dx \leqslant (X+1-X)(X+1)f(X) \leqslant 2Xf(X)$. D'après 1), cette dernière expression tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Donc, quand X tend vers $+\infty$, $\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ tend vers $\int_1^2 xf(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.
Puisque la fonction $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, on sait que $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si la fonction $X \mapsto \int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_1^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))\,dx = \int_1^2 xf(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx.}$$

Correction de l'exercice 2617 ▲

(a) Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x)-f(0)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si f a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$.
Si de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il est exclus d'avoir $\ell \neq 0$ et réciproquement si $\ell = 0$ alors $\int_0^x f'(t)\,dt$ tend vers $-f(0)$ quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) i. Soit $x \geqslant 0$. D'après la formule de TAYLOR-LAGRANGE, il existe un réel $\theta_x \in]x,x+1[$

$$f(x+1) = f(x) + (x+1-x)f'(x) + \tfrac{1}{2}f''(\theta_x).$$

ce qui s'écrit encore $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\theta_x)$. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x+1)-f(x)$ tend vers 0 et d'autre part, θ_x tend vers $+\infty$. Ainsi, si f et f'' ont une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, f' a également une limite réelle et de plus $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} f''(x)$.

Ensuite, puisque pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x)-f(0)$ et $\int_0^x f''(t)\,dt = f'(x)-f'(0)$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$ convergent et d'après 1), $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ $(= \lim_{x\to+\infty} f''(x))$.

ii. Soit $F\ :\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $F''(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$ tend vers $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$. Donc F et F'' ont des limites réelles en $+\infty$. D'après a), $f = F'$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2618 ▲

L'inégalité $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour X et Y tels que $X \leqslant Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x)\,dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x)\,dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $+\infty$ et Y tend vers $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x)\,dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff'.

Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisament grand, $f(x)f'(x) \geqslant 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

De même la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$.

Si cette limite est un réel non nul ℓ, supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisament grand, on a $f(x)f'(x) \geqslant \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2. Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.

Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a l'égalité si et seulement si la famille (f, f'') est liée.

Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.

Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.

Correction de l'exercice 2619 ▲

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Pour $n \geq 0$, on a $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t}$, donc

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Or $|\sin t| = (-1)^n \sin t$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$. Ainsi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt = (-1)^n\,[-\cos t]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$

Il en découle que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente.

(b) *Deuxième formule de la moyenne.* D'après l'énoncé, F est une primitive de f et est positive et décroissante. Puisque la fonction g admet des primitives, la fonction $G(y) := \int_a^y g(x)\,dx$ est la primitive de g s'annulant en a. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(a)\int_a^y g(x)\,dx,$$

il suffit de montrer que

$$F(a)\min_{y\in[a,b]} G(y) \leq \int_a^b F(x)g(x)\,dx \leq F(a)\max_{y\in[a,b]} G(y).$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

avec $F(a)G(a) = 0$. Comme f est négative sur $[a,b]$, on a :

$$\min_{y\in[a,b]} G(y)\int_a^b -f(x)\,dx \leq -\int_a^b f(x)G(x)\,dx \leq \max_{y\in[a,b]} G(y)\int_a^b -f(x)\,dx,$$

$$\Leftrightarrow \min_{y\in[a,b]} G(y)\,(F(a)-F(b)) \leq -\int_a^b f(x)G(x)\,dx \leq \max_{y\in[a,b]} G(y)\,(F(a)-F(b)).$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} F(b)\left(G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(y)\right) + F(a)\min_{y\in[a,b]} G(y) &\leq \int_a^b F(x)g(x)\,dx \\ &\leq F(b)\left(G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(y))\right) + F(a)\max_{y\in[a,b]} G(y). \end{aligned}$$

Les inégalités $G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(y) \geq 0$ et $G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(y) \leq 0$ et la positivité de F permettent de conclure.

(c) D'après le critère de Cauchy (voir la proposition des rappels), pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente, il suffit de montrer que $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$. D'après la formule de la moyenne appliquée à $F(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, il vient :

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{x}\int_x^y \sin t\,dt$$

pour un certain $y \in [x,x']$. On en déduit que

$$\left|\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \frac{1}{x}|\cos y - \cos x| \leq \frac{2}{x}.$$

Ainsi $\lim_{x,x'\to+\infty} \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

(d) i. Posons pour $t > 0$, $U(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t}$. On a $u(t) = U'(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t + 1) < 0$. Ainsi U est positive et décroissante sur $]0,+\infty[$. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour $0 < x \leq y$, il vient :

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| = \left|\int_x^y U(t)\sin t\,dt\right| = \left|\frac{e^{-\lambda x}}{x}\int_x^{y'} \sin t\,dt\right|,$$

pour un certain $y' \in [x,y]$. On en déduit que

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x}.$$

ii. On remarque que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t,\lambda)$ est continue sur $[0,x]$, donc Riemann-intégrable sur cet intervalle. D'après le critère de Cauchy et la question 4.a), les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ sont convergentes. Soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$. Pour montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ convergent uniformément en $\lambda \geq 0$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ et pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

Or, d'après la question 4.a),

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x} \leq \frac{2e^{-\lambda x_0}}{x_0} \leq \frac{2}{x_0}.$$

Ainsi pour $x_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, on a l'inégalité désirée, et ce indépendamment de la valeur de λ. Posons $F_n(\lambda) = \int_0^n f(t,\lambda)\,dt$. D'après ce qui précède,

$$\sup_{\lambda\in[0,+\infty[} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq \frac{2}{n},$$

i.e. F_n converge uniformément vers F sur $[0,+\infty[$. Comme les fonction F_n sont continues, il en découle que F est continue. On peut aussi revenir à la définition de continuité : pour montrer que la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$

est continue en un point $\lambda_0 \in [0,+\infty[$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de λ_0 tel que $|F(\lambda)-F(\lambda_0)| < \varepsilon$ pour tout λ dans ce voisinage. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et posons $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda)-F(\lambda_0)| &= \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda)-f(t,\lambda_0)\,dt + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt - \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda)-f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda)-f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \frac{2}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de trouver un voisinage de λ_0 tel que $\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda)-f(t,\lambda_0)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout λ dans ce voisinage. L'existence d'un tel voisinage est garantie par la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{x_\varepsilon} f(t,\lambda)\,dt$ donnée par le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels). On peut également déterminer l'existence de ce voisinage à la main de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda)-f(t,\lambda_0))\,dt\right| &\leq \int_0^{x_\varepsilon} |(f(t,\lambda)-f(t,\lambda_0)|\,dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t}-e^{-\lambda_0 t}\right| \int_0^{x_\varepsilon} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt, \\
&\leq x_\varepsilon \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t}-e^{-\lambda_0 t}\right|,
\end{aligned}$$

où l'on a utiliser l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\lambda t}-e^{-\lambda_0 t}\right| &= \left|e^{-\frac{(\lambda+\lambda_0)t}{2}}\left(e^{-\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}} - e^{\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}}\right)\right| \\
&\leq 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|t}{2}\right) \leq 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|x_\varepsilon}{2}\right),
\end{aligned}$$

car la fonction sinh est croissante. Ainsi le voisinage de λ_0 déterminé par $|\lambda-\lambda_0| < \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{argsinh}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right)$ convient.

iii. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $\lambda \in]0,+\infty[$, posons

$$\tilde{F}(x,\lambda) = \int_0^x f(t,\lambda)\,dt.$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels), la fonction $\tilde{F}$ est dérivable par rapport à la deuxième variable et sa dérivée partielle vaut :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda)\,dt.$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\tilde{F}(x,\lambda)$ tend vers $F(\lambda)$. D'après la question 4.b) cette convergence est uniforme pour $\lambda \geq 0$. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ tend vers $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt$. On peut montrer comme dans la question 4.b) que cette convergence est uniforme pour $\lambda > 0$ (attention il faut exclure $\lambda = 0$ ici). Il en découle que $\lim_{h\to 0} \frac{F(\lambda+h)-F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$ (écrivez l'argument ! On pourra soit utiliser le dernier théorème des rappels, soit le montrer à la main...).

iv. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
-\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt &= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\cos t\,dt \\
&= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\sin t\,dt \\
&= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\sin t\,dt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$-\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2}.$$

On en déduit que

$$F'(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} -\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}.$$

v. De la question précédente, il découle que

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + C,$$

où C est une constante réelle. Montrons que $F(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x > \frac{4}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &= \left| \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \, dt + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \, dt \right| \\ &\leq \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{|\sin t|}{t} \, dt + \left| \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \, dt \right| \\ &\leq \int_0^x e^{-\lambda t} \, dt + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

où on a utiliser que $|\sin t| \leq t$ et la question 4.b). Ainsi

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda x_0}}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} = 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que pour $\lambda > \lambda_0$, $|F(\lambda)| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 0$. Alors $C = \lim_{\lambda \to +\infty} \arctan \lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$F(\lambda) = -\arctan \lambda + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 2629 ▲

$I_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^n$.

Correction de l'exercice 2630 ▲

Couper en intervalles de $k\pi/n$. On obtient $I_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pour tout $n \geq 1$.

Correction de l'exercice 2631 ▲

f est paire, π-périodique. $f'(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = f(\pi/4) = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2632 ▲

Comparaison entre $\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{(1+t)^2}$ et son approximation des trapèzes. Découper et intégrer deux fois par parties, $u_n \to \frac{3}{8}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 2634 ▲

$I = \Big[f'(t)(1+\cos t)\Big]_0^{2\pi} + \int_{t=0}^{2\pi} f''(t)(1+\cos t)\, dt \geq 0.$

Correction de l'exercice 2638 ▲

(a) formule de Taylor-intégrale.

(b)

Correction de l'exercice 2641 ▲

$H' = f(2F - f^2) = fK$ et $K' = 2f(1 - f')$ donc H est croissante et positive.

Correction de l'exercice 2646 ▲

(a)

(b) Soit $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\, dt$ et $G = F^{-1}$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ G(\frac{k}{n}) \to \int_{t=a}^{b} f^2(t)\, dt \Big/ \int_{t=a}^{b} f(t)\, dt$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 2647 ▲

On a $f = e^g$ avec g de classe $\mathscr{C}^1$ par le théorème de relèvement d'où $I(f) = \frac{g(2\pi)-g(0)}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 2648 ▲

(a) Il existe toujours une unique fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g'' = f$, $g(a) = g'(a) = 0$: $g(x) = \int_{t=a}^{x}(x-t)f(t)\,dt$ (Taylor-Intégral).

(b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f_1 : x \mapsto f(x) - \lambda - \mu x$ vérifie $\int_{x=a}^{b} f_1(x)\,dx = \int_{x=a}^{b} x f_1(x)\,dx = 0$. On trouve

$$\begin{cases} (b-a)\lambda + (b^2-a^2)/2\mu & = -\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \\ (b^2-a^2)/2\lambda + (b^3-a^3)/3\mu & = -\int_{x=a}^{b} x f(x)\,dx \end{cases}$$

et ce système a pour déterminant $(b-a)^4/12 \neq 0$ donc λ, μ existent et sont uniques. Soit $g_1 \in F$ telle que $g_1'' = f_1$: $\int_{x=a}^{b} g_1''(x) g''(x)\,dx = 0$ pour tout $g \in F$, en particulier pour $g = g_1$ donc $g_1'' = f_1 = 0$ et $f(x) = \lambda + \mu x$.

Correction de l'exercice 2649 ▲

Soit $g = f - a$. On a $0 \leq g \leq b-a$ et $\int_0^1 g = -a$ d'où $\int_0^1 g^2 \leq (b-a)\int_0^1 g = -a(b-a)$ et $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 g^2 + 2a\int_0^1 g + a^2 \leq -ab$.

Correction de l'exercice 2650 ▲

(a) f est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \leq M\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1},$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, on a montré que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$u_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.$$

Puisque f' est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt = 0$ ou encore $-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt = o(\frac{1}{n})$. D'autre part, puisque $f(1) \neq 0$, $\frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$ ou encore $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$. Finalement, $u_n = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou encore

$$u_n \sim \frac{f(1)}{n}.$$

(b) Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f(1) = 0$, une intégration par parties fournit $u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt$. Puisque f' est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f'(1) \neq 0$, le 1) appliqué à f' fournit

$$u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt \sim -\frac{1}{n}\frac{f'(1)}{n} = -\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Par exemple, $\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi t}{2}\,dt \sim \frac{1}{n}$ et $\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi t}{2}\,dt \sim \frac{\pi}{2n^2}$

Correction de l'exercice 2651 ▲

(a) Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda > 0$:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\lambda}(-[\cos(\lambda t)f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt)\right| \leq \frac{1}{\lambda}(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

(b) Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.
Le résultat est clair si $f = 1$, car pour $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b \sin(\lambda t)\,dt\right| = \ldots \leq \frac{2}{\lambda}$.
Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.
Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b],\ |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,dt + \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en esacliers,

$$\exists A > 0 / \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda > A \Rightarrow \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $\lambda > A$, on a alors $\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda > A \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \varepsilon),$$

et donc que $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2652 ▲

Pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}f^2(t) &= \left(\int_0^t f'(u)\,du\right)^2 \leq (\int_0^t f'^2(u)\,du)(\int_0^t 1\,du) \quad (\text{CAUCHY} - \text{SCHWARZ}) \\ &= t\int_0^t f'^2(u)\,du \leq t\int_0^1 f'^2(u)\,du,\end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leq \int_0^1 t(\int_0^1 f'^2(u)\,du)\,dt = (\int_0^1 f'^2(u)\,du)\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(u)\,du.$$

Correction de l'exercice 2653 ▲

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[0,a]$, f réalise une bijection de $[0,a]$ sur $f([0,a]) = [0, f(a)]$.
Soit $x \in [0,a]$. Pour $y \in [0, f(a)]$, posons $g(y) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy$. Puisque f est continue sur $[0,a]$, on sait que f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$ et donc la fonction $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $[0, f(a)]$. Donc g est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ et pour $y \in [0, f(a)]$, $g'(y) = f^{-1}(y) - x$.
Or, f étant strictement croissante sur $[0,a]$, $g'(y) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) > x \Leftrightarrow y > f(x)$. Par suite, g' est strictement négative sur $[0, f(x)[$ et strictement positive sur $]f(x), f(a)]$, et g est strictement décroissante sur $[0, f(x)]$ et strictement croissante sur $[f(x), f(a)]$. g admet en $y = f(x)$ un minimum global égal à $g(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x)$. Notons $h(x)$ cette expression.
f est continue sur $[0,a]$. Donc, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Ensuite f est de classe C^1 sur $[0,a]$ à valeurs dans $[0, f(a)]$ et $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ (puisque f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$). On en déduit que $x \mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Il en est de même de h et pour $x \in [0,a]$,

$$h'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

h est donc constante sur $[0,a]$ et pour $x \in [0,a]$, $h(x) = h(0) = 0$.
On a montré que

$$\forall (x,y) \in [0,a] \times [0, f(a)],\ \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy \geq \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 2654 ▲

Soit, pour $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on sait que g est nulle. Sinon, g change de signe sur $[0,1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins une fois. Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2655 ▲

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right) = \left(\int_0^1 (\sqrt{f(t)})^2\,dt\right)\left(\int_0^1 (\sqrt{g(t)})^2\,dt\right) \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)}\,dt\right)^2 \geq \left(\int_0^1 1\,dt\right)^2 = 1.$$

Correction de l'exercice 2656 ▲

f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive donnée de f sur $\mathbb{R}$. Notons $(*)$ la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = F(x+y) - F(x-y).$$

Pour $x = y = 0$, on obtient $forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Puis $x = 0$ fournit $\forall y \in \mathbb{R}$, $F(y) - F(-y) = 0$. F est donc nécessairement paire et sa dérivée f est nécessairement impaire.

La fonction nulle est solution du problème. Soit f une éventuelle solution non nulle. Il existe alors un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$. Pour tout réel x, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)}\int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t)\,dt = \frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0)).$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0))$ et donc de f. Mais alors, F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc f l'est aussi (f est en fait de classe C^∞ par récurrence).

En dérivant $(*)$ à y fixé, on obtient $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ $(**)$, mais en dérivant à x fixé, on obtient aussi $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$ $(***)$. En redérivant $(**)$ à y fixé, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ et en dérivant $(***)$ à x fixé, on obtient $f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$. Mais alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y) = f(x)f''(y),$$

et en particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}f(x) = 0.$$

On a montré que si f est solution du problème, il existe un réel λ tel que f est solution de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (E).

- si $\lambda > 0$, en posant $k = \sqrt{\lambda}$, (E) s'écrit $y'' - k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}(kx) + B\,\mathrm{ch}(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ (on sait que la fonction nulle est solution) et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A\,\mathrm{sh}(kx)$. Alors

  $$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{k}(\mathrm{ch}(k(x+y)) - \mathrm{ch}(k(x-y)))\frac{2A}{k}\,\mathrm{sh}(kx)\,\mathrm{sh}(ky) = \frac{2}{kA}f(x)f(y).$$

  f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.
- si $\lambda < 0$, en posant $k = \sqrt{-\lambda}$, (E) s'écrit $y'' + k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(kx) + B\cos(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A\sin(kx)$. Alors

  $$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{k}(\cos(k(x-y)) - \cos(k(x+y))) = \frac{2A}{k}\sin(kx)\sin(ky) = \frac{2}{kA}f(x)f(y).$$

  f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.
- si $\lambda = 0$, (E) s'écrit $y'' = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions affines et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, si $f(x) = Ax$

  $$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2Axy = \frac{2}{A}f(x)f(y),$$

  et f est solution si et seulement si $A = 2$.

Les solutions sont la fonction nulle, la fonction $x \mapsto 2x$, les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\sin(kx)$, $k > 0$ et les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\operatorname{sh}(kx)$, $k > 0$.

Correction de l'exercice 2657 ▲

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. F est de classe C^2 sur le segment $[a,b]$ et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE permet d'écrire

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a) - \frac{b-a}{2}F'(a)| \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\sup\{|F''(x)|,\ x \in [a,b]\}.$$

Mais $F'(a) = f(a) = 0$ et $F'' = f'$. Donc,

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a)| \leq \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

De même, puisque $F'(b) = f(b) = 0$,

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(b)| \leq \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = |F(b) - F(a)| \leq |F(b) - F(\frac{a+b}{2})| + |F(\frac{a+b}{2}) - F(a)| \leq \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Correction de l'exercice 2658 ▲

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)| - f(t))\,dt = 0\\ \Leftrightarrow |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ \Leftrightarrow f = |f| \Leftrightarrow f \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \leq 0$, alors $\int_0^1 -f(t)\,dt \geq 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f = |-f|$ ou encore $f \leq 0$.
En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2666 ▲

Ils sont égaux.

Correction de l'exercice 2668 ▲

Les deux membres sont n-linéaires alternés. On le vérifie sur la base du déterminant.

Correction de l'exercice 2669 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+2+\dots+n+\sigma(1)+\dots+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{2(1+2+\dots+n)} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \det A.\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie les lignes numéros 2, 4,... de B par -1 puis les colonnes numéros 2, 4,... de la matrice obtenue par -1. On obtient la matrice A qui se déduit donc de la matrice B par multiplication des lignes ou des colonnes par un nombre pair de -1 (puisqu'il y a autant de lignes portant un numéro pair que de colonnes portant un numéro pair). Par suite, $\det(B) = \det(A)$.

Correction de l'exercice 2670 ▲

Soient $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p & \to & \mathbb{K} \\ (C_1,\dots,C_p) & \mapsto & \det\begin{pmatrix} X & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array}$ où $X = (C_1 \dots C_p) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

• φ est linéaire par rapport à chacune des colonnes $C_1,\dots, C_p$.

• Si il existe $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $C_i = C_j$, alors $\varphi(C_1,\dots,C_p) = 0$.

Ainsi, φ est une forme p-linéaire alternée sur l'espace $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension p. On sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}_0}$ (où $\det_{\mathscr{B}_0}$ désigne la forme déterminant dans la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) ou encore il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendant de $(C_1,\dots,C_p)$ tel que $\forall (C_1,\dots,C_p) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$, $f(C_1,\dots,C_p) = \lambda \det_{\mathscr{B}_0}(C_1,\dots,C_p)$ ou enfin il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendant de X tel que $\forall X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix} X & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \lambda \det(X)$. Pour $X = I_p$, on obtient $\lambda = \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et donc

$$\forall B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

De même, l'application $Y \mapsto \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est une forme q-linéaire alternée des lignes de Y et donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\forall Y \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \mu \det(Y)$ puis $Y = I_q$ fournit $\mu = \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ et donc

$$\forall B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K}),\ \forall D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C) \times \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C),$$

(en supposant acquise la valeur d'un déterminant triangulaire qui peut s'obtenir en revenant à la définition d'un déterminant et indépendamment de tout calcul par blocs).

$$\boxed{\forall (B,C,D) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_q(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C).}$$

Correction de l'exercice 2716 ▲

Soient a,b,c des réels vérifiant $a^2+b^2+c^2 = 1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculons le déterminant de P.

$$\det P = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Déterminons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ et $\operatorname{Im} P$.

$$\ker P = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

on a

$$(x,y,z) \in \ker P \iff \begin{cases} a(ax+by+cz) = 0 \\ b(ax+by+cz) = 0 \\ c(ax+by+cz) = 0 \end{cases}$$

Or, a,b et c ne sont pas simultanément nuls car $a^2+b^2+c^2 = 1$, ainsi

$$\ker P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ ax+by+cz = 0\},$$

c'est le plan vectoriel d'équation $ax+by+cz = 0$.

L'image de P est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice P. Sachant que $\dim\ker P + \dim \operatorname{Im} P = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, on sait que la dimension de l'image de P est égale à 1, c'est-à-dire que l'image est une droite vectorielle. En effet, les vecteurs colonnes de P sont les vecteurs

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, c\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Le sous-espace $\operatorname{Im} P$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

(c) Soit $Q = I - P$, calculons P^2, PQ, QP et Q^2.

$$\begin{aligned}
P^2 &= \begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3\\ a^3b+ab^3+abc^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3\\ a^3c+ab^2c+ac^3 & a^2bc+b^3c+bc^3 & a^2c^2+b^2c^2+c^4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a^2(a^2+b^2+c^2) & ab(a^2+b^2+c^2) & ac(a^2+b^2+c^2)\\ ab(a^2+b^2+c^2) & b^2(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2)\\ ac(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) & c^2(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix} = P.
\end{aligned}$$

Car $a^2+b^2+c^2 = 1$.
Si $Q = I - P$, on a

$$\begin{aligned}
PQ &= P(I-P) = PI - P^2 = P - P = 0,\\
QP &= (I-P)P = IP - P^2 = P - P = 0
\end{aligned}$$

et

$$Q^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - IP - PI + P^2 = I - P - P + P = I - P = Q.$$

(d) Caractérisons géométriquement P et Q.
Nous avons vu que le noyau de P était égal au plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$ et que son image de était la droite vectorielle engendrée par le vecteur (a,b,c). Par ailleurs, on a $P^2 = P$, égalité qui caractérise les projecteurs, l'endomorphisme de matrice P est donc la projection sur $\operatorname{Im} P$ suivant la direction $\ker P$.
Soit $X \in \mathbb{R}^3$, on a

$$QX = 0 \iff IX - PX = 0 \iff PX = X \iff X \in \operatorname{Im} P,$$

ainsi $\ker Q = \operatorname{Im} P$. D'autre part,

$$Q = I - P = \begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{pmatrix}.$$

On a $\dim \operatorname{Im} Q = 2$ et les vecteurs colonnes de Q vérifient l'équation $ax+by+cz=0$, ainsi $\operatorname{Im} Q = \ker P$. L'égalité $Q^2 = Q$ prouve que Q est également un projecteur, c'est la projection sur $\operatorname{Im} Q$ dirigée par $\ker Q$.

Correction de l'exercice 2717 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & a & 1\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & a & 1\\ a & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + a\begin{vmatrix}0 & a\\ a & 1\end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $1 + a^3 \neq 0$, ce qui équivaut à $a \neq -1$ car $a \in \mathbb{R}$.

(b) Calculons A^{-1} lorsque A est inversible, c'est-à-dire $a \neq -1$. Pour cela nous allons déterminer la comatrice $\tilde{A}$ de A. On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}-1 & a & -a^2\\ a & -a^2 & -1\\ -a^2 & -1 & a\end{pmatrix},$$

on remarque que $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$ et on a bien $A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1-a^3)I_3$ d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1-a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2726 ▲

Notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\mathrm{mod}\, 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.
(b) $(a+b+c)^3$
(c) $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$
(d) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.
(e) $-(a^3-b^3)^2$.
(f) $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ où $\alpha \neq \beta$ sont les racines de $X^2-aX+bc=0$.
$(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$ si $\alpha = \beta$.
(g) $a^{n-3}(a-b)\big(a^2+ab-2(n-2)b^2\big)$.
(h) 1.
(i) $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right)$.
(j) 0
(k) $\varepsilon_n\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.
(l) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Correction de l'exercice 2727 ▲

(a) $-x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)$.
(b) $(x-a_1)\ldots(x-a_n)(x+a_1+\cdots+a_n)$.
(c) $z(y-z)(x-y)\ldots(a-b)$.
(d) $\frac{V(a,b,c)V(x,y,z)}{(a+x)\ldots(c+z)}$.

Correction de l'exercice 2728 ▲

3.$\sin\alpha - \sin\beta - \sin(\alpha-\beta)$.

Correction de l'exercice 2729 ▲

(a) Développer.
(b) i. $\begin{cases} D(a-b,0,c-b) = (a-b)^n \\ D(a-c,b-c,0) = (a-c)^n \end{cases} \Rightarrow D(a,b,c) = \frac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$.
ii. $\det((a-b)I+bU) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

Correction de l'exercice 2732 ▲

(a) $M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & n \\ \vdots & & \ldots & \\ 0 & n & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 = \varepsilon_{n-1}n^n$.
(b)
(c) $n^{n/2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 2733 ▲

Polynômes de Tchebychev $\Rightarrow D = 2^{(n-1)(n-2)/2} V(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Correction de l'exercice 2734 ▲

$M = (x_i^{j-1}) \times (C_k^{i-1} y_j^{k-i+1}) \Rightarrow$

$\det M = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n-1 \\ \varepsilon_n C_{n-1}^0 C_{n-1}^1 \dots C_{n-1}^{n-1} V(x_1, \dots, x_n) V(y_1, \dots, y_n) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 2735 ▲

$A = \left(\frac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right) \times \left(P^{(i-1)}(j)\right) \Rightarrow \det A = \varepsilon_n \left(a_{n-1}(n-1)!\right)^n$. Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 2736 ▲

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé. Pour x réel, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta = D(a)$)). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des rôles de b et c, $D(-c) = 0$. De ce qui précède, on déduit que si $b \neq c$, $D(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b+c = 0$ car alors D est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul). Ainsi, si $b \neq c$ (ou par symétrie des roles, si $a \neq b$ ou $a \neq c$), on a : $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a = b = c$. Dans ce cas,

$$D(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c = b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c \neq b$).

$$\boxed{\Delta = 4(a+b)(a+c)(b+c).}$$

Correction de l'exercice 2737 ▲

Soit $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4. En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X + a + b + c)$. Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$ ou $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ ou $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, on voit que P est divisible par $(X - a - b + c)$ ou $(X - a + b - c)$ ou $(X + a - b - c)$. **1er cas.** Si les quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, $P = (X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c)$. **2ème cas.** Deux au moins des quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont égaux. Notons alors que $-a-b-c = a+b-c \Leftrightarrow b = -a$ et que $-a+b+c = a-b+c \Leftrightarrow a = b$. Par symétrie des roles, deux des quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres $|a|$, $|b|$ ou $|c|$ sont égaux. On conclut dans ce cas que l'expression de P précédemment trouvée reste valable par continuité par rapport à a, b ou c.

$$\boxed{P=(X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c).}$$

Correction de l'exercice 2738 ▲

(a) Pour $n\geq 2$, posons $\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ 1 & 0 & 1 & & n-2\\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0\end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1.

Pour cela, on effectue les transformations $C_1\leftarrow C_1-C_2$ puis $C_2\leftarrow C_2-C_3$ puis ... puis $C_{n-1}=C_{n-1}-C_n$. On obtient

$$\Delta_n=\det(C_1-C_2,C_2-C_3,...,C_{n-1}-C_n,C_n)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1\\ 1 & -1 & & \vdots & n-2\\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -1 & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

On fait alors apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det(L_1,L_2,...,L_n)=\det(L_1,L_2+L_1,...,L_{n-1}+L_1,L_n+L_1)$. On obtient

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} -1 & \times & \dots & \dots & \times\\ 0 & -2 & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -2 & \times\\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1\end{vmatrix}=(1-n)(-2)^{n-2}.$$

.

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ \Delta_n=(1-n)(-2)^{n-2}.}$$

(b) $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\sin(a_i+a_j)=\sin a_i\cos a_j+\cos a_i\sin a_j$ et donc si on pose $C=\begin{pmatrix}\cos a_1\\ \cos a_2\\ \vdots\\ \cos a_n\end{pmatrix}$ et $S=\begin{pmatrix}\sin a_1\\ \sin a_2\\ \vdots\\ \sin a_n\end{pmatrix}$, on a $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $C_j=\cos a_jS+\sin a_jC$. En particulier, $\mathrm{Vect}(C_1,...,C_n)\subset\mathrm{Vect}(C,S)$ et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\boxed{\forall n\geq 3,\ \det(\sin(a_i+a_j))_{1\leq i,j\leq n}=0.}$$

Si $n=2$, $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leq i,j\leq 2}=\sin(2a_1)\sin(2a_2)-\sin^2(a_1+a_2)$.

(c) L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n=2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(pour } 1 \leq j \leq p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j})$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(par linéarité par rapport aux colonnes } C_1,\ C_2, \dots,\ C_p)$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{(pour } p+1 \leq i \leq 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2-b^2)^p$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{2p} = (a^2-b^2)^p.}$$

(d) On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

(e) Pour $1 \leq i \leq p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i-1}^{p-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre L_p par $L_p - L_{p-1}$ puis L_{p-1} par $L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis L_2 par $L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \dots = \det(A_1) = 1$.

(f) En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

où $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array}\right| = (-1)^k X^k$ et donc

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ D_n = (-1)^n \left(X^n - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right).}$$

Correction de l'exercice 2739 ▲

Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts. Soient λ_1,..., λ_n, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$. On a

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n}\det(C_1,...,C_{n-1},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_j) = \det B,$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1\leq i\leq n}$ avec $R = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{X+b_j}$. On prend $R = \frac{(X-a_1)...(X-a_{n-1})}{(X+b_1)...(X+b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée. Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = ... = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n}R(a_n)\Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z\to -b_n}(z+bn)R(z) = \frac{(-b_n-a_1)...(-b_n-a_{n-1})}{(-b_n+b_1)...(-b_n+b_{n-1})} = \frac{(a_1+b_n)...(a_{n-1}+b_n)}{(b_n-b_1)...(b_n-b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n\geq 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)...(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)...(a_n+b_n)..(a_2+b_n)(a_1+b_n)}\Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1,...,a_n)\mathrm{Van}(b_1,...,b_n)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}.}$$

Dans le cas particulier où $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de HILBERT) à calculer : $H_n = \frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)^2}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(i+j)}$. Mais,

$$\prod_{1\leq i,j\leq n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Van}(1,2,...,n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n\geq 1,\ H_n = \frac{(\prod_{k=1}^{n}k!)^3}{n!^2\times\prod_{k=1}^{2n}k!}.}$$

Correction de l'exercice 2740 ▲

On procède par récurrence sur $n\geq 1$. • Pour $n = 1$, c'est clair. • Soit $n\geq 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit divisible par 2^{n-1}. Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé. Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1\geq 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul. Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n. Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1. Soit (i,j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1,...,C_j,...,C_n) - \det(C_1,...,C'_j,...,C_n) = \det(C_1,...,C_j - C'_j,...,C_n),$$

où $C_j - C'_j = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ -2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (-2 en ligne i). En développant ce dernier déterminant suivant sa j-ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$
où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n. Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \pmod{2^n}.$$

Ce dernier déterminant étant nul, le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 2741 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n) = 2(1+2+\ldots+n) \in 2\mathbb{N}) \\
&= \det A
\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6...On obtient $\det B = (-1)^{2p} \det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Correction de l'exercice 2742 ▲

• Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 est

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \leq k+l-2 \leq 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0,n\} \Leftrightarrow k+l = 2$ ou $k+l = n+2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1-(\omega^{k+l-2})^n}{1-\omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. • Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de $P\overline{P}$ est

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n < -(n-1) \leq k-l \leq n-1 < n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k = l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l} = n$. Sinon, $\beta_{k,l} = 0$. Ainsi, $P\overline{P} = nI_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$). Calculons enfin PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k} = a_k$. Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}
\sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v &= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{v=l-n+1}^{0} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v \\
&= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^{n} \omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} \text{ (en posant } w = v+n) \\
&= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^{n} \omega^{(k-1)(l-w)} a_w \\
&= \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v = \omega^{(k-1)(l-1)} \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v
\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites (a_k) et (ω^k) ont la même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)}a_v$). Pour k élément de $[\![1,n]\!]$, posons alors $S_k = \sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v$. On a montré que $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leq k,l\leq n}$. Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\det(PA) = \det(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leq k,l\leq n} = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\times\det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leq k,l\leq n} = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\times\det P.$$

Donc $(\det P)(\det A) = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\det P$ et finalement, puisque $\det P \neq 0$,

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\right).}$$

Par exemple, pour $n=3$, $\det A = (a_1+a_2+a_3)(a_1+ja_2+j^2a_3)(a_1+j^2a_2+ja_3)$.

Correction de l'exercice 2743 ▲

On a toujours $A\times{}^t\mathrm{com}A = (\det A)I_n$ et donc

$$(\det A)(\det(\mathrm{com}A)) = (\det A)(\det({}^t\mathrm{com}A)) = \det(\det A\, I_n) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A\neq 0$, on obtient $\det(\mathrm{com}A) = (\det A)^{n-1}$. • Si $\det A = 0$, alors $A^t\mathrm{com}A = 0$ et $\mathrm{com}A$ n'est pas inversible car sinon, $A=0$ puis $\mathrm{com}A = 0$ ce qui est absurde. Donc, $\det(\mathrm{com}A) = 0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\ \det(\mathrm{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

• Si $\mathrm{rg}A = n$, alors $\mathrm{com}A\in GL_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\mathrm{com}A)\neq 0$) et $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = n$. • Si $\mathrm{rg}A\leq n-2$, alors tous les mineurs de format $n-1$ sont nuls et $\mathrm{com}A = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = 0$. • Si $\mathrm{rg}A = n-1$, il existe un mineur de format $n-1$ non nul et $\mathrm{com}A\neq 0$. Dans ce cas, $1\leq\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)\leq n-1$. Plus précisément,

$$A^t\mathrm{com}A = 0 \Rightarrow \mathrm{com}A^tA = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}({}^tA)\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{com}A) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{com}A))\geq\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}A = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}A)\leq 1,$$

et finalement si $\mathrm{rg}A = n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = 1$.

Correction de l'exercice 2744 ▲

$$\begin{aligned}(\det A)' &= \left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\right)' = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\left(\sum_{k=1}^{n}a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(k),k}...a_{\sigma(n),n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(k),k}...a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^{n}\det(C_1,...,C'_k,...,C_n)\end{aligned}$$

Applications.

(a) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1\\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1\end{vmatrix}$. Δ_n est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède, $\Delta'_n = \sum_{k=1}^{n}\delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k-ème colonne par le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k-ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$. Ensuite, on a déjà $\Delta_1 = X+1$ puis $\Delta_2 = (X+1)^2-1 = X^2+2X$ ... Montrons par récurrence que pour $n\geq 1$, $\Delta_n = X^n+nX^{n-1}$. C'est vrai pour $n=1$ puis, si pour $n\geq 1$, $\Delta_n = X^n+nX^{n-1}$ alors $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n+(n+1)nX^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = X^{n+1}+(n+1)X^n+\Delta_{n+1}(0)$. Mais, puisque $n\geq 1$, on a $n+1\geq 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = X^{n+1}+(n+1)X^n$. Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Delta_n = x^n+nx^{n-1}.}$$

(b) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x\\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\\ x & \dots & \dots & x & x+a_n\end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1+xC,...,a_ne_n+xC)$ où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparait deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc, $\Delta_n = \det(a_1e_1,...,a_ne_n)+\sum\det(a_1e_1,...,xC,...,a_ne_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. La formule de TAYLOR fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0)+X\Delta_n'(0)$. Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^n a_k = \sigma_n$ puis $\Delta_n'(0) = \sum_{k=1}^n \det(a_1e_1,...,C,...,a_ne_n) = \sum_{k=1}^n \prod_{i\neq k} a_i = \sigma_{n-1}$. Donc, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Correction de l'exercice 2745 ▲

(a) Pour le premier déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$. Pour le deuxième, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le premier déterminant. Le deuxième déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.

(b) Pour (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$, $(i+j-1)^2 = j^2+2(i-1)j+(i-1)^2$. Donc,

$$\forall j\in\{1,...,n\},\ C_j = j^2(1)_{1\leq i\leq n}+2j(i-1)_{1\leq i\leq n}+((i-1)^2)_{1\leq i\leq n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de $\mathrm{Vect}((1)_{1\leq i\leq n},(i-1)_{1\leq i\leq n},((i-1)2)_{1\leq i\leq n})$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang infèrieur ou égal à 3. Donc, si $n\geq 4$, $\Delta_n = 0$. Il reste ensuite à calculer $\Delta_1 = 1$ puis $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4\\ 4 & 9\end{vmatrix} = -7$ puis $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9\\ 4 & 9 & 16\\ 9 & 16 & 25\end{vmatrix} = (225-256)-4(100-144)+9(64-81) = -31+176-153 = -8$.

(c)

$$\Delta_n = \det(C_1,...,C_n) = \det(C_1+...+C_n,C_2,...,C_n) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b\\ 1 & a & \ddots & & \vdots\\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b\\ 1 & b & \dots & b & a\end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2,..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b\\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b\end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

(d) Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient au moins deux colonnes de x. Ainsi, en posant $\Delta_n = \det(C_1+xC,...,C_n+xC)$ où $C_k = \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_{k-1}\\ b\\ a_{k+1}\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ et $C = (1)_{1\leq i\leq n}$, on obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1,...,C_n)+\sum_{k=1}^n \det(C_1,...,C_{k-1},xC,C_{k+1},...,C_n),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1. Posons $\Delta_n = AX+B$ et $P = \prod_{k=1}^n(a_k-X)$. Quand $x=-b$ ou $x=-c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc : **1er cas.** Si $b\neq c$. $\Delta_n(-b) = P(b)$ et $\Delta_n(-c) = P(c)$ fournit le système $\left\{\begin{array}{l} -bA+B = P(b)\\ -cA+B = P(c)\end{array}\right.$ et donc $A = -\frac{P(c)-P(b)}{c-b}$ et $B = \frac{cP(b)-bP(c)}{c-b}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } b\neq c,\ \Delta_n = -\frac{P(c)-P(b)}{c-b}x+\frac{cP(b)-bP(c)}{c-b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^n(a_k-X).}$$

2ème cas. Si $b=c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynômiale en c. On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b=c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n

pour $b \neq c$. Maintenant, quand b tend vers c, $-\frac{P(c)-P(b)}{c-b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b)-bP(c)}{c-b} = \frac{c(P(b)-P(c))+(c-b)P(c)}{c-b},$$

tend vers $-bP'(b)+P(b)$.

$$\boxed{\text{si } b=c,\ \Delta_n = -xP'(b)+P(b)-bP'(b) \text{ où } P=\prod_{k=1}^{n}(a_k-X).}$$

(e) $\Delta_2 = 3$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 3-2 = 4$. Puis, pour $n \geq 4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geq 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n\geq 3}$ est constante. Par suite, pour $n \geq 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour $n \geq 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n-2)\times 1 = n+1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \Delta_n = n+1.}$$

Correction de l'exercice 2746 ▲

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+2(-7) = -12 \neq 0$ et le sytème est de CRAMER en x_1, x_2 et x_4. On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension $5-3=2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \\ x_2-2x_4=-x_3-2x_5 \\ 2x_1+x_2=5x_3+4x_5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-2x_1+5x_3+4x_5 \\ x_4=\frac{1}{2}((-2x_1+5x_3+4x_5)+x_3+2x_5) \\ x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-2x_1+5x_3+4x_5 \\ x_4=-x_1+3x_3+3x_5 \\ x_1+2(-2x_1+5x_3+4x_5)+3(-x_1+3x_3+3x_5)=x_3-x_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=3x_3+3x_5x_2=-x_3-2x_5 \\ x_4=0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $F=\{(3x_3+3x_5,-x_3-2x_5,x_3,0,x_5),\ (x_3,x_5)\in\mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1=(3,-1,1,0,0)$ et $e_2=(3,-2,0,0,1)$ et, puisque $\dim F=2$, une base de F est (e_1,e_2).

Correction de l'exercice 2747 ▲

Soit n un entier naturel non nul. On note L_0, L_1,..., L_n les lignes du déterminant $\text{Van}(x_0,\dots,x_n)$

A la ligne numéro n du déterminant $\text{Van}(x_0,\dots,x_n)$, on ajoute une combinaison linéaire des lignes précédentes du type $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i L_i$. La valeur du déterminant n'a pas changé mais sa dernière ligne s'écrit maintenant $(P(x_0),\dots,P(x_n))$ où P est un polynôme unitaire de degré n. On choisit alors pour P (le choix des λ_i équivaut au choix de P) le polynôme $P=\prod_{i=0}^{n-1}(X-x_i)$ (qui est bien unitaire de degré n). La dernière ligne s'écrit alors $(0,\dots,0,P(x_{n+1}))$ et en développant ce déterminant suivant cette dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{Van}(x_0,\dots,x_n) = P(x_n)\text{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)\text{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}).$$

En tenant compte de $\text{Van}(x_0)=1$, on obtient donc par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n,\ \text{Van}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i).}$$

En particulier, $\text{Van}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 2748 ▲

Si deux des a_i sont égaux ou deux des b_j sont égaux, C_n est nul car C_n a soit deux lignes identiques, soit deux colonnes identiques.

On suppose dorénavant que les a_i sont deux à deux distincts de même que les b_j (et toujours que les sommes a_i+b_j sont toutes non nulles).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $L_1,\ldots,L_{n+1}$ les lignes de C_{n+1}.
On effectue sur C_{n+1} la transformation $L_{n+1}\leftarrow\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_iL_i$ avec $\lambda_{n+1}\neq 0$.
On obtient $C_{n+1}=\frac{1}{\lambda_{n+1}}D_{n+1}$ où D_{n+1} est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de C_{n+1} par la ligne $(R(b_1),\ldots,R(b_{n+1}))$ avec $R=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i}{X+a_i}$. On prend $R=\frac{(X-b_1)\ldots(X-b_n)}{(X+a_1)\ldots(X+a_{n+1})}$.
• Puisque les $-a_i$ sont distincts des b_j, R est irréductible.
• Puisque les a_i sont deux à deux distincts, les pôles de R sont simples.
• Puisque $\deg((X-b_1)\ldots(X-b_n))<\deg((X+a_1)\ldots(X+a_{n+1}))$, la partie entière de R est nulle.
R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme $R=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i}{X+a_i}$ où $\lambda_{n+1}\neq 0$.
Avec ce choix des λ_i, la dernière ligne de D_{n+1} s'écrit $(0,\ldots,0,R(b_{n+1}))$ et en développant D_{n+1} suivant sa dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ C_{n+1}=\frac{1}{\lambda_{n+1}}R(b_{n+1})C_n.$$

Calculons λ_{n+1}. Puisque $-a_{n+1}$ est un pôle simple de R,

$$\lambda_{n+1}=\lim x\to -a_{n+1}(x+a_{n+1})R(x)=\frac{(-a_{n+1}-b_1)\ldots(-a_{n+1}-b_n)}{(-a_{n+1}+a_1)\ldots(-a_{n+1}+a_n)}=\frac{(a_{n+1}+b_1)\ldots(a_{n+1}+b_n)}{(a_{n+1}-a_1)\ldots(a_{n+1}-a_n)}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}}R(b_{n+1})=\frac{(a_{n+1}-a_1)\ldots(a_{n+1}-a_n)}{(a_{n+1}+b_1)\ldots(a_{n+1}+b_n)}\frac{(b_{n+1}-b_1)\ldots(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}+a_1)\ldots(b_{n+1}+a_n)}$$

puis la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ C_{n+1}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\prod_{i=1}^{n}(b_{n+1}-b_i)}{\prod_{i=n+1\text{ ou }j=n+1}(a_i+b_j)}C_n.$$

En tenant compte de $C_1=\frac{1}{a_1+b_1}$, on obtient par récurrence

$$\boxed{\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}=\frac{\mathrm{Van}(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\mathrm{Van}(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.}$$

(y compris dans les cas particuliers analysés en début d'exercice).
Calcul du déterminant de HILBERT. On est dans le cas particulier où $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_i=b_i=i$. D'abord

$$\mathrm{Van}(1,\ldots,n)=\prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right)=\prod_{j=2}^{n}(j-1)!=\prod_{j=1}^{n-1}i!.$$

Puis $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)=\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(i+n)!}{i!}=$ et donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_n=\frac{(\prod_{i=1}^{n}i!)^4}{n!^2\prod_{i=1}^{2n}i!}.}$$

Correction de l'exercice 2749 ▲

On note $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes du déterminant de l'énoncé puis on pose $C=(\cos(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $S=(\sin(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $Cj=\sin(a_j)C+\cos(a_j)S$. Ainsi, les colonnes de la matrice proposée sont dans $\mathrm{Vect}(C,S)$ qui est un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\boxed{\text{si } n\geqslant 3,\ \det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=0.}$$

Si $n=2$, on a $\begin{vmatrix}\sin(2a_1)&\sin(a_1+a_2)\\\sin(a_1+a_2)&\sin(2a_2)\end{vmatrix}=\sin(2a_1)\sin(2a_2)-\sin^2(a_1+a_2)$.

Correction de l'exercice 2750 ▲

Soient les vecteurs colonnes $A=(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $U=(1)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
$\forall j\in[\![1,n]\!]$, $C_j=A+b_jU$. Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\boxed{\text{si } n\geqslant 3,\ \det(a_i+b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=0.}$$

Si $n=2$, on a $\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2\\a_2+b_1&a_2+b_2\end{vmatrix}=(a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)(a_2+b_1)=a_1b_2+a_2b_1-a_1b_1-a_2b_2=(a_2-a_1)(b_1-b_2)$.

Correction de l'exercice 2751 ▲

Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$,

$$C_j = ((a+i+j)^2)_{1\leqslant i\leqslant n} = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2(a+j)(i)_{1\leqslant i\leqslant n} + (i^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus trois et donc,

$$\boxed{\text{si } n\geqslant 4,\ \det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Le calcul est aisé pour $n\in\{1,2,3\}$.

Correction de l'exercice 2752 ▲

$\frac{x_j-x_i}{j-i}$ est déjà un rationnel strictement positif.

Posons $P_i = 1$ si $i=1$, et si $i\geqslant 2$, $P_i = \frac{X(X-1)\dots(X-(i-2))}{(i-1)!}$.

Puisque, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $\deg(P_i) = i-1$, on sait que la famille $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$. De plus, pour $i\geqslant 2$, $P_i - \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ est de degré $i-2$ et est donc combinaison linéaire de $P_1, P_2,\dots, P_{i-2}$ ou encore, pour $2\leqslant i\leqslant n$, la ligne numéro i du déterminant $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est somme de la ligne $\left(\frac{x_j^{i-1}}{(i-1)!}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et d'une combinaison linéaire des lignes qui la précède. En partant de la dernière ligne et en remontant jusqu'à la deuxième, on retranche la combinaison linéaire correspondante des lignes précedentes sans changer la valeur du déterminant. On obtient par linéarité par rapport à chaque ligne

$$\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i-1)!}\mathrm{Van}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)}.$$

Finalement,

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i} = \det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathbb{N}^*.}$$

Correction de l'exercice 2753 ▲

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k)\in[\![1,n]\!]^2$, de la matrice A vaut a_{k-j} avec la convention : si $-(n-1)\leqslant u\leqslant -1$, $a_u = a_{n+u}$.

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k)\in[\![1,n]\!]^2$, de la matrice $A\Omega$ vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{n} a_{u-j}\omega^{(u-1)(k-1)} &= \sum_{v=-(j-1)}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} = \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} + \sum_{v=0}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)}\\
&= \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_{v+n}\omega^{(v+n+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \text{ (car } a_{v+n}=a_v \text{ et } \omega^n = 1)\\
&= \sum_{u=n-j+1}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}\\
&= \omega^{(j-1)(k-1)}\sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.
\end{aligned}$$

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, posons $S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\Omega$ vaut donc $\omega^{(j-1)(k-1)}S_k$. Par passage au détereminant, on en déduit que :

$$\det(A\Omega) = \det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}S_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^n S_k\right)\det(\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

(S_k est en facteur de la colonne k) ou encore $(\det A)(\det\Omega) = \left(\prod_{k=1}^n S_k\right)(\det\Omega)$. Enfin, Ω est la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité et est donc inversible puisque celles-ci sont deux à deux distinctes. Par suite $\det\Omega\neq 0$ et après simplification on obtient

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^n S_k \text{ où } S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix} = S_1S_2S_3 = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Un calcul bien plus simple sera fourni dans la planche « Réduction ».

Correction de l'exercice 2754 ▲

(a) $d=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$d'=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n})'=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\sum_{i=1}^{n}a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(n),n}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(n),n}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\det(C_1,...,C'_i,...,C_n)\ (\text{où } C_1,...,C_n \text{ sont les colonnes de la matrice}).$$

(b) **1 ère solution.** D'après ce qui précède, la fonction d_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $n\geqslant 2$ et x réel, on a

$$d'_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}
x+1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1\\
1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & & \\
 & & \ddots & x+1 & 0 & \vdots & & & \\
\vdots & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 0 & x+1 & \ddots & & \\
 & & & & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\
1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & x+1
\end{vmatrix}\ (\text{la colonne particulière est la colonne } i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}d_{n-1}(x)(\text{en développant le } i\text{-ème déterminant par rapport à sa } i\text{-ème colonne})$$
$$=nd_{n-1}(x).$$

En résumé, $\forall n\geqslant 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x)=nd_{n-1}(x)$. D'autre part $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_1(x)=x+1$ et $\forall n\geqslant 2$, $d_n(0)=0$ (déterminant ayant deux colonnes identiques).
Montrons alors par récurrence que $\forall n\geqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x)=x^n+nx^{n-1}$.
• C'est vrai pour $n=1$.
• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $\forall n\geqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x)=x^n+nx^{n-1}$. Alors, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$d_{n+1}(x)=d_{n+1}(0)+\int_0^x d'_{n+1}(t)\,dt=(n+1)\int_0^x d_n(t\,dt)=x^{n+1}+(n+1)x^n.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \forall x\in\mathbb{R},\ d_n(x)=x^n+nx^{n-1}.}$$

2 ème solution. d_n est clairement un polynôme de degré n unitaire. Pour $n\geqslant 2$, puisque dn(0) = 0 et que $d'_n=nd_{n-1}$, 0 est racine de d_n, d'_n, ..., $d_n^{(n-2)}$ et est donc racine d'ordre $n-1$ au moins de d_n. Enfin, $d_n(-n)=0$ car la somme des colonnes du déterminant obtenu est nulle. Finalement $\forall n\geqslant 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x)=x^{n-1}(x+n)$ ce qui reste vrai pour $n=1$.
Une variante peut être obtenue avec des connaissances sur la réduction.

Correction de l'exercice 2755 ▲

On effectue sur la matrice $\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}$ les transformations : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $C_j\leftarrow C_j+iC_{n+j}$ (où $i^2=-1$) sans modifier la valeur du déterminant. On obtient $\det\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A-iB&-B\\B+iA&A\end{pmatrix}$.
Puis en effectuant les transformations : $\forall j\in[\![n+1,2n]\!]$, $L_j\leftarrow L_j-iL_{j-n}$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A-iB&-B\\B+iA&A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A-iB&-B\\0&A+iB\end{pmatrix}=\det(A+iB)\times\det(A-iB).$$

Comme les matrices A et B sont réelles, $\det(A-iB)=\overline{\det(A+iB)}$ et donc

$$\det\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}=|\det(A+iB)|^2\in\mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 2756 ▲

Si D est inversible, un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ CD-DC & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ (car } C \text{ et } D \text{ commutent)}$$

et donc, puisque

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det D \times \det D^{-1}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et que $\det\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$, on a bien $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$ (si C et D commutent).

Si D n'est pas inversible, $\det(D-xI)$ est un polynôme en x de degré n et donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Par suite, la matrice $D-xI$ est inversible sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x. D'autre part, pour toute valeur de x, les matrices C et $D-xI$ commutent et d'après ce qui précède, pour toutes valeurs de x sauf peut-être pour un nombre fini, on a

$$\text{detdet}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A(D-xI)-BC).$$

Ces deux expressions sont encore des polynômes en x qui coïncident donc en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ces deux polynômes prennent en particulier la même valeur en 0 et on a montré que

$$\text{si } C \text{ et } D \text{ commutent, } \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC).$$

Correction de l'exercice 2757 ▲

En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\det(A-xI_n) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n-x \end{vmatrix} = (-x)^n(a_n-x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k\Delta_k$$

où $\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & -x & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-x)^k 1^{n-k} = (-x)^k$ (déterminant par blocs)

Finalement,

$$\det(A-xI_n) = (-x)^n(a_n-x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k(-x)^k = (-1)^{n+1}\left(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right).$$

Correction de l'exercice 2758 ▲

(a) Sans modifier la valeur de $\det A$, on effectue les transformations :$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{2n+1-j}$. On obtient alors par linéarité du déterminant par rapport à chacune des n premières colonnes

$$\det A = (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite les transformations : $\forall i \in [\![n+1, 2n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_{2n+1-i}$ et par linéarité du déterminant par rapport aux n dernières lignes, on obtient

$$\det A = (a+b)^n (a-b)^n = (a^2-b^2)^n.$$

(b) Ce déterminant a deux colonnes égales et est donc nul.

(c) On retranche la première colonne à toutes les autres et on obtient un déterminant triangulaire : $D_n = (-1)^{n-1}$.
Pour le deuxième déterminant, on ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $n-1$ en facteur de la première colonne et on retombe sur le déterminant précédent. On obtient : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

(d) On ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $a+(n-1)b$ en facteur de la première colonne. On obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première ligne à toutes les autres et on obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.}$$

Correction de l'exercice 2762 ▲

(S_1) : solution unique si $m^2 \neq 4$, impossible sinon. (S_2) : solution unique si $m^2 \neq 1/2$, infinité sinon.

Correction de l'exercice 2763 ▲

(S_1) : $a=b$ ou $b=c$ ou $c=a$.
(S_2) : $2abc+bc+ca+ab=1$.

Correction de l'exercice 2764 ▲

(S_1) : solution unique quels que soient b_1, b_2, b_3, b_4.
(S_2) : solutions si $b_2 = b_1 + b_3$.
(S_3) : solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.
(S_4) : solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$.

Correction de l'exercice 2765 ▲

Solution unique si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$.
Si $\lambda = -4$, pas de solution si $a+b+c+d \neq 0$, infinité sinon.
Si $\lambda = 0$, pas de solution si $a \neq b$ ou $a \neq c$ ou $a \neq d$, infinité sinon.

Correction de l'exercice 2766 ▲

Pas de solution si $\lambda^2+\lambda-2 \neq 0$ ($\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$). Si $\lambda = 1$, pas de solution si $a+1 \neq 0$, infinité de solutions sinon.
Si $\lambda = -2$, solution unique.

Correction de l'exercice 2793 ▲

S_1 : si $a \neq 0$, le système est équivalent à $y = -1 - 2\cosh a\, x$ et $z = x + 2\cosh a$
si $a = 0$, il est équivalent à $x + y + z = 1$

S_2 : On peut soustraire à chaque ligne la ligne précédente, puis 2 fois la précédente, etc...On obtient ainsi un système triangulaire cramérien et après bien des calculs la solution $x_k = (-1)^{k+1}C_n^k$.
Voici une solution plus astucieuse. Soit $P(X) = x_1X + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ et T l'opérateur $Q(x) \mapsto XQ'(X)$. Le système peut s'écrire $P(1) = 1,\ (TP)(1) = 0,\ (T^2P)(1) = 0, \ldots,\ (T^{n-1}P)(1) = 0$. On en déduit que $P'(1) = P''(1) = \ldots = P^{(n-1)}(1) = 0$, donc P est de la forme $P(X) = 1 + \lambda(1-X)^n$, et $\lambda = -1$ car le terme constant de P est nul. Donc $x_k = (-1)^{k+1}C_n^k$.

Correction de l'exercice 2805 ▲

Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$; compatible ssi $m \neq 2$.

Correction de l'exercice 2806 ▲

Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$; compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.

Correction de l'exercice 2807 ▲

Système de Cramer ssi $m \neq 1, \pm 2i$; compatible ssi $m \neq 1$.

Correction de l'exercice 2808 ▲

Si $m \neq 0, -2$ alors système de Cramer ; sinon, système incompatible.

Correction de l'exercice 2809 ▲

Système de Cramer ssi a, b, c sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi $d \in \{a, b, c\}$.

Correction de l'exercice 2810 ▲

Système compatible ssi $3a + 2b + 2c + d = 0$.

Correction de l'exercice 2811 ▲

Système de Cramer.

Correction de l'exercice 2812 ▲

Système de Cramer ssi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi les seconds membres correspondants sont égaux.

Correction de l'exercice 2813 ▲

CN d'existence de solution : $p + q + r = 0$. C'est une CNS si la liste (a, b, c) comporte au plus un zéro.

Correction de l'exercice 2814 ▲

$a \neq 1, -2$ et $b \neq 0 \iff$ Cramer.
$b = 0 \quad \Rightarrow$ incompatible.
$a = 1 \quad \Rightarrow$ des solutions ssi $b = 1$.
$a = -2 \Rightarrow$ des solutions ssi $b = -2$.

Correction de l'exercice 2815 ▲

Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{x}{X+a} + \dfrac{y}{X+2a} + \dfrac{z}{X+3a}$ avec $F(1) = F(2) = F(3) = 1$ donc une solution unique si $a \neq 0$.

Correction de l'exercice 2821 ▲

$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$

Correction de l'exercice 2822 ▲

2.
$$\begin{pmatrix}3&2&6\\4&5&12\\2&2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-4&-3&12\\2&2&-7\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}x&=&2^{-2}3^{6}\\y&=&2^{-3}3^{12}\\z&=&2^{2}3^{-7}.\end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 2823 ▲

Si $\mathrm{rg}(A)=n$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=n$. Si $\mathrm{rg}(A)=n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=1$. Si $\mathrm{rg}(A)\leq n-2$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=0$.

Correction de l'exercice 2825 ▲

(a) 3.
(b) 4.
(c) 2.
(d) 3.

Correction de l'exercice 2827 ▲

$\mathrm{rg}=3$ si $\lambda\neq 2$ et $\lambda\neq -25$.
$\lambda=2\quad\Rightarrow\mathrm{rg}=2: 11L_1=5L_2+9L_3$.
$\lambda=-25\Rightarrow\mathrm{rg}=2: L_1+2L_2+9L_3=0$.

Correction de l'exercice 2828 ▲

$\mathrm{rg}=3$ si $a\neq\frac{1}{3}$ ou $b\neq -3$, $\mathrm{rg}=2$ sinon.

Correction de l'exercice 2829 ▲

$\mathrm{rg}ABC\leq 2\Rightarrow x=13$. $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&13&1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2830 ▲

Les colonnes de A engendrent les $n-p$ derniers vecteurs de la base canonique.

Correction de l'exercice 2831 ▲

Échange des lignes i et j.

Correction de l'exercice 2834 ▲

$$A=\begin{pmatrix}1&x_1\\\vdots&\vdots\\1&x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1&\dots&y_n\\1&\dots&1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathrm{rg}(A)=\begin{cases}2&\text{si }(x_i)\text{ et }(y_j)\text{ ne sont pas constantes}\\1&\text{ou 0 sinon.}\end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2\\\vdots&\vdots&\vdots\\1&x_n&x_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^2&\dots&y_n^2\\2y_1&\dots&2y_n\\1&\dots&1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathrm{rg}(B)=\begin{cases}3&\text{si Card}\,(x_i)\geq 3\text{ et Card}\,(y_j)\geq 3\\2&\text{si }\min\bigl(\text{Card}\,(x_i),\text{Card}\,(y_j)\bigr)=2\\1&\text{ou 0 sinon.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 2836 ▲

4. $A=\begin{pmatrix}1&i\\i&-1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2838 ▲

$$M = \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ \vdots \\ e^{ni\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \dots & e^{(n-1)i\theta} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \mathrm{rg}M \leq 2.$$

Le premier mineur 2×2 vaut $-\sin^2\theta \Rightarrow \mathrm{rg}M = 2$ si $\theta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\pi)$. Sinon, $\mathrm{rg}M = 1$.

Correction de l'exercice 2840 ▲

E est un sev et un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il est isomorphe à $\mathscr{L}(H,\mathbb{R}^n)$ où H est un supplémentaire de $\mathrm{Im}A$ dans $\mathbb{R}^n$. $\dim E = n(n-\mathrm{rg}(A))$.

Correction de l'exercice 2843 ▲

2 ou 0.

Correction de l'exercice 2847 ▲

(a)

(b) B admet r lignes indépendantes d'indices $i_1,\dots,i_r$ et C admet r colonnes indépendantes d'indices $j_1,\dots,j_r$. Soient B' et C' les sous matrices carrées associées dans B et C. Alors la sous-matrice de A d'indices $i_1,\dots,i_r$ pour les lignes et $j_1,\dots,j_r$ pour les colonnes est $B'C'$, de rang r. Donc $\mathrm{rg}(A)\geq r$ et l'inégalité inverse est bien connue.

(c) Soient $i_1,\dots,i_r$ r indices tels que les lignes associées dans A sont linéairement indépendantes, et $B\in\mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la sous-matrice correpondante. Par construction, $\mathrm{rg}(B)=r$. Chaque ligne de A étant combinaison linéaire des lignes de B, il existe $C\in\mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que $A=BC$. Et on a $r=\mathrm{nb.lignes}(C)\geq\mathrm{rg}(C)\geq\mathrm{rg}(A)=r$.

(d)

(e) Comprendre dans cette question que B,C ne sont pas forcément les matrices construites en **2**. Notons $\mathrm{vect}(X)$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice X. De $A=BC={}^tC^tB$ on tire $\mathrm{vect}(A)\subset\mathrm{vect}(B)$ et $\mathrm{vect}(A)\subset\mathrm{vect}({}^tC)$, et tous ces espaces sont de dimension r, donc ils sont égaux. On en déduit qu'il existe une matrice $P\in GL_r(\mathbb{R})$ telle que $B={}^tCP$ d'où $CB=C^tCP$. $\mathrm{rg}(C^tC)=\mathrm{rg}(C)=r$ et P est inversible donc $\mathrm{rg}(CB)=r$.

Correction de l'exercice 2849 ▲

$\Delta=\det M=\mathrm{Van}(1,2,...,n)\neq 0$ et le système est de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors pour $k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$ où

$$\Delta_k=\mathrm{Van}(1,...,k-1,0,k+1,...,n)=(-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la k-ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\begin{aligned}\Delta_k&=(-1)^{k+1}1\times 2\ldots\times(k-1)\times(k+1)\times\ldots\times n\times\mathrm{Van}(1,2,...,k-1,k+1,...,n)\\&=(-1)^{k+1}\frac{n!}{k}\frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)}{(k-(k-1))...(k-1)((k+1)-k)....(n-k)}=(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\Delta,\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=(-1)^{k+1}C_n^k.}$$

Correction de l'exercice 2850 ▲

m est un paramètre réel

(a) $\det S=2(m(m-5)-6)+(3(m-5)-3)+7(6-m)=2m^2-14m+12=2(m-1)(m-6)$. Le système est de CRAMER si et seulement si $m\in\{1,6\}$. Si $m\notin\{1,6\}$, les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$
$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$
$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & m7 \end{vmatrix} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \in \{1,6\}$, $\det S = 0$. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \frac{14-(2m+3)y}{5} \end{array}\right.$.
La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent automatiquement pour $m \in \{1,6\}$ et donc pas la peine de les calculer).

$$7x+2y+(m-5)z = 7 \Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5} + 3y + (m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21+14(m-5)-35 = 0$$
$$\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{3}{5}, y, -\frac{y}{5}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\det S = 2(-8m-4+2)-(4m+1)+5(2m+2m+1) = 0$. Le système n'est jamais de CRAMER. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{array}\right.$.
La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$5x-y+4z = 3m-2 \Leftrightarrow 5\frac{6m-4-(4m+1)y}{3} - y + 4\frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m-2$$
$$\Leftrightarrow 5(6m-4)+4(-3m+8)-3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Si $m \neq -2$, le système n'a pas de solution. Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{-16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2+2m = -2m(m-1)$. Le système est de CRAMER en x, y et z si et seulement si $m \in \{0,1\}$.
Si $m \notin \{0,1\}$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t+1$$
$$y = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m)+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t+1$$
$$z = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t+1.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(-t+1, \frac{m+1}{m-1}t+1, -\frac{m+1}{m-1}t+1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = 0$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t = 3 \\ x+z = 2 \\ y+t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2-x \\ t = -1-y \end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(x,y,2-x,1-y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Si $m = 1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t = 3 \\ x+y+z-t = 3 \\ x-y-z-t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ x+y+z = 3 \\ x-y-z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 1 \\ z = 2-y \end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble de solutions est $\{(1,y,2-y,0),\ z \in \mathbb{R}\}$.

(d)

$$\det(S)=\begin{vmatrix}1&2&3&m\\2&1&m&3\\3&m&1&2\\m&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+6&2&3&m\\m+6&1&m&3\\m+6&m&1&2\\m+6&3&2&1\end{vmatrix}=(m+6)\begin{vmatrix}1&2&3&m\\1&1&m&3\\1&m&1&2\\1&3&2&1\end{vmatrix}$$

$$=(m+6)\begin{vmatrix}1&2&3&m\\0&-1&m-3&3-m\\0&m-2&-2&2-m\\0&1&-1&1-m\end{vmatrix}=(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&3-m\\m-2&-2&2-m\\1&-1&1-m\end{vmatrix}$$

$$=(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&0\\m-2&-2&-m\\1&-1&-m\end{vmatrix}=-m(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&0\\m-2&-2&1\\1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=-m(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&0\\m-3&-1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=-m(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3\\m-3&-1\end{vmatrix}=m(m-2)(m-4)(m+6).$$

Le système est de CRAMER si et seulement si $m\notin\{0,2,4,-6\}$. Dans ce cas :

$$m(m-2)(m-4)(m+6)x=\begin{vmatrix}m-1&2&3&m\\1&1&m&3\\0&m&1&2\\0&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2-(m-1)&3-m(m-1)&m-3(m-1)\\1&1&m&3\\0&m&1&2\\0&3&2&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}3-m&-m^2+m+3&-2m+3\\m&1&2\\3&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5m-6&-m^2+5m-3&-2m+3\\m-6&-3&2\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-[-3(5m-6)-(m-6)(-m^2+5m-3)]$$

$$=-m^3+11m^2-18m=-m(m-2)(m-9).$$

et $x=-\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)y=\begin{vmatrix}1&m-1&3&m\\2&1&m&3\\3&0&1&2\\m&0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2m+3&0&-m^2+m+3&-2m+3\\2&1&m&3\\3&0&1&2\\m&0&2&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-2m+3&-m^2+m+3&-2m+3\\3&1&2\\m&2&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3m^2-5m-6&-m^2+m+3&2m^2-4m-3\\0&1&0\\m-6&2&-3\end{vmatrix}$$

$$=-3(3m^2-5m-6)-(m-6)(2m^2-4m-3)$$

$$=-2m^3+7m^2-6m=-m(2m-3)(m-2)$$

et $y=-\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)z=\begin{vmatrix}1&2&m-1&m\\2&1&1&3\\3&m&0&2\\m&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2m+3&-m+3&0&-2m+3\\2&1&1&3\\3&m&0&2\\m&3&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-2m+3&-m+3&-2m+3\\3&m&2\\m&3&1\end{vmatrix}$$

$$=-(-2m+3)(m-6)+3(5m-6)-m(2m^2-5m+6)=-2m^3+7m^2-6m$$

$$=-m(2m-3)(m-2),$$

et $z=-\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3)$$
$$= m^4 - m^3 - 17m^2 + 30m = m(m-2)(m^2+m-15)$$

et $t = \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}$.
Si $m = 0$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+2y+3z = -1 \\ 2x+y+3t = 1 \\ 3x+z+2t = 0 \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t = \ (E_1+E_2) \\ 2x+y+3t = 1 \\ x+y+z+t = 0 (E_3+E_4) \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x-y-z \\ -x-2y-3z = 1 \\ -x+2y+z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x-2y \\ -x-2y-3(x-2y) = 1 \\ t = -x-y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+\frac{1}{4}\ z = -x-\frac{1}{2} \\ t = -x+\frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où l'ensemble de solutions : $\{(x, x+\frac{1}{4}, -x-\frac{1}{4}; -x+\frac{1}{2}),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = 2$, on obtient pour ensemble de solutions : $\{(x, -x-\frac{5}{8}, x+\frac{1}{2}; -x-\frac{1}{8}),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = 4$ ou $m = -6$, on voit en résolvant que le système est incompatible.

(e) $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m(2m) + (-m+1) + (m+1) = 2(m^2+1) \neq 0$ (m désignant un paramètre réel).

Le système formé des équations 1, 2 et 4 est donc de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{2m^2-m-1}{m^2+1},\ y = 3-m \text{ et } z = \frac{3m-1}{m^2+1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$-m\frac{2m^2-m-1}{m^2+1} + 3 - m + m\frac{3m-1}{m^2+1} = -m$$
$$\Leftrightarrow -m(2m^2-m-1) + (3-m)(m^2+1) + m(3m-1) = -m(m^2+1)$$
$$\Leftrightarrow -2m^3 + 7m^2 + 3 = 0$$

Le système est compatible si et seulement si m est l'une des trois racines de l'équation $-2X^3+7X^2+3 = 0$.

(f) $\det S = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{Van}(a,b,c)}{abc}$.

Si a, b et c sont deux à deux distincts, le système est de CRAMER. On obtient :

$$x = \frac{abc}{mbc}\frac{\mathrm{Van}(m,b,c)}{\mathrm{Van}(a,b,c)} = \frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

puis, par symétrie des rôles, $y = \frac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$ et $z = \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$.
Si $a = b \neq c$ (ou $a = c \neq b$ ou $b = c \neq a$), le système s'écrit :

$$\begin{cases} x+y = 1-z \\ ax+ay+cz = m \\ \frac{1}{a}x+\frac{1}{a}y+\frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1-z \\ a(1-z)+cz = m \\ \frac{1}{a}(1-z)+\frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1-z \\ z = \frac{m-a}{c-a} \\ (\frac{1}{c}-\frac{1}{a})\frac{m-a}{c-a} = \frac{1}{m}-\frac{1}{a} \end{cases}.$$

Le système est compatible si et seulement si $(m-a)(m-c) = 0$ ou encore ($m = a$ ou $m = c$). Dans ce cas, l'ensemble des solutions est : $\{(x, \frac{m-c}{a-c} - x; \frac{m-a}{c-a}),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Si $a = b = c$, le système s'écrit : $x+y+z = 1 = \frac{m}{a} = \frac{a}{m}$. Le système est compatible si et seulement si $m = a = b = c$ et dans ce cas l'ensemble des solutions est : $\{(x, y, 1-x-y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(g)

$$\det S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-(b+c)^2 & (a+c)^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-(a+c)^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ 0 & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2(b-c) & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix}$$
$$= 2(a+b+c)^2(c^2(-c(b-a-c)+(b-c)(a+c-b))+(a+b-c)(bc(a+c-b)+b^2c))$$
$$= 2(a+b+c)^2(c^2b(a-b+c)+(a+b-c)bc(a+c))$$
$$= 2bc(a+b+c)^2(a^2+ab+ac) = 2abc(a+b+c)^3.$$

Si $abc(a+b+c)\neq 0$, le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\ y = \frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)} \text{ et } z = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si $a=0$ (ou $b=0$ ou $c=0$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ c^2(y+z)=1 \\ b^2(y+z)=1 \end{array}\right. .$$

Donc,
Si (($a=0$ et $b^2\neq c^2$) ou ($b=0$ et $a^2\neq c^2$) ou ($c=0$ et $a^2\neq b^2$)), le système n'a pas de solution.
Si $a=0$ et $b=c\neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(0,y,-\frac{y}{b^2}),\ y\in\mathbb{R}\}$ (résultats analogues pour les cas ($b=0$ et $a=c\neq 0$) et ($c=0$ et $a=b\neq 0$)).
Si $a=b=c=0$, il n'y a pas de solution.
Si $a=0$ et $c=-b\neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(x,y-\frac{y}{b^2}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ (résultats analogues pour ($b=0$ et $c=-a\neq 0$) et ($c=0$ et $b=-a\neq 0$).
Si $abc\neq 0$ et $a+b+c=0$, le système équivaut à l'équation $a^2x+b^2y+c^2z=1$. L'ensemble des solutions est $\{(x,y,\frac{1-a^2x-b^2y}{c^2}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

(h)

$$\det S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c)((a-b)(a-c)+(b-c)^2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$= (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$$

Si $\det S\neq 0$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x\det S = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & a & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = p(a^2-bc)+q(c^2-ab)+r(b^2-ac).$$

Je n'ai pas envie de finir.

(i) Soit $P=X^3-X-1$. P et $P'=3X^2-1$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ car $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas racines de P et donc les racines de P sont simples ou encore, a, b et c sont deux à deux distincts.
Ainsi, $\det S = \mathrm{Van}(a,b,c)\neq 0$ et le système est de CRAMER.

$$(b-a)(c-a)(c-b)x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 3 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -2(c^2-b^2)+3(c-b) = (c-b)(3-2(b+c)) = (c-b)(3+2a),$$

(car $a+b+c=0$) et $x=\frac{3+2a}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & c \\ a^2 & 3 & c^2 \end{vmatrix} = 2(c^2-a^2)-3(c-a) = (c-a)(2(a+c)-3) = -(c-a)(3+2b),$$

et $y=-\frac{3+2b}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \\ a^2 & b^2 & 3 \end{vmatrix} = -2(b^2-a^2)+3(b-a) = (b-a)(3+2c),$$

et $z=\frac{3+2c}{(c-a)(c-b)}$ (difficile d'aller plus loin).

Correction de l'exercice 2851 ▲

Soit D_n le déterminant du système pour $n \geq 3$.
En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 5,\ D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de $D_3 = D_4 = -1$:

$$\forall k \geq 1,\ D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ et } D_{3k+2} = 0.$$

Pour n élément de $3\mathbb{N}^* \cup (1 + 3\mathbb{N}^*)$, le système est de CRAMER et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.
Pour $n = 3k+2$, puisque $D_n = 0$ mais que le mineur de format $n-1$ constitué des $n-1$ premières lignes et colonnes est D_{n-1} et est donc non nul, le système est homogène de rang $n-1$ et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. On trouve aisément $\mathscr{S} = \{\lambda(1,-1,0,1,-1,0...,1,-1),\ ;\lambda \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 2852 ▲

Soit $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $F = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X+b_k}$.
La fraction rationnelle F s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ où } Q = \prod_{k=1}^{n}(X+b_k) \text{ et } P \text{est un polynôme de degré infèrieur ou égal à } n-1.$$

Maintenant,

$$(x_1,...,x_n) \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ (Q-P)(a_k) = 0.$$

Par suite, puisque les a_k sont deux à deux distincts, $Q-P$ est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$. Mais, Q est unitaire de degré n et P est de degré infèrieur ou égal à $n-1$, et donc $Q-P$ est unitaire de degré n ce qui montre que $Q-P = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$ ou encore que

$$P = \prod_{k=1}^{n}(X+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(X-a_k).$$

Réciproquement, si $F = \frac{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$, alors $\forall k \in \{1,...,n\},\ F(a_k) = 1$.
En résumé,

$$\begin{aligned}
(x_1,...,x_n) \text{ solution de } (S) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X+b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ x_i = \lim_{x \to -b_i}(x+b_i)\frac{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ x_i = \frac{\prod_{k=1}^{n}(b_i+a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(b_k-b_i)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2853 ▲

Le déterminant du système est $\Delta = \mathrm{Van}(1,\dots,n) \neq 0$. Le système proposé est donc un système de CRAMER.
Les formules de CRAMER donnent : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ où

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & j-1 & 0 & j+1 & & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & (j-1)^{n-1} & 0 & (j+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & (j-1)^{n-1} & (j+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \text{(en développant suivant la } j\text{-ème colonne)}$$

$$= (-1)^{j+1} 1 \dots (j-1)(j+1) \dots n \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & j-1 & j+1 & & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & (j-1)^{n-2} & (j+1)^{n-2} & \dots & n^{n-2} \end{vmatrix} \text{(par } n-\text{linéarité)}$$

$$= (-1)^{j+1} \frac{n!}{j} \mathrm{Van}(1, \dots, (j-1), (j+1), \dots, n) = (-1)^{j+1} \frac{n!}{j} \frac{\mathrm{Van}(1, \dots, n)}{(j-1) \dots (j-(j-1))((j+1)-j) \dots (n-j)}$$

$$= (-1)^{j+1} \frac{n!}{j!(n-j)!} \mathrm{Van}(1, \dots, n) = (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \mathrm{Van}(1, \dots, n).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = (-1)^{j+1} \binom{n}{j}.}$$

Correction de l'exercice 2854 ▲

(a) Dans le cas $n = 2$, $n = 4$ les matrice suivantes conviennent :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J' = \begin{pmatrix} J & (0) \\ (0) & J \end{pmatrix}.$$

(b) Supposons qu'un tel morphisme existe. Soit J sa matrice pour une base fixée. Alors $J^2 = -I_n$ où I_n est la matrice identité de taille n. En termes de déterminant nous avons : $\det(J^2) = \det I_n$, ce qui s'écrit $(\det J)^2 = (-1)^n$. Donc n est pair car $(\det J)^2$ est positif.

Correction de l'exercice 2856 ▲

$27a^4 = 256b^3$.

Correction de l'exercice 2860 ▲

---

ctrex : $A = \mathbb{Z}$, $P(0) = 0$ et $P(2) = 1$.

Correction de l'exercice 2861 ▲

On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on considère $J = (\delta_{i,i+1 \bmod p})$. On a $J^p = I$ et $A = a_0 J^0 + \dots a_{p-1} J^{p-1}$ donc $A^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p) I$ (car on est en caractéristique p).

On en déduit $\det(A) = \det(A)^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p)^p = a_0 + \dots + a_{p-1}$.

Autre méthode en restant dans $\mathbb{Z}$: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{p,\sigma(p)} = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \cdots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$. Notons $x(\sigma) = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \cdots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$ et c le cycle $(1, 2, \dots, p)$. Alors $x(\sigma) = x(c^{-k} \circ \sigma \circ c^k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le nombre de permutations distinctes que l'on obtient à σ fixé en faisant varier k est égal à 1 si σ et c commutent, et à p sinon, d'après la relation : Card (orbite) $\times$ Card (stabilisateur) $=$ Card $(<c>) = p$. De plus, c et σ commutent si et seulement si $\sigma \in <c>$ (facile), d'où $\det(A) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon(c^k) a_k^p \equiv a_0 + \cdots + a_{p-1} \bmod p$.

Correction de l'exercice 2862 ▲

$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma \neq \sigma^{-1}$. Alors les termes associés à σ et σ^{-1} sont égaux car M est symétrique, donc la somme de ces deux termes est paire. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma = \sigma^{-1}$. Alors comme n est impair, il existe $i \in [[1,n]]$ tel que $\sigma(i) = i$ donc le terme associé à σ est pair.

Correction de l'exercice 2864 ▲

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n-1\},\ z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ et } z_n + z_1 = 2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1^{n-1} + (-1)^{n+1}.1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$
$$= 1 + (-1)^{n+1}.$$

Si n est impair, $\det S = 2 \neq 0$ et le système admet une et une seule solution.
On obtient $z_2 = 2a_1 - z_1$, $z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1$,..., $z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \ldots + 2a_2 - 2a_1 + z_1$ et enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \ldots + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

et donc $z_1 = a_1 - a_2 + \ldots - a_{n-1} + a_n$ puis $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} - a_n$ puis $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 \ldots + a_n$ ... puis $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.
Si n est pair, $\det S = 0$ mais le mineur formé des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang $n-1$, les $n-1$ premières équations et $n-1$ dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.
On résout les $n-1$ premières équations constituant un sytème de CRAMER en z_2,...,z_n. On obtient

$$z_2 = 2a_1 - z1,\ z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \ldots,\ z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \ldots - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \ldots - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 \ldots = a_2 + a_4 + \ldots$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points $(A_1, A_3, \ldots)$ et $(A_2, A_4, \ldots)$ ont même isobarycentre.
En résumé, si n est pair et si les systèmes de points $(A_1, A_3, \ldots)$ et $(A_2, A_4, \ldots)$ n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.
Si n est pair et si les systèmes de points $(A_1, A_3, \ldots)$ et $(A_2, A_4, \ldots)$ ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions : M_1 est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points A_1, A_2 ...

Correction de l'exercice 2869 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det A = 0$, mais $\det B = a^2$ est non nul si $a \neq 0$.

Correction de l'exercice 2878 ▲

(a)

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2880 ▲

3. On complète par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ base $= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Correction de l'exercice 2881 ▲

Développer le produit.
Un seul coeff. non nul par ligne et colonne, ou une ligne nulle.

Correction de l'exercice 2882 ▲

(a)

(b) Si $d_{ab} \neq 0$, prendre

$$\begin{cases} \vec{c} &= -\frac{d_{bc}}{d_{ab}}\vec{a} + \frac{d_{ac}}{d_{ab}}\vec{b} \\ \vec{d} &= \frac{d_{db}}{d_{ab}}\vec{a} + \frac{d_{ad}}{d_{ab}}\vec{b}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2883 ▲

Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base, décomposer $\vec{d}$. Si $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, on obtient $\vec{0} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 2886 ▲

2. (b) $(I + E_{ij})^k = I + kE_{ij}$. Calculer le pgcd d'une ligne par opérations élémentaires à l'aide de Bézout. Ce pgcd vaut 1 sinon $M \notin SL_n(\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 2887 ▲

$(\det A)^n$.

Correction de l'exercice 2888 ▲

En remplaçant les colonnes C_1,..., C_n par respectivement $C_1 + iC_{n+1}$,..., $C_n + iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes L_{n+1},..., L_{2n} de la nouvelle matrice par respectivement $L_{n+1} - iL_1$,..., $L_{2n} - iL_n$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 2889 ▲

On suppose $n \geq 2$. La matrice nulle est solution du problème. Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(A + B) = \det A + \det B$. En particulier, $2\det A = \det(2A) = 2^n \det A$ et donc $\det A = 0$ car $n \geq 2$. Ainsi, $A \notin GL_n(\mathbb{C})$. Si $A \neq 0$, il existe une certaine colonne C_j qui n'est pas nulle. Puisque la colonne $-Cj$ n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre $(-C_j)$ en une base $(C'_1, \ldots, -C_j, \ldots, C'_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice B dont les colonnes sont justement C_1',...,$-C_j$,...,C'_n est alors inversible de sorte que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Mais, $A + B$ a une colonne nulle et donc $\det(A + B) = 0 \neq \det A + \det B$. Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème .

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ (\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(A + M) = \det(A) + \det(M)) \Leftrightarrow A = 0.}$$

Correction de l'exercice 2890 ▲

$(1) \Rightarrow (2)$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que : $(\forall (a_1, \ldots, a_n) \in E^n / (\det(f_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n} = 0) \Rightarrow ((f_1, \ldots, f_n)$ liée).
Pour $n = 1$,

$$(\forall a_1 \in E / \det(f_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq 1} = 0) \Rightarrow (\forall a_1 / f_1(a_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

Soit $n \geq 2$. Supposons que $(\forall(a_1,...,a_{n-1}) \in E^{n-1} / \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n-1} = 0) \Rightarrow (f_1,...,f_{n-1})$ liée.
Soient f_1,..., f_n n fonctions telles que $\forall(a_1,...,a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n} = 0$.
Si $(f_1,...,f_{n-1})$ est liée alors $(f_1,...,f_n)$ est liée en tant que sur famille d'une famille liée. Si $(f_1,...,f_{n-1})$ est libre, par hypothèse de récurrence, il existe a_1,...,a_{n-1} $n-1$ éléments de E tels que $\det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n-1} \neq 0$. Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E,\ \det(f_i(a_1),...,f_i(a_{n-1}),f_i(x))_{1\leq i\leq n} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$ où les λ_i sont indépendants de x ou encore une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_n = \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n-1} \neq 0$ ce qui montre encore que $(f_1,...,f_n)$ est liée.
$(2) \Rightarrow (1)$. On suppose que $\exists(a_1,...,a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n} \neq 0)$. Montrons que $(f_1,...,f_n)$ est libre.
Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. En particulier : $\forall j \in \{1,...,n\}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) = 0$. Les n égalités précédentes fournissent un système d'équations linéaires en les λ_i à n inconnues, n équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution $(\lambda_1,...,\lambda_n) = (0,...,0)$. On a montré que $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Correction de l'exercice 2891 ▲

Soit A_n la matrice de l'énoncé.
En développant $\det A_n$ suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format $n-1$ obtenu suivant sa première ligne, on obtient $\det A_n = -\det A_{n-2}$ pour $n \geq 3$.
Par suite, pour $p \geq 1$, $\det A_{2p} = (-1)^{p-1}\det A_2 = (-1)^p \neq 0$ et pour $p \geq 1$, A_{2p} est inversible.
On a aussi, pour $p \geq 1$, $\det A_{2p+1} = (-1)^{p-1}\det A_3 = 0$ et, pour $p \geq 1$, A_{2p+1} n'est pas inversible. Finalement, A_n est inversible si et seulement si n est pair.
Dorénavant, on pose $n = 2p$ ($p \geq 1$).
Pour $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = y_1 \\ \forall i \in \{2,...,2p-1\},\ x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{array}\right. .$$

Ce système se résoud en $x_2 = y_1$ puis, par récurrence, pour $k \leq p$, $x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + ... + (-1)^{k-1}y_1$ et aussi $x_{2p-1} = y_{2p}$, puis, par récurrence, pour $k \leq p$, $x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + ... + (-1)^{p-k}y_{2p}$. D'où l'inverse de A quand $n = 8$ par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2892 ▲

On a toujours $A^t(\text{com}A) = (\det A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A$ n'est pas nul, on en déduit $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
• Si $\det A$ est nul, on a $A^t(\text{com}A) = 0$ et donc ${}^t\text{com}A$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\text{com}A$ et donc $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_(\mathbb{R}),\ \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

Correction de l'exercice 2893 ▲

• Si A est de rang n, c'est-à-dire inversible, l'égalité $(\text{com}A) \times \frac{1}{\det A}{}^tA = I_n$ montre que $\text{com}A$ est inversible et donc de rang n.
Dans ce qui suit, le lien entre le rang d'une matrice et la nullité des différents mineurs est hors programme. On suppose maintenant $\text{rg}(A) \leqslant n-1$.

• Si rg$A \leqslant n-2$. Montrons que tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls.
Soient $j_1, \dots, j_{n-1}$, $n-1$ numéros de colonnes deux à deux distincts puis $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_{j_1}, \dots, C_{j_{n-1}}$. Puisque A est de rang au plus $n-2$, la famille des colonnes de A' est liée et donc A' est de rang au plus $n-2$. Il en est de même de la matrice ${}^tA' \in \setminus -\infty, \setminus(\mathbb{K})$ et donc toute matrice A'' obtenue en supprimant l'une des colonnes de A' est carrée, de format $n-1$, non inversible. Son déterminant est donc nul.
Ainsi, tout déterminant obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $\det(A)$ est nul ou encore tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls. Finalement, si rg$A \leqslant n-2$, com$A = 0$.
• Il reste à étudier le cas où rg$A = n-1$ et donc dim$KerA = 1$.
L'égalité det$A = 0$ impose $A^t(\text{com}A) = 0$. Mais alors $\text{Im}({}^t(\text{com}A)) \subset \text{Ker}A$ et en particulier $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}({}^t(\text{com}A)) \leqslant \dim(\text{Ker}A) = 1$. Ainsi, si $\text{rg}(A) = n-1$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0,1\}$.
Montrons que l'un au moins des mineurs de format $n-1$ extraits de A est non nul ce qui montrera que $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.
Puisque rg$A = n-1$, il existe $n-1$ colonnes $C_{j_1}, \dots, C_{j_{n-1}}$ de A constituant une famille libre. La matrice $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ constituée par ces colonnes est de rang $n-1$. Il en est de même de sa transposée. Mais alors, il existe $n-1$ colonnes de ${}^tA'$ linéairement indépendantes. La matrice A'' constituée de ces $n-1$ colonnes est carrée de format $n-1$ et de rang $n-1$. A'' est donc inversible et il en est de même de ${}^tA''$. Le déterminant de ${}^tA''$ est un mineur de format $n-1$ extrait de A et non nul.
En résumé,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}(\text{com}A) = \begin{cases} n \text{ si } \text{rg}(A) = n \\ 1 \text{ si } \text{rg}(A) = n-1 \\ 0 \text{ si } \text{rg}(A) \leqslant n-2 \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 2894 ▲

Si rg$M \leqslant n-1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $M^tM = M^t(\text{com}M) = (\det M)I_n = 0$ et donc $M = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} M^tM = 0 &\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|{}^tMX\right\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tMX = 0 \Rightarrow {}^tM = 0 \Rightarrow M = 0. \end{aligned}$$

En résumé, si M est solution, $M = 0$ ou M est inversible.
Dans le deuxième cas, d'après l'exercice 2892, on doit avoir $\det M = (\det M)^{n-1}$ et donc, puisque $\det M \neq 0$, $\det M \in \{-1,1\}$ (et même $\det M = 1$ si n est impair) car $\det M$ est réel.
• Si $\det M = -1$, on doit avoir $M^tM = -I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice M^tM vaut $m_{1,1}^2 + \dots + m_{1,n}^2 \neq -1$.
• Il reste le cas où $\det M = 1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $M^tM = I_n$ c'est-à-dire M est orthogonale positive.
Réciproquement, si M est orthogonale positive, ${}^tM = M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t(\text{com}M) = {}^t\text{com}M$ et donc $M = \text{com}M$.
Finalement ,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

Correction de l'exercice 2895 ▲

$A = 0$ convient.
Réciproquement, on a tout d'abord $\det(A+A) = \det A + \det A$ ou encore $(2^n - 2)\det A = 0$ et, puique $n \geqslant 2$, $\det A = 0$. Donc,

$$A \notin GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } A \text{ vérifie} : \forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = \det M.$$

Supposons $A \neq 0$. Il existe donc une colonne $C_j \neq 0$.
La colonne $-C_j$ n'est pas nulle et d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une matrice M inversible dont la j-ème colonne est $-C_j$. Puisque M est inversible, $\det M \neq 0$ et puisque la j-ème colonne de la matrice $A+M$ est nulle, $\det(A+M) = 0$. Pour cette matrice M, on a $\det(A+M) \neq \det A + \det M$ et A n'est pas solution du problème.
Finalement

$$\boxed{(\forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = \det A + \det M)/lraA = 0.}$$

Correction de l'exercice 2910 ▲

(a) Soit $(v,w) \in \text{Com}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $u(\lambda v + \mu w) = \lambda uv + \mu uw = \lambda vu + \mu wu = (\lambda v + \mu w)u$. Donc Com est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,E)$.

(b) Soit $x \in E_\lambda$. $u(v(x)) = uv(x) = vu(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda$.

(c) Chaque valeur propre est de multiplicité 1 donc chaque espace propre est de dimension 1. Ainsi, si $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$, $E_\lambda = \mathbb{R}x$. Comme $v(x) \in E_\lambda$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, v(x) = \alpha x$. Donc x est un vecteur propre de v.

(d) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u. C'est aussi une base de vecteurs propres pour tout élément de Com. Tout élément de Com est donc représenté par une matrice diagonale dans $(e_1, \dots, e_n)$. Réciproquement, tout endomorphisme représenté dans cette base par une matrice diagonale commute avec u. Donc

$$\mathrm{Com} = \{v \in \mathscr{L}(E,E), \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, M_{v/(e_1,\dots,e_n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\}$$

On en déduit que Com est de dimension n.

(e) $uu^i = u(u\cdots u) = (u\cdots u)u = u^i u$. Donc $\forall i \in \{0,\dots,n-1\}, u^i \in \mathrm{Com}$. Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$.

(f) Soit $x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\}$. $u^i(x) = \lambda_k^i x$. Donc $(\sum \alpha_i u^i)x = \sum \alpha_i u^i(x) = (\sum \alpha_i \lambda_k^i)x = 0$. Donc $\forall k \in \{1,\dots,n\}, \sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$.

(g) Le déterminent du système $(*)$ est non nul. Il s'agit donc d'un système de Cramer : il n'a qu'une solution, $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. La famille $(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1})$ est donc libre.

(h) On a $\dim \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}) = n = \dim \mathrm{Com}$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$ donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}) = \mathrm{Com}$

Correction de l'exercice 2919 ▲

On a une suite récurrente à trois termes reliant les composantes v_i du vecteur propre. On calcule le terme général de la suite en résolvant le polynôme caractéristique. Les deux constantes sont identifiées en écrivant que $v_0 = v_{n+1} = 0$. On trouve $n+1$ valeurs propres distinctes :

$$\lambda_k = b + 2c\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2} cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots n$$

avec le vecteur propre v^k associé, de composantes

$$v_j^k = \left(\frac{a}{c}\right)^{j/2} sin\left(\frac{2kj\pi}{n+1}\right) \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots n$$

Correction de l'exercice 2920 ▲

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

(a) *Démontrons que* $\lambda \neq 0$.
Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.

(b) *Démontrons que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .*
Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$. Ce qui prouve que $\vec{x}$ est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Correction de l'exercice 2921 ▲

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{mathrmId}_E$.

(a) *Démontrons que les seules valeurs propres possibles de f sont* 1 *et* -1.
Si λ est une valeur propre de f, il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. On a donc

$$f^2(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$

Mais, $f^2 = \mathrm{mathrmId}_E$ donc si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a

$$\vec{x} = f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x},$$

d'où $\lambda^2 = 1$, c'est-à-dire (dans $\mathbb{R}$ ou (x^2+1)), $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. ce qui prouve que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.

(b) *Vérifions que pour tout $\vec{x} \in E$, on a*

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \;\text{ et }\; f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

Soit $\vec{x} \in E$, on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

et
$$f(\vec{x}+f(\vec{x})) = f(\vec{x})+f^2(\vec{x}) = f(\vec{x})+\vec{x}$$
Nous allons en déduire que f admet toujours une valeur propre.
Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de f, alors, $\vec{x} = f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Or, pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x}+f(\vec{x})) = f(\vec{x})+\vec{x}$, donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x})+\vec{x} = \vec{0}$, c'est-à-dire, $f(\vec{x}) = -\vec{x}$. Ce qui prouve que -1 est valeur propre de f. On a même dans ce cas $f = -\text{mathrmId}_{\text{E}}$.
Si -1 n'est pas valeur propre de f, on montre par un raisonnement analogue que pour tout $\vec{x} \in E$ on a $f(\vec{x})-\vec{x} = \vec{0}$. Ce qui prouve que 1 est valeur propre de f, et dans ce cas $f = \text{mathrmId}_{\text{E}}$.

(c) *Démontrons que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.*
Supposons maintenant que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Ce sont alors les seules et on a, pour tout $\vec{x} \in E$,
$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x}+f(\vec{x}))+\frac{1}{2}(\vec{x}-f(\vec{x}))$$
Et, quelque soit $\vec{x} \in E$, $f(\vec{x}-f(\vec{x})) = -(\vec{x}-f(\vec{x}))$ et $f(\vec{x}+f(\vec{x})) = (\vec{x}+f(\vec{x}))$, c'est-à-dire $\vec{x}+f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et $\vec{x}-f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1. Par ailleurs on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (on peut le vérifier également puisque leur intersection est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{x} = -\vec{x}$, donc réduite au vecteur nul). par conséquent E est bien somme directe des sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et -1.

(d) *Traduisons géométriquement le cas $n = 2$.*
Rappelons que si il n'y a qu'une valeur propre, f est l'identité ou son opposée. Dans le cas où 1 et -1 sont valeur propres, leurs sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit u un vecteur propre tel que $f(u) = u$ et v un vecteur propre tel que $f(v) = -v$, alors si $w = au+bv$, $f(w) = au-bv$.

Correction de l'exercice 2922 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou (x^2+1)), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

(a) Montrons que u n'est pas inversible.
On a : $0 = \det u^n = (\det u)^n$, d'où $\det u = 0$, ce qui prouve que u n'est pas inversible.

(b) Déterminons les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
Soit λ une valeur propre de u, il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Or, $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$. Mais, $u^n(x) = 0$ et $x \neq 0$, d'où $\lambda^n = 0$ et donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de u est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme u n'est pas inversible, le noyau de u n'est pas réduit à $\{0\}$. L'endomorphisme u admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est $\ker u$.

Correction de l'exercice 2923 ▲

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminons les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M-\lambda I) = 0$.
$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4-13\lambda^2+36 = (\lambda^2-4)(\lambda^2-9) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3).$$
Les valeurs propres de M sont donc $2, -2, 3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.
$$\begin{aligned} E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x-z = 2y, 7y+6t = 2z, 3z = 2t\right\} \end{aligned}$$
$$\text{or} \left\{ \begin{aligned} y &= 2x \\ 2x-z &= 2y \\ 7y+6t &= 2z \\ 3z &= 2t \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} y &= 2x \\ 2x-z &= 4x \\ 14x+9z &= 2z \\ 3z &= 2t \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} y &= 2x \\ z &= -2x \\ t &= -3x \end{aligned} \right.$$

ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1,2,-2,-3)$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or} \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}$$

ainsi, E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1,-2,-2,3)$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or} \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}$$

ainsi, E_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (1,3,-7,-7)$.

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or} \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}$$

ainsi, E_{-3} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_4 = (1,-3,-7,7)$.

(b) Montrons que M est diagonalisable.

La matrice M admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminés en 1) forment une base de $\mathbb{R}^4$. L'endomorphisme dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est représenté par une matrice diagonale dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) puisque $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2$, $Mu_3 = 3u_3$ et $Mu_4 = -3u_4$.

(c) Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de passage est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

(d) On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in |||$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.

On a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ donc } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

Mais, $M = PDP^{-1}$, d'où, pour $k \in |||$, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.

Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

On résout le système, et on a :

$$\begin{array}{l} u_1 = i + 2j - 2k - 3l \\ u_2 = i - 2j - 2k + 3l \\ u_3 = i + 3j - 7k - 7t \\ u_4 = i - 3j - 7k + 7l \end{array} \iff \begin{cases} i = \dfrac{1}{10}(7u_1 + 7u_2 - 2u_3 - 2u_4) \\ j = \dfrac{1}{10}(7u_1 - 7u_2 - 3u_3 + 3u_4) \\ k = \dfrac{1}{10}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\ l = \dfrac{1}{10}(3u_1 - 3u_2 - 2u_3 + 2u_4) \end{cases}$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction de **l'exercice 2924 ▲**

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) *On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de A.*
Soit P_A le polynôme caractéristique de A, on a

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

(b) *On démontre que A est diagonalisable et on détermine une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles* $A = PDP^{-1}$.
Le polynôme P_A admet deux racines, donc la matrice A admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 2$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 4$, valeur propre double. Déterminons les sous-espaces propres associés.
Notons $E_1 = \{\vec{V} = (x,y,z)/A\vec{V} = 2\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\left\{\begin{aligned} 3x - z &= 2x \\ 2x + 4y + 2z &= 2y \\ -x + 3z &= 2z \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} z &= x \\ y &= -2x \end{aligned}\right.$$

Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 2 est une droite vectorielle, dont un vecteur directeur est $\vec{e}_1 = (1,-2,1)$.
Notons $E_2 = \{\vec{V} = (x,y,z)/A\vec{V} = 4\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\left\{\begin{aligned} 3x - z &= 4x \\ 2x + 4y + 2z &= 4y \\ -x + 3z &= 4z \end{aligned}\right. \iff z = -x$$

Le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel, d'équation
$z = -x$ dont une base est donnée, par exemple par les vecteurs $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et
$\vec{e}_3 = (1,0,-1)$. Remarquons que l'on pouvait lire directement sur la matrice A, le fait que le vecteur $\vec{e}_2$ est vecteur propre associé à la valeur propre 4.
Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent, l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une base de vecteurs propres et la matrice A est diagonalisable.
Notons P la matrice de passage, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, si D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

(c) *On donne en le justifiant, mais sans calculs, le polynôme minimal de A.*
La matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal n'a que des racines simples, par ailleurs les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de A et le polynôme minimal est un polynôme unitaire qui divise le polynôme caractéristique. On a donc

$$Q_A(X) = (X-2)(X-4).$$

(d) *On calcule A^n pour $n \in |||$.*
On a vu, dans la question 2), que $A = PDP^{-1}$, on a donc, pour $n \in |||$, $A^n = P^{-1}D^nP$, or

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

il nous reste à calculer P^{-1}. On sait que $P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t\tilde{P}$, d'où

$$\det P = -2,\ \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2.4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Correction de **l'exercice 2925 ▲**

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *On calcule le polynôme caractéristique et on détermine les valeurs propres de A.*
Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1.$$

Calculons ses racines, le discriminant réduit de ce polynôme du second degré est égal à $\Delta' = (-1)^2 - (-1) = 2$, les racines sont donc

$$\lambda_1 = 1+\sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = 1-\sqrt{2},$$

ce sont les valeurs propres de A.

(b) On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. *On détermine une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \in E_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1,y)$.*
On cherche $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A.\vec{\varepsilon}_1 = (1+\sqrt{2})\vec{\varepsilon}_1$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1+y = 1+\sqrt{2} \\ 2+y = (1+\sqrt{2})y \end{cases}$$

d'où $y = \sqrt{2}$ et $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
On cherche $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A.\vec{\varepsilon}_2 = (1-\sqrt{2})\vec{\varepsilon}_2$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1-\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1+y = 1-\sqrt{2} \\ 2+y = (1-\sqrt{2})y \end{cases}$$

d'où $y = -\sqrt{2}$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(c) Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α,β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)$.*On démontre que, pour $n \in |||$, on a*

$$A^n\vec{x} = \alpha\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1 + \beta\lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2.$$

On a $\vec{x} = \alpha\vec{\varepsilon}_1 + \beta\vec{\varepsilon}_2$, d'où, par linéarité $A\vec{x} = \alpha A\vec{\varepsilon}_1 + \beta A\vec{\varepsilon}_2$ et $A^n\vec{x} = \alpha A^n\vec{\varepsilon}_1 + \beta A^n\vec{\varepsilon}_2$. Or, on montre, par récurrence sur n, que $A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$ et de même $A^n\vec{\varepsilon}_2 = \lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$. Pour $n = 1$, c'est la définition des vecteurs propres. Soit n fixé, tel que $A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$, on a alors $A^{n+1}\vec{\varepsilon}_1 = A.A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n A\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^{n+1}\vec{\varepsilon}_1$. Ainsi, pour tout $n \in |||$, on a $A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$, et, de même, $A^n\vec{\varepsilon}_2 = \lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$. D'où le résultat.

(d) Notons $A^n\vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. *On exprime a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2 et on en déduit que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.*

D'après la question précédente et les vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ obtenus en 2) on a

$$A^n\vec{x} = \alpha\lambda_1^n\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta\lambda_2^n\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \\ b_n = \sqrt{2}(\alpha\lambda_1^n - \beta\lambda_2^n) \end{cases}$$

On suppose $\alpha \neq 0$, pour n assez grand, on a

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n - \beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n},$$

or,

$$|\lambda_1| = |1+\sqrt{2}| > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\lambda_1^n = +\infty,$$

et

$$|\lambda_2| = |1-\sqrt{2}| < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\lambda_2^n = 0.$$

D'où l'équivalence

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n - \beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n} \sim \sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n}{\alpha\lambda_1^n} = \sqrt{2}.$$

On a donc bien

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}.$$

(e) *On explique, sans calcul, comment obtenir, à partir des questions précédentes, une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.*

La matrice A est à coefficients entiers, aussi, pour tout $n \in |||$, la matrice A^n est à coefficients entiers. Si l'on choisit un vecteur $\vec{x}$ à coordonnées entières dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors les coordonnées a_n et b_n du vecteur $A^n\vec{x}$ sont des entiers et elles nous fournissent une suite $\dfrac{b_n}{a_n}$ de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2926 ▲

Soit $P(X)$ un polynôme de $(x^2+1)^{[}X]$, soit A une matrice de $M_n((x^2+1)^{)}$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n((x^2+1)^{)}$.

(a) *On démontre que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.*

Soit $\vec{x} \neq 0$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, notons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d,$$

où I_n désigne la matrice unité.

Or, pour $k \in |||$, on a $A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$, d'où

$$B\vec{x} = P(A)\vec{x} = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k\vec{x} = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k\lambda^k\right)\vec{x} = P(\lambda)\vec{x},$$

ce qui prouve que $\vec{x}$ est un vecteur propre de la matrice $B = P(A)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A.

Soit $\mu \in (x^2+1)$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :

$$P(X) - \mu = a(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r).$$

i. *On démontre que* $\det(B-\mu I_n) = a^n \det(A-\alpha_1 I_n)\cdots\det(A-\alpha_r I_n)$.
Compte tenu de la décomposition du polynôme $P(X)-\mu$, on a

$$P(A)-\mu I_n = aI_n(A-\alpha_1 I_n)\cdots(A-\alpha_r I_n)$$

d'où

$$\det(B-\mu I_n) = a^n \det(A-\alpha_1 I_n)\cdots\det(A-\alpha_r I_n)$$

car le déterminant est une forme multilinéaire (d'où le a^n) et le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants.

ii. *On en déduit que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.*
Si μ est une valeur propre de B, alors, par définition, $\det(B-\mu I_n)=0$, ainsi, compte tenu de la question précédente, il existe un α_i, $1\leq i\leq r$, tel que $\det(A-\alpha_i I_n)=0$, c'est-à-dire que l'un des α_i, $1\leq i\leq r$, est valeur propre de A. Or, pour $1\leq i\leq r$, $P(\alpha_i)-\mu=0$ donc si μ est une valeur propre de B, on a $\mu = P(\alpha_i)$ où α_i est une valeur propre de A.

(c) On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A. *On démontre que*

$$S_B = \{P(\lambda)/\ \lambda\in S_A\}.$$

Soit λ une valeur propre de A, on a démontré en 1) que $P(\lambda)$ est une valeur propre de B, ainsi $\{P(\lambda)/\ \lambda\in S_A\}\subset S_B$. Réciproquement, si μ est une valeur propre de B alors, d'après 2), il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$, ainsi on a $S_B\subset\{P(\lambda)/\ \lambda\in S_A\}$, d'où l'égalité des deux ensembles.

(d) Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme

$$Q(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r),$$

on note C la matrice $C = Q(A)$.

i. *On démontre que* $S_C = \{0\}$.
D'après la question précédente, on a $S_C = \{Q(\lambda)/\ \lambda\in S_A\}$. Or, par définition du polynôme $Q(X)$, on a $Q(\lambda)=0$ pour toute valeur propre λ de A, ainsi, $S_C=\{0\}$.

ii. *On en déduit que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.*
Les valeurs propres de C sont les racines de son polynôme caractéristique, or C admet une unique valeur propre : 0, ainsi $P_C(X) = (-1)^n X^n$. Par ailleurs, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_C(C)=0$, ainsi $(-1)^n C^n = 0$, donc $C^n=0$.

Correction de l'exercice 2935 ▲

2. $D^{-1} = BC^{-1}A + I_p$.

Correction de l'exercice 2936 ▲

(a) 0 et les racines de $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$.

(b) $\sin\alpha + \sin 2\alpha,\quad -\sin\alpha,\quad -\sin 2\alpha$.

Correction de l'exercice 2937 ▲

(a) $\mathrm{rg}(A) = 2 \Rightarrow 0$ est valeur propre d'ordre au moins $n-2$. $E_0 = \{a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1} = x_n = 0\}$.
vp $\lambda\neq 0$: $\lambda^2 - a_n\lambda - (a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2) = 0$. Il y a deux racines distinctes, $E_\lambda = \mathrm{vect}((a_1,\ldots,a_{n-1},\lambda))$.

(b) A est diagonale. vp = 0 et a_n.

Correction de l'exercice 2938 ▲

(a) $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

(b) $-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $1\leq k\leq n$.

Correction de l'exercice 2939 ▲

Soit $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de x et $Q_n(x)$ celui de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le premier 1 par 2. On a les relations de récurrence :

$$P_n(x) = (1-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x), \qquad Q_n(x) = (2-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x).$$

D'où pour $x \notin \{0,4\}$:

$$P_n(x) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{2n})}{\alpha^n(1+\alpha)}, \qquad \text{avec } x = 2-\alpha-\frac{1}{\alpha}.$$

Les valeurs propres de A autres que 0 et 4 sont les réels $x_k = 2(1-\cos(k\pi/n))$ avec $0<k<n$ et 0 est aussi valeur propre (somme des colonnes nulle) donc il n'y en a pas d'autres.

Correction de l'exercice 2940 ▲

$\lambda = 0 : E_0 = \{\vec{x} \text{ tq } x_1+\cdots+x_q+x_{n-q+1}+\cdots+x_n = 0\}$,
$\lambda = 2\min(p,q) : E_\lambda = \mathrm{vect}((\underbrace{1,\ldots,1}_{p},0,\ldots,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{p}))$.

Correction de l'exercice 2944 ▲

$u(X^k) = -kX^k+(k-2n)X^{k+1} \Rightarrow$ la matrice de u est triangulaire inférieure. $\mathrm{Spec}(u) = \{0,-1,\ldots,-2n\}$.
$\lambda = -k$: Résoudre l'équation différentielle $\Rightarrow P = cX^k(X-1)^{2n-k}$.

Correction de l'exercice 2945 ▲

$\alpha^3 : (X-\beta)(X-\gamma), \quad \beta^3 : (X-\alpha)(X-\gamma), \quad \gamma^3 : (X-\alpha)(X-\beta)$.

Correction de l'exercice 2946 ▲

$\lambda = 1 \quad : P = Q\big((X-1)^2\big)$.
$\lambda = -1 : P = (X-1)Q\big((X-1)^2\big)$.

Correction de l'exercice 2947 ▲

$\lambda = 1 : P = aX+b$.

Correction de l'exercice 2948 ▲

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & \ldots & -a^n \\ & 2 & -2a & & (0) \\ & & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -na \\ (0) & & & & n+1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Ker} f = \{\text{polynômes constants}\}$, $\mathrm{Im} f = \{\text{polynômes divisibles par } X-a\}$.
Valeurs propres : $0,2,3,\ldots,n+1$. Pour $2 \le k \le n+1$, $E_k = \mathrm{vect}\big((X-a)^{k-1}\big)$.

Correction de l'exercice 2949 ▲

Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$

$$AP-(X^4-X)P = (X-1)P = aX^4+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(d-c)X-d = \\ a(X^4-X)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d.$$

et donc $AP = (X^4-X)(P+a)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$ et donc $f(P) = (b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$. Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+1)(-(X+1)^3+1) = X(X+1)(X^2+3X+3).$$

A admet quatre valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$, deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1+j$ et $-1+j^2$. χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas diagonalisable.

• Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker} f \Leftrightarrow b-a = c-b = a+d-c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ et $d = 0$. $\text{Ker} f = \text{Vect}(X^3+X^2+X)$.

• Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}(f+Id) \Leftrightarrow b = c = a+d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ et $d = -a$. $\text{Ker}(f+Id) = \text{Vect}(X^3-1)$.

• $\text{rg}(f) = 3$ et immédiatement $\text{Im} f = \text{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut continuer :

$P \in \text{Ker}(f+(1-j)Id) \Leftrightarrow b-ja = c-jb = a+d-jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja,\ c = j^2a$ et $d = 0$.

Donc $\text{Ker}(f+(1-j)Id) = \text{Vect}(X^3+jX^2+j^2X)$ et en conjuguant $\text{Ker}(f+(1-j^2)Id) = \text{Vect}(X^3+j^2X^2+jX)$.

Remarque. $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de LAGRANGE $X^3-1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3+X^2+X = X(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3+jX^2+j^2X = X(X-1)(X-j^2)$ et enfin $X^3+j^2X^2+jX = X(X-1)(X-j)$. C'est une généralité. On peut montrer que si $E = \mathbb{C}_n[X]$ et si B a $n+1$ racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ alors f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de LAGRANGE associés aux racines de B et ceci pour un polynôme A quelconque.

Correction de l'exercice 2950 ▲

1er cas. Supposons $\alpha = \beta = 0$ et donc $uv = vu$. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, u admet au moins une valeur propre que l'on note λ. Le sous-espace propre E_λ correspondant n'est pas réduit à $\{0\}$, est stable par u et d'autre part stable par v car u et v commutent. On note u' et v' les restrictions de u et v au sous-espace E_λ. u' et v' sont des endomorphismes de E_λ. De nouveau, E_λ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle et donc v' admet au moins un vecteur propre x_0. Par construction, x_0 est un vecteur propre commun à u et v.

2ème cas. Supposons par exemple $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} uv - vu = \alpha u + \mu v &\Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha} v. \end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à u et v dans le noyau de f. Montrons tout d'abord que $\text{Ker} f$ n'est pas nul (on sait montrer que f est en fait nilpotent (exercice 3245) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).

Si f est inversible, l'égalité $fg - gf = f$ fournit $(g+Id) \circ f = f \circ g$ et donc $g + Id = f \circ g \circ f^{-1}$. Par suite, g et $g+Id$ ont même polynôme caractéristique ou encore, si λ est valeur propre de g alors $\lambda+1$ est encore valeur propre de g. Mais alors $\lambda+2$, $\lambda+3$... sont aussi valeurs propres de g et g a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc $\text{Ker} f$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Maintenant, si x est un vecteur de $\text{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ et $g(x)$ est dans $\text{Ker} f$. Donc g laisse $\text{Ker} f$ stable et sa restriction à $\text{Ker} f$ est un endomorphisme de $\text{Ker} f$ qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à f et g.

Enfin si x est vecteur propre commun à f et g alors x est vecteur propre de $v = \frac{1}{\alpha} g$ et de $u = \frac{1}{\alpha}(f - \beta v)$. x est un vecteur propre commun à u et v.

Correction de l'exercice 2951 ▲

(a) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $(\varphi(f))(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$.
F est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, F étant dérivable en 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ est une application de E dans E. La linéarité de φ est claire et finalement

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})).}$$

(b) Si f est dans $\text{Ker}(\varphi)$ alors $f(0) = 0$ et pour tout x non nul, $\int_0^x f(t)\, dt = 0$. Par dérivation on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ et donc $f = 0$. Finalement $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
φ n'est pas surjective car pour toute $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Mais alors par exemple, l'application $g : x \mapsto |x-1|$ est dans E mais n'est pas dans $\text{Im}(\varphi)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est injective et n'est pas surjective.}}$$

(c) On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ et non nulle telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de φ et donc nécessairement $\lambda \neq 0$.

Pour $x = 0$, nécessairement $f(0) = \lambda f(0)$ et donc ou bien $\lambda = 1$ ou bien $f(0) = 0$.

On doit avoir pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt$. f est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x)$ et par dérivation, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)).$$

Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ f(x) = \lambda(xf'(x)+f(x)) &\Rightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda x}f(x) = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda x}e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f(x) = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in I,\ \left(|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f\right)'(x) = 0\\ &\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ |x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f(x) = K \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.\end{aligned}$$

1er cas. Si $\lambda \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ alors $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ et donc $\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$. La fonction $x \mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ ne peut donc être la restriction à I d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ que dans le cas $K = 0$. Ceci fournit $f_{/]-\infty,0[} = 0$, $f_{/]0,+\infty[} = 0$ et $f(0) = 0$ par continuité en 0. Dons f est nécessairement nulle et λ n'est pas valeur propre de φ dans ce cas.

2ème cas. Si $\lambda = 1$, les restriction de f à $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ sont constantes et donc, par continuité de f en 0, f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes f vérifient bien $\varphi(f) = f$. Ainsi, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

3ème cas. Si $\lambda \in]0,1[$, nécessairement $\exists (K_1,K_2) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x \geq 0 \\ K_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$. f ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{R}$. Calculons alors $\varphi(f)$.

$(\varphi(f))(0) = f(0) = 0$ puis si $x > 0$,

$$(\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x K_1 t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,dt = \frac{\lambda K_1}{x}x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f(x)$$

et de même si $x < 0$. Enfin, $(\varphi(f))(0) = 0 = \lambda f(0)$. Finalement $\varphi(f) = \lambda f$. λ est donc valeur propre de φ ($K_1 = K_2 = 1$ fournit une fonction non nulle) et le sous-espace propre associé à λ est de dimension 2. Une base de ce sous-espace est (f_1,f_2) où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \left\{\begin{array}{l} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$ et $f_2(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1].}$$

Correction de l'exercice 2975 ▲

$\chi_A = (-1-X)(2-X)^2$. Donc A est diagonalisable ssi $\dim\ker(A-2I) = 2$. Or $\mathrm{rg}(A-2I) = 2$, donc $\dim\ker(A-2I) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable. Cependant, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est triangularisable sur $\mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \ker(A+I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y+4z=0\\ -x+4y-z=0\\ -2x-y-2z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0\\ y=0\end{array}\right.$ donc $\ker(A+I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

De même,

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \ker(A-2I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+4z=0\\ -x+y-z=0\\ -2x-y-5z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2y\\ z=-y\end{array}\right.$ donc $\ker(A+I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

On sait que $\ker((A-2I)^2)$ est de dimension 2, et que $\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \in \ker(A-2I) \subset \ker((A-2I)^2)$. On cherche donc un deuxième vecteur dans $\ker((A-2I)^2)$, linéairement indépendant de $\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18\\ 0 & 0 & 0\\ 9 & 0 & 18\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ convient. De plus : $A\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

Donc en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2976 ▲

On a $A^3 = A$, donc $P = X^3 - X = (X-1)(X+1)X$ est un polynôme annulateur de A. Il s'agit d'un poynôme scindé à racine simples donc A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont des racines de P donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,1,-1\}$. On a $\mathrm{rg}A = 2$ donc 0 est valeur propre de multiplicité 2. La résolution de système $(A+I)X = 0$ montre que $\ker(A+I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$, donc -1 est valeur propre de multiplicité 1 donc 1 est nécessairement valeur propre de multiplicité 1 : on en déduit que $\chi_A = X^2(X-1)(X+1)$.

Correction de l'exercice 2981 ▲

(a) A est triangulaire inférieure donc ses valeurs sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et 3. A a trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

(b) $\chi_B = -(X-1)(X+1)^2$. $B+I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{rg}(B+I) = 2$, $\dim(\ker B+I) = 1 < 2$ donc B n'est pas diagonalisable.

$\chi_B(B) = 0$ donc $B(B^2+B-I) = I$, soit $B^{-1} = B^2+B-I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2982 ▲

(a) ${}^tA = A$ donc A est diagonalisable dans une base orthonormée.

(b) Par exemple : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et ${}^tQ = Q^{-1}$

Correction de l'exercice 3012 ▲

$\operatorname{tr} a = \operatorname{tr} A = -1$, $\det a = \det A = -6$

$$P_a(X) = X^2 - \operatorname{tr} X + \det a = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

Donc le spectre est $\{2, -3\}$, il est de taille 2 comme l'espace est de dimension 2. D'après le cours, a est diagonalisable et les espaces propres de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des (x,y) tels que $7x - 10y = 2x$ ou $x = 2y$. On peut prendre $\vec{f}_1 = (2,1)$ pour base de cet espace propre. L'espace propre associé à la valeur propre -3 est l'ensemble des (x,y) tels que $7x - 10y = -3x$ ou $x = y$. On peut prendre $\vec{f}_2 = (1,1)$ pour base de cet espace propre. Alors si $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ on a

$$P = [\mathrm{id}_E]^e_f = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right], \quad P^{-1} = [\mathrm{id}_E]^f_e = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right], \quad D = [a]^f_f = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{array} \right].$$

$$D^{50} = [a^{50}]^f_f = \left[\begin{array}{cc} 2^{50} & 0 \\ 0 & (-3)^{50} \end{array} \right], \quad A^{50} = [a^{50}]^e_e = PD^{50}P^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 2.2^{50} - (-3)^{50} & -2.2^{50} + 2.(-3)^{50} \\ 2^{50} - (-3)^{50} & -2^{50} + 2.(-3)^{50} \end{array} \right]$$

Donc $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} [a^{2n}]^f_f = L = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$, et $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} [a^{2n}]^e_e = PLP^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$.

Correction de l'exercice 3013 ▲

Si $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in F$, il est clair que $X = \sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} F_{ij}$. C'est donc une famille génératrice. Elle est indépendante, car si $\sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} F_{ij}$ est la matrice nulle, cela implique que $x_{ij} = 0$ pour tous i et j. C'est donc une base de F. Elle est de taille n^2, donc F est de dimension n^2. Ensuite, si $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et si $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ alors le coefficient (i,j) de la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$ est $(\alpha d_j + \beta d_i) x_{ij}$. Donc $\Phi(F_{ij}) = (\alpha d_j + \beta d_i) F_{ij}$, ce qui est dire que F_{ij} est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\alpha d_j + \beta d_i$. L'espace F admet donc une base de vecteurs propres de Φ. D'après le cours, cela entraîne que Φ est diagonalisable. Si on le représente dans la base de vecteurs propres, le déterminant de Φ est donc le produit des éléments diagonaux, c'est à dire $\det \Phi = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i)$. Plus généralement $\det(\Phi - \lambda \mathrm{id}_F) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i - \lambda)$.

Correction de l'exercice 3014 ▲

Notons $D_n = \det B$. Alors $D_1 = 2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ et $D_2 = 4\cos^2\theta - 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$. Si $n > 2$, développons D_n par rapport à la dernière ligne, en recommencant encore une fois avec un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus. On obtient $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $D_k = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ pour $k < n$. On a vu que c'est vrai pour $k = 1$ et 2. Alors par des identités trigonométriques classiques $D_n = \frac{2\cos\theta \sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, et la récurrence est étendue. Puisque $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $x = k\pi$ alors $D_n = 0$ si et seulement si il existe $k=1,2,\dots,n$ tel que $\theta=\frac{k\pi}{n+1}$ les autres valeurs de k étant exclues car $0<\theta<\pi$. Par définition de P_A on a $P_A(-2\cos\theta)=D_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ qui s'annule pour les n nombres distincts $-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1,2,\dots,n$ qui sont nécessairement toutes les valeurs propres de A. Les valeurs propres de $2I_n+A$ sont donc $2-2\cos\frac{k\pi}{n+1}=4\sin^2\frac{k\pi}{2n+2}>0$. Le spectre de $2I_n-A$ est le même.

Correction de l'exercice 3017 ▲

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les valeurs propres de M.*
Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_M(X)=\begin{vmatrix}-X&2&-1\\3&-2-X&0\\-2&2&1-X\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}3&-2-X\\-2&2\end{vmatrix}+(1-X)\begin{vmatrix}-X&2\\3&-2-2X\end{vmatrix}\tag{30}$$

$$=(1-X)(X^2+2X-8)\tag{31}$$

$$=(1-X)(X+4)(X-2).\tag{32}$$

La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1,2$, et -4.

(b) *Montrons que M est diagonalisable.*
Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

(c) *Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*
Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.
$\lambda=1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases}2y-z=x\\3x-2y=y\\-2x+2y+z=z\end{cases}\iff\begin{cases}-x+2y-z=0\\3x-3y=0\\-2x+2y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\\x=z\end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées $(1,1,1)$.
$\lambda=2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases}-2x+2y-z=0\\3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_2}$ de coordonnées $(4,3,-2)$.
$\lambda=-4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases}-4x+2y-z=0\\3x+2y=0\\-2x+2y+5z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-z=0\\2y+3x=0\end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=-4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées $(2,-3,2)$.
Les vecteurs $\vec{e_1},\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

(d) *Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.*
On a

$$D=P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

pour $k\in|||$, on a

$$D^k=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&(-4)^k\end{pmatrix},$$

et $M^k = PD^kP^{-1}$.
Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \frac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^{\mathrm{t}}$. Or

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

et

$$\mathrm{com}P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5.2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5.2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3018 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.
Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.
$E_1 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = V\}$,

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

E_1 est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment une base.
Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.
$E_2 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = 2V\}$,

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0, y = 0$$

E_2 est donc une droite vectorielle, dont le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ est une base.
Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice A est donc diagonalisable. Dans la base (e_1, e_2, e_3) l'endomorphisme représenté par A (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 3019 ▲

Soit
$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$
Factorisons le polynôme caractéristique de A.
$$P_A(X)=\begin{vmatrix}1-X&1&-1\\0&1-X&0\\1&0&1-X\end{vmatrix}=(1-X)^3+(1-X)=(1-X)((1-X)^2+1)=(1-X)(X^2-2X+2)$$
factorisons maintenant le polynôme X^2-2X+2, le discriminant réduit $\Delta'=1-2=-1$, ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont : $1+i$ et $1-i$. On a $P_A(X)=(1-X)(1-i-X)(1+i-X)$.
La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans (x^2+1) car c'est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 3020 ▲

Soit
$$A=\begin{pmatrix}a&c\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$
Démontrons que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à
$$P_A(X)=\begin{vmatrix}a-X&c\\c&d-x\end{vmatrix}=(a-X)(d-X)-c^2=X^2-(a+d)X+ad-c^2,$$
déterminons ses racines : calculons le discriminant :
$$\begin{aligned}\Delta&=(a+d)^2-4(ad-c^2)\\&=a^2+d^2+2ad-4ad+4c^2\\&=a^2+d^2-2ad+4c^2\\&=(a-d)^2+4c^2\geq 0\end{aligned}$$
On a $\Delta=0\iff a-d=0$ et $c=0$, mais, si $c=0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta>0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3024 ▲

On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :
$$(S)\quad\begin{cases}x'=4x-2y\\y'=x+y\end{cases}$$

(a) On diagonalise la matrice
$$A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}.$$
Pour cela on détermine ses valeurs propres :
$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&-2\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)+2=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3).$$
Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes, qui sont $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=3$. Elle est diagonalisable. Déterminons une base de vecteurs propres :
$$\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\iff x=y,$$
d'où le vecteur propre $u_1=(1,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_1=2$.
$$\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}\iff x=2y,$$
d'où le vecteur propre $u_2=(2,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_2=3$. Dans la base (u_1,u_2), la matrice s'écrit
$$A'=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}.$$
On a $A=PA'P^{-1}$ où
$$P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\text{ et }P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}.$$

(b) Exprimons le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
Dans la base (u_1, u_2), le système (S) devient

$$(S') \quad \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \end{cases}$$

Ses solutions sont les fonctions

$$\begin{cases} X(t) = X(0)e^{2t} \\ Y(t) = Y(0)e^{3t} \end{cases}$$

(c) Pour représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy), on trace d'abord le repère (O, u_1, u_2) dans le repère $(0xy)$, puis, on trace les courbes

$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)} X^{3/2}$$

dans le repère (O, u_1, u_2) (ou OXY).

(d) On voit sur le dessin que si $Y(0)$ est strictement positif, alors la population des lapins, $x(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $Y(0)$ est strictement négatif alors la populations des lapins s'éteint dans la mesure ou $x(t)$ dans ce cas tendrait vers $-\infty$.

Correction de l'exercice 3025 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculons les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$

La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or, $A \neq I$.

(b) Calculons $(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A - I) = I + n(A - I) = nA + (1-n)I.$$

Car, pour $k \geq 2$, on a $(A - I)^k = 0$.

(c) *Soient* $P(X) = (X-1)^2$ *et* $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimons le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
Il existe des polynômes S et R, avec $d^\circ R < d^\circ P$ ou $R = 0$, tels que

$$Q(X) = S(X)(X-1)^2 + R(X).$$

Notons $R(X) = aX + b$ ($R(X)$ est de degré 1 car P est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X-1)^2 + 2(X-1)S(X) + a,$$

on a donc $Q(1) = R(1) = a + b$ et $Q'(1) = a$, c'est-à-dire $a = Q'(1)$ et $b = Q(1) - Q'(1)$ d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que $P(A) = 0$, en choisissant le polynôme $Q(X) = X^n$ on a $Q(1) = 1$ et $Q'(1) = n$, donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1-n)I.$$

(d) i. Montrons que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X,Y,Z) \in Im(A-I), \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x+y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $Im(A-I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = (2,-1,1)$.

ii. Déterminons un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. On pose $\varepsilon_3 = (x,y,z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x+2y-2z = x+2 \\ -x+z = y-1 \\ x+y = z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y-z) = 2 \\ -1(x+y-z) = -1 \\ (x+y-z) = +1 \end{cases} \iff x+y-z = 1.$$

On prends, par exemple $\varepsilon_3 = (1,0,0)$.

Déterminons un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x+2y-2z = x \\ -x+z = y \\ x+y = z \end{cases} \iff x+y-z = 0.$$

On peut prendre le vecteur $\varepsilon_1 = (0,1,1)$ qui n'est pas colinéaire à ε_2.

iii. Ecrivons la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que les matrices de passage.

On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ d'où la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

iv. Pour retrouver A^n, on écrit $A' = I + N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^2 = 0$. Par ailleurs, on a $A = PA'P^{-1}$, d'où

$$A^n = PA'^nP^{-1} = P(I+N)^nP^{-1} = P(I+nN)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nA + (1-n)I.$$

Correction de l'exercice 3026 ▲

Soient M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

(a) *Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ.*

Montrons que $MAx = \lambda Ax$.

On a $Mx = \lambda x$, donc $AMx = A\lambda x = \lambda Ax$. Mais, $AM = MA$, donc $MAx = AMx = \lambda Ax$. Ce qui prouve que le vecteur Ax est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ, et comme les valeurs propres de M sont supposées distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc Ax est colinéaire à x. Ainsi, il existe un réel μ tel que $Ax = \mu x$, donc x est un vecteur propre de A.

(b) On note maintenant $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1,\cdots,\mu_n$ celles de A.

i. Montrons l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j-\lambda_i).$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde. Notons le $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n=2$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Dans $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, retranchons à chaque colonne λ_1 fois la précédente (en commençant par la dernière colonne). On obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n^2-\lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n^2-\lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

On factorise alors chaque ligne par $(\lambda_i-\lambda_1)$ et on obtient

$$\begin{aligned} V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) &= (\lambda_2-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1)V(\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j) \end{aligned}$$

car $V(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\prod_{2\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i)$ par hypothèse de récurrence.
Ce déterminant est le déterminant du système suivant,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \quad\vdots \\ \mu_n = \alpha_0+\alpha_1\lambda_n+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

or $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq 0$ puisque les λ_i sont supposés distincts, c'est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution $(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^n$.

ii. *Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes* :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},\quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M'^k.$$

Compte tenu des matrices A' et M' l'existence de réels tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M'^k$$

est équivalente à l'existence d'une solution pour le système précédent, d'où le résultat.
On en déduit qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M^k.$$

La matrice M admet n vecteurs propres linéairement indépendants qui sont également vecteurs propres de la matrice A. Par conséquent il existe une même matrice de passage P telle que $M=PM'P^{-1}$ et $A=PA'P^{-1}$, d'où l'égalité

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M^k.$$

Correction de l'exercice 3027 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminons le polynôme caractéristique de A.
On a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4-X \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} = -(1+X)\begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 5 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X)[(X-4)(X+3)+10] = -(1+X)(X^2-X-2) = -(1+X)^2(X-2) \end{aligned}$$

(b) Démontrons que les valeurs propres de A sont -1 et 2 et déterminons les sous-espaces propres associés.
Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc bien les réels -1 et 2.
Les sous-espaces propres associés sont les ensembles

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A+I_3)$$

et

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A-2I_3)$$

On a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -3x-2y-2z = -x \\ 2x+y+2z = -y \\ 3x+3y+2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-2y-2z = 0 \\ 2x+2y+2z = 0 \\ 3x+3y+3z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace caractéristique E_{-1} associé à la valeur propre -1 est donc le plan vectoriel d'équation $x+y+z = 0$, il est de dimension 2, égale à la multiplicité de la racine -1.
On a

$$(x,y,z) \in E_2 \iff \begin{cases} -3x-2y-2z = 2x \\ 2x+y+2z = 2y \\ 3x+3y+2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x-2y-2z = 0 \\ 2x-y+2z = 0 \\ 3x+3y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $y = -x$ et $2z = -3x$.
Le sous-espace caractéristique E_2 associé à la valeur propre 2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,-2,-3)$, il est de dimension 1, égale à la multiplicité de la racine 2.

(c) Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
La question précédente et les résultats obtenus sur les dimensions des sous-espaces propres permettent d'affirmer que la matrice A est diagonalisable. Une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de bases des sous-espaces propres est une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de u est diagonale. Par exemple dans la base formée des vecteurs $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (2,-2,-3)$, la matrice de u est la matrice D qui s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
La matrice cherchée P est la matrice de passage exprimant la base de vecteurs propres (u_1,u_2,u_3) dans la base canonique. C'est donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 3028 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquons sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

On remarque que le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)^4$. Ainsi la matrice A admet-elle une unique valeur propre : $\lambda = 1$, si elle était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A = PI_4P^{-1}$ alors $A = I_4$, or ce n'est pas le cas, par conséquent la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3029 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

(a) Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrons qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

Compte tenu des hypothèses, la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$

où a et b sont des réels. On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 = y_2 \end{cases}$$

ce qui implique $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

(b) Montrons que le vecteur $\varepsilon = (1, -1)$ est un vecteur propre de A.

Si $A\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $y_1 + y_2 = 0$ donc $y_2 = -y_1$ et $A\varepsilon = y_1\varepsilon$, ce qui prouve que ε est un vecteur propre. On peut aussi le voir de la manière suivante

$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\varepsilon.$$

On note $\lambda = (a-b)$ sa valeur propre.

(c) Montrons que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.

Soit $v = (x_1, x_2)$ un vecteur propre de A non colinéaire à ε, notons μ sa valeur propre, on a $Av = \mu v$, et, d'après la question 1), on a

$$x_1 + x_2 = \mu x_1 + \mu x_2 = \mu(x_1 + x_2)$$

ce qui implique $\mu = 1$ car v est supposé non colinéaire à ε donc $x_1 + x_2 \neq 0$.

(d) Soit $e_1 = (1, 0)$. Montrons que la matrice, dans la base (e_1, ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour cela on écrit Ae_1 et $A\varepsilon$ dans la base (e_1, ε). On a d'une part $A\varepsilon = \lambda\varepsilon$ et, d'autre part,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice dans la base (e_1, ε)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\alpha = a - 1$ et $\lambda = a - b$.

On en déduit que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)(\lambda - X)$, ainsi, si $\lambda \neq 1$, il admet deux racines distinctes ce qui prouve que A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3030 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*
On a

$$\begin{aligned}
P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1] \\
&= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha].
\end{aligned}$$

Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2-4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \ \text{ et } \ \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

(b) *Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,
- si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,
- si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha-1$, valeur propre simple.

(c) *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.
Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha+I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.
- Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

(d) *Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.*
Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc
- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
- Si $\alpha \neq -1$, A_α n'est pas diagonalisable, donc $Q_A(X) = P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1)$.

Seconde partie :
On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A. On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

(a) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.

Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(b) *Démontrons que f admet un plan stable.*

La matrice de f n'est pas diagonalisable, mais comme son polynôme caractéristique se factorise sur $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable, ce qui prouve qu'elle admet un plan stable, le plan engendré par les deux premiers vecteurs d'une base de trigonalisation.

Par ailleurs, on a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, c'est bien un plan vectoriel.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ et $Ae_3 = e_2 - e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A+I)$, nous choisirons $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker(A+I)^2$. Remarquons que si l'on cherche $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 - e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A+I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1)$ conviennent.

Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 - e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) *Décomposition de Dunford de B*

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrice D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D+N$ et $DN = ND$. C'est donc là la décomposition de Dunford, $B = D+N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$ *et exprimons* $\exp tA$ *à l'aide de P et* $\exp tB$.

Remarquons tout d'abord que $N^2 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^2 = 0$ et l'expenentielle est égale à $\exp(tN) = I + tN$, par ailleurs $ND = DN$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(-tN) = e^{-t}(I + tN).$$

D'où

$$\exp(tB) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA, on écrit

$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

(f) *Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*

La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où $v = (a, b, c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} a + bt \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.

La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t}(a + bt) \\ e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} a + b + (c + b)t \\ a + bt \\ b + c + ct \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

II

Soient K un corps, $N \in M_n(K)$ une matrice nilpotente et A une matrice telle que $AN = NA$.

(a) *Déterminons les valeurs propres de N.*

La matrice N étant nilpotente, il existe un entier naturel m tel que $N^n = 0$, on a donc $\det N^m = (\det N)^m = 0$ donc $\det N = 0$, l'endomophisme de matrice N n'est pas bijectif ce qui prouve que 0 est valeur propre de N, c'est la seule, en effet si λ est une autre valeur propre et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ on a

$$Nx = \lambda x \Rightarrow N^m x = \lambda^m x$$

d'où $\lambda^m x = 0$, mais $x \neq 0$ donc $\lambda = 0$. Ainsi la matrice N admet une unique valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité n.

(b) *Démontrons que N est trigonalisable.*

Le polynôme caractéristique de N admet une unique racine $0 \in K$, toutes ses racines sont donc dans K, ce qui prouve que la matrice N est trigonalisable. Elle est semblable à une matrice triangulaire n'ayant que des 0 sur la diagonale.

(c) *Démontrons que* $\det(I + N) = 1$.

Compte tenu de ce qui précède, la matrice $N + I$ est une matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale, or le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux, ainsi on a bien $\det(N + I) = 1$.

(d) *On suppose A inversible. Démontrons que les matrices AN et NA^{-1} sont nilpotentes.*

Comme les matrices A et N commutent, pour tout $k \in |||$, on a $(AN)^k = A^k N^k$ donc pour $k = m$, $(AN)^m = A^m N^m = A.0 = 0$ ce qui prouve que AN est nilpotente. De même $NA^{-1} = A^{-1}N$ et NA^{-1} est nilpotente.

On en déduit que

$$\det(A + N) = \det A.$$

L'égalité $AN = NA$ implique $N = ANA^{-1}$ ainsi, on a

$$\det(N + A) = \det(ANA^{-1} + A) = \det(A(NA^{-1} + I)) = \det A \det(NA^{-1} + I) = \det A.$$

(e) *On suppose A non inversible. En exprimant $(A+N)^k$ pour $k \in |||$, démontrons que* $\det(A+N)=0$.

Comme les matrices A et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $A+N$. Soit m tel que $N^m=0$ et, pour tout $k<m, N^k \neq 0$ on a alors

$$(A+N)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = A \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k}$$

ainsi

$$\det((A+N)^m) = \det A . \det \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k} = 0$$

car $\det A = 0$. Or, $\det((A+N)^m) = (\det(A+N))^m$, on a donc bien $\det(A+N)=0$.

Correction de l'exercice 3031 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, on montre que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X)-c^2 = X^2-(a+d)X+ad-c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (a+d)^2-4(ad-c^2) \\
&= a^2+d^2+2ad-4ad+4c^2 \\
&= a^2+d^2-2ad+4c^2 \\
&= (a-d)^2+4c^2 \geq 0
\end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a-d=0$ et $c=0$, mais, si $c=0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta>0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3032 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n \in |||}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in |||$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

(a) *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*

Calculons le polynôme caractéristique $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & 1+a-X \end{vmatrix} = -X(1+a-X)+a = X^2-(1+a)X+a.$$

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si le polynôme P_A admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$. En effet, si P_A admet une racine double r et A diagonalisable, alors l'endomorphisme de matrice A est égal à $r\mathrm{Id}_E$, ce qui n'est pas le cas. Calculons donc le discriminant du polynôme caractéristique.

$$\Delta = (1+a)^2-4a = 1+a^2+2a-4a = 1+a^2-2a = (1-a)^2.$$

Ainsi la matrice A est diagonalisable pour tout $a \neq 1$.

(b) *Lorsque A est diagonalisable, calculons A^n pour $n \in |||$.*

Lorsque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, ainsi pour tout $n \in |||$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Déterminons les matrices P et D. Pour cela calculons les deux valeurs propres de A, ce sont les racines du polynôme P_A, on a donc

$$\lambda_1 = \frac{1+a+1-a}{2} = 1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{1+a-1+a}{2} = a.$$

Déterminons maintenant des vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et a. On cherche des vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ tels que $A\vec{e_1} = \vec{e_1}$ et $A\vec{e_2} = a\vec{e_2}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = x$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = ax$$

ainsi on peut choisir $\vec{e}_1 = (1,1)$ et $\vec{e}_2 = (1,a)$. On a alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $n \in |||$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

(c) *On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, on exprime U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.*

On a, par définition, pour tout $n \in |||$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$, ainsi,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n.$$

On a donc $U_1 = AU_0$, montrons par récurrence sur n, que pour tout $n \in |||$, $U_n = A^nU_0$. C'est vrai pour $n = 0$, $U_0 = A^0U_0 = IU_0 = U_0$ et pour $n = 1$. Soit n fixé pour lequel on suppose $U_n = A^nU_0$, on a alors $U^{n+1} = AU_n = A.A^nU_0 = A^{n+1}U_0$, le résultat est donc vrai pour tout entier naturel n.

La matrice A étant supposée diagonalisable, on a donc, pour $n \in |||$,

$$U_n = A^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0 = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

ainsi on peut exprimer pour $n \in |||$, le terme général de la suite u_n en fonction des premiers termes u_0 et u_1, on a

$$u_n = \frac{1}{a-1}\left((a-a^n)u_0 + (a^n-1)u_1\right).$$

Correction de l'exercice 3033 ▲

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Calculons son polynôme caractéristique

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)^3.$$

la matrice A admet une unique valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2.I_3$, elle serait donc égale à $2I_3$ ce qui n'est pas le cas, elle n'est donc pas diagonalisable.

(b) *Calculons $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in |||$.*

On a

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi, $(A-2I_3)^0 = I$, $(A-2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et, pour tout $n \geq 2$, on a $(A-2I_3)^n = 0$.

On en déduit A^n

Notons $B = A-2I_3$, on a $A = A-2I_3+2I_3 = B+2I_3$ avec $B^n = 0$ pour $n \geq 2$. Par ailleurs, les matrices B et $2I_3$ commutent, ainsi

$$A^n = (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme de Newton :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Or, pour $k \geq 2$, on a $B^k = 0$ d'où pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\
&= 2^n I_3 + 2^{n-1} nB \\
&= 2^n I_3 + 2^{n-1} n(A - 2I_3) \\
&= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} nA.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3034 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Démontrons que* 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* f.
Pour cela montrons que $\det(A - I) = 0$ et $\det(A - 2I) = 0$. On a

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 26 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Et

$$\det(A-2I) = \begin{vmatrix} -10 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, les réels 1 et 2 sont bien valeurs propres de la matrice A.

(b) *Déterminons des vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres* 1 *et* 2.
Soit $\vec{e} = (x,y,z,t)$ tel que $A\vec{e} = \vec{e}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} -9x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + 2y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 9z - 2t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 26x + 7y + 9z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = 5y \\ t = 0 \end{cases},$$

ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{e} = (-2,1,5,0)$.
Soit $\vec{u} = (x,y,z,t)$ tel que $A\vec{u} = 2\vec{u}$, on résout

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + y + 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -2x \\ 3z = -8x \\ t = 0 \end{cases},$$

ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{u} = (3,-2,-8,0)$.

(c) *On considère le vecteur* $\vec{u}$ *précédent et on determine des vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *tels que*

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}.$$

Pour déterminer le vecteur $\vec{v} = (x,y,z,t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 3 \\ 6x + y + 2z - t = -2 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = -3 \\ 6x + y + 2z = -2 \\ t = 0 \end{cases},$$

le vecteur $\vec{v} = (0,0,-1,0)$ convient. Pour déterminer le vecteur $\vec{w} = (x,y,z,t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = -1 \\ 6x + y + 2z = -1 \\ t = -1 \end{cases},$$

le vecteur $\vec{w} = (1/2, 0, -2, -1)$ convient.

(d) *Les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ceux définis précédemment. On démontre que $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et on donne la matrice de f dans cette base.*

La matrice M des vecteurs $\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans la base cannonique est de rang 4 car son déterminant est non nul, en effet

$$\det M = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Compte tenu des définitions des vecteurs $\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, la matrice B de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 1, valeur propre simple, et 2 de multiplicité 3. Nous avons vu dans le b) que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $1 \neq 3$, ainsi, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3035 ▲

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A et montrons que les valeurs propres de A sont -1 et 1.* (1,5 points)

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+m-X & m & 1 \\ -m & 1-m-X & -1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} \\ &= (-X-1)\begin{vmatrix} 1+m-X & m \\ -m & 1-m-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X)\left((1-X)^2-m^2+m^2\right) \\ &= -(1+X)(1-X)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont -1, valeur propre simple, et 1, valeur propre double.

(b) *Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ?* (1,5 points)

La matrice A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. Déterminons donc ce sous-espace propre $E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}$.

$$\begin{aligned} A\vec{u} = \vec{u} &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx - (1+m)y - z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2mx + 2my = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ m(x+y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace E_1 est de dimension 2 si et seulement si $m = 0$, c'est alors le plan d'équation $y+z=0$, sinon c'est une droite, intersection des deux plans $y+z=0$ et $x+y=0$.

Déterminons suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A. (1 point)

Si $m = 0$, la matrice A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, il est égal à

$$Q(X) = (X-1)(X+1).$$

Si $m \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal ne peut pas avoir uniquement des racines simples, il est donc égal à

$$Q(X) = (X-1)^2(X+1).$$

Correction de l'exercice 3036 ▲

(a) *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur* (x^2+1) mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. (2 points)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2+1.$$

Le polynôme caractéristique de A admet deux racines complexes conjuguées distinctes i et $-i$ elle est donc diagonalisable sur (x^2+1) mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

(b) *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur* (x^2+1), ni sur $\mathbb{R}$. (2 points)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2.$$

Le polynôme caractéristique de A admet une racine double 1, la matrice A admet l'unique valeur propre 1, or, elle n'est pas égale à l'identité, par conséquent, elle n'est diagonalisable, ni sur (x^2+1), ni sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3037 ▲

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Diagonalisons la matrice A.* (2 points)

Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2-1 = (X-1)(X+1).$$

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Déterminons une base de vecteurs propres de A.

Soit $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$A\vec{u} = \vec{u} \iff x = y \text{ et } A\vec{u} = -\vec{u} \iff x = -y.$$

Notons $\vec{u}_1 = (1,1)$ et $\vec{u}_2 = (-1,1)$, le vecteur $\vec{u}_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et le vecteur $\vec{u}_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) *Exprimons les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et traçons ses trajectoires.* (3 points)

Soit Y tel que $PY = X$, on a alors

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans la base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sont les solutions du système $Y' = DY$. Si $Y = (x,y)$, on a $x'(t) = x(t)$ et $y'(t) = -y(t)$, ainsi, les solutions du système sont $x(t) = ae^t$ et $y(t) = be^{-t}$ où a et b sont des constantes réelles arbitraires. Les trajectoires, exprimées dans la base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, sont donc les courbes d'équation $y = c/x$ avec $c \in \mathbb{R}$, ce sont des branches d'hyperboles.

Correction de l'exercice 3038 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(a) *Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.*
On développe le déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

$$\det A \neq 0 \iff 1 + a^3 \neq 0 \iff a \neq -1.$$

(b) *Calculons A^{-1} lorsque A est inversible.*
On suppose $a \neq -1$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\tilde{A}$, où $\tilde{A}$ est la comatrice de A et ${}^t\tilde{A}$ la transposée de $\tilde{A}$. On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix} = {}^t\tilde{A}.$$

D'où $A^{-1} = \dfrac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a^2 & -a & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3039 ▲

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminons la nature géométrique de cet endomorphisme.*
Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice A est la matrice de la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ d'angle θ.
On peut ajouter que les vecteurs colinéaires à $\vec{k}$ sont fixes. Un vecteur de coordonnées (x,y,z) est envoyé sur le vecteur $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$, sa composante dans le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ subit la rotation plane d'angle θ.

(b) *Démontrons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle et déterminons son sous-espace propre associé.*
Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = [(\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta](1-X)$$

$$= (1-X)(X^2 - 2X\cos\theta + 1$$

Cherchons les racines du polynôme $X^2 - 2X\cos\theta + 1$, pour cela on calcule son discriminant réduit

$$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta < 0,$$

en effet, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, alors $\sin\theta \neq 0$, donc le polynôme P_A n'admet qu'une racine réelle $\lambda = 1$. Son sous-espace propre associé est de dimension 1, c'est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ de la rotation.
Cas où $\theta \in \pi\mathbb{Z}$
On distingue les cas $\theta = n\pi$ avec n pair ou impair :
- Si $\theta = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de l'identité.
- Si $\theta = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$. Elle admet deux valeurs propres, la valeur propre 1 dont le sous-espace propre est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ et la valeur propre -1 dont le sous-espace propre est le plan $\mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$.

Correction de l'exercice 3040 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A.*
Par opérations sur les colonnes puis les lignes, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & -2 \\ 2 & -X & 2 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 3 & 2+X & 1-X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 5 & 0 & 3-X \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = -(X+2)[(-4-X)(3-X)+10] = -(X+2)(X^2+X-2) = -(X+2)^2(X-1).$$

(b) *Démontrons que les valeurs propres de A sont* 1 *et* -2 *et déterminons les sous-espaces propres associés.*
Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caracteristique, c'est-à-dire, 1, valeur propre simple et, -2, valeur propre double.
Notons E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1,

$$E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A.\vec{u} = \vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} -5x-2y-2z = 0 \\ 2x-y+2z = 0 \\ 3x+3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 3x+2z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 est donc une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (-2,2,3)$.
Notons E_{-2} le sous-espace propre associé à la valeur propre -2,

$$E_{-2} = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A.\vec{u} = -2\vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{matrix} -2x-2y-2z = 0 \\ 2x+2y+2z = 0 \\ 3x+3y+3z = 0 \end{matrix} \iff x+y+z = 0$$

Le sous-espace propre E_{-2} est donc le plan vectoriel d'équation $x+y+z = 0$, dont une base est donnée, par exemple, par $\vec{e}_2 = (1,-1,0)$ et $\vec{e}_3 = (1,0,-1)$.

(c) *Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de u est diagonale.*
Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont de dimension la multiplicité de la valeur propre correspondante, ce qui prouve que la matrice A est diagonalisable. Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$la matrice de l'endomorphisme associé à A est diagonale, elle s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) *Trouvons une matrice P telle que* $P^{-1}AP$ *soit diagonale.*
La matrice de changement de base qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des vecteurs propres, trouvés ci-dessus, dans la base canonique est la matrice P cherchée

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

elle est inversible et on a $P^{-1}AP = D$. (Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé, ni nécessaire).

Correction de l'exercice 3041 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$*, dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Calculons les valeurs propres de A et voyons si l'endomorphisme u est diagonalisable.*
En opérant sur les colonnes et les lignes du déterminant, on obtient

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1-X & -X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 2 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = (1-X)[(3-X)(-1-X)+4] = (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.$$

Ainsi, la matrice A admet 1 comme valeur propre triple. Elle n'est donc pas diagonalisable, sinon elle serait égale à $I = I_3$, la matrice identité.

(b) *Calculons $(A-I)^2$ et démontrons que $A^n = nA + (1-n)I$.*
On calcule d'abord la matrice $A-I$,

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

puis la matrice $(A-I)^2$,

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est donc la matrice nulle.
Nous allons donner deux méthodes pour démontrer que $A^n = nA + (1-n)I$.
Première méthode : En utilisant le binôme de Newton. On écrit $A^n = (A-I+I)^n$, or, les matrices $A-I$ et I commutent, on a donc

$$(A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{(n-k)} = C_n^0 I + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Deuxième méthode : Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Fixons n arbitrairement pour lequel on suppose que $A^n = nA + (1-n)I$, on a alors

$$A^{n+1} = A(nA + (1-n)I) = nA^2 + (1-n)A,$$

sachant que $(A-I)^2 = 0$, on en déduit que $A^2 = 2A - I$ ainsi

$$A^{n+1} = n(2A-I) + (1-n)A = (n+1)A - nI = (n+1)A + (1-(n+1))I.$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \in |||$.

Correction de l'exercice 3042 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Déterminons les valeurs propres de A.*
Calculons les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(1-X).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.

(b) *Déterminons, sans calculs, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.*
Si l'on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la base dans laquelle est exprimée la matrice A de l'endomorphisme f, on remarque que

$$f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Ainsi, les vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_3$ répondent-ils à la question.

(c) *Soit $\vec{e}$ tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrons que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrivons la matrice de f dans cette base.*
Notons $\vec{e} = (x, y, z)$ alors

$$f(\vec{e}) = \vec{e} \iff \begin{cases} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{e} = (1, 1, 0)$ convient. Les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} x = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

C'est une droite vectorielle, sa dimension n'est donc pas égale à la multiplicité de la valeur propre 2 comme racine du polynôme caractéristique, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3043 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A.*
On note $P_A(X)$ le polynôme caractéristique, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ -1 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X) \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)^2(1-X).$$

La matrice A admet deux valeurs propres, 1, valeur propre simple, et -1, valeur propre double.

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.*
La valeur propre 1 est simple, le sous-espace propre associé est égal au sous-espace caractéristique, c'est l'ensemble

$$E_1 = N_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ x - y = y \\ -x + 2y - z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur $\vec{e}_1$ est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (2, 1, 0)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est défini par

$$E_{-1} = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = -\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} x = -x \\ x - y = -y \\ -x + 2y - z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur $\vec{e}_2$ est donné, par exemple, par $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$. La dimension de E_{-1} n'est pas égale à la multiplicité de la racine, la matrice n'est pas diagonalisable. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre -1. Pour cela calculons la matrice $(A + I)^2$.

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{-1} = \ker(A + I)^2 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$$

Le sous-espace caractéristique N_{-1} est le plan vectoriel engendré par les vecteurs
$e_2 = (0, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 0)$.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (2,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,0,1)$ et on cherche un vecteur $\vec{e} \in N_{-1}$ tel que $f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e}$. Notons $\vec{e} = (0,y,z)$,

$$f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e} \iff y = 1,$$

le vecteur $\vec{e} = \vec{e}_3 = (0,1,0)$ convient, on pouvait le voir directement sur la deuxième colonne de la matrice A. Ainsi, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (2,1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,0,1)$ et $\vec{e}_3 = (0,1,0)$, la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P cherchée est la matrice de passage qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $AP = PB$ ou $A = PBP^{-1}$. On peut calculer P^{-1}, c'est la matrice qui exprime les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$$

Il est clair que la matrice D est diagonalisable puisque diagonale, on vérifie facilement que $N^2 = 0$, c'est-à-dire que la matrice N est nilpotente et que les deux matrices commutent, $DN = ND$. Ainsi la décomposition $B = D + N$ est bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$.

On utilise la décomposition de Dunford de la matrice tB, $tB = tD + tN$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD).\exp(tN)$$

car les matrices commutent, par ailleurs, comme D est diagonale, on a

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

et comme $N^2 = 0$, on a

$$\exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(f) *Donnons les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.*

Les solutions du système différentiel $y'(t) = B.y(t)$ sont les fonctions $y(t) = \exp(tB).V$ où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donc

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix},$$

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour trouver les solutions du système différentiel $x'(t) = A.x(t)$, on utilise le fait suivant

$$P.y \quad \text{est solution de} \quad x' = A.x \iff y \quad \text{est solution de} \quad y' = (P^{-1}AP).y = B.y.$$

Ainsi, les solutions du système $x' = A.x$ s'écrivent

$$x(t) = P.\exp(tB).V$$

où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On remarque qu'il n'est pas utile de calculer la martrice P^{-1}. C'est-à-dire

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^t \\ ae^t + ce^{-t} \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \end{pmatrix},$$

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3044 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*

Déterminons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & a-X & 0 \\ 0 & a-2 & 2-X \end{vmatrix} = -X(a-X)(2-X).$$

Ce polynôme admet trois racines $0, a$ et 2. Ainsi, si $a \notin \{0,2\}$ la matrice est diagonalisable. Examinons les cas $a = 0$ et $a = 2$.

Si $a = 0$, la valeur propre 0 est valeur propre double, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 0 est égal à $\ker A = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = \vec{0}\}$,

$$\vec{u} \in \ker A \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite vectorielle, la droite engendrée par $(1,0,0)$, la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Si $a = 2$, la valeur propre 2 est double, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 2 est égal à $E_2 = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff y = 2x.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est un plan vectoriel, le plan d'équation $y = 2x$, la matrice est donc diagonalisable.

Ainsi la matrice A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

Lorsque A est diagonalisable, déterminons une base de vecteurs propres de A.

On a $a \neq 0$ et on distingue les cas $a \neq 2$ et $a = 2$.

Si $a \neq 2$, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 2 sont lisibles sur la matrice, on a

$$E_0 = \ker A = \mathbb{R}.(1,0,0) \quad \text{et} \quad E_2 = \mathbb{R}.(0,0,1),$$

On détermine $E_a = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = a\vec{u}\}$.

$$\vec{u} \in E_a \iff \begin{cases} y = ax \\ ay = ay \\ (a-2)y + 2z = az \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ (a-2)y = (a-2)z \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ y = z \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e} = (1,a,a)$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1,0,0), (0,0,1)$ et $(1,a,a)$.

Si $a = 2$, nous avons vu que le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est le plan d'équation $y = 2x$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1,0,0), (0,0,1)$ et $(1,2,0)$.

(b) *Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^3$.*

i. *Lorsque A est diagonalisable, donnons une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A et écrivons la solution générale du système.*

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A et $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ les vecteurs propres associés, on sait qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel $x' = Ax$ est donnée par

$$e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1,\ e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2,\ e^{\lambda_3 t}\vec{e}_3.$$

Ainsi, si $a \neq 2$ cette base est donnée par

$$(1,0,0),\ e^{2t}(0,0,1),\ e^{at}(1,a,a)$$

et si $a = 2$, elle est donnée par

$$(1,0,0),\ e^{2t}(0,0,1),\ e^{2t}(1,2,0).$$

ii. *Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrons directement le système $X' = AX$.*

Lorsque A n'est pas diagonalisable, $a = 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le système $X' = AX$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \\ z' = -2y + 2z \end{cases}$$

Si $y' = 0$, alors $y(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $x' = \alpha$, $x(t) = \alpha t + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ et la troisième équation devient

$$z' = 2z - 2\alpha$$

et sa solution s'écrit $z(t) = \gamma e^{2t} + \alpha$, $\gamma \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale du système

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \alpha \\ \gamma e^{2t} + \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

(c) *Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrons que E_0 est un sous-espace vectoriel de E.*

Pour démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de démontrer que $0_E \in E_0$ et que E_0 est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans E_0, par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) = \vec{0}$$

ce qui prouve que $a_1 s_1 + a_2 s_2 \in E_0$.

Déterminons sa dimension en fonction de a.

Nous avons, dans tous les cas, une base de l'espace des solutions, donc l'écriture de la solution générale, on regarde alors les solutions de E qui sont dans E_0.

1er cas : $a \neq 2$ et $a \neq 0$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, si $a > 0$, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$,
et si $a < 0$, $s(t) \in E_0 \iff \alpha = \beta = 0$, $\dim E_0 = 1$.

2ème cas : $a = 2$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(e^{2t}, 2e^{2t}, 0),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.

3ème cas : $a = 0$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(t,1,1),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.

(d) *Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0,+\infty[$. Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E.*
Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de démontrer que $0_E \in F$ et que F est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans F, par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ est bornée sur $[0,+\infty[$, donc dans F.
Déterminons sa dimension en fonction de a.
Comme dans le cas précédent, suivant la forme de la solution générale, on a
si $a \geq 0$, les seules solutions bornées sur $[0,+\infty[$ sont de la forme
$s(t) = \alpha(1,0,0),\ \alpha \in R$, ainsi $\dim F = 1$.
si $a < 0$, les seules solutions bornées sur $[0,+\infty[$ sont de la forme
$s(t) = \alpha(1,0,0) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}),\ (\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\dim F = 2$.

Correction de l'exercice 3045 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*
On a

$$\begin{aligned} P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1] \\ &= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha]. \end{aligned}$$

Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

(b) *Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,
- si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,
- si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha - 1$, valeur propre simple.

(c) *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.
Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.
- Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

(d) *Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.*

Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc

- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.

- Si $\alpha \neq -1$, on doit distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, en effet,

- si $\alpha \neq 0$, A_α n'est pas diagonalisable donc les racines de Q_A ne sont pas toutes les deux simples, et P_A admet deux racines distinctes, donc

$$Q_A(X) = -P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1).$$

- si $\alpha = 0$, on a $P_A(X) = -(X+1)^3$ et A_0 n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal peut donc être égal à $(X+1)^2$ ou à $(X+1)^3$, or

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc le polynôme minimal Q_A est égal à $(X+1)^3$.

II

On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A. On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

(a) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.

Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(b) *Démontrons que le sous-espace vectoriel* $\ker(A+I)^2$ *est un plan stable par f.*

On a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, c'est bien un plan vectoriel.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ et $Ae_3 = e_2 - e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A+I)$, et $\ker(A+I)$ est la droite d'équations :

$\{z = 0, x-y = 0\}$; nous choisirons $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker(A+I)^2$. Remarquons que si l'on cherche $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 - e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A+I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 - e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) *Décomposition de Dunford de B*
On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D+N$ et $DN = ND$. Or si

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D+N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons $\exp tB$ et exprimons $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.*
On a $N^3 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^3 = 0$ et l'exponentielle est égale à

$$\exp(tN) = I + tN + (t^2/2)N^2,$$

par ailleurs $ND = DN$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD+tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(tN) = e^{-t}I\left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)$$

D'où

$$\exp(tB) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA, on écrit

$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

(f) *Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*
La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où $v = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} a+bt+c\frac{t^2}{2} \\ b+ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.
La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a+bt+c\frac{t^2}{2}) \\ e^{-t}(b+ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} (a+b)+(c+b)t+c\frac{t^2}{2} \\ a+bt+c\frac{t^2}{2} \\ (b+c)+ct \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) *Vérifions que la matrice A est diagonalisable.*

Nous avons vu dans la partie $I)3)$ que lorsque $\alpha = -1$, la matrice est diagonalisable, en effet, dans ce cas, elle admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et -2, valeur propre simple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 étant le plan d'équation $x = y$.

(b) *Diagonalisons la matrice A.*

Pour cela déterminons une base de vecteurs propres. Le plan $x = y$ est engendré par les vecteurs $u(1,1,0)$ et $v(0,0,1)$, déterminons un vecteur directeur de la droite E_{-2} :

$$E_{-2} = \ker(A_\alpha + 2I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -x = -2x \\ x - 2y = -2y \\ -x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w(0,1,-1)$. Ainsi, dans la base (u,v,w) la matrice est diagonale et s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) *Donnons les solutions du système différentiel $X' = A.X$.*

Si on note $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où S une solution du système $Y' = DY$. Ainsi, la solution générale du système $X' = A.X$ s'écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ ae^{-t} + be^{-t} \\ be^{-t} + ce^{-2t} \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et 0, valeur propre simple. Le sous-espace propre E_{-1}, associé à la valeur propre -1, est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$. Déterminons le sous-espace E_0 :

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_0 \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ x = 2y \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_0 est la droite vectorielle engendrée par $(2,1,1)$. Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est le sous-espace propre E_0. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre double -1 c'est l'espace vectoriel $\ker(A+I)^2$. On a

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker(A+I)^2$ est le plan vectoriel d'équation $-x+y+2z=0$, engendré par les vecteurs $(1,1,0)\in E_{-1}$ et $(2,0,1)$.

(b) *Trigonalisons la matrice A.*
Dans la base (u,v,w) où $u(2,1,1)$, $v(1,1,0)$ et $w(2,0,1)$ la matrice est triangulaire, il existe λ tel que $A.w=\lambda v-w$.

$$A.w=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi $A=PTP^{-1}$ où

$$T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3046 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

On suppose $a+c=b+d=1$ et $a-b\neq 1$.

(a) Soient (x_1,x_2), (y_1,y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

On montre que $y_1+y_2=x_1+x_2$.
On a

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

d'où $y_1+y_2=ax_1+bx_2+cx_1+dx_2=(a+c)x_1+(b+d)x_2=x_1+x_2$.

(b) *Soit le vecteur $\vec{x}=(1,-1)$, vérifions que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, et déterminons sa valeur propre.*

$$A.\vec{x}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix},$$

or $c-d=(1-a)-(1-b)=-(a-b)$, car $a+b=c+d=1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\-(a-b)\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $a-b$.

(c) *Déterminons le polynôme caractéristique de A et calculons ses racines.*
Tout d'abord, compte tenu de l'hypothèse $a+b=c+d=1$, nous écrirons

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\1-a&1-b\end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_A(X)=\begin{vmatrix}a-X&b\\1-a&1-b-X\end{vmatrix}=(a-X)(1-b-X)-b(1-a)=X^2-(a-b+1)X+(a-b).$$

On sait, d'après la question précédente que $a-b$ est racine de ce polynôme, or, le produit des racines est égal à $a-b$ et la somme à $a-b+1$, ainsi la seconde racine est égale é 1.

(d) *Déterminons un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$ et exprimons la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base $(\vec{x},\vec{y})$.*
Un vecteur propre non colinéaire à $\vec{x}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1. Ainsi, si on note $\vec{y}=(y_1,y_2)$, on a

$$A\vec{y}=\vec{y}\iff\begin{pmatrix}a&b\\1-a&1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases}ay_1+by_2=y_1\\(1-a)y_1+(1-b)y_2=y_2\end{cases}\iff (a-1)y_1+by_2=0.$$

Le vecteur $\vec{y}=(b,1-a)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Correction de **l'exercice 3047 ▲**

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x+2z \\ 4x-2y+4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.*
On a $f(\vec{e}_1) = (-1,2,4)$, $f(\vec{e}_2) = (1,0,-2)$ et $f(\vec{e}_3) = (-1,2,4)$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) *Déterminons les sous-espaces* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1)$, c'est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1) = (-1,2,4)$ et $f(\vec{e}_2) = (1,0,-2)$ qui sont clairement linéairement indépendants.
Pour le noyau, on a $\ker f = \{\vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$, ainsi,

$$\vec{u} = (x,y,z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x+y-z = 0 \\ 2(x+z) = 0 \\ 4x-2y+4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v} = (1,0,-1)$.

(c) Soient $\vec{u}_1 = (1,0,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,2,0)$ et $\vec{u}_3 = (0,1,1)$. *Démontrons que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.*
Pour cela nous allons vérifier que le déterminant de leurs coordonnées est non nul,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0.$$

Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E, car E est de dimension 3.

(d) *Calculons $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminons la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.*
On a $f(\vec{u}_1) = \vec{0}$,
$f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_2.$
$f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_3.$
Ainsi la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) *Déterminons les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.*
D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont $0, 1$ et 2, et les vecteurs propres sont $\vec{u}_1$ pour la valeur propre 0, $\vec{u}_2$ pour la valeur propre 1 et $\vec{u}_3$ pour la valeur propre 2.

Correction de **l'exercice 3048 ▲**

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

(a) *Démontrons que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.*
Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, on a alors

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$

ce qui implique n pair, car un carré est toujours positif.

(b) On suppose maintenant que $n = 4$.

i. *Démontrons que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.*
Soit $\vec{x} \in E$, on suppose $\vec{x} \neq 0$, supposons qu'il existe des réels a, b tels que $a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0}$, on a alors

$$a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \Longrightarrow f(a\vec{x} + bf(\vec{x})) = \vec{0} \Longrightarrow af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0},$$

car $f^2 = -\mathrm{id}_E$. Or,

$$\begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0} \end{cases} \Longrightarrow (a^2 + b^2)\vec{x} = \vec{0},$$

ce qui implique $a^2 + b^2 = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$, et, donc $a = b = 0$. Ce qui prouve que les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.

ii. Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.

A. *Démontrons que F est stable par f.*
Soit $\vec{x} \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)$, d'où

$$f(\vec{x}) = f(a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)) = af(\vec{x}_1) + bf^2(\vec{x}) = af(\vec{x}_1) - b\vec{x}_1 \in F.$$

D'où la stabilité de F par f.

B. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$.
Démontrons que $\mathscr{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E. La dimension de E étant égale à 4, il suffit de démontrer que les vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a_1\vec{x}_1 + b_1f(\vec{x}_1) + a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2) = \vec{0},$$

on a alors,

$$a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2) \in F,$$

et, comme F est stable par f,

$$f(a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2)) = a_2f(\vec{x}_2) - b_2\vec{x}_2 \in F.$$

Ce qui implique

$$(a_2^2 + b_2^2)\vec{x}_2 \in F \quad \text{d'où} \quad a_2^2 + b_2^2 = 0$$

car on a supposé $\vec{x}_2 \notin F$. On a donc $a_2 = b_2 = 0$ et, par conséquent, $a_1\vec{x}_1 + b_1f(\vec{x}_1) = 0$, or les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique $a_1 = b_1 = 0$. D'où l'indépendance des vecteurs $\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2)$.

iii. *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.*
On calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$. On a $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$, $f(f(\vec{x}_1)) = -\vec{x}_1$, $f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2)$, $f(f(\vec{x}_2)) = -\vec{x}_2$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv. *Calculons* $\det f$ *et* $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a, en développant par blocs,

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

De même,

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2.$$

v. *L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?*
Les valeurs propres réelles de f sont les réels λ qui annulent $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$, ce sont donc les réels λ tels que $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, f n'admet pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 3049 ▲

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Donnons les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette décomposition de $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford si et seulement si N est nilpotente (il est clair que D est diagonale) et si $ND = DN$.

Vérifions que N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice N est bien nilpotente quelques soient les valeurs de a et b. Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices commutent.

$$N.D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $ND = DN$ si et seulement si $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$. Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur.

(b) On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i. *Déterminons les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.*

Commençons par déterminer les valeurs propres de A, ce qui est immédiat car A est sous forme triangulaire. Elle admet donc deux valeurs propres, 1 valeur propre double et 2 valeur propre simple.

Notons E_1 et E_2 les sous-espaces propres de A.

$$E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,0)$, ce sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

$$E_2 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = ay \\ y = z \end{cases}$$

L'espace E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(a,1,1)$. La valeur propre 2 étant simple, le sous-espace caractéristique N_2 associé est égal à l'espace E_2.

Déterminons le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1. On a $N_1 = \ker(A-I)^2$. Calculons la matrice $(A-I)^2$.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de $(A-I)^2$ est le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,1,0)$.

ii. *Déterminons D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et*

$$A = D + N.$$

Notons $\vec{e}_3 = (a,1,1)$, dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, la matrice associée à l'endomorphisme représenté par A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}.$$

Par construction, c'est la décomposition de Dunford de B et on a $A = PBP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $D = P\Delta P^{-1}$ et $N = PMP^{-1}$ vérifient, N nilpotente, D diagonalisable et $ND = DN$. Calculons les

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminons les solutions de $\mathscr{E}$.
Remarquons que, si l'on note $X = (x_1,x_2,x_3)$, le système $\mathscr{E}$ s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la matrice A précédente avec $a = 2$ et $b = 1$. La solution générale du système s'écrit

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où $V = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs $X = PY$ est solution de $X' = AX \iff Y$ est solution de $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{B}Y$. La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit $Y = \exp(tB)V$ où $V \in \mathbb{R}^3$. Calculons donc l'exponentielle de la matrice tB pour $t \in \mathbb{R}$.
On a vu dans la question précédente que $B = \Delta + M$ avec $\Delta M = M\Delta$, ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(t\Delta).\exp(tM) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.(I + tM) \quad \text{car } M^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution générale du système $\mathscr{E}$ s'écrit donc $X = P\exp(tB).V$ où $V = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. C'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (a + 2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) = be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) = ce^{2t} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3050 ▲

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ.

Démontrons que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

On a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, et, par récurrence sur n, pour tout $n \in |||$, $u^n(\vec{x}) = \lambda^n\vec{x}$. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie

$$\begin{aligned} P(u)(\vec{x}) &= (a_0\mathrm{id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_du^d)(\vec{x}) \\ &= a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + a_2\lambda^2\vec{x} + \cdots + a_d\lambda^d\vec{x} \\ &= P(\lambda)\vec{x} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Théorème de Hamilton-Cayley. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit P le polynôme caractéristique de u, alors $P(u) = 0$ (le zéro étant celui de l'ensemble des endomorphisme de E)

Version matricielle : Si $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ est une matrice et P_A son polynôme caractéristique, alors $P_A(A) = 0$ (le zéro étant celui de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminons les valeurs propres de A.*

Pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -9 & 1-X & 9 \\ 9 & 0 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(-8-X).$$

La matrice A admet deux valeurs propres, 1 valeur propre double et -8 valeur propre simple.

Déterminons une base de vecteurs propres de A.

Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a

$$A.\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x = x \\ -9x + y + 9z = y \\ 9x - 8z = z \end{cases} \iff x = z$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel dont les vecteurs $\vec{e}_1 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (1,0,1)$ forment une base.

Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre -8, on a

$$A.\vec{u} = -8\vec{u} \iff \begin{cases} x = -8x \\ -9x + y + 9z = -8y \\ 9x - 8z = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre -8 est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3 = (0,1,-1)$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ci-dessus forment une base de E composée de vecteurs propres de A.

Diagonalisons A.

Dans cette base, la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

i. *Démontrons que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.*

On considère le polynôme $P(X) = X^3$, on applique la question préliminaire a). Si λ est une valeur propre de B, alors $P(\lambda) = \lambda^3$ est une valeur propre de $A = P(B) = B^3$.

ii. *Déterminons les valeurs propres de B et leur multiplicité.*
Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B (elles existent toujours dans (x^2+1)) et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs propres associés, alors ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$. Sachant que les valeurs propres de A sont 1,1 et -8, on a $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$ et $\lambda_3^3 = -8$. Ainsi les valeurs propres de B sont 1 de multiplicité 2 et -2 de multiplicité 1.

iii. *Ecrivons le polynôme caractéristique de B.*
Compte tenu de la question précédente, on a

$$P_B(X) = (1-X)^2(-2-X).$$

iv. *Déterminons B telle que $B^3 = A$.*
On a $P_B(X) = (1-X)^2(-2-X) = -X^3+3X-2$, or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_B(B) = 0$, c'est-à-dire $-B^3+3B-2I = 0$, par conséquent

$$A = B^3 = 3B-2I.$$

Ainsi, $B = 1/3(A+2I)$, d'où,

$$B = 1/3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3051 ▲

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 3052 ▲

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -5 & 12 & 12 \\ -3 & 9-\sqrt{57} & 9+\sqrt{57} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3-\sqrt{57}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3+\sqrt{57}}{2} \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} -7 & 5+3\sqrt{5} & 5-3\sqrt{5} \\ 11 & -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 2 & 5+5\sqrt{5} & 5-5\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

(e) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(f) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(h) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $P=\begin{pmatrix}-4&-1&-2\\-3&-1&-1\\4&2&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(j) $P=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 3053 ▲

(a) $P=\begin{pmatrix}-1&-1&1&-1\\-1&1&3&3\\1&1&3&-3\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$

(b) $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$

(c) $P=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$

(d) $P=\begin{pmatrix}1&0&30&18\\0&0&15&-99\\0&0&21&99\\0&1&-11&11\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-5&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-16\end{pmatrix}$

(e) $P=\begin{pmatrix}1&0&7&-8\\3&1&12&9\\0&0&1&0\\0&0&1&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

(f) 1 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

(g) 0 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

(h) 0 est vp double, $\mathrm{rg}A=2$. Autres vp : $\frac{-3\pm3\sqrt{13}}{2}$, diagonalisable.

Correction de l'exercice 3054 ▲

n pair : $P=\begin{pmatrix}1&&&&&1\\&\ddots&&&\dots&\\&&1&1&&\\&&1&-1&&\\&\dots&&&\ddots&\\1&&&&&-1\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$.

n impair : $P=\begin{pmatrix}1&&&&&&1\\&\ddots&&&&\dots&\\&&1&&1&&\\&&&1&&&\\&&1&&-1&&\\&\dots&&&&\ddots&\\1&&&&&&-1\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$.

Correction de l'exercice 3055 ▲

$P=\left(\omega^{(i-1)(1-j)}\right)$, $D=\mathrm{diag}(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$ avec $\omega=\exp(2i\pi/n)$.

Correction de l'exercice 3056 ▲

$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{diag}\,(a+b+c+e,a-b-c+e,-a+b-c+e,-a-b+c+e)$.

Correction de l'exercice 3058 ▲

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & (0) \\ & 2 & 2 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ & & & \ddots & n \\ (0) & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3059 ▲

Oui ssi $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Correction de l'exercice 3060 ▲

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ et de plus, si a est le coefficient de X^{2n} dans P, le coefficient de X^{2n+1} dans $f(P)$ est $2na - 2na = 0$. Donc $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La linéarité de f étant claire, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
Cherchons maintenant P polynôme non nul et λ réel tels que $f(P) = \lambda P$ ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX+\lambda}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+\lambda}{X-1} - \frac{-2n+\lambda}{X+1}\right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de $\frac{P'}{P}$ (à savoir si $P = K(X-z_1)^{\alpha_1}\dots(X-z_k)^{\alpha_k}$ avec $K \neq 0$ et les z_i deux à deux distincts, alors $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{X-z_i}$), on voit que nécessairement P ne peut admettre pour racines dans $\mathbb{C}$ que -1 et 1 et d'autre part que P est de degré $\frac{1}{2}(2n+\lambda+2n-\lambda) = 2n$. P est donc nécessairement de la forme

$$P = aP_k \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } P_k = (X-1)^k(X+1)^{2n-k} \text{ avec } k \in [\![0,2n]\!].$$

Réciproquement, chaque P_k est non nul et vérifie

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{k}{X-1} + \frac{2n-k}{X+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+(2k-2n)}{X-1} + \frac{2n-(2k-2n)}{X+1}\right).$$

Donc, pour chaque $k \in [\![0,2n]\!]$, P_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k = 2(k-n)$.
Ainsi, f admet $2n+1$ valeurs propres, nécessairement simples car $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X] = 2n+1)$. f est donc diagonalisable et les sous espaces propres de f sont les droites $\mathrm{Vect}(P_k)$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

Correction de l'exercice 3061 ▲

$\det M = \det\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ $(\forall k \in [\![1,n]\!],\ L_k \leftarrow L_k - L_{n+k})$ et donc $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$.

$$\boxed{\det M = (-3)^n(\det A)^2.}$$

L'idée de l'étude de M qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une diagonalisation rapide amène à $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit alors P la matrice de format $2n$ définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ puis que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A & -2A \\ 3A & 6A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

On pose $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Puisque les matrices M et N sont semblables, M et N ont même polynôme caractéristique et de plus M est diagonalisable si et seulement si N l'est.

Cherchons les vecteurs propres Z de N sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes de format n. Sois $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$NZ=\lambda Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -AX=\lambda X \text{ et } 3AY=\lambda Y.$$

Par suite

$$Z \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \Leftrightarrow (X\neq 0 \text{ ou } Y\neq 0) \text{ et } (X\in \text{Ker}(A+\lambda I) \text{ et } Y\in \text{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Une discussion suivant λ s'en suit :

1er cas. Si $-\lambda$ et $\frac{\lambda}{3}$ ne sont pas valeurs propres de A alors λ n'est pas valeur propre de M.

2ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ n'y est pas, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$ où X décrit $\text{Ker}(A+\lambda I)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\text{Ker}(A+\lambda I)$.

3ème cas. Si $-\lambda$ n'est pas dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ y est, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$ où Y décrit $\text{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim\left(\text{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

4ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ aussi, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2X+2Y \\ X+Y \end{pmatrix}$ où X décrit $\text{Ker}(A+\lambda I)$ et Y décrit $\text{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\text{Ker}(A+\lambda I))+\dim\left(\text{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

Dans tous les cas, $\dim(E_\lambda(M))=\dim(E_{-\lambda}(A))+\dim(E_{\lambda/3}(A))$ (et en particulier $\dim(\text{Ker}M)=2\dim(\text{Ker}A)$). Comme les applications $\lambda\mapsto -\lambda$ et $\lambda\mapsto\frac{\lambda}{3}$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ sur lui-même,

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_\lambda(A))=n \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_\lambda(A))+\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_\lambda(A))=2n \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_{-\lambda}(A))+\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_{\lambda/3}(A))=2n \\ &\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3062 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)=e_{n+1-i}$ et donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f^2(e_i)=e_i$. Donc f est une symétrie distincte de l'identité et en particulier Sp$A=\{-1,1\}$ et f est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3063 ▲

A est de format 2 et donc, soit a deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit a une valeur propre double λ non nulle car Tr$A=2\lambda\neq 0$.

Dans ce dernier cas, A^2 est diagonalisable et est donc est semblable à $\text{diag}(\lambda^2,\lambda^2)=\lambda^2 I$. Par suite, $A^2=\lambda^2 I$. Ainsi, A annule le polynôme $X^2-\lambda^2=(X-\lambda)(X+\lambda)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Dans ce cas aussi, A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3064 ▲

Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant f.

Le polynôme $P=X(X-\lambda)(X-\mu)=X^3-(\lambda+\mu)X^2+\lambda\mu X$ est annulateur de f. En effet,

$$\begin{aligned} P(f)=f^3-(\lambda+\mu)f^2+\lambda\mu f&=(\lambda^3-(\lambda+\mu)\lambda^2+(\lambda\mu)\lambda)u+(\mu^3-(\lambda+\mu)\mu^2+(\lambda\mu)\mu)v \\ &=P(\lambda)u+P(\mu)v=0. \end{aligned}$$

• Si λ et μ sont distincts et non nuls, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f et donc f est diagonalisable.

• Si $\lambda=\mu=0$, alors $f=0$ et donc f est diagonalisable.

• Si par exemple $\lambda\neq 0$ et $\mu=0$, $f^2=\lambda^2 u=\lambda f$ et et le polynôme $P=X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f. Dans ce cas aussi f est diagonalisable.

• Enfin si $\lambda=\mu\neq 0$, $f^2=\lambda^2(u+v)=\lambda f$ et de nouveau $P=X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f.

Dans tous les cas, f est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3065 ▲

(Si les a_k sont réels, la matrice A est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice A est diagonalisable.)
Si tous les a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont nuls la matrice A est diagonalisable car diagonale.
On suppose dorénavant que l'un au moins des a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, est non nul. Dans ce cas, $\text{rg}A = 2$.
0 est valeur propre d'ordre $n-2$ au moins. Soient λ et μ les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda+\mu = \text{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2+\mu^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

λ et μ sont solutions du système $\begin{cases} \lambda+\mu = a_n \\ \lambda^2+\mu^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 \end{cases}$ qui équivaut au système $\begin{cases} \lambda+\mu = a_n \\ \lambda^2+\mu^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \end{cases}$ (S).
On a alors les situations suivantes :
• Si λ et μ sont distincts et non nuls, A est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
• Si λ ou μ est nul, A n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de $n-2$, la dimension du noyau de A.
• Si $\lambda = \mu \neq 0$, A est diagonalisable si et seulement si $\text{rg}(A-\lambda I) = n-2$ mais on peut noter que si λ n'est pas nul, on a toujours $\text{rg}(A-\lambda I) = n-1$ en considérant la matrice extraite formée des n-1 premières lignes et colonnes.
En résumé, la matrice A est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.
Mais λ et μ sont solutions du système (S) si et seulement si λ et μ sont les racines de l'équation (E) : $X^2 - a_nX - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$. Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

Correction de l'exercice 3067 ▲

3. $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3068 ▲

(a) 1 si $C \neq 0$, 0 si $C = 0$.
(b) $\dim(E_0) \geq n-1 \Rightarrow X^{n-1}$ divise $\chi_M \Rightarrow \chi_M = (-1)^n(X^n - (a_1^2+\cdots+a_n^2)X^{n-1})$.
(c) Oui.

Correction de l'exercice 3069 ▲

$\text{rg}A = 1$ donc $\dim \text{Ker}A = n-1$ et 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$. La somme des valeurs propres est $\text{tr}A = n$ donc la drenière valeur propre est n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Donc A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3070 ▲

(a) La fonction $f_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{x^n}$ croît strictement de $-\infty$ à 1 quand x varie de 0 à $+\infty$.
(b) $\chi_A(x) = (-1)^n\left(x^n - \sum_{k=1}^{n} kx^{n-k}\right)$.

Correction de l'exercice 3071 ▲

Soit $M = (x_iy_j)$: M est de rang inférieur ou égal à 1, donc 0 est valeur propre de M d'ordre au moins $n-1$. Comme $\text{tr}(M) = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$, le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(x) = (-x)^{n-1}(x_1y_1+\cdots+x_ny_n-x)$, et le déterminant demandé est $\Delta_n = \chi_M(-1) = x_1y_1+\cdots+x_ny_n+1$.

Correction de l'exercice 3072 ▲

(a) $\det(M+(t))$ est une fonction affine de t.
(b) $|\lambda+a| = k|\lambda+b|$ et $\lambda = x+iy \Rightarrow (1-k^2)(x^2+y^2)+\cdots = 0$, équation d'un cercle si $|a| \neq |b|$.

Correction de l'exercice 3073 ▲

(a) $a_1\dots a_n + b_1 a_2\dots a_n + a_1 b_2 a_3\dots a_n + \dots + a_1\dots a_{n-1}b_n$.

(b)

(c) $\frac{\chi_A(t)}{\prod_{i=1}^n (a_i-t)} = 1+\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i-t}$ change de signe entre deux a_i successifs et dans l'un des intervalles $]-\infty,a_1[$ ou $]a_n,+\infty[$ donc χ_A admet n racines distinctes.

(d) Oui. Supposons par exemple $a_1=\dots=a_p<a_{p+1}<\dots<a_n$: La question précédente met en évidence $n-p$ racines simples de χ_A entre les a_i et $\pm\infty$, et a_1 est aussi racine d'ordre $p-1$ de χ_A. Or les p premières lignes de $A-a_1I$ sont égales donc $\mathrm{rg}(A-a_1I)\leq n-p+1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A-a_1I))\geq p-1$ d'où la diagonalisabilité. Le cas où il y a plusieurs groupes de a_i égaux se traite de même.

Correction de l'exercice 3074 ▲

$\chi_B(X)=\frac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A(1/X), \quad \chi_C(X^2)=\chi_A(X)\chi_A(-X)$.

Correction de l'exercice 3077 ▲

$(a)\Leftrightarrow(b)$: thm du rang.
$(c)\Leftrightarrow(d)$: immédiat.
$(c)\Rightarrow(b)$: si $AX=XB$ alors pour tout polynôme P on a $P(A)X=XP(B)$.
$\overline{(c)}\Rightarrow\overline{(b)}$: prendre U vecteur propre de A, V vecteur propre de ${}^tB$ associés à la même valeur propre et $X=U^tV$.

Correction de l'exercice 3080 ▲

Somme des valeurs propres $=n$.

Correction de l'exercice 3082 ▲

Soit $K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il faut en fait prouver que pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(K)$ on a $\mathrm{tr}(A^p)=\mathrm{tr}(A)$. Remarquer qu'on n'a pas forcément $A^p=A$ dans $\mathscr{M}_n(K)$, c'est faux, entre autres, si A est nilpotente d'indice 2. Soit X une indéterminée sur K. On a dans l'anneau $\mathscr{M}_n(K[X])$: $(A-XI_n)^p=A^p-X^pI_n$, d'où, en prenant les déterminants : $\chi_{A^p}(X^p)=\chi_A(X)^p=\chi_A(X^p)$ et on égale les coefficients de $X^{(n-1)p}$.

Correction de l'exercice 3083 ▲

Si $p=q$, le résultat est connu : $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Supposons par exemple $p<q$. On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient $A'=\begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q}\end{pmatrix}$ et $B'=\begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p}\end{pmatrix}$. A' et B' sont des matrices carrées de format q et $A'B'$ et $B'A'$ ont même polynôme caractéristique. Un calcul par blocs donne $B'A'=BA$ et $A'B'=\begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p}\end{pmatrix}$. Donc $\chi_{BA}=(-X)^{q-p}\chi_{AB}$ ou encore, avec une écriture plus symétrique, $(-X)^p\chi_{BA}=(-X)^q\chi_{AB}$ ce qui vrai dans tous les cas.

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}),\ (-X)^p\chi_{BA}=(-X)^q\chi_{AB}.}$$

Correction de l'exercice 3084 ▲

Si u est inversible,

$$\det(u+v)=\det u\Leftrightarrow \det u\times\det(Id+u^{-1}v)=\det u\Leftrightarrow\det(Id+u^{-1}v)=1.$$

u et v commutent et donc u^{-1} et v également car $uv=vu\Rightarrow u^{-1}uvu^{-1}=u^{-1}vuu^{-1}\Rightarrow vu^{-1}=u^{-1}v$. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w=u^{-1}v$ l'est également car $(u^{-1}v)^p=u^{-p}v^p$).
Il reste donc à calculer $\det(Id+w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(Id+w)=\chi_w(-1)$. Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w=(-X)^n$ puis

$$\det(Id+w)=\chi_w(-1)=(-(-1))^n=1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible. Si u n'est pas inversible, $u+xId$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v. Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u+xId+v)=\det(u+xId)$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u+v)=\det u$.

Correction de l'exercice 3085 ▲

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA=-A$. Dans ce cas

$$\chi_A = \det(A - XI) = \det({}^t(A - XI)) = \det(-A - XI) = (-1)^n \det(A + XI) = (-1)^n \chi_A(-X)$$

Ainsi, χ_A a la parité de n.

Correction de l'exercice 3086 ▲

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A. On a donc $\chi_A = (\lambda_1 - X)\dots(\lambda_n - X)$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(B) \text{ inversible} &\Leftrightarrow (B - \lambda_1 I)...(B - \lambda_n I) \text{ inversible} \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ B - \lambda_k I \text{ inversible (car } \det((B - \lambda_1 I)...(B - \lambda_n I)) = \det(B - \lambda_1 I) \times ... \times \det(B - \lambda_n I)) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \text{ n'est pas valeur propre de } B \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}B = \varnothing.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3087 ▲

Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + V\chi_f = 1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f) = 0$, on obtient $P(f) \circ U(f) = U(f) \circ P(f) = Id$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E.

Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans $\mathbb{C}$. Soit A est la matrice de f dans une base donnée (si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$ l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A) = (A - \lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q. La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A)) = \det(A - \lambda I)\det Q(A) = 0$).

Correction de l'exercice 3102 ▲

(a) Valeurs propres : $1, j, j^2$. sev stables : $\{\vec{0}\}$, $\mathrm{vect}\{\vec{e}_3\}$, $\mathrm{vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\mathbb{R}^3$.

(b) $$\left.\begin{array}{l} AB = BA \quad \Rightarrow \phi_B(\vec{e}_3) = \lambda \vec{e}_3 \\ {}^tA{}^tB = {}^tB{}^tA \Rightarrow \phi_{{}^tB}(\vec{e}_3) = \lambda \vec{e}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a+\mu & a & 0 \\ -3a & -2a+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3104 ▲

Soit $\varphi(x, y, z) = x + 2y + 3z$. f conserve la surface de niveau $\varphi = 1$ donc par linéarité $f \circ \varphi = \varphi$ et φ est vecteur propre de ${}^tf$.

Correction de l'exercice 3107 ▲

Si χ_u est irréductible, pour $x \neq 0$ le polynôme minimal de x en u est égal à χ_u donc le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E et il n'y a pas de sous-espace stable non trivial.

Si seuls $\{0\}$ et E sont stables, soit $x \neq 0$. Le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E donc l'annulateur minimal de u en x est égal à χ_u. Soit P un diviseur non trivial de χ_u et $y = P(u)(x)$: l'annulateur minimal de u en y est χ_u/P, absurde.

Correction de l'exercice 3108 ▲

Soit F un hyperplan de E, $<e>$ un supplémentaire stable et H un supplémentaire de $<e>$ stable. Si K est un sev de H, alors K admet un supplémentaire K' dans E stable et $H \cap K'$ est un sev de H stable, en somme directe avec K. $K' \not\subset H$ car $K \subset H$ et $K \oplus K' = E$ donc $K' + H = E$ et $\dim(H \cap K') = \dim(H) + \dim(K') - \dim(E) = \dim(H) - \dim(K)$ soit $K \oplus (H \cap K') = H$. $f_{|H}$ vérifie la même propriété que f et on obtient par récurrence que f est diagonalisable.

Réciproquement, soit f diagonalisable, F un sev de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre pour f. On montre que F admet un supplémentaire stable par récurrence sur $\mathrm{codim}(F)$: si $F = E$ alors $\{0\}$ convient et si $F \neq E$ alors il existe i tel que $e_i \notin F$ d'où $F \oplus <e_i>$ est un sur-espace strict de F, admettant un supplémentaire G stable, d'où $G \oplus <e_i>$ est supplémentaire de F stable.

Correction de l'exercice 3109 ▲

$\mathrm{Spec}(f) = \{0, 1, 2\}$ donc f est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Comme la restriction d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, les sous-espaces stables par f sont les huit sous-sommes de $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.

Correction de **l'exercice 3110 ▲**

(a) $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-2X)-(2-X)+(2-X) = -X(X-1)(X-2)$.

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables. Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \text{Vect}(e1)$ où $e_1 = (1,-1,0)$, $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1,-1,-1)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0,1,1)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. La restriction de f à P est un endomorphisme de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ divise celui de f. $f_{/P}$ est diagonalisable car f l'est car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annulant f et donc $f_{/P}$. On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de $f_{/P}$ qui sont encore vecteurs propres de f. On obtient trois plans stables : $P_1 = \text{Vect}(e_2,e_3)$, $P_2 = \text{Vect}(e_1,e_3)$ et $P_3 = \text{Vect}(e_1,e_2)$.

(b) $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-5X+4)-(-2X+2)+(X-1) = (1-X)((X-2)(X-4)-2-1) = (1-X)(X^2+6X-5) = -(X-1)^2(X-5)$. Puis E_1 est le plan d'équation $x+2y+z=0$ et $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$.

On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1. Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x,y,-x-2y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. f est diagonalisable et donc $f_{/P}$ est un endomorphisme diagonalisable de P. Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f. On retrouve le plan propre de f d'équation $x+2y+z=0$ et les plans engendrés par $(1,1,1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x+2y+z=0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a-3b)x+(2a+2b)y+(b-a)z=0$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

(c) $\chi_A = \begin{vmatrix} 6-X & -6 & 5 \\ -4 & -1-X & 10 \\ 7 & -6 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2-3X+56)+4(6X+6)+7(5X-55) = -X^3+9X^2-15X-25 = -(X+1)(X^2-10X+25) = -(X+1)(X-5)^2$.

$E_{-1} = \text{Vect}(10,15,4)$ et $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ est unitaire et divise celui de f. Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X-1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$.

Dans le premier cas, $f_{/P}$ est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\text{Vect}((10,15,4)) + \text{Vect}((1,1,1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x-6y-5z=0$.

Dans le deuxième cas, $\chi_{f_{/P}} = (X-5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de $f_{/P}$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $(f_{/P}-5Id)^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\text{Ker}(f-5Id)^2$. $\text{Ker}(f-5Id)^2$ est le plan d'équation $x=z$ qui est bien sûr stable par f car $(f-5Id)^2$ commute avec f.

Correction de **l'exercice 3111 ▲**

F est stable par f et donc $f_{/F}$ est un endomorphisme de F. f est diagonalisable et donc il existe un polynôme P, scindé à racines simples, tel que $P(f)=0$. Mais alors $P(f_{/F})=0$ et on a trouvé un polynôme scindé à racines simples annulateur de $f_{/F}$. Donc $f_{/F}$ est diagonalisable.

Correction de **l'exercice 3118 ▲**

(a) 1 est valeur propre double, $d_1 = 1$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) $X=\begin{pmatrix}(6\alpha t+\gamma)e^t+2\beta\\(6\alpha t+\gamma+3\alpha)e^t+\beta\\(6\alpha t+\gamma-\alpha)e^t+2\beta\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3121 ▲

0 est valeur propre, se placer dans un hyperplan stable et récurer.

Correction de l'exercice 3122 ▲

Non. Prendre $\operatorname{mat}(u_n)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1/n\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3123 ▲

Trigonaliser fortement M.

Correction de l'exercice 3124 ▲

Montrons le résultat par récurrence sur $n=\dim E\geqslant 1$.

• Si $n=1$, c'est clair.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension n qui commutent soient simultanément trigonalisables.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ tels que $fg=gf$.

f et g ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, f admet au moins une valeur propre λ. Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ. g commute avec f et donc laisse stable E_λ. La restriction de g à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g.

Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de f et g. Soit x un vecteur propre commun à f et g. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B}=(x,\dots)$ de E. Dans la base $\mathscr{B}$, les matrices M et N de f et g s'écrivent respectivement $M=\begin{pmatrix}\lambda&\times\\0&M_1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}\mu&\times\\0&N_1\end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de format n. Un calcul par blocs montre que M_1 et N_1 commutent ou encore si f_1 et g_1 sont les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices M_1 et N_1 dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, f_1 et g_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, f_1 et g_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible de format n P_1 et deux matrices triangulaires supérieures de format n T_1 et T_1' telles que $P_1^{-1}M_1P_1=T_1$ et $P_1^{-1}N_1P_1=T_1'$.

Soit $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&P_1\end{pmatrix}$. P est inversible de format $n+1$ car $\det P=\det P_1\neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires supérieures.

P est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de f et g.

Correction de l'exercice 3132 ▲

On considère la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A.*

On a

$$\begin{aligned}P_A(X)&=\begin{vmatrix}1-X&-1&0\\1&-X&-1\\-1&0&2-X\end{vmatrix}\\&=(1-X)\begin{vmatrix}-X&-1\\0&2-X\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2-X\end{vmatrix}\\&=(1-X)(X^2-2X)+(1-X)\\&=(1-X)(X^2-2X+1)=(1-X)^3.\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre triple $\lambda=1$.

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_1 = \ker(A - I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} x - y = x \\ x - z = y \\ -x + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,1)$.
Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$, est le sous-espace $N_1 = \ker(A - I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A - I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_1 = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_2 + e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A - I)$, et $\ker(A - I)$ est la droite d'équations :
$\{y = 0, x = z\}$. On détermine $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 + e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = 1 + x \\ x - z = y \\ -x + 2z = 1 + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (-1,-1,0)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 + e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = x - 1 \\ x - z = y - 1 \\ -x + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,1,0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) *Décomposition de Dunford de B*

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à I. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D + N$ et $DN = ND$. Or si

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D + N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

Correction de l'exercice 3133 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A.* (1 point)

On a

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = -1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.* (2 points)
Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le sous-espace vectoriel E_{-1} défini par

$$E_{-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = -u\}.$$

Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ -x+4y-z=0 \\ -2x-y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ x-4y+z=0 \end{cases}$$

L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par

$$\vec{u}_1 = (1,0,-1).$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel E_2 défini par

$$E_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2u\}.$$

Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -2x-y-5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

L'espace E_2 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par

$$\vec{u}_2 = (2,1,-1).$$

Le sous-espace E_2 étant de dimension 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.
Le sous-espace caractéristique N_{-1} associé à la valeur propre -1 est égal au sous-espace propre E_{-1}. Le sous-espace caractéristique N_2 associé à la valeur propre 2 est égal à

$$N_2 = \ker(A-2I)^2.$$

Déterminons-le

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

D'où $\ker(A-2I)^2 = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3,\ x+2z=0\}$, c'est le plan vectoriel d'équation $x+2z=0$.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est* (1 point)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, vecteurs propres associés aux valeurs propres -1 et 2 conviennent pour les deux premiers vecteurs de la base recherchée, on va alors chercher un vecteur $\vec{u}_3 \in \ker(A-2I)^2$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, notons $\vec{u}_3 = (-2z,y,z)$, on détermine y et z tels que

$$\begin{pmatrix} 2y-2z \\ 3y+z \\ -y+z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

on obtient $y+z=1$, le vecteur $\vec{u}_3 = (0,1,0)$ convient.

Trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. (1 point)
La matrice de passage P qui exprime la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ répond à la question,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.* (1 point)
On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N},$$

la matrice D est diagonale, la matrice N est nilpotente, $N^2 = 0$, et $ND = DN$, c'est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

(e) *Calculons* $\exp B$. (1 point)
Compte tenu de la question précédente, on a $B = N + D$, avec $DN = ND$, ainsi $\exp B = \exp D \exp N$, or

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ et } \exp N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp B = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3136 ▲

On se ramène à $\lambda = 0$ en remplaçant f par $f - \lambda \mathrm{id}$. $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 1 stable par f donc $f_{|\mathrm{Im}\, f}$ est une homothétie, c'est l'application nulle vu $\mathrm{Spec}(f)$. On en déduit $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker} f$. Soit $e_2 \in \mathrm{Im}\, f \setminus \{0\}$, e_3 un antécédent de e_2 par f et $e_1 \in \mathrm{Ker} f$ indépendant de e_2. Alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Correction de l'exercice 3137 ▲

Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{\alpha_k}$ où λ_1,..., λ_p sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Soit $E'_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k, $1 \leqslant k \leqslant p$. D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E'_1 \oplus ... \oplus E'_p$. De plus, si f_k est la restriction de f à E'_k alors f_k est un endomorphisme de E'_k (car f et $(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ commutent).
On note que $(f_k - \lambda_k)^{\alpha_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.
Existence de d et n. On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k. Puis on définit n par $n = f - d$.
d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = E'_1 \oplus ... \oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d. De plus, $f = d + n$.
Soit n_k la restriction de n à E'_k. On a $n_k = f_k - \lambda_k Id_{E'_k}$ et par définition de E'_k, $n_k^{\alpha_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha = \mathrm{Max}\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}$, on a $n_k^{\alpha} = 0$ pour tout k de $\{1, ..., p\}$ et donc $n^{\alpha} = 0$. Ainsi, n est nilpotent. Enfin, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$.
Unicité de d et n. Supposons que $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$.
d commute avec n et donc avec f car $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$. Mais alors, $n = f - d$ commute également avec f. d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$ de f. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note d_k et n_k les restrictions de d et n à E'_k.
Soient $k \in [\![1, p]\!]$ puis μ une valeur propre de d_k. D'après l'exercice 3084,

$$\det(f_k - \mu Id) = \det(d_k - \mu Id + n) = \det(d_k - \mu Id) = 0,$$

car $d_k - \mu Id$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k - \mu Id$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k. Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k, on a donc $\mu = \lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable (voir l'exercice 3111), on a nécessairement $d_k = \lambda_k Id_{E'_k}$ puis $n_k = f_k - \lambda_k Id_{E'_k}$. Ceci montre l'unicité de d et n.

Correction de l'exercice 3145 ▲

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $\chi_A = (2 - X)(\omega - X)(\bar{\omega} - X)$ donc A est diagonalisable sur $(x^2 + 1)$.

$\ker(A-2I) = (x^2+1)$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(A-\omega I) \Leftrightarrow \begin{cases}(1-\omega)x+y=0\\(1-\omega)y+z=0\\(1-\omega)z+x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=(\omega-1)x\\z=(\omega-1)^2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\omega^2x\\z=\omega^4x\end{cases}$ donc $\ker(A-\omega I) = (x^2+1)$

$\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega^4\end{pmatrix}$

On en déduit que $\ker(A-\bar{\omega}I) = (x^2+1)$

$\begin{pmatrix}1\\\bar{\omega}^2\\\bar{\omega}^4\end{pmatrix}$

Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\bar{\omega}^2\\1&\omega^4&\bar{\omega}^4\end{pmatrix}$ on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\bar{\omega}\end{pmatrix}$

On en déduit que les solutions sont les suites de la forme $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega^n&0\\0&0&\bar{\omega}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ soit : $\begin{cases}x_n= a+b\ \omega^n\ +c\ \bar{\omega}^n\\y_n= a+b\ \omega^{n+2}\ +c\ \bar{\omega}^{n+2}\\z_n= a+b\ \omega^{n+4}\ +c\ \bar{\omega}^{n+4}\end{cases}$ où a,b,c sont trois complexes.

En résolvant le système $\begin{cases}a+b+c&=2\\a+b\omega^2+c\bar{\omega}^2&=1\\a+b\omega^4+c\bar{\omega}^4&=1\end{cases}$ on obtient la solution particulière cherchée : c'est la solution associée à $a=4/3, b=c=1/3$.

$$\begin{cases}x_n = & 4/3 & + & 2/3\cos(n\pi/3)\\y_n = & 4/3 & + & 2/3\cos((n+2)\pi/3)\\z_n = & 4/3 & + & 2/3\cos((n+4)\pi/3)\end{cases}$$

Correction de l'exercice 3147 ▲

(a) $A^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)\mathrm{id}$. Ainsi $\det A * \det {}^tA = (\det A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ et donc $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

(b) Dans l'expression $\det A = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}...\alpha_{4\sigma(4)}$ où les coefficients de A sont notés α_{ij}, le seul terme en a^4 est obtenu pour $\sigma = \mathrm{id}$, soit $\varepsilon(\sigma) = +1$. On en déduit que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Pour obtenir le polynôme caractéristique de A, on remplace a par $a-X$ dans A, et on calcule le déterminant. On a donc $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$

(c) $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \chi_A(\lambda) > 0$ car $(b,c,d) \neq (0,0,0)$. Donc A n'a pas de valeur propre réelle, donc A n'est ni diagonalisable ni triangularisable sur $\mathbb{R}$.

(d) $A(i\sqrt{3},1,1,1) = (1-i\sqrt{3}(i\sqrt{3},1,1,1))$ et $A(-1,i\sqrt{3},-1,1) = (1-i\sqrt{3}(-1,i\sqrt{3},-1,1))$. Pour la seconde valeur propre, qui est le conjugué de $1-i\sqrt{3}$, on utilise les vecteurs conjugués. Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix}i\sqrt{3}&-1&-i\sqrt{3}&-1\\1&i\sqrt{3}&1&-i\sqrt{3}\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2\bar{\omega}&0&0&0\\0&2\bar{\omega}&0&0\\0&0&2\omega&0\\0&0&0&2\omega\end{pmatrix} = D.$

(e) Soit $X_n = (u_n,v_n,w_n,h_n)$. On a $\forall n\in |||, X_{n+1} = AX_n$, d'où $\forall n\in |||, X_n = A^nX_0$. Or $A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0$. On en déduit que $X_n = \begin{pmatrix}2^n\bar{\omega}^ni\sqrt{3}&-2^n\bar{\omega}^n&-2^n\omega^ni\sqrt{3}&-2^n\omega^n\\2^n\bar{\omega}^n&2^n\bar{\omega}^ni\sqrt{3}&2^n\omega^n&-2^n\omega^ni\sqrt{3}\\2^n\bar{\omega}^n&-2^n\bar{\omega}^n&2^n\omega^n&-2^n\omega^n\\2^n\bar{\omega}^n&2^n\bar{\omega}^n&2^n\omega^n&2^n\omega^n\end{pmatrix}$. Posons $Y_0 = P^{-1}X_0$. En résolvant le système $PX_0 = Y_0$, on obtient $Y_0 = (1/2i\sqrt{3},0,-1/2i\sqrt{3},0)$, et finalement :

$$X_n = 1/2i\sqrt{3}\begin{pmatrix}2^n(\bar{\omega}^n+\omega^n)i\sqrt{3}\\2^n(\bar{\omega}^n-\omega^n)\\2^n(\bar{\omega}^n-\omega^n)\\2^n(\bar{\omega}^n-\omega^n)\end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3164 ▲

La suite de Fibonacci $0,1,1,2,3,5,8,13,\dots$ *est la suite* $(F_n)_{n\geq 0}$ *définie par la relation de récurrence* $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ *pour* $n\geq 1$, *avec* $F_0 = 0$ *et* $F_1 = 1$.

(a) *Déterminons une matrice* $A\in M_2(\mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $n\geq 1$,

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}.$$

On a $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Notons, pour $n \geq 1$, X_n le vecteur $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous allons démontrer, par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$, on a $X_n = A^n X_0$, c'est clairement vrai pour $n = 1$, supposons que ce soit vrai pour un n arbitrairement fixé, on a alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

d'où le résultat.

(b) *Montrons que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.*

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1.$$

Le discriminant $\Delta = 5 > 0$, le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(c) *Trouvons des vecteurs propres ε_1 et ε_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Posons $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et calculons α tel que $A\varepsilon_1 = \lambda_1 \varepsilon_1$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 1 = \lambda_1 \alpha \\ \alpha = \lambda_1 \end{cases} \iff \alpha = \lambda_1$$

car $\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$, on a donc $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, de même, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) *Déterminons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on les note x_1 et x_2.*

On cherche x_1 et x_2 tels que

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 = x_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

x_1 et x_2 sont donc solutions du système

$$\begin{cases} x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ x_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(e) *Montrons que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$.*

Les vecteurs ε_1 et ε_2 étant vecteurs propres de A, on a $A\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$ et $A\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$, ainsi par récurrence, on a, pour tout $n \geq 1$, $A^n\varepsilon_1 = \lambda_1^n\varepsilon_1$ et $A^n\varepsilon_2 = \lambda_2^n\varepsilon_2$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2) = x_1A^n\varepsilon_1 + x_2A^n\varepsilon_2 = \lambda_1^n x_1\varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2\varepsilon_2.$$

On en déduit que

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

On a montré que $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a donc,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \left(\frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

(f) *Donnons un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
On remarque que $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ ainsi, lorsque n tend vers l'infini, λ_1^n tend vers 0 et λ_2^n tend vers $+\infty$. On a donc
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{F_n}{\lambda_2^n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n}+1 = 1.$$
Ce qui prouve que $\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}$ est un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 3165 ▲

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A.*
Le polynôme caractéristique de A est le polynôme
$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} &= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(X^2-X+1)-1 \\ &= -X^3+3X^2-3X+1 = (1-X)^3 \end{aligned}$$

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$, comme $A \neq I$, elle n'est pas diagonalisable. Son sous-espace caractéristique est égal à $\ker(A-I_3)^3 = \mathbb{R}^3$. En effet, d'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire $(A-I_3)^3 = 0$. Son sous-espace propre est égal à $\ker(A-I_3)$.
$$\ker(A-I_3) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / A\vec{u} = \vec{u}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z = -y\}.$$
C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}_1 = (1,-1,1)$.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Le vecteur $\vec{u}_1$ vérifie $A\vec{u}_1 = u_1$, on cherche un vecteur $\vec{u}_2 = (x,y,z)$ tel que $A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
$$\begin{aligned} A\vec{u}_2 = \vec{u}_1+\vec{u}_2 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$
On obtient donc $z-x = z+y = -1$, le vecteur $\vec{u}_2 = (1,-1,0)$ convient. On cherche alors un vecteur $\vec{u}_3 = (x,y,z)$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.
$$A\vec{u}_3 = \vec{u}_2+\vec{u}_3 \iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix}$$
on obtient alors $x+y = x-z = 1$. Le vecteur $\vec{u}_3 = (1,0,0)$ convient. Ainsi, dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ la matrice de f est égale à B. La matrice P cherchée est
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
on a bien $A = PBP^{-1}$ et $B = P^{-1}AP$.

(d) *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*
On a
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N$$

Si $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ alors $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^3=0$. La matrice I_3 est diagonale, la matrice N est nilpotente, les matrices I_3 et N commutent, c'est donc bien la décomposition de Dunford de B.

(e) *Pour $t\in\mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$.
On a, pour $t\in\mathbb{R}$, $tB=tI_3+tN$, ainsi $\exp tB=\exp(tI_3+tN)=(\exp tI_3)(\exp tN)$ car les matrices tI_3 et tN commutent. Par ailleurs, $\exp tI_3=e^tI_3$ et $\exp tN=I+tN+\frac{t^2}{2}N^2$. On a donc

$$\exp tB=e^t\begin{pmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(f) *Donnons les solutions des systèmes différentiels $Y'=BY$ et $X'=AX$.*
Intégrons le système $Y'=BY$, sa solution générale s'écrit

$$Y(t)=(\exp tB)Y_0,$$

où Y_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Intégrons alors le système $X'=AX$. Remarquons que si PY est solution de $X'=AX$, on a

$$(PY)'=A(PY)\iff PY'=APY\iff Y'=P^{-1}APY\iff Y'=BY$$

ainsi Y est solution de $Y'=BY$, la solution générale du système $X'=AX$ sécrit donc

$$\begin{aligned}X(t)=P(\exp tB)Y_0&=e^t\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}Y_0\\&=e^t\begin{pmatrix}1&t+1&t^2/2+t+1\\-1&-t-1&-t^2/2-t\\1&t&t^2/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\end{aligned}$$

où $Y_0=(a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Ou encore

$$\begin{cases}x(t)=e^t(a+b(t+1)+c(t^2/2+t+1))\\y(t)=e^t(-a-b(t+1)-c(t^2/2+t))\\z(t)=e^t(a+bt+ct^2/2)\end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}e^t\\-e^t\\e^t\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}e^t(t+1)\\-e^t(t+1)\\te^t\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}e^t(t^2/2+t+1)\\-e^t(t^2/2+t)\\e^tt^2/2\end{pmatrix}$$

avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3166 ▲

(a) On note $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Donnons sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
La matrice A est diagonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $A\vec{e}_1=\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2=2\vec{e}_2$ et $A\vec{e}_3=3\vec{e}_3$. Les valeurs propres de A sont les réels 1, 2 et 3 et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles engendrées respectivement par $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

(b) On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B=A$.

i. *Montrons que si $A=\exp B$, alors $AB=BA$.*
On suppose qu'il existe B telle que $A=\exp B$. On a alors, par définition,

$$A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}B^k,\text{ d'où } AB=BA=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}B^{k+1}$$

ii. *On en déduit que la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B.*
On a $(BA)\vec{e}_1=B(A\vec{e}_1)=B\vec{e}_1$, mais $BA=AB$, on a donc $B\vec{e}_1=(AB)\vec{e}_1=A(B\vec{e}_1)$. Ce qui prouve que $B\vec{e}_1$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, il est donc colinéaire à $\vec{e}_1$, ainsi, $\vec{e}_1$ est bien un vecteur propre de B. De même, $BA\vec{e}_2=2B\vec{e}_2=AB\vec{e}_2$ donc $B\vec{e}_2$ est colinéaire à $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_2$ est un vecteur propre de B. Et aussi, $BA\vec{e}_3=3B\vec{e}_3=AB\vec{e}_3$ d'où $B\vec{e}_3$ colinéaire à $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_3$ vecteur propre de B.

iii. *Déterminons les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que* $\exp B = A$.
Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ étant vecteurs propres de B, la matrice B est diagonale dans la base canonique, il existe donc des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ ainsi } \exp B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui implique $e^{\lambda_1} = 1$, $e^{\lambda_2} = 2$ et $e^{\lambda_3} = 3$ et donc $\lambda_1 = \ln 1 = 0$, $\lambda_2 = \ln 2$ et $\lambda_3 = \ln 3$ d'où l'existence d'une unique matrice B telle que $\exp B = A$, c'est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix}$$

(c) Soit la matrice C,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.
Quelque soit la matrice D, la matrice $\exp D$ est inversible d'inverse $\exp(-D)$, or, il est clair que la matrice C n'est pas inversible, son déterminant est nul, ainsi, il n'existe pas de matrice D telle que $C = \exp D$.

(d) *Calculons le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C.*
Soit $P_C(X)$ le polynôme caractéristique de C, on a

$$P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3.$$

Le polynôme minimal Q_C de C est unitaire, divise son polynôme caractéristique P_C et s'annule en C, or $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, mais $C^3 = 0$, d'où $Q_C(X) = X^3$.

(e) Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C.

i. *Montrons que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.*
On a $Q_C(C) = Q_C(E^2) = 0$, ainsi le polynôme $S(X) = Q_C(X^2)$ s'annule en E, ce qui prouve que $Q_E(X)$, polynôme minimal de E, divise $Q_C(X^2)$.

ii. *On en déduit que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.*
Le polynôme minimal de E divise $Q_C(X^2) = -X^6$, or son degré est inférieur ou égal à 3, par ailleurs on suppose $E^2 = C$ donc $E^2 \neq 0$ ainsi, on a bien $Q_E(X) = X^3$ et $E^3 = 0$, or, $E^3 = 0$ implique $E^4 = 0$ et, comme $E^4 = C^2$, on a $C^2 = 0$.

iii. *On déduit de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.*
Si une telle matrice existe, alors on a vu qu'elle vérifie $E^3 = 0$, ainsi on a $E^4 = 0$, or $E^4 = C^2 \neq 0$, d'où la conclusion.

(f) Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. *Démontrons que pour tout $n \in |||^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.*
Soit $F = \exp G$ et $n \in |||^*$, posons $H = \exp \frac{1}{n} G$, on a

$$H^n = \left(\exp \frac{1}{n} G\right)^n = \exp \frac{n}{n} G = \exp G = F.$$

Correction de l'exercice 3167 ▲

(a) $A^{2k} = I, A^{2k+1} = A$.

Correction de l'exercice 3168 ▲

3. $\alpha_n = -\frac{1}{3} + \frac{2^n}{4} + \frac{(-2)^n}{12}$, $\beta_n = \frac{2^n - (-2)^n}{4}$, $\gamma_n = \frac{4}{3} - \frac{2^n}{2} + \frac{(-2)^n}{6}$.

Correction de l'exercice 3169 ▲

2. $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$.

$2u_n = (6-6.2^n+2.3^n)u_0 + (-5+8.2^n-3.3^n)u_1 + (1-2.2^n+3^n)u_2$.

Correction de l'exercice 3170 ▲

(a) Le polynôme minimal de f est de degré supérieur ou égal à n et n'a pas de diviseurs non triviaux. Donc $\dim E = 1$ et f est une homothétie si $K = (x^2+1)$. Si $K = \mathbb{R}$ on peut aussi avoir $\dim E = 2$ et f n'a pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 3171 ▲

(a) Diagonaliser ${}^tM \Rightarrow y_n - \frac{3}{2}x_n = \text{cste}$.

(b) $y_n - x_n = 2^n(y_0 - x_0)$ donc si $y_0 \neq x_0$ alors $M_n \to \infty$ sinon la suite est constante.

(c) $\frac{3}{2}$ si $y_0 \neq x_0$.

Correction de l'exercice 3173 ▲

2. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+b & b-a\\ b-a & a+b\end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{b}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ou l'inverse.

Correction de l'exercice 3174 ▲

$$M = \pm\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1/5 & \pm 2 & 0\\ 7/30 & \pm 1/3 & \pm 1\end{pmatrix} \text{ ou } M = \pm\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & \mp 2 & 0\\ 1/2 & \mp 1 & \pm 1\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3175 ▲

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\3&-4&4\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On prend $B = PMP^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3176 ▲

3 valeurs propres distinctes, M est diagonalisable et son commutant est l'ensemble des polynômes en M : $aI + bM + cM^2$, $a,b,c \in K$.

Correction de l'exercice 3177 ▲

(a) Par similitude on se ramène aux cas : $A = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathscr{M}_2((x^2+1)^)$ ou $A = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = (x^2+1)^[A]$ ou $A = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = (x^2+1)^[A]$.

(b) Si A est diagonalisable de valeurs propres λ_i avec les multiplicités n_i alors $\dim(C(A)) = \sum n_i^2 \geq n$.
Dans le cas général, soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A et $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ une suite de n-uplets de matrices commutant avec A_k telles que $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ est une famille orthonormale pour un produit scalaire quelconque choisi sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Par compacité il existe une sous-suite convergente, donc n matrices C_∞^i formant une famille orthonormale et commutant avec A d'où $\dim(C(A)) \geq n$.

Correction de l'exercice 3178 ▲

Soit $d_n(i,j)$ le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i au sommet j. j admet trois voisins k_1, k_2, k_3 et l'on a : $d_n(i,j) = d_{n-1}(i,k_1) + d_{n-1}(i,k_2) + d_{n-1}(i,k_3)$. On numérote les sommets de 0 à 7 de sorte que les voisins du sommet i sont les sommets $i+1 \bmod 8$, $i+2 \bmod 8$ et $i+4 \bmod 8$. Le vecteur $d_n = (d_n(0,0), \dots, d_n(0,7))$ vérifie la relation de récurrence $d_n = Ad_{n-1}$ où A est la matrice suivante (. désigne 0) :

$$A=\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} B+I_4 & 0 \\ 0 & B-I_4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec

$$B=\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$B\pm I_4=\begin{pmatrix} C\pm I_2 & I_2 \\ I_2 & C\pm I_2 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} C\pm I_2+I_2 & 0 \\ 0 & C\pm I_2-I_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

et enfin,

$$C\pm I_2\pm I_2=\begin{pmatrix} \pm I_1\pm I_1 & I_1 \\ I_1 & \pm I_1\pm I_1 \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} \pm I_1\pm I_1+I_1 & 0 \\ 0 & \pm I_1\pm I_1-I_1 \end{pmatrix}R^{-1}.$$

Donc A est diagonalisable de valeurs propres $-3,-1,1,3$ et on peut certainement terminer les calculs pour obtenir $d_n=A^n d_0$.

Correction de l'exercice 3179 ▲

1ère solution. $A=2J-I_3$ où $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $J^2=3J$ et plus généralement $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $J^k=3^{k-1}J$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque les matrices $2J$ et $-I$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n&=(2J-I)^n=(-I)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(2J)^k(-I)^{n-k}=(-1)^nI+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{k-1}(-1)^{n-k}\right)J \\ &=(-1)^nI+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}\right)J=(-1)^nI+\frac{1}{3}((6-1)^n-(-1)^n)J \\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n=0$.
Soit de nouveau $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &((-1)^nI+\frac{1}{3}(5^n-(-1)^n)J)\times((-1)^{-n}I+\frac{1}{3}(5^{-n}-(-1)^{-n})J) \\ &\qquad=I+\frac{1}{3}((-5)^n-1+(-5)^{-n}-1)J+\frac{1}{9}(1-(-5)^n-(-5)^{-n}+1)J^2 \\ &\qquad=I+\frac{1}{3}((-5)^n-1+(-5)^{-n}-1)J+\frac{3}{9}(1-(-5)^n-(-5)^{-n}+1)J=I, \end{aligned}$$

et donc

$$A^{-n}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{-n}+2(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} \\ 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}+2(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} \\ 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}+2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{Z},\ A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix}.}$$

2ème solution. Puisque $\mathrm{rg}(A+I)=1$, $\dim(\mathrm{Ker}(A+I))=2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda-1-1=3$ et donc $\lambda=5$. Par suite, $\chi_A=-(X+1)^2(X-5)$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in E_{-1}\Leftrightarrow x+y+z=0$ et donc $E_{-1}=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(-1,-1,5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1}. Soit (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{array}\right.$$

et donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec n entier relatif.

3ème solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n = \chi_A Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$. En prenant les valeurs des membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1 , on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} 25a_n + 5b_n + c_n = 5^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = 2a_n - n(-1)^n \\ 35a_n + c_n = 5n(-1)^n + 5^n \\ -a_n + c_n = -(n-1)(-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{36}(5^n + (6n-1)(-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{36}(5^n + (-30n+35)(-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{36}(2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n) \end{array}\right. .$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{36}\left((5^n + (6n-1)(-1)^n)A^2 + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)A + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)I\right) \\ &= \frac{1}{36}\left((5^n + (6n-1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &\left. + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

Correction de **l'exercice 3180 ▲**

Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc X et A commutent.

A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.

Ainsi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\-16&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$ puis $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\8&1&0\\-5/2&0&1\end{pmatrix}$. D'où les solutions

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\-16&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\varepsilon_1&0&0\\0&2\varepsilon&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&0\\8&1&0\\-5/2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\varepsilon_1&0&0\\-16\sqrt{3}\varepsilon_1&2\varepsilon_2&0\\5\sqrt{3}\varepsilon_1&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&0\\8&1&0\\-5/2&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\varepsilon_1&0&0\\-8\sqrt{3}\varepsilon_1+16\varepsilon_2&2\varepsilon_2&0\\5(\sqrt{3}\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{-1,1\}^3$.

Correction de l'exercice 3181 ▲

(a) $\chi_A=-(2+X)((3-X)(-1-X)+4)=-(X+2)(X^2-2X+1)=-(X+2)(X-1)^2$.
A diagonalisable $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-I))=2\Rightarrow \mathrm{rg}(A-I)=1$ ce qui n'est pas . Donc A n'est pas diagonalisable. De plus, $E_{-2}=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_1=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

(b) $(A-I)^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&8&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&8&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-36&-36&9\end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ est le plan d'équation $4x+4y-z=0$.

(c) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$\mathscr{M}_3(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(A+2I)\oplus\mathrm{Ker}(A-I)^2.$$

De plus, chacun des sous-espaces $\mathrm{Ker}(A+2I)$ et $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin, $\mathrm{Ker}(A-I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ et en choisissant une base de $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ dont l'un des deux vecteurs est dans $\mathrm{Ker}(A-I)$, la matrice de f aura la forme voulue.

On a déjà choisi $e_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $e_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$ puis on prend $e_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On note $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-2&-1\\1&-4&0\end{pmatrix}$.

P est inversible d'inverse $P^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-4&1\\-1&-1&0\\2&1&0\end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&\times\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Plus précisément

$$Ae_3-e_3=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&8&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}=e_2$$

et donc $Ae_3=e_2+e_3$ puis

$$\boxed{A=PTP^{-1}\text{ où }P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-2&-1\\1&-4&0\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-4&1\\-1&-1&0\\2&1&0\end{pmatrix}\text{ et }T=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

(d) Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $T=D+N$ où $D=\mathrm{diag}(-2,1,1)$ et $N=E_{2,3}$. On a $ND=DN$ et $N^2=0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$T^n=D^n+nD^{n-1}N=\mathrm{diag}((-2)^n,1,1)+n\mathrm{diag}((-2)^{n-1},1,1)E_{2,3}=\mathrm{diag}((-2)^n,1,1)+nE_{2,3}$$
$$=\begin{pmatrix}(-2)^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Puis

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 3182 ▲

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & -X \end{vmatrix}. \text{ Soit } f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & -X+x \end{vmatrix}.$$

f est un polynôme en x. Par n linéarité du déterminant, $f(x)$ est somme de 2^n déterminants dont $2^n-(n+1)$ sont nuls car contiennent deux colonnes de x. Les déterminants restant contiennent au plus une colonne de x et sont donc de degré inférieur ou égal à 1 en x. f est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres A et B tels que $\forall x \in \mathbb{C}$, $f(x) = Ax+B$. Les égalités $f(-a) = (-X-a)^n$ et $f(-b) = (-X-b)^n$ fournissent $\begin{cases} -aA+B = (-X-a)^n \\ -bA+B = (-X-b)^n \end{cases}$ et comme $a \neq b$, les formules de Cramer fournissent

$$\chi_A = f(0) = B = \frac{1}{b-a}(b(-X-a)^n - a(-X-b)^n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \mathrm{ch}_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda+a}{\lambda+b}\right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{\lambda+a}{\lambda+b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ, A le point du plan d'affixe $-a$ et B le point du plan d'affixe $-b$ puis $k = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}$. k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I = \mathrm{bar}(A(1), B(-k))$ et $J = \mathrm{bar}(A(1), B(k))$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I,J] \text{ (cercles d'Appolonius (de Perga))}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3183 ▲

(a) Les hypothèses fournissent $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de A.

(b) i. Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right) \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda||x_i| \leqslant \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

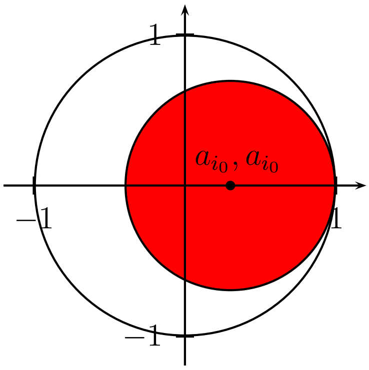
On choisit alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Puisque X est non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$. On obtient

$$|\lambda||x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

ii. Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}|x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = (1-a_{i_0,i_0})|x_{i_0}|$$

et donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A$, $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$ ce qui signifie que les valeurs propres de A appartiennent au disque de centre a_{i_0,i_0} et de rayon $1-a_{i_0,i_0}$. Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 en le point $(1,0)$.



Correction de l'exercice 3184 ▲

(a) $J^n = I$. J annule le polynôme $X^n - 1$ qui est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Vérifions que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J.
Soient $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{array}\right.$$

et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J. Les valeurs propres de J sont les n racines n-èmes de 1. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à ω^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, est la droite vectorielle $D_k = \mathrm{Vect}(U_k)$.
Soit P la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}$ puis $D = \mathrm{diag}(1,\omega,...,\omega^{n-1})$, alors on a déjà vu que $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$ (exercice 3085) et on a

$$\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{diag}(\omega^j)_{1\leqslant j\leqslant n},\ P = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.}$$

Remarque. La seule connaissance de D suffit pour le 2).

(b) Soit A la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{n-1}J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1}X^{n-1}.$$

D'après 1), $A = P \times Q(D) \times P^{-1}$ et donc A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega),...,Q(\omega^{n-1}))$. Par suite, A a même déterminant que la matrice $\mathrm{diag}(Q(1),Q(\omega),...,Q(\omega^{n-1}))$. D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n} a_j\right).}$$

Correction de l'exercice 3185 ▲

(a) Soit $\sigma \in S_n$.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1),1} \dots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$.

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n,\ \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).}$$

(b) i. Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si $k \neq \sigma'(j)$, le terme correspondant est nul et quand $k = \sigma'(j)$, le terme correspondant vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ qui est encore le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_{\sigma \circ \sigma'}$.

$$\boxed{\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.}$$

ii. Montrons que G est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. G contient $I_n = P_{Id}$ et d'autre part, G est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'après 1).

$$\boxed{(G, \times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}), \times).}$$

(c) Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AP_σ vaut

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si $C_1, \dots, C_n$ désignent les colonnes de la matrice A, la matrice AP_σ est la matrice dont les colonnes sont $C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}$.

$$\boxed{\text{Si } A = (C_1 \dots C_n),\ AP_\sigma = (C_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(n)}).}$$

(d) Commençons par trouver le polynôme caractéristique d'un cycle c de longueur ℓ ($1 \leqslant \ell \leqslant n$). Soit f_c l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_c dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_c est $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell,n-\ell} \\ 0_{n-\ell,\ell} & I_{n-\ell} \end{pmatrix}$ où la matrice J_ℓ est la matice de l'exercice 3184. Le polynôme caractéristique χ_{P_c} de P_c est donc $(-1)^n (X-1)^{n-\ell}(X^\ell - 1)$ (voir exercice 3184).

Soit maintenant $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. σ se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.

Posons donc $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p$, $p \geqslant 1$, où les c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des cycles à supports disjoints, et notons ℓ_i la longueur du cycle c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_σ est $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_k \end{pmatrix}$ où $k = n - \ell_1 - \dots - \ell_p$ est le nombre de points fixes de σ.

Le polynôme caratéristique cherché est donc $\chi_{P_\sigma} = (-1)^n (X^{\ell_1} - 1) \dots (X^{\ell_p} - 1)(X-1)^{n - \ell_1 - \dots - \ell_p}$. On en déduit immédiatement les valeurs propres de P_σ.

Correction de l'exercice 3186 ▲

On cherche une matrice A de format 4 dont le polynôme caractéristique est $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$. La matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ convient (voir l'exercice 2757) et le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$.

Correction de l'exercice 3187 ▲

Soit A la matrice de l'énoncé. $\det A$ est le produit des valeurs propres de A.

• Si $b = 0$, $\det A = a^n$.

• Si $b \neq 0$, $\text{rg}(A - (a-b)I) = 1$ ou encore $\dim(\text{Ker}(A - (a-b)I)) = n-1$. Par suite, $a - b$ est valeur propre d'ordre $n-1$ au moins. On obtient la valeur propre manquante λ par la trace de A : $(n-1)(a-b) + \lambda = na$ et donc $\lambda = a + (n-1)b$. Finalement $\det A = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b)$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).$$

Correction de l'exercice 3188 ▲

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Si $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est une matrice carrée vérifiant $X^2 = N$, alors $X^6 = 0$. Donc X est nilpotente et, puisque X est de format 3, on sait que $X^3 = 0$. Mais alors $N^2 = X^4 = 0$ ce qui n'est pas . L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 3189 ▲

$\mathrm{rg}(M_{a,b} - I) = 1$, si $a = b = 0$, 2 si l'un des deux nombres a ou b est nul et l'autre pas et 3 si a et b ne sont pas nuls. Donc $M_{0,0}$ n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour $M_{1,1}$.

Il reste à savoir si les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ sont semblables.

$(M_{1,0} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $(M_{0,1} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{3,4})^2 = 0$. Donc les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ ne sont pas semblables.

Correction de l'exercice 3190 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0 . $\mathrm{Tr}A = 0$ et donc la troisième valeur propre est encore 0. Donc $\chi_A = -X^3$. A est nilpotente et le calcul donne $A^2 = 0$. Ainsi, si X est une matrice telle que $X^2 = A$ alors X est nilpotente et donc $X^3 = 0$.

Réduction de A. $A^2 = 0$. Donc $\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Ker}A$. Soit e_3 un vecteur non dans $\mathrm{Ker}A$ puis $e_2 = Ae_3$. (e_2) est une base de $\mathrm{Im}A$ que l'on complète en (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}A$.

(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ alors $A(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$ c'est-à-dire $ce_2 = 0$ et donc $c = 0$. Puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base (e_1, e_2, e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit peut prendre $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $X^2 = A$, X commute avec A et donc X laisse stable $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Ker}A$. On en déduit que Xe_2 est colinéaire à e_2 et Xe_1 est dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Donc $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. De plus, X est nilpotente de polynôme caractéristique $(a-\lambda)(c-\lambda)(f-\lambda)$. On a donc nécessairement $a = c = f = 0$. $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1$.

Les matrices X solutions sont les matrices de la forme $P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ où a est non nul et b quelconque.

On trouve $P^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix}$ puis

$$X=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}3&-7&0\\-1&-14&0\\0&-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{a}\\a&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&-7&0\\-1&-3&0\\-7&-21&49\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-7a&0&\frac{3}{a}-7b\\-14&0&-\frac{1}{a}-14b\\-7a&0&-7b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&-7&0\\-1&-3&0\\-7&-21&49\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2a-\frac{3}{7a}+b&a-\frac{9}{7a}+3b&\frac{3}{a}-7b\\-4a+\frac{1}{7a}+2b1&2a+\frac{3}{7a}+6b&-\frac{1}{a}-14b\\-2a+b&a+3b&-7b\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}.$$

Correction de l'exercice 3191 ▲

Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$. $\chi_A=\begin{vmatrix}1-X&0&-1\\1&2-X&1\\2&2&3-X\end{vmatrix}=(1-X)(X^2-5X+4)-(-2+2X)=(1-X)(X^2-5X+4+2)=-(X-1)(X-2)(X-3)$.

A est à valeurs propres réelles et simples. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont des droites.

Si M est une matrice qui commute avec A, M laisse stable ces droites et donc si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale alors la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec A.

$$C(A)=\{P\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}.$$

On trouve $C(A)=\left\{\begin{pmatrix}2b-c&-a+2b-c&\frac{a-c}{2}\\-b+c&a-b+c&(-a+c)/2\\2c-2b&-2b+c&c\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\right\}$. On peut vérifier que $C(A)=\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$.

Correction de l'exercice 3197 ▲

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors le polynôme caractéristiaque de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Preuve si χ_u est scindé à racines simples : u est alors diagonalisable et il existe donc une base B dans laquelle $Mat_B(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

Alors $Mat_B(\chi_u(u))=\begin{pmatrix}\chi_u(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&\chi_u(\lambda_n)\end{pmatrix}$. Et comme $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ on a $\chi_u(\lambda_i)=0$, on en déduit que $\chi_u(u)=0$.

Correction de l'exercice 3215 ▲

Soit A la matrice suivante
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Calculons A^2 et vérifions que $A^2=A+2I_3$. On a
$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=A+2I_3.$$

On a donc $A^2-A=2I_3$, c'est-à-dire $A(A-I_3)=2I_3$, ou encore $A.\frac{1}{2}(A-I_3)=I_3$. Ce qui prouve que A est in versible et que son inverse est $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I_3)$

Correction de l'exercice 3216 ▲

Soit N une matrice nilpotente, il existe $q\in|||$ tel que $N^q=0$. Montrons que la matrice $I-N$ est inversible et exprimons son inverse en fonction de N.

On remarque que $(I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{q-1})=I-N^q=I$. Ainsi, la matrice $I-N$ est inversible, et son inverse est $(I-N)^{-1}=I+N+N^2+\cdots+N^{q-1}$.

Correction de l'exercice 3217 ▲

(a) $(-1)^n(X^n - a_nX^{n-1} - \cdots - a_1)$.

(b) Étude de $x \mapsto (x^n - a_nx^{n-1} - \cdots - a_1)/x^n$.

(c) Inégalité triangulaire.

(d) Expression générale de A^k.

Correction de l'exercice 3218 ▲

$a = b$ ou a, b non nuls.

Correction de l'exercice 3221 ▲

(a)

(b) $(A - xI)({}^tA - xI) = (x^2 - 2x + 4)I$, $\chi_A(x) = x^2 - 2x + 4$.

(c) ${}^tA = 2I - A$ donc $(A - xI)((2 - x)I - A) = (x^2 - 2x + 4)I$. En prenant pour x une des racines du polynôme $x^2 - 2x + 4$, on obtient un polynôme scindé à racines simples annulant A.

Correction de l'exercice 3223 ▲

A est diagonalisable car $A^2 = I$. $e^A = (\operatorname{ch} 1)I + (\operatorname{sh} 1)A$.

Correction de l'exercice 3224 ▲

Si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ alors $u^2 = 0$ donc 0 est l'unique valeur propre de u et $u \neq 0$ donc u n'est pas diagonalisable.
Si $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$ et donc $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u = E$. Or $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces propres de u donc u est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3226 ▲

(a) Polynôme annulateur simple.

(b) Non, ctrex = B nilpotent.

Correction de l'exercice 3227 ▲

$\operatorname{spec}(p) \subset \{-1, 0, 1\}$. p est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Correction de l'exercice 3228 ▲

A est $(x^2 + 1)$-diagonalisable et les valeurs propres sont $\alpha > 0$ et $\beta, \overline{\beta}$ avec la même multiplicité.

Correction de l'exercice 3230 ▲

A est diagonalisable et a n valeurs propres distinctes, sinon il existerait un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Ces racines sont les n racines n-èmes de 1 et leur somme est nulle.

Correction de l'exercice 3231 ▲

A est $(x^2 + 1)$-diagonalisable (polynôme annulateur à racines simples) $\Rightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = n$. Les dimensions sont conservées sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3233 ▲

Soit P un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, μ, de f. Alors $p_\lambda = P(f)$.

Correction de l'exercice 3234 ▲

3. $\mathrm{Spec}(u_k) \subset \{i, -i\}$ d'après la relation $u_k^2 = -\mathrm{id}_E$. Si le spectre était réduit à un élément alors u_k serait scalaire car diagonalisable, mais ceci est incompatible avec la relation d'anticommutation entre u_k et u_ℓ. Donc $\mathrm{Spec}(u_k) = \{i, -i\}$.
4. u_ℓ avec $\ell \neq k$ échange les sous-espaces propres de u_k donc ils ont même dimension $n/2$.

Correction de l'exercice 3237 ▲

(a) Calcul Maple : $h = \begin{pmatrix} c+4 & b & a \\ 0 & c+2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $v = ku$.

(b) i.

ii.

iii. $u^k \circ h - h \circ u^k = -2ku^k$, $P(u) \circ h - h \circ P(u) = -2u \circ P'(u)$.

iv. Si $P(u) = 0$ alors $u \circ P'(u) = 0$ donc P (polynôme minimal) divise XP' ce qui implique $P(X) = X^k$ pour un certain k.

Correction de l'exercice 3240 ▲

Aucun polynôme constant ne convient. Si P est non constant et α est une racine de P alors en considérant $A = \alpha I_n$ on obtient une première condition nécessaire : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P a une autre racine β alors en prenant $A = \mathrm{diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$ on obtient une deuxième condition nécessaire : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi les polynômes P cherchés ont la propriété suivante : $\deg(P) \geq 1$ *et il existe* $u \in \mathbb{Z}$ *tel que toutes les racines de* P *sont congrues à* u/n *modulo* 1. Cette condition est clairement suffisante.

Correction de l'exercice 3241 ▲

On écrit $C = PJQ$ où P, Q sont inversibles et J est la matrice canonique de rang r. Alors $(P^{-1}AP)J = J(QBQ^{-1})$ donc $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs avec le même bloc diagonal $r \times r$, ce qui prouve que χ_A et χ_B ont un facteur de degré r en commun.

Correction de l'exercice 3242 ▲

Le polynôme s'écrit $(X^2+1)(X^2+X+1)$. Il n'a donc pas de racine réelle. Or tout élément de $M_5(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre et cette valeur propre devrait être également racine du polynôme minimal. Par conséquent $X^4+X^3+2X^2+X+1$ ne peut pas être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3243 ▲

(a) Que c'est un isomorphisme (et réciproquement).

(b) Soit $Q(X) = P(X)/X$. On a $u \circ Q(u) = 0$ et X, Q sont premiers entre eux, d'où $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$ et $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, Q(u)$. On conclut avec le théorème du rang.

(c) Même méthode.

Correction de l'exercice 3244 ▲

• Si A est nilpotente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans $\mathbb{C}$ de A^k. Par suite, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

• Réciproquement , supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ et montrons alors que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de A est $(-X)^n$ et donc que A est nilpotente d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON.

Soient λ_1,..., λ_n les n valeurs propres (distinctes ou confondues) de A dans $\mathbb{C}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k$. Il s'agit de montrer que : $(\forall k \in [\![1, n]\!],\ S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = 0)$.

1ère solution. Les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et s'annulant en 0, on a $P(\lambda_k) = 0$ (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme P.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soient μ_1,..., μ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de A ($1 \leqslant p \leqslant n$). On prend $P = X\prod_{j \neq i}(X - \mu_j)$ si $p \geqslant 2$ et $P = X$ si $p = 1$. P est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n et s'annule en 0. L'égalité $P(\lambda_i) = 0$ fournit $\lambda_i = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

2ème solution. Pour ceux qui savent que les sommes de NEWTON S_k sont liées aux fonctions élémentaires en les λ_i σ_1,..., σ_n par les formules de NEWTON :

$$\forall k \leqslant n,\ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Par suite, si tous les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls alors immédiatement tous les σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls et donc les λ_i sont nuls car tous racines de l'équation $x^n = 0$.

Correction de l'exercice 3245 ▲

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f^k g - f g^k &= f^k g - f^{k-1} g f + f^{k-1} g f - f^{k-2} g f^2 + f^{k-2} g f^2 - \ldots - f g f^{k-1} + f g f^{k-1} - g f^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (f^{k-i} g f^i - f^{k-i-1} g f^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}(fg - gf) f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} f f^i \\
&= k f^k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k g - g f^k = k f^k \quad (*).}$$

1ère solution. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ h & \mapsto & hg - gh \end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k) = k f^k$. Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, f^k n'est pas nul, f^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k. Par suite, si aucun des f^k n'est nul, φ admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$. Donc, f est nilpotent.

2ème solution. Les égalités $(*)$ peuvent s'écrire $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$, $(**)$, quand P est un polynôme de la forme X^k, $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité, les égalités $(**)$ sont vraies pour tout polynôme P.

En particulier, l'égalité $(**)$ est vraie quand P est Q_f le polynôme minimal de f et donc

$$f Q_f'(f) = Q_f(f) g - g Q_f(f) = 0.$$

Le polynôme XQ_f' est donc un polynôme annulateur de f et on en déduit que le polynôme Q_f divise le polynôme XQ_f'. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}^*$ est le degré de Q_f, les polynômes pQ_f ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que $pQ_f = XQ_f'$ ou encore que

$$\tfrac{Q_f'}{Q_f} = \tfrac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{Q_f'}{Q_f}$, on en déduit que $Q_f = X^p$. En particulier, $f^p = 0$ et encore une fois f est nilpotent.

Correction de l'exercice 3249 ▲

(a) $u\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u(u^i(x_0)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{i+1}$. Donc $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

(b) Si à un rang k, x_{k+1} est une combinaison linéaire des x_i pour $i \leq k$: $x_{k+1} = \sum_{i=0}^k a_i x_i$. On en déduit que $x_{k+2} = \sum_{i=0}^k a_i x_{i+1}$, et donc que $x_{k+2} \in Vect(x_1, \ldots, x_{k+1}) \subset Vect(x_0, \ldots, x_k)$, et par récurrence, on obtient finalement que $\forall p > k, x_p \in Vect(x_0, \ldots, x_k)$. On en déduit que le rang de la famille $\{x_0, \ldots, x_m\}$, est strictement croissant avec m puis éventuellement constant à partir d'un certain rang. Comme E est de dimension finie n, on en déduit que ce rang est constant à partir d'un rang $k \leq n$: la famille $(x_0, \ldots, x_k)$ est alors libre, et x_{k+1} est une combinaison linéaire de $(x_0, \ldots, x_k)$.

(c) $x_{k+1} - \sum_{i=0}^k a_i x_i = u^{k+1}(x_0) - \sum_{i=0}^k a_i u^i(x_0) = 0$ donc $P_0(u)(x_0) = 0$.

(d) Si $x \in F$ alors $x = \sum_{i=0}^N \alpha_i u^i(x_0)$. En posant $P = \sum_{i=0}^N \alpha_i X^i$, on a $x = P(u)(x_0)$.

(e) Soit $P = QP_0 + R$ la division euclidienne de P par P_0, alors $\deg(R) < \deg(P_0) = k+1$. Notons $R = \sum_{i=0}^k r_i X^i$. On a $x = P(u)(x_0) = Q(u)P_0(u)(x_0) + R(u)(x_0) = R(u)(x_0)$

(f) La famille $(x_0, \ldots, x_k)$ est donc libre et génératrice dans F : c'est une base.

(g) La matrice de $u_{|_F}$ dans cette base est la matrice compagnon associée au polynôme P_0, et $\chi_{u_{|_F}} = P_0$.

(h) On choisit un vecteur $y \in E \setminus F$, et on recommence le même travail avec ce vecteur, et on continue ainsi jusqu'à avoir obtenu une base de tout l'espace. La matrice de u dans la base finale est alors du type demandé.

Correction de l'exercice 3251 ▲

$\mathrm{spec}(T) =]-1, 1]$.

Correction de l'exercice 3252 ▲

2. $0 < \lambda \leq 1$: $f(x) = Cx^{1/\lambda - 1}$.

Correction de l'exercice 3253 ▲

$1/k$, $k \geq 1$.

Correction de l'exercice 3254 ▲

$\lambda = \frac{1}{(\pi/2+k\pi)^2}$: $u(x) = C\sin(\pi/2+k\pi)x$.

Correction de l'exercice 3256 ▲

(a) $A \sim \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^{-1})$ où α est une racine primitive $7^{\text{ème}}$ de 1,
$A \sim \mathrm{diag}(\alpha, \alpha^{10}, \alpha^{-11})$ où α est une racine primitive $37^{\text{ème}}$ de 1.

(b) pas de solution.

(c) $\mathrm{vp} = 0$ ou 1.

Correction de l'exercice 3257 ▲

Soit f un endomorphisme d'un ev E ayant A pour matrice. On doit trouver $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = 2g \circ f$. Construction de g par récurrence sur $n = \dim E$.
$n \leq 1$: on a $f = 0$ donc $g = \mathrm{id}_E$ convient.
$0, \ldots, n-1 \Rightarrow n$: f est non surjectif donc l'hypothèse de récurrence s'applique à $f_{|\mathrm{Im}(f)}$. Soit $g_1 \in GL(\mathrm{Im}(f))$ tel que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$ avec $H = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$, $H \oplus I = \mathrm{Im}(f)$ et $H \oplus K = \mathrm{Ker}(f)$. La restriction de f à $I \oplus L$ induit un isomorphisme sur $\mathrm{Im}(f)$, on note φ l'isomorphisme réciproque. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ définie par :

$$g(h+i+k+\ell) = g_1(h+i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

On vérifie facilement que $f \circ g = 2g \circ f$ et il reste à prouver que g est injective. Si $x = h+i+k+\ell \in \mathrm{Ker}\, g$ alors $g(f(x)) = g_1(f(i+\ell)) = 0$ donc $i+\ell \in \mathrm{Ker} f = H \oplus K$ soit $i = \ell = 0$. Il reste $g_1(h) + k = 0$ ce qui implique $h = k = 0$ car $g_1(h) \in \mathrm{Im} f = H \oplus I$.
Remarque : la démonstration passe à tout corps de caractéristique différente de 2.

Correction de l'exercice 3258 ▲

(a)

(b) Par récurrence pour $P = X^k$, puis par linéarité.

(c) $A = 0$.

Correction de l'exercice 3259 ▲

S'inspirer du cas $n = 1$. Soit $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donc A aussi.

Correction de l'exercice 3260 ▲

$E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ tq } AY = \lambda^2 Y \right\}$.

Correction de l'exercice 3262 ▲

Calcul du polynôme caractéristique de B par opérations en blocs. On obtient

$$\chi_B(x) = \det(x^2 I - 2xA - A^2) = (-1)^n \chi_A\Big(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\Big)\chi_A\Big(\frac{x}{1-\sqrt{2}}\Big)$$

donc

$$\mathrm{Spec}(B) = \{(1+\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} \cup \{(1-\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

Correction de l'exercice 3263 ▲

En prenant $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & 0 & 0 \\ ab-b^2 & a^2-ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+ab & b^2+ab \\ 0 & 0 & b^2+ab & a^2+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$.

En prenant $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P_1^{-1}M_1P_1 = \begin{pmatrix} (a-b)^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1}M_2P_1 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}A = \{(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)\}$, donc l'ensemble cherché est la boule unité ouverte pour $\| \|_1$.

Correction de l'exercice 3266 ▲

Si $P(0) \neq 0$ alors f est bijective. Si $P(0) = 0$ alors $f^2 \circ \text{qqch} = -P'(0)f \Rightarrow \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$.

Correction de l'exercice 3268 ▲

Soit μ le polynôme minimal de u et $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires de μ. Pour $P \in K[X]$ et $d = P \wedge \mu$ on a facilement $\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(d(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u)) = \mathrm{Im}(d(u))$. Ceci montre déjà que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{I}$ sont finis.

De plus, si $d \in \mathscr{D}$ alors l'annulateur minimal de $u_{|\mathrm{Im}(d(u))}$ est μ/d donc l'application $d \mapsto \mathrm{Im}(d(u))$ est injective sur $\mathscr{D}$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{I}) = \mathrm{Card}(\mathscr{D})$. De même, l'annulateur minimal de $u_{|\mathrm{Ker}(d(u))}$ est d car $\mathrm{Ker}(d(u)) \supset \mathrm{Im}(\frac{\mu}{d}(u))$ et d est l'annulateur minimal de $u_{|\mathrm{Im}(\frac{\mu}{d}(u))}$ donc l'application $d \mapsto \mathrm{Ker}(d(u))$ est injective sur $\mathscr{D}$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{K}) = \mathrm{Card}(\mathscr{D})$.

Correction de l'exercice 3269 ▲

En appliquant le théorème du rang à $f_{|\mathrm{Ker} f^2}$, on a : $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(f(\mathrm{Ker} f^2))$, et $f(\mathrm{Ker} f^2) \subset \mathrm{Ker} f$, donc $f(\mathrm{Ker} f^2) = \mathrm{Ker} f$. Soit $G_i = \mathrm{Ker} g^i$. Montrons que $g(G_{i+1}) = G_i$ pour tout $i \in [[0,k]]$: si $x \in G_{i+1}$ alors $g^i(g(x)) = g^{i+1}(x) = 0$ donc $g(x) \in G_i$. Réciproquement, si $y \in G_i$ alors $y \in G_k = f(G_{2k})$, donc y a un antécédant x par f, cet antécédant appartient à G_{i+k}, et $y = g(g^{k-1}(x)) \in g(G_{i+1})$. On en déduit, avec le théorème du rang appliqué à $g_{|G_{i+1}}$, que $\dim(G_{i+1}) = \dim(G_i) + \dim(\mathrm{Ker} g)$ pour tout $i \in [[0,k]]$, d'où $d = \dim(G_k) = \dim(G_0) + k\dim(\mathrm{Ker} g) = k\dim(\mathrm{Ker} g)$.

Correction de l'exercice 3270 ▲

(a) • E contient I_2 et est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$.
• Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Donc AB est dans E.
• Si A est dans E, $\det(A^{-1}) = 1$ et en particulier $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A)$ est à coefficients entiers. On en déduit que A^{-1} est dans E.
Finalement

$$\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.
A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$.
A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :
1er cas. Si $\mathrm{Sp}A = (1,1)$, puisque A est diagonalisable, A est semblable à I_2 et par suite $A = I_2$. Dans ce cas, $A^{12} = I_2$.
2ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (-1,-1)$, $A = -I_2$ et $A^{12} = I_2$.
3ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (1,-1)$ alors A est semblable à $\mathrm{diag}(1,-1)$ et donc $A^2 = I_2$ puis encore une fois $A^{12} = I_2$.
4ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Dans ce cas $\mathrm{Tr}A = 2cos\theta$ est un entier ce qui impose $2\cos\theta \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Les cas $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$ ont déjà été étudié.
• Si $\cos\theta = 0$, $\mathrm{Sp}A = (i,-i)$ et A est semblable à $\mathrm{diag}(i,-i)$. Donc $A^4 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.
• Si $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, $\mathrm{Sp}A = (j, j^2)$ ou $\mathrm{Sp}A = (-j,-j^2)$. Dans le premier cas, $A^3 = I_2$ et dans le deuxième $A^6 = I_2$.
Dans tous les cas $A^{12} = I_2$.

Correction de l'exercice 3271 ▲

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le format de A.
• C'est clair pour $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle.
Soient A une matrice carrée de format $n+1$ et de trace nulle puis f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ de matrice A dans la base canonique $(e_1, ..., e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Si f est une homothétie de rapport noté k, alors $0 = \mathrm{Tr}(f) = k(n+1)$ et donc $k = 0$ puis $f = 0$ puis $A = 0$. Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ soit libre (voir exercice 1163). On complète la famille libre $(u, f(u))$ en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A' & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$.

Puis $\text{Tr}A' = \text{Tr}A = 0$ et par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice A_1 de diagonale nulle ou encore il existe A_1 matrice carrée de format n et de diagonale nulle et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q = A_1$.

Mais alors, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ puis que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & A_1 & & \\ \vdots & & & & \\ \times & & & & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle.

Correction de l'exercice 3272 ▲

Soit B la matrice de l'énoncé. $\text{rg}B = 1$ et si A existe, nécessairement $\text{rg}A = n - 1$ (exercice 2893).

Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale U^tV où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls. Ici $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si A existe, A doit déjà vérifier $A^ttB = {}^tBA = 0$ ou encore $AV^tU = 0$ (1) et $V^tUA = 0$ (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par U à droite puis en simplifiant par le réel non nul ${}^tUU = \|U\|_2^2$, on obtient $AV = 0$. Ceci montre que la première colonne de A est nulle (les $n-1$ dernières devant alors former une famille libre).

De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par ${}^tV$ à gauche, on obtient ${}^tUA = 0$ et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales à U (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui convient.

Correction de l'exercice 3273 ▲

Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$. P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont à choisir dans $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $(-1)^n X^\alpha (X - j)^\beta (X - j^2)^\gamma$ avec $\alpha + \beta + \gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \overline{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.

Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\text{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\text{rg}A$ est un entier pair.

Correction de l'exercice 3276 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou (x^2+1)), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

(a) *Montrons que* $\text{Id}_E - p$ *est un projecteur et calculons* $p \circ (\text{Id}_E - p)$ *et* $(\text{Id}_E - p) \circ p$.
On a $(\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - p - p + p^2 = \text{Id}_E - p$, car $p^2 = p$, ce qui prouve que $\text{Id}_E - p$ est un projecteur.
Par ailleurs, on a
$$p \circ (\text{Id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0 = (\text{Id}_E - p) \circ p$$
donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{0}$.

(b) *Montrons que pour tout $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.*
Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$, il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{y})$, on a donc $p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$.

(c) *On en déduit que $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.*
Soit $\vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$, considérons $\vec{x} - p(\vec{x})$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = 0$
ce qui prouve que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \ker p$. Ainsi tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} p$, $p(\vec{x})$, et d'un élément de $\ker p$, $\vec{x} - p(\vec{x})$, il nous reste à démontrer que la somme est directe.
Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p \cap \ker p$, on a, d'une part $p(\vec{x}) = \vec{x}$ d'après la question 2) car $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$ et, d'autre part $p(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker p$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p.$$
(Sachant que $\dim E = \dim \ker p + \dim \operatorname{Im} p$, on pouvait se contenter de démontrer que $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \vec{0}$, ici nous avons explicitement la décomposition.)

(d) *Montrons que le rang de p est égal à la trace de p.*
Notons n la dimension de E et considérons une base de E de la forme
$$(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_k}, \vec{e_{k+1}}, \cdots, \vec{e_n})$$
où $(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_k})$ est une base de $\operatorname{Im} p$ et $(\vec{e_{k+1}}, \cdots, \vec{e_n})$ une base de $\ker p$. dans une telle base, la matrice de p s'écrit
$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
où I_k désigne la matrice identité $k \times k$, et les 0 des blocs de zéros. Le rang de p est égal à la dimension de $\operatorname{Im} p$ c'est-à-dire ici à k et on a bien $k = \operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr} p$.

Correction de l'exercice 3306 ▲

(a) $< u_k(x), a >= k < x, a >< a, a > + < x, a >= (k+1) < x, a >$ donc $x = \frac{-k}{k+1} < u_k(x), a > a + u_k(x)$. On en déduit que u_k est inversible, et que $u_k^{-1} = u_{\frac{-k}{k+1}}$.

(b) L'adjoint d'un endomorphisme u est l'unique endomorphisme v qui satisfait : $\forall (x,y) \in E^2, < u(x), y >=< x, u(y) >$. Or $< u_k(x), y >= k < x, a >< y, a > + < x, y >=< x, u_k(y) >$. Donc u_k est égal à son adjoint.

(c) Si u_k est orthogonal, on doit avoir $\|u_k(a)\| = \|a\| = 1$, soit $|k+1| = 1$. Ainsi $k = 0$ ou $k = -2$.
Pour $k = 0$, $u_k = \mathrm{id}$ est bien orthogonal. Pour $k = -2$, $u_{-2}^{-1} = u_{\frac{-2}{-2+1}} = u_{-2} = {}^t u_{-2}$. Donc u_{-2} est bien orthogonal.
Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\{a\}^\perp$

(d) Si $k = 0$, 1 est la seule valeur propre et $E_1 = E$
Si $k \neq 1$, $\forall x \in \{a\}^\perp, u_k(x) = x$ donc 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. De plus $u_k(a) = (k+1)a$ donc $(k+1)$ est valeur propre. Finalement, 1 est valeur propre de multiplicité exactement $n-1$, avec pour espace propre $\{a\}^\perp$, et $k+1$ est valeur propre simple avec espace propre $\mathbb{R}a$.

Correction de l'exercice 3330 ▲

(a)

(b) i. Pour $p \in K[X]$ on a $P(\Phi_u) = v \mapsto v \circ P(u)$ donc u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs.

ii. $(\lambda \in \operatorname{Spec}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists\, v \neq 0 \text{ tq } v \circ (u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif$) \Leftrightarrow (\lambda \in \operatorname{Spec}(u))$. Ainsi Φ_u et u ont même spectre. Si $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ on a : $(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker} v)$ donc $\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathscr{L}(H, E)$ où H est un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$. On en déduit : $\dim(\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E))$.

Correction de l'exercice 3332 ▲

$\lambda = 1 : \operatorname{Dir}(p) \subset \operatorname{Ker} f, \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Base}(p)$.
$\lambda = 0 : f\big(\operatorname{Base}(p)\big) \subset \operatorname{Dir}(p)$.

Correction de l'exercice 3334 ▲

(a) Pour $P \in K[X]$ on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

Correction de l'exercice 3336 ▲

Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f\circ g - g\circ f) = 1$. Alors il existe $\ell \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :

$$\forall\, x \in E,\ f(g(x)) - g(f(x)) = \ell(x)a.$$

D'où par récurrence sur k :

$$\forall\, x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \ell(x)f^{k-1}(a) + \ell(f(x))f^{k-2}(a) + \cdots + \ell(f^{k-1}(x))a.$$

Comme χ_f est irréductible, le sous-espace f-monogène engendré par a est égal à E, soit : $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et $f^n(a) = \alpha_0 a + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}(a)$. Alors $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1}f^{n-1} - \cdots - \alpha_0 f^0 = 0$ et :

$$\forall\, x \in E,\ 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = \ell(x)f^{n-1}(a) + \cdots + \ell(f^{n-1}(x) - \cdots - \alpha_1 x)a.$$

Ceci implique $\ell(x) = 0$ pour tout x, en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{rg}(f\circ g - g\circ f) = 1$.

Correction de l'exercice 3337 ▲

(a) Oui, les applications $u \mapsto p\circ u$ et $u \mapsto u\circ p$ le sont (ce sont des projecteurs) et elles commutent.

(b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}\, p$ et d'une base de $\mathrm{Im}\, p$.
Si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D\end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{Spec}(\varphi) \subset \{0, \frac12, 1\}$ et $d_0 = (n-r)^2$, $d_1 = r^2$ et $d_{1/2} = 2r(n-r)$.

Correction de l'exercice 3338 ▲

Si D est diagonalisable alors les applications $X \mapsto DX$ et $X \mapsto XD$ le sont (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simmultanément diagonalisables et leur différence, ϕ_D, est aussi diagonalisable.
Pour la réciproque, on commence par constater que si P est un polynôme quelconque, alors :

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

(formule du binôme pour $P = X^m$ et linéarité de chaque membre par rapport à P pour P quelconque).
Supposons ϕ_D diagonalisable, prenons P annulateur scindé à racines simples de ϕ_D, $X = U^tV$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Donc :

$$0 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k U^tV \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^tV \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^tVP(D-\lambda I).$$

Comme $U \neq 0$, ceci implique ${}^tVP(D-\lambda I) = 0$ pour tout V, donc $P(D-\lambda I) = 0$. Ainsi $D - \lambda I$ est diagonalisable et D itou.

Correction de l'exercice 3340 ▲

(a)

(b) $((-2,0,1),\ (0,3,-2),\ (1,-2,1))$.

Correction de l'exercice 3341 ▲

Base ssi n est impair, $2\vec{e}_1 = (1,1,-1,1,-1,\ldots,1,-1)$ et les autres vecteurs s'obtiennent par rotation :
$2\vec{e}_2 = (-1,1,1,-1,1,-1,\ldots,1)$.

Correction de l'exercice 3343 ▲

2. $\phi_i^* = (1 - 2d_i(X - x_i))P_i^2$, $\psi_i^* = (X - x_i)P_i^2$.

Correction de l'exercice 3344 ▲

2. $\frac18(9 - 15X^2,\ 75X - 105X^3,\ -15 + 45X^2,\ -105X + 175X^3)$.

Correction de l'exercice 3345 ▲

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & b & c & (b^2-a^2)/2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & (b^3-a^3)/3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = (b-a)^4(c-a)(c-b)\frac{2c-a-b}{12}$, donc la famille est libre si et seulement si $c \neq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l'exercice 3346 ▲

2. terme dominant $\Rightarrow P_n^*(Q_i)=1$, donc $P_n^*=\sum_{i=0}^n \frac{f_i}{Q_i(i)}=\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}f_i}{i!\,(n-i)!}$.

3. $P_k^*=\sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}f_i}{i!\,(k-i)!}$.

Correction de l'exercice 3347 ▲

2. $P_0^*=\frac{f_a}{(b-a)^2}$, $P_1^*=\frac{f_a+f_b-4f_c}{(b-a)^2}$, $P_2^*=\frac{f_b}{(b-a)^2}$.

Correction de l'exercice 3353 ▲

1. $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3. $(\delta_A,\delta_B,\delta_C,\delta_{A'},\delta_{B'},\delta_{C'})$ où A',B',C' sont les milieux du triangle ABC.

5. $\int\int_T f(x,y)\,dxdy=\frac{f(A')+f(B')+f(C')}{6}$.

Correction de l'exercice 3354 ▲

3. Rmq : coefficients de Fourier : $\alpha_p=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\cos(pa_k)$ et $\beta_p=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\sin(pa_k)$.

Correction de l'exercice 3356 ▲

2. $\left(\frac{\varphi^{n-1}-\bar\varphi^{n-1}}{\varphi-\bar\varphi},\frac{\varphi^{n}-\bar\varphi^{n}}{\varphi-\bar\varphi}\right)$ avec $\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $\bar\varphi=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

Correction de l'exercice 3364 ▲

$$\begin{array}{ll}
\vec e_i\leftrightarrow\vec e_j: & e_i^*\leftrightarrow e_j^*.\\
\vec e_i\leftarrow\alpha\vec e_i: & e_i^*\leftarrow e_i^*/\alpha.\\
\vec e_i\leftarrow\vec e_i+\alpha\vec e_j: & e_j^*\leftarrow e_j^*-\alpha e_i^*.
\end{array}$$

Correction de l'exercice 3374 ▲

(a) Oui.

(b) Non. Le seul élément qui peut être l'élément neutre est 1 qui n'appartient pas à l'ensemble.

(c) Non. 0 n'a pas d'inverse.

(d) Oui.

Correction de l'exercice 3377 ▲

Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ ne peut avoir pour inverse que $\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&\frac12\end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à l'ensemble.

Notons $G=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}):\det M=1\}$ et montrons que G est un sous-groupe de $Gl(2,\mathbb{R})$.

- la matrice identité appartient à G.
- si $A,B\in G$ alors $AB\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\det AB=\det A\times\det B=1\times1=1$, et donc $AB\in G$.
- Si $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ alors $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ appartient à G et est l'inverse de A.

Correction de l'exercice 3385 ▲

(a) L'ensemble G des matrices $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que $ad-bc\neq0$ et $a^2-b^2-c^2-d^2\leq1$ n'est pas un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. En effet les deux matrices $\begin{pmatrix}1&1\\0&1/2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\1&1/2\end{pmatrix}$ appartiennent à G et leur produit $\begin{pmatrix}2&1/2\\1/2&1/4\end{pmatrix}$ n'appartient pas à G.

(b) L'ensemble H des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. En effet,

- I_2 élément neutre de $Gl_2(\mathbb{R})$ appartient à H.
- Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ deux éléments de H alors $MM' = \begin{pmatrix} ac & ad+bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ donc le produit de deux éléments de H appartient à H.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ appartient à H.

(c) Soit K_M l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad-bc \neq 0$ et $a \leq M$. Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. Alors I_2 appartient à K_M donc $M \geq 1$. Ainsi, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in |||$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K_n donc le produit $AA_n = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à K_n. En conséquence, pour tout $n \in |||$, on a : $1+n \leq M$, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 3386 ▲

- Si $H \subset K$ alors $H \cup K = K$, qui est un sous-groupe de H. Même chose si $K \subset H$.
- Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Par l'absurde supposons que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Alors il existe $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$. Comme $x, y \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un groupe alors $x.y \in H \cup K$. Donc $x.y \in H$ ou $x.y \in K$. Par exemple supposons $x.y \in H$ alors comme $x \in H$, $x^{-1} \in H$ et donc comme H est un groupe $x^{-1}.x.y \in H$ et donc $y \in H$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y \in K \setminus H$. En conclusion, parmi les sous-groupes H, K l'un est inclus dans l'autre.

Correction de l'exercice 3389 ▲

Soit $G = \langle a, b \rangle$, tout élément g de G S'écrit $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$. Si $h \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, alors en particulier $h \in \langle a \rangle$ et $h = a^{\mu}$ avec $\mu \in \mathbb{Z}$, donc h commute avec a^{α_i} pour tout α_i dans $\mathbb{Z}$ (en effet $a^{\alpha_i} a^{\mu} = a^{\alpha_i + \mu} = a^{\mu} a^{\alpha_i}$. De même $h \in \langle b \rangle$ donc h s'écrit également $h = b^{\nu}$ ($\nu \in \mathbb{Z}$) et h commute avec b^{β_i}. Donc $hg = (ha^{\alpha_1}) b^{\beta_1} \dots = (a^{\alpha_1} h) b^{\beta_1} \dots = a^{\alpha_1} (h b^{\beta_1}) \dots = a^{\alpha_1} (b^{\beta_1} h) \dots = \cdots$ Finalement $hg = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} h = gh$. Ainsi h commute avec tout élément de G et appartient ainsi au centre de G.

Correction de l'exercice 3398 ▲

Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupe. Comme tout morphisme f vérifie $f(0) = 0$. Notons $a = f(1)$. Alors

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2.a.$$

De même, pour $n \geq 0$:

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n.f(1) = n.a.$$

Enfin comme

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = a + f(-1),$$

alors $f(-1) = -a$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n.a.$$

Donc tous les morphisme sont de la forme $n \mapsto n.a$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

Un morphisme $n \mapsto n.a$ est injectif si et seulement si $a \neq 0$, et surjectif si et seulement si $n = \pm 1$.

Correction de l'exercice 3400 ▲

$$f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$
$$x \mapsto e^{ix}$$

Vérifions que f est un morphisme de groupe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = f(x) \times f(y),$$

et

$$f(x^{-1}) = e^{i(-x)} = \frac{1}{e^{ix}} = f(x)^{-1}.$$

Donc f est un morphisme de groupe.

Montrons que f n'est pas injective en prouvant que le noyau n'est pas réduit à 0 :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } e^{ix} = 1\right\} = \{x = 0 + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Enfin

$$\operatorname{Im} f = \left\{y \in \mathbb{C}^*, y = e^{ix}\right\}$$

est l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Correction de l'exercice 3409 ▲

Soit $\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ un morphisme entre les deux groupes multiplicatifs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$. Notons $a = \phi(i) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i)^2 = a^2$, de même $1 = \phi(1) = \phi((-1)^2) = \phi(-1)^2 = a^4$; donc $a^4 = 1$ et nécessairement $a^2 = 1$. Le morphisme ϕ n'est pas injectif car $\phi(1) = \phi(-1) = 1$, *a fortiori* ϕ n'est pas un isomorphisme.

Correction de l'exercice 3411 ▲

Soit $x \neq e$ un élément de G, soit $H = \{e, x, x^2, \dots\}$ le sous-groupe engendré par x. H est un sous-groupe de G donc $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G = p$ qui un nombre premier. En conséquent $\operatorname{Card} H = 1$ ou p mais $H \neq \{e\}$ donc $\operatorname{Card} H = p$ et $H = G$.
Nous venons de montrer que G est engendré par x donc G est cyclique, de plus le raisonnement est valide quelque soit $x \neq e$ alors tout élément de $G \setminus \{e\}$ est un générateur de G.

Correction de l'exercice 3412 ▲

(a) $H \cap H'$ est un sous-groupe de H donc $\operatorname{Card} H \cap H'$ divise $\operatorname{Card} H = p$. Or p est premier donc $\operatorname{Card} H \cap H' = 1$ ou p. Mais $H \cap H' \neq H$ donc $\operatorname{Card} H \cap H' \neq p$ et donc $H \cap H' = \{e\}$.

(b) Soit E l'ensemble des éléments d'ordre p que l'on suppose non vide. Notons que pour $x \in E$ le sous-groupe H_x engendré par x est d'ordre p et de plus tout $z \in H_x \setminus \{e\}$ est d'ordre p car H_x est cyclique et p est premier. Donc H_x contient $p - 1$ élément d'ordre p.
Si E ne contient qu'un seule élément x alors $E = H_x \setminus \{e\}$ et donc E contienet $p - 1$ éléments.
Sinon, soit $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors d'après la première question $H_x \cap H_y = \{e\}$. Donc E se décompose en une union disjointe de $H_x \setminus \{e\}$. Donc $\operatorname{Card} E$ est multiple de $p - 1$.

Correction de l'exercice 3414 ▲

(a) Notons d'abord que pour $x \in G$ $x^2 = e$ et donc $x^{-1} = x$. Soit maintenant $x, y \in G$. Alors $xy \in G$ et $(xy)^2 = e$ donc $xy = (xy)^{-1}$ et par suite $xy = y^{-1}x^{-1} = yx$ car x et y sont d'ordre 2. Le produit de deux éléments quelconques de G commute donc G est commutatif.

(b) Notons E l'ensemble des éléments d'ordre 2.

$$E = \{x \in G \ / \ x^2 = e \text{ et } x \neq e\} = \{x \in G \ / \ x = x^{-1} \text{ et } x \neq e\}.$$

Par l'absurde supposons que H est l'ensemble vide. Alors quelque soit $x \neq e$ dans G $x \neq x^{-1}$. Donc nous pouvons décomposer $G \setminus \{e\}$ en deux ensembles disjoints $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F' = \{x_1{}^{-1}, \dots, x_n{}^{-1}\}$ qui sont de même cardinal n. Donc le cardinal de G est $2n + 1$ (le $+1$ provient de l'élément neutre). Ce qui contredit l'hypothèse « G d'orde pair ».

Correction de l'exercice 3426 ▲

(a) Non, a n'est pas régulier.

(b) Oui, $G \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(c) Non, il n'y a pas d'élément neutre.

Correction de l'exercice 3439 ▲

Notons G l'ensemble des éléments d'ordre fini de H. Montrons que G est un sous-groupe de H.

- $G \subset H$ et $0 \in G$.
- Si $x \in G$ alors $(-x) + (-x) + \cdots + (-x) = -(x + x + \cdots + x) = 0$. Donc $-x \in G$.
- Si $x, y \in G$ alors $(x + y) + \cdots + (x + y) = (x + \cdots + x) + (y + \cdots + y) = 0 + 0 = 0$. Donc $x + y \in G$.

Nous venons de montrer que G est un sous-groupe de H. De plus comme H est commutatif alors G l'est aussi !

Correction de l'exercice 3440 ▲

(a) La matrice $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ est d'ordre 2. La matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ n'est pas d'ordre fini puisque, pour tout $n\in |||$: $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(b) Notons e_G et e_H les éléments neutres respectifs de G et de H. Soit g un élément de G d'ordre n.
- Alors $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e_G) = e_H$. Donc $\varphi(g)$ est d'ordre inférieur ou égal à n, ordre de g.
- Supposons φ injectif et $\varphi(g)$ d'ordre strictement inférieur à n, c'est à dire qu'il existe $p<n$ tel que : $\varphi(g)^p = e_H$. Alors $\varphi(g^p) = e_H$ donc, puisque φ est injectif et $\varphi(e_G) = e_H$, on a aussi : $g^p = e_G$, ce qui est impossible puisque l'ordre de g est n.

(c) Raisonnons par l'absurde : Soit G un groupe fini. Supposons qu'il existe dans G un élément g n'étant pas d'ordre fini. Comme G est un groupe, on peut considérer $X = \{g^k\ k\in |||\}$. Or, pour $i\neq j\ :\ g^i \neq g^j$. En effet, supposons $i<j$. Si $g^i = g^j$ alors $g^{j-i} = e_G$ et g est d'ordre inférieur ou égal à $j-i$, donc fini, ce qui est impossible. X est donc un ensemble infini. G contient un ensemble infini donc est infini, ce qui est absurde, donc g ne peut être que d'ordre fini.

Correction de l'exercice 3443 ▲

Rappelons d'abord que pour x un élément d'ordre n, alors

$$x^q = e \Longrightarrow n|q.$$

- Si n est pair alors $ord(x^2) = n/2$: en effet $(x^2)^{\frac{n}{2}} = x^n = e$ et pour $p\geq 1$ tel que $(x^2)^p = e$ alors $x^{2p} = e$ et $n|2p$ donc $p\geq \frac{n}{2}$. Donc $n/2$ est le plus petit des entiers q (non nul) tel que $x^q = e$ et par conséquent $n/2$ est l'ordre de x.
- Si n est impair alors $ord(x) = n$. Tout d'abord $(x^2)^n = (x^n)^2 = e$ et pour p tel que $(x^2)^p = e$ alors $n|2p$ mais 2 et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $n|p$ et en particulier $p\geq n$.

Correction de l'exercice 3444 ▲

(a) Déjà $(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn} = (x^m)^n(y^n)^m = e.e = e$. Soit p tel que $(xy)^p = e$, alors $e = (xy)^{mp} = x^{mp}y^{mp} = y^{mp}$, et donc mp est divisible par l'ordre de y , c'est-à-dire n. Comme m et n sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Gauss n divise p. Un raisonnement semblable à partir de $(xy)^{np} = e$ conduit à : m divise p. Finalement $m|p$ et $n|p$ donc $mn|p$ car m et n sont premiers entre eux.
Voici un contre exemple dans le cas où m et n ne sont pas premiers entre eux : dans le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\bar{2}$ est d'ordre 6, $\bar{4}$ est d'ordre 3, mais $\bar{2}+\bar{4} = \bar{6}$ est d'ordre $2\neq 3\times 6$.

(b) A est d'ordre 4, B est d'ordre 3, $(AB)^n = \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ n'est jamais la matrice identité pout $n\geq 1$.

Correction de l'exercice 3445 ▲

Par l'absurde supposons que $(\mathbb{Q},+)$ est engendré par un seul élément $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) alors tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit $n\frac{p}{q}$ avec $n\in\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\frac{p}{2q}$ (qui appartient à $\mathbb{Q}$) doit s'écrire $n\frac{p}{q}$, mais alors $2n = 1$ avec $n\in\mathbb{Z}$ ce qui est impossible. Conclusion $(\mathbb{Q},+)$ n'est pas monogène.

Correction de l'exercice 3453 ▲

(a) $x\mapsto ax$, $a\in\mathbb{Q}$.

(b) $x\mapsto 0$.

(c) $x\mapsto 1$.

Correction de l'exercice 3474 ▲

(a)

(b) A est intègre car $\{0\}$ est premier et si $a\in A\setminus\{0\}$ alors $a\times a\in (a^2)$ qui est premier donc a^2 divise a d'où a est inversible.

Correction de l'exercice 3477 ▲

(a)

(b) 1.

(c) $x+y=(x+y)^2=x^2+y^2+xy+yx=x+y+xy+yx \Rightarrow xy+yx=0$.
Pour $y=1$: $x+x=0 \Rightarrow 1=-1$.
Pour y quelconque : $xy=-yx=yx$.

(d) Antisymétrie : si $x=ay$, alors $xy=ay^2=ay=x$.
Donc $(x \leq y)$ et $(y \leq x) \Rightarrow xy=x=y$.

Correction de l'exercice 3479 ▲

Si $(1-ab)c=1=c(1-ab)$ alors $abc=c-1=cab$ donc $babca=bca-ba=bcaba$ soit $ba(1+bca)=bca=(1+bca)ba$ donc $1+bca$ est inverse de $1-ba$.

Correction de l'exercice 3480 ▲

(a)

(b)

(c) Remarque : la réciproque fausse : $A=\mathbb{Z}[X]$, $I=(X)$, $J=(X+4)$.

(d) $114\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3489 ▲

$f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.
f est multiplicative sur la base canonique $\Rightarrow a_ia_j=0$ pour $i \neq j$.
$f(1,\dots,1)=1 \Rightarrow$ un des a_i vaut 1, et les autres 0.
conclusion : f = fct coordonnée.

Correction de l'exercice 3490 ▲

(a)

(b) idem 3489 : les projections + la valeur de stationnement.

(c)

Correction de l'exercice 3491 ▲

(a) $\pm1, \pm i$.

(b) On a : $1+i=0\times2+(1+i)=1\times2+(i-1)$.

(c)

Correction de l'exercice 3508 ▲

$K=\{0,1,a,b\}$ et $\{1,a,b\}$ est un groupe multiplicatif $\Rightarrow b=a^2$, $a^3=1$.

$+$	0	1	a	a^2
0	0	1	a	a^2
1	1	0	a^2	a
a	a	a^2	0	1
a^2	a^2	a	1	0

$\times$	1	a	a^2
1	1	a	a^2
a	a	a^2	1
a^2	a^2	1	a

Correction de l'exercice 3526 ▲

(a) $|S_n|=n!$ donc $|S_3|=3!=6$. Montrons plus généralement qu'il n'existe pas d'élément d'ordre $n!$ dans S_n ($n \geq 3$). Par l'absurde soit α un tel élément. Alors par hypothèse S_n est engendré par α et donc S_n est un groupe commutatif. Mais $(1,2)(2,3) \neq (2,3)(1,2)$ ce qui est absurde. En conclusion il n'existe pas d'éléments d'ordre 6.

(b) Explicitons S_3 :

$$S_3 = \left\{id; \tau_1 = (1,2); \tau_2 = (2,3); \tau_3 = (1,3); \sigma_1 = (1,2,3); \sigma_2 = \sigma_1^{-1} = (3,2,1)\right\}.$$

Remarquons
Les sous-groupes d'ordre 2 sont de la forme $\{id;\tau\}$ avec $\tau^2 = id$. Les seuls éléments d'ordre 2 sont les transpositions et donc se sont les groupes $\{id;(1,2)\}$,{ id ; (1,3) }, $\{id;(2,3)\}$.
Les sous-groupes d'ordre trois sont de la forme $\{id,\sigma,\sigma^2\}$ avec $\sigma^2 = \sigma^{-1}$. Et donc le seul sous-groupe d'ordre 3 est $\{id;(1,2,3);(3,2,1)\}$.

(c) Les sous-groupes de S_3 ont un ordre qui divise $|S_3| = 6$. Donc un sous-groupe peut-être d'ordre $1,2,3$ ou 6. L'unique sous-groupe d'ordre 1 est $\{id\}$, et l'unique sous-groupe d'ordre 6 est S_3. Les sous-groupes d'ordre 2 et 3 ont étés donnés à la question précédente.

Correction de l'exercice 3532 ▲

(a) $\sigma = (1,3)(2,7,9,5) = (2,7,9,5)(1,3)$ et $\sigma^k = (1,3)^k(2,7,9,5)^k$. Les transpositions sont d'ordre 2 donc $(1,3)^k = \mathrm{id}$ si $k \equiv 0 \pmod 2$ et $(1,3)^k = (1,3)$ si $k \equiv 1 \pmod 2$. Le cycle $(2,7,9,5)$ est d'ordre 4, et $(2,7,9,5)^k$ est respectivement égale à $\mathrm{id}, (2,7,9,5), (2,9)(7,5), (5,9,7,2)$ si k est respectivement congru à $0,1,2,3$ modulo 4. Le calcul de σ^k donne donc $\mathrm{id}, (1,3)(2,7,9,5), (2,9)(7,5)$ ou $(1,3)(5,9,7,2)$ selon que k est congru à $0,1,2$ ou 3 modulo 4.

(b) L'écriture de $\varphi = (10,3,4,1)(8,7)(4,7)(5,6)(2,6)(2,9)$ est une décomposition en produit de cycles mais ils ne sont pas à supports disjoints. Écrivons φ sous la forme :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui se décompose $\varphi = (1,10,3,4,8,7)(2,9,5,6) = (2,9,5,6)(1,10,3,4,8,7)$. Le calcul de $\varphi^k = (1,10,3,4,8,7)^k(2,9,5,6)^k$ est similaire au calcul précédent (selon $k \pmod{12}$)

Correction de l'exercice 3540 ▲

(a) $\mathscr{S}_N$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$. Dans $\mathscr{S}_{n+2}$ notons τ la permutation $(n+1,n+2)$. Nous définissons une application $\phi : \mathscr{S}_n \longrightarrow \mathscr{S}_{n+2}$ par les relations

$$\phi(\sigma) = \sigma \text{ si } \varepsilon(\sigma) = +1 \quad ; \quad \phi(\sigma) = \sigma \circ \tau \text{ sinon ;}$$

où ε désigne la signature. Alors ϕ est un morphisme de groupe, de plus quelque soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$ alors $\varepsilon(\phi(\sigma)) = +1$ (si $\varepsilon(\sigma) = +1$ c'est clair, sinon $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = (-1) \times (-1) = +1$). Donc $\phi(\mathscr{S}_n)$ est un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.
Enfin ϕ est injective : en effet soit σ tel que $\phi(\sigma) = \mathrm{id}$. Soit $\varepsilon(\sigma) = +1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma = \mathrm{id}$; soit $\varepsilon(\sigma) = -1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma \circ \tau$, pour $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $j = \phi(\sigma)(j) = \sigma \circ \tau(j) = \sigma(j)$, et donc quelque soit $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $\sigma(j) = j$ et donc $\sigma = \mathrm{id}$. On vient de démontrer que la composée de deux permutations à supports disjoint est l'identité si et seulement si les permutations sont déjà l'identité !
Notons encore $\phi : \mathscr{S}_n \longrightarrow \phi(\mathscr{S}_n)$ le morphisme induit par ϕ. Il est injectif et surjectif, donc $\mathscr{S}_n$ est isomorphe $\phi(\mathscr{S}_n)$ qui est un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.

(b) $\mathscr{A}_5$ est de cardinal $5!/2 = 60$, et comme $24 = \mathrm{Card}\mathscr{S}_4$ ne divise pas 60 alors $\mathscr{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 24.

(c) C'est un peu plus délicat car $\mathrm{Card}\mathscr{S}_5 = 5! = 120$ divise $\mathrm{Card}\mathscr{A}_6 = 6!/2 = 360$ donc l'argument ci-dessus n'est pas valide. Cependant s'il existe un isomorphisme entre $\mathscr{S}_5$ et un sous-groupe de $\mathscr{A}_6$ alors un cycle d'ordre 5 de $\mathscr{S}_5$ est envoyé sur une permutation $\sigma \in \mathscr{A}_6$ d'ordre 5.
Décomposons σ en produit de cycles à supports disjoints, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots$. Comme les cycles σ_i sont à supports disjoints, il y a au plus trois cycles (de longueur ≥ 2) dans la décomposition (car dans $\mathscr{A}_6$ on peut permuter au plus 6 éléments).
– Le cas $\sigma = \sigma_1$ n'est pas possible car alors σ_1 serait un cycle d'ordre 5 et donc de signature -1 dans $\mathscr{A}_6$.
– Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ alors les longueurs de σ_1 et σ_2 sont $(4,2)$ ou $(2,2)$, et l'ordre de leur composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est donc 4 ou 2 mais pas 5.
– Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ alors les σ_i sont des transpositions, et la signature de σ est alors -1 ce qui contredit $\sigma \in \mathscr{A}_6$.

Correction de l'exercice 3544 ▲

(a) $(a\ b) \circ (c\ d)$.

(b)

Correction de l'exercice 3545 ▲

(a) $(1\ 2)\circ(i\ j)$.

(b)

Correction de l'exercice 3546 ▲

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n+c+f}$.

Correction de l'exercice 3550 ▲

Compter les inversions ou récurrence : $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 3552 ▲

Les puissances de σ.

Correction de l'exercice 3553 ▲

Conjugaison : $\tau=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x\circ(6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$,
ou $\tau=(1\ 6)\circ(2\ 7)\circ(3\ 8)\circ(4\ 9)\circ(5\ 10)\circ(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x\circ(6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$.
$\Rightarrow$ 50 éléments.

Correction de l'exercice 3555 ▲

30.

Correction de l'exercice 3557 ▲

$$C_{26}^3\times\frac{2C_{23}^3\times 2C_{20}^3}{2!}\times 4!C_{17}^5\times\frac{5!C_{12}^6\times 5!C_6^6}{2!}=10\,372\,722\,765\,601\,996\,800\,000.$$

Correction de l'exercice 3558 ▲

(a) Les inversions de σ sont : $\sigma=(3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

$$\{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{2,6\},\ \{2,7\},\ \{2,8\},\ \{2,10\},\ \{2,11\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{3,6\},\ \{3,7\},\ \{3,8\},\ \{6,7\},\ \{6,8\},\ \{9,10\},\ \{9,11\},\ \{9,12\}.$$

Au total, il y a $2+8+5+2+3=20$ inversions. σ est donc une permutation paire (de signature 1).

(b) $\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$.
Puis, $\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{1,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)=\tau_{1,3}$.
Par suite,

$$\sigma=\tau_{11,12}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{1,4}\circ\tau_{1,3}.$$

(c) $O(1)=\{1,3,4,7\}=O(3)=O(4)=O(7)$, puis $O(2)=\{2,5,8,10\}$ puis $O(6)=\{6\}$ et $O(9)=\{9,11,12\}=O(11)=O(12)$. σ a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

(d) σ est donc le produit commutatif des cycles $c_1=\begin{pmatrix}1&3&4&7\\3&7&7&4\end{pmatrix}$, $c_2=\begin{pmatrix}2&5&8&10\\10&2&5&8\end{pmatrix}$ et $c_3=\begin{pmatrix}9&11&12\\12&9&11\end{pmatrix}$.

On a $c_1^4 = c_2^4 = Id$ et $c_3^3 = Id$. Or, $2005 = 4.1001 + 1$. Donc, $c_1^{2005} = c_1(c_1^4)^{1001} = c_1$, et de même $c_2^{2005} = c_2$. Puis, $c_3^{2005} = (c_3^3)^{668} c_3 = c_3$. Puisque c_1, c_2 et c_3 commutent,

$$\sigma^{2005} = c_1^{2005} c_2^{2005} c_3^{2005} = c_1 c_2 c_3 = \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11).$$

Correction de l'exercice 3559 ▲

$(S_n, \circ)$ est engendré par les transpositions. Il suffit donc de montrer que pour $2 \leq i < j \leq n$, la transposition $\tau_{i,j}$ est produit des $\tau_{1,k}$, $2 \leq k \leq n$.
Mais $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} = (i1j)(ji1)(i1j) = (1ij) = \tau_{i,j}$ ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 3560 ▲

Les éléments de A_n sont les produits pairs de transpositions. Il suffit donc de vérifier qu'un produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3.
Soient i, j et k trois éléments deux à deux distincts de $\{1,...,n\}$. $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}$ est le 3-cycle : $i \to j$ $j \to k$ $k \to i$, ce qui montre qu'un 3-cycle est pair et que le produit de deux transpositions dont les supports ont en commun un singleton est un 3-cycle.
Le cas $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = Id = (231)(312)$ est immédiat. Il reste à étudier le produit de deux transpositions à supports disjoints.
Soient i, j, k et l quatre éléments de deux à deux distincts de $\{1,...,n\}$.

$$\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l} = (jikl)(ijlk) = (jilk) = (jkil)(ljik).$$

Donc, $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l}$ est un bien un produit de 3-cycles ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 3561 ▲

D'après l'exercice 3559, il suffit de montrer que pour $2 \leq i \leq n$, $\tau_{1,i}$ peut s'écrire en utilisant uniquement $\tau = \tau_{1,2}$ et $c = (2\ 3\ ...\ n\ 1)$. On note que $c^n = Id$.
Tout d'abord, pour $1 \leq i \leq n-1$, étudions $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$.
Soit $k \in \{1,...,n\}$.

$$\begin{aligned}\tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) \leq c^{n-i+1}(k) \in \{1,2\} &\Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\} \\ &\Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}.\end{aligned}$$

Donc, si $k \notin \{i, i+1\}$,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

et la restriction de σ à $\{1,...,n\} \setminus \{i,i+1\}$ est l'identité de cet ensemble. Comme σ n'est pas l'identité puisque $\sigma(i) \neq i$, σ est donc nécessairement la transposition $\tau_{i,i+1}$.
On a montré que $\forall i \in \{1,...,n-1\}$, $c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$.
Vérifions maintenant que les $\tau_{1,i}$ s'écrivent à l'aide des $\tau_{j,j+1}$. D'après l'exercice 3559, $\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$, et donc bien sûr, plus généralement, $\tau_{i,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$.
Par suite, $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$ puis, $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$, puis, $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4}$ ... et $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$. Finalement,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \ldots \circ \tau_{i-2,i-1} \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \ldots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 3562 ▲

Soit $(G, \times)$ un groupe. Pour x élément de G, on considère $f_x : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ y & \mapsto & xy \end{array}$. f_x est une application de G vers G et de plus, clairement $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = Id_G$. Donc, pour tout élément x de G, f_x est une permutation de G.
Soit alors $\varphi : \begin{array}{ccc} (G, \times) & \to & (S_G, \circ) \\ x & \mapsto & f_x \end{array}$. D'après ce qui précède, φ est une application. De plus, φ est de plus un morphisme de groupes. En effet, pour $(x, x', y) \in G^3$, on a :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f'_x(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

et donc $\forall (x,x') \in G^2$, $\varphi(xx') = \varphi(x) o \varphi(x')$.
Enfin, φ est injectif car, pour x élément de G :

$$\varphi(x) = Id \Rightarrow \forall y \in G,\ xy = y \Rightarrow xe = e \Rightarrow x = e.$$

Donc, $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$, et φ est injectif.

φ est ainsi un isomorphisme de groupes de $(G,\times)$ sur $(f(G),\circ)$ qui est un sous groupe de $(S_G,\circ)$. $(G,\times)$ est bien isomorphe à un sous groupe de $(S_G,\circ)$.

Correction de l'exercice 3563 ▲

Montrons d'abord par récurrence sur $l \geq 2$ que la signature d'un cycle de longueur l est $(-1)^{l-1}$.

C'est connu pour $l = 2$ (signature d'une transposition).

Soit $l \geq 2$. Supposons que tout cycle de longueur l ait pour signature $(-1)^{l-1}$. Soit c un cycle de longueur $l+1$.

On note $\{x_1, x_2, ..., x_{l+1}\}$ le support de c et on suppose que, pour $1 \leq i \leq l$, $c(x_i) = x_{i+1}$ et que $c(x_{l+1}) = x_1$.

Montrons alors que $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ est un cycle de longueur l. $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ fixe déjà x_{l+1} puis, si $1 \leq i \leq l-1$, $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1,x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$ (car x_{i+1} n'est ni x_1, ni x_{l+1}), et enfin $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1,x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$. $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ est donc bien un cycle de longueur l. Par hypothèse de récurrence, $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ a pour signature $(-1)^{l-1}$ et donc, c a pour signature $(-1)^{(l+1)-1}$.

Montrons maintenant que si σ est une permutation quelconque de $\{1,...,n\}$ ayant k orbites la signature de σ est $(-1)^{n-k}$.

Si σ est l'identité, σ a n orbites et le résultat est clair.

Si σ n'est pas l'identité, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints.

Posons $\sigma = c_1...c_p$ où p désigne le nombre d'orbites de σ non réduites à un singleton et donc $k-p$ est le nombre de points fixes de σ. Si l_i est la longueur de c_i, on a donc $n = l_1 + ... + l_p + (k-p)$ ou encore $n-k = l_1 + ... + l_p - p$.

Mais alors,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{p} \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^{p} (-1)^{l_i - 1} = (-1)^{l_1+...+l_p-p} = (-1)^{n-k}.$$

Correction de l'exercice 3564 ▲

(a) i. Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de $P_\sigma P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))},$$

et est donc aussi le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$. Par suite,

$$\forall (\sigma,\sigma') \in (S_n)^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.$$

ii. Soit $\sigma \in S_n$. D'après a), $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma$. On en déduit que toute matrice P_σ est inversible, d'inverse $P_{\sigma^{-1}}$. Par suite, $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ (et clairement, $G \neq \emptyset$).

Soit alors $(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2$.

$$P_\sigma P_{\sigma'}^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}} \in G.$$

On a montré que G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} S_n & \to & G \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$. D'après a), φ est un morphisme de groupes. φ est clairement surjectif. Il reste à vérifier que φ est injectif.

Soit $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned}
\sigma \in \mathrm{Ker}\varphi &\Rightarrow P_\sigma = I_n \Rightarrow \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,j} \\
&\Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \delta_{i,\sigma(i)} = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \sigma(i) = i \\
&\Rightarrow \sigma = Id.
\end{aligned}$$

Puisque le noyau du morphisme φ est réduit à $\{Id\}$, φ est injectif.

Ainsi, φ est un isomorphisme du groupe $(S_n,\circ)$ sur le groupe $(G,\times)$ et on a montré que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorphe à $(S_n,\circ)$.

(b) Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de AP_σ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Ainsi, l'élément ligne i, colonne j, de AP_σ est l'élément ligne i, colonne $\sigma(j)$, de A, ou encore, si j est un élément donné de $\{1,...,n\}$, la j-ème colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$-ème colonne de A. Ainsi, si on note C_1,...,C_n les colonnes

de A (et donc $A=(C_1,...,C_n)$), alors $AP_\sigma=(C_{\sigma(1)},...,C_{\sigma(n)})$. En clair, multiplier A par P_σ à droite a pour effet d'appliquer la permutation σ aux colonnes de A (puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de A ne modifie pas le rang de A).
De même, le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma A$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}a_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{\sigma^{-1}(i),k}a_{k,j}=a_{\sigma^{-1}(i),j},$$

(on a utilisé $\sigma(k)=i\Leftrightarrow k=\sigma^{-1}(i)$) et multiplier A par P_σ à gauche a pour effet d'appliquer la permutation σ^{-1} aux lignes de A.

Correction de l'exercice 3565 ▲

$G=\{A_1,...,A_p\}$ est déjà une partie non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable pour $\times$. Il reste à vérifier que G est stable pour le passage à l'inverse.
Soient $i\in\{1,...,n\}$, puis $\varphi_i\ :\ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ A & \mapsto & A_iA\end{array}$. Puisque G est stable pour le produit, φ_i est une application de G dans G.
Montrons que φ_i est injective. Soit $(A,B)\in G$.

$$\varphi_(A)=\varphi_i(B)\Rightarrow A_iA=A_iB\Rightarrow A_i^{-1}A_iA=A_i^{-1}A_iB\Rightarrow A=B.$$

Donc, φ_i est une application injective de l'ensemble **fini** G dans lui-même. On sait alors que φ_i est une permutation de G.
Par φ_i, A_i a un antécédent A dans G. $A_iA=A_i$ fournit $A_i^{-1}A_iA=A_i^{-1}A_i$ puis $A=I\in G$. Ainsi, G contient la matrice I. Ensuite, I a un antécédent par φ_i dans G. Donc, il existe $B\in G$ telle que $A_iB=I$. Mais alors $A_i^{-1}=B\in G$.
G est bien stable pour le passage à l'inverse et est donc un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Correction de l'exercice 3566 ▲

Pour $(x_1,...,x_n)\in E$, on pose $\varphi((x_1,...,x_n))=x_1+...+x_n$. φ est une forme linéaire non nulle sur E et H est le noyau de φ. H est donc bien un hyperplan de E.
Il est clair que, pour $(\sigma,\sigma')\in S_n^2$, $f_\sigma\circ f_{\sigma'}=f_{\sigma\circ\sigma'}$. $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un espace vectoriel et donc, p est bien un endomorphisme de E.

$$p^2=\frac{1}{n!^2}\left(\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma\right)^2=\sum_{(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2}f_\sigma\circ f_{\sigma'}.$$

Mais, $(S_n,\circ)$ est un groupe fini. Par suite, l'application $\begin{array}{ccc} S_n & \rightarrow & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma\circ\sigma'\end{array}$, injective (même démarche que dans l'exercice 3565), est une permutation de S_n. On en déduit que, pour σ' donnée, $\sum_{\sigma\in S_n}f_{\sigma\circ\sigma'}=\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma$. Ainsi, en posant $q=n!p$.

$$p^2=\frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n}(\sum_{\sigma\in S_n}f_{\sigma\circ\sigma'})=\frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n}q=\frac{1}{n!^2}.n!q=\frac{1}{n!}q=p.$$

p est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de p. Soit $i\in\{1,...,n\}$.

$$p(e_i)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma(e_i)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a (bien sûr) autant de permuations σ telles que $\sigma(i)=1$, que de permutations σ telles que $\sigma(i)=2$,... ou de permutations σ telles que $\sigma(i)=n$, à savoir $\frac{n!}{n}=(n-1)!$. Donc,

$$\forall i\in\{1,...,n\},\ p(e_i)=\frac{1}{n!}\frac{n!}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k.$$

Posons $u=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Im}p=\mathrm{Vect}(p(e_1),...,p(e_n))=\mathrm{Vect}(u).$$

Ensuite, si $x=x_1e_1+...+x_ne_n$ est un élément de E,

$$p(x)=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}x_kp(e_k)=0\Leftrightarrow(\sum_{k=1}^{n}x_k)u=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}x_k=0\Leftrightarrow x\in H.$$

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H.

Correction de l'exercice 3567 ▲

(a) Commutative, associative, 0 = élt neutre, tout élt $\neq 1$ est régulier, seul 0 est symétrisable.

(b) Tout élt est symétrisable et $x^{-1} = \frac{x}{x-1}$.

Correction de l'exercice 3568 ▲

$\exists\, b \in E$ tq $a*b*a = a$. Alors $b*a$ est neutre à droite et $a*b$ est neutre à gauche.

Correction de l'exercice 3569 ▲

(a) Associative, commutative, $\{e\}$ = élement neutre, A est symétrisable $\iff A = \{a\}$ avec a symétrisable.

(b) Oui.

Correction de l'exercice 3570 ▲

(a) Non commutative, associative, $(1,0)$ = élt neutre,
(a,b) est régulier $\iff a \neq 0$.
(a,b) est inversible $\iff a = \pm 1$.

(b)

(c)

(d)

Correction de l'exercice 3582 ▲

(a)

(b) Soit $x \in G$: $\exists\, u,v \in \mathbb{Z}$ tq $ua+vb = 1 \Rightarrow x = (x^{ua})(x^{vb})$.

Correction de l'exercice 3589 ▲

Soir $\{e_1,\dots,e_p\}$ une partie génératrice de cardinal minimal. Alors les 2^p éléments $e_1^{\alpha_1}\dots e_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i \in \{0,1\}$ sont distincts (sinon un des e_i appartient au groupe engendré par les autres) donc $n \geq 2^p$.

Correction de l'exercice 3590 ▲

Si $a \in G$ est d'ordre infini alors il engendre un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui a une infinité de sous-groupes ; c'est exclu. Donc tous les sous-groupes monogènes de G sont finis, et G est la réunion de ces sous-groupes.

Correction de l'exercice 3620 ▲

(a) $a > 0, b = c, d > 0, ad - bc > 0$.

(b) $a - b > 0$ et $a + (n-1)b > 0$.

(c)

Correction de l'exercice 3621 ▲

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X\sqrt{\frac{3}{2}}, (3X^2-1)\sqrt{\frac{5}{8}} + (5X^3-3X)\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$.

Correction de l'exercice 3622 ▲

$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{X-2}{\sqrt{10}}, \frac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}$.

Correction de l'exercice 3623 ▲

(a)

(b) Élever au carré.

(c) i. $(\vec{x} \mid \vec{u}) = 1 \Leftrightarrow (i(\vec{x}) \mid \vec{u} - i(\vec{x})) = 0$: sphère passant par $\vec{0}$.

ii. Hyperplan ne passant pas par $\vec{0}$.

iii. $\|\vec{x}-\vec{a}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\|\vec{x}-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2-R^2}\right\|^2 = \frac{R^2}{(\|\vec{a}\|^2-R^2)^2}$: sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

Correction de l'exercice 3624 ▲

(a) Élever au carré.

(b)

Correction de l'exercice 3625 ▲

(a)

(b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Correction de l'exercice 3626 ▲

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)\right)$

(b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $\sqrt{\frac{7}{10}}$.

Correction de l'exercice 3627 ▲

$\frac{1}{\Sigma a_i^2}\Big(I-(a_i a_j)\Big)$.

Correction de l'exercice 3631 ▲

Si $p\circ q = q\circ p$: Soient $x \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} p$ et $y \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} q$.
Alors $p\circ q(x) = q(x) \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, donc $(q(x) \mid y) = (x \mid y) = 0$. Si $A = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} p$ et $B = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux : Alors $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A$, $\operatorname{Im} q = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} B$, et $E = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A \overset{\perp}{\oplus} B \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} p^\perp \cap \operatorname{Im} q^\perp)$. Par décomposition, on obtient $p\circ q = q\circ p =$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Correction de l'exercice 3632 ▲

(a) $\sum_{i=1}^n (\vec{e}_j \mid \vec{e}_i)^2 = 1 \Rightarrow$ famille orthonormée et $\operatorname{vect}(\vec{e}_i)^\perp = \{\vec{0}\}$.

(b)

Correction de l'exercice 3635 ▲

sphère de centre $-\frac{\gamma\vec{a}}{\beta\|\vec{a}\|^2}$.

Correction de l'exercice 3639 ▲

Soit X la matrice de $\vec{e}_n$ dans $\mathscr{B}$. On a $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et ${}^tXGX = \lambda x_p = 1$. On applique alors les formules de Cramer.

Correction de l'exercice 3641 ▲

Non, $\|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\|^2 < 0$.

Correction de l'exercice 3643 ▲

(a)

(b)

(c) $\int_{t=0}^{1} t^k t^x\,dt = \frac{1}{k+x+1}$.

(d) Φ a pour pôles au plus simples $-1,-2,\dots,-n-1$ et pour racines $0,1,\dots,n-1$. Comme $\Phi(x)\to 0$ lorsque $x\to\infty$, on a donc $\Phi(x) = \lambda\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1)\dots(x+n+1)}$.

(e) $a_k =$ résidu de Φ en $-k-1 = (-1)^{n+k}\lambda\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}$.

(f)

Correction de l'exercice 3644 ▲

$x^2+(x+y)^2+(x+2y)^2 = (\sqrt{3}(x-y))^2+(\sqrt{2}y)^2$.

Correction de l'exercice 3647 ▲

$f\in F^\perp \Rightarrow xf\perp f$.

Correction de l'exercice 3648 ▲

(a)

(b) $30X^2-36X+9$.

Correction de l'exercice 3649 ▲

$P_a(t) = \frac{3}{8}(3-5t^2-5a^2+15a^2t^2)+\frac{5at}{8}(15-21t^2-21a^2+35a^2t^2)$,
$8\|P_a\|^2 = 9+45a^2-165a^4+175a^6$ est maximal pour $a=\pm1 \Rightarrow \|P_a\| = 2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3650 ▲

(a)

(b) $\pi(f)(t) = f(0)\frac{\operatorname{sh}(1-t)}{\operatorname{sh}(1)}+f(1)\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(1)}$.

(c) L'inf est atteint pour la fonction $f\in W$ telle que $f(0)=\alpha$ et $f(1)=\beta$, soit $f(t)=\alpha\frac{\operatorname{sh}(1-t)}{\operatorname{sh}(1)}+\beta\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(1)}$ et $inf = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}(1)-2\alpha\beta}{\operatorname{sh}(1)}$.

Correction de l'exercice 3651 ▲

(a) Le sous-espace vectoriel engendré a un orthogonal nul.

(b) N'importe quelle famille génératrice convient (équivalence des normes).

(c) $1=\|y_i\|^2=\|y_i\|^4+\sum_{j\neq i}(y_i\mid y_j)^2 \Rightarrow \forall\, j\neq i,\ (y_i\mid y_j)=0$.

(d) Par polarisation on a : $\forall\, x,y,\ \sum_{j\in I}(x\mid y_j)(y\mid y_j) = A(x\mid y)$ donc $\sum_{j\in I}(x\mid y_j)y_j - Ax\in E^\perp$.

Correction de l'exercice 3652 ▲

Soient $x\in\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id})$ et $y=u(z)-z\in\operatorname{Im}(u-\mathrm{id})$. On a $y=u(z+\lambda x)-(z+\lambda x)$ d'où :

$$\|z+\lambda x\|^2 \geq \|u(z+\lambda x)\|^2 = \|z+\lambda x\|^2+2\lambda(x\mid y)+2(z\mid y)+\|y\|^2.$$

En faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on obtient $(x\mid y)=0$ et on conclut avec le théorème du rang.

Correction de l'exercice 3653 ▲

f linéaire et $f = x \mapsto \|x\|^2$ conviennent et l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f vérifiant la propriété est stable par combinaison linéaire donc toute fonction de la forme $x \mapsto \ell(x) + a\|x\|^2$ avec $\ell \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$ convient. On montre que ce sont les seules : Soit $f \in \mathscr{E}$ l'on décompose en sa partie paire f_p et sa partie impaire f_i. Alors $f_p, f_i \in \mathscr{E}$.
Soient $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ et $x \perp y$. On a $f_i(x \pm y) = f_i(x) \pm f_i(y)$ et $f_i(2x) = f_i(x+y) + f_i(x-y) = 2f_i(x)$. Ensuite, $f_i(2x) + f_i(x) - f_i(y) = f_i(2x+y) + f_i(x-2y) = f_i(3x-y) = f_i(3x) - f_i(y)$ d'où $f_i(3x) = 3f_i(x)$ et de proche en proche $f_i(kx) = kf_i(x)$ pour $k \in |||$ puis pour $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ successivement vu la continuité de f. En prenant une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale on a $f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n)$ pour tous $x_1, \dots, x_n$ réels donc f_i est linéaire.
Soient à présent $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ alors $f_p(x+y) + f_p(x-y) = f(2x)$ et $f_p(x+y) + f_p(y-x) = f_p(2y)$ d'où $f_p(2x) = f_p(2y)$. Ainsi f_p est constante sur les sphères de centre 0. On écrit $f_p(x) = \varphi(\|x\|^2)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ prolongée à $\mathbb{R}$ par imparité ($f_p(0) = 0$ de manière évidente) et on a $\varphi(a^2 + b^2) = f_p(ae_1 + be_2) = f_p(ae_1) + f_p(be_2) = \varphi(a^2) + \varphi(b^2)$ d'où l'on conclut que φ est linéaire.

Correction de l'exercice 3654 ▲

Posons $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. **1ère solution.** • φ est symétrique. En effet, pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \varphi(B,A).$$

• φ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition. • Si $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. φ est donc définie, positive.
2ème solution. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}b_{i,j} \right) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Ainsi, φ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. N n'est autre que la norme associée au produit scalaire φ (et en particulier, N est une norme). Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} \right)^2 \\ &\le \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l,j} b_{l,j}^2 \right) = N(A)^2N(B)^2, \end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) \le N(A)N(B).}$$

Correction de l'exercice 3655 ▲

(a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(x+z,y) + f(x-z,y) &= \frac{1}{4}(||x+z+y||^2 + ||x-z+y||^2 - ||x+z-y||^2 - ||x-z-y||^2) \\ &= \frac{1}{4}\left(2(||x+y||^2 + ||z||^2) - 2(||x-y||^2 + ||z||^2)\right) = 2f(x,y). \end{aligned}$$

(b) $2f(x,y) = f(x+x,y) + f(x-x,y) = f(2x,y) + f(0,y)$ mais $f(0,y) = (||y||^2 - ||-y||^2) = 0$ (définition d'une norme).

(c) • Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx,y) = nf(x,y)$. C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \ge 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x,y) + f(nx,y) = f((n+1)x + x,y) + f((n+1)x - x,y) = 2f((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x,y) = 2f((n+1)x,y) - f(nx,y) = 2(n+1)f(x,y) - nf(x,y) = (n+2)f(x,y).$$

Le résultat est démontré par récurrence. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x,y) = f\left(n \times \frac{1}{n}.x,y\right) = nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)$ et donc $f\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}f(x,y)$. • Soit alors $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $f(rx,y) = \frac{1}{q}f(px,y) = p\frac{1}{q}f(x,y) = rf(x,y)$ et donc, pour tout rationnel positif r, $f(rx,y) = rf(x,y)$. Enfin, si $r \le 0$, $f(rx,y) + f(-rx,y) = 2f(0,y) = 0$ (d'après 1)) et donc= $f(-rx,y) = -f(-rx,y) = rf(x,y)$.

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ f(rx,y)=rf(x,y).$$

(d) On pose $x=\frac{1}{2}(u+v)$ et $y=\frac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w)+f(v,w)=f(x+y,w)+f(x-y,w)=2f(x,w)=2f\left(\frac{1}{2}(u+v),w\right)=f(u+v,w).$$

(e) f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)). Donc f est bilinéaire.

(f) f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x\in E$, $f(x,x)=\frac{1}{4}(||x+x||^2+||x-x||^2)=\frac{1}{4}||2x||^2=||x||^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $||\ ||$ est la norme associée. $||\ ||$ est donc une norme euclidienne.

Correction de l'exercice 3656 ▲

Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t)A(t)\,dt=P(0)$.
$P=1$ fournit $\int_0^1 A(t)\,dt=1$ et donc nécessairement $A\neq 0$. $P=XA$ fournit $\int_0^1 tA^2(t)\,dt=P(0)=0$. Mais alors, $\forall t\in[0,1],\ tA^2(t)=0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $A=0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). A n'existe pas.

Correction de l'exercice 3657 ▲

Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}E&\to&\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto&(x|e_1,\dots,x|e_n)\end{array}$. φ est clairement linéaire et $\mathrm{Ker}\varphi$ est $(e_1,\dots,e_n)^\perp=E^\perp=\{0\}$. Comme E et $\mathbb{R}^n$ ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n-uplet $(a_1,\dots,a_n)$ de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ x|e_i=a_i$.

Correction de l'exercice 3658 ▲

1ère solution. Montrons par récurrence que sur $n=\dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est obtusangle, $p\leq n+1$. • Pour $n=1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 verifiant $x_1.x_2<0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3.x_1=0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1.x_3>0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2.x_3>0$). Donc $p\leq 2$. • Soit $n\geq 1$. Suppososons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n+1$. Si $p=1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p\geq 2$. x_p n'est pas nul et $H=x_p^\perp$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n. Soit, pour $1\leq i\leq p-1$, $y_i=x_i-\frac{(x_i|x_p)}{||x_p||^2}x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H. Vérifions que la famille $(y_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est une famille obtusangle. Soit $(i,j)\in[\![1,p-1]\!]$ tel que $i\neq j$.

$$y_i.y_j=x_i.x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}-\frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{||x_p||^2}+\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{||x_p||^4}=x_i|x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}<0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p-1\leq 1+\dim H=n+1$ et donc $p\leq n+2$. Le résultat est démontré par récurrence. **2ème solution.** Montrons que si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i=0\ (*)$. Quite à multiplier les deux membres de $(*)$ par -1, on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i>0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i>0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i\leq 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints. (*) s'écrit $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0\leq\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right\|^2=\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).\left(-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i(-\lambda_j)x_i.x_j\leq 0.$$

Donc, $\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right\|^2=0$ puis $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$. Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p, on obtient $\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).x_p=\sum_{i\in I}\lambda_i(x_i.x_p)<0$ ce qui est une contradiction. La famille $(x_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est donc libre. Mais alors son cardinal $p-1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p\leq n+1$.

Correction de l'exercice 3659 ▲

(a) Soit $a\in\mathbb{C}$. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et $(P,Q)\in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(a)=\lambda P(a)+\mu Q(a)=\lambda\varphi_a(P)+\mu\varphi_a(Q).$$

Donc, φ_a est une forme linéaire sur E.

(b) On a déjà card $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}=n+1=\dim(E)=\dim(E^*)<+\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre.

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $P_k=\prod_{j\neq k}\frac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Chaque P_k est un élément de E et de plus

$$\forall (j,k)\in[\![0,n]\!]^2,\ \varphi_{a_j}(P_k)=\delta_{j,k}=\left\{\begin{array}{l}1\text{ si }j\neq k\\ 0\text{ si }j=k\end{array}\right.\quad(*).$$

Soit alors $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j=0\Rightarrow\forall P\in E,\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(P)=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(P_k)=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\delta_{j,k}=0$$
$$\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k=0.$$

Ceci montre que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre et donc une base de E^*. Les égalités $(*)$ montrent alors que la préduale de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de E^* est la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

(c) Pour $P\in E$, posons $\varphi(P)=\int_0^1 P(t)\,dt$. φ est une forme linéaire sur E et donc, puisque la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de E^*, il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P\in E$, $\int_0^1 P(t)\,dt=\lambda_0P(a_0)+\ldots+\lambda_nP(a_n)$ (les λ_j étant indépendants de P).
En appliquant cette dernière égalité au polynôme P_k, $0\leqslant k\leqslant n$, on obtient $\lambda_k=\int_0^1 P_k(t)\,dt=\int_0^1\prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt$.

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kP(a_k)\text{ où }\forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k=\int_0^1\prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 3660 ▲

Les quatre applications φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 sont effectivement des formes linéaires sur E.
Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$. On note (P_0,P_1,P_2,P_3) cette future base.
• On doit avoir $\varphi_1(P_2)=\varphi_2(P_2)=\psi_2(P_2)=0$ et $\psi_1(P_2)=1$. Ainsi, P_2 s'annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1)=0$. Donc P_2 admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque P_2 est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante a telle que $P_2=aX(X-1)^2=aX^3-2aX^2+aX$ puis $P_2'(0)=1$ fournit $a=1$ puis $P_2=X(X-1)^2$.
• De même, il existe une constante a telle que $P_3=aX^2(X-1)=aX^3-aX^2$ et $1=P_3'(1)=3a-2a$ fournit $P_3=X^2(X-1)$.
• P_0 admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes a et b telles que $P_0=(aX+b)(X-1)^2$ puis les égalités $P_0(0)=1$ et $P_0'(0)=0$ fournissent $b=1$ et $a-2b=0$. Par suite, $P_0=(2X+1)(X-1)^2$.
• P_1 admet 0 pour racine double et il existe deux constantes a et b telles que $P_1=(aX+b)X^2$ puis les égalités $P_1(1)=1$ et $P_1'(1)=0$ fournissent $a+b=1$ et $3a+2b=0$ et donc $P_1=(-2X+3)X^2$.

$$\boxed{P_0=(2X+1)(X-1)^2,\ P_1=(-2X+3)X^2,\ P_2=X(X-1)^2\text{ et }P_3=X^2(X-1).}$$

Montrons alors que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de E^*. Cette famille est libre car si $a\varphi_1+b\varphi_2+c\psi_1+d\psi_2=0$, on obtient en appliquant successivement à P_0, P_1, P_2 et P_3, $a=b=c=d=0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$ est une famille libre de E^* de cardinal 4et donc une base de E^*. Sa préduale est (P_0,P_1,P_2,P_3).

Correction de l'exercice 3661 ▲

1 ère solution. On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi=0\Rightarrow\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\Rightarrow\mathrm{Ker}\psi\subset\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\text{ ou }\mathrm{Ker}\varphi\subset\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\Rightarrow\varphi=0\text{ ou }\psi=0.$$

2ème solution. Supposons que $\varphi\psi=0$ et qu'il existe x et y tels que $\varphi(x)\neq0$ (et donc $\psi(x)=0$) et $\psi(y)\neq0$ (et donc $\varphi(y)=0$). Alors $0=\varphi(x+y)\psi(x+y)=(\varphi(x)+\varphi(y))(\psi(x)+\psi(y))=\varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\forall(\varphi,\psi)\in(E^*)^2,\ (\forall x\in E,\ \varphi(x)\psi(x)=0)\Rightarrow\varphi=0\text{ ou }\psi=0.}$$

Correction de l'exercice 3662 ▲

(a) Soit $\varphi\in E^*$.
• $\Rightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_n\varphi_n$.
Soit $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x)=0+\ldots+0=0$ et donc $x\in\mathrm{Ker}\varphi$. On a montré que $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\varphi$.
• $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de E^* en une base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{n+1},\dots,\varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1},\dots,e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$.
Soit $x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i$ un élément de E.

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)$$

(avec la convention usuelle $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ dans le cas $p = n$). Donc $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i = \mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)$.

Soit alors $\varphi \in E^*$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p) \subset \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j \in [\![n+1,p]\!],\ \varphi(e_j) = 0$$
$$\Rightarrow \forall j \in [\![n+1,p]\!],\ \lambda_j = 0 \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre.

Si tous les φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i = E$ puis $\mathrm{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, φ est combinaison linéaire des φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si les φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ génératrice de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m})$ de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$, chaque $\mathrm{Ker}\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, contient $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, φ est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$ et donc des φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

(b) Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P = \mathrm{Ker}\varphi$ (en particulier φ n'est pas nulle). Soient φ_1 la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto x+y+z$ et φ_2 la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto 2x+3z$. Alors la famille (φ_1,φ_2) est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D = \mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} /\ \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux)},$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a+5b = 0.$$

Une équation de P est donc $5(x+y+z) - 3(2x+3z) = 0$ ou encore $-x+5y-4z = 0$.

Correction de l'exercice 3663 ▲

Soit $f: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)) \end{array}$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est liée si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.

• Si la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre, c'est une base de E^* (car $\dim(E^*) = n$). Notons $(u_1,\dots,u_n)$ sa préduale et notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $f(u_i) = e_i$. Ainsi, l'image par f d'une base de E est une base de $\mathbb{K}^n$ et on sait alors que f est un isomorphisme. En particulier, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

• Si les φ_i sont tous nuls, tout vecteur non nul x annule chaque φ_i. Supposons alors que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est liée et que les φ_i ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m})$ (avec $1 \leqslant m < n$) de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m},\psi_1,\dots,\psi_{n-m})$ de E^*. On note $(e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires $\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m}$ s'annulent toutes en e_n et donc chaque φ_i s'annule en e_n puisque chaque φ_i est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant i \leqslant m$. Le vecteur e_n est donc un vecteur non nul x tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

Correction de l'exercice 3664 ▲

La matrice de la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$. La matrice A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$ (pour $2 \leqslant j \leqslant 3, C_j \leftarrow C_j - C_1$) puis que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$ $(C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2)$

• Si $m = 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{rg}(A) = 3$.

• Si $m\neq 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$ $(C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3)$ puis que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$ $(C_4 \leftarrow 2C_4+(m-2)C_3)$

Donc, si $m=4$, $\text{rg}(A)=3$ et si m n'est ni 0 ni 4, $\text{rg}(A)=4$.

$$\boxed{\text{Si } m\notin\{0,4\},\ \text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=4 \text{ et si } m\in\{0,4\},\ \text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=3.}$$

Correction de l'exercice 3665 ▲

(a) • Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t}=0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,+\infty[,\ P(t)=0\Rightarrow P=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, la forme φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

(b) i. Soit $n\in\mathbb{N}$. La formule de LEIBNIZ permet d'écrire

$$(X^ne^{-X})^{(n)}e^X=\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(X^n)^{(n-k)}(e^{-X})^{(k)}\right)e^X=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}X^k.$$

En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(h_n)=n$ (et $\text{dom}(h_n)=(-1)^n$) et on sait que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$$

ii. Soient $P\in E$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A>0$. Les deux fonctions $t\mapsto(t^ne^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=\int_0^A P(t)(t^ne^{-t})^{(n)}\,dt=\left[P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A-\int_0^A P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt$$

Maintenant, $(t^ne^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de LEIBNIZ montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t\mapsto P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=-\int_0^{+\infty}P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt.$$

De manière générale, pour $0\leqslant k\leqslant n$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t\mapsto P^{(k)}(t)(t^ne^{-t})^{(n-k)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \int_0^{+\infty}P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=(-1)^k\int_0^{+\infty}P^{(k)}(t)(t^ne^{-t})^{(n-k)}\,dt.$$

En particulier, pour $k=n$ on obtient $\int_0^{+\infty}P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=(-1)^n\int_0^{+\infty}P^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt$. Cette égalité reste vraie quand $n=0$ et on a montré que

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(P,h_n)=\int_0^{+\infty}P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=(-1)^n\int_0^{+\infty}P^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt.$$

En particulier, si $n\in\mathbb{N}^*$ et $\deg(P)<n$, on a $P^{(n)}=0$ et donc $\varphi(P,h_n)=0$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $h_n\in(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(h_n)=n$, on en déduit en particulier que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi(hn,h_k)=0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

iii. Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n)=n$ et $\text{dom}(h_n)=(-1)^n$, on a $h_n^{(n)}=(-1)^nn!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2=(-1)^n\int_0^{+\infty}h_n^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt=n!\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,dt=n!\Gamma(n+1)=n!^2,$$

et donc $\|h_n\|=n!$. Par suite,

$$\boxed{\text{la famille } \left(\frac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

Correction de **l'exercice 3666 ▲**

(a) • Soit $(P,Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Ensuite, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on en déduit que l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et $\varphi(P,Q)$ existe.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t \in]-1,1[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

(b) i. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En posant $t = \cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\pi}^{0} \frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,(-\sin\theta d\theta) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta.$$

Si de plus, $n \neq p$,

$$\varphi(T_n,T_p) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{la famille } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (E,\varphi).}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quand $p = n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2n\theta))\,d\theta = \begin{cases} \pi \text{ si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} \text{ si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}.}$$

Correction de **l'exercice 3667 ▲**

(a) Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$. La suite nulle est élément de E. Soient $(u,v) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$0 \leqslant (\lambda u+\mu v)^2 = \lambda^2u^2+2\lambda\mu uv+\mu^2v^2 \leqslant \lambda^2u^2+\lambda\mu(u^2+v^2)+\mu^2v^2 = (\lambda^2+\lambda\mu)u^2+(\lambda\mu+\mu^2)v^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2+(\lambda\mu+\mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u+\mu v$ est de carré sommable. On a montré que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.).}$$

(b) • Soient u et v deux éléments de E. Pour tout entier naturel n,

$$|u_nv_n \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général u_nv_n est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u,v)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u \in E$,

$$\varphi(u,u) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Correction de l'exercice 3668 ▲

Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tA \times B) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire.
L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A = iE_{1,1} \neq 0$ alors ${}^tAA = -E_{1,1}$ puis $\mathrm{Tr}({}^tAA) = -1 < 0$.

Correction de l'exercice 3669 ▲

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2\ (N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$.
Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B. Si B existe, B est nécessairement défini par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ B(x,y) = \tfrac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2).$$

Réciproquement,
• Pour tout $x \in E$, $B(x,x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))2$ et donc $\forall x \in E$, $B(x,x) \geqslant 0$ puis $B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus, $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$.
• $\forall (x,y) \in E^2$, $B(y,x) = \frac{1}{4}((N(y+x))^2 - (N(y-x))^2) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2) = B(x,y)$.
• Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.
1) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x+y,z) + B(x-y,z) = 2B(x,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x+y,z) + B(x-y,z) &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 - (N(x+y-z))^2 + (N(x-y+z))^2 - (N(x-y-z))^2) \\
&= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 + (N(x-y+z))^2) - ((N(x+y-z))^2 + (N(x-y-z))^2) \\
&= \frac{1}{4}(2(N(x+z))^2 + (N(y))^2) - 2((N(x-z))^2 + (N(y))^2) \text{ (par hypothèse sur } N) \\
&= \frac{2}{4}((N(x+z))^2 - (N(x-z))^2) = 2B(x,z).
\end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall (x,z) \in E^2$, $B(2x,z) = 2B(x,z)$. Tout d'abord, $B(0,z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$ puis d'après 1)

$$B(2x,z) = B(x+x,z) + B(x-x,z) = 2B(x,z).$$

3) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x,z) + B(y,z) = B(x+y,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x,z) + B(y,z) &= B\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) \\
&= 2B\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ (d'après 1))} \\
&= B(x+y,z) \text{ (d'après 2)).}
\end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$.
• C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$ et $B((n+1)x,y) = (n+1)B(x,y)$. Alors

$$B((n+2)x,y) + B(nx,y) = B((n+2)x + nx, y) = B(2(n+1)x,y) = 2B((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x,y) = 2(n+1)B(x,y) - nB(x,y) = (n+2)B(x,y)$.
5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$. Le résultat est acquis pour $n \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx,y) + B(-nx,y) = B(0,y) = 0 \text{ et donc } B(-nx,y) = -B(nx,y) = -nB(x,y),$$

6) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}B(x,y)$.

$$B(x,y) = B\left(\tfrac{1}{n}nx,y\right) = nB\left(\tfrac{1}{n}x,y\right) \text{ et donc } B\left(\tfrac{1}{n}x,y\right) = \tfrac{1}{n}B(x,y).$$

7) Montrons que $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B(rx,y)=rB(x,y)$. Soient $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ puis $r=\frac{p}{q}$.

$$B(rx,y)=B\left(\frac{p}{q}x,y\right)=pB\left(\frac{1}{q}x,y\right)=\frac{p}{q}B(x,y)=rB(x,y).$$

8) Montrons que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B(\lambda x,y)=\lambda B(x,y)$. Soit λ un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite λ.

Maintenant, l'application $N:\begin{array}{ccc}(E,N)&\rightarrow&(\mathbb{R},|\;|)\\ x&\mapsto&N(x)\end{array}$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E. Donc

$$B(\lambda x,y)=B(\lim_{n\to+\infty}r_nx,y)=\lim_{n\to+\infty}B(r_nx,y)=\lim_{n\to+\infty}r_nB(x,y)=\lambda B(x,y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x\in E$, $N(x)=\sqrt{B(x,x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

$$\boxed{\text{toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.}}$$

Correction de l'exercice 3670 ▲

Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$$1=\|e_i\|^2=\sum_{j\geq 1}(e_i|e_j)^2=1+\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2$$

et donc $\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2=0$.On en déduit que $\forall j\neq i$, $(e_i|e_j)=0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i\neq j$, on a $e_i|e_j=0$. Par suite

la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthonormale.

Il reste à vérifier que si $F=\text{Vect}(e_1,...,e_n)$ alors $F=E$.

Soit x un vecteur de E. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. On sait que

$$p_F(x)=\sum_{i=1}^n(x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2=\sum_{i=1}^n(x|e_i)^2=\|x\|^2$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x-p_F(x)\|^2=\|x\|2-\|p_F(x)\|^2=0,$$

et donc $x=p_F(x)$ ce qui montre que $x\in F$. Donc $F=E$ et finalement

$$\boxed{\text{la famille }(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\text{ est une base orthonormée de }E.}$$

Correction de l'exercice 3671 ▲

1 ère solution. Soit $p\geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1,...,x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1,...,x_{p-1})$ est libre.

Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1,...,x_{p-1})$ soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1,...,\lambda_{p-1})\in\mathbb{R}^{p-1}\setminus\{(0,\ldots,0)\}$ tel que $\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_kx_k=0$.

Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif. On pose $I=\{k\in[\![1,p-1]\!]\,/\,\lambda_k>0\}$ et $J=\{k\in[\![1,p-1]\!]\,/\,\lambda_k\leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=0$ et si J est non vide,

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right\|^2=-\left(\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right)\left(\sum_{j\in J}\lambda_jx_j\right)=-\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i\lambda_j\left(x_i|x_j\right)\leqslant 0\text{ (car }\forall(i,j)\in I\times J,\ \left(x_i|x_j\right)<0\text{ et }\lambda_i\lambda_j\leqslant 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=0$. Mais ceci est impossible car $\left(\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right)|x_p=\sum_{i\in I}\lambda_i\left(x_i|x_p\right)<0$.

On a montré que la famille $(x_1,\ldots,x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p-1\leqslant n$ ou encore $p\leqslant n+1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n=\dim E_n\geqslant 1$ que tout famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$.

• Pour $n=1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1x_2<0$ et $x_1x_3<0$ et $x_2x_3<0$.

Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille obtusangle de E_{n+1}.

Si $p=1$ alors $p\leqslant n+2$. Supposons dorénavant $p\geqslant 2$.

On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p-1$ d'un espace euclidien de dimension n.

Soit $F=x_p^{\perp}$. Puisque la famille $(x_1,...,x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n.

On note y_1, y_2,..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ... , x_{p-1} sur F. On sait que

$$\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ y_i=x_i-\frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p.$$

Soit $(i,j) \in [\![1,p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leqslant n+1$ et donc $p \leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 3680 ▲

(a) Oui ssi $\lambda^2+\mu^2 \leq 1$.

(b) Non, disc $= -1$.

(c) Oui, $= \frac{5x^2}{12} + 3\left(y+\frac{x}{3}\right)^2 + 4z^2 + \left(t+\frac{x}{2}\right)^2$.

Correction de l'exercice 3681 ▲

$\mathrm{Spec}(A) = \{6,3,3\} \Rightarrow$ oui.

Correction de l'exercice 3682 ▲

$(n-1,0)$.

Correction de l'exercice 3684 ▲

Récurrence, $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i<k} \frac{i+1}{2i} y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\geq k} x_i^2 + \frac{1}{2k}\left(\sum_{i\geq k} x_i\right)^2$.

Correction de l'exercice 3687 ▲

(a)

(b)

(c) Si $a \in \mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi} = E$.
Si $a \notin \mathrm{Ker} f$ et $q(a) = 0$, $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi} = a^{\perp}$.
Si $q(a) \neq 0$, $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi} = \mathrm{Ker}(f) \oplus < a >$.

Correction de l'exercice 3690 ▲

(a)

(b) $(d-1,0)$ ou $(d,0)$.

Correction de l'exercice 3691 ▲

Récurrence sur n.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A) \neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n}\alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1,\dots,e_{n-1}$. Alors A a mêmes mineurs principaux que la matrice de q dans la base $(e_1,\dots,e_{n-1},u_n)$.

Correction de l'exercice 3692 ▲

Pour A à diagonale fortement dominante, récurrence sur n.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A) \neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n}\alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1,\dots,e_{n-1}$ et il faut montrer que $q(u_n) > 0$ ce qui résulte de $|\alpha_i| \leq 1$ en considérant la i-ème ligne de A.

Correction de l'exercice 3693 ▲

(a)

(b)

(c) $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

Correction de l'exercice 3695 ▲

(a) Il n'y a pas de solution pour $n=2$ donc pas non plus pour $n>2$.

(b) Pour $n=3$ on trouve $A={}^tCC$ où C est une colonne sans zéros, pour $n\geq 3$ on obtient le même résultat en considérant les blocs 3×3 centrés sur la diagonale.

Correction de l'exercice 3696 ▲

Soit P orthogonale diagonalisant S : ${}^tPSP=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $Y={}^tPX$.

On a : $q(X)=\begin{vmatrix} 0 & y_1 & \dots & y_n \\ y_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & & & \lambda_n \end{vmatrix}=-\lambda_1\dots\lambda_n\left(\frac{y_1^2}{\lambda_1}+\dots+\frac{y_n^2}{\lambda_n}\right).$

Correction de l'exercice 3697 ▲

Pour $a=0$, q est définie positive. Pour $a\neq 0$ prendre une base orthonormale commençant par a ; la matrice de q dans cette base est $\mathrm{Diag}(\alpha+\beta\|a\|^2,\alpha,\dots,\alpha)$.

Correction de l'exercice 3698 ▲

Soit (E_{ij}) la base canonique de $\mathscr{M}_2((x^2+1)^)$: $E_{12}^2=0$ donc $q(E_{12})=0$ et si A est une matrice quelconque de rang 1, A est équivalente à E_{12} d'où $q(A)=0$. Si $A=0$ on a aussi $q(A)=0$ et si A est inversible alors toute matrice est multiple de A donc $q(A)\neq 0$, en particulier $q(I)=1$ car $q^2(I)=q(I)$. On en déduit $q(A)=0\Leftrightarrow\det(A)=0$.

Pour A quelconque, les applications : $z\mapsto\det(A-zI)$ et $z\mapsto q(A-zI)$ sont polynomiales de degré 2, avec le même coefficient de z^2 et les mêmes racines, donc sont égales d'où $q=\det$.

Remarque : le même raisonnement est applicable sur un corps quelconque en se limitant aux matrices triangulaires, et toute matrice est produit de triangulaires (algorithme du pivot de Gauss).

Correction de l'exercice 3699 ▲

Quitte à remplacer E par $\mathrm{vect}(x_1,\dots,y_n)$, on peut supposer E de dimension finie p. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et X,Y et F les matrices de $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)$ et ϕ dans $\mathscr{B}$. On doit prouver $\det({}^tXFY)^2\leq\det({}^tXFX)\det({}^tYFY)$. Comme F est symétrique positive, elle est de la forme $F={}^tMM$ pour une certaine matrice carrée M, donc en remplaçant X et Y par MX et MY, il suffit de prouver $\det({}^tXY)^2\leq\det({}^tXX)\det({}^tYY)$ pour toutes matrices X,Y réelles rectangulaires de même taille.

En projetant chaque colonne de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de X, on peut décomposer $Y=XA+B$ où A est une matrice carrée et B une matrice rectangulaire de même taille que X telle que ${}^tXB=0$. Il reste à prouver : $\det({}^tXXA)^2\leq\det({}^tXX)\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$, soit : $\det({}^tA{}^tXXA)\leq\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$.

On pose $U={}^tA{}^tXXA$ et $V={}^tBB$: U et V sont des matrices réelles symétriques positives de même taille, à priori quelconques. Si U est inversible, on écrit $U={}^tPP$ avec P inversible et on est rammené à prouver que $1\leq\det(I+{}^tP^{-1}VP^{-1})=\det(I+W)$, avec W symétrique positive, ce qui résulte du fait que toutes les valeurs propres de $I+W$ sont supérieures ou égales à 1. Si U n'est pas inversible, on remplace U par $U+\varepsilon I$ avec $\varepsilon>0$, puis on fait tendre ε vers 0^+.

Remarque : il y a peut-être plus simple ?

Correction de l'exercice 3700 ▲

(a) Si la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$,

$$Q(f)=\lambda(a^2+2bc+d^2)+\mu(ad-bc).$$

Q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et donc Q est une forme quadratique sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

(b) • Si $\lambda=\mu=0$, $r=0$ et $s=(0,0)$. Si $\lambda=0$ et $\mu\neq 0$,

$$Q(f)=\tfrac{\mu}{4}(a+d)^2-\tfrac{\mu}{4}(a-d)^2-\tfrac{mu}{4}(b+c)^2+\tfrac{\mu}{4}(b-c)^2,$$

et donc $r=4$ et $s=(2,2)$.

• Si $\lambda\neq 0$,

$$\begin{aligned}Q(f)&=\lambda a^2+\mu ad+(2\lambda-\mu)bc+\lambda d^2=\lambda\left(a+\frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2+(2\lambda-\mu)bc+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2\\&=\lambda\left(a+\frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2+\frac{2\lambda-\mu}{4}(b+c)^2-\frac{2\lambda-\mu}{4}(b-c)^2.\end{aligned}$$

Maintenant, les quatre formes linéaires $(a,b,c,d)\mapsto a+\frac{\mu}{2\lambda}d$, $(a,b,c,d)\mapsto d$, $(a,b,c,d)\mapsto b+c$ et $(a,b,c,d)\mapsto b-c$ sont linéairement indépendantes. Donc
- si $\mu=2\lambda$ $(\neq 0)$, $r=1$,
- si $\mu=-2\lambda$ $(\neq 2\lambda)$, $r=3$,
- si $|\mu|\neq 2|\lambda|$ $(\neq 0)$, $r=4$.
En particulier, si $\lambda=1$ et $\mu=0$, alors $r=4$ et $s=(3,1)$ et si $\lambda=0$ et $\mu=1$, $r=4$ et $s=(2,2)$.

Correction de l'exercice 3701 ▲

Dans le cas où E est de dimension finie, la signature de Q permet de conclure immédiatement. Supposons donc que E n'est pas de dimension fine.
Par hypothèse, il existe un vecteur non nul x_0 tel que $Q(x_0)=0$. Supposons Q de signe constant. Ouite à remplacer Q par $-Q$, on supposera que Q est positive. D ?après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (valable pour les formes quadratiques positives)

$$\forall y\in E,\ |\varphi(x_0,y)|\leqslant\sqrt{Q(x_0)}\sqrt{Q(y)}=0.$$

Donc $\forall y\in E,\ \varphi(x_0,y)=0$ et x_0 est dans le noyau de φ. Puisque $x_0\neq 0$, on en déduit que φ est dégénérée. En résumé, si Q est de signe constant, φ est dégénérée ou encore si φ est non dégénérée, Q n'est pas de signe constant.

Correction de l'exercice 3702 ▲

(a) Pour tout $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$Q(x_1,...,x_n)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt\right)x_ix_j=\int_a^b\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_jf_i(t)f_j(t)\right)\,dt=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n x_if_i(t)\right)^2\,dt\geqslant 0.$

Donc Q est une forme quadratique positive.

(b) De plus, pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $Q((x_1,...,x_n))=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_if_i=0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Donc

$$\begin{aligned}Q \text{ définie}&\Leftrightarrow\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ [Q((x_1,...,x_n))=0\Rightarrow(x_1,...,x_n)=0]\\&\Leftrightarrow\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ [\sum_{i=1}^n x_if_i=0\Rightarrow(x_1,...,x_n)=0]\\&(f_1,...,f_n)\text{ libre.}\end{aligned}$$

(c) Dans le cas particulier envisagé, la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice de HILBERT $H_n=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction de l'exercice 3703 ▲

Posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&x_1&\ldots&x_n\\x_1&&&\\ \vdots&&S&\\x_n&&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&{}^tX\\X&S\end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs fournit $\begin{pmatrix}0&{}^tX\\X&S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&S^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&{}^tXS^{-1}\\X&I_n\end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix}0&{}^tX\\X&S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&S^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\X&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&{}^tXS^{-1}\\X&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\X&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^tXS^{-1}X&{}^tXS^{-1}\\0&I_n\end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(A)\times\det(S^{-1})\times(-1)={}^tXS^{-1}X$ puis que $Q(X)=-\det(A)={}^tX((\det(S))S^{-1})X={}^tXS'X$ où $S'=(\det(S))S^{-1}$.
Maintenant, la matrice S est définie positive et donc ses valeurs propres sont des réels strictement positifs. Les valeurs propres de la matrice S' sont les $\frac{\det(S)}{\lambda}$ où λ décrit le spectre de S et donc la matrice S' est aussi une matrice symétrique définie positive. Q est donc une forme quadratique définie positive.

Correction de l'exercice 3706 ▲

Le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A|B)=\mathrm{Tr}({}^tAB)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

(a) Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A,B)\in\mathscr{S}_(\mathbb{R})\times\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B)=\mathrm{Tr}({}^tAB)=\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)=-\mathrm{Tr}({}^tBA)=-(B|A).$$

et donc $(A|B)=0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\subset(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R}))=\dim\left(((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp=\mathscr{S}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M-p_a(M)=p_s(M)$ avec

$$p_s(M)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d\left(M,\mathscr{A}_3(R)\right)=\|p_s(M)\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}=1.$$

Correction de l'exercice 3725 ▲

$\lambda=0$, $f=\mathrm{id}_E$ et $\lambda=-\frac{2}{\|\vec{v}\|^2}$, $f=$ la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(\vec{v})$.

Correction de l'exercice 3730 ▲

$\varphi(A)=\mathrm{tr}(A\,{}^tA)$ donc pour toute matrice P telle que $P\,{}^tP$ soit scalaire (non nulle) on a $\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(A)$. Ces matrices sont les matrices de la forme $P=\lambda M$ avec M orthogonale (matrices de similitude).

Réciproquement, soit P telle que $\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(A)$ et $Q=P\,{}^tP$.

On a par polarisation : $\forall\,A,B,\ \mathrm{tr}(AQ\,{}^tB\,{}^tQ^{-1})=\mathrm{tr}(A\,{}^tB)$ donc pour $B=QC$: $\forall\,A,C\ \mathrm{tr}(AQ^tC)=\mathrm{tr}(A^tCQ)$ ce qui implique : $\forall\,C,\ Q^tC={}^tCQ$ et donc que Q est scalaire.

Correction de l'exercice 3740 ▲

(a)

(b) On raisonne par récurrence sur $d=\dim(F)=\dim(G)$. Pour $d=0$ il n'y a rien à prouver.
Pour $d\geq 1$ on considère $a\in F$ et $b\in G$ unitaires tels que $(a\mid b)$ soit maximal. Soient F_1 l'orthogonal de a dans F et G_1 l'orthogonal de b dans G (sous-espaces vectoriels de dimensions égales à $d-1$). Le choix de a,b fait que F_1 est orthogonal à b et G_1 est orthogonal à a, donc F_1 et G_1 sont tous deux inclus dans l'orthogonal de $\mathrm{vect}(a,b)$. On peut trouver un endomorphisme de cet orthogonal qui échange F_1 et G_1, que l'on complète par la symétrie orthogonale dans $\mathrm{vect}(a,b)$ qui échange a et b.

Correction de l'exercice 3741 ▲

(a)

(b)

(c) oui pour ϕ_P.
Pour ψ_P : $\forall\,A,B,\ \mathrm{tr}({}^tAB)=\mathrm{tr}({}^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP)=\mathrm{tr}(P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
Donc $P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}=A$, donc P^tP est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Correction de l'exercice 3742 ▲

$A=0$ ou $A\in\mathscr{O}^+(n)$.

Correction de l'exercice 3743 ▲

(a) $A=P-I$, $P\in\mathscr{O}(n)$.

(b) Hadamard.

Correction de l'exercice 3745 ▲

(a)

(b) Tout $f \in G$ vérifie $\det(f) \in \{-1,1\}$. Réciproquement, soit $f \in U(E)$ tq $\det(f) \in \{-1,1\}$ et $F = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$. On montre que f est composée de réflexions par récurrence sur $p = \mathrm{codim} F$.

$p=0 \Rightarrow f = \mathrm{id}$. $p=1 \Rightarrow f$ est une réflexion car F est un hyperplan et $F^{\perp}$ est stable par f.

$0,\dots,p-1 \Rightarrow p$: soit $(e_1,\dots,e_n)$ une BON de E telle que $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est une BON de F et e_1 est vecteur propre de f. Soit $e_1' = f(e_1) = \lambda e_1$, et σ,σ' deux réflexions telles que $\sigma(e_1) = e_2$ et $\sigma'(e_2) = e_1'$. Alors $g = \sigma \circ \sigma' \circ f \in U(E)$, $\det(g) = \det(f) \in \{-1,1\}$ et $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id})) < p$ donc g est composée de réflexions et f aussi.

Correction de l'exercice 3749 ▲

$f = \mathrm{id} - r$ où $r(x_1,\dots,x_n) = (x_n,x_1,\dots,x_{n-1})$. Donc $f^* \circ f = 2\mathrm{id} - r - r^{-1}$ a pour valeurs propres les nombres $2-2\cos(2k\pi/n)$, $k \in [[0,2n-1]]$ et $\|f\| = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\cos(\pi/2n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$.

Correction de l'exercice 3750 ▲

Oui. Pour $n=1$ il y a égalité. Pour $n=2$ cela résulte de la densité de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$ (démonstration ci-dessous). Pour n quelconque, il suffit de voir qu'une réflexion quelconque est limite de réflexions à coefficients rationnels (approcher un vecteur non nul normal à l'hyperplan de réflexion par une suite de vecteurs rationnels).

Densité de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$: pour $p \in |||^*$ on considère $z_p = \frac{(p^2-1)+2ip}{p^2+1}$. On a $z_p \in \mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ et $z_p \to 1$ lorsque $p \to \infty$. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $d(z, \mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]) \le d(z, \{z_p^k,\ k \in \mathbb{Z}\}) \le \frac{1}{2}|1-z_p|$.

Correction de l'exercice 3751 ▲

${}^tAA = I \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 1$. Dans ce cas $\det(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$ donc f est un quart de tour. L'axe du quart de tour est engendré par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3752 ▲

(a) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ (M est une matrice de format (p,n)). Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$. Donc, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = x_i|x_j$ ou encore

$$\boxed{G = {}^tMM.}$$

Il s'agit alors de montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tMM)$. Ceci provient du fait que M et ${}^tMM$ ont même noyau. En effet, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \mathrm{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tM \times MX = 0 \Rightarrow ({}^tMM)X = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}({}^tMM)$$

et

$$X \in \mathrm{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow ||MX||^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$$
$$\Rightarrow X \in \mathrm{Ker}M.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}({}^tMM) = \mathrm{Ker}(G(x_1,\dots,x_n))$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(G(x_1,\dots,x_n))$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(G(x_1,\dots,x_n)) = \mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n).}$$

(b) Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(x_1,...,x_n) < n$, et donc, puisque G est une matrice carrée de format n, $\gamma(x_1,...,x_n) = \det(G) = 0$. Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, $(x_1,...,x_n)$ engendre un espace F de dimension n. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de F et M la matrice de la famille $(x_1,...,x_n)$ dans $\mathscr{B}$. D'après 1), on a $G = {}^tMM$ et d'autre part, M est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1,...,x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

(c) On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_1 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0|x_1 \\ 0|x_2 \\ \vdots \\ 0|x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x), x_1, ..., x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x), x_1, ..., x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x, x_1, ..., x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, ..., x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}}.}$$

Correction de l'exercice 3753 ▲

Un vecteur engendrant D est $\overrightarrow{u} = (2, 1, 3)$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p((x, y, z)) = \frac{(x, y, z)|(2, 1, 3)}{\|(2, 1, 3)\|^2}(2, 1, 3) = \frac{2x + y + 3z}{14}(2, 1, 3).$$

On en déduit que $\text{Mat}_{\mathscr{B}} p = P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, puis $\text{Mat}_{\mathscr{B}} s = 2P - I = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Plus généralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a, b, c) dans la base canonique orthonormée est $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée est $I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3754 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\,dx &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b + ab = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{2}(3b - 1)\right)^2 - \frac{1}{12}(3b - 1)^2 + b^2 - \frac{2}{5}b + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{2}(3b - 1)\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{10}b + \frac{1}{36} = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{2}(3b - 1)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(b + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{225} \geq \frac{4}{225},\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a + \frac{1}{2}(3b - 1) = b + \frac{1}{5} = 0$ ou encore $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{4}{5}$.

$$\boxed{\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\,dx \text{ est minimum pour } a = \frac{4}{5} \text{ et } b = -\frac{1}{5} \text{ et ce minimum vaut } \frac{4}{225}.}$$

2ème solution. $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX + b$. On doit calculer $\text{Inf}\left\{\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\,dx,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F = \mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX + b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F. Trouvons une base orthonormale de F. L'orthonormalisée (P_0, P_1) de $(1, X)$ convient. $\|1\|^2 = \int_0^1 1\,dt = 1$ et $P_0 = 1$. Puis $X - (X|P_0)P_0 = X - \int_0^1 t\,dt = X - \frac{1}{2}$, et comme $\|X - (X|P_0)P_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $P_1 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$. La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0 + (X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0) = \int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{5}$ et $(X^4|P_1) = \sqrt{3}\int_0^1 t^4(2t - 1)\,dt = \sqrt{3}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est $\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X - 1) = \frac{1}{5}(4X - 1)$. Le minimum cherché est alors $\int_0^1 \left(t^4 - \frac{1}{5}(4t - 1)\right)^2\,dt = ... = \frac{4}{225}$.

Correction de l'exercice 3755 ▲

Notons P le plan d'équation $x + y = 0$ dans la base $\mathscr{B} = (i, j, k)$. P est le plan de vecteur normal $n = i + j$.

(a) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P' d'équation $x-y+z=0$. $s(P)$ est le plan de vecteur normal $s(n)$. Or, le vecteur n est dans P' et donc $s(n)=n$ puis $s(P)=P$.

$$\boxed{s(P) \text{ est le plan } P.}$$

(b) Notons σ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $u=(1,1,1)$. $\sigma(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\sigma(n)=2\frac{n.u}{\|u\|^2}u-n=2\frac{2}{3}(1,1,1)-(1,1,0)=\frac{1}{3}(1,1,4).$$

$$\boxed{\sigma(P) \text{ est le plan d'équation } x+y+4z=0.}$$

(c) Notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur unitaire $u=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. $r(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\begin{aligned}
r(n)&=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)n+\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)(n.u)u+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)u\wedge n\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{2}{3}(1,1,1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0)\\
&=\frac{1}{3\sqrt{2}}(3+2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3},3+2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3},2(\sqrt{2}-1))=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3},1+2\sqrt{2}+\sqrt{3},2(\sqrt{2}-1)).
\end{aligned}$$

$$\boxed{r(P) \text{ est le plan d'équation } (1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})y+2(\sqrt{2}-1)z=0.}$$

Correction de l'exercice 3756 ▲

Notons p la projection sur (P) parallèlement à (Δ). • Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ x-2y-z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z=-x+1\\ 2y+z=x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x-1\\ z=-3x+2\end{array}\right.$$

(D) est la droite de repère $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. • (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u'}$ et donc (D) n'est pas parallèle à (Δ). On en déduit que $p(D)$ est une droite. Plus précisément, $p(D)$ est la droite intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et parallèle à (Δ). Déterminons une équation de (P'). Un repère de (P') est $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$. Donc

$$M(x,y,z)\in(P')\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ccc}x&1&1\\ y+1&2&3\\ z-2&-3&2\end{array}\right|=0\Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

Finalement

$$\boxed{p(D) \text{ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est } \left\{\begin{array}{l}13x-5y+z=7\\ x+3y+2z=6\end{array}\right.}$$

Correction de l'exercice 3757 ▲

Notons p la projection orthogonale sur (P). Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires et donc $p(D)$ est une droite du plan (P). Plus précisément, $p(D)$ est l'intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et perpendiculaire à (P). Un repère de (P') est $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$. Donc

$$M(x,y,z)\in(P')\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ccc}x&1&1\\ y+1&2&3\\ z-2&-3&2\end{array}\right|=0\Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

$$\boxed{\text{La projetée orthogonale de } (D) \text{ sur } (P) \text{ est la droite d'équations } \left\{\begin{array}{l}13x-5y+z=7\\ x+3y+2z=6\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 3774 ▲

La famille (V_1,V_2) est clairement libre et donc une base de F. Son orthonormalisée (e_1,e_2) est une base orthonormée de F. $||V_1||=\sqrt{1+4+1+1}=\sqrt{7}$ et $e_1=\frac{1}{\sqrt{7}}V_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$. $(V_2|e_1)=\frac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1)=\frac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2-(V_2|e_1)e_1=(0,3,1,-1)-\frac{4}{7}(1,2,-1,1)=\frac{1}{7}(-4,13,11,-11)$ puis $e_2=\frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Une base orthonormée de F est (e_1,e_2) où $e_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $e_2=\frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$.
Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t)\in F^\perp\Leftrightarrow(x,y,z,t)\in(V_1,V_2)^\perp\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2y-z+t=0\\ 3y+z-t=0\end{array}\right..$$

Correction de l'exercice 3775 ▲

(a) La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leq p\leq n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E, nous allons vérifier que

i. $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0,L_1,...,L_p) = \text{Vect}(1,X,...,X^p)$,

ii. la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leq p\leq n}$ est orthonormale,

iii. $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $L_p|X^p > 0$.

Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, $(L_0,L_1,...,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0,L_1,...,L_p) = \text{Vect}(1,X,...,X^p)$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Si $p \geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p)} P(t)\,dt = \left[((t^2-1)^p)^{(p-1)}P(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\,dt \\ &= -\int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\,dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2-1)^p$ et donc d'ordre $p-k$ de $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p-1$. En réitérant, on obtient pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t)\,dt$ et pour $k = p$, on obtient enfin $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2-1)^p P^{(p)}(t)\,dt$, cette formule restant vraie pour $p = 0$. Soient p et q deux entiers tels que $0 \leq q < p \leq n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2-1)^p L_q^{(p)}(t)\,dt = 0$ car $q = \deg(L_q) < q$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0\leq p\leq n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leq p\leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2-1)^p (t^p)^{(p)}\,dt = p! \int_{-1}^1 (1-t^2)^p\,dt > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leq p\leq n} \text{ est l'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0,...,L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Par suite,

$$\begin{aligned} ||L_p||^2 &= L_p|L_p = L_p|\text{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp) \\ &= \frac{(2p)!}{p!} L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!} p! \int_{-1}^1 (1-t^2)^p\,dt = 2(2p)! \int_0^1 (1-t^2)^p\,dt \\ &= 2(2p)! \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 u)^p(-\sin u)\,du = 2(2p)! \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} u\,du \\ &= 2(2p)! W_{2p+1} \text{ (intégrales de WALLIS)} \\ &= 2(2p)! \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ (à revoir)} \\ &= \frac{2}{2p+1} 2^{2p}(p!)^2. \end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}} 2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2}} \frac{1}{2^p p!} ((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0\leq p\leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).

Correction de l'exercice 3776 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\ell_n = (X^2-1)^n$ de sorte que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

(a) i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\,dx = \left[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k}$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donc

$$(L_n|P) = -\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$ alors

$$\begin{aligned}(L_n|P) &= (-1)^k \left(\left[(\ell_n^{n-k-1}(x)P^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx\right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$. En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \ell_n(x)P^{(n)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)\,dx/\text{quad}(*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n=0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (L_n|P) = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n P^{(n)}(x)\,dx.}$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$. Puisque $\deg(L_p) = p < n$, on a $\left(L_n|L_p\right) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{La famille } (L_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X],\ |\ ).}$$

ii. On applique maintenant la formule $(*)$ dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n L_n^{(n)}(x)\,dx = 2\times(2n)!\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2\times(2n)!\int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 t)^n(-\sin t)\,dt \\ &= 2\times(2n)!\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = 2\times(2n)!W_{2n+1} \text{ (intégrales de WALLIS)}.\end{aligned}$$

On « sait »que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 3}W_1 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}\times 2\times(2n)! = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\frac{2^n n!}{2n+1}.}$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

(b) La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de orthonormée de $\mathbb{R}[X]$. Chaque P_n, $n \in \mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(P_0,...,P_n) = \mathrm{Vect}(1,X,...,X^n)$ et de plus, pour $n \in \mathbb{N}$

$$P_n|X^n = \frac{1}{\mathrm{dom}}((P_n)|\mathrm{dom}(P_n)X^n) = \frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)}(P_n|P_n)$$

car $P_n \in (P_0,\ldots,P_{n-1})^\perp = (1,X,\ldots,X^{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Ceci montre que $P_n|X^n > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}[X] \text{ est la famille des polynômes de LENGENDRE} \\ \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.\end{array}}$$

Correction de l'exercice 3777 ▲

(a) L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Phi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}.\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

(b) L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.

(c) Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0,...,P_{n-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient a_1,..., a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geqslant 1$. Si $p \geqslant 1$, on pose $Q = (X-a_1)...(X-a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.

Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le de gré de P_n. D'autre part , au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur $[0,1]$, d(intégrale nulle sur $[0,1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Correction de l'exercice 3778 ▲

Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.

Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on peut considérer $B_0 = (e_1,...,e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille $(x_1,...,x_n)$. Les bases B_0 et B sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned}|\det_B(x_1,...,x_n)| = |\det_{B_0}(x_1,...,x_n)| &= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n)\end{vmatrix}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n} |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}\\ &= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ |\det_B(x_1,...,x_n)| \leqslant \textstyle\prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}}$$

Ensuite,

- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul

- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\|e_k\|$. Les cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k ou encore si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

Correction de l'exercice 3779 ▲

C'est l'exercice 3778.

Correction de l'exercice 3780 ▲

(a) **1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-X & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6-X \end{vmatrix} = (2-X)\left(X^2+8X-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}X-2\right) - 2\left(-2X+\frac{5}{4}\right)$$
$$= -X^3-6X^2+\frac{45}{2}X = -X\left(X^2+6X-\frac{45}{2}\right).$$

Puisque A est symétrique réelle, on sait que les valeurs propres de A sont réelles. χ_A admet pour racines 0 et deux réels non nuls de signes contraires (puisque leur produit vaut $-\frac{45}{2}$). Par suite, le rang et la signature de Q sont

$$\boxed{r=2 \text{ et } s=(1,1).}$$

2ème solution. On effectue une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned}Q((x,y,z)) &= 2x^2-2y^2-6z^2+3xy-4xz+7yz = 2x^2+x(3y-4z)-2y^2+7yz-6z^2\\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2-2\left(\frac{3}{4}y-z\right)^2-2y^2+7yz-6z^2 = 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2-\frac{25}{8}y^2+10yz-8z^2\\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2-\frac{25}{8}\left(y-\frac{8}{5}z\right)^2.\end{aligned}$$

Les formes linéaires $(x,y,z)\mapsto x+\frac{3}{4}y-z$ et $(x,y,z)\mapsto y-\frac{8}{5}z$ étant linéairement indépendantes, on retrouve le fait que Q est de rang $r=2$ et de signature $s=(1,1)$. La forme quadratique Q est dégénérée et n'est ni positive ni négative.

(b) La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) est $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le nombre 4 est valeur propre de A et puisque A est diagonalisable, 4 est valeur propre d'ordre $\dim(\mathrm{Ker}(A-4I_3)) = 3-\mathrm{rg}(A-4I_3) = 2$. La dernière valeur propre λ est fournie par $4+4+\lambda = \mathrm{Tr}(A) = 9$ et ? $=1$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = (1,4,4)$.
Les trois valeurs propres de A sont strictement positives et donc la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(3,0)$.

$$\boxed{Q \text{ est définie positive.}}$$

(c) Effectuons une réduction de GAUSS.

$$Q((x,y,z,t)) = xy+yz+zt+tx = (x+z)(y+t) = \tfrac{1}{4}(x+y+z+t)^2-\tfrac{1}{4}(x-y+z-t)^2.$$

Puisque les deux formes linéaires $(x,y,z,t)\mapsto x+y+z+t$ et $(x,y,z,t)\mapsto x-y+z-t$ sont linéairement indépendantes, la forme quadratique Q est de rang $r=2$ et de signature $s=(1,1)$.

(d) Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned}Q((x,y,z,t)) &= x^2+(4+\lambda)y^2+(1+4\lambda)z^2+\lambda t^2+4xy+2xz+4(1-\lambda)yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt\\ &= (x+2y+z)^2+\lambda y^2+4\lambda z^2+\lambda t^2-4\lambda yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt\\ &= (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+zt = (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+\frac{1}{4}(z+t)^2-\frac{1}{4}(z-t)^2.\end{aligned}$$

Si $\lambda<0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(2,2)$.
Si $\lambda=0$, la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$.
Si $\lambda>0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(3,1)$.

(e) **1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique est $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont $-\frac{1}{2}$ qui est d'ordre 4 et 2 qui est valeur propre simple.Donc, la signature de la forme quadratique Q est

$$\boxed{s=(1,4).}$$

2ème solution. Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned}
Q((x_1,...,x_5)) &= x_1x_2+x_1(x_3+x_4+x_5)+x_2(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5\\
&=(x_1+x_3+x_4+x_5)(x_2+x_3+x_4+x_5)-(x_3+x_4+x_5)^2+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5\\
&=\frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2-\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2-x_3x_4-x_3x_5-x_4x_5\\
&=\frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2-\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2-\left(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5\right)^2-\frac{3}{4}x_4^2-\frac{1}{2}x_4x_5-\frac{3}{4}x_5^2\\
&=\frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2-\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2-\left(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5\right)^2-\frac{3}{4}\left(x_4-\frac{1}{3}x_5\right)^2-\frac{5}{6}x_5^2,
\end{aligned}$$

et on retrouve $s=(1,4)$.

(f) $Q(x_1,...,x_n)=(x_1+...+x_n)^2$ et donc

$$\boxed{r=1 \text{ et } s=(1,0).}$$

(g) Pour $n\geqslant 2$, $Q((x_1,...,x_n))=\left(\sum_{i=1}^n ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i+1)x_i\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i-1)x_i\right)^2$. Donc

$$\boxed{r=2 \text{ et } s=(1,1)}$$

car les deux formes linéaires $(x_1,...,x_n)\mapsto\sum_{i=1}^n(i+1)x_i$ et $(x_1,...,x_n)\mapsto\sum_{i=1}^n(i-1)x_i$ sont indépendantes pour $n\geqslant 2$.

(h) Puisque la matrice de Q dans la base canonique est $\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\1&2&2&\dots&2&2\\1&2&3&\dots&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2&3&&n-1&n-1\\1&2&3&\dots&n-1&n\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
Q((x1,...,xn)) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{2\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j+...+\sum_{n-1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j+x_n^2\\
&=(x_1+...+x_n)^2+(x_2+...+x_n)^2+...+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q \text{ est donc définie positive.}}$$

Correction de l'exercice 3781 ▲

(a) (Quand x^2 et y^2 ont les mêmes coefficients, penser à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$) En posant $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, on obtient

$$x^2+10xy+y^2=\tfrac{1}{2}(X+Y)^2+5(X+Y)(X-Y)+\tfrac{1}{2}(X-Y)^2=6X^2-4Y^2.$$

Ainsi, si on note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$ et $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, on a

$$x^2+10xy+y^2=Q(xi+yj)=Q(Xe_1+Ye_2)=6X^2-4Y^2.$$

(b) La matrice de Q dans la base canonique (i,j) de $\mathbb{R}^2$ est $A=\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$. Les deux nombres 5 et 10 ont une somme égale à $15=\mathrm{Tr}(A)$ et un produit égal à $50=\det(A)$ et sont donc les valeurs propres de A. On sait alors que dans une base orthonormée (e_1,e_2) de vecteurs propres de A associée à la famille de valeurs propres $(5,10)$, on a $Q(Xe_1+Ye_2)=5X^2+10Y^2$. Déterminons une telle base.

$(A-5I_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x+2y=0$ et donc $\mathrm{Ker}(A-5I_2)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ puis $\mathrm{Ker}(A-10I_2)=(\mathrm{Ker}(A-5I_2))^{\perp}=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Donc, si $e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $u=xi+yj=Xe_1+Ye_2$, alors $q(u)=6x2+4xy+9y2=5X^2+10Y^2$. De plus, $x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y)$.

(c) La matrice de Q dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9-X & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2-8X-12) - \sqrt{6}(-\sqrt{6}X - 6\sqrt{6}) + 5\sqrt{2}(5\sqrt{2}X - 42\sqrt{2})$$
$$= -X^3 + 12X^2 + 36X - 432 = -(X-6)(X+6)(X-12).$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-6I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x+3y+\sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ -2x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7(-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ -12x-4\sqrt{6}y = 0 \\ 12\sqrt{2}x+8\sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z = -\sqrt{2}x-\sqrt{3}(-\sqrt{\frac{3}{2}}x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}z \\ y = -\sqrt{3}z \end{cases}$$

et $\mathrm{Ker}(A-6I_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1)$. De même,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+6I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x+15y+\sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y \\ 10x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+5(-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -\sqrt{2}x \end{cases}$$

et $\mathrm{Ker}(A+6I_3) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -\sqrt{2})$.
Enfin $\mathrm{Ker}(A-12I_3) = \mathrm{Vect}(e_3)$ où

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on pose $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ alors $PA^tP = \mathrm{diag}(6, -6, 12)$ ou encore

$$Q(Xe_1+Ye_2+Ze_3) = 6X^2-6Y^2+12Z^2 \text{ où } \mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(e_1,e_2,e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3782 ▲

(a) Soit P un élément de E. D'après un théorème de croissances comparées, $P(k)P(-k)e^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et donc $Q(P)$ existe.
Pour tout élément P de E, $Q(P) = B(P,P)$ où B est la forme bilinéaire symétrique définie sur E par

$$\forall (P_1,P_2) \in E^2,\ B(P_1,P_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(P_1(k)P_2(-k)+P_1(-k)P_2(k))e^{-k}\right)$$

et donc Q est une forme quadratique sur E.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes pairs et G le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes impairs. F et G sont supplémentaires dans E.
Soit P est un polynôme pair et non nul. Tout d'abord , $Q(P)\sum_{k=0}^{+\infty}(P(k))^2e^{-k} \geqslant 0$. De plus, comme P ne peut admettre tout entier naturel pour racine, on a plus précisément $Q(P) > 0$. De même, si P est impair et non nul, $Q(P) < 0$.
Ainsi, la restriction de Q à F (resp. G) est définie positive (resp.négative). Enfin, si P_1 est pair et P_2 est impair, on a

$$B(P_1,P_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(-k)e^{-k} = -\sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(k)e^{-k} = -\sum_{k=0}^{+\infty} P_1(-k)P_2(k)e^{-k} = -B(P_2,P_1) = -B(P_1,P_2),$$

et donc $B(P_1,P_2)=0$ (F et G sont orthogonaux pour B).
Il existe un base de F dans laquelle $Q_{/F}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(F)$ et de même il existe un base de G dans laquelle $Q_{/G}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(G)$. Maintenant, si P est un polynôme quelconque de parties paire et impaire P_1 et P_2 respectivement,

$$Q(P)=Q(P_1+P_2)=Q(P_1)+2B(P_1,P_2)+Q(P_2)=Q_{/F}(P_1)+Q_{/G}(P_2).$$

Donc la réunion des deux bases ci-dessus est une base de E dans laquelle Q est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes dans laquelle $\dim(F)=E\left(\frac{n}{2}\right)+1$ coefficients sont strictement positifs et $\dim(G)=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sont strictement négatifs. Finalement,

$$\boxed{Q \text{ est donc non dégénérée de signature } s=\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1,E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).}$$

Correction de l'exercice 3784 ▲

$\vec{x}=-\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}+\lambda\vec{a}.$

Correction de l'exercice 3785 ▲

$$p=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\wedge\vec{v}=p\vec{b}\\ \vec{v}\wedge\vec{w}=p\vec{c}\\ \vec{w}\wedge\vec{u}=p\vec{a}\end{cases}\quad\text{et } [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=p^2.$$

si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]<0$: pas de solutions.
si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et $\mathrm{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})>1$: pas de solutions.
si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et $\mathrm{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\leq 1$: une infinité de solutions.
si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]>0$: 2 solutions.

Correction de l'exercice 3786 ▲

3. $G=\mathrm{tr}(F)I-{}^tF$.

Correction de l'exercice 3788 ▲

$abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$
$=abc\sqrt{(\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)}.$

Correction de l'exercice 3790 ▲

(a) $f(\vec{x})=(\vec{x}|\vec{u})\vec{u}+\cos\alpha(\vec{u}\wedge\vec{x})\wedge\vec{u}+\sin\alpha(\vec{u}\wedge\vec{x})$.

(b) $M=(\cos\alpha)I+(1-\cos\alpha)\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}+\sin\alpha\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3792 ▲

Pour $f,g\in\mathscr{O}^+(\mathbb{R}^3)$, f et g ont la même matrice réduite dans une base orthonormée convenable, donc sont conjugués dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$. h n'est pas toujours positif car les bases peuvent ne pas avoir même orientation (ex : deux rotations inverses). Pour $f,g\in\mathscr{O}^-(\mathbb{R}^3)$, considérer $-f$, $-g$.

Correction de l'exercice 3793 ▲

3. $\pi/2,\pi/2,\pi$
$-\pi/2,\alpha,\pi/2.$

Correction de l'exercice 3795 ▲

(a)

(b) matrice dans une *bond*.

(c) $f = 2(h+\mathrm{id})^{-1} - \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 3796 ▲

(a) $f(\vec{x}) = \vec{u} \wedge \vec{x}$ avec $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

(b) $\vec{y} = \frac{\vec{x}+(\vec{u}|\vec{x})\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{x}}{1+\|\vec{u}\|^2}$.

(c) axe dirigé par $\vec{u}$, $\cos\theta = \frac{1-\|\vec{u}\|^2}{1+\|\vec{u}\|^2}$, $\sin\theta = \frac{-2\|\vec{u}\|}{1+\|\vec{u}\|^2}$.

Correction de l'exercice 3797 ▲

(a)

(b) $g(\vec{x}) = (\cos\alpha)\vec{x} + (1-\cos\alpha)\frac{(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}}{\alpha^2} + \frac{\sin\alpha(\vec{a}\wedge\vec{x})}{\alpha}$.

Correction de l'exercice 3798 ▲

(a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) Rotation autour de $(1,1,1)$ d'angle $\mathrm{Arccos}(\frac{11}{14})$.

Correction de l'exercice 3799 ▲

Les conditions ${}^tMM = I$ et $\det(M) = 1$ équivalent à : $a+b+c = 1$ et $ab+ac+bc = 0$ d'où le polynôme P.
P a trois racines réelles si et seulement si $0 \le \lambda \le \frac{4}{27}$(étude de la fonction associée).

Correction de l'exercice 3800 ▲

(a) rotation autour de $(1,0,1)$ d'angle $-\arccos(1/3)$.

(b) rotation autour de $(-3,1,1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.

(c) demi-tour autour de $(-1,-2,1)$.

(d) rotation autour de $(0,1,1)$ d'angle $2\pi/3$.

(e) rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ d'angle $\arccos(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.

(f) symétrie par rapport à $x = y+z$.

(g) symétrie par rapport à $3x = 2y-z$.

(h) symétrie par rapport à $x+2y-z = 0$.

(i) symétrie-rotation autour de $(1,-3,1)$ d'angle $-\arccos(5/6)$.

(j) symétrie-rotation autour de $(1,-1,0)$ d'angle $\pi/3$.

(k) projection sur $2x+2y+z = 0$ puis rotation d'angle $\arccos(3/5)$.

Correction de l'exercice 3801 ▲

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 3802 ▲

$$\begin{aligned}
[u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u] &= ((u\wedge v)\wedge(v\wedge w))|(w\wedge u) = (((u\wedge v)|w)v - ((u\wedge v)|v)w)|(w\wedge u) \\
&= (((u\wedge v)|w)v)|(w\wedge u) = ((u\wedge v)w) \times (v|(w\wedge u)) = [u,v,w][w,u,v] \\
&= [u,v,w]^2.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3803 ▲

$(u\wedge v)|(w\wedge s)=[u,v,w\wedge s]=[w\wedge s,u,v]=((w\wedge s)\wedge u)|v=((u|w)s-(u|s)w)|v=(u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$. De même, $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s)=((u\wedge v)|s)w-((u\wedge v)|w)s=[u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Correction de l'exercice 3804 ▲

Posons $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$. Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$. On sait que

$$\begin{aligned}
r(u)&=(\cos\theta)u+(1-\cos\theta)\,(u|k)\,k+(\sin\theta)k\wedge u=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}(u|(e_1+e_2))(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{6}}{4}(e_1+e_2)\wedge u\\
&\text{« = »}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix}z\\-z\\-x+y\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{6}}{4}z\\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{\sqrt{6}}{4}z\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{6}}{4}y+\frac{1}{2}z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et la matrice cherchée est

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 3805 ▲

Soit (i,j,k) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. Posons $u=f(i)$, $v=f(j)$ et $w=f(k)$. Nécessairement, $u\wedge v=f(i)\wedge f(j)=f(i\wedge j)=f(k)=w$ et de même $v\wedge w=u$ et $w\wedge u=v$.

1er cas. Si l'un des vecteurs u ou v ou w est nul alors $u=v=w=0$ et donc $f=0$. Réciproquement, l'application nulle convient.

2ème cas. • Si les trois vecteurs u, v et w sont non nuls alors $u\wedge v\neq 0$ et donc la famille (u,v) est libre. Mais alors la famille (u,v,w) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.

Ensuite $w=u\wedge v$ est orthogonal à u et v et $v=w\wedge u$ est orthogonal à u. On en déduit que la famille (u,v,w) est une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, puisque u et v sont orthogonaux, $\|w\|=\|u\wedge v\|=\|u\|\|v\|$ et de même $\|u\|=\|v\|\|w\|$ et $\|v\|=\|u\|\|w\|$. Puis $\|u\|\|v\|\|w\|=(\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ et donc, puisque les vecteurs u, v et w sont non nuls, $\|u\|\|v\|\|w\|=1$. Les égalités $\|u\|\|v\|\|w\|=1$ et $\|u\|=\|v\|\|w\|$ fournissent $\|u\|^2=1$ et de même $\|v\|^2=\|w\|^2=1$.

Finalement, la famille (u,v,w) est une base orthonormée directe.

En résumé, l'image par f d'une certaine base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et on sait que f est un automorphisme orthogonal positif de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire une rotation de $\mathbb{R}^3$.

• Réciproquement, si f est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire e_3. On considère e_1 et e_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que la famille (e_1,e_2,e_3) soit une base orthonormée directe.

Pour vérifier que f est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités : $\forall(i,j)\in\{1,2,3\}^2$, $f(e_i\wedge e_j)=f(e_i)\wedge f(e_j)$. Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduisent en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1)\wedge f(e_2)=e_3=f(e_3)=f(e_1\wedge e_2)\text{ et }f(e3)\wedge f(e1)=e_3\wedge f(e_1)=f(e_2)=f(e_3\wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3806 ▲

Si $a=0$, $f=0$ et il n'y a plus rien à dire.

Si $a\neq 0$, puisque $f(a)=0$, 0 est valeur propre de f et $\mathrm{Vect}(a)\subset E_0(f)$. D'autre part, si x est orthogonal à a, d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x.$$

Donc le réel non nul $-\|a\|^2$ est valeur propre de f et $a^\perp \subset E_{-\|a\|^2}$. Maintenant, $\dim \mathrm{Vect}(a) + \dim a^\perp = 3$ et donc $\mathrm{Sp}(f) = (0, -\|a\|^2, -\|a\|^2)$ puis $E_0(f) = \mathrm{Vect}(a)$ et $E_{-\|a\|^2} = a^\perp$. On en déduit aussi que f est diagonalisable. On peut noter que, puisque f est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, f est un endomorphisme symétrique.

Correction de l'exercice 3807 ▲

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i, j) = ((1, -1, 0, 0)(1, 0, 2, -3))$. On orthonormalise la base (i, j).

On prend $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ puis $e_2' = j - (j|e_1)e_1 = (1, 0, 2, -3) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 4, -6)$ puis $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

Une base orthonormée de P est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ et $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

(a) Le projeté orthogonal de $u = (x, y, z, t)$ sur P est

$$\begin{aligned} p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x - y)(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{54}(x + y + 4z - 6t)(1, 1, 4, -6) \\ &= \frac{1}{27}(14x - 13y + 2z - 3t, -13x + 14y + 2z - 3t, 2x + 2y + 8z - 12t, -3x - 3y - 12z + 18t). \end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.}$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S = 2M - I_4 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6 \\ -26 & 1 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -11 & -24 \\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.}$$

(b) La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned} \|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27}\|(14x + 13y - 2z + 3t, 13x + 14y - 2z + 3t, -2x - 2y + 19z + 12t, 3x + 3y + 12z + 9t)\| \\ &= \frac{1}{27}\sqrt{(14x + 13y - 2z + 3t)^2 + (13x + 14y - 2z + 3t)^2 + (-2x - 2y + 19z + 12t)^2 + (3x + 3y + 12z + 9t)^2}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3812 ▲

(a) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{Diag}(3\ 6\ 9)$.

(b) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{Diag}(3\ 3\ 2)$.

Correction de l'exercice 3813 ▲

Si tous les a_i sont nuls, $M = 0$.

Sinon, $M = C^tC \Rightarrow E_0 = C^\perp$ et $E_\nu = \mathrm{vect}(C)$ avec $\nu = \|C\|^2$.

Correction de l'exercice 3814 ▲

$$M = 5\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3815 ▲

(a)

(b) u est autoadjoint pour $<,>$.

(c) $P_0 = 1$, $P_2 = x$, $P_6 = 3x^2 - 1$, $P_{12} = 5x^3 - 3x$.

Correction de l'exercice 3816 ▲

(a)

(b)

(c) $\lambda_k = k(k+1)$.

Correction de l'exercice 3819 ▲

(a)

(b)

(c) $(p \circ q)_{|\operatorname{Im} p} = (p \circ q \circ p)_{|\operatorname{Im} p}$ est diagonalisable et $(p \circ q)_{|\operatorname{Ker} q + (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)} = 0$ donc tout vecteur de E est somme de vecteurs propres pour $p \circ q$.

Correction de l'exercice 3824 ▲

(a)

(b) Récurrence : pour $n = 1$ c'est évident.
$n - 1 \to n : A = \begin{pmatrix} A' & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$ avec $A' = {}^tB'B'$.
On cherche $B = \begin{pmatrix} B' & X' \\ 0 & x \end{pmatrix}$ d'où : $X' = {}^tB'^{-1}C'$ et $x^2 = \alpha - {}^tX'X' = \frac{\det A}{\det A'} > 0$.

Correction de l'exercice 3828 ▲

(a) Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base propre pour u. On prend $\vec{x} = \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n$.

(b) On norme $\vec{x}$ et on le complète en une base orthonormée. La matrice de u dans cette base est symétrique, de trace nulle, et la diagonale commence par 0. On termine par récurrence.

Correction de l'exercice 3830 ▲

$ABX = \lambda X \Rightarrow {}^tX{}^tBABX = \lambda{}^tXBX$.

Correction de l'exercice 3831 ▲

Se ramener au cas où A est diagonale.

Correction de l'exercice 3832 ▲

Il existe P inversible telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPB'P$ avec B' symétrique définie positive.
Alors $A + B = {}^tP(I + B')P$ et $\det(I + B') = \prod(1 + \beta_i) \geq 1 + \prod \beta_i \Rightarrow$ cqfd.

Correction de l'exercice 3833 ▲

Soit $\mathscr{B}$ une BON fixée, $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $\mathscr{B}'$ la BON cherchée et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On veut que ${}^tM'M'$ soit diagonale avec $M' = {}^tPMP$, cad ${}^tP{}^tMMP$ diagonale.

Correction de l'exercice 3836 ▲

Soit $(\vec{h}_i)$ une base diagonale pour h, $H_i = \operatorname{vect}\{\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_i\}$ et $(\vec{f}_i)$, F_i idem pour f.

Pour $\vec{x} \in F_k \cap H_{k-1}^{\perp}$, $\lambda_k \|\vec{x}\|^2 + (\vec{x} \mid \vec{x}_0)^2 \le (h(\vec{x}) \mid \vec{x}) + (\vec{x} \mid \vec{x}_0)^2 = (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \le \mu_k \|\vec{x}\|^2$.
Pour $\vec{x} \in H_{k+1} \cap F_{k-1}^{\perp} \cap \vec{x}_0^{\perp}$, $\mu_k \|\vec{x}\|^2 \le (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) = (h(\vec{x}) \mid \vec{x}) \le \lambda_{k+1} \|\vec{x}\|^2$.

Correction de l'exercice 3837 ▲

(a) Si $f(x) + f^*(x) = 0$ alors $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} f^* = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ donc $f(x) = f^*(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Ker} f \cap (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

(b) $f^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
$f + f^* \in GL(E) \Rightarrow \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} f^* = \operatorname{Im} f + (\operatorname{Ker} f)^{\perp} = E \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \ge \dim \operatorname{Ker} f$.

Correction de l'exercice 3842 ▲

(a) $((u - u^*)(x) \mid x) = 0$.

(b) Orthodiagonaliser et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 3843 ▲

Soit $K = \sup\{\|u_0 + \dots + u_n\|\}$ et $x \in H$. On note $v_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n$ pour $p \le q$. La série $\sum (u_n(x) \mid x)$ est convergente (termes positifs, sommes partielles majorées) donc elle vérifie le critère de Cauchy : $(v_{p,q}(x) \mid x) \to 0$ lorsque $p, q \to \infty$.
Comme $v_{p,q}$ est positif, il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(v_{p,q}(x) \mid y)|^2 \le (v_{p,q}(x) \mid x)(v_{p,q}(y) \mid y) \le 2K\|y\|^2 (v_{p,q}(x) \mid x).$$

En particulier pour $y = v_{p,q}(x)$ on obtient : $\|v_{p,q}(x)\|^2 \le 2K(v_{p,q}(x) \mid x)$ donc la série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy.
Remarque : exemple où $\sum u_n$ ne converge pas dans $\mathscr{L}_c(H)$: $H = \ell^2(|||)$ et $u_n =$ projection orthogonale sur $< e_n >$ où $e_n(p) = \delta_{n,p}$. $\sum u_n$ converge simplement et non uniformément vers l'identité.

Correction de l'exercice 3844 ▲

${}^tAA$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable donc annule un polynôme P scindé à racines simples. A annule le polynôme $P(X^3)$, donc est (x^2+1)-diagonalisable si 0 n'est pas racine de P ce que l'on peut imposer si A est inversible.
Si A n'est pas inversible, soit $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
On a $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A^3) \oplus \operatorname{Ker}(Q(A^3))$ et $\operatorname{Ker}(A^3) = \operatorname{Ker}({}^tAA) = \operatorname{Ker}(A)$ donc $AQ(A^3) = 0$ et A est encore (x^2+1)-diagonalisable.
Contre-exemple pour la $\mathbb{R}$-diagonalisabilité : prendre une rotation d'angle $2\pi/3$ dans le plan.

Correction de l'exercice 3845 ▲

(a) On se place dans une base propre pour u, soient U, V, W les matrices correspondantes avec $U = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. On doit donc résoudre $(\lambda_i + \lambda_j)W_{ij} = V_{ij}$ d'où l'existence, l'unicité et la symétrie de w.

(b)
```
> A := matrix([[4,1,1],[1,4,-1],[1,-1,4]]); B := matrix([[0,0,-1],[0,0,1],[-1,1,3]]);
> eigenvals(A); eigenvects(A);
> P := transpose(matrix([[1, 0, 1], [1, 1, 0],[-1, 1, 1]]));
> A1 := evalm(P^(-1)&*A&*P); B1 := evalm(P^(-1)&*B&*P);
> C1 := matrix(3,3);
> for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do C1[i,j] := B1[i,j]/(A1[i,i]+A1[j,j]) od od;
> C := evalm(P&*C1&*P^(-1)); evalm(A&*C+C&*A-B);
```
$\Rightarrow C = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 11 & -11 & -33 \\ -11 & 11 & 33 \\ -33 & 33 & 69 \end{pmatrix}$.

(c) Si v est défini positif : on a $(v(x) \mid x) = 2(u(x) \mid w(x))$ donc si λ est une valeur propre de w et x est un vecteur propre associé, on a $\lambda = \frac{(v(x)|x)}{2(u(x)|x)} > 0$ d'où w est défini positif.
Cas w défini positif et v non positif : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4x+4 \end{pmatrix}$ avec $0 < x < \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 3846 ▲

(a) c'est un endomorphisme autoadjoint positif de déterminant 1.

(b) $X^n \det\left(\frac{\mathrm{id}}{X} + s^* \circ s\right) = \det(\mathrm{id} + Xs^* \circ s) = \det(s^* \circ (\mathrm{id} + Xs^* \circ s) \circ s) = \det(s^* \circ s + X\mathrm{id})$.

(c) $s^* \circ s$ est diagonalisable avec des valeurs propres (λ_i) réelles positives deux à deux inverses pour la même multiplicité. $P^2(1) = \prod_{1 \le i \le n}(1+\lambda_i)\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)$ et $(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) \ge 4$ pour tout $x > 0$ avec égalité ssi $x = 1$.
Si $P(1) = 2^n$ alors toutes les valeurs propres de $s^* \circ s$ valent 1 et $s^* \circ s$ est diagonalisable donc $s^* \circ s = \mathrm{id}$ et s est une symétrie orthogonale. La réciproque est immédiate.

(d) Se ramener au cas $A_4 = I$ puis calculer $\det A$ par pivotage.

Correction de l'exercice 3847 ▲

(a) Que c'est un espace préhilbertien.

(b) $g_x(t) = \min(t(1-x), x(1-t))$

(c) On note $g_i = g_{x_i}$: $(g_1, \dots, g_n)$ est libre par considération des points anguleux, donc engendre un espace vectoriel G de dimension n. Soit $f \in P$: $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in G$ et $f_1 \in G^\perp$. Alors $\varphi(f) = \varphi(f_0) + \|f_1\|^2$ donc φ est minimale en f ssi $\varphi_{|G}$ est minimale en f_0 et $f_1 = 0$. Désormais on suppose $f_1 = 0$ et $f \in G$.
L'application :
$$u : G \to \mathbb{R}^n, f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)) = ((f \mid g_1), \dots, (f \mid g_n))$$
est un isomorphisme linéaire. Soit v l'endormophisme autoadjoint défini positif de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) tel que : $\forall\, t \in \mathbb{R}^n, (t \mid v(t)) = \|u^{-1}(t)\|^2$.
On a donc en notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\mathrm{id}+v)^{-1}(\alpha)$:
$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(u^{-1}(t)) &= (t \mid v(t)) + (t-\alpha \mid t-\alpha)\\ &= (t \mid (\mathrm{id}+v)(t)) - 2(t \mid \alpha) + (\alpha \mid \alpha)\\ &= (t-\beta \mid (\mathrm{id}+v)(t-\beta)) + (\alpha \mid \alpha-\beta).\end{aligned}$$
$\mathrm{id}+v$ est autoadjoint défini positif donc le minimum de φ est atteint pour $f = u^{-1}(\beta)$ (solution unique) et vaut $(\alpha \mid \alpha - \beta)$.

Correction de l'exercice 3848 ▲

(a) p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow$ p est un projecteur et $p = p^*$ $\Leftrightarrow$ p^* est un projecteur orthogonal.

(b) p et p^* commutent donc $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}\,p$ sont stables par p et par p^*, d'où $p^*_{|\mathrm{Ker}p} = (p_{|\mathrm{Ker}p})^* = 0_{\mathrm{Ker}p}$ et $p^*_{|\mathrm{Im}\,p} = (p_{|\mathrm{Im}\,p})^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,p}$. Ainsi $p = p^*$ ce qui implique $\mathrm{Ker}p \perp \mathrm{Im}\,p$.

Correction de l'exercice 3849 ▲

(a)

(b) On a pour $f, g \in E$: $u \circ v(f) = g \Leftrightarrow g$ est $\mathscr{C}^2$, $g(0) = g'(1) = 0$ et $g'' = -f$. En particulier $u \circ v$ est injectif, 0 n'est pas valeur propre de $u \circ v$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in E$ on a $u \circ v(f) = \lambda f$ si et seulement si f est de la forme $x \mapsto ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ avec $\alpha^2 = -\frac{1}{\lambda}$ et $a + b = a\alpha e^{\alpha} - b\alpha e^{-\alpha} = 0$. On obtient $f \ne 0$ en prenant $a \ne 0$, $b = -a$ et $\alpha = i\pi(\frac{1}{2}+k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathrm{Spec}(u \circ v) = \left\{\frac{1}{\pi^2(\frac{1}{2}+k)^2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction de l'exercice 3850 ▲

(a) $u_1 + \cdots + u_p$ est l'endomorphisme autoadjoint associé à $q_1 + \cdots + q_p$.

(b) $\mathrm{Im}(u_1) + \cdots + \mathrm{Im}(u_p) \supset \mathrm{Im}(u_1 + \cdots + u_p) = E$ et la somme des dimensions est égale à $\dim E$ donc la somme des sous-espaces est directe.

(c) On a $\mathrm{Ker}(u_1) = \{x \in E \text{ tq } x = u_2(x) + \cdots + u_p(x)\} \subset \mathrm{Im}(u_2 + \cdots + u_p) = \mathrm{Im}(u_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p)$ et les deux termes extrêmes ont même dimension, d'où $\mathrm{Ker}(u_1) = \mathrm{Im}(u_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p)$. Comme u_1 est autoadjoint, $\mathrm{Im}(u_1) \perp \mathrm{Ker}(u_1)$ ce qui prouve l'orthogonalité de la somme. De plus $\mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Ker}(u_j)$ pour $j \ge 1$ donc $q_1(x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u_1)$. En appliquant **1)** à $\mathrm{Im}(u_1)$ on obtient $u_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u_1)$ ce qui prouve que u_1 est un projecteur, et c'est un projecteur orthogonal car autoadjoint.

Correction de l'exercice 3851 ▲

$A = P^{-1}DP \Rightarrow {}^tA = ({}^tPP)A(P^{-1}\,{}^tP^{-1})$.

S définie positive $\Rightarrow \exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^tPP$, donc ${}^tA = SAS^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^tPM{}^tP^{-1}$ avec $M = PAP^{-1}$, d'où ${}^tM = M$ est diagonale.

Correction de l'exercice 3852 ▲

Pour A symétrique réelle on a $\max(\mathrm{Sp}(A)) = \sup\{(x \mid Ax)/\|x\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ donc f est la borne supérieure des fontions affines $t \mapsto ((x \mid Ax) + t(x \mid Bx))/\|x\|^2$ lorsque x décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En tant que sup de fonctions convexes, c'est une fonction convexe.

Correction de l'exercice 3855 ▲

(a) $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(f(\vec{y}) \mid \vec{x})$ et $(f(i\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(f(\vec{y}) \mid i\vec{x})$.

(b)

(c)

Correction de l'exercice 3857 ▲

$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}$, $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$, $m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$.

Correction de l'exercice 3858 ▲

(a) $\frac{1}{16}$.

(b) $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 3862 ▲

(a)

(b)

(c)

(d)

(e) $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 3864 ▲

(a)

(b)

(c) $\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\beta = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{7}}}$.

Correction de l'exercice 3865 ▲

(a)

(b) Soit $P_0 = Q_0'$. Par IPP on obtient Q_0 est orthogonal à la famille $(jX^{j-1} - X^j)_{j \geq 1}$ qui est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $Q_0 = 0 = P_0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^0 P_0(t)\, dt \neq \delta_{0,0}$.

Correction de l'exercice 3866 ▲

$f =$ cste.

Correction de l'exercice 3868 ▲

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $(\vec{e}_i)$.
Le premier membre vaut ${}^tXPG^{-1}{}^tPX = {}^tXX$.

Correction de l'exercice 3870 ▲

(a)

(b)

(c) Soit $g \in H^{\perp}$ non nulle. Les formes linéaires : $f \mapsto \int_0^{1/2} f$ et $f \mapsto \int_0^1 fg$ sont nulles sur H, donc proportionnelles, ce qui est impossible pour g continue.

Correction de l'exercice 3871 ▲

(a) $u \geq 0$ et $u^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.

(b) Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha u \leq v \leq \beta u$.

Correction de l'exercice 3872 ▲

(a) (a_n) est partout dense.

(b)

(c)

(d) Si les a_n sont distincts, on choisit pour tout n une fonction f_n comprise entre 0 et 1 valant alternativement 1 et -1 en $a_0, \dots, a_n$. Alors la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas car si $f_n \to f$ alors $f^2 \equiv 1$, absurde.

Correction de l'exercice 3873 ▲

$\sqrt{1 - |(u \mid v)|^2} = d(v, (x^2+1)^u) \leq d(v, (x^2+1)^w) + |(v \mid w)| d(w, (x^2+1)^u)$.

Correction de l'exercice 3874 ▲

(a) $A = UT\,{}^tU \Rightarrow A\overline{A} = UT\overline{T}\,{}^t\overline{U}$ est semblable à $T\overline{T}$.

(b) $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives distinctes. Soit U unitaire trigonalisant $A\overline{A}$ et $T = U^{-1}A\,{}^tU^{-1}$. Donc $T\overline{T}$ est triangulaire supérieure à valeurs propres réelles distinctes. On montre que ceci implique T triangulaire supérieure par récurrence sur n.

$T = \begin{pmatrix} t & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Rightarrow T\overline{T} = \begin{pmatrix} |t|^2 + X\overline{Y} & t\overline{X} + X\overline{Z} \\ \bar{t}Y + Z\overline{Y} & Y\overline{X} + Z\overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{réel} & * \\ 0 & \text{tr.sup à vp réelles} \end{pmatrix}$.

Donc $X\overline{Y} = \overline{X}Y$ et $Z\overline{Y} = -\bar{t}Y$, d'où $(Y\overline{X} - X\overline{Y}I)Y = 0 = (Z\overline{Z} - |t|^2 I)Y$.

Par hypothèse $Y\overline{X} + Z\overline{Z} - (|t|^2 + X\overline{Y})I$ est inversible donc $Y = 0$ et on est ramené au cas $n-1$.

(c) $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives : ? ? ?

Solution de Pierre Février (MP* Neuilly sur Seine) :

lemme : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A})$ alors il existe $W \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $A\overline{W} = \alpha W$ et $\alpha^2 = \lambda$.

Soit $V \in E_\lambda(A\overline{A})$, $V \neq 0$. Si $A\overline{V} = -\sqrt{\lambda}\, V$ on a le résultat voulu, sinon on pose $W = A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\, V$. On a alors :

$$\overline{A}W = \overline{A}A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \lambda\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \sqrt{\lambda}\,\overline{W}$$

On peut s'arranger pour que le vecteur précédent soit unitaire et construire U matrice unitaire de première colonne W.

On a alors ${}^t\overline{U}A\overline{U} = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, puis ${}^t\overline{U}A\overline{A}U = \begin{pmatrix} \alpha^2 & y & y & y \\ 0 & & & \\ \vdots & & B\overline{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. On en déduit le résultat par récurrence.

Correction de l'exercice 3875 ▲

$M = X^tY - Y^tX$.

Soit $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $(I + aM)Z = 0$. Donc $Z \in \mathrm{vect}(X, Y) : Z = \lambda X + \mu Y$.

on remplace :

$$\begin{cases} (1 - a^tYX)\lambda & - & a^tYY\mu & = & 0 \\ a^tXX\lambda & + & (1 + a^tYX)\mu & = & 0 \end{cases}$$

CNS $\iff a^2({}^tXX\,{}^tYY - ({}^tXY)^2) + 1 \neq 0$.

Correction de l'exercice 3876 ▲

On a ${}^tAA - {}^tCC = I_n$.
Soit X tel que $AX = 0$. Donc ${}^tXX = -{}^t(CX)(CX)$, donc $X = 0$.

Correction de l'exercice 3877 ▲

$A{}^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)I$.

Correction de l'exercice 3878 ▲

trigonaliser A dans une base orthonormée.

Correction de l'exercice 3879 ▲

$h = f \circ f^*$: $h^2 = \mathrm{id}$ et $h \geq 0 \Rightarrow h = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 3881 ▲

$a = b = \pm c$.

Correction de l'exercice 3882 ▲

Ils sont égaux (décomposer A en symétrique $+$ antisymétrique).

Correction de l'exercice 3883 ▲

(a) $\mathrm{spec}(M) = \{j, j^2\} \Rightarrow$ on prend comme base orthonormale $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{2}{\sqrt{3}}(f(a) + \frac{1}{2}a) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(b) M est une matrice de rotation ssi $\mathrm{spec}(M) \subset \mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$ ou $M = \pm I$.

(c) M est la matrice d'une application orthogonale ssi $\mathrm{spec}(M) \subset \mathbb{U}$ et M est (x^2+1)-diagonalisable (alors M est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de rotation).

Correction de l'exercice 3885 ▲

(a) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Il existe P orthogonale de même taille que A telle que $D = {}^tPAP$ est diagonale positive.
Alors $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ {}^tCP & B \end{pmatrix}$ est symétrique positive donc si $d_{ii} = 0$ alors la ligne i de ${}^tPC$ est nulle. Ainsi $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U' \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est, après renumérotation éventuelle des lignes et colonnes, de la forme $U'' = \begin{pmatrix} D' & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où D' est diagonale inversible et U' est semblable à U''. Enfin U'' est diagonalisable :
$\begin{pmatrix} I & D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} U'' \begin{pmatrix} I & -D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3886 ▲

(a) Si ${}^tUMV = D$ est diagonale alors ${}^tMM = VD^{2t}V$. Inversement, comme ${}^tMM$ est symétrique définie positive, il existe D diagonale inversible et V orthogonale telles que ${}^tMM = VD^{2t}V$. On pose $M = UD^tV$ ce qui définit U puisque D^tV est inversible et on a $VD^{2t}V = {}^tMM = VD^tUUD^tV$ d'où ${}^tUU = I$.

(b) M est limite de matrices M_k inversibles que l'on peut décomposer sous la forme $M_k = U_kD_k{}^tV_k$ avec U_k et V_k orthogonales et D_k diagonale. Comme $O(n)$ est compact on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que les suites (U_k) et (V_k) convergent vers U, V orthogonales d'où ${}^tUMV = \lim_{k\to\infty} {}^tU_kM_kV_k = \lim_{k\to\infty} D_k = D$ diagonale.

(c) En diagonalisant ${}^tMM$ on trouve $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme D n'est pas inversible il faut ruser pour trouver U. On donne des coefficients indéterminés à U et on écrit que ${}^tUMV = D$ ce qui donne $U = \begin{pmatrix} a & b+\sqrt{2} & c \\ -a-\frac{3}{\sqrt{6}} & -b-\frac{1}{\sqrt{2}} & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. On choisit alors a,b,c de sorte que $U \in O(3)$ d'où, par exemple, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3887 ▲

(a) $\det(A)^2 = (-1)^n$.

(b) A est (x^2+1)-diagonalisable (annulateur simple) et ses valeurs propres sont $i, -i$ avec la même multiplicité (A est réelle). La matrice A' donnée a les mêmes propriétés donc A et A' sont (x^2+1)-semblables à la même matrice diagonale, et donc (x^2+1)-semblables l'une à l'autre. Comme la (x^2+1)-similitude entre matrices réelles est équivalente à la $\mathbb{R}$-similitude (résultat bien connu), A et A' sont $\mathbb{R}$-semblables.

(c) Soit e_1 unitaire et $e_1' = Ae_1$. Alors e_1' est unitaire et $Ae_1' = -e_1$ d'où $(e_1 \mid e_1') = (Ae_1 \mid Ae_1') = -(e_1 \mid e_1') = 0$ donc (e_1, e_1') est une famille orthonormale. Si F_1 est le sous-espace vectoriel engendré par (e_1, e_1') alors $F_1^\perp$ est stable par A donc on peut construire par récurrence une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n/2}, e_1', \dots, e_{n/2}')$ telle que $Ae_i = e_i'$ et $Ae_i' = -e_i$.

Correction de l'exercice 3888 ▲

On remplace A par $A + b_n I$ et B par $B - b_n I$ ce qui ne modifie pas C. Maintenant les valeurs propres de B sont positves donc pour tou $x \in (x^2+1)^n$ on a $(Ax \mid x) \leq (Cx \mid x)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base orthonormale propre pour A et $(y_1, \dots, y_n)$ une base orthonormale propre pour C. Si $z \in \mathrm{vect}(x_1, \dots x_i)$ alors $(Az \mid z) \geq a_i \|z\|^2$ et si $z \in \mathrm{vect}(y_i, \dots y_n)$ alors $(Az \mid z) \leq (Cz \mid z) \leq c_i \|z\|^2$. Or $\mathrm{vect}(x_1, \dots x_i)$ et $\mathrm{vect}(y_i, \dots y_n)$ ont une intersection non triviale (la somme des dimensions est égale à $n+1$) donc il existe $z \neq 0$ tel que $a_i \|z\|^2 \leq c_i \|z\|^2$ d'où $a_i \leq c_i$.

Correction de l'exercice 3889 ▲

(a) Prendre A supérieur ou égal à la plus petite des valeurs propres de $-M$.

(b) Surjectivité de ϕ : $\mathrm{Im}\,\Phi$ est un sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$ contenant $S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc contenant $\mathrm{vect}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. On en déduit que ϕ est un isomorphisme grâce au théorème du rang.

Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M + I_n/p)$ donc $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$. Réciproquement, si $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M_p)$ avec M_p définie positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^txMx = \lim_{p\to\infty}({}^txM_px) \geq 0$, c'est-à-dire $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$. Comme ϕ est continue (car linéaire en dimension finie) on en déduit $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$ donc par continuité de ϕ^{-1} : $\phi^{-1}(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, d'où $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \phi(S_n^+(\mathbb{R}))$.

(c) Soit $M \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres a,b avec $a \leq b$, et soient $a' \leq b'$ les valeurs propres de $\phi(M)$. Pour tout $\lambda > b$ on a $M + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $\phi(M) + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\lambda > b'$. Ceci prouve que $b' \leq b$ et on montre l'égalité en considérant ϕ^{-1}. De même, en considérant $-M$ on montre que $a' = a$. Finalement $\chi_M = (X-a)(X-b) = \chi_{\phi(M)}$. De plus, $\det(M) = ab = \det(\phi(M))$.

Remarque : soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$, $C' = \phi(C)$. On sait que A' est orthodiagonalisable avec pour valeurs propres 0 et 1, donc il existe $P \in O(2)$ telle que $A' = {}^tPAP$. $A' + B' = \phi(I_2) = I_2$ d'où $B' = I_2 - A' = {}^tPBP$. Posons $C' = {}^tP\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ v & w \end{smallmatrix}\right)P$. $0 = \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(C') = u + w$ et $-1 = \det(C) = \det(C') = uw - v^2$ donc $w = -u$ et $u^2 + v^2 = 1$. De plus, $-1 = \det(A + C) = -u - u^2 - v^2$ d'où $u = 0$ et $v = \pm 1$. Si $v = 1$ alors $C' = {}^tPCP$ et par linéarité, $\phi(M) = {}^tPMP$ pour toute $M \in S_2(\mathbb{R})$. Si $v = -1$ on trouve de même $\phi(M) = {}^tQMQ$ avec $Q = P\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in O(2)$. Réciproquement, toute aplication de la forme $M \mapsto {}^tPMP$ avec $P \in O(2)$ vérifie les hypothèses de la question. Les fonctions ϕ linéaires vérifiant la seule condition $\phi(S_2^{++}(\mathbb{R})) = S_2^{++}(\mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $M \mapsto {}^tPMP$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ (écrire $\phi(I_2) = {}^tTT$ puis considérer $M \mapsto {}^tT^{-1}\phi(M)T^{-1}$).

Généralisation en dimension quelconque ?

Correction de l'exercice 3890 ▲

$M = ({}^tMM)^{-2}$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable en base orthonormale. En examinant la forme diagonale on trouve $M = I$.

Correction de l'exercice 3891 ▲

(a) $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation (distincte de l'identité). **Axe de f.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y-2z=0 \\ -2x-5y-z=0 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-5y \\ 3x+9y=0 \\ 9x+27y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3y \\ z=y \end{array}\right. .$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (-3,1,1)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de f.** Le vecteur $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos\theta = \overrightarrow{v}.f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{3}(-1,1,-4) = -\frac{1}{6}\times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc, $\theta = \pm\text{Arccos}(-\frac{5}{6})\ (2\pi)$. (Si on sait que $\text{Tr}(A) = 2\cos\theta+1$, c'est plus court : $2\cos\theta+1 = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$ fournit $\cos\theta = -\frac{5}{6}$). Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } -\text{Arccos}(-\tfrac{5}{6}) \text{ autour de } u = (-3,1,1).}$$

(b) $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation. **Axe de f.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+\sqrt{6}z=0 \\ x-y-\sqrt{6}z=0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x-y=\sqrt{6}z = \frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x=y \text{ et } z=0.$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de f.** $\overrightarrow{k} = [0,0,1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Par suite,

$$\cos\theta = \overrightarrow{k}.f(\overrightarrow{k}) = (0,0,1).\frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2) = \frac{1}{2},$$

et donc $\cos\theta = \pm\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $\left[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \tfrac{\pi}{3} \text{ autour de } \overrightarrow{u} = (1,1,0).}$$

(c) $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. A n'est pas symétrique, et donc f n'est pas une réflexion. f est donc la composée commutative $s \circ r$ d'une rotation d'angle θ autour d'un certain vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$ où $\overrightarrow{u}$ et θ sont à déterminer. **Axe de r.** L'axe de r est $Ker(f+Id_E)$ (car $f \neq -Id_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 17x+y+4z=0 \\ -4x+13y+7z=0 \\ x+8y+5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-17x-4z \\ -225x-45z=0 \\ -135x-27z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-5x \\ y=3x \end{array}\right.$$

$\text{Ker}(f+Id_E) = \text{Vect}(\overrightarrow{u}) = D$ où $u = (1,3,-5)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. s est la réflexion par rapport au plan $P = u^{\perp}$ dont une équation est $x+3y-5z = 0$. On écrit alors la matrice S de s dans la base de départ. On calcule $S^{-1}A = SA$ qui est la matrice de r et on termine comme en 1) et 2).

Correction de l'exercice 3892 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f \text{ est une rotation} &\Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ||C_1|| = ||C_2|| = ||C_3|| = 1 \text{ et } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ et } \det M = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 1 \text{ et } ab+bc+ca = 0 \text{ et } a^3+b^3+c^3-3abc = 1. \end{aligned}$$

Posons $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$ et $\sigma_3 = abc$. On a $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ba^2+a^2c+ca^2+b^2c+c^2b)+6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3+b^3+c^3+(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) = -2(a^3+b^3+c^3)+6\sigma_3$$

et finalement, $a^3+b^3+c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

$$\begin{aligned} M \in O_3^+(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1 = 1 \\ &\Leftrightarrow a,\ b \text{ et } c \text{ sont les solutions réelles d'une équation du type } x^3-x^2+k = 0 \text{ (où } k = -\sigma_3\text{)}. \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^3-x^2+k$ et donc $P'(x) = 3x^2-2x = x(2x-3)$. Sur $]-\infty,0]$, P est strictement croissante, strictement décroissante sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$. P admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles. **1er cas.** Si $P(0) = k > 0$ et $P\left(\frac{2}{3}\right) = k - \frac{4}{27} < 0$ ou ce qui revient au même, $0 < k < \frac{4}{27}$, P admet trois racines réelles deux à deux distinctes (P étant d'autre part continue sur $\mathbb{R}$), nécessairement toutes simples. **2ème cas.** Si $k \in \left\{0,\frac{4}{27}\right\}$, P et P' ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou $\frac{4}{27}$) et P admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle. **3ème cas.** Si $k < 0$ ou $k > \frac{4}{27}$, P admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc P admet deux autres racines non réelles. En résumé, P a toutes ses racines réelles si et seulement si $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$ et donc, f est une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3-x^2+k = 0$ où $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

Correction de l'exercice 3893 ▲

(a) Soit $F = \text{Vect}(x_1,...,x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$ .M est une matrice rectangulaire de format (m,n).
Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\sum_{k=1}^m m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1,x_2,...,x_n) = {}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1,...,x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1,...,x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1,x_2,...,x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1,x_2,...,x_n)) = \text{rg}(x_1,\ldots,x_n).}$$

(b) D'après 1),

$$\begin{aligned} (x_1,...,x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \text{rg}(x_1,x_2,...,x_n) <\Leftrightarrow \text{rg}G(x_1,x_2,...,x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1,x_2,...,x_n) \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \gamma(x_1,x_2,...,x_n) = 0. \end{aligned}$$

De plus, quand la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1,x_2,...,x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1,...,x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\ldots,x_n)=0\\ (x_1,...,x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\ldots,x_n)>0.\end{array}}$$

(c) **1ère solution.** Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)$, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque $x-p_F(x)\in F^\perp$)

$$\begin{pmatrix}(x|x)\\(x|x_1)\\ \vdots\\(x|x_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|x-p_F(x)+p_F(x)\|^2\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)\|^2\\(p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(p_F(x)|p_F(x))\\(p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)=\gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)+\gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)=0$. Il reste $\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)=\gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x\in E,\ \gamma(x,x_1,\ldots,x_n)=\gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)=\|x-p_F(x)\|^2\gamma(x_1,x_2,...,x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x-p_F(x)\|=\sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)}{\gamma(x_1,x_2,...,x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x)=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i$ puis $d=\|x-p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2=(x-p_F(x))|(x-p_F(x))=(x-p_F(x))|x=\|x\|^2-(x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, $x|x_i=(x-p_F(x)|x_I)+(p_F(x)|x_i)=(p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n+1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ll}d^2+&\lambda_1(x|x_1)+\ldots+\lambda_n(x|x_n)=\|x\|^2\\ &\lambda_1(x_1|x_1)+\ldots+\lambda_n(x_1|x_n)=(x|x_1)\\ &\vdots\\ &\lambda_1(x_n|x_1)+\ldots+\lambda_n(x_n|x_n)=(x|x_n)\end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système vaut $\gamma(x_1,x_2,...,x_n)>0$ et le système est de CRAMER. Le déterminant associé à d^2 est $\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)$ et les formules de CRAMER refournissent

$$d^2=\frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}.$$

Correction de l'exercice 3894 ▲

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tXH_nX=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{i+j-1}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j\int_0^1t^{i+j-2}\,dt=\int_0^1\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_jt^{i+j-2}\right)dt$$
$$=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2dt\geqslant 0.$$

De plus, si $X\neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_iY^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t\mapsto\left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$. Ainsi, la fonction $t\mapsto\left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0,1]$ et on en déduit que $\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2dt>0$. On a montré que $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXH_nX>0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

Correction de l'exercice 3895 ▲

(a) ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$.
Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = PD{}^tP = PD'D'{}^tP = {}^t(D'{}^tP)D'{}^tP,$$

et la matrice $A = D'tP$ convient.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ S = {}^tAA.}$$

On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A.

(c)

$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(d) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}S,$$

et

$$X \in \mathrm{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}A.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A).}$$

(e) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0D_0{}^tP_0$.
Posons $D_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0\Delta_0{}^tP_0$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0\Delta_0^2{}^tP_0 = P_0D_0{}^tP_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.
M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts. Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.
Ainsi, nécessairement la matrice ${}^tP_0MP_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})/\ R^2 = S.}$$

Correction de l'exercice 3896 ▲

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1\times a_{i,j}\times 1\right| = \left|{}^tXAX\right| = |(AX|X)|$$
$$\leqslant \|AX\|\|X\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}$$
$$= \|X\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)}$$
$$= n.$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (X,AX) est liée ce qui équivaut à X vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow AX = X \text{ ou } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0,1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Correction de l'exercice 3897 ▲

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+\lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.
Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1 + \exp\left(\tfrac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \ldots + \ln(\lambda_n))\right)\right) \leqslant \tfrac{1}{n}(\ln(1+\exp(\ln(\lambda_1))) + \ldots + \ln(1+\exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n+A)}.}$$

Correction de l'exercice 3898 ▲

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.
Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\operatorname{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.}$$

Correction de l'exercice 3899 ▲

Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A{}^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.
Notons alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1,\ldots\lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1 D {}^tP_1$ et $S_2 = P_2 D {}^tP_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2({}^tP_1 S_1 P_1){}^tP_2 = (P_2{}^tP_1)S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Comme la matrice $P_2{}^tP_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A{}^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

Correction de l'exercice 3900 ▲

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice 3895, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^tMM^tN = {}^t(M^tN)M^tN$. D'après l'exercice 3895, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Correction de l'exercice 3901 ▲

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.

D'autre part, la matrice $A+B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(R), +, .)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$.

La matrice $A+B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A+B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A+B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.

D'après l'exercice 3895, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A + B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M$ et donc

$$\det(A+B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1})BM^{-1} = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$${}^tXCX = {}^tX^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geqslant 0$$

et ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1 + \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1+\lambda_1)...(1+\lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1...\lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1 + \det C) \leqslant (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A+B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leqslant \det(A+B).}$$

Correction de l'exercice 3902 ▲

1ère solution. (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient A la matrice de l'énoncé puis $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (n-1)\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i \neq j}(x_i^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \neq j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2\right) \\ &= \sum_{i \neq j}(x_i - x_j)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

et donc la matrice A est positive. De plus, si $X = (1)_{1 \leqslant i \leqslant n} \neq 0$, ${}^tXAX = 0$ et donc la matrice A n'est pas définie.

2ème solution. La matrice A est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

On note alors que $\text{rg}(A - nI_n) = 1$ et donc n est valeur propre de A d'ordre $n-1$. Soit λ la valeur propre manquante.

$$(n-1)n + \lambda = \text{Tr}A = n(n-1).$$

Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc la matrice A est positive mais 0 est valeur propre de A et donc la matrice A n'est pas définie.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive et non définie.}}$$

Correction de l'exercice 3903 ▲

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ soit orthogonale.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda)+\lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$

Correction de l'exercice 3904 ▲

A est la matrice d'un produit scalaire φ dans une certaine base $\mathscr{B}$ fixée de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}'$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ et T la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. La matrice T est triangulaire de même que la matrice ${}^tT$.

Puisque la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée pour le produit scalaire φ, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est I_n. D'après les formules de changement de base, $A = {}^tT(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\varphi)T = {}^tTT$.

Correction de l'exercice 3905 ▲

Puisque la matrice A est définie positive, il existe d'après le l'exercice 3904 une matrice triangulaire supèrieure inversible T telle que $A = {}^tTT$. Posons alors $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\det(A) = (\det(T))^2 = t_{1,1}^2 \dots t_{n,n}^2$$

Mais pour $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = \sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geqslant t_{i,i}^2$ et donc $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Remarque. On a montré au passage que les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ de A étaient des réels strictement positifs.

Correction de l'exercice 3906 ▲

Je vous laisse vérifier la linéarité. Si x est colinéaire à a, $f(x) = 0$ et les vecteurs de $\text{Vect}(a)\setminus\{0\}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image. Si x n'est pas colinéaire à a, $a\wedge x$ est un vecteur non nul orthogonal à a et il en est de même de $f(x) = a\wedge(a\wedge x)$. Donc, si x est colinéaire à $f(x)$, x est nécessairement orthogonal à a. Réciproquement, si x est un vecteur non nul orthogonal à a, $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2x = -||a||^2x$ et x est colinéaire à $f(x)$. Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de $\text{Vect}(a)$ et de $a^\perp$.

Correction de l'exercice 3907 ▲

Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls. Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre et donc une base de E, considérons $\mathscr{B}' = (e_1,\dots,e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leq i\leq n}| = \left|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leq i\leq n} \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leq i\leq n}|,$$

car $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ est le déterminant d'une d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou -1. Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i|e_i$ (puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leq i\leq n}| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leq i\leq n}| = \left|\prod_{i=1}^n (x_i|e_i)\right| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \times \|e_i\| = \prod_{i=1}^n ||x_i||,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout i, $|x_i|e_i| = \|x_i\| \times \|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout i, x_i est colinéaire à e_i ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale.

Correction de l'exercice 3908 ▲

L'application $(P,Q)\mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E. Pour cela, déterminons (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0,P_1,P_2,P_3)=(1,X,X^2,X^3)$. • $||P_0||^2=\int_{-1}^1 1^2\,dt=2$ et on prend $\boxed{Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}.}$ • $P_1|Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t\,dt=0$ puis $P_1-(P_1|Q_0)Q_0=X$ puis $||P_1-(P_1|Q_0)Q_0||^2=\int_{-1}^1 t^2\,dt=\frac{2}{3}$ et $\boxed{Q_1=\sqrt{\frac{3}{2}}X.}$
• $P_2|Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t^2\,dt=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1=0$. Donc, $P_2-(P_2|Q_0)Q_0-(P_2|Q_1)Q_1=X^2-\frac{1}{3}$, puis $||P_2-(P_2|Q_0)Q_0-(P_2|Q_1)Q_1||^2=\int_{-1}^1\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2\,dt=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{45}$ et $\boxed{Q_2=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1).}$ • $P_3|Q_0=P_3|Q_2=0$ et $P_3|Q_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 t^4\,dt=\frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3-(P_3|Q_0)Q_0-(P_3|Q_1)Q_1-(P_3|Q_2)Q_2=X^3-\frac{3}{5}X$, puis $\left\|X^3-\frac{3}{5}X\right\|^2=\int_{-1}^1\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2\,dt=2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}\right)=2\frac{25-21}{175}=\frac{8}{175}$, et $\boxed{Q_3=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X).}$
Une base orthonormée de E est (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) où $Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)$ et $Q_3=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X)$. Soit alors P un élément quelconque de $E=\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt=1$. Posons $P=aQ_0+bQ_1+cQ_2+dQ_3$. Puisque (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) est une base orthonormée de E, $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt=||P||^2=a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Maintenant, pour $x\in[-1,1]$, en posant $M_i=\text{Max}\{|Q_i(x)|,\ x\in[-1,1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}|P(x)|&\leq |a|\times|Q_0(x)|+|b|\times|Q_1(x)|+|c|\times|Q_2(x)|+|d|\times|Q_3(x)|\leq |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\&\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}.\end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|\leq 2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leq 2\sqrt{2}$. Etudions les cas d'égalité. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leq 2\sqrt{2}$. Soit $x_0\in[-1,1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}=|P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}=|P(x_0)|&\leq |a|\times|Q_0(x_0)|+|b|\times|Q_1(x_0)|+|c|\times|Q_2(x_0)|+|d|\times|Q_3(x_0)|\leq |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\&\leq\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si $(|a|,|b|,|c|,|d|)$ est colinéaire à $(1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda(\pm Q_0\pm\sqrt{3}Q_1\pm\sqrt{5}Q_2\pm\sqrt{7}Q_3)$ où $\lambda^2(1+3+5+7)=1$ et donc $\lambda=\pm\frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0\in\{-1,1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1)+bQ_1(1)+cQ_2(1)+dQ_3(1)|=|a|Q_0(1)+|b|Q_1(1)+|c|Q_2(1)+|d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{4}(Q_0+\sqrt{3}Q_1+\sqrt{5}Q_2+\sqrt{7}Q_3)&=\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+3X+\frac{5}{2}(3X^2-1)+\frac{7}{2}(5X^3-3X)\right)\\&=\pm\frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3+15X2-15X-3)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3909 ▲

Si x est colinéaire à k, $r(x)=x$, et si $x\in k^{\perp}$, $r(x)=(\cos\theta)x+(\sin\theta)k\wedge x$. Soit $x\in E$. On écrit $x=x_1+x_2$ où $x_1\in k^{\perp}$ et $x_2\in\text{Vect}(k)$. On a $x_2=(x.k)k$ (car k est unitaire) et $x_1=x-(x.k)k$. Par suite,

$$\begin{aligned}r(x)=r(x_1)+r(x_2)&=(\cos\theta)x_1+(\sin\theta)k\wedge x_1+x_2=(\cos\theta)(x-(x.k)k)+(\sin\theta)k\wedge x+(x.k)k\\&=(\cos\theta)x+(1-\cos\theta)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)=(\cos\theta)x+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)\end{aligned}$$

Application. Si $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$, pour tout vecteur x, on a :

$$r(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x.k)k+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\wedge x),$$

puis, $r(e_1)=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}(e_1+e_2)-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(3e_1+e_2-\sqrt{6}e_3)$
$r(e_2)=\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(e_1+3e_2+\sqrt{6}e_3)$
$r(e_3)=\frac{1}{2}e_3+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2+e_1)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1-\sqrt{6}e_2+2e_3)$.

$$\boxed{\text{La matrice cherchée est } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 3910 ▲

L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} I_n I_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t)\,dt \int_0^1 f^{n+2}(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^n}\right)^2 dt \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^{n+2}}\right)^2 dt \\ &\geq \left(\int_0^1 \sqrt{(f(t))^n}\sqrt{(f(t))^{n+2}}\,dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(t)\,dt\right)^2 = I_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Maintenant, comme f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, I_n est strictement positif pour tout naturel n. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie et croissante.}}$$

Correction de l'exercice 3911 ▲

(a) Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\mathrm{Re}(z)).1 + (\mathrm{Im}(z)).i) = (\mathrm{Re}(z))f(1) + (\mathrm{Im}(z))f(i) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})f(1) + \frac{1}{2i}(z-\bar{z})f(i) \\ &= \frac{f(1)-if(i)}{2}z + \frac{f(1)+if(i)}{2}\bar{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre $a = \frac{f(1)-if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2}$. (Réciproquement pour a et b complexes donnés, l'application f ainsi définie est $\mathbb{R}$-linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).

(b) $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Re}(f(1)) + \mathrm{Im}(f(i)) = \mathrm{Re}(a+b) + \mathrm{Im}(i(a-b)) = \mathrm{Re}(a+b) + \mathrm{Re}(a-b) = 2\mathrm{Re}(a)$

et

$$\begin{aligned} \det(f) &= \mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Im}(i(a-b)) - \mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Re}(i(a-b)) = \mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Re}(a-b) + \mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Im}(a-b) \\ &= (\mathrm{Re}(a))^2 - (\mathrm{Re}(b))^2 + (\mathrm{Im}(a))^2 - (\mathrm{Im}(b))^2 = |a|^2 - |b|^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(f) = 2\mathrm{Re}(a) \text{ et } \det(f) = |a|^2 - |b|^2.}$$

(c) Soient z et z' deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z' = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z') + (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Im}z') = \tfrac{1}{4}(z+\bar{z})(z'+\overline{z'}) - \tfrac{1}{4}(z-\bar{z})(z'-\overline{z'}) = \tfrac{1}{2}(\bar{z}z' + z\overline{z'}) = \mathrm{Re}(\bar{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée $(1,i)$ soit directe,

$$[z,z'] = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Im}z') + (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Re}z') = \tfrac{1}{4i}(z+\bar{z})(z'-\overline{z'}) - \tfrac{1}{4i}(z-\bar{z})(z'+\overline{z'}) = \tfrac{1}{2i}(\bar{z}z' - z\overline{z'}) = \mathrm{Im}(\bar{z}z').$$

Notons M la matrice de f dans la base $(1,i)$. Puisque la base $(1,i)$ est orthonormée,

$$f = f^* \Leftrightarrow M = {}^tM \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Re}(i(a-b)) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a+b) = -\mathrm{Im}(a-b) \Leftrightarrow 2\mathrm{Im}a = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f = f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 3912 ▲

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(e_i+e_j)|(e_i-e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $f(e_i+e_j)|f(e_i-e_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si $k = 0$, tous les $f(e_i)$ sont nuls et donc f est nulle.

Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E et donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ conserve la norme.
Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction de l'exercice 3913 ▲

a) Par récurrence et intégration par parties, on montre que $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

b) En développant $(1-x)^n$ à l'aide de la formule du binôme, on obtient après intégration $I_{n,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}$.
D_n étant le ppmc des dénominateurs dans l'expression précédente, nous en déduisons que $I_{n,n} = \frac{a}{D_n}$ où a est un entier. Comme $I_{n,n} > 0$, $a \geq 1$ et donc $I_{n,n} \geq \frac{1}{D_n}$. En utilisant le résultat de la question a), nous en déduisons l'inégalité demandée.

c) Soit $D_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de D_n. Pour tout i compris entre 1 et k, $p_i^{\alpha_i}$ divise un des nombres $n+1,\ n+2,\dots,\ 2n+1$. Par conséquent, $p_i^{\alpha_i} \leq 2n+1$. De plus, les p_i étant deux à deux distincts et inférieurs ou égaux à $2n+1$, $k \leq \pi(2n+1)$. D'où la majoration demandée.

Correction de l'exercice 3914 ▲

Soit n un entier naturel.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = (n^2+3n+1)^2,$$

avec n^2+3n+1 entier naturel.

Correction de l'exercice 3915 ▲

(a) Soit n un entier relatif.
Si n est pair, n et $5n^3$ sont pairs de même que $5n^3+n$ et 2 divise $5n^3+n$.
Si n est impair, n et $5n^3$ sont impairs et de nouveau $5n^3+n$ est pair. Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 2|(5n^3+n)$.
Si n est multiple de 3, n et $5n^3$ sont multiples de 3 de même que $5n^3+n$.
Si n est de la forme $3p+1$, alors

$$5n^2+1 = 5(3p+1)^2+1 = 45p^2+30p+6 = 3(9p^2+10p+2)$$

et $5n^2+1$ est divisible par 3. Il en est de même de $5n^3+n = n(5n^2+1)$.
Si n est de la forme $3p+2$, $5n^2+1 = 5(3p+2)^2+1 = 45p^2+60p+21 = 3(9p^2+20p+7)$ et $5n^2+1$ est divisible par 3. Il en est de même de $5n^3+n = n(5n^2+1)$.
Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z},\ 3|(5n^3+n)$.
Enfin, $5n^3+n$ est divisible par 2 et 3 et donc par $2\times3=6$. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6|(5n^3+n)$. (Tout ceci s'exprime beaucoup mieux à l'aide de congruences. Par exemple : si $n \equiv 1\ (3)$, $5n^2+1 \equiv 5.1^2+1 = 6 \equiv 0\ (3)$)

(b) 4^{2^n} signifie $(\dots((4^2)^2)^2\dots)^2$. Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7. $4^{2^0} = 4$ est dans $4+7\mathbb{Z}$. $4^{2^1} = 16$ est dans $2+7\mathbb{Z}$. $4^{2^2} = 16^2 = (7k+2)^2 = 4+7k'$ est dans $4+7\mathbb{Z}$... Montrons par récurrence sur p entier naturel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $4^{2^{2p}}$ est dans $4+7\mathbb{Z}$ et $4^{2^{2p+1}}$ est dans $2+7\mathbb{Z}$.
C'est vrai pour $p=0$.
Soit $p \geq 0$. Si il existe deux entiers relatifs k_{2p} et k_{2p+1} tels que $4^{2^{2p}} = 4+7k_{2p}$ et $4^{2^{2p+1}} = 2+7k_{2p+1}$, alors :

$$4^{2^{2p+2}} = (4^{2^{2p+1}})^2 = (2+7k_{2p+1})^2 = 4+7(4k_{2p+1}+7k_{2p+1}^2) \in 4+7\mathbb{Z},$$

puis

$$4^{2^{2p+3}} = (4^{2^{2p+2}})^2 = (4+7k_{2p+2})^2 = 16+28k_{2p+2}+49k_{2p+2}^2 = 2+7(2+4k_{2p+2}+7k_{2p+2}^2) \in 2+7\mathbb{Z}.$$

On a montré par récurrence que si n est pair, 4^{2^n} est dans $4+7\mathbb{Z}$ et si n est impair, 4^{2^n} est dans $2+7\mathbb{Z}$.
Ensuite $2^{2^0} = 2$ est dans $2+7\mathbb{Z}$ puis, pour $n \geq 1$, $2^{2^n} = 2^{2.2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}}$ est dans $4+7\mathbb{Z}$ si $n-1$ est pair ou encore si n est impair et est dans $2+7\mathbb{Z}$ si n est pair. Ainsi, que n soit pair ou impair, $4^{2^n}+2^{2^n}+1$ est dans $(4+2)+1+7\mathbb{Z} = 7+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$ et on a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n}+2^{2^n}+1.$$

Correction de l'exercice 3916 ▲

Soient m, n et p trois entiers naturels et r_1, r_2 et r_3 les restes des divisions euclidiennes de m, n et p par 8. Alors,

$$m^2+n^2+p^2 = (8q_1+r_1)^2+(8q_2+r_2)^2+(8q_3+r_3)^2 \in r_1^2+r_2^2+r_3^2+8\mathbb{Z}.$$

Donc $m^2+n^2+p^2$ est dans $7+8\mathbb{Z}$ si et seulement si $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ est dans $7+8\mathbb{Z}$.
Comme r_1, r_2 et r_3 sont des entiers entre 0 et 7, il suffit de vérifier que les sommes de trois carrés d'entiers compris au sens large entre 0 et 7 ne sont pas dans $7+8\mathbb{Z}$.
Or, $0^2 = 0 \in 8\mathbb{Z}$, $1^2 = 1 \in 1+8\mathbb{Z}$, $2^2 = 4 \in 4+8\mathbb{Z}$, $3^2 = 9 \in 1+8\mathbb{Z}$, $4^2 = 16 \in 8\mathbb{Z}$, $5^2 = 25 \in 1+8\mathbb{Z}$, $6^2 = 36 \in 4+8\mathbb{Z}$ et $7^2 = 49 \in 1+8\mathbb{Z}$. Donc, les carrés des entiers de 0 à 7 sont dans $8\mathbb{Z}$ ou $1+8\mathbb{Z}$ ou $4+8\mathbb{Z}$. Enfin,

$$\begin{array}{llll} 0+0+0=0\in 8\mathbb{Z}, & 0+0+1=1\in 1+8\mathbb{Z}, & 0+0+4=4\in 4+8\mathbb{Z}, & 0+1+1=2\in 2+8\mathbb{Z}, \\ 0+1+4=5\in 5+8\mathbb{Z} & 0+4+4=8\in 8\mathbb{Z}, & 1+1+1=3\in 3+8\mathbb{Z}, & 1+1+4=6\in 6+8\mathbb{Z}, \\ 1+4+4=9\in 1+8\mathbb{Z}, & 4+4+4=12\in 4+8\mathbb{Z}. & & \end{array}$$

Aucune de ces sommes n'est dans $7+8\mathbb{Z}$ et on a montré qu'un entier de la forme $8n+7$ n'est pas la somme de trois carrés.

Correction de l'exercice 3917 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En développant $(1+\sqrt{2})^n$ par la formule du binôme de NEWTON et en séparant les termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant pair des termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant impair, on écrit $(1+\sqrt{2})^n$ sous la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels non nuls.
Mais alors $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ et donc

$$(-1)^n = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2}) = a_n^2 - 2b_n^2$$

ou finalement,

$$((-1)^n a_n)a_n + (2(-1)^{n+1}b_n)b_n = 1$$

où $(-1)^n a_n = u$ et $2(-1)^{n+1}b_n = v$ sont des entiers relatifs. Le théorème de BEZOUT permet d'affirmer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 3918 ▲

Posons $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels. On a alors $(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ et donc

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2a_{2n+1} \in \mathbb{N}.$$

Mais de plus, $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$ et donc, puisque $2n+1$ est impair, $-1 < (1-\sqrt{3})^{2n+1} < 0$. Par suite,

$$2a_{2n+1} < (1+\sqrt{3})^{2n+1} < 2a_{2n+1}+1,$$

ce qui montre que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1}) = 2a_{2n+1} = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$ et montre déjà que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ est un entier pair. Mais on en veut plus :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} &= (1+\sqrt{3})((1+\sqrt{3})^2)^n + (1-\sqrt{3})((1-\sqrt{3})^2)^n \\ &= (1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^n \\ &= 2^n((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n)\end{aligned}$$

Montrons enfin que $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ est un entier, pair. Mais, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ est de la forme $A+B\sqrt{3}$ où A et B sont des entiers naturels et donc, puisque $(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n = A - B\sqrt{3}$, on a finalement $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n = 2A$ où A est un entier.
Donc, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair, ou encore $(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ est un entier divisible par 2^{n+1}.

Correction de l'exercice 3919 ▲

Soit n un entier naturel non nul. On note $\sigma(n)$ la somme de ses chiffres en base 10 (voir l'exercice 3932). Si $n = a_0 + 10a_1 + ... + 10^k a_k$ où $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i \leq 9$ pour $0 \leq i \leq k$ et $a_k \neq 0$, alors

$$\sigma(n) = a_0 + ... + a_k \leq 9(k+1) \leq 9(E(\log n)+1) \leq 9(\log n + 1).$$

Donc,

$$A = \sigma(4444^{4444}) \leq 9(\log(4444^{4444})+1) \leq 9(4444\log(10^5)+1) = 9(4444.5+1) = 9.22221 = 199989.$$

Puis, $B = \sigma(A) \leq 1+5.9 = 46$, puis $\sigma(B) \leq \sigma(39) = 12$. Donc, $1 \leq \sigma(B) \leq 12$.

D'autre part, on sait que modulo 9 : $\sigma(B) \equiv B \equiv A = 4444^{4444}$. Enfin, $4444^{4444} = (9.443+7)^{4444} \equiv 7^{4444}$ (9). De plus, $7 \equiv -2$ (9) puis $7^2 \equiv 4$ (9) puis $7^3 \equiv 28 \equiv 1$ (9) et donc $7^{4444} = (7^3)^{1481}.7 \equiv (1^3)^{1481}.7 \equiv 7$ (9). Finalement, $1 \leq \sigma(B) \leq 12$ et $C \equiv 7$ (9) ce qui impose $C = 7$.

Correction de l'exercice 3920 ▲

On a trois possibilités : $p \in 3\mathbb{Z}$, $p \in 3\mathbb{Z}+1$ ou $p \in 3\mathbb{Z}-1$.
Dans les deux derniers cas, $p^2 \in 1+3\mathbb{Z}$ et $8p^2+1 \in 9+3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$. Mais alors, $8p^2+1$ est premier et multiple de 3 ce qui impose $8p^2+1 = 3$. Cette dernière égalité est impossible.
Il ne reste donc que le cas où p est premier et multiple de 3, c'est-à-dire $p = 3$ (en résumé, p et $8p^2+1$ premiers impliquent $p = 3$). Dans ce cas, $8p^2+1 = 73$ et $8p^2-1 = 71$ sont effectivement premiers.

Correction de l'exercice 3921 ▲

(a) Pour $1 \leq k \leq n$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Donc, si k et n sont premiers entre eux, puisque n divise kC_n^k, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que n divise C_n^k.

(b) De même, $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$ montre que $(n+1)$ divise nC_{2n}^n et, puisque n et $(n+1)$ sont premiers entre eux (d'après BEZOUT puisque $(n+1)-n = 1$), $(n+1)$ divise C_{2n}^n d'après le théorème de GAUSS.

Correction de l'exercice 3922 ▲

(a) Posons $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$. d divise $m = 105 = 3.5.7$ mais, puisque d divise x et y, d divise aussi $x+y = 56 = 2^3.7$. Donc, d divise $105 \wedge 56 = 7$ et nécessairement $d = 1$ ou $d = 7$.
1er cas. $d = 1$ fournit, puisque $m = 105$, $xy = md = 105$. x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 56X + 105 = 0$ qui n'admet pas de solutions entières.
2ème cas. $d = 7$ fournit $xy = 7.105 = 735$. x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 56X + 735 = 0$ qui admet les solutions 21 et 35.
Réciproquement, $21+35 = 56$ et $21 \vee 35 = 3.5.7 = 105$. $\mathscr{S} = \{(21,35),(35,21)\}$.

(b) On pose $x = dx'$ et $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux et $d = x \wedge y$. Le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x'-y' = 1 \\ dx'y' = 72 \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x' = y'+1 \\ d(y'+1)y' = 72 \end{array}\right.$. En particulier, y' et $y'+1$ sont deux diviseurs consécutifs de 72. $72 = 2^3.3^2$ admet $4.3 = 12$ diviseurs à savoir 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72. Donc y' est élément de $\{1,2,3,8\}$.
1er cas. $y' = 1$ fournit $d = \frac{72}{1.2} = 36$ puis $y = 36.1 = 36$ et $x = y+d = 72$. Réciproquement, $72-36 = 36 = 36 \wedge 72$ et $36 \vee 72 = 72$.
2ème cas. $y' = 2$ fournit $d = 12$, $y = 24$, $x = 36$ qui réciproquement conviennent.
3ème cas. $y' = 3$ fournit $d = 6$, $y = 18$, $x = 24$ qui réciproquement conviennent.
4ème cas. $y' = 8$ fournit $d = 1$, $y = 8$, $x = 9$ qui réciproquement conviennent.

$$\mathscr{S} = \{(9,8),(24,18),(36,24),(72,36)\}.$$

(c) d divise m et donc d divise $243 = 3^5$ et $d \in \{1,3,9,27,81,243\}$. On pose alors $x = dx'$, $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux.
1er cas. Si $d = 1$ on a $x'y' - 1 = 243$ ou encore $x'y' = 244$ ce qui fournit les possibilités (en n'oubliant pas que x' et y' sont premiers entre eux) :
$x' = 1$, $y' = 244$ puis $x = 1$ et $y = 244$,
$x' = 4$, $y' = 61$ puis $x = 4$ et $y = 61$,
$x' = 61$, $y' = 4$ puis $x = 61$ et $y = 4$,
$x' = 244$, $y' = 1$ puis $x = 244$ et $y = 1$ qui réciproquement conviennent.
2ème cas. Si $d = 3$, on a $x'y' = 81+1 = 82$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 82$ puis $x = 3$ et $y = 246$,
$x' = 2$, $y' = 41$ puis $x = 6$ et $y = 123$,
$x' = 41$, $y' = 2$ puis $x = 123$ et $y = 6$,
$x' = 82$, $y' = 1$ puis $x = 246$ et $y = 3$ qui réciproquement conviennent.
3ème cas. Si $d = 9$ on a $x'y' = 27+1 = 28$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 28$ puis $x = 9$ et $y = 252$,
$x' = 4$, $y' = 7$ puis $x = 36$ et $y = 63$,
$x' = 7$, $y' = 4$ puis $x = 63$ et $y = 36$,
$x' = 28$, $y' = 1$ puis $x = 252$ et $y = 9$ qui réciproquement conviennent.
4ème cas. Si $d = 27$ on a $x'y' = 9+1 = 10$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 10$ puis $x = 27$ et $y = 270$,
$x' = 2$, $y' = 5$ puis $x = 54$ et $y = 135$,
$x' = 5$, $y' = 2$ puis $x = 135$ et $y = 54$,
$x' = 10$, $y' = 1$ puis $x = 270$ et $y = 27$ qui réciproquement conviennent.

5ème cas. Si $d = 81$, on a $x'y' = 3+1 = 4$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 4$ puis $x = 81$ et $y = 324$,
$x' = 4$, $y' = 1$ puis $x = 324$ et $y = 81$ qui réciproquement conviennent.
6ème cas. Si $d = 243$, on a $x'y' = 1+1 = 2$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 2$ puis $x = 243$ et $y = 486$,
$x' = 2$, $y' = 1$ puis $x = 486$ et $y = 243$ qui réciproquement conviennent.

Correction de l'exercice 3923 ▲

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = 5n^2+10 = 5(n^2+2).$$

$5(n^2+2)$ devant être un carré parfait, n^2+2 doit encore être divisible par 5 mais si n est dans $5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $2+5\mathbb{Z}$, si n est dans $\pm1+5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $3+5\mathbb{Z}$ et si n est dans $\pm2+5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $1+5\mathbb{Z}$ et n^2+2 n'est jamais divisible par 5. Une somme de cinq carrés d'entiers consécutifs n'est donc pas un carré parfait.

Correction de l'exercice 3924 ▲

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n < m$. Posons $m = n+k$ avec $k > 0$. On note que

$$F_m = 2^{2^{n+k}}+1 = (2^{2^n})^{2^k}+1 = (F_n-1)^{2^k}+1.$$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de NEWTON et en tenant compte du fait que 2^k est pair puisque k est strictement positif, on obtient une expression de la forme $q.F_n+1+1 = q.F_n+2$.
Le P.G.C.D. de F_n et F_m doit encore diviser $F_m - q.F_n = 2$ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque 2^n et 2^m sont strictement positifs, F_n et F_m sont impairs et leur P.G.C.D. vaut donc 1 (ce résultat redémontre l'existence d'une infinité de nombres premiers).

Correction de l'exercice 3925 ▲

(a) Soit, pour n entier naturel non nul donné, $v_n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_n+u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_{n-1}+u_n) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -v_n.$$

La suite v est donc une suite géométrique de raison -1 et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (-1)^{n-1}v_1 = (-1)^n.$$

Cette égalité s'écrit encore $((-1)^n u_{n-1})u_{n+1} + ((-1)^{n+1}u_n)u_n = 1$ et le théorème de BEZOUT permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux (il est clair par récurrence que la suite u est à valeurs entières).

(b) Pour $m = 1$ et n entier naturel quelconque :

$$u_{n+m} = u_{n+1} = u_{n+1}u_1 + u_nu_0 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

Pour $m = 2$ et n entier naturel quelconque :

$$u_{n+m} = u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = u_{n+1}u_2 + u_nu_1 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

Soit $m \geq 1$. Supposons que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+m} = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$ et $u_{n+m+1} = u_{n+1}u_{m+1} + u_mu_n$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+m+2} &= u_{n+m+1} + u_{n+m} = u_{n+1}u_{m+1} + u_mu_n + u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+1}(u_{m+1}+u_m) + u_n(u_m+u_{m-1}) = u_{n+1}u_{m+2} + u_nu_{m+1}. \end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité proposée par récurrence.
Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \geq m$. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = mq+r$ avec q et r entiers tels que $0 \leq r \leq m-1$.
Or, $u_{m+r} = u_mu_{r+1} + u_{m-1}u_r$. Par suite, un diviseur commun à u_m et u_r divise encore u_m et u_{m+r} et réciproquement un diviseur commun à u_m et u_{m+r} divise $u_{m-1}u_r$. Mais, u_m et u_{m-1} sont premiers entre eux et, d'après le théorème de GAUSS, un diviseur commun à u_m et u_{m+r} divise u_r. Les diviseurs communs à u_m et u_r sont encore les diviseurs communs à u_m et u_{m+r} et donc :

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r}.$$

Puis, par récurrence

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r} = u_m \wedge u_{2m+r} = \ldots = u_m \wedge u_{qm+r} = u_m \wedge u_n.$$

Ainsi, les algorithmes d'EUCLIDE appliqués d'une part à u_m et u_n et d'autre part à m et n s'effectuent en parallèle et en particulier, $u_m \wedge u_n = u_{m\wedge n}$.

Correction de l'exercice 3926 ▲

(a) Posons $d = x \wedge y \wedge z$ puis $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$ où $x' \wedge y' \wedge z' = 1$.

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow d^2({x'}^2 + d^2{y'}^2) = d^2z'2 \Leftrightarrow {x'}^2 + {y'}^2 = {z'}^2,$$

avec $x' \wedge y' \wedge z' = 1$, ce qui montre que l'on peut se ramener au cas où x, y et z sont premiers entre eux.

Supposons donc x, y et z premiers entre eux (dans leur ensemble). Soit p un nombre premier. Si p divise x et y alors p divise $x^2 + y^2 = z^2$ et donc p est également un facteur premier de z contredisant le fait que x, y et z sont premiers entre eux. Donc, x et y sont premiers entre eux.

Si p divise x et z alors p divise $z^2 - x^2 = y^2$ et donc p est également un facteur premier de y, contredisant le fait que x, y et z sont premiers entre eux. Donc, x et z sont premiers entre eux. De même, y et z sont premiers entre eux. Finalement, x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.

(b) Puisque x, y et z sont deux à deux premiers entre eux, parmi les nombres x, y et z, il y a au plus un nombre pair. Mais si ces trois nombres sont impairs, $x^2 + y^2 = z^2$ est pair en tant que somme de deux nombres impairs contredisant le fait que z est impair. Ainsi, parmi les nombres x, y et z, il y a exactement un nombre pair et deux nombres impairs.

Si x et y sont impairs, alors d'une part, z est pair et z^2 est dans $4\mathbb{Z}$ et d'autre part x^2 et y^2 sont dans $1 + 4\mathbb{Z}$. Mais alors, $x^2 + y^2$ est dans $2 + 4\mathbb{Z}$ excluant ainsi l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$. Donc, z est impair et l'un des deux nombres x ou y est pair. Supposons, quite à permuter les lettres x et y, que x est impair et y est pair.

Posons alors $y = 2y'$ puis $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$ (puisque x et z sont impairs, X et Z sont des entiers).

(c) On a

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow 4{y'}^2 = (z + x)(z - x) \Leftrightarrow {y'}^2 = XZ.$$

Un diviseur commun à X et Z divise encore $z = Z + X$ et $x = Z - X$ et est donc égal à ± 1 puisque x et z sont premiers entre eux. X et Z sont des entiers premiers entre eux.

Le produit des deux entiers X et Z est un carré parfait et ces entiers sont premiers entre eux. Donc, un facteur premier de X n'apparaît pas dans Z et apparaît donc dans X à un exposant pair ce qui montre que X est un carré parfait. De même, Z est un carré parfait.

(d) Donc, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $X = u^2$ et $Z = v^2$. Mais alors, $z = Z + X = u^2 + v^2$ et $x = Z - X = u^2 - v^2$. Enfin, $y^2 = z^2 - x^2 = (u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2)^2 = 4u^2v^2$ et donc, $y = 2uv$ quite à remplacer u par $-u$.

En résumé, si $x^2 + y^2 = z^2$ alors il existe $(d, u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $x = d(u^2 - v^2)$, $y = 2duv$ et $z = d(u^2 + v^2)$ ou bien $x = 2duv$, $y = d(u^2 - v^2)$ et $z = d(u^2 + v^2)$.

Réciproquement,

$$(d(u^2 - v^2))^2 + (2duv)^2 = d^2(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) = (d(u^2 + v^2))^2,$$

et on a trouvé tous les triplets Pythagoriciens. Par exemple, $d = 1$, $u = 2$ et $v = 1$ fournissent le triplet $(3, 4, 5)$. $d = 2$, $u = 2$ et $v = 1$ fournissent le triplet $(6, 8, 10)$ et $d = 1$, $u = 3$ et $v = 2$ fournissent le triplet $(5, 12, 13)$.

Correction de l'exercice 3927 ▲

Soient x et y deux entiers naturels tels que $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$. On a $4y^3 \leq 3x^3 + xy + 4y^3 = 349$ et donc

$$y \leq \sqrt[3]{\frac{349}{4}} = 4,4\ldots$$

Donc, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De même, $3x^3 \leq 3x^3 + xy + 4y^3 = 349$ et donc

$$x \leq \sqrt[3]{\frac{349}{3}} = 4,8\ldots$$

Donc, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ce qui ne laisse plus que $5.5 = 25$ couples candidats. Ensuite,

$y = 0$ donne $3x^3 = 349$ qui ne fournit pas de solutions.

$y = 1$ donne $3x^3 + x - 345 = 0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.

$y = 2$ donne $3x^3 + 2x - 317 = 0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.

$y = 3$ donne $3x^3 + 3x - 241 = 0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.

$y = 4$ donne $3x^3 + 4x - 93 = 0$ dont seul $x = 3$ est solution.

$$\mathscr{S} = \{(3,4)\}.$$

Correction de l'exercice 3928 ▲

Si $x \geq 5$ et $5 \leq k \leq x$, alors $k!$ est divisible par $2.5 = 10$. D'autre part, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ et le chiffre des unités de $\sum_{k=1}^{x} k!$ est 3. $\sum_{k=1}^{x} k!$ n'est donc pas un carré parfait car le chiffre des unités (en base 10) d'un carré parfait est à choisir parmi 0, 1, 4, 5, 6, 9. Donc, $x \leq 4$. Ensuite, $1! = 1 = 1^2$ puis $1! + 2! = 1 + 2 = 3$ n'est pas un carré parfait, puis $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$ puis $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ n'est pas un carré parfait.

$$\mathscr{S} = \{(1,1),(3,3)\}.$$

Correction de l'exercice 3929 ▲

$$\begin{aligned} n &= 9 + 8(10 + 10^2 + ... + 10^{p-1}) + 4(10^p + ... + 10^{2p-1}) = 9 + 80\frac{10^{p-1} - 1}{10 - 1} + 4.10^p\frac{10^p - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{1}{9}(81 + 80(10^{p-1} - 1) + 4.10^p(10^p - 1)) = \frac{1}{9}(4.10^{2p} + 4.10^p + 1) = \left(\frac{2.10^p + 1}{3}\right)^2, \end{aligned}$$

(ce qui montre déjà que n est le carré d'un rationnel). Maintenant,

$$2.10^p + 1 = 2(9+1)^p + 1 = 2.\sum_{k=0}^{p} C_p^k 9^k + 1 = 3 + 2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k} = 3(1 + 2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k-1}),$$

et $2.10^p + 1$ est un entier divisible par 3. Finalement, $n = \left(\frac{2.10^p+1}{3}\right)^2$ est bien le carré d'un entier.

Correction de l'exercice 3930 ▲

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = 11...1$ ($k+1$ chiffres 1 en base 10).
Soit n un entier naturel quelconque.
La division euclidienne de a_k par n s'écrit : $a_k = n.q_k + r_k$ où q_k et r_k sont des entiers naturels tels que $0 \leq r_k \leq n - 1$.
Les $n+1$ entiers r_0,..., r_n sont à choisir parmi les n entiers 0, 1,..., $n-1$. Les $n+1$ restes considérés ne peuvent donc être deux à deux distincts. Par suite,

$$\exists (k,l) \in \mathbb{N}^2 /\ 0 \leq k < l \leq n \text{ et } r_k = r_l.$$

Mais alors, $a_l - a_k = (q_l - q_k)n$ est un multiple de n. Comme $a_l - a_k = 11...10...0$ ($l-k$ chiffres 1 et $k+1$ chiffres 0), on a montré que tout entier naturel admet un multiple de la forme $11...10...0 = 11...1.10^K$. Si de plus n est impair, non divisible par 5, alors n est premier à 2 et à 5 et donc à 10^K. D'après le théorème de GAUSS, n divise $11...1$.

Correction de l'exercice 3931 ▲

(a) $u_n^2 = (2^{n+1} + 1)^2 = 2^{2n+2} + 2^{n+2} + 1 = 10...010...01_2$ ($n-1$ puis $n+1$ chiffres 0)

(b)

$$\begin{aligned} u_n^3 &= (2^{n+1} + 1)^3 = 2^{3n+3} + 3.2^{2n+2} + 3.2^{n+1} + 1 = 2^{3n+3} + (2+1).2^{2n+2} + (2+1).2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{3n+3} + 2^{2n+3} + 2^{2n+2} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 1 = 10...0110...0110...01_2 \end{aligned}$$

($n-1$ puis $n-1$ puis n chiffres 0)

(c)

$$\begin{aligned} u_n^3 - u_n^2 + u_n &= 2^{3n+3} + 3.2^{2n+2} + 3.2^{n+1} + 1 - 2^{2n+2} - 2^{n+2} - 1 + 2^{n+1} + 1 = 2^{3n+3} + 2^{2n+3} + 2^{n+2} + 1 \\ &= 10...010...010...01 \end{aligned}$$

($n-1$ puis n puis $n+1$ chiffres 0)

Correction de l'exercice 3932 ▲

(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $n=\sum_{k=0}^{p}a_k10^k$, où $p\in\mathbb{N}$, et $\forall k\in\{0,...,p\}$, $a_k\in\{0,...,9\}$, et $a_p\neq 0$. Le nombre de chiffres de n est alors $p+1$. L'entier p vérifie $10^p\leq n<10^{p+1}$ ou encore $p\leq \log n<p+1$. Par suite, $p=E(\log n)$. Ainsi, le nombre de chiffres de n en base 10 est $E(\log n)+1$.

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}$

i. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $n=a_p10^p+...+10a_1+a_0=\overline{a_p...a_1a_0}_{10}$. Si au moins un des chiffres de n n'est pas 9, on note k le plus petit indice tel que $a_k\neq 9$. Alors, $0\leq k\leq p-1$ et $n=\overline{a_p...a_k9...9}_{10}$ et $n+1=\overline{a_p...a_{k+1}(a_k+1)0...0}_{10}$. Dans ce cas, si $k=0$,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}=\frac{\sigma(n)+1}{\sigma(n)}=1+\frac{1}{\sigma(n)}\leq 1+1=2.$$

Si $1\leq k\leq p-1$,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}=\frac{a_p+...+a_k+1}{a_p+...+a_k+9k}\leq\frac{a_p+...+a_k+1}{a_p+...+a_k+1}=1\leq 2.$$

Sinon, tous les chiffres de n sont égaux à 9, et dans ce cas,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}=\frac{1}{9(p+1)}\leq 2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n\leq 2$. La suite u est donc bornée.

Pour $p\in\mathbb{N}^*$, $u_{10^p-1}=\frac{\sigma(10^p)}{\sigma(10^p-1)}=\frac{1}{9p}$. La suite extraite $(u_{10^p-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0.

Pour $p\in\mathbb{N}^*$, $u_{10^p}=\frac{\sigma(10^p+1)}{\sigma(10^p)}=\frac{2}{1}=2$. La suite extraite $(u_{10^p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $2\neq 0$.

On en déduit que la suite u diverge.

ii. Avec les notations du a), $1\leq\sigma(n)\leq 9(p+1)=9(E(\log n)+1)\leq 9(\log n+1)$.

iii. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $1\leq\sqrt[n]{\sigma(n)}\leq\sqrt[n]{9(\log n+1)}=\exp(\frac{1}{n}(\ln 9+\ln(1+\frac{\ln n}{\ln 10}))$. Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 et donc la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ converge et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sigma(n)}=1$.

Correction de l'exercice 3933 ▲

(a) (Formule de LEGENDRE) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si p est un nombre premier qui divise $n!=1.2...n$, alors p est un facteur premier de l'un des entiers 2,..., n et en particulier, $p\leq n$. Réciproquement, il est clair que si p est un nombre premier tel que $p\leq n$, p divise $n!$. Les facteurs premiers de $n!$ sont donc les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Soit donc p un nombre premier tel que $p\leq n$. Pour trouver l'exposant de p dans la décomposition primaire de $n!$, on compte 1 pour chaque multiple de p inférieur ou égal à n, on rajoute 1 pour chaque multiple de p^2 inférieur ou égal à n, on rajoute encore 1 pour chaque multiple de p^3 inférieur ou égal à n... et on s'arrête quand l'exposant k vérifie $p^k>n$.

$$n\geq p^k\Leftrightarrow \ln n\geq k\ln p\Leftrightarrow k\leq\frac{\ln n}{\ln p},$$

(car $\ln p>0$). Donc, si $k\geq E(\frac{\ln n}{\ln p})+1$, alors $p^k>n$.

Dit autrement, l'exposant de p est la somme du nombre de multiples de p inférieurs ou égaux à n, du nombre de multiples de p^2 inférieurs ou égaux à n, du nombre de multiple de p^3 inférieurs ou égaux à n... et du nombre de multiples de $p^{E(\ln n/\ln p)}$.

Soit k un entier tel que $1\leq k\leq E(\frac{\ln n}{\ln p})$ et K un entier naturel.

$$1\leq K.p^k\leq n\Leftrightarrow\frac{1}{p^k}\leq K\leq\frac{n}{p^k}\Leftrightarrow 1\leq K\leq E(\frac{n}{p^k}).$$

Il y a donc $E(\frac{n}{p^k})$ multiples de p^k compris au sens large entre 1 et n. On a montré que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$E(\frac{n}{p})+E(\frac{n}{p^2})+E(\frac{n}{p^3})+...$$

(b) L'exposant de 5 dans la décomposition primaire de 1000! est

$$E(\frac{1000}{5})+E(\frac{1000}{5^2})+E(\frac{1000}{5^3})+E(\frac{1000}{5^4})=200+40+8+1=249.$$

L'exposant de 2 est évidemment supérieur (il y a déjà au moins 500 nombres pairs entre 1 et 1000). Donc, la plus grande puissance de 10 divisant 1000! est encore la plus grande puissance de 5 divisant 1000!, à savoir 249. L'écriture en base 10 de 1000! se termine par 249 zéros.

Correction de l'exercice 3934 ▲

(Petit théorème de FERMAT) Soit p un nombre premier.

(a) Soit p un nombre premier et k un entier tel que $1 \leq k \leq p-1$. On a $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$. Donc, p divise kC_p^k. Mais, p est premier et donc p est premier à tous les entiers compris entre 1 et $p-1$ au sens large. D'après le théorème de GAUSS, p divise C_p^k.

(b) Soit p un nombre premier. Montrons par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.
C'est clair pour $a = 1$.
Soit $a \geq 1$. Supposons que $a^p \equiv a\ (p)$. On a alors

$$\begin{aligned}(a+1)^p &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k \\ &\equiv a^p + 1\ (p) \quad \text{(d'après 1))} \\ &\equiv a+1\ (p) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.

Correction de l'exercice 3935 ▲

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Supposons que $(p-1)! \equiv -1\ (p)$. Il existe donc un entier relatif a tel que $(p-1)! = -1 + ap\ (*)$.
Soit $k \in \{1, ..., p-1\}$. L'égalité $(*)$ s'écrit encore $k(-\prod_{j\neq k} j) + ap = 1$. Le théorème de BEZOUT permet alors d'affirmer que k et p sont premiers entre eux. Ainsi, p est premier avec tous les entiers naturels éléments de $\{1, ..., p-1\}$ et donc, p est un nombre premier.

Correction de l'exercice 3945 ▲

(a) $x = \dot{\overline{25}}$, $y = \dot{\overline{32}}$.

(b) $x = \dot{\overline{15}}$ ou $\dot{\overline{16}}$.

Correction de l'exercice 3946 ▲

(a) $\dot{0}$, $\pm\dot{1}$, $\pm\dot{5}$.

(b)

(c)

Correction de l'exercice 3949 ▲

Étudier le même produit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3951 ▲

(a)

(b) 3.

(c)

(d)

(e)

(f) $\dot{\overline{11}}$, $\dot{\overline{27}}$.

Correction de l'exercice 3954 ▲

Pour $1 \leq k < p$: $k!C_{p+k}^k = (p+1)\dots(p+k) \equiv k!(\bmod p)$ donc $C_{p+k}^k \equiv 1(\bmod p)$. De plus $C_p^k \equiv 0(\bmod p)$ d'où $C_p^k C_{p+k}^k \equiv C_p^k(\bmod p^2)$.
Ensuite $(p-1)!C_{2p}^p = 2(p+1)\dots(p+p-1) \equiv 2(p-1)! + 2p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i}(\bmod p^2) \equiv 2(p-1)!\left(1+p\sum_{i=1}^{p-1} i'\right)(\bmod p^2)$ où i' désigne l'inverse de i modulo p. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est une permutation de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ donc $\sum_{i=1}^{p-1} i' \equiv \frac{p(p-1)}{2}(\bmod p) \equiv 0(\bmod p)$, d'où $C_p^p C_{2p}^p \equiv 2(\bmod p^2)$.

Enfin $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k \equiv 1+\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k + 2(\operatorname{mod} p^2) \equiv 2^p+1(\operatorname{mod} p^2)$.

Correction de l'exercice 3955 ▲

L'équation caractéristique, $X^3 = 4(X^2+X+1)$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{Z}/11Z$: $1, 6, 8$. Donc x_n est de la forme : $x_n = a+6^n b+8^n c$ avec $a,b,c \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. On a $6^{10} \equiv 8^{10} \equiv 1(\operatorname{mod} 11)$, donc (x_n) est périodique de période divisant 10. La plus petite période est 1 si $b=c=0$, 10 sinon car les suites (6^n) et (8^n) ont 10 comme plus petite période modulo 11 et l'on a : $8(x_{n+1}-x_n)-5(x_{n+2}-x_{n+1}) = 7\cdot 8^n c$ et $7(x_{n+2}-x_{n+1})-(x_{n+1}-x_n) = 7\cdot 6^n b$.

Correction de l'exercice 3956 ▲

(a)

(b) i. Le nombre de solutions de l'équation $x^q = \dot{1}$ est inférieur ou égal à $q < p-1$.

ii. $\dot{0} = a^{3q}-\dot{1} = (a^q-\dot{1})(a^{2q}+a^q+\dot{1})$ donc a^{2q} est racine de $x^2+x+\dot{1} = \dot{0}$, de discriminant $-\dot{3}$.

(c) Il existe $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ solution de $x^2+x+\dot{1} = \dot{0}$, et un tel x est d'ordre multiplicatif 3. Par le théorème de Lagrange, on en déduit $3 \mid p-1$.

Correction de l'exercice 3957 ▲

Regrouper x et $n-x$.

Correction de l'exercice 3959 ▲

(a) $R=1$.

(b) $R=1$.

(c) $R=1$.

(d) $R=\frac{1}{e}$.

(e) $R=\frac{1}{\sqrt{b}}$.

(f) $R=1$.

(g) $R=1$.

(h) $R=1$.

(i) $R=\frac{1}{3}$.

(j) $R=1$.

(k) $R=1$.

(l) $R=\sqrt{2}-1$.

(m) $R=\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.

(n) $R=0$.

(o) $R=\frac{1}{2}$, $2t \leq 1+t^2 \leq 2$.

(p) $R=1$, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$.

(q) $R=1$.

Correction de l'exercice 3961 ▲

La suite $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}+\alpha\right)\right)_{k\in|||}$ est périodique de période 5, donc prend au plus cinq valeurs distinctes. soit a celle de plus grande valeur absolue. Alors $R=\frac{1}{|a|}$.

Correction de l'exercice 3962 ▲

$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \sim \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1, \\ \zeta(\alpha) & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$ Dans les trois cas, on obtient $R=1$.

Il y convergence en $x=1$ si et seulement si $\alpha < 0$ et il y a divergence grossière en $x=-1$ lorsque $\alpha > 1$ vu les équivalents. Pour $\alpha \leq 1$ et $x=-1$ il y a convergence (CSA).

Correction de l'exercice 3963 ▲

(a) (a_n) est bornée et (na_n) ne l'est pas, donc $R_a = 1$. $|b_n| \sim |a_n|$ donc $R_b = 1$.

(b) Il y a doute seulement pour $x = \pm 1$. Le critère de convergence d'Abel (hors programme) s'applique, $\sum a_n x^n$ converge si $x = \pm 1$. $b_n = a_n - \frac{1}{6}a_n^3 + O(n^{-5/3})$ et le critère d'Abel s'applique aussi à $\sum a_n^3 x^n$ (linéariser le $\cos^3$), il y a aussi convergence pour $x = \pm 1$.
Résolution conforme au programme : regrouper par paquets de six termes.

Correction de l'exercice 3964 ▲

(a) $R' = R^2$.

(b) $R' = \infty$.

(c) $R' = eR$.

Correction de l'exercice 3965 ▲

$\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$.

Correction de l'exercice 3966 ▲

(a) Série produit de $a(z)$ et $\frac{1}{z-\rho} \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}\rho^k$.

(b) Si $a(\rho) \neq 0$: $b(z)$ converge pour $|z| < \rho$ et tend vers l'infini pour $z \to \rho^- \Rightarrow R = \rho$.
Si $a(\rho) = 0$: $\forall\, r > \rho$, $|a_p| \leq \frac{M}{r^p} \Rightarrow |b_n| \leq \frac{M}{r^n(r-\rho)} \Rightarrow R = \infty$.

Correction de l'exercice 3967 ▲

(a) $]-1,2[$.

(b) Pour $0 \leq k \leq 4^n$, on a $|a_k| \leq C_{4^n}^{4^n/2} \Big/ 2^{4^n}$ (atteint pour $k = 4^n/2$).

Donc $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et si $x > 1$ alors $a_{3*4^n/2}x^{3*4^n/2} \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 3968 ▲

(a) Soit $z \neq 0$. Pour $n > e^{1/|z|}$, on a $|z|\ln n > 1$ et donc la suite $((\ln n)^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

(b) Soit $z \neq 0$. Pour $n > \frac{1}{|z|^2}$, on a $|z|\sqrt{n} > 1$ et donc la suite $((\sqrt{n})^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

(c) D'après la formule de STIRLING

$$(\ln(n!))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right) = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi})\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\ln^2 n.$$

La série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $(n^2\ln^2 n)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2\ln^2(n+1)}{n^2\ln^2 n} = 1$, la règle de d'ALEMBERT permet d'affirmer que

$$\boxed{R = 1.}$$

(d) $$n^4\ln\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^4\ln\left(1 + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24} + o(1).$$

Donc $\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/24}$ et

$$\boxed{R = 1.}$$

(e) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $a_n=\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\times\frac{n!^2}{(n+1)!^2}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(2n+2)(2n+1)n^n}{(n+1)^2(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\times\frac{4n+2}{n+1}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{ne}.$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$. D'après la règle de d'ALEMBERT,

$$\boxed{R=+\infty.}$$

(f) On a vu que $\ln(n!)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln n$. Donc la série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $\left(\frac{(n\ln n)^a}{n!^b}\right)$. Puis

$$\frac{((n+1)\ln(n+1))^a/(n+1)!^b}{(n\ln n)^a/n!^b}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^b}$$

et donc, d'après la règle de d'ALEMBERT

$$\boxed{\text{si } b>0,\ R=+\infty,\ \text{si } b=0,\ R=1 \text{ et si } b<0,\ R=0.}$$

(g) Si $a=0$, $R=+\infty$. On suppose $a\neq 0$.
• Si $b>1$, $\frac{a^n}{1+b^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ et donc $R=\frac{b}{a}$.
• Si $b=1$, $\frac{a^n}{1+b^n}=\frac{a^n}{2}$ et $R=a$.
• Si $0\leqslant b<1$, $\frac{a^n}{1+b^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}a^n$ et $R=a$.
Dans tous les cas

$$\boxed{R=\frac{\mathrm{Max}(1,b)}{a} \text{ si } a>0 \text{ et } R=+\infty \text{ si } a=0.}$$

Correction de l'exercice 3969 ▲

(a) $-1+\sqrt{x}\,\mathrm{Argth}\sqrt{x}$ pour $0\leq x<1$ et $-1-\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{-x}$ pour $-1\leq x\leq 0$.
(b) $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.
(c) $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.
(d) $\frac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ (décomposer en éléments simples).
(e) $-\frac{1}{2}(x+(x^2+1)\,\mathrm{Arctan}\,x)$ (décomposer en éléments simples).
(f) $-1+\frac{u}{4}\,\mathrm{Argth}\,u-\frac{u}{2}\,\mathrm{Arctan}\,u$, $u=\sqrt[4]{x}$.
(g) $\frac{1}{2(1-x)}+\frac{5}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{Argth}\sqrt{x}$ pour $0\leq x<1$ et $\frac{1}{2(1-x)}+\frac{5}{2\sqrt{-x}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{-x}$ pour $-1<x\leq 0$.
(h) $-\frac{1}{2}\ln(1-2x\,\mathrm{ch}\,a+x^2)$.
(i) $1-\frac{5\cos2\theta-4}{(5-4\cos2\theta)^2}$ (linéariser).
(j) $\frac{2x-1}{(1-x)^2}-\frac{2\ln(1-x)}{x}$.
(k) $\mathrm{ch}\sqrt{x}$ pour $x\geq 0$ et $\cos\sqrt{-x}$ pour $x\leq 0$.
(l) $\frac{e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2\cos2\theta}}{2}\cos(x^2\sin2\theta)$.
(m) $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.
(n) $\frac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f'''=f)$.
(o) $\frac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.
(p) $\frac{x^2-1}{2}$.
(q) $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Correction de l'exercice 3970 ▲

$R=\sqrt{2}-1$, $\Sigma=\frac{1-x}{1-2x-x^2}$.

Correction de l'exercice 3971 ▲

(a)

(b) S'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $|\lambda| \geq 1$ et si x est un vecteur propre associé alors $kA^k x = k\lambda^k x \not\to 0$ donc la série diverge.

Si toutes les valeurs propres de A sont de module < 1, comme $kA^k = \sum_\lambda \lambda^k P_\lambda(k)$ où les P_λ sont des polynômes à coefficients matriciels, la série converge absolument.

(c) $S = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^{k+1} = AS + \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = AS + A(I-A)^{-1}$ donc $S = A(I-A)^{-2}$ est inversible ssi A l'est.

Correction de l'exercice 3972 ▲

(a) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1$. $\chi_A(-1) > 0$, $\chi_A(0) < 0$, $\chi_A(1) > 0$, $\chi_A(2) > 0$, $\chi_A(3) < 0$ donc χ_A admet une racine dans chacun des intervalles $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]2,3[$.

(b) Cayley-Hamilton : $t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-3}$.

(c) Soient $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < 2 < \gamma < 3$ les valeurs propres de A. On a $t_n z^n = (\alpha z)^n + (\beta z)^n + (\gamma z)^n$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ converge si et seulement si $|\gamma z| < 1$ et vaut :

$$\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\gamma z} = \frac{1}{z}\frac{\chi'}{\chi}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-z^2-4z+3}{z^3-z^2-2z+1}.$$

Correction de l'exercice 3973 ▲

$= -\int_{t=0}^{1} \frac{t^3}{1+t^3}\,dt = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1.$

Correction de l'exercice 3974 ▲

$R = 1$. On décompose P sous la forme : $P = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \cdots + a_p(X+1)\ldots(X+p)$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{p!a_p}{(1-x)^{p+1}}$.

Correction de l'exercice 3975 ▲

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n} = \frac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(5-4\cos\theta)$.

Correction de l'exercice 3976 ▲

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^n$ donc $u_n \to \frac{1}{e}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 3977 ▲

(a) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon de convergence égal à 1.

1ère solution. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$. f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Puis, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x$.

2ème solution. Pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)x^n = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.}$$

(b) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à 1. Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))\right)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))\right) \text{ si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

(c) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à 1.
• Soit $x \in]0,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}))$$
$$= \frac{\text{Argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

• Soit $x \in]-1,0[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} \frac{\text{Argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in]0,1[\\ 1 \text{ si } x = 0 \\ \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \text{ si } x \in]-1,0[\end{cases}.}$$

(d) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à $+\infty$. Pour x réel,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1-1}{(2n+1)!} x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^n.$$

• Si $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\text{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\text{sh}(\sqrt{x})\right).$$

• Si $x < 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} \left(\sqrt{-x}\right)^{2n} - \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\text{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\text{sh}(\sqrt{x})\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right) \text{ si } x < 0 \end{cases}.}$$

(e) Immédiatement $R = +\infty$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\cos x + \text{ch} x).}$$

(f) $\text{ch}\, n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ et donc $R = \frac{1}{e}$. Pour x dans $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\text{ch}\, n) x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (ex)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-\frac{x}{e}}\right) = \frac{1}{2}\frac{2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x}{x^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x+1}$$
$$= \frac{1-x\,\text{ch}\,1}{x^2-2x\,\text{ch}\,1+1}.$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{ch}\, n) x^n = \frac{1-x\,\text{ch}\,1}{x^2-2x\,\text{ch}\,1+1}.}$$

(g) La série proposée est le produit de CAUCHY des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ qui sont toutes deux de rayon 1. Donc $R \geqslant 1$. Mais d'autre part, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$. De plus, pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x} \times -\ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

(h) La règle de d'ALEMBERT montre que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.
Pour n entier naturel donné, $\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} = \frac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!}$ puis

$$n^3+5n^2+3n-1 = (n+2)(n+1)n+2n^2+n-1 = (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5n-5$$
$$= (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5(n+2)+5$$

Donc, pour tout réel x,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)(n+1)n}{(n+2)!}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!}x^n-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{(n+2)!}x^n+5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}x^n.$$

Ensuite $f(0)=-\frac{1}{2}$ et pour $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n+5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}x^n\\&=xe^x+2e^x-5\frac{e^x-1}{x}+5\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n=\left\{\begin{array}{l}\frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2}\text{ si }x\in\mathbb{R}^*\\-\frac{1}{2}\text{ si }x=0\end{array}\right..}$$

(i) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\leqslant a_n=n^{(-1)^n}\leqslant n$ et donc $R=1$. Pour x dans $]-1,1[$, $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)x^k$. Puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)x^k=2x\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=2x\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)'=2x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^2}.$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n=\operatorname{Argth}x+\frac{2x}{(1-x)^2}.}$$

(j) $R=1$. Pour x réel non nul dans $]-1,1[$, $f(x)=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^4)^n}{n}=-\frac{\ln(1+x^4)}{4x}$ et sinon $f(0)=0$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{\ln(1+x^4)}{4x}\text{ si }x\neq 0\\0\text{ si }x=0\end{array}\right..}$$

(k) La règle de d'ALEMBERT fournit $R=\frac{1}{2}$. Pour x dans $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n&=2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(2x)^n-3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2x)^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)\\&=2\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)''-3\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)'+2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)=2\left(2\frac{1}{1-2x}-3\frac{2}{(1-2x)^2}+\frac{4}{(1-2x)^3}\right)\\&=2\frac{2(1-2x)^2-6(1-2x)+8}{(1-2x)^3}=2\frac{8x^2+4x}{(1-2x)^3}.\end{aligned}$$

(l) Pour $x=1$, la suite $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ n'est pas bornée et donc $R\geqslant 1$. Mais la série converge si $|x|<1$ et $R\leqslant 1$. Finalement $R=1$.
Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(2n+2)x^{2n+1}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\right)'+2x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)'+\frac{2x}{1+x^2}\right)\\&=-\frac{x(1+x^2)-x^3}{1+x^2)^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{x^3}{1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=\frac{x^3}{1+x^2)^2}.}$$

(m) **1ère solution.** Les racines de l'équation caractéristique $z^2-z-1=0$ sont $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait qu'il existe deux nombres réels λ et μ tels que pour tout entier naturel n,

$$a_n=\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les égalités $n=0$ et $n=1$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\\lambda-\mu=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\\mu=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\\mu=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Les séries entières respectivement associées aux suites $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ et $\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ ont pour rayons respectifs $\left|\frac{1}{(1+\sqrt{5})/2}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\left|\frac{1}{(1-\sqrt{5})/2}\right| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ces rayons étant distincts, la série proposée a pour rayon

$$R = \mathrm{Min}\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pour x dans $\left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha x)^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta x)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\alpha\beta x^2 - (\alpha+\beta)x+1}$$
$$= \frac{1}{1-x-x^2}.$$

2ème solution. Supposons à priori le rayon R de la série proposée strictement positif. Pour x dans $]-R,R[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x+\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1+x+\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} = 1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2} \\ &= 1+x+x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ (les deux séries ont même rayon)} \\ &= 1+x+x(f(x)-1)+x^2 f(x). \end{aligned}$$

Donc, nécessairement $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Réciproquement, la fraction rationnelle ci-dessus n'admet pas 0 pour pôle et est donc développable en série entière. Le rayon de convergence de la série obtenue est le minimum des modules des pôles de f à savoir $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce développement. Pour tout x de $]-R,R[$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)(1-x-x^2) = 1$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 1$ ce qui s'écrit encore $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}x_n - \sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2}x^n = 1$. Finalement

$$\forall x \in]-R,R[,\ b_0 + (b_1-b_0)x + \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty}(bn - b_{n-1} - b_{n-2})x^n = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors $b_0 = b_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $b_n = b_{n-1} + bn-2$. On en déduit alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.}$$

Remarque. En généralisant le travail précédent, on peut montrer que les suites associées aux développements en série entière des fractions rationnelles sont justement les suites vérifiant des relations de récurrence linéaire.

(n) Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant a_n \leqslant n+1$. Donc $R = 1$.
On remarque que pour tout entier naturel n, $a_n = \sum_{k+5l=n} 1$. La série entière proposée est donc le produit de CAUCHY des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ et $\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}$. Pour x dans $]-1,1[$, on a donc

$$f(x) = \left(\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}\right) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{(1-x)^5}.$$

Remarque. De combien de façons peut -on payer 100 euros avec des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes d'euros, des pièces de 1 et 2 euros et des billets de 10 et 20 euros ? Soit N le nombre de solutions. N est le nombre de solutions en nombres entiers a,b,... de l'équation

$$a+2b+5c+10d+20e+50f+100g+200h+500k+1000i+2000j = 10000$$

et est donc le coefficient de x^{10000} du développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})(1-x^{200})(1-x^{500})(1-x^{1000})(1-x^{2000})},$$

La remarque est néanmoins anecdotique et il semble bien préférable de dénombrer à la main le nombre de solutions. Les exercices 3983 et 4035 de cette planche font bien mieux comprendre à quel point les séries entières sont un outil intéressant pour les dénombrements.

Correction de l'exercice 3978 ▲

Pour tout entier naturel non nul, $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$ et donc $R \geqslant 1$. Mais si $x > 1$, la suite $\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée comme on le voit en considérant la suite extraite des termes d'indices multiples de 3 et donc $R = 1$. Pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(jx)^n}{n}\right)$. Le problème est alors de ne pouvoir écrire $-\ln(1-jx)$. Il faut s'y prendre autrement.
f est donc dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1;1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^{n-1}=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}j^nx^{n-1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{j(1-j^2x)}{x^2+x+1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Par suite, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1).}$$

Correction de l'exercice 3979 ▲

Le rayon de la série considérée est égal 1. Soit $x\in]-1,1[$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^n=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right).$$

• Si x est dans $]0,1[$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right).\end{aligned}$$

• Si x est dans $]-1,0[$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})\right).\end{aligned}$$

• $f(0)=-1$.

Maintenant, la somme est en fait définie sur $[-1,1]$ car les séries numériques de termes généraux $\frac{1}{4n^2-1}$ et $\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ convergent. Vérifions que la somme est continue sur $[-1,1]$.

Pour x dans $[-1,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{x^n}{4n^2-1}\right|\leqslant\frac{1}{4n^2-1}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. La série entière considérée converge donc normalement sur $[-1,1]$. On en déduit que cette somme est continue sur $[-1,1]$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}&=f(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})\right)\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Remarque. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=-\frac{1}{2}$ (série télescopique).

On a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}&=f(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})\right)\\&=\frac{1}{2}(-1-2\,\mathrm{Arctan}\,1)=-\frac{\pi+2}{4}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3980 ▲

Pour tout entier naturel n, $|a_n|\geqslant\frac{1}{2n+1}$ et donc la série proposée ne converge pas absolument.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}|u_n|-|u_{n+1}|&=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{4k+1}=\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\times\frac{1}{4n+5}\\&=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}\geqslant\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}>0.\end{aligned}$$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{4n+1}\frac{1}{k}\leqslant 1+\sum_{k=2}^{4n+1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,dt=1+\ln(4n+1)$$

et donc $|u_n|\leqslant\frac{1+\ln(4n+1)}{2n+1}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Finalement, la série proposée converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{2n+1}$. La série de terme général a_n converge et donc $R\geqslant 1$ mais puisque la série de terme général $|a_n|$ diverge et donc $R\leqslant 1$. Finalement, $R=1$. Pour $x\in]-1,1[$, posons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{2n+1}$. Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)(-x^2)^n\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{4n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right)\ \text{(produit de CAUCHY de deux séries numériques absolument convergentes)}\end{aligned}$$

Donc, pour x dans $]0,1[$, $f'(x)=g(x)h(x)$ où $h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$ puis

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}(\sqrt{x})^{4n+1}.$$

Maintenant, en posant $k(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nX^{4n+1}$ pour X dans $]-1,1[$, $k'(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nX^{4n}=\frac{1}{X^4+1}$. Ensuite, en posant $\omega=e^{i\pi/4}$, par réalité et parité

$$\frac{1}{X^4+1}=\frac{a}{X-\omega}+\frac{\overline{a}}{X-\overline{\omega}}-\frac{a}{X+\omega}-\frac{\overline{a}}{X+\overline{\omega}}$$

où $a=\frac{1}{4\omega^3}=-\frac{\omega}{4}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^4+1}&=-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{X-\omega}+\frac{\overline{\omega}}{X-\overline{\omega}}-\frac{\omega}{X+\omega}-\frac{\overline{\omega}}{X+\overline{\omega}}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{X\sqrt{2}+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+2\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}-\frac{2X-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

En tenant compte de $k(0)=0$, on obtient donc pour $X\in]-1,1[$,

$$k(X)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1)-\ln(X^2-X\sqrt{2}+1))+2\left(\text{Arctan}(X\sqrt{2}+1)+\text{Arctan}(X\sqrt{2}-1)\right)\right).$$

Ensuite, pour tout réel $x\in]0,1[$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}k(\sqrt{x})\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}k'(\sqrt{x})k(\sqrt{x})$ et donc

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\left(k\left(\sqrt{x}\right)^2-k(0)^2\right)=k\left(\sqrt{x}\right)^2\\&=\frac{1}{32}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1)-\ln(X^2-X\sqrt{2}+1))+2\left(\text{Arctan}(X\sqrt{2}+1)+\text{Arctan}(X\sqrt{2}-1)\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers

$$\frac{1}{32}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+2(\text{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\text{Arctan}(\sqrt{2}-1))\right)^2=\frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.$$

(car $\text{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\text{Arctan}(\sqrt{2}-1)=\text{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=\frac{\pi}{2}$).

Enfin, pour x dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$, $|u_n|x^n-|u_{n+1}|x^{n+1}\geqslant(|u_n|-|u_{n+1}|)x^n\geqslant 0$ et la série numérique de terme général u_nx^n est alternée. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une telle série, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1]$,

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_kx^k\right|\leqslant\left|u_{n+1}x^{n+1}\right|\leqslant|u_{n+1}|,$$

et donc $\underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}}|R_n(x)|\leqslant|a_{n+1}|\underset{n\to+\infty}{\to}0$. La convergence est uniforme sur $[0,1]$ et on en déduit que la somme est continue sur $[0,1]$. En particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=f(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)=\frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.}$$

Correction de l'exercice 3981 ▲

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)$ et $3a_{n+1}+2b_{n+1}=3a_n+2b_n$ (rappel : ces combinaisons linéaires sont fournies par les vecteurs propres de ${}^tA$ si on ne les devine pas). On en déduit que pour tout entier naturel n, $a_n+b_n=2^n(a_0+b_0)=2^n$ et $3a_n+2b_n=3a_0+2b_0=3$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=3-2^{n+1} \text{ et } b_n=3(2^n-1).$$

Les deux séries proposées sont alors clairement de rayons infini et pour tout réel x, $f(x)=3e^x-2e^{2x}$ et $g(x)=3(e^{2x}-e^x)$. (On peut avoir d'autres idées de résolution, plus astucieuses, mais au bout du compte moins performantes).

Correction de l'exercice 3982 ▲

Pour $n\geqslant 1$, posons $a_n=\frac{1}{nC_{2n}^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n}{n+1}\times\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\times\frac{(n+1)!^2}{n!^2}=\frac{n}{2(2n+1)}\quad(*).$$

Par suite, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{4}$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, le rayon de la série entière considérée est $R=4$.

Pour $x\in\,]-4,4[$, posons $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.

Les relations $(*)$ s'écrivent encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $4(n+1)a_{n+1}-2a_{n+1}=na_n$.

Soit $x\in]-4,4[$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par x^{n+1} et on somme sur n. On obtient

$$4x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},$$

ou encore $x^2f'(x)=4x(f'(x)-a_1)-2(f(x)-a_1x)$ ou encore $x(x-4)f'(x)+2f(x)=-x\quad(E)$. Soit I l'un des deux intervalles $]-4,0[$ ou $]0,4[$.Sur I, l'équation (E) s'écrit :

$$f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x)=-\frac{1}{x-4}.$$

Une primitive sur I de la fonction $a\ :\ x\mapsto\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)$ est la fonction $A\ :\ x\mapsto\frac{1}{2}(\ln|x-4|-\ln|x|)=\ln\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}$.

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x)=-\frac{1}{x-4}\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ e^{A(x)}f'(x)+a(x)e^{A(x)}f(x)=\frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ (e^Af)'(x)=\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}\quad(*).\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I.

• Si $I=]0,4[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}=\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}=\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I est la fonction $x\mapsto\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right)$.

Puis

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ e^{A(x)}f(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C\\&\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C\right).\end{aligned}$$

• Si $I=]-4,0[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}=\frac{1}{\sqrt{x(x-4)}}=\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-4}}$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I est la fonction $x\mapsto-\operatorname{Argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)$.

Puis

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\exists C'\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ e^{A(x)}f(x)=\operatorname{Argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+C'\\&\Leftrightarrow\exists C'\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-4}}\left(-\operatorname{Argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+C'\right).\end{aligned}$$

f doit être définie, continue et dérivable sur $]-4,4[$ et en particulier dérivable en 0. Ceci impose $\lim_{x\to0^+}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C=0$ (car sinon $f(x)\underset{0^+}{\sim}C\sqrt{x}$) et donc $C=\frac{\pi}{2}$. Pour $x\in]0,4[$, on a alors $f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2-x}{2}\right)\right)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\operatorname{Arccos}\left(\frac{2-x}{2}\right)$ ce qui reste vrai pour $x=0$ par continuité..

De même, $\lim_{x\to0^-}-\operatorname{Argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+C'=0$ et donc $C'=0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x\in]-4,4[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nC_{2n}^{n}}x^n=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\text{Arccos}\left(\frac{2-x}{2}\right)\text{ si }x\in[0,4[\\ -\sqrt{\frac{x}{x-4}}\,\text{Argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)\text{ si }x\in]-4,0]\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 3983 ▲

On a $I_0=0$, $I_1=1$ et $I_2=2$ (l'identité et la transposition $\tau_{1,2}$).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il y a I_{n+1} involutions σ de $[\![1,n+2]\!]$ vérifiant $\sigma(n+2)=n+2$ car la restriction d'une telle permutation à $[\![1,n+1]\!]$ est une involution de $[\![1,n+1]\!]$ et réciproquement.

Si $\sigma(n+2)=k\in[\![1,n+1]\!]$, nécessairement $\sigma(k)=n+2$ puis la restriction de σ à $[\![1,n+2]\!]\setminus\{k,n+2\}$ est une involution et réciproquement Il y a I_n involutions de $[\![1,n+2]\!]\setminus\{k,n+2\}$ et $n+1$ choix possibles de k et donc $(n+1)I_n$ involutions de $[\![1,n+2]\!]$ telles que $\sigma(n+2)\neq n+2$. En résumé,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_{n+2}=I_{n+1}+(n+1)I_n.$$

Le rayon R de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est supérieur ou égal à 1 car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{I_n}{n!}\leqslant 1$. Pour x dans $]-R,R[$, posons $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n$. f est dérivable sur $]-R,R[$ et pour $x\in]-R,R[$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}x^{n-1}=1+2x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1}=1+2x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+1}+(n+1)I_n}{(n+1)!}x^{n+1}\\&=1+2x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n\\&=1+2x+f(x)-x+xf(x)=1+x+(x+1)f(x).\end{aligned}$$

Donc, pour $x\in]-R,R[$, $f'(x)+(x+1)f(x)=x+1$ ou encore $e^{\frac{x^2}{2}+x}f'(x)+(x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x)=(x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}$. Par suite, pour $x\in]-R,R[$,

$$e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x)-f(0)=\int_0^x(t+1)e^{\frac{t^2}{2}+t}\,dt=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1,$$

et puisque $f(0)=0$, $\forall x\in]-R,R[$, $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1$.

Réciproquement, la fonction précédente est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux ($=e^{\frac{x^2}{2}}\times e^x$) et les coefficients de ce développement vérifient les relations définissant $\frac{I_n}{n!}$ de manière unique. Donc, ces coefficients sont les $\frac{I_n}{n!}$ ce qui montre que $R=+\infty$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1.}$$

Correction de l'exercice 3984 ▲

(a) $=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}+\frac{x^{3n+2}}{3n+2}-2\frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right)$.

(b) Factoriser : $-\ln 6+\left(\frac{5}{6}+\ln 6\right)x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2^n}+\frac{2n+1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n(n-1)}$.

(c) Dériver le ln : $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2n+5+3(-1)^n}{4}x^n$.

(e) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+2\sqrt{2}^n(2\cos(3n\pi/4)-\sin(3n\pi/4))\right)x^n$.

(f) Intégrer : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4\sqrt{2}}\left((-\sqrt{2}-1)^{n+2}-(\sqrt{2}-1)^{n+2}\right)x^n$.

(g) $=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n(x^{2n}-x^{2n+1})$.

(h) Dériver : $\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n}(-1)^nx^n$.

(i) Dériver : $\frac{\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\pi/6)}{n2^n}x^n$.

(j) Dériver, factoriser : $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^n+2^{-n}}{n^2}x^n$.

(k) Linéariser : $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{(2n)!}\left(x^{2n-1}+\frac{(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n}\right)$.

(l) Dériver : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$.

(m) $y'=-4xy+1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{8^nn!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

(n) $2x(1-x)y'+(1-2x)y=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n}x^n$.

(o) $(1-x^2)y''-xy'+\frac{y}{9}=0 : \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n C_{3n}^n}{(2n+1)3^{3n+1}}x^{2n+1}$.

Correction de l'exercice 3985 ▲

$=\frac{1}{2}\ln(e^a-x)+\frac{1}{2}\ln(e^{-a}-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}(ka)}{k}x^k$.

Correction de l'exercice 3986 ▲

$\frac{e^{x^2}}{1-x}=(1+x)\frac{e^{x^2}}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)(x^{2n}+x^{2n+1})$.

Correction de l'exercice 3987 ▲

$f(\operatorname{sh}y)=e^{y/2}$ d'où l'équation différentielle : $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=\frac{1}{4}f(x)$.
En posant $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ on obtient $4(k+1)(k+2)a_{k+2}=-(2k+1)(2k-1)a_k$ avec $a_0=f(0)=1$ et $a_1=f'(0)=\frac{1}{2}$, d'où $a_{2p}=\frac{(-1)^{p+1}C_{4p-2}^{2p-1}}{p2^{4p}}$ si $p\geq 1$ et $a_{2p+1}=\frac{(-1)^pC_{4p}^{2p}}{2^{4p+1}(2p+1)}$ si $p\geq 0$.
Le rayon de convergence de la série correspondante est 1, ce qui valide la méthode (avec le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz).

Correction de l'exercice 3988 ▲

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Correction de l'exercice 3989 ▲

Coefficient de x^n dans $(\sum x^k)(\sum(k+1)x^k)(\sum(k+1)^2x^k)=\frac{1+x}{(1-x)^6}$
$\Rightarrow c_n=\binom{n+5}{5}+\binom{n+4}{5}=\frac{(2n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$.

Correction de l'exercice 3991 ▲

(a) Pour $|x|<\frac{1}{q}$: $\ln f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-q^nx)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{kn}x^k}{k}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^kx^k}{k(1-q^k)}$,
$f=e^{\ln f}$ est DSE par composition.

(b) $a_n=\frac{q^{n(n+1)/2}}{(q-1)\dots(q^n-1)}$, $R=\infty$.

Correction de l'exercice 3992 ▲

$|f^{(k)}(0)|=\sum_{n=0}^{\infty}n^{2k}e^{-n}\geq k^{2k}e^{-k}$, donc $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\geq k^ke^{-k}\Rightarrow R=0$.

Correction de l'exercice 3993 ▲

Il y a dérivation terme à terme facilement et indéfiniment.

DSE au voisinage de 0 : on envisage de permuter les Σ dans : $f_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}e^{-n^\alpha}\frac{(inx)^p}{p!}$, ce qui est légitime si la série $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^\alpha}e^{n|x|}$ converge. On en déduit qu'une condition suffisante pour que f soit DSE au voisinage de 0 est $\alpha\geq 1$ (avec convergence si $x\in]-1,1[$ pour $\alpha=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ si $\alpha>1$).

Cas $\alpha<1$: $|f^{(k)}(0)|=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^\alpha}n^k\geq e^{-N^\alpha}N^k$ avec $N=\lfloor k^{1/\alpha}\rfloor$ donc pour $r>0$ fixé et k tendant vers l'infini on a $\ln\left(\left|\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}\right|\right)\sim\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)k\ln(k)$ et la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}$ diverge grossièrement.

DSE au voisinage de $a\neq 0$: même raisonnement en écrivant $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}e^{-n^\alpha}e^{ina}\frac{(in(x-a))^p}{p!}$. En conclusion, f est analytique sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha\geq 1$.

Correction de l'exercice 3994 ▲

(a) Pour $x\neq 0$ la série comporte un nombre fini de termes non nuls au voisinage de x, donc est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de x. On a $|f^{(k)}(x)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda_n^{k-n}\varphi_n^{(k)}(\lambda_nx)\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\lambda_n^{k-n}M_n\leq\operatorname{cste}(k)+\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|M_n/\lambda_n$ en supposant $\lambda_n\geq 1$ pour $n\geq k$, donc $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que f est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et on a le développement limité : $f(x)=\sum_{n=0}^{k}a_nx^n+o(x^k)$ car $\phi\equiv 1$ au voisinage de 0 donc $f^{(k)}(0)=k!a_k$.

(b) $\psi(x) = \exp\left(\frac{1}{(1-x)(x-2)}\right)$ sur $]1,2[$, $\psi(x) = 0$ ailleurs.

Correction de l'exercice 3995 ▲

Dans chaque question, on note f la fonction considérée.

(a) f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon du développement est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

(b) f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationelle n'admettant pas 0 pour pôle.
1er cas. Si $|t| < 1$, soit $\theta = \text{Arccos}\, t$. On a donc $\theta \in]0,\pi[$ et $t = \cos(\theta)$. Pour tout réel x, on a

$$x^2 - 2tx + 1 = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}),$$

avec $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$. Les pôles sont de modules 1 et le rayon du développement est donc égal à 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} &= \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(-\frac{e^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right)\\ &= \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}x^n - e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} x^n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ \forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{x^2-2xt+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} x^n \text{ où } \theta = \text{Arccos}\, t.}$$

2ème cas. Si $t > 1$, on peut poser $t = \text{ch}(\theta)$ où θ est un certain réel positif ou nul. Plus précisément, $\theta = \text{Argch}\, t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \in]0,+\infty[$. Pour tout réel x, on a

$$x^2 - 2tx + 1 = x^2 - 2x\,\text{ch}(\theta) + 1 = (x - e^{\theta})(x - e^{-\theta}),$$

avec $e^{\theta} \neq e^{-\theta}$. Le minimum des modules des pôles de f est $e^{-\theta} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} = t - \sqrt{t^2 - 1}$. Le rayon du développement est donc $R = t - \sqrt{t^2 - 1}$. Pour $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 2x\,\text{ch}(\theta) + 1} &= \frac{1}{2\,\text{sh}(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{\theta}} - \frac{1}{x - e^{-\theta}}\right) = \frac{1}{2\,\text{sh}(\theta)}\left(-\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{-\theta}} + \frac{e^{\theta}}{1 - xe^{\theta}}\right)\\ &= \frac{1}{2\,\text{sh}(\theta)}\left(e^{\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n\theta}x^n - e^{-\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\theta}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{sh}((n+1)\theta)}{\text{sh}\,\theta} x^n.\end{aligned}$$

3ème cas. Si $t < -1$, on applique ce qui précède à $-t$ et $-x$.
4ème cas. Si $t = 1$, pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{x^2-2xt+1} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

Si $t = -1$, en remplaçant x par $-x$, on obtient pour $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

(c) Pour tout réel x, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ et donc si $x < 2$, $x^2 - 5x + 6 > 0$. Pour $x \in]-2,2[$,

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = \ln(6) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right),$$

et puisque pour x dans $]-2,2[$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{3}$ sont dans $]-1,1[$,

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n},$$

et en particulier la fonction f est développable en série entière et le rayon du développement est 2 clairement.

(d) Si $\cos a = 0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et si $\cos a \neq 0$, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \left]-\infty, \frac{1}{\cos a}\right[\cup \left]\frac{1}{\cos a}, +\infty\right[$. Pour $x \in \mathscr{D}$,

$$f'(x) = \sin a \times \frac{1}{(1-x\cos a)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)^2} = \frac{\sin a}{x^2 - 2x\cos a + 1}.$$

D'après 2), la fonction f' est dans tous les cas développable en série entière, le rayon du développement est 1 et pour x dans $]-1,1[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)a)}{\sin a} x^n.$$

On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le développement a même rayon de convergence et s'obtient en intégrant terme à terme. Donc pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)a)}{\sin a} x^{n+1}.$$

(e) La fonction f est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-p)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{x-k}$$

avec $\lambda_k = (-1)^{p-k}\frac{1}{(k-1)!(p-k)!} = (-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k$. Par suite, pour x dans $]-1,1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k\left(-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{k}} = \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}C_p^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{k^n}\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{C_p^k}{k^n}\right)x^n. \end{aligned}$$

(f) La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$, $f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arcsin} x$ puis

$$f''(x) = 2x\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\operatorname{Arcsin} x + \frac{2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}f'(x) + \frac{2}{1-x^2}.$$

Donc, pour x dans $]-1,1[$,

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2 \quad (1) \quad \text{et } f(0) = f'(0) = 0 \quad (2).$$

On admettra que ces égalités déterminent la fonction f de manière unique.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon R supposé à priori strictement positif. Pour $x \in]-R,R[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de (1) sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n)x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow a_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \text{ (par unicité des coefficients d'un DES).} \end{aligned}$$

En résumé, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n$ (3) puis

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \text{ et } a_0 = 0,\ a_2 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_{2n} = \frac{((2n-2)\times\dots\times 4\times 2)^2}{(2n)\times(2n-1)\dots\times 4\times 3}a_2 \\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n}x^{2n}$.

Réciproquement, calculons le rayon de la série entière précédente. Pour x réel non nul,

$$\left|\frac{2^{2n+1}(n!)^2x^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2x^{2n}}\right| = \frac{4x^2n^2}{(2n+2)(2n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} x^2.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série proposée converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$. Le rayon de la série proposée est donc $1 > 0$ ce qui valide les calculs précédents.

Par unicité de la solution de (1) et (2) sur $]-1,1[$, f est développable en série entière et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arcsin}^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{n^2C_{2n}^n}x^{2n}.}$$

(g) Pour tout réel x, $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$ (le rayon est infini). On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le rayon du développement est encore infini et que l'on peut intégrer terme à terme pour obtenir (en tenant compte de $f(0) = 0$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\times(2n)!}.}$$

(h) Les zéros du polynôme t^4+t^2+1 sont j, j^2, $-j$ et $-j^2$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4+t^2+1}$ est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas zéro pour pôle et que le rayon de la série obtenue est 1. Puis pour t dans $]-1,1[$,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1} = \frac{1-t^2}{1-t^6} = (1-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} t^{6n} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{6n} - \sum_{n=0}^{+\infty} t^{6n+2} = 1 - t^2 + t^6 - t^8 + t^{12} - t^{14} + \dots.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4+t^2+1}$ est continue sur $]-\infty,0]$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $-\infty$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4+t^2+1}$ est donc intégrable sur $]-\infty,0]$.
Par intégration terme à terme licite, on obtient pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1} - \frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).$$

Calcul de $I = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt$. Par parité et réalité,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1} = \frac{a}{t-j} + \frac{\bar{a}}{t-j^2} - \frac{a}{t+j} - \frac{\bar{a}}{t+j^2},$$

avec $a = \frac{1}{4j^3+2j} = \frac{1}{2(2+j)} = \frac{2+j^2}{2(2+j)(2+j^2)} = \frac{1-j}{6}$. Puis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^4+t^2+1} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1-j}{t-j} + \frac{1-j^2}{t-j^2} - \frac{1-j}{t+j} - \frac{1-j^2}{t+j^2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3t+3}{t^2+t+1} + \frac{-3t+3}{t^2-t+1}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2+t+1} - \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{t^2-t+1}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{Arctan}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

En résumé,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1} - \frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).}$$

(i) f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Pour x réel,

$$\begin{aligned}
\cos x \operatorname{ch} x &= \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n\right)\frac{x^n}{n!}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n + (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n + (\sqrt{2}e^{3i\pi/4})^n + (\sqrt{2}e^{-3i\pi/4})^n\right)\frac{x^n}{n!}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{2p}(-1)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{4k}(-1)^{2k}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)\frac{x^{4k}}{(4k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.}$$

Correction de l'exercice 3996 ▲

Pour x réel non nul, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ ce qui reste vrai pour $x=0$. La fonction f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3997 ▲

Pour x réel, on sait que $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right)$.

La fonction F est impaire donc les coefficients d'indices pairs sont nuls. D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, le coefficient de x^{2n+1} du produit de Cauchy des deux séries précédentes vaut

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

La méthode choisie fournit classiquement une expression compliquée des coefficients.

On peut aussi obtenir F comme solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + 1 = -2xF(x)+1$.

F est uniquement déterminée par les conditions $F'+2xF = 1$ et $F(0) = 0$ (*). F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après le début de l'exercice et impaire. Pour x réel, posons donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$.

$$(*)\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2} = 1\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n+2a_{n-1})x^{2n} = 1$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ (2n+1)a_n+2a_{n-1} = 0\Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ a_n = -\frac{2}{2n+1}a_{n-1}$$

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ a_n = \frac{(-1)^n2^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}a_0$$

$$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n+1)!}.$$

On a montré que pour tout réel x, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Par unicité des coefficients d'une série entière, $\forall n\in\mathbb{N}$, on obtient en particulier,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n+1)!}.$$

Correction de l'exercice 3998 ▲

(a) La fonction f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et de plus $f' = 1+f^2$.

Montrons par récurrence que pour tout naturel n, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers naturels tel que $f^{(n)} = P_n\circ f$ (ou encore $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$).

• C'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = X$ et pour $n = 1$ avec $P_1 = 1+X^2$.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, il existe un polynôme P_k à coefficients entiers naturels tel que $f^{(k)} = P_k\circ f$. D'après la formule de LEIBNIZ,

$$f^{(n+1)} = (1+f^2)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}f^{(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kP_{n-k}\right)\circ f$$

et le polynôme $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kP_{n-k}$ est un polynôme à coefficients entiers naturels tel que $\tan^{(n+1)} = P_{n+1}\circ f$.

Remarque. On aurait pu aussi dériver l'égalité $f^{(n)} = P_n\circ f$ pour obtenir $f^{(n+1)} = f'\times P_n'\circ f = (P_1\times P_n')\circ f$ mais on a déjà dans l'idée une relation de récurrence sur les coefficients du développement de tan qui n'est pas fournie par cette dernière égalité.

(b) Soient $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $n\in\mathbb{N}$. La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre n en 0 fournit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Le 1) montre que pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et tout entier naturel k, $f^{(k)}(t) = P_k(\tan t)\geqslant 0$.

Donc, d'une part $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\geqslant 0$ et d'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x)-\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\geqslant 0$ est majorée et donc la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge.

Ainsi, la série de TAYLOR de f à l'origine converge pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (et donc la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge aussi pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$). Il n'y a par contre aucune raison pour le moment pour que sa somme soit f.

(c) Pour n entier naturel donné, posons $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ puis pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.
On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} P_k P_{n-k}$. On divise les deux membres de ces égalités par $n!$ et on prend la valeur en 0 ($= \tan 0$). On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} = a_k a_{n-k} \text{ et aussi } a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1.$$

Donc, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$$
$$= 1 + g^2(x).$$

De plus, $g(0) = a_0 = 0$.
Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, posons alors $h(x) = \mathrm{Arctan}(g(x))$. La fonction h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} = 1 \text{ puis } h(x) = h(0) + (x-0) = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x = f(x)$. Ceci montre déjà que f est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Mais quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $g(x) = f(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $R \leqslant \frac{\pi}{2}$ puis $R = \frac{\pi}{2}$.
En résumé, la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ puisque la fonction tangente est impaire.

(d) $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ puis $a_1 = 1$.
$3a_3 = a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0 = 1$ et donc $a_3 = \frac{1}{3}$.
$5a_5 = 2a_1 a_3 = \frac{2}{3}$ et donc $a_5 = \frac{2}{15}$.
$7a_7 = 2a_1 a_5 + a_3^2 = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{51}{135} = \frac{17}{45}$ et $a_7 = \frac{17}{315}$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = x + \frac{x^3}{2} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots}$$

(e) Pour tout réel x, $\mathrm{th}(x) = \frac{1}{x}\tan(ix)$ et donc pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(ix)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Cette série entière a aussi pour rayon de convergence $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 3999 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sin(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$ et est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t, posons $f(t) = e^{-t^2}\sin(tx)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-t^2}\sin(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2}$.

• Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.
• Ensuite, $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un réel strictement positif. Les deux fonctions $t \mapsto t^{2n}$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt = \int_0^A t^{2n}\times te^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^{2n}e^{-t^2}\right]_0^A + n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}A^{2n}e^{-A^2} + n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n = nI_{n-1}$. En tenant compte, de $I_0 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$ on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2}$ puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. $\left|\frac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \frac{(n+1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = 0$. D'après la règle de d'ALEMBERT, la série numérique de terme général $\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge.

En résumé, pour tout réel x,

• Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

• La série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

• $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, pour tout réel x,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n}}{2(2n)!} = \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^{2n-1}}{(2(2n-1)!} = \frac{1}{2}-\frac{x}{2}F(x).$$

Par suite, pour tout réel x, $e^{x^2/4}F'(x)+\frac{x}{2}e^{x^2/4}F(x) = \frac{e^{x^2/4}}{2}$ et donc

$$F(x) = F(0)+\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt = \frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)\,dt = \frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 4000 ▲

(a) $R=1$.

(b) $x=-1\Rightarrow$ cv (série alternée), $x=1\Rightarrow$ dv.

(c) f est croissante sur $[0,1[$ donc L existe dans $[0,+\infty]$.
$L=\sup\limits_{[0,1[} f(x)\geq \sup\limits_{[0,1[}\sum_{n=1}^N x^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sum_{n=1}^N\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow L=+\infty$.

Correction de l'exercice 4001 ▲

(a) Fonction croissante. $\lim_{x\to1^-}A(x)\geq\sum_{n=0}^N a_n$.

(b) Dém de type Césaro.

Correction de l'exercice 4002 ▲

Continuité radiale.

Correction de l'exercice 4003 ▲

$\frac{c_n}{b_n} = a_0+a_1\frac{b_{n-1}}{b_n}+\dots+a_n\frac{b_0}{b_n} = \sum_{k=0}^{\infty}a_k u_{n,k}$ et le théorème de convergence dominée s'applique.

Correction de l'exercice 4004 ▲

$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-2}x^n}{\prod_{2\leq k\leq n}(3k+2)}$ $(R=\infty)$.
$N=8\Rightarrow 0.409954\leq y(1)\leq 0.409973$.

Correction de l'exercice 4005 ▲

(a) $\tan^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\tan^{(k)}\tan^{(n-1-k)}$.

(b) Pour $0\leq x<\pi/2$ la série est à termes positifs et les sommes partielles sont majorées par $\tan x$. Pour $-\pi/2<x\leq 0$, il y a convergence absolue.

(c)

(d) Si $R>\pi/2$, f aurait une limite finie en $\pi/2$.

Correction de l'exercice 4006 ▲

(a) Produit de deux séries $\Rightarrow R \geq 1$. Lorsque $x \to 1^-$ $f(x) \to +\infty \Rightarrow R = 1$.

(b) $(1-x^2)y' = xy+1 \Rightarrow (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n \Rightarrow a_{2k} = a_0\frac{C_{2k}^k}{4^k}$, $a_{2k+1} = a_1\frac{4^k}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

$a_0 = 0$, $a_1 = 1 \Rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k x^{2k+1}}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

(c) $\operatorname{Arcsin}^2 x = 2\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{k^2 C_{2k}^k}$.

Correction de l'exercice 4007 ▲

(a) $R = 4$.

(b) $y = 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right)$. $f(x) = 1+\frac{x}{2}+o(x) \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{4}{3}+\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4008 ▲

(a) $R = \sqrt{2}$.

(b) Stirling $\Rightarrow a_n\sqrt{2}^{2n+1} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ DV.

(c) $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2\operatorname{Arcsin}(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2-x^2}}$.

Correction de l'exercice 4009 ▲

(a)

(b) $f'(x) = e^x f(x)$.

Correction de l'exercice 4010 ▲

(a) $a_n \leq n!$ par récurrence.

(b) $2f' = f^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x/2}$.

(c) $a_n = n!\,2^{-n}$.

Correction de l'exercice 4011 ▲

$Z(x) = \sum_{n,p\geq 1}\frac{x^n}{p^{2n}} = \sum_{p\geq 1}\frac{x}{p^2-x}$.

$Z'(x) = \sum_{p\geq 1}\frac{p^2}{(p^2-x)^2} = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2-x} + \sum_{p\geq 1}\frac{x}{(p^2-x)^2}$.

$Z^2(x) = \sum_{p,q\geq 1}\frac{x^2}{(p^2-x)(q^2-x)} = \sum_{p\neq q}\frac{x^2}{q^2-p^2}\left(\frac{1}{p^2-x}-\frac{1}{q^2-x}\right) + \sum_{p\geq 1}\frac{x^2}{(p^2-x)^2}$

$Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = 2\sum_{p\neq q}\frac{x^2}{(q^2-p^2)(p^2-x)}$.

A p fixé, $\sum_{q\neq p}\frac{1}{q^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{q\neq p}\left(\frac{1}{q-p}-\frac{1}{q+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}$.

Donc $Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = \frac{3}{2}\sum_{p\geq 1}\frac{x^2}{p^2(p^2-x)} = \frac{3}{2}(Z(x) - x\zeta(2))$.

Rmq : $2Z(x^2) = 1 - \pi x \operatorname{cotan}(\pi x)$ (Euler).

Correction de l'exercice 4012 ▲

$\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$.

Correction de l'exercice 4014 ▲

(a) $t^t = \exp(t\ln t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\ln^k t}{k!}$.

(b) 0.78343

Correction de l'exercice 4015 ▲

$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t=0}^{1}-\frac{t^n\ln t}{n}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=2-\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 4016 ▲

Développer en série entière $\ln(1-t^2)$. $I=\frac{\pi^2}{2}-4\ln 2$.

Correction de l'exercice 4020 ▲

On a déjà vu que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et la règle de d'ALEMBERT fournit $R=1$. Soit $x\in]-1,1[$.

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n, $|x^n\cos^n t|\leqslant|x|^n$. Comme la série numérique de terme général $|x|^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général $t\mapsto x^n cos^n t$ est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt=\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos^n t\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt\\&=\int_0^1\frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2du}{1+u^2}\ \text{(en posant }u=\tan\left(\frac{t}{2}\right))\\&=2\int_0^1\frac{1}{(1+x)u^2+(1-x)}\,du=2\times\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1\\&=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.}$$

Correction de l'exercice 4022 ▲

(a) Calcul.

(b) Soit $0<r_0<d$ et $R(\theta)$ le rayon de la série de Taylor de f en $r_0e^{i\theta}$. Le cercle de centre 0 et de rayon r_0 est recouvert par les disques ouverts $D(r_0e^{i\theta},\frac{1}{2}R(\theta))$, θ variant de 0 à 2π, donc on peut en extraire un recouvrement fini ; soit ρ le rayon minimum des disques extraits. Alors pour $0\le\theta\le 2\pi$ on a $R(\theta)\ge\rho$ (cf. analycité de la somme d'une série entière dans le disque ouvert de convergence).

D'après la première question on a : $\left|\frac{f^{(n)}(r_0e^{i\theta})}{n!}\right|\le\frac{M}{\rho^n}$ où M majore $|f|$ sur $\overline{D}(0,r_0+\rho)$ d'où pour $|r-r_0|<\rho$:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}(r-r_0)^ke^{i(k-n)\theta}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}(r-r_0)^k\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta.$$

ce qui démontre l'analycité de $\varphi=r\mapsto\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta$ sur $]0,d[$.
Enfin, $\varphi(r)=a_nr^n$ au voisinage de 0 d'où $\varphi(r)=a_nr^n$ sur $[0,d[$ par prolongement analytique.

(c) $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z}re^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}f(re^{i\theta})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$.
Le rayon est au moins égal à r car f est bornée sur $\overline{D}(0,r)$.

(d) résulte de la question 3..

(e) D'après la question 1., $|a_n|\le\|f\|_\infty/r^n$ pour tout $r>0$ donc $a_n=0$ si $n\ge 1$.

(f) $1/P$ est analytique bornée sur (x^2+1).

(g) On peut passer à la limite uniforme (ou dominée) dans la question 3..

(h) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Rightarrow f\circ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng^n(z)$ et il y a convergence localement uniforme.

Correction de l'exercice 4024 ▲

$2\Rightarrow 1$: évident.

$1 \Rightarrow 2$: Soit $a > 0$ et $M = \sup(|f(z)|e^{-a|z|})$.
$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^n e^{in\theta}}\,d\theta \Rightarrow |a_n| \le M\frac{e^{aR}}{R^n} \le M \inf_{R>0} \frac{e^{aR}}{R^n} = M\left(\frac{ea}{n}\right)^n$.
Donc $\sqrt[n]{n!\,\|a_n\|} \le \sqrt[n]{n!}\frac{ea}{n} \to a$ lorsque $n \to \infty$. CQFD

Correction de l'exercice 4025 ▲

(a) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.
(b) $\mathrm{Im}(f)$ est de signe constant sur le connexe $D \cap \Omega^+$ et $f(z) \sim z$ au voisinage de 0.
(c) Intégrer terme à terme.
(d) $\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin\theta \ge 0$ par la question 2..

Correction de l'exercice 4027 ▲

On pose, sous réserve de convergence, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n t^n$. Alors :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{p} z_n t^n + \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j \sum_{n=p+1}^{\infty} z_{n-j} t^n = \sum_{n=1}^{p} z_n t^n + \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \Big(f(t) - \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n\Big)$$

soit :

$$\Big(1 - \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j\Big) f(t) = P(t)f(t) = \sum_{n=1}^{p} z_n t^n - \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n = Q(t),$$

donc $f(t) = Q(t)/P(t)$. Réciproquement, soit $Q(t)/P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$: en remontant les calculs précédents on voit que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (z_n) avec les mêmes premiers termes d'où $z_n = a_n$ pour tout n.
Si $|t| < 1$ alors $\left|\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j\right| < 1$ donc P n'a pas de racine dans le disque unité ouvert. Si P n'a pas non plus de racine sur le cercle unité alors le développement en série entière de $Q(t)/P(t)$ a un rayon > 1 et $z_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si P admet des racines dans $\mathbb{U}$ on peut déja dire que la suite (z_n) est bornée par $\max(|z_1|, \ldots, |z_p|)$ puis. . . ?

Correction de l'exercice 4028 ▲

(a)
(b) Complétude : soit (f_k) une suite d'éléments de E de Cauchy, $f_k(z) = \sum_{n \in |||} a_{n,k} z^n$. On a, à k et n fixés, par convergence dominée :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi r^n}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = a_{n,k}.$$

La suite (f_k) converge uniformément sur $\overline{D}$ vers une fonction $\varphi : \overline{D} \to (x^2+1)$ continue. On note :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{k \to \infty} a_{n,k}.$$

La suite (a_n) est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n \in |||} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $z \in D$ fixé on a alors lorsque $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} f_k(z) = \sum_{n \in |||} a_{n,k} z^n &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \Big(\sum_{n \in |||} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta} z^n\Big)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f_k(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta \\ &\to \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \Big(\sum_{n \in |||} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta} z^n\Big)\,d\theta = \sum_{n \in |||} a_n z^n \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\varphi \in E$. Enfin on a $\|f_k - \varphi\| \to 0$ lorsque $k \to \infty$ par convergence uniforme, d'où $\varphi = \lim_{k \to \infty} f_k$ dans E.
(c) Soit $f \in E$ et $f_n(z) = f\Big(\frac{nz}{n+1}\Big)$. Comme f est uniformément continue, f_n converge uniformément vers f sur $\overline{D}$. Soit $\varepsilon > 0$ et n tel que $\|f - f_n\|_\infty \le \varepsilon$. Comme f_n est développable en série entière avec un rayon au moins égal à $1 + \frac{1}{n}$, son développement converge uniformément vers f_n sur $\overline{D}$ donc il existe $P \in (x^2+1)^{[}X]$ tel que $\|f_n - P\|_\infty \le \varepsilon$.

Correction de l'exercice 4029 ▲

(a) $\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ $(R=1)$.

Pour $z,t\in \mathring{D}(0,1)$ on a $\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{(z-t)(1-zt)}{(1-z)^2(1-t)^2}$, quantité nulle si et seulement si $z=t$, d'où l'injectivité de $z\mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$.

(b) i. $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(z)=\overline{f(z)}=f(\bar{z})\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Par injectivité, on en déduit que $\text{Im}(f(z))$ garde un signe constant sur chaque demi-disque limité par $]-1,1[$, et comme $f(z)=z+o_{z\to 0}(z)$, ce signe est celui de $\text{Im}\, z$.

ii. $\int_{t=0}^{\pi}\text{Im}(f(re^{it}))\sin nt\,dt=\frac{\pi a_n r^n}{2}$.

On a $|\sin(nt)|\leq n\sin(t)$ pour $0\leq t\leq\pi$ par récurrence, donc $\frac{\pi|a_n|r^n}{2}\leq n\int_{t=0}^{\pi}\text{Im}(f(re^{it}))\sin t\,dt=\frac{n\pi a_1 r}{2}$. On en déduit $|a_n|r^n\leq n|a_1|r$ et on conclut $|a_n|\leq n$ en faisant tendre r vers 1.

Correction de l'exercice 4030 ▲

Soit $R>0$. Notons D_R le disque fermé de centre 0 et de rayon R. Soient $z\in D_R$ et n un entier naturel.

$$|P_n(z)|=|e^z-(e^z-P_n(z))|\geqslant|e^z|-|e^z-P_n(z)|\geqslant e^{-R}-|e^z-P_n(z)|.$$

On sait que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur D_R.Donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $z\in D_R$ et tout entier $n\geqslant n_0$, $|e^z-P_n(z)|\leqslant\frac{1}{2}e^{-R}$. Pour $n\geqslant n_0$ et $z\in D_R$, $|P_n(z)|\geqslant\frac{1}{2}e^{-R}>0$ et P_n ne s'annule pas dans D_R.

Correction de l'exercice 4031 ▲

On cherche une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ de rayon R strictement positif telle que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n^x n\right)=1$ pour x élément d'un certain intervalle ouvert non vide de centre 0.

Cette égalité impose à la suite (b_n) de vérifier le système d'équations $\left\{\begin{array}{l}a_0b_0=1\\a_0b_1+a_1b_0=0\\a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0\\\qquad\vdots\\a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=1\\\qquad\qquad\vdots\end{array}\right.$

(a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, b_n existe et est unique.

• Puisque $a_0=1$, $a_0b_0=1\Leftrightarrow b_0=1$. Ceci montre l'existence et l'unicité de b_0.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons avoir démontré l'existence et l'unicité de $b_0,b_1,\ldots,b_n$.

Alors $a_0b_{n+1}+a_1b_n+\ldots+a_nb_1+a_{n+1}b_0=0\Leftrightarrow b_{n+1}=-a_1b_n-\ldots-a_nb_1-a_{n+1}b_0$. Ceci montre l'existence et l'unicité de b_{n+1}.

On a montré par récurrence que la suite (b_n) existe et est unique.

(b) Il faut alors vérifier que la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence strictement positif .

Soit $R>0$ le rayon de la série associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit r un réel tel que $0<r<R$.

On sait que la suite $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et il existe $M>0$ tel que pour tout entier naturel n, $|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$.

$b_0=1$ puis $|b_1|=|-a_1b_0|\leqslant\frac{M}{r}$ puis $|b_2|=|-a_2b_0-a_1b_1|\leqslant\frac{M}{r^2}+\frac{M}{r}\times\frac{M}{r}=\frac{M(M+1)}{r^2}$ puis

$$|b_3|=|-a_3b_0-a_2b_1-a_1b_2|\leqslant\frac{M}{r^3}+\frac{M}{r^2}\times+\frac{M}{r}+\frac{M}{r}\times\frac{M(M+1)}{r^2}=\frac{M(M^2+2M+1)}{r^3}=\frac{M(M+1)^2}{r^3}.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n|\leqslant\frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.

• C'est vrai pour $n=1$.

• Soit $n\geqslant 1$, supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $|b_k|\leqslant\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. Alors

$$\begin{aligned}|b_{n+1}|&\leqslant|-a_{n+1}b_0|+|-a_nb_1|+\ldots+|-a_1b_n|\leqslant\frac{M}{r^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}\times\frac{M}{r^{n+1-k}}\\&=\frac{M}{r^{n+1}}\left(1+M\sum_{k=1}^{n}(M+1)^{k-1}\right)=\frac{M}{r^{n+1}}\left(1+M\frac{(M+1)^n-1}{(M+1)-1}\right)=\frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|b_n|\leqslant\frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}$. En particulier , le rayon R' de la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $R'\geqslant\frac{r}{M+1}>0$. Ceci valide les calculs initiaux sur $]-\rho,\rho[$ où $\rho=\text{Min}(R,R')>0$ et donc l'inverse d'une fonction f développable en série entière à l'origine et telle que $f(0)\neq 0$ est développable en série entière à l'origine.

Correction de l'exercice 4032 ▲

Posons $\text{Sp}_{\mathbb{C}}A = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$. On sait que pour tout entier naturel n, $\text{Tr}(A^n) = \lambda_1^n + \ldots + \lambda_p^n$.
Soit λ un nombre complexe.
• Si $\lambda = 0$, la série entière associée à la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de rayon infini et pour tout nombre complexe z, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n z^n = 1 = \frac{1}{1-\lambda z}$.
• Si $\lambda \neq 0$, la série entière associée à la suite (λ^n) est de rayon $\frac{1}{|\lambda|}$ et pour $|z| < \frac{1}{|\lambda|}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n z^n = \frac{1}{1-\lambda z}$.
Soit $\rho = \text{Max}\left(|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_p|\right)$ (ρ est le rayon spectral de la matrice A) et $R = \frac{1}{\rho}$ si $\rho \neq 0$ et $R = +\infty$ si $\rho = 0$.
Pour $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\text{Tr}(A^n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k z)^n\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_k z)^n\right) \text{ (somme de } p \text{ séries convergentes)}$$
$$= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_k z}.$$

Il est alors clair que R est le rayon de convergence de la série entière proposée (développement en série entière d'une fraction rationnelle).
Si de plus, $0 < |z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\text{Tr}(A^n)z^n = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k}\right) = \frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}$ (décomposition usuelle de $\frac{P'}{P}$).

Correction de l'exercice 4033 ▲

(a) Soient A et B les sommes des séries entières associées aux suites a et b sur $]-1,1[$. La fonction B est strictement positive sur $]0,1[$ et en particulier ne s'annule pas sur $]0,1[$.
• La suite a est positive donc la fonction A est croissante sur $[0,1[$ et admet ainsi une limite réelle ou infinie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. De plus, pour N entier naturel donné et $x \in [0,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N}a_n x^n$ et donc

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 1,\, x<1}A(x) \geqslant \lim_{x\to 1,\, x<1}\sum_{n=0}^{N}a_n x^n = \sum_{n=0}^{N}a_n.$$

Puisque la série de terme général positif a_n diverge, quand N tend tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to 1,\, x<1}A(x) \geqslant +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 1,\, x<1}A(x) = +\infty$. Il en est de même pour B car la série de terme général b_n diverge quelque soit la valeur de k.
• On veut alors montrer que $A - kB \underset{x\to 1^-}{=} o(B)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $a_n - kb_n \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ et donc il existe un entier naturel N tel que pour $n \geqslant N$, $|a_n - kb_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}b_n$.
Soit $x \in [0,1[$.

$$|A(x) - kB(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n - kb_n|x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N}|a_n - kb_n|x^n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N}|a_n - kb_n| + \frac{\varepsilon}{2}B(x).$$

Maintenant, $B(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Donc il existe $\alpha\ \in]0,1[$ tel que pour $x \in]1-\alpha,1[$, $B(x) > \frac{2}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{N}|a_n - kb_n|$. Pour $x \in]1-\alpha,1[$, on a alors $|A(x) - kB(x)| < \frac{\varepsilon}{2}B(x) + \frac{\varepsilon}{2}B(x) = \varepsilon B(x)$.
On a montré que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha \in]0,1[/\ \forall x \in]1-\alpha,1[$, $|A(x) - kB(x)| < \varepsilon B(x)$ et donc $\lim_{x\to 1^-}\frac{A(x)}{B(x)} = k$.

(b) i. La série entière proposée « vérifie »les hypothèses du 1) et de plus , $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Donc

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

ii. Soit $p \geqslant 2$. $n^{p-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)$. Comme les deux suites (n^{p-1}) et $((n+1)(n+2)\ldots(n+p-1))$ vérifient les hypothèses du 1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^{p-1}x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+p-1)\ldots(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^{(p-1)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p-1)} = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}.$$

Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}(1-x)^p\sum_{n=1}^{+\infty}n^{p-1}x^n = (p-1)!.}$$

Correction de l'exercice 4034 ▲

Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $a_p = a_{p+1}$. Le développement limité à l'ordre 1 de $f^{(p)}$ en 0 s'écrit $f^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} f^{(p)}(0) + xf^{(p+1)}(0) + o(x) = a_p(1+x) + o(x)$ et on en déduit

$$|f^{(p)}(x)| \geqslant |a_p(1+x)| - |o(x)| = 1 + x - |o(x)| \geqslant 1 + x - \frac{x}{2} \text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite)}$$
$$= 1 + \frac{x}{2} > 1 \text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite).}$$

Donc si deux termes consécutifs sont égaux, f nne vérifie pas les conditions de l'énoncé ou encore si f vérifie les conditions de l'énoncé, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = -a_p$ puis $a_p = (-1)^p a_0$. Mais alors, nécessairement pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}$ ou pour tout réel x, $f(x) = -e^{-x}$.
Réciproquement, ces deux fonctions sont clairement solutions du problème posé.

Correction de l'exercice 4035 ▲

(a) Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$. On met une parenthèse autour de $X_1 ... X_k$ et une autour de $X_{k+1} ... X_n$. Ensuite, pour chacun des a_k parenthésages de $X1 ... X_k$, il y a a_{n-k} parenthésages possibles de $X_{k+1} ... X_n$. Finalement, en faisant varier k de 1 à $n-1$, on a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.}$$

(b) On suppose momentanément le rayon R de la série entière associé à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement positif. On pose conventionnellement $a_0 = 0$. Pour $x \in]-R, R[$,

$$f^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = f(x) - x,$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in]-R, R[,\ f^2(x) = f(x) - x.}$$

(c) Nécessairement, pour tout x de $]-R, R[$, $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4x})$ (I) ou $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ (II). Ainsi, pour chaque $x \in]-R, R[$, on doit choisir l'une de ces deux expressions. Puisque $f(0) = 0$, il faut choisir l'expression (II) quand $x = 0$.
Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, posons $g(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$. g est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en vertu de théorèmes généraux. Notons $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement. Puisque $g(0) = 0$, on a $b_0 = 0 = a_0$ et puisque $g'(0) = 1$, on a $b_1 = 1 = a_1$. Enfin, la fonction g vérifie $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $g^2(x) = g(x) - x$ et donc $\forall n \geqslant 2$, $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$. On en déduit par récurrence que pour tout entier naturel n, $b_n = a_n$ et donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ f(x) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).}$$

(d) Pour connaitre les a_n, il reste à développer la fonction g en série entière. Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(1 - (1-4x)^{1/2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/2}^n (-4x)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} C_{1/2}^n 2^{2n-1} x^n.$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(-1)^{n-1} C_{1/2}^n 2^{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right)}{n!} 2^{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{n!} \times 1 \times 3 \times \ldots. \times (2n-3)$$
$$= \frac{2^{n-1}}{n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots. \times (2n-3) \times (2n-2)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.}$$

Correction de l'exercice 4039 ▲

(a) $a_0 = \pi$, $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$, $b_n = 0$.

(b) $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n}$.

(c) $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$, $b_n = -\frac{4\pi}{n}$.

(d) $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_{2p} = \frac{-2}{\pi(4p^2-1)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_p = 0$.

(e) $a_{2p} = \frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_p = 0$.

Correction de l'exercice 4040 ▲

$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_{t=0}^{\pi/2} 2\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n}\sin(n\pi/2)$.

Donc $I_{2p} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right)$, $I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}$.

$b_n = 0$ (parité), $a_{2p} = 0$ (symétrie par rapport à $(\pi/2, 0)$), $a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)\pi} I_{2p+1} = -\frac{2}{2p+1}$.

Correction de l'exercice 4041 ▲

$$\begin{cases} 2a_k & = & (a_{k-1} + a_{k+1})\cos\alpha \\ a_0 & = & a_1\cos\alpha + 2 \end{cases} \Rightarrow a_k = A\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)^k + B\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)^k.$$

Comme $a_k \to 0$ (lorsque $k \to \infty$) on a $B = 0$ d'où $A = \frac{2}{\sin\alpha}$. Finalement, $f(t) = \frac{2}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^k\cos(kt)\right)$.

Correction de l'exercice 4042 ▲

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{ix})^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right) = g(x)$.

(b) Il y a convergence normale.

(c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{t=0}^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(nx-nt)f(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t=0}^{2\pi} a^n\cos(nx-nt)f(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(nx)\int_{t=0}^{2\pi} a^n\cos(nt)f(t)\,dt + \sin(nx)\int_{t=0}^{2\pi} a^n\sin(nt)f(t)\,dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\pi a^n a_n(f)\cos(nx) + \pi a^n b_n(f)\sin(nx)). \end{aligned}$$

Il y a convergence normale car $|a| < 1$ et les coefficients de Fourier de f sont bornés. On en déduit que h est continue, puis que les coefficients de Fourier de h sont $a^n a_n(f)$ et $a^n b_n(f)$.

(d) Les coefficients de Fourier des deux membres doivent être égaux, ce qui donne : $a_n(f) = \frac{1}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ et $b_n(f) = 0$ si pour tout $n \in |||^*$ on a $\pi\lambda a^n \neq 1$ (sinon il n'y a pas de solution), et $a_0(f) = 0$ si $2\pi\lambda \neq 1$, $a_0(f)$ quelconque sinon. Réciproquement, en posant $f(x) = [a_0/2] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ on définit f, 2π-périodique continue (la série converge normalement), solution de l'équation par égalité des coefficients de Fourier de chaque membre.

Correction de l'exercice 4043 ▲

(a) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n} = \frac{3}{2(5-4\cos x)}$.

(b) $\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 4044 ▲

(a)

(b) $g(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left(e^a f(e^{ix}) - e^{-ix}f(e^{-ix})\right) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-ka}\cos kx\right)$.

Correction de l'exercice 4046 ▲

(a) $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)$.

(b)

Correction de l'exercice 4047 ▲

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{x=0}^{2\pi} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ikx}\,dx = \frac{e^{-k^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$
$\left(\text{calculer } \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-i\xi x}\,dx = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \text{ par équation différentielle}\right)$.

Correction de l'exercice 4048 ▲

(a) $a_0 = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}$, $a_n = \frac{2(-1)^n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}$, $b_n = -na_n$.

(b) $S = \frac{\pi-\operatorname{th}\pi}{2\operatorname{th}\pi}$, $S' = \frac{\pi-\operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}$.

Correction de l'exercice 4049 ▲

(a) Si $a \neq 0$: $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)} e^{inx} = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi(a^2+n^2)}(a\cos(nx) - n\sin(nx))$.

(b) On peut supposer $a > 0$ car $I(-a) = -I(a)$ et $I(0) = 0$. On envisage d'intégrer terme à terme la relation :

$$\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\sin(au) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu}\sin(au).$$

On coupe l'intégrale $\int_0^{+\infty}$ en $\int_0^{\pi/a} + \int_{\pi/a}^{+\infty}$: sur $[0,\pi/a]$ le sinus est positif et le théorème de convergence monotone s'applique. Sur $[\pi/a,+\infty[$ le théorème d'intégration terme à terme s'applique (série des normes 1 convergente) car $\int_{\pi/a}^{+\infty}|e^{-nu}\sin(au)|\,du \leq \int_{\pi/a}^{+\infty} e^{-nu}\,du = e^{-n\pi/a}/n$. Ainsi,

$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{u=0}^{+\infty} e^{-nu}\sin(au)\,du = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}.$$

(c) Déjà fait, $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u}\sin(au)\,du = \frac{a}{a^2+1}$. Il doit y avoir une autre méthode pour la question précédente ? !

(d) En comparant avec **1)** pour $x = 0$ on obtient : $I(a) = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$ pour $a > 0$.

Correction de l'exercice 4050 ▲

(a) $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)} e^{inx}$.

(b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(e^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+n^2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{e^{4a\pi}-1}{4a\pi}$ donc $\sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$.

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\operatorname{th}(a\pi)} - \frac{1}{a}\right) \to \frac{\pi^2}{6}$ lorsque $a \to 0$ et il y a convergence dominée.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4051 ▲

(a) $a_n = -\frac{4}{4n^2-1}$, $b_n = -\frac{32n}{\pi(4n^2-1)^2}$.

(b)

(c) $\frac{\pi-2}{4}$.

Correction de l'exercice 4052 ▲

(a) $\cos ax = \frac{\sin\pi a}{\pi a} + \frac{2a\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}$.

(b) $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2} = \frac{\pi\cos\pi t}{\sin\pi t} - \frac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \ln\left(\lambda\frac{\sin\pi t}{t}\right)$ et $g(0) = 0 \Rightarrow g(t) = \ln\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)$.

Correction de l'exercice 4053 ▲

(a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

(b)

(c) Le premier membre vaut $f(1)=\frac{\pi-1}{2}$ et le second $\frac{1}{4\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(f(t+1)-f(t-1))^2\,dt=\frac{\pi-1}{2}$.

Correction de l'exercice 4054 ▲

(a) $a_{2p+1}=b_{2p+1}=0$.

(b) $a_{2p}=b_{2p}=0$.

Correction de l'exercice 4056 ▲

$a'_k=kb_k$, $b'_k=-ka_k$ + inégalité de Bessel.

Correction de l'exercice 4057 ▲

(a)

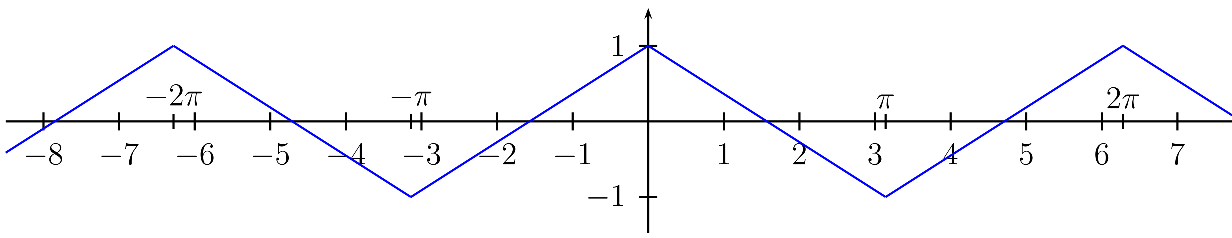
(b) $S'_g(x)=\frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n-\frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\right)\cos nx-na_n\sin nx$.

Correction de l'exercice 4059 ▲

$$\begin{aligned}\pi a_k&=\int_{t=0}^{2\pi}f(t)\cos(kt)\,dt\\&=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{2\pi/k}f(t+2i\pi/k)\cos(kt)\,dt\\&=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{\pi/2k}\Big(f(t+2i\pi/k)-f(t+2i\pi/k+\pi/k)-f(t+2(i+1)\pi/k-\pi/k)+f(t+2(i+1)\pi/k)\Big)\cos(kt)\,dt.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4060 ▲

(a) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Puisque f est paire, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)\,dx$.
Par suite, $a_0(f)=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\left(\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right)=\frac{4}{n\pi^2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.}$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ensuite, si $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on a

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4},$$

et donc $S = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

D'autre part, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^2 dx = \left[-\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

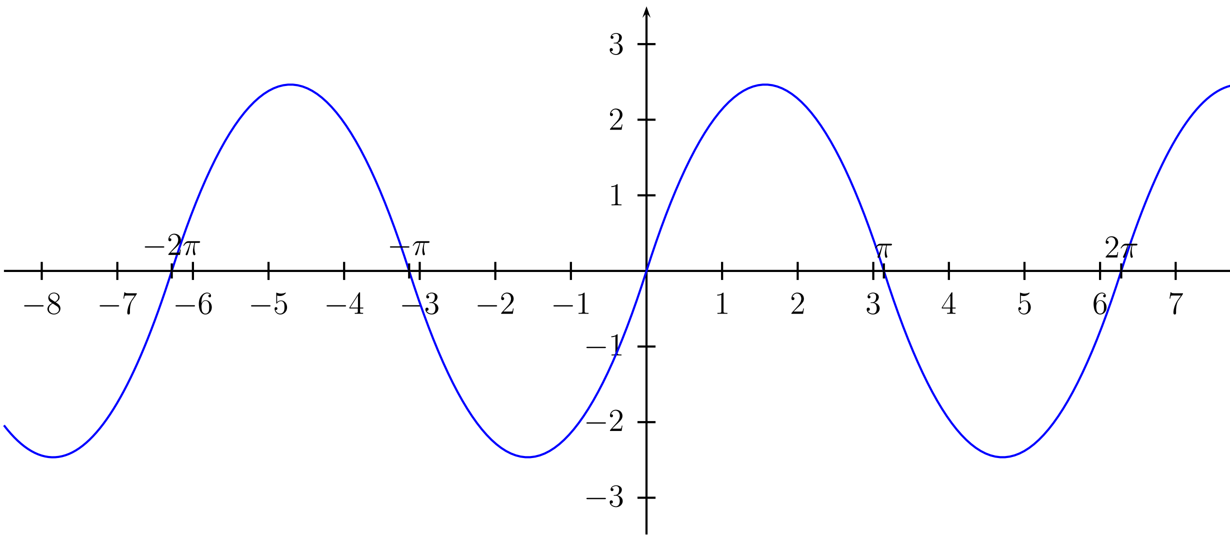
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3} \times \frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi^4}{96}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^4}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16},$$

et donc $S = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

(b) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Puisque f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x(\pi - x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Ensuite, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = 2\pi^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15}$$

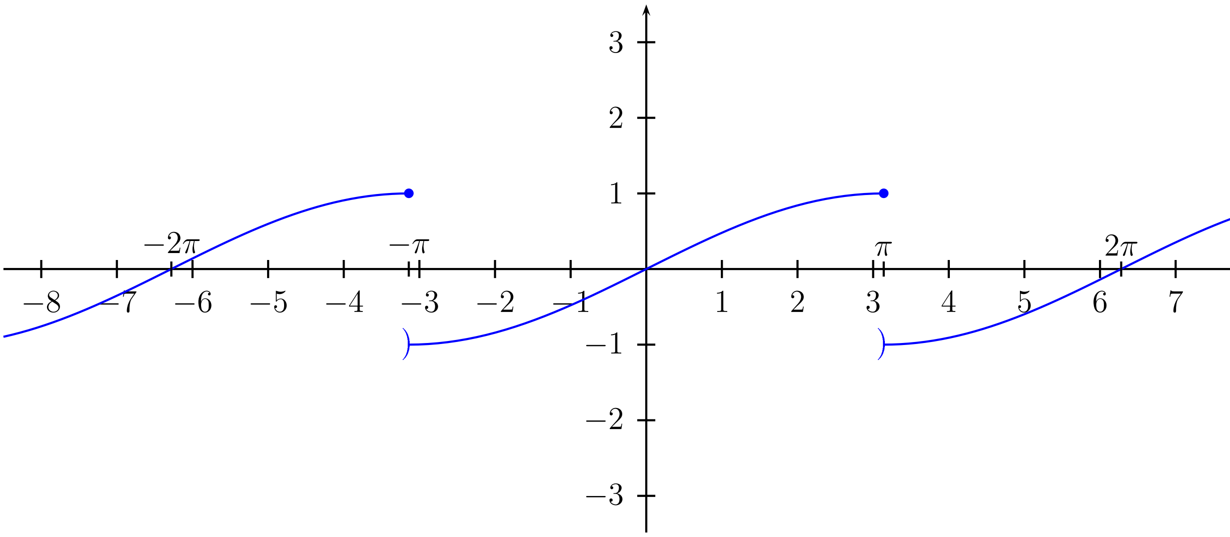
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64} \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^6}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{S}{64},$$

et donc $S = \frac{64}{63} \times \frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.}$$

(c) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique telle que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2n}{n^2-\frac{1}{4}} = -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge en tout réel x et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi[,\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{4n^2-1}\sin(nx).}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ fournit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{4n^2-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2p+1}{4(2p+1)^2-1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{2p+1}{16p^2+1p+3},$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.}$$

(d) f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et paire. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx$.
1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}(\lambda x)e^{inx}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\lambda+in)x}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-\lambda+in)x}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi} - e^{-(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda+in)\pi} - e^{-(-\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in}\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda+in} + \frac{-2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{-\lambda+in}\right) \\
&= \frac{(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda-in}{\lambda^2+n^2} + \frac{\lambda+in}{\lambda^2+n^2}\right) = \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2ème solution. Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\mathrm{sh}(\lambda x)}{\lambda}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\left(\left[\frac{\mathrm{ch}(\lambda x)}{\lambda}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx\right)\right)\\
&= \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2}a_n(f),
\end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} \times \frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2} = \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$.

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos(nx).}$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $1 = \frac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}\left(1 - \frac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \frac{\pi(\mathrm{sh}(\lambda\pi)-\pi\lambda)}{2\lambda^2\pi\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}$$

et l'égalité $f(\pi) = \mathrm{ch}(\lambda\pi)$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}\left(\mathrm{ch}(\lambda\pi) - \frac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \frac{\lambda\pi\,\mathrm{ch}(\lambda\pi)-\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\lambda\pi\,\mathrm{ch}(\lambda\pi)-\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}.}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. L'égalité de PARSEVAL s'écrit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ avec

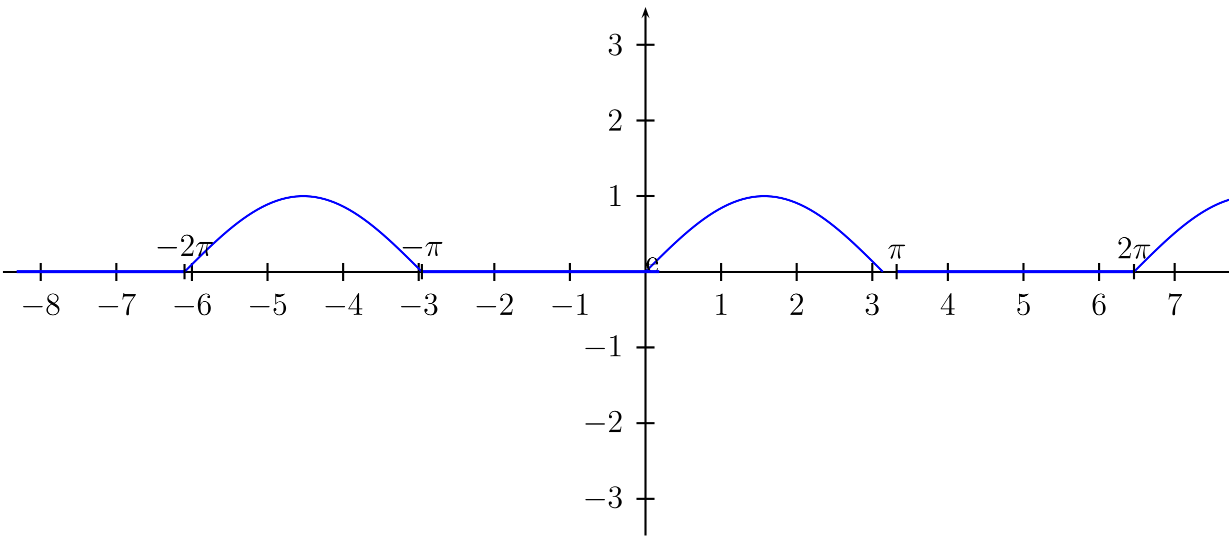
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}^2(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{ch}(2\lambda x)+1}{2}\,dx = 1 + \frac{\mathrm{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi},$$

et donc $1 + \frac{\mathrm{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} = \frac{2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} + \frac{4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}\left(1 + \frac{\mathrm{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} - \frac{2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}\right) = \frac{2\pi^2\lambda^2+\pi\lambda\,\mathrm{sh}(2\lambda\pi)-4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{8\lambda^4\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2\lambda^2+\pi\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda\pi)\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)-2\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{4\lambda^4\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}.}$$

(e) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sup(\sin x, 0)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\,dx$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \text{ si } n \neq 1 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) \text{ si } n \neq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n=1 \\ -\frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{n^2-1} \text{ si } n \neq 1 \end{array}\right.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x))\,dx = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ si } n=1 \\ 0 \text{ si } n \neq 1 \end{array}\right.$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x

$$\sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}\cos(2px).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).}$$

L'égalité $f(0) = 0$ fournit $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

Remarque. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}$

Correction de l'exercice 4061 ▲

(a) i. Soit $a \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Pour tout réel t, $a - \cos t \neq 0$ et

$$\frac{1}{a-\cos t} = \frac{2}{2a - e^{it} - e^{-it}} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1}.$$

L'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$ admet deux solutions non nulles inverses l'une de l'autre. On note b la solution de plus petit module de sorte que $|b| \leqslant 1$.

On ne peut avoir $|b| = 1$ car alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta}$. On en déduit que $2a = b + \frac{1}{b} = 2\cos\theta \in [-2,2]$ puis que $a \in [-1,1]$ ce qui n'est pas. Donc $|b| \neq 1$. Plus précisément, puisque $|b| \leqslant \left|\frac{1}{b}\right|$, on a $|b| < 1$ et $\left|\frac{1}{b}\right|$. En particulier, $b \neq \frac{1}{b}$.

Ensuite, pour $|t| < |b|$, on a

$$\frac{1}{a-\cos t} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it}-b)\left(e^{it}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{b}-b}\left(\frac{b}{e^{it}-b} - \frac{1/b}{e^{it}-\frac{1}{b}}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(\frac{be^{-it}}{1-be^{-it}} + \frac{1}{1-be^{it}}\right)$$

$$= \frac{2b}{1-b^2}\left(be^{-it}\sum_{n=0}^{+\infty}b^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty}b^n e^{int}\right) \text{ (car } |be^{it}| = |be^{-it}| = |b| < 1)$$

$$= \frac{2b}{1-b^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b^{n+1}e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty}b^n e^{int}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}b^n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty}b^n e^{-int}\right)$$

$$= \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}b^n\cos(nt)\right).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{a-\cos t} = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}b^n\cos(nt)\right).}$$

ii. Pour tout réel $t \in [-\pi,\pi]$ et tout entier naturel non nul n, on a $|b^n\cos(nt)| \leqslant |b|^n$. Comme la série numérique de terme général $|b|^n$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto b^n\cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$.

On sait alors que la série obtenue est la série de FOURIER de f.

(b) Puisque la fonction f est paire, pour tout entier naturel n, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt$. Donc, pour tout entier naturel n (y compris pour $n = 0$),

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{\pi a_n(f)}{2} = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}.}$$

Correction de l'exercice 4062 ▲

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de DIRICHLET.
Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((n+\alpha)x)+\cos((n-\alpha)x))\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)x)}{\alpha+n}+\frac{\sin((\alpha-n)x)}{\alpha-n}\right]_0^\pi \text{ (car } \alpha \notin \mathbb{Z}) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}+\frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) = (-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \forall x \in [-\pi,\pi],\ \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx).}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.
On prend $\alpha = z$ et $x = 0$ dans la formule précédente et on obtient $1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$ $(*)$.
Maintenant,

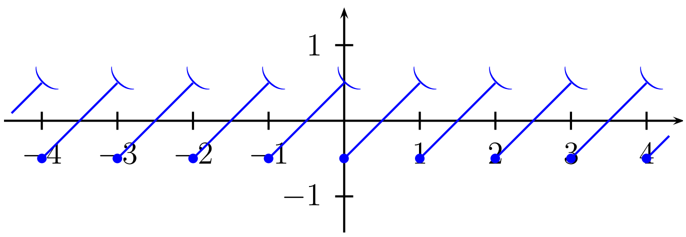
$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}) = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi z} = e^{-i\pi z} \Leftrightarrow e^{2i\pi z} = 1 \Leftrightarrow 2i\pi z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}.$$

Puisque $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\sin(\pi z) \neq 0$ et l'égalité $(*)$ peut s'écrire $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$.
De même, en prenant $\alpha = z$ et $x = \pi$, on obtient $\cos(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$ et donc $\pi\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$.

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2} \text{ et } \pi\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.}$$

Correction de l'exercice 4063 ▲

La fonction f est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction $g\ :\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z}\end{cases}$ qui est impaire. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{1}\right)\,dt = \int_0^1 (2t-1)\sin(2n\pi t)\,dt \\
&= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,dt = \left(-\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi}\right)+0 \\
&= -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

La fonction f est de plus de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de DIRICHLET, en tout réel x, la série de FOURIER de f converge et a pour pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. En particulier,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f(x)=x-E(x)-\frac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}.}$$

10. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}b_n(f_p)&=2\int_0^1 f(pt)\sin(2n\pi t)\,dt=2\int_0^p f(u)\sin\left(2n\pi\frac{u}{p}\right)\frac{du}{p}\\&=\left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos(2n\pi t)\,dt=\left(-\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi}\right)+0\\&=-\frac{1}{n\pi}.\end{aligned}$$

Remarque. Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]\setminus\left\{\frac{k}{p},\ k\in[\![0,p]\!]\right\}$. Alors $px\notin\mathbb{Z}$ et donc

$$f_p(x)=f(px)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2np\pi x)}{n\pi}=\sum_{k=1}^{+\infty}b_{k,p}\sin(2k\pi x)$$

où $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ b_{k,p}=\begin{cases}0\text{ si }k\notin p\mathbb{Z}\\-\frac{1}{\frac{k}{p}\pi}\text{ si }k\in p\mathbb{Z}\end{cases}$ mais malheureusement, on ne peut pas récupérer ces coefficients car la série obtenue ne converge pas normalement.

$$\boxed{\forall(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \int_0^1 f_q(x)f_q(x)\,dx=\frac{(\mathrm{PGCD}(p,q))^2}{12pq}.}$$

Correction de l'exercice 4064 ▲

(a) $\frac{\pi}{n+1}$.

(b) Somme de Riemman : $\ell=\int_{t=0}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

Correction de l'exercice 4065 ▲

$\sup\limits_{[\alpha,\beta]}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ pour $n\geq\frac{\beta-\alpha}{2\pi}$.

Correction de l'exercice 4066 ▲

S'il y a convergence uniforme : $\|a_n\sin nx+\cdots+a_p\sin px\|_\infty\to0$ lorsque $n,p\to\infty$.

On prend $x=\frac{\pi}{2p}$: $0\leq\frac{a_p}{p}(n+\cdots+p)\leq\frac{1}{p}(na_n+\cdots+pa_p)\to0$ lorsque $n,p\to\infty$. $n=[p/2]\Rightarrow$ cqfd.

Si $na_n\to0$: Soit $x\in]0,\pi]$ et n tel que $\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{1}{n-1}$.

Transformation d'Abel : $|a_n\sin nx+\cdots+a_p\sin px|\leq\frac{2a_n}{\sin x/2}\leq\frac{2na_n}{\pi}$,

et $|a_k\sin kx+\cdots+a_{n-1}\sin(n-1)x|\leq(ka_k+\cdots+(n-1)a_{n-1})x\leq\frac{n-k}{n-1}a_k\leq2a_k$.

Correction de l'exercice 4068 ▲

(a) $R(n)=\frac{a}{n}+S(n)$ avec $\deg S\leq-2$. Donc $f(x)=R(0)+2ia\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(S(n)e^{inx}+S(-n)e^{-inx})$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(b) $R(n)=\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}+S(n)$ avec $\deg S\leq-k-1\Rightarrow f(x)=R(0)+a_1f_1(x)+\cdots+a_kf_k(x)+g(x)$ avec $f_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}+(-1)^pe^{-inx}}{n^p}$ et g de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}\setminus2\pi\mathbb{Z}$. $f_p'=if_{p-1}$ et f_1 est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus2\pi\mathbb{Z}$ donc f_p aussi.

Correction de l'exercice 4069 ▲

(a) $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

(b) Soit $P(n)=an^2+bn+c$. Alors $f(x)-4ag(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{bn+c}{an^4+bn^3+cn^2}\cos nx$.

Correction de l'exercice 4070 ▲

(a) $k_n(x) = \frac{1-\cos((n+1)x)}{(n+1)(1-\cos x)} = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}$.

(b)

Correction de l'exercice 4073 ▲

(a) Immédiat. La fonction prolongée est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^2$ par morceaux.

(b) On décompose f en série de Fourier : $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x)$ avec $c_n = 2\int_{u=0}^{1} f''(u)\sin(n\pi u)\,du$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient : $\|f\|_\infty^2 \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right) = \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}\|f''\|_2^2 = \frac{\|f''\|_2^2}{45}$.
Autre démonstration sans utiliser les séries de Fourier : pour $x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{t=0}^{x} f'(t)\,dt = xf'(x) - \int_{t=0}^{x} tf'(t)\,dt \\
f(x) &= \int_{t=1}^{x} f'(t)\,dt = (x-1)f'(x) - \int_{t=1}^{x} (t-1)f'(t)\,dt \\
f(x) &= (1-x)f(x) + xf(x) = \int_{t=0}^{x} t(x-1)f''(t)\,dt + \int_{t=x}^{1} x(t-1)f''(t)\,dt \\
&= \int_{t=0}^{1} \varphi(x,t)f''(t)\,dt. \text{ avec } \varphi(x,t) = xt - \min(x,t).
\end{aligned}$$

On en déduit $|f(x)|^2 \le \|f''\|_2^2 \int_{t=0}^{1} \varphi(x,t)^2\,dt = \frac{x^2(x-1)^2}{3}\|f''\|_2^2 \le \frac{\|f''\|_2^2}{48}$.

Correction de l'exercice 4074 ▲

Parseval pour f et f'. Égalité ssi $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Correction de l'exercice 4075 ▲

(a) Développer f, f' et g' en séries de Fourier et appliquer l'inégalité $2|\overline{a}b| \le |a|^2 + |b|^2$. Il y a égalité si et seulement si f' et g' sont CL de cos et sin.

(b) On paramètre par une abscisse curviligne : $x = f(t)$, $y = g(t) \Rightarrow \mathscr{A} = \int_0^{2\pi} fg' \le \int_0^{2\pi} \frac{f'^2+g'^2}{2} = \pi$.

Correction de l'exercice 4079 ▲

On pose $g(t) = f(a|t|/\pi)$ pour $t \in [-\pi,\pi]$, prolongée par 2π-périodicité. Alors g est paire, continue, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls donc $g = 0$.

Correction de l'exercice 4083 ▲

(a) $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

(b)

Correction de l'exercice 4084 ▲

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.
Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ solution de l'équation.
Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Correction de l'exercice 4085 ▲

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.
$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\frac{x\cos kx}{2k^3}$.

Correction de l'exercice 4086 ▲

(a) Développer f en série de Fourier.

(b) Densité des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}^0$.

(c) $f(t)=\sin^2(\pi t)$, $\alpha=\frac{1}{\pi}$, $x=0$: $S_n=\sin^2 1+\cdots+\sin^2 n\sim\frac{n}{2}$.
Transformation d'Abel : $\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2 n}{n}=-\sin^2 1+\sum_{n=2}^{N-1}\frac{S_k}{k(k-1)}+\frac{S_N}{N}\to+\infty$ lorsque $N\to\infty$. Remarque : on a un raisonnement plus simple en écrivant $2\sin^2(n)=1-\cos(2n)$.

Correction de l'exercice 4087 ▲

Intégration à $x'-x$ constant : $a_k=\int_{y=-1}^{1}e^{-|y|^\beta}(1-|y|)e^{-2ik\pi y}\,dy$ est le $2k$-ème coefficient de Fourier de la fonction f, 2-périodique, telle que $f(y)=e^{-|y|^\beta}(1-|y|)$ si $-1\le y\le 1$ donc le k-ème coefficient de Fourier de g, 1-périodique, telle que $g(y)=\frac{1}{2}(f(y)+f(y+1))$.
Soit g_n la n-ème somme partielle de la série de Fourier de g, $g_n(y)=\sum_{|k|\le n}a_ke^{2ik\pi y}$.
On a par convergence normale de la série de Fourier de g : $\sum_{|k|>n\text{ ou }|\ell|>n}a_ka_\ell=g^2(0)-g_n^2(0)$.

$$\begin{aligned}
g(0)-g_n(0)&=\int_{y=-\frac12}^{\frac12}\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\sin((2n+1)\pi y)\,dy\\
&=2\int_{y=0}^{\frac12}\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\sin((2n+1)\pi y)\,dy\\
&=2\Big[-\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\Big]_{y=0}^{\frac12}+2\int_{y=0}^{\frac12}\frac{d}{dy}\Big(\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\Big)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy\\
&=\frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}+\int_{y=0}^{\frac12}\text{fctcontinue}(y)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy\\
&\sim\frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}.
\end{aligned}$$

$g(0)+g_n(0)\to 2g(0)=1$ (lorsque $n\to\infty$) d'où $\sum_{|k|>n\text{ ou }|\ell|>n}a_ka_\ell\sim\frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}$.

Correction de l'exercice 4088 ▲

(a) Si $f=0$ alors $c_n=0$ pour tout n par intégration terme à terme. Donc une fonction $f\in E$ possède un unique développement trigonométrique et $\|f\|$ est bien défini. Alors E est isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z})$ qui est un espace vectoriel normé complet.

(b) Produit de convolution de deux $\mathbb{Z}$-suites sommables.

(c) i. $z_0=\varphi(x\mapsto e^{2i\pi x})$. On a $|z_0|=1$ car la suite $(\varphi(x\mapsto e^{2in\pi x})_{n\in\mathbb{Z}})$ est bornée.
ii.

Correction de l'exercice 4089 ▲

$u_0+\cdots+u_n=1+(-1)^n\int_{t=0}^{1}\frac{\cos((n+1)t^2)}{\cos(t^2)}\,dt=1+(-1)^n\int_{u=0}^{1}\frac{\cos((n+1)u)}{2\cos(u)\sqrt{u}}\,du\to 1$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4090 ▲

(a) Si f est $\mathscr{C}^1$ 2π-périodique alors f' est continue, 2π-périodique de moyenne nulle donc $D(E_0^1)\subset E_0$. Réciproquement, si $g\in E_0$ alors toutes les primitives de g sont 2π-périodiques de classe $\mathscr{C}^1$ et il y en a exactement une qui a une valeur moyenne nulle (une seule possibilité de régler la constante).

(b) Non (et ceci quelle que soit la norme) car le spectre de D n'est par borné.

(c) $\|f\|_2^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|c_k(f)|^2\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|ikc_k(f)|^2=\|f'\|^2$.

(d) Idem, $|||D^{-1}_{|E_n}|||=\frac{1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 4091 ▲

On a $c_0(g)=c_1(g)=c_{-1}(g)=0$, donc g est orthogonale à tout polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à 1. Si g est de signe constant sur $]0,2\pi[$, on contredit $c_0(g)=0$. Donc g a au moins une racine $a\in\,]0,2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine dans $]0,2\pi[$ alors g est de signes constants opposés sur $]0,a[$ et $]a,2\pi[$. Mais alors $g(t)(\cos(t-a/2)-\cos(a/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles, c'est absurde. Donc g a une deuxième racine dans $]0,2\pi[$, par exemple $b\in\,]a,2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine sur $]0,2\pi[$ alors g est de signes constants sur $]0,a[$, $]a,b[$ et $]b,2\pi[$ et les signes alternent. On obtient une nouvelle contradiction car alors

$g(t)(\cos(t-(a+b)/2)-\cos((b-a)/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles. Ainsi g admet une troisième racine, par exemple $c\in]b,2\pi[$. Enfin, si l'on suppose que g n'a pas d'autre racine sur $]0,2\pi[$ alors on a $g(t)>0$ sur $]0,a[$ et $]b,c[$ et $g(t)<0$ sur $]a,b[$ et $]c,2\pi[$ ou l'inverse. Dans les deux cas, on en déduit que $g(0)=g(2\pi)=0$.

Correction de l'exercice 4092 ▲

(a) • Puisque f est impaire, $f(0)=0$. Puisque f est impaire et 2π-périodique, $-f(\pi)=f(-\pi)=f(\pi)$ et donc $f(\pi)=0$. Puisque f est 2π-périodique, pour $k\in\mathbb{Z}$, $f(2k\pi)=f(0)=0$ et $f((2k+1)\pi)=f(\pi)=0$. Finalement, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $f(k\pi)=0$.

Soit $x\in]-\pi,0[$. Puisque f est impaire, $f(x)=-f(-x)=-\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc $\forall x\in]-\pi,\pi[$, $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-\pi<x-2k\pi<\pi$ et puisque f est 2π-périodique, $f(x)=f(x-2k\pi)=\sin\left(\frac{x-2k\pi}{2}\right)=(-1)^k\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. De plus, $-\pi<x-2k\pi<\pi\Rightarrow k<\frac{x+\pi}{2\pi}<k+1$ et $k=E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\in\pi\mathbb{Z}\\ (-1)^k\sin\left(\frac{x}{2}\right)\text{ où } k=E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)\text{ si } x\notin\pi\mathbb{Z}\end{array}\right. .}$$

(b) • Soit $x\in[-\pi,0]$. Puisque f est paire, $f(x)=f(-x)=\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$ et donc $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=\sin\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-\pi<x-2k\pi\leqslant\pi$ et puisque f est 2π-périodique, $f(x)=f(x-2k\pi)=\sin\left(\left|\frac{x-2k\pi}{2}\right|\right)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sin\left(\left|\frac{x}{2}-k\pi\right|\right)\text{ où } k=E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 4093 ▲

A 1.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\phi^{(n-m)}(t)(z-a)f^{(m+1)}(a+t(z-a))\Big]\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^{m+1}\phi^{(n-m)}(t)f^{(m+1)}(a+t(z-a))
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice de sommation $m=m'+1$ dans la deuxième somme ; tous les termes s'éliminent deux à deux, à l'exception du premier terme de la première somme et du dernier terme de la deuxième somme, d'où le résultat demandé.

2.a. Plus généralement, on a le résultat suivant : si une fonction f est nulle en zéro et de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant zéro, $g(t)=f(t)/t$ est prolongeable par continuité en zéro et son prolongement est de classe C^n. Gardons nous de déduire fallacieusement ce résultat de l'existence d'un développement limité d'ordre n de g. On montre à l'aide d'un développement limité d'ordre 1 de f que g est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0)=f'(0)$. Par ailleurs, g est de classe C^{n+1} sur $I\backslash\{0\}$. Faisons l'hypothèse de récurrence $g^{(k-1)}(t)=\frac{f^{(k)}(0)}{k}+\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{t}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}+o(t^{n-k+1})$ $(1\leq k\leq n,\ t\neq 0)$. En dérivant k fois l'identité $f(t)=tg(t)$, on obtient que $\forall t\neq 0\ \ g^{(k)}(t)=\frac{f^{(k)}(t)-kg^{(k-1)}(t)}{t}$. Or $f^{(k)}(t)=f^{(k)}(0)+f^{(k+1)}(0)\frac{t}{1!}+\cdots+f^{(n+1)}(0)\frac{t^{n+1-k}}{(n-k)!}+o(t^{n+1-k})$. En substituant ces développements limités dans l'identité précédente, on montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang suivant, donc pour tout entier k de 1 à $n+1$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $g^{(k)}(0)$ existe et est égale à $f^{(k+1)}(0)/(k+1)$ $(0\leq k\leq n)$. Du développement limité de $g^{(k)}$ (tronqué à l'ordre 1) et de l'hypothèse de récurrence, il résulte que $g^{(k)}$ est continue et dérivable en zéro et que, si $k<n$, $g^{(k+1)}(0)=f^{(k+2)}(0)/(k+2)$, ce qui prouve par récurrence que g est n fois continument dérivable sur I.

Par conséquent, $t\mapsto\frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en une fonction indéfiniment dérivable sur R. Cette fonction ne s'annulant jamais, son inverse est également définie et indéfiniment dérivable sur R.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$ est paire car

$$\begin{aligned}\frac{-t}{e^{-t}-1} + \frac{-t}{2} &= \frac{-te^t}{1-e^t} - \frac{t}{2} \\ &= \frac{te^t - t + t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} \\ &= \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Donc le développement limité de $\frac{t}{e^t-1}$, dont l'existence est garantie par le fait que la fonction est indéfiniment dérivable, est de la forme demandée par l'énoncé.

Par conséquent

$$\frac{t}{e^t-1}(e^{zt}-1) = \Big(1 - \frac{t}{2} + \frac{b_1 t^2}{2!} + \frac{b_2 t^4}{4!} + \cdots + \frac{b_N t^{2N}}{(2N)!} + o(t^n)\Big) \times \Big(zt + \frac{z^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n t^n}{n!} + o(t^n)\Big)$$

et $\phi_n(z)/n!$ est le coefficient de t^n dans ce développement :

$$\phi_n(z)/n! = \frac{z^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b_1}{2!}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b_2}{4!}\frac{z^{n-4}}{(n-4)!} + \cdots + \frac{b_N}{(2N)!}\frac{z^{n-2N}}{(n-2N)!},$$

d'où l'expression de ϕ_n demandée.

2.b.

$$\begin{aligned}\phi_n(z+1) - \phi_n(z) &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1} - t\frac{e^{(z+1)t}-1}{e^t-1}\right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\big(te^{zt}\big)\end{aligned}$$

Comme $t \mapsto te^{zt}$ est de classe C^∞ et que son développement limité d'ordre n en $t=0$ est $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} t^{k+1} + o(t^n)$, il vient $\phi_n(z+1) - \phi_n(z) = nz^{n-1}$.

3. (i) est obtenue en dérivant autant de fois que nécessaire l'identité précédente et en donnant à z la valeur zéro. (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont des conséquences immédiates de 2.a.

4.a. On applique la question 1 au polynôme ϕ_{2n} de degré 2n et on intègre entre 0 et 1. Il vient

$$\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z) - \phi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\Big] = -(2n)!\big(f(z)-f(a)\big) + (z-a)^{2n+1}\int_0^1 \phi_{2n}(t) f\Big(a+(z-a)t\Big)dt$$

en tenant compte du fait que $\phi_{2n}^{(2n)} = (2n)!$

On obtient l'égalité demandée en substituant aux dérivées itérées de ϕ_{2n} les expressions déterminées dans la question 3.

4.b. Appliquons la question précédente en remplaçant f par une primitive de F et z par ω. Il vient

$$\begin{aligned}0 = \int_a^{a+\omega} F(t)dt - \frac{\omega}{2}(F(a+\omega)+F(a)) \\ + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\Big[F^{(2m-1)}(a+\omega) - F^{(2m-1)}(a)\Big] \\ - \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t) F^{(2n)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

Lorsqu'on somme les égalités obtenues en remplaçant a successivement par lui-même, $a+\omega$, …, $a+(r-1)\omega$, on obtient le résultat demandé, certains termes se simplifiant deux à deux.

B 1. On a pour tout $x > 0$ fixé

$$u_k(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) + x\ln\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{x}{k} - \frac{x}{k+1} + O(\frac{1}{k^2}) = O(\frac{1}{k^2})$$

Donc la série $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ converge.

2.

$$\begin{aligned}
&\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) \\
&\qquad = \ln(x+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}\Big[-\ln(k)+(x+1)\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\Big] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}x(\ln(k)-\ln(k+1))-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n}u_k(x)+\ln(x+n+1)-\ln(n+1)
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(x+n+1)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$ tend vers zéro ; on obtient donc par passage à la limite l'égalité souhaitée.

3. Pour tout $k\geq 1$ entier, $u_k(1)=0$, donc $G(1)=0$ et on prouve aisément par récurrence à l'aide de la question précédente que pour tout entier strictement positif n, $G(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, égalité de laquelle on déduit immédiatement le résultat demandé.

4. immédiat

5. C'est une application directe de la question A.4.b.
$T_{p,n}(x,y)=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\phi_{2p}(t)\sum_{m=0}^{n-1}f^{(2p)}(m+t)dt=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^n\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$

6. L'intégrande dans l'expression de $T_{p,n}(x,y)$ est majorée en valeur absolue par le produit de la borne supérieure de la fonction continue ϕ_{2p} sur le segment $[0,1]$ et de la valeur absolue de $f^{(2p)}$.
On prouve aisément par récurrence que $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)=O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right)$ (quand $t\to+\infty$). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$ est absolument convergente, ce qui prouve que $T_{p,n}(x,y)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

7. D'après les questions 4 et 5,

$$\begin{aligned}
G(y)-G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]+\ln y-\ln x \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}[\ln(y+k)-\ln(x+k)]+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Bigg\{(y+n)\ln(y+n)-(y+n)-y\ln y+y-(x+n)\ln(x+n) \\
&\quad +(x+n)+x\ln x-x+\frac{1}{2}\big(\ln y-\ln x+\ln(y+n)-\ln(x+n)\big) \\
&\quad +\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-\frac{1}{y^{2h-1}}+\frac{1}{x^{2h-1}}\big)+T_{p,n}(x,y)+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Or $(y+n)\ln(y+n)-(x+n)\ln(x+n)=(y-x)\ln n+y-x+o(1)$ quand $n\to+\infty$. On obtient donc après simplifications $G(y)-G(x)=g(x)-g(y)+R_n(x,y)$, ce qu'il fallait démontrer.

8. D'après la question 5 et l'expression des dérivées successives de f donnée dans la question 6, $T_{p,n}(x,y)$ est majoré en valeur absolue par le produit d'une constante et de l'intégrale $\int_0^n\left|\frac{1}{(y+t)^{2p}}-\frac{1}{(x+t)^{2p}}\right|dt$. $|R_p(x,y)|$ est majoré de la même façon en remplaçant la borne finale d'intégration n par $+\infty$. L'argument de la valeur absolue gardant un signe constant, l'intégrale majorante est égale à $\frac{1}{2p-1}\left[\left|\frac{1}{(y+t)^{2p-1}}-\frac{1}{(x+t)^{2p-1}}\right|\right]_0^{+\infty}$ et on obtient ainsi l'estimée souhaitée.

9. On a $g(m)=m\ln m-m-\frac{1}{2}\ln m+o(1)$ et $G(m)=-\ln(m-1)!=-\ln m!+\ln m$ pour m entier, donc le résultat demandé découle immédiatement de la formule de Stirling $m!\sim\sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m}$.

10. Le résultat demandé est obtenu à partir de l'égalité de la question 7 par passage à la limite. On fait tendre x vers $+\infty$ par valeurs entières et on tient compte de l'estimée obtenue dans la question 8.

11. En calculant les premiers termes du développement limité de la question A.2.a, on trouve $b_1=1/6$, $b_2=-1/30$, $b_3=1/42$. Des questions 3 et 10, il résulte que

$$\begin{aligned}
\ln(m!) &= -G(m)+\ln m \\
&= m\ln m-m+\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{12}\frac{1}{m}-\frac{1}{360}\frac{1}{m^3}+\frac{1}{1260}\frac{1}{m^5}+O(\frac{1}{m^7})
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4094 ▲

(a)

(b) $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim en^{\alpha-1}$.

Correction de l'exercice 4097 ▲

(a)

(b) Intégrale constante = 1.

Correction de l'exercice 4098 ▲

(a) e^{-x}.

(b)

(c)

(d)

Correction de l'exercice 4099 ▲

CVU sur tout compact par encadrement du logarithme.

Correction de l'exercice 4102 ▲

(a) $y_n = (n+1)\left(e^x - e^{nx/(n+1)}\right)$.

(b) $y = xe^x$.

(c)

Correction de l'exercice 4103 ▲

$\big(|f_n(x)|\big)$ décroît donc tend vers L. On extrait une sous suite $(f_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\ell \Rightarrow |\ell| = L$.
La sous-suite $(f_{\varphi(n)+1})$ converge vers $f(\ell) \Rightarrow |f(\ell)| = L \Rightarrow L = 0$.

Correction de l'exercice 4104 ▲

(a) $\ell(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \text{ si } t > 0. \end{cases}$

(b)

(c) Accroissements finis.

(d)

Correction de l'exercice 4106 ▲

$f_n(t) \to \sqrt{t}$ par valeurs croisantes, il y a convergence uniforme.

Correction de l'exercice 4107 ▲

$P_n\left(t+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{t^2}{4}-1\right)^k$.

Correction de l'exercice 4108 ▲

(a) Polynôme de Lagrange.

(b)

Correction de l'exercice 4109 ▲

(a) Il y a convergence simple vers la fonction nulle en 0 et 1 et égale à $1/2$ ailleurs. La convergence est uniforme sur tout $[a,b] \subset]0,1[$.

(b) La question précédente donne le résultat pour $1/2$, il suffit alors d'utiliser le théorème de Weierstrass et les nombres dyadiques.

Correction de l'exercice 4112 ▲

(a) Pour tout entier naturel n, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Convergence simple sur $\mathbb{R}$**.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x = 0$, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

• Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$ et de nouveau $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$**.** On peut noter tout de suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et donc $\|f_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}$. On en déduit que $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Si on n'a pas remarqué ce qui précède, on étudie la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ (f_n étant impaire) dans le but de déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x, $f_n'(x) = n\frac{(1+n^2x^2)-x(n^2x)}{(1+n^2x)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x)^2}$.

Par suite, la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

Puisque la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

Convergence uniforme et localement uniforme sur $]0,+\infty[$**.** La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge toujours pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$ car pour $n \geqslant 1$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$.

Soit a un réel strictement positif fixé. Soit $n > \frac{1}{a}$. On a $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a,+\infty[$. Par suite, pour tout réel x de $[a,+\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$.

Donc $\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - 0| = fn(a)$ pour $n > \frac{1}{a}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - 0| = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ où $a > 0$ et en particulier converge localement uniformément vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$ mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$.

(b) **Convergence simple sur** $\mathbb{R}$**.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante $f\ :\ x \mapsto 1$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ **et** $\mathbb{R}^+$**.** $\lim_{x\to-\infty}|f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Par suite, pour tout entier naturel n, la fonction $|f_n - f|$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty}|f_n(x) - f(x)| = 1$ et donc $\sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence localement uniforme sur $\mathbb{R}$**.** Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = f_n - f$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$g_n'(x) = e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) = -\frac{e^{-x}x^n}{n!}.$$

Si n est pair, la fonction g_n est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

Si n est impair, la fonction g_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Dans les deux cas, si $x \in [a,b]$, $|g_n(x)| \leqslant \mathrm{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\}$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = a$ ou $x = b$. Donc

$$\sup_{x\in[a,b]}|gn(x)| = \mathrm{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\} = \frac{g_n(a)+g_n(b)+|g_n(a)-g_n(b)|}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $\mathbb{R}$ ou encore

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge localement uniformément vers la fonction } f\ :\ x \mapsto 1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(c) Pour x réel et n entier naturel, on pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Convergence simple. Soit x réel fixé. $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x \in 2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Si $x \notin 2\mathbb{Z}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(n(1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |1-x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

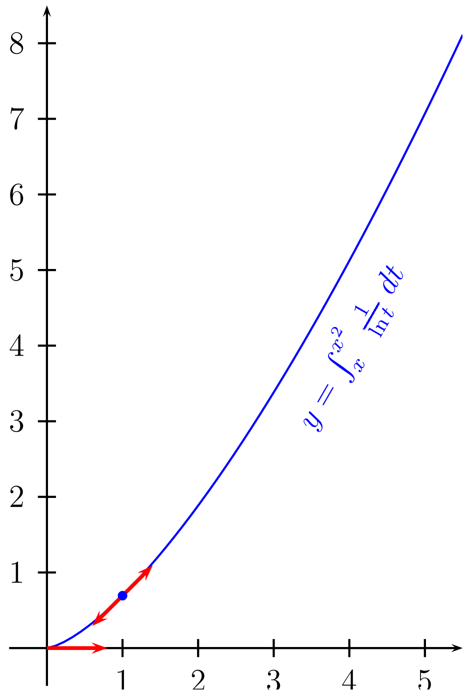
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,2] \cup 2\mathbb{Z}$.

Convergence uniforme sur $[0,2]$**.** Soit n un entier naturel non nul fixé.

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| \geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Cette dernière expression est équivalente à $\frac{\pi}{2e}$ en $+\infty$ et en particulier ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,2]$.



La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,2]$.

Correction de l'exercice 4113 ▲

Convergence simple sur $\mathbb{R}^+$**.** Soit x un réel positif fixé. Pour $n > x$, $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ et donc

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x+o(1)).$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x}$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$**.** Pour x réel positif et n entier naturel non nul, posons $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n] \\ e^{-x} \text{ si } x > n \end{cases}$.

Déterminons la borne supérieure de la fonction $|g_n|$ sur $[0,+\infty[$.
La fonction g_n est définie et continue sur R^+. Pour $x \geqslant n$, $0 < g_n(x) \leqslant e^{-n} = g_n(n)$.
Etudions la fonction g_n sur $[0,n]$. Pour $x \in [0,n]$, $g_n'(x) = -e^{-x} + \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}$.($g_n'(n)$ est la dérivée à gauche de la fonction g_n en n, mais on peut montrer qu'en fait la fonction g_n est dérivable en n pour $n > 1$).
La fonction g_n est continue sur le segment $[0,n]$ et admet donc sur $[0,n]$ un minimum et un maximum.
• La fonction g_n a un minimum égal à 0 atteint en 0. En effet, on sait que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1+u$ (inégalité de convexité) et donc pour tout réel x de $[0,n]$, $e^{-x/n} \geqslant 1-\frac{x}{n} \geqslant 0$. Après élévation des deux membres de cette inégalité, par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $e^{-x} \geqslant \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ ou encore $g_n(x) \geqslant 0 = g_n(0)$.
• Pour $0 < x \leqslant n$, les inégalités précédentes sont strictes et la fonction $g_{n/[0,n]}$ admet son maximum dans $]0,n]$. De plus, $g_n'(n) = -e^{-n} < 0$ et puisque la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0,n]$, sa dérivée g_n' est strictement négative sur un voisinage à gauche de n. La fonction g_n est alors strictement décroissante sur ce voisinage et la fonction g_n admet nécessairement son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un certain point x_n de $]0,n[$. En un tel point, puisque l'intervalle $]0,n[$ est ouvert, on sait que la dérivée de la fonction g_n s'annule. L'égalité $g_n'(x_n) = 0$ fournit $\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$ et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) e^{-x_n} = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En résumé, pour tout réel positif x, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$ où x_n est un certain réel de $]0,n[$.
Pour u réel positif, posons $h(u) = ue^{-u}$. La fonction h est dérivable sur $/mbr^+$ et pour $u \geqslant 0$, $h'(u) = (1-u)e^{-u}$. Par suite, la fonction h admet un maximum en 1 égal à $\frac{1}{e}$. On a montré que

$$\forall x \in [0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{ne}$$

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{|g_n(x)|,\ x \geqslant 0\} \leqslant \frac{1}{ne}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \sup\{|g_n(x)|,\ x \geqslant 0\} = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers la fonction } x \mapsto e^{-x}.}$$

11. **Existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.** La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par suite, I existe dans $\mathbb{R}$.
On est alors en droit d'espérer que $I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,dx$.
La fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $[\sqrt{n},+\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\,dx$.
Montrons que I_n tend vers I quand n tend vers $+\infty$.

$$|I - I_n| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} |f(x^2) - f_n(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant \sqrt{n} \times \frac{1}{ne} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{e\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = I$.
Calcul de la limite de I_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les changements de variables $x = u\sqrt{n}$ puis $u = \cos v$ fournissent

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\,dx = \sqrt{n}\int_0^1 (1-u^2)^n\,du = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} v\,dv = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

où W_n est la n-ème intégrale de WALLIS. On a déjà vu (exercice classique, voir fiches de Maths Sup) que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, I_n tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Vous pouvez voir différents calculs de l'intégrale de GAUSS dans « Grands classiques de concours : intégration ».

Correction de l'exercice 4114 ▲

Posons $f = \lim_{n\to+\infty} P_n$.
Le critère de CAUCHY de convergence uniforme (appliqué à $\varepsilon = 1$) permet d'écrire

$$\exists N \in \mathbb{N} /\ \forall n \geqslant N,\ \forall m \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| \leqslant 1.$$

Pour $n \geqslant N$, les polynômes $P_N - P_n$ sont bornés sur $\mathbb{R}$ et donc constants. Par suite, pour chaque $n \geqslant N$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_N - P_n = a_n \quad (*)$. Puisque la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$, La suite $(a_n) = (P_N(0) - P_n(0))$ converge vers un réel que l'on note a. On fait alors tendre n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$ et on obtient

$$f = P_N - a$$

On a montré que f est un polynôme.

Correction de l'exercice 4115 ▲

(a) **Convergence simple.** Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x < 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- Si $x = 0$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.
- Si $x > 0$, $n^2 f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas aussi, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Convergence normale. La fonction f_0 est la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x,

$$f_n'(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

La fonction f_n est positive sur $[0,+\infty[$, croissante sur $\left[0, \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Soit $a > 0$. Pour $n \geqslant \frac{4}{a^2}$, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a,+\infty[$. Soit donc n un entier supérieur ou égal à $\frac{4}{a^2}$. Pour tout réel t supérieur ou égal à a, on a $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant f_n(a)$ et donc $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(t)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0, \text{ la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge normalement et uniformément sur } [a,+\infty[.}$$

Convergence uniforme sur $[0,+\infty[$**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geqslant f_{n+1}(t),$$

et donc $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)| \geqslant \sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |f_{n+1}(t)| 4e^{-2}$. Par suite, $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^+.}$$

(b) **Convergence simple.** Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est définie sur $]0,+\infty[$. Soit $x \in]0,+\infty[$. Puisque $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2} > 0$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge. Donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

Convergence normale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est décroissante et positive sur $]0,+\infty[$. Donc $\sup\limits_{x\in]0,+\infty} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$.Puisque la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $5a,+\infty[$ et donc $\sup\limits_{x\in[a,+\infty} |f_n(x)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0, \text{ la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge normalement et uniformément sur } [a,+\infty[.}$$

(c) **Convergence simple.** Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

• Si $x = 0$, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = f_n(0) = 0$. Dans ce cas, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

• Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier $x > 0$ et de raison $\frac{1}{x^2+1} \in]0,1[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante de limite nulle. Par suite, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

• Si $x < 0$, puisque pour tout entier naturel n, $f_n(x) = -f_n(-x)$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

Finalement

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Convergence normale. La fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Analysons la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $g_n = (-1)^n f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} + x \times \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La fonction g_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$. Puisque la fonction g_n est impaire, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}.$$

Mais $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(-(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$ et donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2}\times\sqrt{n}} > 0.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, puisque la suite $\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante et de limite nulle, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x}{(1+x^2)^k}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\right| = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} = g_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

cette inégalité restant valable pour $x < 0$ par parité. Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)| \leqslant g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$. D'après ci-dessus, $g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\sup_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)|$. On a montré que

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4116 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+ka} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{ka}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t^a)^k\right)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt,$$

avec $\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)a}\,dt = \frac{1}{1+(n+1)a}$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt = 0$. On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{1+ka}$, $k \geqslant 0$, converge et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 4118 ▲

(a)

(b) oui, par convolution.

Correction de l'exercice 4121 ▲

$|g_n(f_n(x)) - g(f(x))| \leq |g_n(f_n(x)) - g(f_n(x))| + |g(f_n(x)) - g(f(x))|$ et g est uniformément continue.

Correction de l'exercice 4123 ▲

Prendre une subdivision régulière de $[a,b]$ et encadrer f_n par les cordes associées.

Correction de l'exercice 4124 ▲

(a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1.$$

• Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} = X\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)}$$
$$= X\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} = X.$$

• Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x(x-1)$, alors $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)X^k(1-X)^{n-k}$ et donc $B_1(f) = 0$. Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\tfrac{k}{n}\left(\tfrac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k} = -\tfrac{1}{n^2}k(n-k)\tfrac{n!}{k!(n-k)!} = -\tfrac{n-1}{n}\tfrac{(n-2)!}{(k-1)(n-k-1)!} = -\tfrac{n-1}{n}\binom{n-2}{k-1}.$$

Par suite,

$$B_n(f) = -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-2)-(k-1)}$$
$$= -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}X^k(1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X).$$

ce qui reste vrai pour n = 1.

ii. D'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2X^k(1-X)^{n-k} - 2nX\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-n)X^k(1-X)^{n-k} - n(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k}$$
$$+ n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$
$$= n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} - n^2(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2$$
$$= -n(n-1)X(1-X) - n^2(2X-1)X + n^2X^2 = -nX^2 + nX = nX(1-X).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Soient n un entier naturel non nul et α un réel strictement positif donné. Soit x un réel de $[0,1]$. Notons A (resp. B) l'ensemble des entiers $k \in [\![0,n]\!]$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha$ (resp. $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha$). (Si A ou B sont vides, les sommes ci-dessous correspondantes sont nulles).

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$
$$\leqslant \sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}$$

f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que si x et y sont deux réels de $[0,1]$ tels que $|x-y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. α est ainsi dorénavant fixé. Pour ce choix de α,

$$\textstyle\sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0,1]$.

$$\textstyle\sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Mais si $k \in B$, l'inégalité $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha$ fournit $1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}(k-nx)^2$ et donc

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{\alpha^2n^2}\times nx(1-x) = \frac{1}{\alpha^2n}\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{4\alpha^2n}.$$

En résumé, pour tout réel $x \in [0,1]$

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2M\times\frac{1}{4\alpha^2 n}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2\alpha^2 n}.$$

Maintenant, puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{2\alpha^2 n}=0$, il existe un entier naturel non nul N tel que pour $n\geqslant N$, $\frac{M}{2\alpha^2 n}<\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geqslant N$, on a $|f(x)-B_n(f)(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ (n\geqslant N\Rightarrow|f(x)-(B_n(f))(x)|<\varepsilon,$$

et donc que

$$\boxed{\text{la suite de polynômes } (B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f.}$$

(c) La question 2) montre le théorème de WEIERSTRASS dans le cas du segment $[0,1]$.
Soient $[a,b]$ un segment quelconque et f un application continue sur $[a,b]$.
Pour $x\in[0,1]$, posons $g(x)=f(a+(b-a)x)$. La fonction g est continue sur $[0,1]$ et donc il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $Q_n=P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$.
Soit $\varepsilon>0$. $\exists N\geqslant 1$ tel que $\forall n\geqslant N$, $\forall y\in[0,1]$, $|g(y)-P_n(y)|<\varepsilon$.
Soient $x\in[a,b]$ et $n\geqslant N$. Le réel $y=\frac{x-a}{b-a}$ est dans $[0,1]$ et

$$|f(x)-Q_n(x)|=|f(a+(b-a)y)-Q_n(a+(b-a)y)|=|g(y)-P_n(y)|<\varepsilon.$$

Ceci démontre que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 4125 ▲

(a) Pour $x\in]-1,1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x)=\frac{x^n\sin(nx)}{n}$.
Soit $x\in]-1,1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)|\leqslant|x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n\geqslant 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que $f(x)$ existe.

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

Soit $a\in]0,1[$. Chaque f_n, $n\geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et pour $x\in[-a,a]$,

$$f_n'(x)=x^{n-1}\sin(nx)+x^n\cos(nx).$$

Pour $x\in[-a,a]$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|f_n'(x)|\leqslant a^{n-1}+a^n\leqslant 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n\geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n', $n\geqslant 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$.
En résumé,
• la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge simplement vers f sur $[-a,a]$,
• chaque fonction f_n, $n\geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$,
• la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[-a,a]$.
D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a,a]$ pour tout réel a de $]0,1[$ et donc sur $]-1,1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x\in]-1,1[,\ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin(nx)+x^n\cos(nx)).}$$

(b) Ainsi, pour $x\in]-1,1[$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin(nx)+x^n\cos(nx))=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}e^{inx}\right)+\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^ne^{inx}\right)\\&=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}(1-xe^{-ix})}{x^2-2x\cos x+1}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{x^2-2x\cos x+1}\right)\\&=\frac{\sin x+x\cos x-x^2}{x^2-2x\cos x+1}.\end{aligned}$$

Mais, pour $x\in]-1,1[$,

$$\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)'=\frac{(\sin x+x\cos x)(1-x\cos x)-x\sin x(-\cos x+x\sin x)}{(1-x\cos x)^2}=\frac{\sin x+x\cos x-x^2}{(1-x\cos x)^2}.$$

et donc

$$\left(\text{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)\right)' = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1-x\cos x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1-x\cos x)^2 + x^2\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1} = f'(x).$$

Finalement, pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \text{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n} = \text{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right).}$$

Correction de l'exercice 4126 ▲

(a) Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si chaque $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, existe et la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{n}$.
Soit donc $x \in D =]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Pour $n > \frac{1}{x}$, on a $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante à partir d'un certain et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc $f(x)$ existe.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } D =]0,+\infty[\setminus\left\{\tfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.}$$

(b) **Limite de f en $+\infty$.** Soit $x > 1$. Donc $f(x)$ existe. Pour tout entier naturel non nul n, $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. On sait alors que la valeur absolue de $f(x)$ est majorée par la valeur absolue du premier terme de la série. Ainsi

$$\forall x > 1,\ |f(x)| \leqslant \left|\frac{(-1)^0}{\ln(x)}\right| = \frac{1}{\ln x},$$

et en particulier

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On peut noter de plus que pour $x > 1$, $f(x)$ est du signe du premier terme de la série à savoir $\frac{1}{\ln(x)}$ et donc $\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) > 0$.
Convergence uniforme sur $]1,+\infty[$**.** D'après une majoration classique du reste à l'ordre n alternée d'une série alternée, pour $x > 1$ et n naturel non nul,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(kx)}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)}\right| = \frac{1}{\ln((n+1)x)} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel non nul, $\sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| = 0$. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$.
Continuité sur $]1,+\infty[$**.** Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ est continue sur $]1,+\infty[$ et donc f est donc continue sur $]1,+\infty[$ en tant que limite uniforme sur $]1,+\infty[$ d'une suite de fonctions continues sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]1,+\infty[.}$$

Limite en 1 à droite. Soit $n \geqslant 2$. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f_n(x)$ tend vers $\ell_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 2$, converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général ℓ_n, $n \geqslant 2$ converge et que la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ tend vers le réel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures ou encore

$$\boxed{f(x) \underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{\ln x} + O(1) \text{ et en particulier, } \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty.}$$

(c) La série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers la fonction f sur $]1,+\infty[$. De plus chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.$$

Il reste à vérifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n' sur $]1,+\infty[$.

Soit $x > 1$. La série de terme général $f_n'(x)$ est alternée car son terme général est alterné en signe et sa valeur absolue à savoir $\frac{1}{x\ln^2(nx)}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ en décroissant. Donc, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x\ln^2(kx)}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x\ln^2((n+1)x)}\right| = \frac{1}{x\ln^2((n+1)x)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}.$$

Par suite, $\sup\limits_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| = 0$. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n', $n \geqslant 1$, converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers f sur $]1,+\infty[$,
- chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]1,+\infty[\text{ et } \forall x > 1,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.}$$

Pour $x > 1$, puisque la série de somme $f'(x)$ est alternée, $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme à savoir $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. Par suite, $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) \leqslant 0$ et f est donc strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[.}$$

Correction de l'exercice 4127 ▲

(a) **Convergence simple.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, $1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \geqslant 1 > 0$ et donc $f_n(t)$ existe. Ensuite, $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) > 0$ et donc la suite numérique $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe. De plus, $|f_n(t)| = \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ et la suite $(|f_n(t)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant.

On en déduit que la série de terme général $f_n(t)$, $n \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \geqslant 1, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

On pose alors $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout réel t on a

$$|R_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant |f_{n+1}(t)| = \ln\left(1 + \frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{t^2+1-1}{(n+1)(1+t^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(1+t^2)}\right)$$
$$\leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right),$$

et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0$, on a encore $\lim_{n\to+\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)| = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \geqslant 1, \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

(b) D'après le théorème d'interversion des limites, f a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) \text{ (voir l'exercice 1830, 5)).}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 4128 ▲

Domaine de définition. Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t)$ existe et de plus $f_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n\geqslant 1$, converge absolument et en particulier converge. On a montré que

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Parité. Pour tout réel t,

$$f(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(-nt)}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2} = -f(t).$$

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

Convergence normale. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, $|f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ et donc pour tout entier naturel non nul n,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}.$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$, $n\geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Limite de f en $+\infty$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et que chaque fonction f_n a une limite réelle quand t tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que f a une limite réelle en $+\infty$ et que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12} \text{ et } \lim_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi^3}{12}.}$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Dérivation. Soit $a>0$. Chaque fonction f_n, $n\geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\geqslant a$,

$$f_n'(t) = \frac{n}{n^2(1+n^2t^2)} = \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors $\sup_{t\in[a,+\infty[} |f_n'(t)| = f_n'(a) = \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$. Puisque $\frac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^3} > 0$, la série de terme général $\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$ converge et par suite, la série de fonctions de terme général f_n', $n\geqslant 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.
En résumé,
• la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge simplement vers f sur $[a,+\infty[$,
• chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$,
• la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et puisque f est impaire

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall t\in\mathbb{R}^*,\ f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.}$$

Dérivabilité en 0. La fonction f' est décroissante sur $]0,+\infty[$. Donc la fonction f' admet une limite en 0^+ élément de $]-\infty,+\infty]$. Pour $t>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$, on a $f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}$ et quand t tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

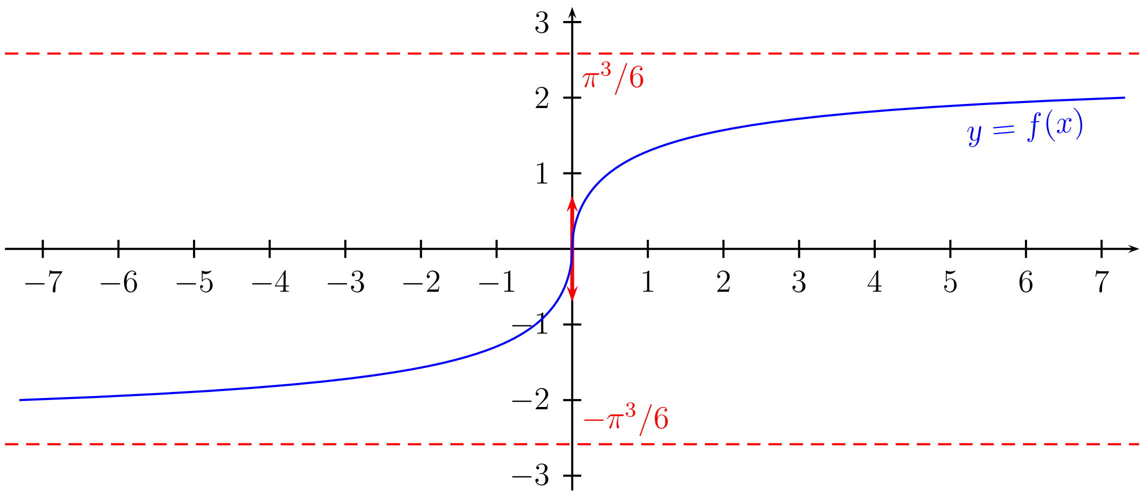
Cette inégalité étant vraie pour tout entier naturel non nul N, quand N tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

On a montré que $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) = +\infty$.

En résumé, f est de classe C^0 sur $[0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $f'(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. D'après un corollaire du théorème des accroissements finis, on sait que f n'est pas dérivable en 0 à droite et que sa courbe représentative admet $[Oy)$ pour demi-tangente en $(0,0)$. Puisque f est impaire, f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet (Oy) pour tangente en $(0,0)$.

Allure du graphe.



Correction de l'exercice 4129 ▲

(a) Soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x^2+o(1))$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$.

(b) Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et nulle au voisinage de $+\infty$. Donc chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par convexité de la fonction exponentielle, $\forall u\in\mathbb{R}$, $1+u\leqslant e^u$. Par suite, $\forall x\in[0,\sqrt{n}]$, $0\leqslant 1-\frac{x^2}{n}\leqslant e^{-x^2/n}$ puis par croissance de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, $0\leqslant f_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} = f(x)$. D'autre part, pour $x>\sqrt{n}$, $f_n(x) = 0 \leqslant f(x)$. Finalement

$$.\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,+\infty[,\ |f_n(x)|\leqslant f(x).$$

En résumé,

• chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$,

• la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n|\leqslant f$, la fonction f étant intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En posant $t = \text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ et donc $\frac{x^2}{n} = \cos^2 t$ et $dx = -\sqrt{n}\sin t\,dt$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx = \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n\times(-\sqrt{n}\sin t)\,dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1},$$

où W_n est la n-ème intégrale de WALLIS. Classiquement, $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (voir Exercices Maths Sup) et donc

$$\frac{W_{2n+1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4130 ▲

Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ et donc $\lim_{x\to 0^+} x^{-x} = 1$. Donc si on pose $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^{-x} \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$, f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$. Posons alors $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$.

La fonction f_0 est continue sur $[0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $-x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$. En résumé, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Vérifions alors que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \left\{\begin{array}{l} -x\ln x \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$. La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant M$ (on peut montrer que $M = g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$). Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{(g(x))^n}{n!} \leqslant \frac{M^n}{n!}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Comme la série numérique de terme général $\frac{M^n}{n!}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, converge et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (*).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $u = -\ln(x)$ puis $v = (n+1)u$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln x)^n\,dx = \frac{1}{n!}\int_{+\infty}^0 (ue^{-u})^n \times (-e^{-u}\,du) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}\,du \\ &= \frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} v^n e^{-v}\,dv = \frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ s'écrit alors $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Remarque. Pour calculer $I_n = \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx$, on peut aussi s'intéresser plus généralement à $J_{n,p} = \int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^p}{n!}\,dx$ que l'on calcule par récurrence grâce à une intégration par parties.

Le travail qui précède permet encore d'écrire

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \text{ et } \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Correction de l'exercice 4131 ▲

Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$. f est continue sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, pour tout réel strictement positif x, on a $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$\frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} = x^2e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, posons $f_n(x) = x^2e^{-nx}$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} u^2e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(3)}{n^3} = \frac{2}{n^3},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente.

En résumé,

• chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,

• la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,+\infty[$ et la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

Correction de l'exercice 4132 ▲

C'est presque le même exercice que l'exercice 4131. Pour tout réel $x>0$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh}x}=\frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}=2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-2nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x},$$

puis avec la même démarche que dans l'exercice précédent

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^{+\infty}ue^{-u}\,du=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\Gamma(2)}{(2n+1)^2}$$
$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)=2\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}.}$$

Correction de l'exercice 4133 ▲

Ici, le plus simple est peut-être de ne pas utiliser de théorème d'intégration terme à terme. La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0,1]$. De plus, quand x tend vers 0, $f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x\underset{x\to0^+}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{\ln x}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{2k}\ln x+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}.$$

Maintenant, chacune des fonctions $f_k\ :\ x\mapsto(-1)^kx^{2k}\ln x$, $0\leqslant k\leqslant n$, est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0. On en déduit encore que la fonction $g_n\ :\ x\mapsto\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $g_n=f-\sum_{k=0}^{n}f_k$. On a donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1x^{2k}\ln x\,dx+\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

La fonction $h\ :\ x\mapsto\frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que la fonction h est bornée sur $]0,1]$. Soit M un majorant de la fonction $|h|$ sur $]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\left|\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx\right|\leqslant\int_0^1x^{2n}\left|\frac{x\ln x}{1+x^2}\right|\,dx\leqslant M\int_0^1x^{2n}\,dx=\frac{M}{2n+1}.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx=0$. Ceci montre que la série numérique de terme général $(-1)^k\int_0^1x^{2k}\ln x\,dx$, $k\in\mathbb{N}$, converge et que

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1x^{2k}\ln x\,dx.$$

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon\in]0,1[$. Les deux fonctions $x\mapsto\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $x\mapsto\ln x$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^1x^{2n}\ln x\,dx=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1-\frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^1x^{2n}\,dx=-\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\ln\varepsilon-\frac{1}{(2n+1)^2}(1-\varepsilon^{2n+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_0^1x^{2n}\ln x\,dx=-\frac{1}{(2n+1)^2}$. Par suite,

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\frac{\pi}{4}.$$

Vérifions maintenant l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,+\infty[$. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et on sait déjà que f est intégrable sur $]0,1]$. De plus, $x^{3/2}f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ et donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement sur $]0,+\infty[$.

Pour calculer $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, la méthode précédente ne marche plus du tout car pour $x>1$, x^n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. C'est une toute autre idée qui permet d'aller au bout. On pose $u=\frac{1}{x}$ et on obtient

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\int_{+\infty}^0\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{-du}{u^2}=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,du=-I,$$

et donc $I=0$.

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\frac{\pi}{4}\text{ et }\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=0.}$$

Correction de l'exercice 4134 ▲

(a) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout réel t de $[0,x]$, on a $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Maintenant, pour tout réel $t \in [0,x]$ et tout entier naturel n, on a $|t|^n \leqslant x^n$. Puisque la série numérique de terme général x^n converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,x]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut affirmer que

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1[,\ -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.}$$

(b) Par suite, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}\ln t}{n}.$$

Pour $t \in]0,1[$, posons $f(t) = \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ puis pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = -\frac{t^{n-1}\ln t}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1]$. En particulier, la fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1[$. Calculons alors $\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Soit $a \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{t^n}{n}$ et $t \mapsto -\ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}(-\ln t)\,dt = \left[-\frac{t^n\ln t}{n}\right]_a^1 + \frac{1}{n}\int_a^1 t^{n-1}\,dt = \frac{a^n\ln a}{n} + \frac{1}{n^2}(1-a^n).$$

Quand a tend vers 0, on obtient $\int_0^1 -t^{n-1}\ln t\,dt = \frac{1}{n^2}$ et donc $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{n^3}$. Puisque la fonction f_n est positive sur $]0,1[$, on a encore $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{n^3}$. On en déduit que la série numérique de terme général $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge.
En résumé,
• chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$,
• la séries de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et la fonction f
est continue sur $]0,1[$,
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt < +\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n-1}\ln t}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

Correction de l'exercice 4135 ▲

Existence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch} t}$ et donc $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{e^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour tout réel x, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt$ existe.

Convergence de la série. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(x) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n(x) - u_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2} - \frac{2n+3}{(2n+3)^2+x^2} = \frac{(2n+1)((2n+3)^2+x^2)-(2n+3)((2n+1)^2+x^2)}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)} \\ &= \frac{2(2n+1)(2n+3)-2x^2}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}. \end{aligned}$$

Puisque le numérateur de cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cette expression est positive pour n grand. On en déduit que la suite $(u_n(x))$ décroît à partir d'un certain rang. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
On en déduit que la série de terme général $(-1)^n u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour tout réel x, la série de terme général $(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$ converge.

Egalité de l'intégrale et de la somme de la série. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $t\in]0,+\infty[$, on a $e^{-t}\in]0,1[$ et donc

$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}=\frac{2\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-2t}}=2\cos(xt)e^{-t}\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke^{-2kt}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$$
$$=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(xt)e^{-(2k+1)t}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}.$$

Maintenant, pour chaque $k\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto\cos(xt)e^{-(2k+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t\mapsto(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}\,dt=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2k+1)t}\,dt+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt.$$

Ensuite, $\left|\int_0^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-(2n+3)t}\,dt=\frac{1}{2n+3}$, et donc $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt=0$ puis

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}\,dt=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2n+1)t}\,dt.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2n+1)t}\,dt=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-(2n+1)t}\,dt\right)=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2n+1)+ix)t}\,dt\right)$$
$$=\operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(-(2n+1)+ix)t}}{-(2n+1)+ix}\right]_0^{+\infty}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\left(1-\lim_{t\to+\infty}e^{(-(2n+1)+ix)t}\right)\right)$$
$$=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\right)\ \left(\text{car }\left|e^{(-(2n+1)+ix)t}\right|=e^{-(2n+1)t}\underset{n\to+\infty}{\to}0\right)$$
$$=\operatorname{Re}\left(\frac{2n+1+ix}{(2n+1)^2+x^2}\right)=\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.$$

On a enfin montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}\,dt=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.}$$

Correction de l'exercice 4136 ▲

Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_n=\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n}&1\end{pmatrix}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On peut écrire $A_n=\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}&-\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\\ \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}&\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\end{pmatrix}$. Les sommes des carrés des deux nombres $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ est égale à 1. Donc il existe un réel $\theta_n\in]-\pi,\pi]$ tel que $\cos(\theta_n)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin(\theta_n)=\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$. De plus, $\cos(\theta_n)>0$ et $\sin(\theta_n)>0$ et donc on peut prendre

$$\theta_n=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors

$$A_n^n=\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos(\theta_n)&-\sin(\theta_n)\\ \sin(\theta_n)&\cos(\theta_n)\end{pmatrix}^n=\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{pmatrix}\cos(n\theta_n)&-\sin(n\theta_n)\\ \sin(n\theta_n)&\cos(n\theta_n)\end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}=\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+o(1)$.
D'autre part, $n\theta_n=n\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\times\frac{a}{n}=a$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}A_n^n=1.\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\ \sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\ \sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall a>0,\ \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n}&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\ \sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4137 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

(3) $\Rightarrow$ (2). On sait que si la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge, alors $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supposons $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel n, $A^nX = \lambda^nX$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$, on a encore $\lim_{n\to+\infty} A^nX = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} \lambda^nX = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. Ainsi, si $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$ alors $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$. On sait (voir exercice 3137 : décomposition de DUNFORD) qu'il existe deux matrices D et N telles que

1) $A = D+N$

2) D diagonalisable

3) N nilpotente

4) $DN = ND$.

De plus, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A.

On note k l'indice de nilpotence de N. Puisque les matrices D et N convergent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour $n \geqslant k$

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j.$$

Il existe une matrice $P \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ tel que $D = P\Delta P^{-1}$. Mais alors, $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall n \geqslant j$, $\binom{n}{j} D^{n-j}N^j = P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$.

Soit $j \in [\![0,k]\!]$. Vérifions tout d'abord que la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$, $n \geqslant j$ converge. Posons $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$. Alors $\forall n \geqslant j$, $\binom{n}{j}\Delta^{n-j} = \mathrm{diag}\left(\binom{n}{j}\lambda_1^{n-j},\dots,\binom{n}{j}\lambda_p^{n-j}\right)$. Maintenant, si λ est une valeur propre de Δ (et donc de A), $\binom{n}{j}\lambda^{n-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}\lambda^{n-j} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^j\lambda^{n-j} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $|\lambda| < 1$ et donc la série de terme général $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$, $n \geqslant j$, converge.

Ainsi, la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$ converge. D'autre part, l'application $M \mapsto P \times M \times PN^j$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général $P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge.

Finalement, pour chaque $j \in [\![0,k]\!]$, la série de terme général $P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge et donc la série de terme général A^n converge car est somme de $j+1$ séries convergentes.

Correction de l'exercice 4138 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} 4/3-X & -5/6 \\ 5/3 & -7/6-X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = \left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} D^k\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^{n}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k\right)P^{-1}.$$

Puisque $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ sont dans $]-1,1[$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ convergent. Il en est de même de la série de terme général D^k. Maintenant, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, converge est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général A^k converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto PMP^{-1}\text{)} \\
&= P\,\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Remarque. D'après l'exercice suivant, la matrice obtenue est $(I-A)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4139 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout entier naturel n, on a $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$. Puisque $\|A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même de la série de terme général $\|A^n\|$ et donc la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est complet en tant que $\mathbb{C}$ espace de dimension finie, on en déduit que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$\begin{aligned}(I-A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I-A)\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto (I-A)M) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(I-A^{n+1}) = I \;(\lim_{n\to+\infty} A^{n+1} = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}).\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $I-A$ est inversible à droite et donc inversible et de plus, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. On en déduit encore

$$\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| = \left\|\sum_{n=2}^{+\infty} A^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

Correction de l'exercice 4140 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que d'une part $\det(\exp(A)) \neq 0$ et d'autre part $\exp(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right)$. Par continuité du déterminant, on a donc $\lim_{p\to+\infty} \det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right) = \det(\exp(A)) \neq 0$. Par suite, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right) \neq 0$ et donc tel que $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 4141 ▲

(a) $\chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-1) - (-2X-2) - (2X+2) = -(X+1)(X-1)(X-3).$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_nX^2 + b_nX + c_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en -1, 1 et 3, on obtient

$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n) \\ 8a_n + \frac{3}{2}(1-(-1)^n) + \frac{1}{2}(1+(-1)^n) = 3^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{8}(3^n - 2 + (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{8}(-3^n + 6 + 3(-1)^n) \end{cases}.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{8}((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1-(-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3).$$

Maintenant,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel t,

$$\exp(tA)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}.\frac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3)$$

$$=\frac{e^{3t}-2e^t+e^{-t}}{8}\begin{pmatrix}9&8&8\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}+\frac{4(e^t-e^{-t})}{8}\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}+\frac{-e^{3t}+6e^t+3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8e^{3t}&8e^{3t}-8e^t&8e^{3t}-8e^t\\2e^{3t}-2e^{-t}&2e^{3t}+6e^{-t}&2e^{3t}-2e^{-t}\\-2e^{3t}+2e^{-t}&-2e^{3t}+8e^t-6e^{-t}&2e^{3t}+8e^t+2e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4e^{3t}&4e^{3t}-4e^t&4e^{3t}-4e^t\\e^{3t}-e^{-t}&e^{3t}+3e^{-t}&e^{3t}-e^{-t}\\-e^{3t}+e^{-t}&-e^{3t}+4e^t-3e^{-t}&e^{3t}+4e^t+e^{-t}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4e^{3t}&4e^{3t}-4e^t&4e^{3t}-4e^t\\e^{3t}-e^{-t}&e^{3t}+3e^{-t}&e^{3t}-e^{-t}\\-e^{3t}+e^{-t}&-e^{3t}+4e^t-3e^{-t}&e^{3t}+4e^t+e^{-t}\end{pmatrix}}.$$

(b) $\chi_A=\begin{vmatrix}4-X&1&1\\6&4-X&2\\-10&-4&-2-X\end{vmatrix}=(4-X)(X^2-2X)-6(-X+2)-10(X-2)=(X-2)[-X(X-4)+6-10]=-(X-2)(X^2-4X+4)=-(X-2)^3$. On est dans la situation où A a une unique valeur propre. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $(A-2I_3)^3=0$ et donc pour tout réel t,

$$\exp(tA)=\exp(t(A-2I_3)+2tI_3)=\exp(t(A-2I_3))\times\exp(2tI_3)\text{ (car les matrices }t(A-2I_3)\text{ et }2tI_3\text{ commutent)}$$

$$=\left(I_3+t(A-2I_3)+\frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right)\times e^{2t}I_3$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}}.$$

Correction de l'exercice 4142 ▲

$$\chi_A=\begin{vmatrix}-X&1/2&-2\\1/2&-X&0\\0&0&-1/2-X\end{vmatrix}=-X\left(X^2+\tfrac{1}{2}X\right)-\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{4}\right)=-X^2\left(X+\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{4}\left(X+\tfrac{1}{2}\right)=-\left(X+\tfrac{1}{2}\right)^2\left(X-\tfrac{1}{2}\right).$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n=Q_n\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$.
On évalue les deux membres de cette égalité en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ et on obtient $\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient $-a_n+b_n=n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Maintenant,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\\\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\-a_n+b_n=-2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\\frac{a_n}{2}+2c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\-a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\c_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A^2 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3$ avec $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour $|t| < 2$,

$$\begin{aligned}
\ln(I_3 + tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3.
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\ln(I_3 + tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A^2 \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A \\
&+ \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)I_3 \\
&= \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}} - 1\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A^2 + \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A \\
&+ \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}} - 1\right) + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)I_3 \\
&= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\right)\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} + \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + \frac{2t}{2-t} + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in]-2,2[,\ \ln(I_3 + tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.}$$

Correction de **l'exercice 4143 ▲**

(a) i. Soit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. $f_{\vec{\omega}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par bilinéarité du produit vectoriel. De plus, pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f_{\vec{\omega}}(\vec{x}).\vec{y} = (\vec{\omega} \wedge \vec{x}).\vec{y} = [\vec{\omega}, \vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{x}] = -(\vec{\omega} \wedge \vec{y}).\vec{x} = -\vec{x}.f_{\vec{\omega}}(\vec{y}).$$

Donc,

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ f_{\vec{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3).}$$

ii. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathscr{A}(\mathbb{R}^3) \\ \vec{\omega} & \mapsto & f_{\vec{\omega}} \end{array}$.

- Vérifions que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(\varphi(\lambda_1\vec{\omega}_1 + \lambda_2\vec{\omega}_2))(\vec{x}) &= f_{\lambda_1\vec{\omega}_1 + \lambda_2\vec{\omega}_2}(\vec{x}) = (\lambda_1\vec{\omega}_1 + \lambda_2\vec{\omega}_2) \wedge = \lambda_1(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{x}) + \lambda_2(\vec{\omega}_2 \wedge \vec{x}) \\
&= \lambda_1 f_{\vec{\omega}_1}(\vec{x}) + \lambda_2 f_{\vec{\omega}_2}(\vec{x}) = ((\lambda_1\varphi(\vec{\omega}_1) + \lambda_2\varphi(\vec{\omega}_2))(\vec{x})
\end{aligned}$$

et donc $\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2)=\lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1)+\lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)$. On a montré que $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$.
• Vérifions que φ est injective. Soit $\omega\in\mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\omega}\in\mathrm{Ker}(\varphi)\Rightarrow f_{\overrightarrow{\omega}}=0\Rightarrow\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}.$$

On applique alors ce dernier résultat à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On obtient $\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{x}\in\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On a montré que φ est injective.

• Enfin, $\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))=\frac{3\times(3-1)}{2}=3=\dim(\mathbb{R}^3)<+\infty$. On en déduit que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3),\ \exists\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3/\ f=f_{\overrightarrow{\omega}}.}$$

(b) Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. Si $\overrightarrow{\omega}=\overrightarrow{0}$, alors $f_{\overrightarrow{\omega}}=0$ et donc $\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)=Id_{\mathbb{R}^3}$.
On suppose dorénavant $\overrightarrow{\omega}\neq\overrightarrow{0}$. On pose $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\|\overrightarrow{\omega}\|}\overrightarrow{\omega}$ puis on complète la famille orthonormale $(\overrightarrow{e_3})$ en une base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ (en particulier $\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_2}$).
• Puisque $\overrightarrow{e_3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\omega}$, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3})=\overrightarrow{0}$. On en déduit que

$$\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)(\overrightarrow{e_3})=Id(\overrightarrow{e_3})+f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3})+\tfrac{1}{2}f_{\overrightarrow{\omega}}^2(\overrightarrow{e_3})+\tfrac{1}{6}f_{\overrightarrow{\omega}}^3(\overrightarrow{e_3})+\ldots=\overrightarrow{e_3}.$$

• D'autre part, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{e_1}=\|\overrightarrow{\omega}\|\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}=\|\overrightarrow{\omega}\|\overrightarrow{e_2}$ et de même $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2})=-\|\overrightarrow{\omega}\|\overrightarrow{e_1}$.
On en déduit que $f_{\overrightarrow{\omega}}^2(\overrightarrow{e_1})=-\|\overrightarrow{\omega}\|^2\overrightarrow{e_1}$ et donc que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n}(\overrightarrow{e_1})=(-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}\overrightarrow{e_1}\quad\text{puis}\quad f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n+1}(\overrightarrow{e_1})=(-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}\overrightarrow{e_2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)(\overrightarrow{e_1})&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f_{\overrightarrow{\omega}}^n(\overrightarrow{e_1})\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_2}\ \text{(somme de deux séries convergentes)}\\&=\cos\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)\overrightarrow{e_1}+\sin\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n}(\overrightarrow{e_2})=(-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}\overrightarrow{e_2}\quad\text{puis}\quad f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n+1}(\overrightarrow{e_2})=-(-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}\overrightarrow{e_1}.$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)(\overrightarrow{e_2})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f_{\overrightarrow{\omega}}^n(\overrightarrow{e_2})&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_2}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_1}\\&=-\sin\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)\overrightarrow{e_1}+\cos\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)$ dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est $\begin{pmatrix}\cos\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)&-\sin\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)&0\\\sin\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)&\cos\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est la rotation d'angle $\|\overrightarrow{\omega}\|$ autour de $\overrightarrow{\omega}$.

Correction de l'exercice 4144 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

$$\left\|\sum_{k=0}^p\frac{A^k}{k!}-\left(I+\frac{A}{p}\right)^p\right\|=\left\|\sum_{k=0}^p\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}\right)A^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^p\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}\right|\|A\|^k.$$

Maintenant, $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}=\frac{1}{k!}\left(1-\dfrac{\overbrace{p\times(p-1)\times\ldots\times(p-k+1)}^{k}}{\underbrace{p\times p\times\ldots\times p}_{k}}\right)\geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^p\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}\right|\|A\|^k=\sum_{k=0}^p\frac{\|A\|^k}{k!}-\left(1+\frac{\|A\|^p}{p}\right)^p\underset{n\to+\infty}{\to}e^{\|A\|}-e^{\|A\|}=0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^p\frac{A^k}{k!}-\left(I+\frac{A}{p}\right)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^p\frac{A^k}{k!}$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(I+\frac{A}{p}\right)^p$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.}$$

Correction de l'exercice 4145 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque χ_A est de degré n, la division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)}X^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)}X + a_0^{(k)} \text{ où } Q_k \in \mathbb{R}[\mathbb{C}] \text{ et } (a_0^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre alors que $A^k = a_{n-1}^{(k)}A^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)}A + a_0^{(k)}I_n$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \text{Vect}(A^{n-1}, \ldots, A, I_n)$ puis $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. Enfin, puisque $\text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, $\exp(A) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$

Correction de l'exercice 4146 ▲

(a)

(b) $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi \operatorname{sh} 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e - \cos 1)$.

Correction de l'exercice 4147 ▲

(a) $\mathbb{R}^*$.

(b) CSI : $\frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx \le f(a) \le \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx + 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} + 1$. Donc $af(a) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque $a \to 0^+$.

(c) TCM : $f(a) \to 1$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4150 ▲

(a)

(b) $f(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

Correction de l'exercice 4152 ▲

(a)

(b) $xg(x) - g(x+1) = \frac{1}{e}$.

(c) CSA $\Rightarrow g' < 0$. $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, $g(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

(d) $g(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+ et $g(x) \sim \frac{1}{ex}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 4154 ▲

(a)

(b) CSA $\Rightarrow |R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| \le \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

(c) Non, $\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4155 ▲

(a)

(b) $f(x+1) = xf(x) - 1$.

(c)

Correction de l'exercice 4156 ▲

(a) CVU sur tout $[a,b]$.

(b)

(c) $f(x+1) = f(x) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

(d) $f(x+1) - f(x) \sim \frac{1}{x}$ donc la suite $(f(n))$ diverge et f est croissante $\Rightarrow \lim = +\infty$.

Correction de l'exercice 4157 ▲

$\frac{1}{t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$.

Correction de l'exercice 4158 ▲

(a) $\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 - \frac{x(x+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \ln f_n(x)$ est convergente pour tout $x \notin -|||^*$.

(b)

(c) $\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \to -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4159 ▲

Poser $t = xu$ puis intégrer deux fois par parties : $f_n(x) = 1 - \int_{u=0}^{1} (1-u)^{n+1} x \sin(xu)\, du$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné.

Correction de l'exercice 4161 ▲

(a) cva si $|\cos x| < 1$, scv si $\cos x = 1$, dv si $\cos x = -1$.

(b) TCM en regroupant les termes deux par deux.

(c) $\int_{x=0}^{\pi/2} -\ln(1-\cos x)\, dx$.

Correction de l'exercice 4162 ▲

(a) $F_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X + n(1-e^{2ik\pi/n})}$.

(b) $F_n(2x) - F_n(-2x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4xe^{2ik\pi/n}}{4x^2 - n^2(1-e^{2ik\pi/n})^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{x^2 e^{-2ik\pi/n} + n^2 \sin(k\pi/n)^2}$.

Supposons n impair, et regroupons les termes conjugués obtenus pour k et $n-k$:

$F_n(2x) - F_n(-2x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \underbrace{\left(\frac{x}{x^2 e^{-2ik\pi/n} + n^2 \sin(k\pi/n)^2} + \frac{x}{x^2 e^{2ik\pi/n} + n^2 \sin(k\pi/n)^2}\right)}_{=u(k,n,x)}$.

On transforme la somme en série de $k = 1$ à $k = \infty$ en posant $u(k,n,x) = 0$ si $k > (n-1)/2$, puis on passe à la limite, sous réserve de justification, dans cette série pour $n \to \infty$, ce qui donne la formule demandée.

Justification de l'interversion limite-série : en utilisant $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ on a $|u(k,n,x)| \leq \frac{2|x|}{4k^2 - x^2}$ pour tout $k \geq |x/2|$, donc il y a convergence normale par rapport à n, à x fixé.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{x^2 + k^2\pi^2} = \frac{\coth(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite pour $x \to 0$.

Correction de l'exercice 4163 ▲

(a) Transformation d'Abel.

(b) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

(c) $\frac{\pi - 1}{2}$.

Correction de l'exercice 4164 ▲

(a)

(b) $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1} \frac{dt}{t^x}\right)$.

A n fixé, $\frac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} \to \frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1} \frac{dt}{t}$ lorsque $x \to 1^+$ et la convergence est monotone donc lorsque $x \to 1^+$ $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \to \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1} \frac{dt}{t}\right) = \gamma$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \eta'(1) = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2)^2$.

Correction de l'exercice 4166 ▲

Pour k fixé et $x \in [0,1[$ on a $0 \leq f(x) \leq \text{polynôme}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^k = \text{polynôme}(x) + \frac{1}{1-x^k}$ et $\frac{1}{1-x^k} \sim \frac{1}{k(1-x)}$ au voisinage de 1 donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{k(1-x)}$ pour x suffisamment proche de 1.

Correction de l'exercice 4167 ▲

(a)

(b) soit $y \in [c,d]$ et $x_n = f_n^{-1}(y)$. La suite (x_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $x = f^{-1}(y)$.

(c)

Correction de l'exercice 4168 ▲

Oui : $|\sup f_n - \sup f| \leq \|f_n - f\|_\infty$.

Correction de l'exercice 4169 ▲

(a) Il y a convergence normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Il n'y a pas convergence normale au voisinage de 0 car $\sup\left\{\frac{xe^{-nx}}{\ln n},\ x \geq 0\right\} = \frac{1}{en\ln n}$ atteint pour $x = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (série de Bertrand). Par contre il y a convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ car

$$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leq \frac{1}{\ln n}\sum_{k=n}^{\infty} xe^{-kx} = \frac{xe^{-nx}}{\ln n(1-e^{-x})} \leq \frac{\sup\{t/(1-e^{-t}),\ t \geq 0\}}{\ln n}.$$

(b)

(c) Lorsque $x \to 0^+$, $\frac{S(x)-S(0)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty$ par convergence monotone.

(d)

Correction de l'exercice 4170 ▲

Comparaison série-intégrale, $f(x) \to \ln(2)$ lorsque $x \to 1^-$.

Correction de l'exercice 4171 ▲

(a) $-1 < t < 1$.

(b) Pour $0 \leq t < 1$ et $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{t^n}{1-t^n} &= \frac{t^n}{1+t+\dots+t^{n-1}} \\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{t^n((1-t)+(1-t^2)+\dots+(1-t^{n-1}))}{n(1+t+\dots+t^{n-1})} \\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{(t^n-t^{n+1})((n-1)+(n-2)t+\dots+t^{n-2})}{n(1+t+\dots+t^{n-1})}\end{aligned}$$

d'où $0 \leq (1-t)\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n} \leq \frac{n-1}{n}(t^n - t^{n+1}) \leq t^n - t^{n+1}$ (vrai aussi si $n=1$) et en sommant :

$$0 \leq (1-t)S(t) + \ln(1-t) \leq 1.$$

Correction de l'exercice 4172 ▲

(a) La série converge normalement et ϕ est continue.

(b) ϕ est 1-lipschitzienne, mais on ne peut rien en déduire pour f :
pour N fixé et $0 < h \leq \frac{1}{2.4^N}$, on a $|f(h) - f(0)| = f(h) \geq \sum_{n=1}^{N} 3^n h = \frac{3^{N+1}-3}{2}h$ donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.

(c) D'après ce qui précède, le taux d'accroissement de f en 0 est arbitrairement grand, donc f n'est pas dérivable en 0. On montre de même que f n'est pas dérivable en $x \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4173 ▲

On suppose h réel. La série converge localement normalement sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. Continuité en 0 : on pose $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ (φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon infini). Pour $h \neq 0$ on a :

$$f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})\varphi(nh) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\varphi(nh) - \varphi((n-1)h)) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_{t=(n-1)h}^{nh} \varphi'(t)\,dt.$$

Cette dernière série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car $A_n \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) et $\int_{t=0}^{+\infty} |\varphi'(t)|\,dt$ est convergente.

Correction de l'exercice 4174 ▲

(a) Soit $k = \lfloor n/2\pi \rfloor$. On a $F_n(x) = \frac{2k\pi}{n}\int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_{t=2k\pi}^{n} f(x+t)f(t)\,dt \to \int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

(b) Uniforme.

(c) Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 4175 ▲

$g = x \mapsto f(\tan(x/2))$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Correction de l'exercice 4176 ▲

(a) CSA : $0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

(b) $xf(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2p+1)^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(2p+2)^2+x^2}}$
$= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{t=2p+1}^{2p+2} \frac{xt}{(t^2+x^2)^{3/2}}\,dt$
$= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du.$
On a $\int_{u=0}^{\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = 1 = a+b$ avec :
$a = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p)/x}^{(2p+1)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du$ et $b = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = xf(x)$.
$h : u \mapsto \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}$ est croissante sur $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$ donc $|a-b| \le \frac{3\|h\|_\infty}{x}$, et $xf(x) \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4177 ▲

On a $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} \le xS_1(x) \le \frac{x}{\operatorname{sh} x} + \int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$ et $\frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{t} + O(t)$ donc $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = -\ln(x) + O(1)$. On en déduit $S_1(x) \sim -\frac{\ln x}{x}$.
La même méthode ne marche pas pour S_2 car le terme résiduel, $\frac{x}{\operatorname{sh}^2(x)}$ n'est pas négligeable devant $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2(t)}$. Par contre, on peut remarquer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, d'où $S_2(x) \sim \frac{\zeta(2)}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4178 ▲

(a) Lorsque $n \to \infty$, $S_n(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} - t^n e^{i(n+1)x}}{1-te^{ix}}\right) \to \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}$ pour $-1 < t < 1$.

(b) $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}$.
$\int_{t=0}^{1} S(t)\,dt = (t - \cos x = u\sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan x/2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi - x}{2}$.

(c) TCD : $|S_n(t)| \le \frac{2}{\sin x}$ intégrable par rapport à t sur $[0,1]$. On en déduit $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{\pi - x}{2}$.

Correction de l'exercice 4179 ▲

(a) R est trivialement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le théorème de décomposition en éléments simples donne une base de R en se limitant aux éléments simples n'ayant pas de pôle dans $[0,1]$.
$R_{m,n}$ n'est pas un espace vectoriel. Par exemple $\frac{1}{X+1}$ et $\frac{1}{X+2}$ appartiennent à $R_{0,1}$ mais pas leur somme.

(b) Soit (f_k) une suite d'éléments de $R_{m,n}$ telle que $\|g-f_k\| \to d$ quand $k\to\infty$. On note $f_k = P_k/Q_k$ avec $P_k\in\mathbb{R}_m[X]$, $Q_k\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\|Q_k\| = 1$. On a $\|P_k\| \le \|g-f_k\| + \|g\|$ donc les suites (P_k) et (Q_k) sont bornées dans $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Quitte à prendre une sous-suite, on se ramène au cas $P_k\to P\in\mathbb{R}_m[X]$ et $Q_k\to Q\in\mathbb{R}_n[X]$ (quand $k\to\infty$) avec de plus $\|Q\| = 1$.

Si Q n'a pas de racine dans $[0,1]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|Q(x)| \ge \alpha$ pour tout $x\in[0,1]$, donc $|Q_k(x)| \ge \frac{1}{2}\alpha$ pour tout $x\in[0,1]$ et tout k assez grand. On en déduit que la suite (P_k/Q_k) converge uniformément vers P/Q sur $[0,1]$ et que $r_0 = P/Q$ convient.

Si Q admet dans $[0,1]$ des racines $a_1,\dots,a_p$ de multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, on note $Q^0 = \prod_i (X-a_i)^{\alpha_i}$ et $Q^1 = Q/Q^0$. Soit $M = \max\{\|g-f_k\|,\ k\in|||\}$. Pour tous $x\in[0,1]$ et $k\in|||$ on a $|g(x)Q_k(x) - P_k(x)| \le M|Q_k(x)|$ donc à la limite, $|g(x)Q(x)-P(x)| \le M|Q(x)|$ pour tout $x\in[0,1]$. Ceci implique que Q^0 divise P, on note $P^1 = P/Q^0$. Alors pour tout $x\in[0,1]$ et $k\in|||$ on a $|g(x)Q^0(x) - P_k(x)Q^0(x)/Q_k(x)| \le \|g-f_k\||Q^0(x)|$, d'où $|g(x)Q^0(x) - P^1(x)Q^0(x)/Q^1(x)| \le d|Q^0(x)|$ et finalement $r_0 = P^1/Q^1$ convient.

Correction de l'exercice 4180 ▲

(a)

(b) Soit P_n le polynôme de Lagrange défini par $P_n(x_i) = f_n(x_i)$ et $\deg P_n < p$. Les coordonnées de P_n dans la base de Lagrange forment des suites convergentes donc la suite (P_n) est uniformément convergente sur $[a,b]$. Quant à la suite $(P_n^{(p)})$, c'est la suite nulle. Donc on peut remplacer f_n par $f_n - P_n$ dans l'énoncé, ce qui revient à supposer que $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i. Soit f la fonction définie par $f(x_i) = 0$ et $f^{(p)} = g$: f existe (prendre une primitive p-ème arbitraire de g et lui soustraire un polynôme de Lagrange approprié) et est unique (la différence entre deux solutions est polynomiale de degré $< p$ et s'annule en p points distincts). On remplace maintenant f_n par $f_n - f$, et on est rammené à montrer que : si $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i et si $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers la fonction nulle, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Ceci résulte du lemme suivant :

Il existe une fonction φ_p bornée sur $[a,b]^2$, indépendante de n, telle que $f_n(x) = \int_{t=a}^{b} \varphi_p(x,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor-intégrale pour f_n entre x et y :

$$f_n(y) = f_n(x) + (y-x)f_n'(x) + \dots + \frac{(y-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) + \int_{t=x}^{y} \frac{(y-t)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p)}(t)\,dt.$$

L'intégrale peut être étendue à l'intervalle $[a,b]$ sous la forme $\int_{t=a}^{b} u_p(x,y,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$ en posant

$$u_p(x,y,t) = \begin{cases} (y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } x<t<y\,; \\ -(y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } y<t<x\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant successivement $y = x_1, \dots, y = x_n$, on obtient un système linéaire en $f_n(x), \dots, f_n^{(p-1)}(x)$ de la forme :

$$\begin{cases} f_n(x) + (x_1-x)f_n'(x) + \dots + \frac{(x_1-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) & = & -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_1,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \\ \vdots & & \\ f_n(x) + (x_p-x)f_n'(x) + \dots + \frac{(x_p-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) & = & -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_p,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \end{cases}$$

La matrice M de ce système est la matrice de Vandermonde de $x_1-x,\dots,x_p-x$, inversible. On en déduit, avec les formules de Cramer, une expression de $f_n(x)$ à l'aide des intégrales du second membre, de la forme voulue. Le facteur φ_p est borné car le dénominateur est $\det(M) = \prod_{i<j}(x_j-x_i)$, indépendant de x.

Correction de l'exercice 4181 ▲

Développer en séries sous l'intégrale, multiplier, permuter avec l'intégrale puis simplifier.

Correction de l'exercice 4182 ▲

Soit $x>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $n^2e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc que la série de terme général $e^{-x\sqrt{n}}$ converge. Ainsi, f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x\in]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{k}}$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $e^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \quad (*).$$

Soit $x\in]0,+\infty[$. En posant $u = x\sqrt{t}$ et donc $t = \frac{u^2}{x^2}$ puis $dt = \frac{2u}{x^2}\,du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = \frac{2}{x^2}\times\Gamma(2) = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement $(*)$ s'écrit alors

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{2}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant 1+\frac{2}{x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{2}{x^2}=+\infty$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to 0,\ x>0}{\sim} \frac{2}{x^2}.}$$

Correction de l'exercice 4183 ▲

Soit $x\in]-1,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|x^{n^2}\right| = |x|^{n^2}\leqslant |x|^n$. Puisque la série numérique de terme général $|x|^n$ converge, on en déduit que la série de terme général x^{n^2} est absolument convergente et en particulier convergente. Donc, f est bien définie sur $]-1,1[$.
Soit $x\in]0,1[$. La fonction $t\mapsto x^{t^2}=e^{t^2\ln x}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} x^{t^2}\,dt\leqslant x^{k^2}\leqslant\int_{k-1}^k x^{t^2}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x\in]0,1[,\ \int_1^{+\infty} x^{t^2}\,dt\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt\quad(*).$$

Soit $x\in]0,1[$. En posant $u=t\sqrt{-\ln x}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln x}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t\sqrt{-\ln x})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

L'encadrement $(*)$ s'écrit alors

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}-\int_0^1 x^{t^2}\,dt\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}=+\infty$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}\underset{x\to 1,\ x<1}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.}$$

Correction de l'exercice 4184 ▲

(a) Avec $f(x)=x^4$, d'où $y=x^4-x$, on obtient $\frac{x^2y}{x+y}=x^2-\frac{1}{x}$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}}\frac{x^2y}{x+y}$$

n'existe pas.

(b) $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z\neq 0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}=\frac{2}{3}$ et $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0,y=z=0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}=0$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$$

n'existe pas.

(c) Sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la fonction f définie par $f(x)=\frac{|x|}{x^2}=\frac{1}{|x|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$$

n'existe pas en tant que limite finie.

(d) D'une part, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0,y=0}}\frac{x^4y}{x^2-y^2}=0$. D'autre part, vue l'indication, avec $x^2-y^2=h(y)$, un calcul immédiat donne

$$\frac{x^4y}{x^2-y^2}=\frac{y^5+2y^3h(y)+(h(y))^2y}{h(y)}=\frac{y^5}{h(y)}+2y^3+h(y)y.$$

Avec $h(y)=y^6$, l'expression $\frac{x^4y}{x^2-y^2}$ tend donc vers $+\infty$ quand y tend vers zero d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}}\frac{x^4y}{x^2-y^2}$$

n'existe pas.

(e) Le long de la demi-droite $x>0, y=0, z=0$, la limite existe et vaut zéro et le long de la demi-droite $x=y=z>0$ la limite existe et vaut $1/3$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$$

n'existe pas.

Correction de l'exercice 4185 ▲

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} = \frac{\lim_{y\to 0} y^2}{\lim_{y\to 0} y^2+(1-y/x)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

De même $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ d'où (3). D'autre part, $f(x,x) = \frac{x^4}{x^4} = 1$ d'où $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne peut pas exister.

Correction de l'exercice 4187 ▲

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0), y=0} \frac{x}{x^2+y^2}$ n'existe pas d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

(b) $\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = r(\cos\varphi + 2\sin\varphi)^3$ d'où $\left|\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}\right| \leq 27r$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = 0$$

car $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r = 0$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \neq 0$ et $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log(x+e^y) = \log 2$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log 2.$$

(d) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2}} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 1$ tandis que $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 0$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$$

n'existe pas.

Correction de l'exercice 4188 ▲

(a) Supposons $x+y+z\neq 0$. Alors

$$\frac{xyz}{x+y+z} = \frac{xy(h(x,y)-x-y)}{h(x,y)} = xy - \frac{xy(x+y)}{h(x,y)}$$

d'où, avec

$$h(x,y) = (x+y)^4,$$

nous obtenons

$$\frac{xyz}{x+y+z} = xy - \frac{xy}{(x+y)^3}.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z=(x+y)^4\\ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$

n'existe pas, au moins non pas en tant que limite finie. D'autre part,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+z\neq 0, y=0}} \frac{xyz}{x+y+z} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$

ne peut pas exister.

(b) La limite

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq\pm y, z=0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{1}{x-y}$$

n'existe pas car $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x-x^2}} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas. Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$

ne peut pas exister.

Correction de l'exercice 4193 ▲

Des calculs élémentaires donnent

(a) $u_1 = (\frac{1}{2}, \cos 1),\ u_2 = (\frac{16}{15}, \cos\frac{1}{2}),\ \dots, u_{10} = (\frac{400}{143}, \cos\frac{1}{10}),\ \dots$

(b) $u_1 = (\frac{1}{2}\arctan 1, \sin(\frac{\pi}{4e})),\ u_2 = (\frac{4}{5}\arctan 2, \sin(\frac{\pi}{4e^{1/2}})),$
$u_3 = (\frac{9}{10}\arctan 3, \sin(\frac{\pi}{4e^{1/3}})),\ \dots, u_{10} = (\frac{100}{101}\arctan(10), \sin(\frac{\pi}{4e^{1/10}})),\ \dots$

(c) $u_1 = (\sinh 1, 0),\ u_2 = (\sinh 2, \frac{\ln 2}{2}),\ u_3 = (\sinh 3, \frac{\ln 3}{3}),\ \dots,$
$u_{10} = (\sinh 10, \frac{\ln 10}{10}),\ \dots$

(d) $u_1 = a^n(\cos(\alpha), \sin(\alpha)),\ u_2 = a^2(\cos(2\alpha), \sin(2\alpha)),$
$u_3 = a^3(\cos(3\alpha), \sin(3\alpha)),\ \dots, u_{10} = a^{10}(\cos(10\alpha), \sin(10\alpha)),\ \dots$

Les limites pouvu qu'elles existent se calculent ainsi :

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2+4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = 4,\ \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = \cos(0) = 1$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2}{n^2+4n+3}, \cos\frac{1}{n}\right) = (4,0).$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \arctan n = \pi/2,$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \arctan n}{n^2+1} = \pi/2$ mais $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n}))$ n'existe pas d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

n'existe pas.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ tandis que $\lim_{n\to\infty} \sinh n$ n'existe pas en tant que limite finie car

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$$

d'où

$$\lim u_n = \lim \left(\sinh n, \frac{\ln n}{n}\right)$$

n'existe pas.

(d) $\lim_{n\to\infty}(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$ n'existe pas tandis que pour que $\lim_{n\to\infty} a^n$ existe il faut et il suffit que $a \leq 1$ et, s'il en est ainsi, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ si $a < 1$ et $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$ si $a = 1$. Par conséquent : Pour que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a^n(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$$

existe il faut et il suffit que $a < 1$, et la limite vaut alors zéro.

Correction de l'exercice 4195 ▲

On note f la fonction considérée.

(a) Pour $x \neq 0$, $f(x, -x+x^3) = \frac{x(-x+x^3)}{x-x+x^3} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0, $-x+x^3$ tend vers 0 puis $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\ y=-x+x^3}} f(x,y) = -\infty$. f n'a de limite réelle en $(0,0)$.

(b) Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0$ puis $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$. Mais aussi, pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x\times x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ puis $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \frac{1}{2}$. Donc si f a une limite réelle, cette limite doit être égale à 0 et à $\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(c) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2-2|xy|+y^2=(|x|-|y|)^2\geqslant 0$ et donc $|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Par suite, pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{4}(x^2+y^2)=0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin y}{y}=1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)=1$. Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$.

(e) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x^3+y^3|=|x+y|(x^2+xy+y^2)\leqslant\frac{3}{2}|x+y|(x^2+y^2)$ et donc pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{3}{2}|x+y|.$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3}{2}|x+y|=0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

(f) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x^4+y^4|=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\leqslant(x^2+y^2)^2+2\times\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2$ et donc pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)|=\frac{|x^4+y^4|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{3}{2}(x^2+y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3}{2}(x^2+y^2)=0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

Correction de l'exercice 4196 ▲

(a) f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Pour $x\neq 0$, $f(x,0)=0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.
Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=\frac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2}\neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(b) f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{|xy|}{x^2+y^2}\times|xy|\leqslant\frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(c) f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Pour $y\neq 0$, $f(0,y)=\frac{y^3}{y^4}=\frac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(d) f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=\frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}}=\frac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(e) f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,-x),\ x\in\mathbb{R}\}$.
Pour $x\neq 0$, $f(x,-x+x^3)=\frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(f) f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$.
$\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim}\frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|}=\frac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(g) f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé du cône de révolution d'équation $x^2-y^2+z^2=0$.
$f(x,0,0)=\frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

(h) $f(2+h,-2+k,l)=\frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k}=g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0\neq\frac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Correction de l'exercice 4203 ▲

Déterminons tout d'abord $F(x,y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. • Pour $y\in\mathbb{R}$, $F(x,y)=\text{Max}\left\{f_{0,y}(-1),f_{0,y}(1)\right\}=\text{Max}\{y,-y\}=|y|$. • Si $x\neq 0$, $F(x,y)=\text{Max}\left\{f_{x,y}(-1),f_{x,y}\left(-\frac{y}{2x}\right),f_{x,y}(1)\right\}=\text{Max}\left\{x+y,x-y,-\frac{y^2}{4x}\right\}=\text{Max}\left\{x+|y|,-\frac{y^2}{4x}\right\}$. Plus précisément, si $x>0$, on a $x+|y|>0$ et $-\frac{y^2}{4x}\leqslant 0$. Donc $F(x,y)=x+|y|$ ce qui reste vrai quand $x=0$. Si $x<0$, $x+|y|-\left(-\frac{y^2}{4x}\right)=\frac{4x^2+4x|y|+y^2}{4x}=\frac{(2x+|y|)^2}{4x}<0$ et donc $F(x,y)=-\frac{y^2}{4x}$.

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F(x,y)=\left\{\begin{array}{l}x+|y|\text{ si }x\geqslant 0\\ -\frac{y^2}{4x}\text{ si }x<0\end{array}\right.}.$$

En vertu de théorèmes généraux, F est continue sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<0\}$. Soit $y_0\neq 0$. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x<0,\ y=y_0}} F(x,y)=+\infty\neq |y_0|=F(0,y_0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,y_0)$. Enfin, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<0,\ y=\sqrt{-x}}} F(x,y)=\frac{1}{4}\neq 0=F(0,0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,0)$.

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\} \text{ et est discontinue en tout } (0,y),\ y\in\mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4204 ▲

• Pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|=\frac{\|x\|}{1+\|x\|}<\frac{\|x\|+1}{\|x\|+1}=1$. Donc f est bien une application de E dans B.

• Si $y=0$, pour $x\in E$, $f(x)=y\Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x=0\Leftrightarrow x=0$.

Soit alors $y\in B\setminus\{0\}$. Pour $x\in E$,

$$f(x)=y\Rightarrow x=(1+\|x\|)y\Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{K}/\ x=\lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de y est nécessairement de la forme λy, $\lambda\in\mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda y)=\frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}y$ et donc

$$\begin{aligned}
f(\lambda y)=y &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}=1\Leftrightarrow \lambda=1+|\lambda|\|y\|\\
&\Leftrightarrow (\lambda\geqslant 0 \text{ et } (1-\|y\|)\lambda=1) \text{ ou } (\lambda<0 \text{ et } (1+\|y\|)\lambda=1)\\
&\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{1-\|y\|}\ (\text{car } \|y\|<1).
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, y admet un antécédent par f et un seul à savoir $x=\frac{1}{1-\|y\|}y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x\in B,\ f^{-1}(x)=\tfrac{1}{1-\|x\|}x.$$

• On sait que l'application $x\mapsto\|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x\mapsto\frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x\mapsto\frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur B pour les mêmes raisons. Donc les applications f et f^{-1} sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et B respectivement et on a montré que

$$\boxed{\text{l'application } f:\ \begin{array}{ccc} E & \to & B\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|}\end{array} \text{ est un homéomorphisme.}}$$

Correction de l'exercice 4205 ▲

1ère solution. Pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}=\frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et pour $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et $h\in\mathbb{R}^n$

$$df_x(h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i=\frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^n x_ih_i=\frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

2 ème solution. Soit $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Pour $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2=\frac{(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(\|x+h\|_2+\|x\|_2)}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x\mapsto\|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\frac{1}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{\sim}\frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2-\|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)|\leqslant\|x\|_2\|h\|_2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a $x|h\underset{h\to0}{=}O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h\to 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}$.

Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}\left(\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)\right) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1 - L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u) = \|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u) = -\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Correction de l'exercice 4208 ▲

Puisque $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|$ reste borné,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

d'où f est continue en $(0,0)$. De même,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En plus, en dehors de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{y} + xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0,\ \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 4209 ▲

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = yf'(xy)$$
$$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xf'(xy)$$

Correction de l'exercice 4211 ▲

Il est évident que, en tout point tel que $|x| < |y|$ ou $|x| > |y|$, la fonction est continue et les dérivées partielles existent.

Soit $x \neq 0$. Alors f n'est ni continue en (x,x) ni en $(x,-x)$. Car

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(u,v)\to(x,x)\\|u|>|v|}} f(u,v) &= \lim_{u\to x} u = x \neq 0,\\
\lim_{(u,u)\to(x,x)} f(u,u) &= 0,\\
\lim_{\substack{(u,v)\to(x,-x)\\|u|>|v|}} f(u,v) &= \lim_{u\to x} u = x \neq 0,\\
\lim_{(u,-u)\to(x,-x)} f(u,u) &= 0.
\end{aligned}$$

Par contre, f est continue en $(0,0)$. Car

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = 0$$

puisque

$$\begin{array}{lll}
f(u,v) = u & \text{si} & |u| > |v|,\\
f(u,v) = v & \text{si} & |u| < |v|,\\
f(u,v) = 0 & \text{si} & |u| = |v|,
\end{array}$$

et puisque alors $\lim_{u\to 0} u = 0$ et $\lim_{v\to 0} v = 0$.
Soit (x,y) un point où $|x| = |y|$. Il reste à étudier les dérivées partielles en un tel point (x,y). Soit $x \neq 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(x+t,y) = \begin{cases} x+t, & |x+t| > |y| \\ y, & |x+t| < |y| \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(x,y+t) = \begin{cases} x, & |x| > |y+t|, \\ y+t, & |x| < |y+t|, \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existe pas. Enfin soit $x = 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(t,0) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(0,t) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe.

Correction de l'exercice 4231 ▲

(a) Le plan tangent à la surface d'équation $z^2 = 19 - x^2 - y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$2z_0(z - z_0) = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$$

d'où, au point $(1,3,3)$, cette équation s'écrit

$$6(z-3) = -2(x-1) - 6(y-3)$$

ou

$$x + 3y + 3z = 19$$

(b) Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$. Les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \pi y \cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 4xy\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \pi x \cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 2x^2\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1/2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1/2) = 2.$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

d'où, au point $(1,1/2,1)$, cette équation s'écrit

$$z - 1 = 2(x-1) + 2(y - 1/2)$$

ou

$$2x + 2y - z = 2.$$

Correction de l'exercice 4232 ▲

(a) L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire !

(b) La confusion est exactement celle à éviter suivant les indications données.

(c) D'après (17), le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y) = x^4 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (2,3,7)$ est donné par l'équation

$$z - 7 = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3)$$

c.a.d.

$$z - 7 = 32(x-2) - 6(y-3).$$

Correction de l'exercice 4233 ▲

Suivant l'indication, le plan tangent à la surface d'équation $z = 4x^2 + y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ &= 8x_0 x + 2y_0 y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0 x + 2y_0 y - z_0 \end{aligned}$$

d'où par

$$z - 8x_0 x - 2y_0 y = z_0. \tag{33}$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$ il faut et il suffit que $(1,2) = (-8x_0, -2y_0)$ d'où que $x_0 = -1/8$ et $y_0 = -1$. Par conséquent, le point cherché sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ est le point $(-1/8, -1, 17/16)$. De même, pour que le plan (33) soit parallèle au plan d'équation $3x + 5y - 2z = 3$ il faut et il suffit que $(3/2, 5/2) = (8x_0, 2y_0)$ d'où que $x_0 = 3/16$ et $y_0 = 5/4$, et le point cherché sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ est alors le point $(3/16, 5/4, 9/64 + 25/16)$ =$(3/16, 5/4, 109/64)$.

Correction de l'exercice 4234 ▲

(a) Le vecteur normal du cône C au point (x_0, y_0, z_0) de C est le vecteur $(x_0, y_0, -z_0)$ et le plan tangent au cône C en ce point est donné par l'équation

$$x_0 x + y_0 y - z_0 z = 0$$

car l'origine appartient à ce plan.

(b) L'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée des points $x(1, a, \pm\sqrt{1+a^2})$ où $x \in \mathbb{R}$, c.a.d. des deux droites

$$\mathscr{D}_1 = \{x(1, a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathscr{D}_2 = \{x(1, a, -\sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}\}.$$

L'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est donc constituée des deux demi-droites

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1^+ &= \{x(1, a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \\ \mathscr{D}_2^+ &= \{x(-1, -a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

(c) Le vecteur normal en un point quelconque $x(1, a, \sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_1$ respectivement $x(1, a, -\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $x(1, a, -\sqrt{1+a^2})$ respectivement $x(1, a, \sqrt{1+a^2})$ d'où la direction et donc le plan tangent au cône C sont le même en tout point de $\mathscr{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ respectivement $\mathscr{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Correction de l'exercice 4235 ▲

(a) La forme (18) de l'équation du plan tangent au graphe $z = x^2 - 2y^3$ de la fonction f au point (x_0, y_0, z_0) nous donne l'équation

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) - 6y_0^2(y - y_0) = 2x_0 x - 6y_0^2 y - 2x_0^2 + 6y_0^3$$

(b) Au point $(2,1,2)$, ce plan tangent est ainsi donné par l'équation

$$4x - 6y - z = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) distinct de (x_0, y_0, z_0) il faut et il suffit que $(4, 6, -1) = (2x_1, 6y_1^2, -1)$ et $y_1 \neq 1$, c.a.d. que $(x_1, y_1, z_1) = (2, -1, 6)$.

Correction de l'exercice 4236 ▲

(a) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\varphi\sin^2\varphi$ existe et vaut zéro puisque $\cos\varphi\sin^2\varphi$ est borné. Par conséquent f est continue à l'origine et donc partout. Il est évident que la fonction f est différentiable en chaque point distinct de l'origine. Soit $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ non nul. Alors

$$D_vf(0,0) = \frac{d}{dt}\left(t\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)\Big|_{t=0} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

existe d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; puisqu'il existe une dérivée directionnelle non nulle, la fonction f ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

(b) L'association $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ v\mapsto D_vf(0,0)$ n'est évidemment pas linéaire et les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v,D_vf(0,0))\in\mathbb{R}^3$ ne forment pas un plan.

(c) Dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2)-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = 2\sin\varphi\cos^3\varphi$$

d'où, en coordonnées polaires,

$$D_vf(x,y) = D_vf(r\cos\varphi,r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi)+2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to0}D_vf(r\cos\varphi,r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi)+2b\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

Par conséquent, $D_vf(x,y)$ n'est pas continu en (x,y) sauf peut-être si $a=0$. Par exemple, avec $\sin\varphi=1$, on trouve

$$\lim_{r\to0}D_vf(0,r)=a$$

et $a\neq\frac{ab^2}{a^2+b^2}$ sauf si $a=0$. Si $a=0$, la dérivée directionnelle D_v est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to0}D_vf(r\cos\varphi,r\sin\varphi) = 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

ce qui n'est pas nul si $\sin\varphi\cos\varphi$ ne l'est pas. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est continue en $(0,0)$ non plus.

Correction de l'exercice 4237 ▲

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x\cos y\exp[-\sin x\cos y]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x\sin y\exp[-\sin x\cos y]$$

etc. d'où, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$,

$$f(x,y) = f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\ldots = 1-x+\ldots$$

Avec $x=0,0184$ on trouve, pour $\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))]$, la valeur approchée $1-0,0184=0,9816$.
N.B. On peut faire mieux si nécessaire : Avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\sin x\cos y+\cos^2 x\cos^2 y)\exp[-\sin x\cos y]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (\cos x\sin y+\cos x\cos y\sin x\sin y)\exp[-\sin x\cos y]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\sin x\cos y+\sin^2 x\sin^2 y)\exp[-\sin x\cos y]$$

on trouve

$$f(x,y) = f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\ldots = 1-x++\tfrac{1}{2}x^2+\ldots$$

etc.
De même,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2(1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{2\exp(y)}{1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2}$$

etc. d'où, avec $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{4}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -2$,

$$h(x,y) = h(0,0) + \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y + \ldots = \tfrac{1}{4}x - 2y + \ldots.$$

Avec $x = 0,03$ et $y = 0,01$ on trouve, pour $\arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)]$, la valeur approchée $0,0075 - 0,02 = -0,00125$.

Correction de l'exercice 4240 ▲

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ et donc f est définie sur $\mathbb{R}^2$. • f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Ainsi, f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. • **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{x\times 0\times(x^2-0^2)}{x\times(x^2+0^2)} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. • Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$.

Finalement, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y,x) = -f(x,y)$. Par suite, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. En effet, pour (x_0,y_0) donné dans $\mathbb{R}^2$

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \frac{-f(y,x_0)+f(y_0,x_0)}{y-y_0} = -\frac{f(y,x_0)-f(y_0,x_0)}{y-y_0} \underset{y\to y_0}{\to} -\frac{\partial f}{\partial x}(y_0,x_0).$$

Donc, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y(x^4+4x^2y^2-y^4)|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. f est donc au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. • Pour $x \neq 0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{x^4}{x^4} = 1$ et donc $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -\frac{y^4}{y^4} = -1$ et donc $\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et donc f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ exactement sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 4241 ▲

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
• **Continuité en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

• **Dérivées partielles d'ordre** 1 **sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$. Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f \text{ est au moins de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de **l'exercice 4242 ▲**

(a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6xy-15=0 \\ 3x^2-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Réciproquement, $r = 6x+6y$, $t=0$ et $s=6x$ puis $rt-s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt-s^2)\left(2,\frac{1}{4}\right) = (rt-s^2)\left(-2,-\frac{1}{4}\right) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ou $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$.

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$$

(b) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-y)+4x^3=0 \\ 4(x-y)+4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=0 \\ -4(x-y)+4x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^3-2x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{(0,0), \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$r(x,y)t(x,y) - s^2(x,y) = (-4+12x^2)(-4+12y^2) - (4)^2 = -48x^2-48y^2+144x^2y^2 = 48(3x^2y^2-x^2-y^2)$$

• $(rt-s^2)\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 48(12-2-2) > 0$. Donc f admet un extremum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Plus précisément, puisque $r\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 2\times 12-4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) &= -2(x-y)^2+x^4+y^4-8 = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy+8 \\ &\geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2-2(x^2+y^2)+8 = (x^4-4x^2+4)+(y^4-4y^2+4) = (x^2-2)^2+(y^2-2)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

et $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ est un minimum global.

• Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à 8.

• $f(0,0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus \{0\}$, $f(x,0) = x^4-2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

$$\boxed{f \text{ admet un minimum global égal à 8, atteint en } \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 4243 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A+H \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A+H)^{-1}(-HA^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}.\end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\|^2$.
Maintenant, la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t(\text{com}(M))$, valable pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0} \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|} \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| = 0.$$

Comme l'application $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A.

$$\boxed{\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.}$$

Correction de l'exercice 4244 ▲

Pour tout complexe z tel que $|z| \leqslant 1$,

$$|\sin(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|) \leqslant \text{sh}\,1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z = i$ car $|\sin(i)| = \left|\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i}\right| = \frac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1)$.

$$\boxed{\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\} = \text{sh}(1).}$$

Correction de l'exercice 4245 ▲

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\| = \text{Max}\{\|h\|_2, \|k\|_2\}$.
• Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h)) = (a+h).(b+k) = a.b + a.h + b.k + h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) = (a.h + b.k) + h.k$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k) \mapsto a.h + b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k) \neq (0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = |h.k| \leqslant \|h\|_2 \|k\|_2 \leqslant \|(h,k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h,k)\|} |f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| \leqslant \|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h,k)\|} |f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = 0.$$

Puisque l'application $(h,k) \mapsto a.h + b.k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a,b) et que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k) = a.h + b.k$.
La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|} \|(a+h) \wedge (b+k) - a \wedge b - a \wedge h - b \wedge k\|_2 = \frac{\|h \wedge k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \frac{\|h\|_2 \|k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \|(h,k)\|.$$

Puisque l'application $(h,k) \mapsto a \wedge h + b \wedge k$ est linéaire, on en déduit que g est différentiable en (a,b) et que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h,k) = a \wedge h + b \wedge k$.

Correction de l'exercice 4246 ▲

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(xy) + x^2y\exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y\exp(xy)$$

(b) $D_f = \{(x,y); x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$$

(c) $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x\cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin y\cos y$$

(d) $D_f = \{(x,y,z); z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$$

Correction de l'exercice 4247 ▲

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y\exp x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + \exp x$.

(b) $D_v f(0,0) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \sin\theta$. Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{5}{4}\pi$.
Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x,y)$ en une courbe. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (même plan). Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (sens du paramétrage).

Correction de l'exercice 4248 ▲

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^x = e^{x\log(x^2+y^2)} = e^{2r\cos\varphi\log r}$. Puisque $\cos\varphi$ est borné, $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r = 0$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = e^{\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r} = e^0 = 1,$$

car la fonction exponentielle est continue.

(b) Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$

(c) Pour que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(x^2)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{2x\log x}-1}{x}$$

existe. Si $x>0$,

$$\frac{e^{2x\log x}-1}{x}=2\log x+\varepsilon(x)$$

où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\varepsilon(x)=0$. Par conséquent, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{f(0,y)-1}{y}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{(y^2)^0-1}{y}=0$$

existe.

Correction de l'exercice 4249 ▲

(a) Puisque $f(x,y)=\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=r(\cos^2\varphi\sin\varphi+3\sin^3\varphi)$, il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}f(x,y)=0$$

car $\cos^2\varphi\sin\varphi+3\sin^3\varphi$ reste borné. Par conséquent la fonction f est continue en $(0,0)$.

(b) Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{0}{x^2}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{f(0,y)}{y}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{3y^3}{y^2}=3$$

existent.

(c) Puisque $f(x,x)=\frac{4x^3}{2x^2}=2x$, la dérivée directionnelle $D_vf(0,0)$ suivant le vecteur $v=(1,1)$ est non nulle. Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2}=-4\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

(e) D'après (20), cette équation s'écrit

$$z-2=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=1-x+3(y-1)$$

d'où $z=3y-x$.

(f) La fonction $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ s'écrit $F(x,y)=\left(\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2},\frac{y^2x+3x^3}{x^2+y^2}\right)$ et sa matrice jacobienne

$$\mathrm{J}_F(1,1)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

au point $(1,1)$ est inversible. Par conséquent, la fonction F admet une réciproque locale au voisinage du point $(1,1)$. Au point $(2,2)$,

$$\mathrm{J}_F(2,2)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

d'où la fonction F admet également une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$.

Correction de l'exercice 4250 ▲

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}$$

d'où (4).

Correction de l'exercice 4251 ▲

(a) $g(f(x,y)) = xy^2\sin^2(xy)\cos x\exp(y^2)$

(b)

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} = y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy) - x\sin x\sin(xy) + \cos x\sin(xy))$$
$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} = 2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy) + (1+y^2)\sin(xy))$$

(c) Calculons d'abord

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= y\sin(xy)\exp(y^2) + xy^2\cos(xy)\exp(y^2)\\ &= y\exp(y^2)(\sin(xy) + xy\cos(xy))\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= x\sin(xy)\exp(y^2) + x^2y\cos(xy)\exp(y^2) + 2xy^2\sin(xy)\exp(y^2)\\ &= x\exp(y^2)(\sin(xy) + xy\cos(xy) + 2y^2\sin(xy))\\ &= x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy) + xy\cos(xy)).\end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne J_f de f s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{J_f} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ -y\sin x & \cos x\\ y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy)) & x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy))\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne J_g de g est :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] = [vw, uw, uv]\\ &= \left[xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2), xy\sin^2(xy)\exp(y^2), y\sin(xy)\cos x\right]\end{aligned}$$

(d) La matrice jacobienne $\mathrm{J}_{g\circ f}$ de la fonction composée $g\circ f$ s'écrit comme produit matricielle

$$\mathrm{J}_{g\circ f} = \mathrm{J}_g \circ \mathrm{J}_f = \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right]\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} &= (xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2))y\cos(xy)\\ &\quad - (xy\sin^2(xy)\exp(y^2))y\sin x\\ &\quad + (y\sin(xy)\cos x)y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy))\\ &= xy^3\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2)) - xy^2\sin x\sin^2(xy)\exp(y^2)\\ &\quad + y^2\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) + xy^3\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2)\\ &= y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy) - x\sin x\sin(xy) + \cos x\sin(xy))\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} &= (xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2))x\cos(xy)\\ &\quad + (xy\sin^2(xy)\exp(y^2))\cos x\\ &\quad + (y\sin(xy)\cos x)x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy))\\ &= x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + xy\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2)\\ &\quad + xy(1+2y^2)\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) + x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2)\\ &= 2x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + 2xy(1+y^2)\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2)\\ &= 2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy) + (1+y^2)\sin(xy)).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4253 ▲

$\lim = 3.$

Correction de l'exercice 4254 ▲

(a)

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pm 1}{1+x^2}$, $+$ si $y > x$, $-$ si $y < x$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pm 1}{1+y^2}$, $-$ si $y > x$, $+$ si $y < x$.

(c) Pour $y \geq x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} + g(x,y)$, pour $y \leq x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - g(x,y)$.

Correction de l'exercice 4257 ▲

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$.

Correction de l'exercice 4259 ▲

(a)

(b) $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

Correction de l'exercice 4261 ▲

$\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$.

Correction de l'exercice 4262 ▲

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -yf'(\pi/2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = xf'(0)$.

Correction de l'exercice 4263 ▲

(a) f est homogène de degré 2, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré 1, donc ces trois fonctions tendent vers 0 en $(0,0)$. Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Correction de l'exercice 4267 ▲

$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}$.

Correction de l'exercice 4268 ▲

(a) pas de solution.

(b) $f(x,y) = \frac{y-1}{x+y+1} +$ cste.

(c) $f(x,y) = \frac{xy}{x+y} +$ cste.

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} +$ cste.

Correction de l'exercice 4269 ▲

$f(y) = \lambda e^{-y}$, $F(x,y) = \lambda\left(\frac{x^2}{2} - (y+1)e^{-y}\right)$.

Correction de l'exercice 4270 ▲

$f(x,y) = g(x^2 + y^2)$.

Correction de l'exercice 4271 ▲

$f(y) = \frac{y}{k}$, $g(z) = kz + \ell$, $F(x,y) = \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)z + \frac{\ell y^2}{2k} + C$.

Correction de l'exercice 4272 ▲

(a) $f(x,y) = -\frac{\ln x}{xy} - \frac{1}{x}$.

(b) $y = \frac{\ln x}{\lambda x - 1}$.

Correction de **l'exercice 4276 ▲**

$\det(J_f) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

Correction de **l'exercice 4278 ▲**

$f(\mathbb{R}^3) = \{(u,v,w)$ tq $u+v>0,\ ue^{2w} - v > 0\}$.

Correction de **l'exercice 4280 ▲**

$y = -\frac{x}{2} + \frac{9x^2}{16} + o(x^2) \Rightarrow$ tangente de pente $-\frac{1}{2}$, au dessus.

Correction de **l'exercice 4281 ▲**

(a)

(b) $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Correction de **l'exercice 4282 ▲**

$\varphi'(1) = -\frac{1}{3}$, $\varphi''(1) = -\frac{8}{27}$.

Correction de **l'exercice 4285 ▲**

$x = 1 - \frac{\lambda+\mu}{5} + \frac{\lambda^2+\lambda\mu}{25} + o(\lambda^2+\mu^2)$.

Correction de **l'exercice 4286 ▲**

$x = \mathrm{sh}(a),\ y = \mathrm{sh}(b) \Rightarrow u = \mathrm{sh}(a+b),\ v = \mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{ch}(a+b)$. donc $f(\mathbb{R}^2)$ est inclus dans l'hyperbole d'équation $v^2 - 2uv = 1$ et on doit avoir $v \geq u$ ce qui donne la branche supérieure.

Correction de **l'exercice 4289 ▲**

(a) $f(x,y) = \int_{t=0}^{1}(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty))\,dt$.

(b)

(c)

Correction de **l'exercice 4290 ▲**

(a) i. thm des trois cordes pour $u \mapsto f(x+uh)$ sur $[-1,1]$.

ii. Soit $\overline{B}_\infty(x,r) \subset U$ et y tel que $0 < \|x-y\|_\infty \leq r$. On note $t = \|x-y\|_\infty/r$ et $h = (y-x)/t$. Alors $y = x+th$ et $\|x \pm h\| = r$ donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq t\max(|f(x+h) - f(x)|, |f(x-h) - f(x)|) \leq Mt$$

car la restriction de f aux côtés de $\overline{B}_\infty(x,r)$ est bornée (fonction convexe en dimension 1).

(b) La surface représentative de f est au dessus de ses plans tangents.

(c)

Correction de **l'exercice 4292 ▲**

(a) $df_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(M^{k-1}H + \cdots + HM^{k-1})$.

(b)

(c) les matrices $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$ sont toutes semblables à M_∞ et ont même exponentielle I.

(d) $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi+1/k \\ -4\pi^2/(2\pi+1/k) & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4297 ▲

(a) $xy/(x^2+y^2)$.

(b) f est lipschitzienne pour $\| \ \|_\infty$.

Correction de l'exercice 4298 ▲

(a) $2x^4y^2 \leq (x^4+y^2)^2$.

(b) $g_\theta(r) \sim r^2$.

(c) $f(x,x^2) = -x^4$. Donc $(0,0)$ n'est pas minimum local de f.

Correction de l'exercice 4300 ▲

(a)

(b) $\|f(x)\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ donc $x \mapsto \|f(x)-a\|^2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En ce point on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$: $(f(x)-a \mid df_x(h)) = 0$ et df_x est surjective (linéaire injective en dimension finie) donc $f(x) = a$.

Correction de l'exercice 4301 ▲

(a) Si u atteint son maximum en $(x,y) \in \Omega$ alors $d^2u(x,y)$ est négative, contradiction avec $\Delta u(x,y) > 0$.

(b) Soit $u_p(x,y) = u(x,y)+(x^2+y^2)/p$: $\Delta u_p = \Delta u + 2/p > 0$ donc u_p relève du cas précédent.
On a $\max_\Omega u + \frac{M}{p} \geq \max_\Omega u_p = \max_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u_p \geq \max_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u$ et on passe à la limite.

(c) Soit $u_1(x,y) = u(x,y)+\alpha\ln(x^2+y^2)$ où α est tel que $M_1(r_1) = M_1(r_2)$, avec $M_1(r) = \max_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$. On a $\Delta u_1 \geq 0$ d'où $M_1(r) \leq M_1(r_1) = M_1(r_2)$ c'est-à-dire :

$$M(r) \leq M(r_1)+\alpha\ln(r_1/r) = M(r_2)-\alpha\ln(r/r_2) = \frac{M(r_1)\ln(r_2/r)+M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Correction de l'exercice 4302 ▲

(a) On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $h(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$ et l'on a $0 = \Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$ d'où :

$$0 = h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

Le crochet est nul par 2π-périodicité de g donc $h''(r)+\frac{1}{r}h'(r) = 0$ soit $h'(r) = \frac{K}{r}$ et $K = 0$ par continuité de h' en 0.

(b) $\pi r^2 f(0,0)$.

Correction de l'exercice 4303 ▲

(a) $\det(J_\varphi(x,y)) = f'(x)f'(y)-g'(x)g'(y) > 0$ donc le théorème d'inversion locale s'applique, il suffit de vérifier l'injectivité de φ. Si $\varphi(x,y) = \varphi(u,v)$ alors :

$$|x-u| \leq |f(x)-f(u)| = |g(v)-g(y)| \leq |v-y|$$
$$|v-y| \leq |f(v)-f(y)| = |g(x)-g(u)| \leq |x-u|$$

d'où $|x-u| \leq |x-u|$ et il y a inégalité stricte si $v \neq y$ ce qui est absurde donc $v = y$ et de même $u = x$.

(b) On a $\varphi(x,y) = (u,v)$ si et seulement si $x = f^{-1}(u-g(y))$ et $y = f^{-1}(v-g(f^{-1}(u-g(y)))) = h(y)$. h est k^2-lipschitzienne donc le théorème du point fixe s'applique.

Correction de l'exercice 4304 ▲

Sinon il existe $a \in \mathbb{R}^2$ telle que $g : x \mapsto f(x) - (a \mid x)$ n'a pas de point critique, donc pas de minimum ni de maximum. On a aussi $|g(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ d'où $\sup(g) = +\infty$ et $\inf(g) = -\infty$. Considérons pour $r > 0$ $E_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|x\| \geq r\}$: $g(E_r)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle, et $\sup(g(E_r)) = \sup(g) = +\infty$, $\inf(g(E_r)) = \inf(g) = -\infty$, d'où $g(E_r) = \mathbb{R}$. Ainsi il existe des x de normes arbitrairement grandes tels que $g(x) = 0$ en contradiction avec la propriété $|g(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$.
Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^2$ est surabondante, la classe $\mathscr{C}^1$ suffit à conclure.

Correction de l'exercice 4305 ▲

Remarques :
– la transformation $f \mapsto g$ est appelée *transformation de Legendre*. On notera $g = f^*$ ci-dessous.
– l'hypothèse « H_f est définie positive en tout point » implique que f est convexe.

Étude d'un cas particulier : $f(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x \mid a) + \gamma$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

Alors $(x \mid y) - f(x) = -\alpha\left\|x - \frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 + \alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 - \gamma$ d'où $f^*(y) = \alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 - \gamma = \alpha^*\|y\|^2 + \beta^*(y \mid a) + \gamma^*$ avec $\alpha^* = 1/4\alpha$, $\beta^* = -\beta/2\alpha$ et $\gamma^* = \beta^2\|a\|^2/4\alpha - \gamma$. Ainsi, f^* a la même forme que f, et on vérifie immédiatement que $f^{**} = f$.

Cas général : on montre que f^* est bien définie, vérifie les mêmes hypothèses que f et que l'on a $f^{**} = f$.

1. Bonne définition de f^* : à y fixé on a $(x \mid y) - f(x) \to -\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ donc le sup existe et est un max, atteint en un point x tel que $\nabla f(x) = y$. Ce point x est unique : en effet, si $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto (h \mid \nabla f(x+th))$ est strictement croissante (définie-positivité de H_f) ce qui implique $\nabla f(x+h) \neq \nabla f(x)$. Ainsi,

$$f^*(y) = (y \mid y^*) - f(y^*) \text{ avec } \nabla f(y^*) = y.$$

2. f^* est $\mathscr{C}^2$ et H_{f^*} est définie-positive : d'après ce qui précède, la fonction ∇f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$; sa différentielle est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice H_f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc f^* est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $y, h \in \mathbb{R}^n$:

$$d(f^*)_y(h) = (\nabla f^*(y) \mid h) = (h \mid y^*) + (y \mid dy^*(h)) - (\nabla f(y^*) \mid dy^*(h)) = (h \mid y^*)$$

puisque $\nabla f(y^*) = y$. On en déduit : $\nabla f^*(y) = y^*$, puis $H_{f^*}(y) = (H_f(y^*))^{-1}$, matrice symétrique définie positive.

3. $f^*(y)/\|y\| \to +\infty$ lorsque $\|y\| \to \infty$: soit $a > 1$ et $M_a = \sup\{f(x),\ \|x\| \leq a\}$. Pour $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $x = ay/\|y\|$ on a $f^*(y) \geq (x \mid y) - f(x) \geq a\|y\| - M_a \geq (a-1)\|y\|$ si $\|y\|$ est assez grand.

4. $f^{**} = f$: car pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f^{**}(x) = (x \mid y) - f^*(y)$ où y est défini par $\nabla f^*(y) = x$, c'est-à-dire $y^* = x$ et donc $f^{**}(x) = (y^* \mid y) - f^*(y) = f(y^*) = f(x)$.

Correction de l'exercice 4306 ▲

(a) ? ? ?

(b) On a pour $a, b \in \mathbb{R}$: $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leq \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty b^2$.
Donc pour $f, h \in E$: $|T(f+h) - T(f) - (h \mid \varphi' \circ f)| \leq \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty\|h\|^2$, ce qui prouve que T est différentiable en f de différentielle $h \mapsto (h \mid \varphi' \circ f)$. On en déduit alors que T est continue en f.

Correction de l'exercice 4307 ▲

(a) Posons $\Delta = \{(x,y)/\ y \neq 0\}$. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en vertu de théorèmes généraux. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \end{array}\right. \leqslant y^2.$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| = 0$ et donc f est continue en $(x_0,0)$. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

(b) • f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. En particulier, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Δ. pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right),$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right).$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$.** Pour $x \neq x_0$, $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = 0$ et donc $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\to} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } y = 0 \\ y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{array} \right. .}$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $y \neq 0$,

$$\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } y = 0 \\ y\left|\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \end{array} \right. \leqslant |y|.$$

et donc $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} \underset{y\to 0}{\to} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } y = 0 \\ 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{array} \right. .}$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 0$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0.}$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.** Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = 1.}$$

Correction de l'exercice 4308 ▲

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} \in [-1,1]$. Plus précisément, quand x décrit $\mathbb{R}$, $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2\times 0)}$ décrit $[-1,1]$ et donc quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}$ décrit $[-1,1]$. On suppose déjà que f est de classe C^2 sur $[-1,1]$. L'application g est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{2\sin(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) \text{ puis } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{4\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) + \frac{4\sin^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right).$$

Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{2\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) - 2\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)\frac{-4\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) + \frac{4\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y) &= \frac{-8\cos(2x)\,\mathrm{ch}^2(2y) + 8\cos(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) + \frac{4\sin^2(2x)\,\mathrm{ch}^2(2y) + 4\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) \\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) + \frac{4(1-\cos^2(2x))\,\mathrm{ch}^2(2y) + 4\cos^2(2x)(\mathrm{ch}^2(2y)-1)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) \\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) + \frac{4\,\mathrm{ch}^2(2y) - 4\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) \\
&= \frac{4}{\mathrm{ch}^2(2y)}\left(-2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\Delta g=0 &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in[-1,1],\ -2tf'(t)+(1-t^2)f''(t)=0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1],((1-t^2)f')'(t)=0\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f'(t)=\lambda.\end{aligned}$$

Le choix $\lambda\neq 0$ ne fournit pas de solution sur $[-1,1]$. Donc $\lambda=0$ puis $f'=0$ puis f constante ce qui est exclu. Donc, on ne peut pas poursuivre sur $[-1,1]$. On cherche dorénavant f de classe C^2 sur $]-1,1[$ de sorte que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f'(t)=\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\,\mathrm{Argth}\,t+\mu.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4309 ▲

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda>0,\ \textstyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)=r\lambda^{r-1}f(x),$$

et pour $\lambda=1$, on obtient

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \textstyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

Correction de l'exercice 4310 ▲

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\ln(xy)\right)&=\frac{\mathrm{d}(xy)}{xy}=\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}x}{x};\\ \mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right)&=(1+\sinh(yz))\mathrm{d}(xyz)+xyz\mathrm{d}(\sinh(yz))\\ &=yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x+xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y+xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\ &\quad+xyz\cosh(yz)\mathrm{d}(yz)\\ &=yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x+xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y+xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\ &\quad+xyz^2\cosh(yz)\mathrm{d}y+xy^2z\cosh(yz)\mathrm{d}z\\ &=yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x\\ &\quad+xz(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}y\\ &\quad+xy(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)&=\left(\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)\mathrm{d}(x^2y)+\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}(x-y)\\ &=x^2\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y+2xy\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x\\ &\quad+\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x-\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\ &=\left(x^2\cos(x^2y)x-\sin(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\ &\quad+\left(2xy\cos(x^2y)+\sin(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4311 ▲

(a) La forme différentielle $x^2y^2\mathrm{d}x+x^3y\mathrm{d}y$ de degré 1 n'est pas fermée car la forme différentielle de degré 2

$$d(x^2y^2\mathrm{d}x+x^3y\mathrm{d}y)=2x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x+3x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

est non nulle. Par conséquent, une fonction $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ du type cherché ne peut pas exister.

(b) Une fonction b du type cherché doit satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$2x^2y - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

d'où $b(x,y) = \frac{2}{3}x^3y + k(y)$ où k est une fonction de la variable y. Une fonction g correspondante doit alors satisfaire aux équations différentielles partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^2y^2, \; \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2}{3}x^3y + k(y).$$

Il s'ensuit que g est de la forme $g(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^2 + K(y)$ où K est une fonction de la varriable y.

Correction de l'exercice 4312 ▲

(a) Un calcul immédiat donne $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = \mathrm{d}g$.

(b) Par conséquent, $g = u + v + c$ où la constante c est déterminée par la condition

$$3 = g(1,1) = u(1,1) + v(1,1) + c = 1 + 1 + c$$

d'où $c = 1$.

(c) Un calcul direct montre que l'application réciproque

$$k\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$$

de h est donnée par la formule

$$k(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \left(\left(\frac{u^2}{v}\right)^{1/3}, \left(\frac{v^2}{u}\right)^{1/3}\right).$$

(d) $\mathrm{d}(g \circ k) = \mathrm{d}(u \circ k) + \mathrm{d}(v \circ k) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$ car $u(k(u,v)) = u$ et $v(k(u,v)) = v$.

(e) Un calcul immédiat donne

$$J_h = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} & -\frac{u^{2/3}}{3v^{4/3}} \\ -\frac{v^{2/3}}{3u^{4/3}} & \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

d'où $J_h(x,y)J_k(h(x,y)) = I_2$.

Correction de l'exercice 4313 ▲

$$\mathrm{d}\sin(xyz) = yz\cos(xyz)\mathrm{d}x + zx\cos(xyz)\mathrm{d}y + xy\cos(xyz)\mathrm{d}z$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} -y^2z^2\sin(xyz) & z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz) & y\cos(xyz) - xy^2z\sin(xyz) \\ z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz) & -x^2z^2\sin(xyz) & x\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz) \\ y\cos(xyz) - xy^2z\sin(xyz) & y\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz) & -x^2y^2\sin(xyz) \end{bmatrix}.$$

De même

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sin^2(y/x)) &= -2yx^{-2}\sin(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}x + 2x^{-1}\sin(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}y \\ &= \sin(2y/x)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) \end{aligned}$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} 2yx^{-3}\sin(2y/x) + 2y^2x^{-4}\cos(2y/x) & -x^{-2}\sin(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) \\ -x^{-2}\sin(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) & 2x^{-2}\cos(2y/x) \end{bmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4314 ▲

(a) $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial F}{\partial r} + r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$

(b) $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{r}$

(c) $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$

(d) En prenant la somme des trois équations suivantes

$$r^2\frac{\partial^2F}{\partial r^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$r\frac{\partial F}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}$$

on trouve le résultat cherché.

Correction de l'exercice 4315 ▲

(a) Avec $\frac{\partial}{\partial u}=1/2(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})$ et $\frac{\partial}{\partial v}=1/2(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})$ nous obtenons les identités

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}=-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

d'où pour que f satisfasse à l'équation (7) il faut et il suffit que F satisfasse à l'équation (21).

(b) Supposons que F satisfasse à l'équation (21). Alors la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction disons h_1 seulement de la variable u et la fonction $\frac{\partial F}{\partial v}$ est une fonction disons h_2 seulement de la variable v. Par conséquent, $F(u,v)=g_1(u)+g_2(v)$ où $g_1'=h_1$ et $g_2'=h_2$.

(c) La solution générale de (7) s'écrit alors

$$f(x,t)=g_1(u)+g_2(v)=g_1(x+t)+g_2(t-x).$$

La fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la droite et la fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la gauche.
Enfin, pour trouver la solution unique satisfaisant aux condition initiales (8) nous constatons que les conditions initiales entraînent les identités

$$f(x,0)=g_1(x)+g_2(-x)=\sin x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=g_1'(x)-g_2'(-x)=\cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)=g_1'(x)+g_2'(-x)=-\cos x$$

d'où $g_1'=0$ et $g_2'(-x)=-\cos x$, c.a.d. $g_2(x)=\sin(-x)$. Par conséquent, la solution unique cherchée f s'écrit

$$f(x,t)=\sin(x-t).$$

Correction de l'exercice 4316 ▲

On pose $D=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ puis $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus D$.

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

• f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y)\in\Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de f en $(0,0)$. Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left\{\begin{array}{l}y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right|\text{ si }y\neq0\\ 0\text{ si }y=0\end{array}\right.\leqslant\left\{\begin{array}{l}y^2\text{ si }y\neq0\\ 0\text{ si }y=0\end{array}\right.\leqslant y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x,y) tend vers 0, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$ puis

$$f\text{ est continue sur }\mathbb{R}^2.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $x\neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \frac{0-0}{x-x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = \frac{y^2\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| \leqslant |y|$ puis que $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right| = \begin{cases} |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand (x,y) tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

$$\text{la fonction } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \begin{cases} \left|2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant 2|y| + |x|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|x| + 2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right|$ et $x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega \cup \{(0,0)\}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0) = 1$. On a montré que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\Omega \cup \{(0,0)\}$.

Correction de l'exercice 4317 ▲

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\sin(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)+4\frac{\sin^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$
$$= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)+4\frac{1-\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\cos(2x)\,\text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -2\cos(2x)\frac{2\,\text{ch}^3(2y)-4\,\text{sh}^2(2y)\,\text{ch}(2y)}{\text{ch}^4(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)\,\text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$
$$= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)}(-\text{ch}^2(2y)+2)f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)(\text{ch}^2(2y)-1)}{\text{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).$$

Donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\text{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y) = -2\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $-1\leqslant\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times)}=\cos(2x)$ décrit $[-1,1]$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=[-1,1]$. Par suite,

$$\forall(x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y)=0\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $]-1,1[$. Or $\left|\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right|=1\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\text{ch}(2y)\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\text{ch}(2y)=1\Leftrightarrow y=0$ et $x\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\forall(x,y)\ \mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y)=0\Leftrightarrow\forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0$$
$$\Leftrightarrow\forall t\in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t)=0\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}$$
$$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\,\text{Argth}\,t+\mu.$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\mu=0$.

$$\boxed{\text{L'application } t\mapsto\text{Argth}\,t \text{ convient.}}$$

Correction de l'exercice 4318 ▲

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) s'écrit $\begin{pmatrix}c(x,y)&-s(x,y)\\s(x,y)&c(x,y)\end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2+s^2=1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}-s\\c\end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial s}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\ (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x ou à y, on obtient les égalités $c\frac{\partial c}{\partial x}+s\frac{\partial s}{\partial x}=0$ et $c\frac{\partial c}{\partial y}+s\frac{\partial s}{\partial y}=0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs

$\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x,y) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0,0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et f est une rotation affine.

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Alors f est une rotation affine.

Correction de l'exercice 4319 ▲

(a) $df = (2x-y)\mathrm{d}x + (2y-x)\mathrm{d}y$ et $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned} (u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u(2u-v)+v(2v-u) = 2(u^2-uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u-\tfrac{v}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}v^2\right). \end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est positive et ce point présente donc un minimum local.

(b) $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+6 = (x+y)^2+6$ d'où le point $(0,0)$ présente un minimum local.

(c) $df = (3x^2+2x+2y^2+3y)\mathrm{d}x + (4xy-4y^3+3x+2y)\mathrm{d}y$ et

$$\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 6x+2 & 4y+3 \\ 4y+3 & -12y^2+4x+2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} (u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= (2u+3v)u+(3u+2v)v = 2(u^2+3uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u+\tfrac{3v}{2}\right)^2-\tfrac{5}{4}v^2\right). \end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

Correction de l'exercice 4320 ▲

Puisque $df = \cos x\,\mathrm{d}x + (2y-2)\mathrm{d}y$, les points critiques sont les points $((k+1/2)\pi, 1)$ $(k \in \mathbb{Z})$. En plus, $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et

$$-\sin((k+1/2)\pi) = (-1)^{k+1}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f((k+1/2)\pi,1) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Par conséquent, si k est impaire, le point $((k+1/2)\pi,1)$ présente un minimum local et, si k est paire, le point $((k+1/2)\pi,1)$ présente un point selle.

Correction de l'exercice 4321 ▲

(a) $dF = f(y)f'(x)\mathrm{d}x + f(x)f'(y)\mathrm{d}y$ et

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} f(y)f''(x) & f'(x)f'(y) \\ f'(x)f'(y) & f(x)f''(y) \end{bmatrix} \tag{34}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f(0,0) = (f'(0))^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (f'(0))^2(u,v)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2(f'(0))^2uv$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point ne peut pas présenter un extremum relatif. En effet, le point $(0,0)$ est critique mais un point selle.

(b) D'après la partie (1.) et la périodicité, les points de la forme

$$(x,y) = (k,l) \in \mathbb{R}^2,\ k,l \in \mathbb{Z}, \tag{35}$$

présentent des points selle. Également d'après la partie (1.),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f(y)f'(x) = 2\pi\sin(2\pi y)\cos(2\pi x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f(x)f'(y) = 2\pi\sin(2\pi x)\cos(2\pi y). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que le point (x,y) soit critique il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$(k,l),\ (k+\tfrac{1}{2},l),\ (k,l+\tfrac{1}{2}),\ (k+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}),\ k,l \in \mathbb{Z},$$

ou

$$(k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ k,l \in \mathbb{Z}.$$

D'après la périodicité, il suffit d'examiner les huit points

$$(0,0),\ (\tfrac{1}{2},0),\ (0,\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4})$$

et, d'après (1.), l'origine présente un point selle. D'après (34),

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_f(0,\tfrac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(0) & f'(0)f'(\frac{1}{2}) \\ f'(0)f'(\frac{1}{2}) & f(0)f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},0) &= \begin{bmatrix} f(0)f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(0) \\ f'(\frac{1}{2})f'(0) & f(\frac{1}{2})f''(0) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) \\ f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) & f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où les points $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ présentent des points selle. Il est géométriquement évident que le comportement de la fonction sin entraîne que les points $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ et $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ présentent des maxima et que les points $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ et $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ présentent des minima.

Correction de l'exercice 4322 ▲

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) - 1.$$

Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y\cos(\pi xy),\ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi(x\cos(\pi xy) + z\cos(\pi yz)),\ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi y\cos(\pi yz)$$

et, après simplification, au point $(1,\frac{1}{6},1)$, l'équation (22) du plan tangent à la surface de niveau en discussion devient

$$(x-1) + 12(y-1/6) + (z-1) = 0.$$

Ainsi, en ce point, le vecteur $(1,12,1)$ est perpendiculaire à la surface.

Correction de l'exercice 4323 ▲

(a) Puisque $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^y\cos(2x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + e^y\sin(2x)$ il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Par conséquent, il existe une fonction h de la variable x définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0,0)$ les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y\sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$; de même il existe une fonction k de la variable y définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0,0)$ les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y\sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$. En plus,

$$h'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -2,\ k'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = -\tfrac{1}{2}.$$

(b) Puisque le point $(0,0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$, en 0, les fonctions h et k prennent les valeurs $h(0) = 0$ et $k(0) = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq 0 \\ ye^x+e^y\sin(2x)=0}} y/x = h'(0) = -2.$$

Correction de l'exercice 4324 ▲

(a) Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1) = 3x^2 + 4x + 1,$$

les points stationnaires de f sont les points $(-1,0)$ et $(-1/3,0)$. En plus,

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{Hess}_f(-1/3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Par conséquent la forme hessienne au point $(-1,0)$ est définie négative et ce point présente un maximum local ; de même, la forme hessienne au point $(-1/3,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

(b) La courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geq 0$ passe par les points $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1,2)$, et $(2, 3\sqrt{2})$; elle a une tangente verticale à l'origine, le point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut $\sqrt{3}$, et c'est la pente minimale de la courbe. Ces faits se déduisent des expressions $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1}$ et $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. La courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geq 0$ s'obtient par réflexion de la courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geq 0$ par rapport à l'axe des x.

(c) Dans la boule ouverte

$$\{(x,y,z); (x+1)^2 + y^2 + x^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

le graphe $z = f(x,y)$ de la fonction f ne rencontre le plan des x et y qu'au point $(-1,0)$. Par conséquent, l'intersection $D \cap \mathscr{C}$ du disque

$$D = \{(x,y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

avec $\mathscr{C}$ ne consiste qu'au point $(-1,0)$.

(d) Voir l'indication de l'exercice précédent.

(e) Quel que soit le point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinct de $(-1,0)$, d'après (1.),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \neq (0,0).$$

L'assertion est donc une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

Correction de l'exercice 4326 ▲

(a) $(0,0)$: non extrémal
$(1,1)$: maximum local

(b) $(0,0)$: non extrémal
$\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: minimum absolu

(c) $(-2/15, -1/5)$: maximum local
$(x,0)$: max. local pour $x < -1/3$, min. local pour $x > -1/3$
$(0,y)$: max. local pour $y < -1/2$, min. local pour $y > -1/2$

(d) $(2^{-1/3}, 4^{-1/3})$: maximum absolu

(e) prendre le log. $(1,1)$: maximum absolu

(f) $(-1,-1)$: non extrémal

(g) $(1,0)$: minimum absolu
$(e^{-2},0)$: non extrémal

(h) $= MA + MB \Rightarrow$ minimum absolu sur $[A,B]$

(i) $M \in \mathrm{med}(A,B)$, $\overline{(\vec{MA}, \vec{MB})} = \pm\frac{2\pi}{3}$
$M = A, B$: minimum absolu
$M = O$

Correction de l'exercice 4327 ▲

(a)

(b) i. isobarycentre de ABC.

ii. Point de Fermat ou A,B,C.

iii. A,B,C.

Correction de l'exercice 4328 ▲

(a) $4S=\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$.

(b) max = $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4329 ▲

Existence d'un maximum par compacité. Soient x,y les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé du plan et (u,v,w) les coordonnées barycentriques de M par rapport à A,B,C (avec $u+v+w=1$). u,v,w sont des fonctions affines de x,y,z et (AB) a pour équation barycentrique $w=0$ d'où $d(M,AB)=\alpha|w|$ pour un certain réel $\alpha>0$. De même pour $d(M,AC)$ et $d(M,BC)$ et $f(M)=\alpha\beta\gamma|u||v||w|$. Lorsque M varie dans le triangle, (u,v,w) décrit tous les triplets de réels positifs de somme 1 et on cherche le maximum du produit uvw, il est atteint quand u,v,w sont égaux, c'est-à-dire au centre de gravité du triangle.

Correction de l'exercice 4331 ▲

Il existe une base orthonormale de E et un réel λ tels que $f(x)=\lambda x_1$ et $g(x)=\lambda x_1e^{-x_1^2}e^{-x_2^2-\cdots-x_n^2}$. Donc g est maximale/minimale pour $x_1=\pm1/\sqrt{2}$, $x_2=\cdots=x_n=0$.

Correction de l'exercice 4332 ▲

Le minimum demandé existe car $\varphi(M,N,P)\to+\infty$ quand l'un au moins des points M,N,P tend vers l'infini sur sa droite personnelle. Soient $D_1\cap D_2=\{A\}$, $D_2\cap D_3=\{B\}$, $D_3\cap D_1=\{C\}$ et A', B', C' les milieux de $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. Déjà on a $\varphi(B',C',A')=\frac{3}{2}a$ et $\varphi(A,N,P)\geq 2AP\geq a\sqrt{3}$ donc le minimum n'est pas atteint lorsque l'un des points M,N,P est confondu avec l'un des points A,B,C, ni non plus si l'un des points M,N,P est hors du triangle ABC. Pour N,P fixés hors de D_1, on fait varier M sur D_1 : $M=A+t\vec{AB}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et on considère $f(t)=\varphi(M,N,P)$. Alors $f'(t)=\left(\vec{AB}\mid\frac{\vec{MN}}{MN}+\frac{\vec{MP}}{MP}\right)$ donc $f(t)$ est minimal lorsque D_1 est la bissectrice extérieure des demi-droites $[MN)$ et $[MP)$.

Soit (M,N,P) un triplet réalisant le minimum de φ et α,β,γ les angles du triangle MNP en P,M et N. Les angles du triangle AMN sont $\pi/3$, $(\pi-\beta)/2$ et $(\pi-\gamma)/2$ d'où $2\pi/3=\beta+\gamma=\pi-\alpha$ et donc $\alpha=\pi/3=\beta=\gamma$. On en déduit que (MP) est paralèle à (AB), (MN) à (BC) et (NP) à (AC) puis que $(M,N,P)=(B',C',A')$.

Correction de l'exercice 4333 ▲

(a) On fixe $A_i\in D_i$ et $\vec{u}_i$ un vecteur directeur de D_i. Soit $M_i=A_i+x_i\vec{u}_i$. Alors

$$\begin{aligned}f(M_1,M_2,M_3)&=f(A_1,A_2,A_3)\\&\quad+2\Big((\vec{A_1A_2}\mid x_2\vec{u}_2-x_1\vec{u}_1)+(\vec{A_2A_3}\mid x_3\vec{u}_3-x_2\vec{u}_2)+(\vec{A_3A_1}\mid x_1\vec{u}_1-x_3\vec{u}_3)\Big)\\&\quad+\left(\|x_2\vec{u}_2-x_1\vec{u}_1\|^2+\|x_3\vec{u}_3-x_2\vec{u}_2\|^2+\|x_1\vec{u}_1-x_3\vec{u}_3\|^2\right)\\&=a+b(x_1,x_2,x_3)+c(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

b est une forme linéaire et c est une forme quadratique positive, et même définie positive car $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sont deux à deux non colinéaires. Il en résulte que $f(M_1,M_2,M_3)\to+\infty$ lorsque $|x_1|+|x_2|+|x_3|\to\infty$, donc par continuité, f admet un minimum.

Choisissons alors A_1,A_2,A_3 de sorte que $f(A_1,A_2,A_3)$ soit égal à ce minimum. On a alors $b=0$ car (A_1,A_2,A_3) est point critique de f, d'où $f(M_1,M_2,M_3)>f(A_1,A_2,A_3)$ si $(x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0)$ vu la définie-positivité de c. Ceci prouve l'unicité du triplet où f atteint son minimum.

(b) On soupçonne fortement le triplet constitué des milieux des côtés. En notant A_1,A_2,A_3 ces milieux, il suffit de vérifier que la forme linéaire b de la réponse précédente est nulle, et c'est clairement le cas après regroupement autour de x_1, x_2, x_3.

Correction de l'exercice 4334 ▲

On paramètre le chemin en coordonnéees sphériques par $t\mapsto(\theta(t),\phi(t))$.

La longueur du chemin est $\int_{t=0}^{1}\sqrt{\phi'^2(t)+\sin^2(\phi(t))\theta'^2(t)}dt\geq\left|\int_{t=0}^{1}\phi'(t)dt\right|$ avec égalité si et seulement si $\theta'=0$ et ϕ' est de signe constant. On trouve donc les méridiens.

Correction de l'exercice 4335 ▲

Soit $y \in B$ orthogonal à x. La fonction $g : \theta \mapsto f(x\cos\theta + y\sin\theta)$ admet un extrémum en 0, donc $g'(0) = 0$, soit $\nabla f(x) \perp y$. Si $x = 0$ on a donc $\nabla f(0) = 0$. Sinon, $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et en faisant un développement limité de $f(x - tx)$ on voit que $\lambda \geq 0$.

Correction de l'exercice 4336 ▲

(a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Donc si f admet un extremum local, c'est nécessairement en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ avec $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2 + y^2 + 3y = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2y - 1 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \geqslant -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Donc f admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ égal à $-\frac{7}{3}$ et ce minimum local est un minimum global. D'autre part, f n'admet pas de maximum local.

(b) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}.$$

Les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Maintenant, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$. Ceci permet de restreindre l'étude aux deux points $(0,0)$ et $(1,1)$. • Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^4 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x,x) = -4x^2 + 2x^4 = 2x^2(-2 + x^2) < 0$ sur $]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$. Donc f change de signe dans tous voisinage de $(0,0)$ et puisque $f(0,0) = 0$, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. • Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) - f(1,1) &= (1+h)^4 + (1+k)^4 - 4(1+h)(1+k) + 2 = 6h^2 + 6k^2 - 4hk + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 \\ &\geqslant 6h^2 + 6k^2 - 2(h^2 + k^2) + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 = 4h^2 + 4h^3 + h^4 + 4k^2 + 4k^3 + k^4 \\ &= h^2(2h^2 + 1)^2 + k^2(2k^2 + 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

f admet donc un minimum global en $(1,1)$ (et en $(-1,-1)$) égal à -2.

Correction de l'exercice 4337 ▲

Soit M un point intérieur au triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On note x, y, z et $\mathscr{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MCA, MAB et ABC. On a

$$d(M,(BC))d(M,(CA))d(M(AB)) = \frac{2\text{aire}(MBC)}{a}\frac{2\text{aire}(MCA)}{b}\frac{2\text{aire}(MAB)}{c} = \frac{8xyz}{abc} = \frac{8}{abc}xy(\mathscr{A} - x - y).$$

On doit donc déterminer le maximum de la fonction $f(x,y) = xy(\mathscr{A} - x - y)$ quand (x,y) décrit le triangle ouvert $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < \mathscr{A}\}$. On admet que f admet un maximum global sur le triangle fermé $T' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant \mathscr{A}\}$ (cela résulte d'un théorème de math Spé : « une fonction numérique continue sur un compact admet un minimum et un maximum »). Ce maximum est atteint dans l'intérieur T de T' car f est nulle au bord de T' et strictement positive à l'intérieur de T'.
Puisque f est de classe C^1 sur T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f atteint son maximum sur T en un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in T^2$,

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(\mathscr{A} - x - y) - xy = 0 \\ y(\mathscr{A} - x - y) - xy = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(\mathscr{A} - 2x - y) = 0 \\ x(\mathscr{A} - x - 2y) = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = \mathscr{A} \\ x + 2y = \mathscr{A} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = \frac{\mathscr{A}}{3}. \end{aligned}$$

Le maximum cherché est donc égal à $\frac{8}{abc}\times\frac{\mathscr{A}}{3}\times\frac{\mathscr{A}}{3}\times\left(\mathscr{A}-\frac{\mathscr{A}}{3}-\frac{\mathscr{A}}{3}\right)=\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$. (On peut montrer que ce maximum est obtenu quand M est le centre de gravité du triangle ABC).

Correction de l'exercice 4338 ▲

Soient $\mathscr{R}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique puis M, A et B les points de coordonnées respectives (x,y), $(0,a)$ et $(a,0)$ dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=MA+MB\geqslant AB=a\sqrt{2}$ avec égalité si et seulement si $M\in[AB]$. Donc

$$\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ existe et vaut } a\sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 4339 ▲

On pose $BC=a$, $CA=b$ et $AB=c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u=$ aire de MBC, $v=$ aire de MCA et $w=$ aire de MAB. On a

$$d(M,(BC))\times d(M,(CA))\times d(M,(AB))=MI\times MJ\times MK=\frac{2u}{a}\times\frac{2v}{b}\times\frac{2w}{c}=\frac{8}{abc}uv(\mathscr{A}-u-v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v)\mapsto uv(\mathscr{A}-u-v)$ sur le domaine

$$T=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0 \text{ et } u+v\leqslant\mathscr{A}\right\}.$$

T est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :
- $\forall(u,v)\in T^2$, $\|(u,v)\|_1=u+v\leqslant\mathscr{A}$ et donc T est bornée.
- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v)\mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v)\mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v)\mapsto u+v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\geqslant 0\}=\varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ v\geqslant 0\}=\varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u+v\leqslant 0\}=\varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T=P_1\cap P_2\cap P_3$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.

Puisque T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, T est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

f est continue sur le compact T à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T.

Pour tout (u,v) appartenant à la frontière de T, on a $f(u,v)=0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u>0,\ v>0 \text{ et } u+v<0\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{T}$, (u_0,v_0) est nécessairement un point critique de f. Soit $(u,v)\in\overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0\\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}v(\mathscr{A}-2u-v)=0\\ u(\mathscr{A}-u-2v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2u+v=\mathscr{A}\\ u+2v=\mathscr{A}\end{array}\right.\Leftrightarrow u=v=\frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0)=\left(\frac{\mathscr{A}}{3},\frac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0)=\frac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a $M=\text{bar}\left((A,\text{aire de } MBC),(B,\text{aire de } MAC),(C,\text{aire de } MAB)\right)$. Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Correction de l'exercice 4340 ▲

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2=MA+MB\geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M\in[AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB=a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x,y) de la forme $(\lambda a,(1-\lambda)a)$, $\lambda\in[0,1]$.

Correction de l'exercice 4342 ▲

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\varphi(x,y)=(z,t)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x-e^y=z\\ x+y=t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ e^x-e^{t-x}=z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ (e^x)^2-ze^x-e^t=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ e^x=z-\sqrt{z^2+4e^t}\text{ ou }e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\\ y=t-x\end{array}\right.\quad(\text{car } z-\sqrt{z^2+4e^t}<z-\sqrt{z^2}=z-|z|\leqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\\ y=t-\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\end{array}\right.\quad(\text{car } z+\sqrt{z^2+4e^t}>z+\sqrt{z^2}=z+|z|\geqslant 0).$$

Ainsi, tout élément $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}^2$ par φ et donc φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de jacobien $J_\varphi(x,y)=\left|\begin{array}{cc}e^x&-e^y\\ 1&1\end{array}\right|=e^x+e^y$. Le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. En résumé, φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors que

$$\boxed{\varphi\text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lui-même.}}$$

Correction de l'exercice 4343 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty}f_x(y),\lim_{y\to+\infty}f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f:(x,y)\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2n+1)y^{2n}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi(x)-x=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n}+\varphi'(x)-1=0$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=\frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n}+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- C'est vrai pour $p=1$.

- Soit $p\geqslant 1$. Supposons que la fonction φ soit p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi'=\frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction φ est $p+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Calculons maintenant $I=\int_0^2\varphi(t)\,dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1}+0-0=0$, on a $\varphi(0)=0$ et puisque $1^{2n+1}+1-2=0$, on a $\varphi(2)=1$.

Maintenant, pour tout réel x de $[0,2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi'(x)\varphi(x)-x\varphi'(x)=0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0,2]$, on obtient

$$\int_0^2\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx+\int_0^2\varphi'(x)\varphi(x)\,dx-\int_0^2x\varphi'(x)\,dx=0\ (*).$$

Or, $\int_0^2\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx=\left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2=\frac{1}{2n+2}$. De même, $\int_0^2\varphi'(x)\varphi(x)\,dx=\left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}$ et donc $\int_0^2\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx+\int_0^2\varphi'(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\varphi(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$-\int_0^2x\varphi'(x)\,dx=[-x\varphi(x)]_0^2+\int_0^2\varphi(x)\,dx=-2+I.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\frac{n+2}{2n+2}-2+I=0$ et on obtient $I=\frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\boxed{\int_0^2\varphi(x)\,dx=\frac{3n+2}{2n+2}.}$$

Correction de l'exercice 4344 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto e^{x+y}+y-1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty}f_x(y),\lim_{y\to+\infty}f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f:(x,y)\mapsto e^{x+y}+y-1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x+y}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}+\varphi'(x)=0$ ou encore

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=-\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}\ (*).$$

On en déduit par récurrence que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.

1ère solution. Puisque $e^{0+0}+0-1=0$, on a $\varphi(0)=0$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\varphi'(0)=-\frac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x)\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{2}x+ax^2+bx^3+o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{x+\varphi(x)}&\underset{x\to 0}{=}e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=}1+\left(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+ax^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=}1+\frac{x}{2}+\left(a+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}\right)x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$ fournit alors $a+\frac{1}{8}+a=0$ et $b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}+b=0$ ou encore $a=-\frac{1}{16}$ et $b=\frac{1}{192}$.

2ème solution. On a déjà $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)=0$. En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\varphi''(x)=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1)-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

et donc $\frac{\varphi''(0)}{2}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\times 2^2}=-\frac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x)=-\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}+(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

et donc $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1/2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{192}$. La formule de TAYLOR-YOUNG refournit alors

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to 0}{=}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{384}+o(x^3).}$$

Correction de l'exercice 4352 ▲

Soit φ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puis f l'application définie sur U par $\forall(x,y)\in U,\ f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Puis, quand (x,y) décrit U, $\frac{y}{x}$ décrit $\mathbb{R}$ (car $\frac{y}{1}$ décrit déjà $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow\forall(x,y)\in U,\ \frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}\\
&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ 2t\varphi'(t)+(t^2-1)\varphi''(t)=t\\
&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2}{2}+\lambda\quad(*)
\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{t^2}{2}+\lambda$ ne s'annule pas en ± 1, l'égalité $(*)$ fournit une fonction φ telle que φ' n'a pas une limite réelle en ± 1. Une telle solution n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donc nécessairement $\lambda=-\frac{1}{2}$ puis

$$\begin{aligned}
\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\ \text{(par continuité de }\varphi'\text{ en }\pm 1)\\
&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\frac{t}{2}+\lambda.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4353 ▲

(a) $\left\{\begin{array}{l} u=x+y \\ v=x+2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2u-v \\ y=-u+v \end{array}\right.$. L'application $(x,y)\mapsto(u,v)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
Pour $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, posons alors $g(u,v)=f(2u-v,u+v)=f(x,y)$ de sorte que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=g(x+y,x+2y)=g(u,v)$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{\partial}{\partial x}(g(x+y,x+2y))-\frac{\partial}{\partial y}(g(x+y,x+2y)) \\
&= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial y}\times\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)-\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 &\Leftrightarrow \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0 \\
&\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=F(v) \\
&\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=F(x+2y).
\end{aligned}$$

(b) On pose $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ de sorte que $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. On pose $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=g(r,\theta)$. On sait que $\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)=r\frac{\partial g}{\partial r},$$

puis

$$\begin{aligned}
\forall(x,y)\in D,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} &\Leftrightarrow \forall r>0,\ r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r\Leftrightarrow\forall r>0,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=1 \\
&\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[/\ \forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ g(r,\theta)=r+\varphi(\theta) \\
&\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[/\ \forall(x,y)\in D,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\left(\text{Arctan}\frac{y}{x}\right) \\
&\Leftrightarrow \exists\psi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}/\ \forall(x,y)\in D,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\psi\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4377 ▲

(a) $\frac{1}{30}$.
(b) 0.
(c) $\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.
(d) $\frac{96}{35}$.
(e) $\frac{\pi}{2}$.
(f) $\pi(1-\ln 2)$.
(g) $\frac{5}{6}$.
(h) $2(\ln 2-1)$.
(i) $\frac{3\pi}{2}$.
(j) $\frac{65\pi}{48}$.
(k) $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.
(l) $\frac{7}{45}$.
(m) $\pi(1-\frac{1}{e})$.
(n) $\frac{(e^{2p}-1)^2}{3}$ $(x=u^2v, y=uv^2)$.

Correction de l'exercice 4378 ▲

Poser $u=x, v=x+y$. On obtient $I=\frac{2}{1701}$.

Correction de l'exercice 4379 ▲

symétrie + passage en polaires. $I = \frac{3}{4}\pi - \frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 4380 ▲

(a) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{27}\right)$.
(b) $2\pi a^2 \operatorname{Arcsin}\frac{R}{a} - 2\pi R\sqrt{a^2-R^2}$.
(c) $\frac{1}{720}$.
(d) $\frac{3}{4} - \ln 2$.
(e) $\frac{\pi R^2 a^2}{4}(a^2+3R^2)$.
(f) $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.
(g) $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$.

Correction de l'exercice 4381 ▲

(a) Intégrer en z d'abord : $\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2} - \frac{y^2}{1+y^2z^2}\right)$. On obtient $I = \pi\ln 2$.
(b) Intégrer I en x et y d'abord. On obtient $I = \int_{z=0}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan} z}{z}\right)^2 dz$.

Correction de l'exercice 4382 ▲

$I = \frac{\pi\ln 2}{8}$.

Correction de l'exercice 4383 ▲

$\frac{1}{2}\pi^2 Rr^2(4R^2+3r^2)$.

Correction de l'exercice 4384 ▲

$2\pi b\left(a^2 - \frac{b^2}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 4385 ▲

(a)
(b)
(c) Fubini $\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4387 ▲

(a) $2A = \left(\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{1+t^2}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{32}$.
(b)
(c)
(d) $B+C = \frac{D}{2}$, $B-C = -D$.
(e) $C = -\frac{3\pi^2}{32}$, $D = -\frac{\pi^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4388 ▲

(a) $A = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$.
(b) $4ab\arctan\frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 4389 ▲

Formule de Green : $\mathscr{A} = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4390 ▲

Formule de Green. $A = \frac{4}{3}(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$.

Correction de l'exercice 4391 ▲

Formule de Green. $A = \pi a^2$.

Correction de l'exercice 4392 ▲

(a) $V = \frac{4\pi}{3}(1 - \sqrt{1-a^2}^3)$.

(b) $V = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

(c) $V = 2\pi^2 R r^2$.

Correction de l'exercice 4393 ▲

$V = \frac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

Correction de l'exercice 4394 ▲

$\frac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 4395 ▲

hauteur $= \alpha R$ avec $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha \approx 0.347$.

Correction de l'exercice 4398 ▲

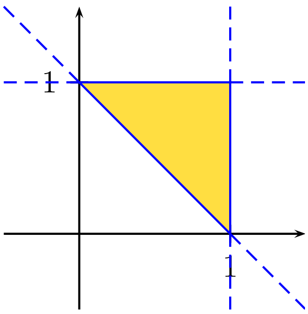
C'est manifestement vrai pour $\psi \equiv 1$ et aussi pour $\psi(t) = t$. De manière générale, si $\psi(t) = t^k$ avec $k \in |||$ alors pour $n \geq k$, $(x_1 + \cdots + x_n)^k$ est une somme de n^k monômes parmi lesquels il y a $n(n-1)\dots(n-k+1)$ monômes où chaque variable apparaît avec l'exposant 0 ou 1. On a alors :

$$\Lambda_n(\psi) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\Big(\int_{x=0}^1 xf(x)\,dx\Big)^k\Big(\int_{x=0}^1 f(x)\,dx\Big)^{n-k} + \Big(1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\Big)O(1),$$

ce qui prouve que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\Big(\int_{x=0}^1 xf(x)\,dx\Big)$ (lorsque $n \to \infty$) lorsque $\psi(t) = t^k$. Par linéarité, cette relation est encore vraie pour tout ψ polynôme. On conclut pour ψ continue quelconque avec le théorème de Stone-Weierstrass.

Correction de l'exercice 4399 ▲

(a) Représentons le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.



$$I=\iint_D (x+y)\,dxdy=\int_0^1\left(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right)dx \text{ (ou aussi } \int_0^1\left(\int_0^{1-y}(x+y)dx\right)dy)$$
$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1}dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

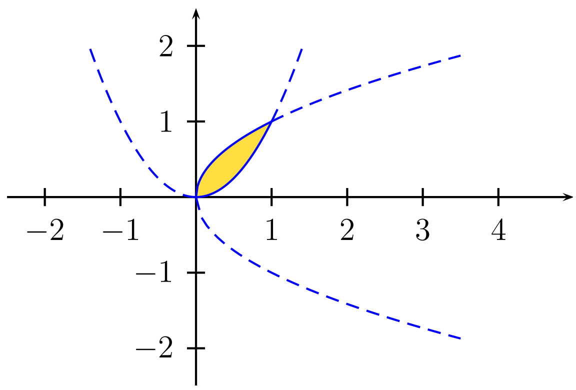
$$\boxed{\iint_D (x+y)\,dxdy=\frac{2}{3}.}$$

(b) Si on pose pour $(x,y)\in /mbr^2$, $f(x,y)=|x+y|$ alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à O. Puisque le point O est centre de symétrie de $[-1,1]^2$, on en déduit que

$$I=\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\,x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy+\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\,x+y\leqslant 0} f(x,y)\,dxdy$$
$$=2\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\,x+y\geqslant 0}(x+y)\,dxdy=2\int_{-1}^1\left(\int_{-x}^1 (x+y)\,dy\right)dx$$
$$=2\int_{-1}^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1}dx=2\int_{-1}^1\left(x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2\right)=\frac{8}{3}.$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2}|x+y|\,dxdy=\frac{8}{3}.}$$

(c) Représentons le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$.



$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right)x\,dx=\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{12}.$$

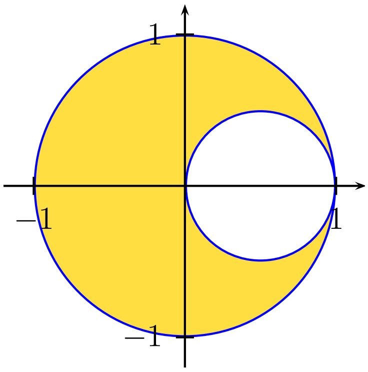
(d) En passant en polaires, on obtient

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{0\leqslant r\leqslant 1,\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{1}{1+r^2}\,rdrd\theta$$
$$=\left(\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,dr\right)\times\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\text{ (intégrales indépendantes)}$$
$$=2\pi\times\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1=\pi\ln 2.$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy=\pi\ln 2.}$$

(e) Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Puisque $x \leqslant x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqslant \frac{1}{4}$, D est l'intersection de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, bord compris. Soit M un point du plan. On note (r,θ) un couple de coordonnées polaires de M tel que $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0,2\pi]$.

$$M \in D \Leftrightarrow r\cos\theta \leqslant r^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow r=0 \text{ ou } (0<r\leqslant 1 \text{ et } r \geqslant \cos\theta.$$



En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= 2\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = 2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1 \frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta\right)\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_{\cos\theta}^1 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_0^1 d\theta\right)\\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\tan^2\theta}d(\tan\theta) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

(f)

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\,dxdydz = \int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 z\,dz\right)y\,dy\right)x\,dx = \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{1}{2}(1-y^2)y\,dy\right)x\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_x^1 (y-y^3)dy\right)x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_x^1 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)x\,dx\\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 (x^5-2x^3+x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\,dxdydz = \frac{1}{48}.}$$

(g) En sommant par tranches, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} z\,dxdydz = \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1-\sqrt{z}} dxdy\right)z\,dz\\
&= \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1}(1-\sqrt{z})^4\,dudv\right)z\,dz \text{ (en posant } x=(1-\sqrt{z})^2u \text{ et } y=(1-\sqrt{z})^2v)\\
&= \mathscr{A}(D)\times\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4dz \text{ où } D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\mathscr{A}(D) = \int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{u})^2}dv\right)du = \int_0^1(1-2\sqrt{u}+u)du = 1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

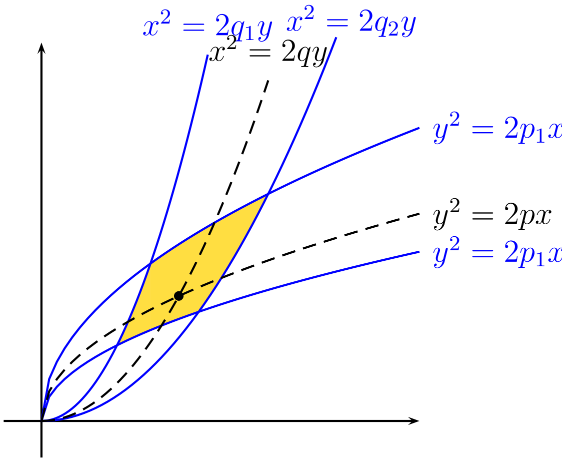
et

$$\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4dz = \int_0^1\left(z-4z^{3/2}+6z^2-4z^{5/2}+z^3\right)dz = \frac{1}{2}-\frac{8}{5}+2-\frac{8}{7}+\frac{1}{4} = \frac{1}{140}.$$

Finalement

$$\boxed{\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} z\,dxdydz = \frac{1}{840}.}$$

Correction de **l'exercice 4400 ▲**



L'aire du domaine considéré $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2x\}$ est

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy.$$

Pour $(x,y) \in D^2$, posons $p = \frac{y^2}{2x}$ et $q = \frac{x^2}{2y}$ ou encore considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & [p_1,p_2]\times[q_1,q_2] \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{y^2}{2x}, \frac{x^2}{2y}\right) \end{array}$ et vérifions que φ est un C^1-difféomorphisme.

• Pour chaque $(x,y) \in D^2$, on $2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x$ et $2q_1y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y$ ou encore $p_1 \leqslant \frac{y^2}{2x} \leqslant p_2$ et $q_1 \leqslant \frac{x^2}{2y} \leqslant q_2$. Donc φ est bien une application.

• Soit $(p,q) \in [p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$. Pour $(x,y) \in (]0,+\infty[)^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y^2}{2x} = p \\ \frac{x^2}{2y} = q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2q} \\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x} = p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{8pq^2} \\ y = \sqrt[3]{8p^2q} \end{array}\right.$$

Donc, l'équation $\varphi(x,y) = (p,q)$ a exactement une solution (x_0,y_0) dans $]0,+\infty[^2$. De plus, puisque $\frac{y_0^2}{2x_0} = p \in [p_1,p_2]$ et $\frac{x_0^2}{2y_0} = q \in [q_1,q_2]$, on a $2p_1x_0 \leqslant y_0^2 \leqslant 2p_2x_0$ et $2q_1y_0 \leqslant x_0^2 \leqslant 2q_2y_0$ et donc $(x_0,y_0) \in D^2$. Donc φ est une bijection.

• φ est de classe C^1 sur D et pour $(x,y) \in D^2$,

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)} = J(\varphi)(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ainsi, φ est une bijection de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$, de classe C^1 sur D et son jacobien ne s'annule pas sur D. On sait alors que φ est un C^1-difféomorphisme de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$.

Posons alors $(p,q) = \varphi(x,y)$ dans $\iint_D dxdy$. On obtient

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy = \iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} \left|\frac{D(x,y)}{D(p,q)}\right| dpdq = \frac{4}{3}\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} dpdq = \frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \tfrac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).}$$

Correction de **l'exercice 4401 ▲**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \geqslant 0$, posons $B_n(R) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n /\ x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2\}$ et notons $V_n(R)$ le volume de $B_n(R)$. Par définition,

$$V_n(R) = \int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2} dx_1\ldots dx_n.$$

En posant $x_1 = Ry_1, \ldots, x_n = Ry_n$, on a $\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)} = R^n$ (quand $R > 0$) puis

$$V_n(R) = \int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2} dx_1\ldots dx_n = R^n \int\ldots\iint_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1} dy_1\ldots dy_n = R^nV_n(1).$$

ce qui reste vrai quand $R=0$. Pour $n\geqslant 2$, on peut alors écrire

$$V_n(1)=\int_{-1}^{1}\left(\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}dx_1\ldots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)\,dx_n$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}(1)\,dx_n=I_nV_{n-1}(1)$$

où $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$. Pour calculer I_n, on pose $x=\cos\theta$. On obtient

$$I_n=\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2\theta)^{(n-1)/2}(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^n\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=2W_n \text{ (intégrales de WALLIS).}$$

Finalement,

$$V_1(1)=2 \text{ et } \forall n\geqslant 2,\ V_n(1)=2W_nV_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour $n\geqslant 2$,

$$V_n(1)=(2W_n)(2W_{n-1})\ldots(2W_2)V_1(1)=2^n\prod_{k=2}^{n}W_k=2^n\prod_{k=1}^{n}W_k,$$

ce qui reste vrai pour $n=1$. Maintenant, il est bien connu que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et plus précisément que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n=W_1W_0=\frac{\pi}{2}$. Donc, pour $p\in\mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1)=2^{2p}\prod_{k=1}^{2p}W_k=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k-1}W_{2k})=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)}=\frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$V_{2p+1}(1)=2^{2p+1}\prod_{k=2}^{2p+1}W_k=2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k}W_{2k+1})=2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k+1)}$$
$$=\frac{\pi^p2^{2p+1}}{3\times5\times\ldots\times(2p+1)}=\frac{\pi^p2^{2p+1}(2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 2}{(2p+1)!}=\frac{\pi^p2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}.$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall R>0,\ V_{2p}(R)=\frac{\pi^pR^{2p}}{p!} \text{ et } V_{2p-1}(R)=\frac{\pi^p2^{2p+1}p!R^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En particulier, $V_1(R)=2R$, $V_2(R)=\pi R^2$ et $V_3(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Correction de l'exercice 4402 ▲

1ère solution. $V=\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1}dxdydz$. Or $x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}$. On pose donc $u=x+\frac{z}{2}$, $v=\frac{y}{\sqrt{2}}$ et $w=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=2$ puis que

$$V=\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1}dxdydz=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw=2\times\frac{4\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}.$$

2ème solution. Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ est $\frac{4}{3}\pi abc$. La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$. On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives $\lambda=\frac{1}{a^2}$, $\mu=\frac{1}{b^2}$ et $\nu=\frac{1}{c^2}$ puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$. Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V=\frac{4}{3}\pi abc=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{8\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\frac{8\pi}{3}.}$$

Correction de l'exercice 4403 ▲

On pose déjà $u = xa$ et $v = yb$ de sorte que $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = ab$. On obtient

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2 - y^2)\, dxdy = ab \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (a^2u^2 - b^2v^2)\, dudv.$$

Ensuite,

$$\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} u^2\, dudv = \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} v^2\, dudv = \frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (u^2+v^2)\, dudv = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \times r dr d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\pi = \frac{\pi}{4},$$

et donc

$$\boxed{I = \frac{\pi ab(a^2-b^2)}{4}.}$$

Correction de l'exercice 4404 ▲

$= \int_{t=x}^{2x}\left(\frac{1}{t} - \frac{5t}{6} + o(t)\right) dt \to \ln 2.$

Correction de l'exercice 4405 ▲

Correction de l'exercice 4406 ▲

Formule de la moyenne sur $[3,x]$ et $[x, x+x^2] \Rightarrow \lim = 0$.

Correction de l'exercice 4407 ▲

$\ln 2$.

Correction de l'exercice 4408 ▲

$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty}\left(1 - \frac{(-1)^N}{(1+t^3)^N}\right)\frac{dt}{2+t^3} \to \int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3} = \frac{\pi 2^{5/3}}{3\sqrt{3}}$ lorsque $N \to \infty$.

Correction de l'exercice 4409 ▲

(a)

(b) $I(x) = \int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\, dt = \cos x \int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt - \sin x \int_{t=x}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\, dt \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4410 ▲

$\frac{\pi}{2} f(0)$.

Correction de l'exercice 4411 ▲

$t = ux$ puis intégration par parties $\Rightarrow \sim \frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4412 ▲

$f'(x) = \frac{2\ln x}{a(1+x^2)} \Rightarrow f(1+h) = \frac{1}{2a}(h^2 - h^3) + o(h^3)$.

Correction de l'exercice 4413 ▲

(a)

(b) Soit $\varepsilon > 0$: Pour x assez petit, $\left|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\right| \leq \varepsilon x$ car $\ln f$ est borné sur $[a,b]$.
Donc $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)^x dt - 1 - x\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,dt\right| \leq \varepsilon x$, et $\left|\ln\left(\int_{t=a}^{b} f(t)^x dt\right) - x\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,dt\right| \leq 2\varepsilon x$.

Correction de l'exercice 4416 ▲

(a) Couper en $\int_{t=0}^{1-\varepsilon} + \int_{t=1-\varepsilon}^{1}$

(b) $= \left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_{t=0}^{1} - \frac{1}{n}\int_{t=0}^{1} \ln(1+t^n)\,dt \sim \frac{\ln 2}{n}$.

(c) $\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} = \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}$.

Correction de l'exercice 4417 ▲

$1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4418 ▲

$1 + \frac{1}{n}\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4419 ▲

$u = t^n \Rightarrow \sim \frac{1}{n}\int_{u=1}^{e} \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$.

Correction de l'exercice 4421 ▲

$f(0)$.

Correction de l'exercice 4422 ▲

Soit $f_n(x) = (1-x/n)^n$ si $0 \leq x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Alors $f_n(x)$ converge simplement vers e^{-x} et il y a convergence dominée.

Correction de l'exercice 4423 ▲

$f(x) = \cos x$.

Correction de l'exercice 4424 ▲

(a) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

(b) $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{1} + (-1)^k\frac{\pi}{4}$,
$I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - (-1)^k \ln\sqrt{2}$.

(c) $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4425 ▲

$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4426 ▲

(a)

(b) $g(c)$.

Correction de l'exercice 4427 ▲

$\Phi(x) = \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \Rightarrow \Phi'\Phi^2 \to \ell^2 \Rightarrow \Phi^3 \sim 3\ell^2 x \Rightarrow f = \sqrt{\Phi'} \sim \sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Correction de l'exercice 4429 ▲

(a)

(b)

(c)

(d) Pour $\alpha = 0$ on a $h(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$, quantité bornée car l'intégrale converge en $+\infty$.

Pour $\alpha = 1$ on a $h(x) = \cos x \int_{t=0}^{x} \frac{\cos t \sin t}{t}\,dt + \sin x \int_{t=0}^{x} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$, quantité non bornée car la deuxième intégrale diverge en $+\infty$.

Pour $0 < \alpha < 1$, développer le $\cos(x-t)$ puis linéariser les produits obtenus. On obtient quatre intégrales convergentes, donc h est bornée.

Correction de l'exercice 4430 ▲

(a) $\frac{\ln(1+a)}{a}$.

(b) $= -\varphi'(a) = \frac{\ln(1+a)}{a^2} - \frac{1}{a(1+a)}$.

Correction de l'exercice 4433 ▲

$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $f(x) = \pi \ln(x+1)$.

Correction de l'exercice 4434 ▲

(a)

(b) $I'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $I(x) = \pi \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 4435 ▲

(a) $g'(x) = \int_{t=0}^{1} (-2x) e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\sqrt{f(x)} = -f'(x)$.

(b)

(c)

Correction de l'exercice 4436 ▲

$u = \frac{a}{t} \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\frac{dI}{da} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

Correction de l'exercice 4437 ▲

(a)

(b) $I'(x) = -2xI(x)$.

(c) $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Correction de l'exercice 4441 ▲

(a) $g(x,y) = \int_{u=1}^{y} f(ux)\,du$.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}\left(y f(xy) - f(x) - \int_{u=1}^{y} f(ux)\,du\right) \to \frac{y^2-1}{2} f'(0)$ lorsque $x \to 0$.

Correction de l'exercice 4442 ▲

(a) -2 de $-\infty$ à $-\frac{\pi}{2}$, $\quad 2\sin x$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, $\quad 2$ de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Correction de l'exercice 4443 ▲

$2.40 < x < 2.41$.

Correction de l'exercice 4444 ▲

(a)

(b) $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.

(c) comparaison série-intégrale $\Rightarrow I(\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $\alpha \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4445 ▲

$\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

Correction de l'exercice 4447 ▲

(a) $f'(a) = -\frac{a}{2}f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/4)$.

(b) $g'(a) = f(a) \Rightarrow g(a) \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4449 ▲

(a) IPP.

(b) Soit $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t)\,dt$. On a $\varphi(a) = F(0) - a\int_{t=0}^{+\infty} e^{-at}F(t)\,dt$.
Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $x > A \Rightarrow |F(x)| \leq \varepsilon$. On a :

$$\left|a\int_{t=0}^{+\infty} e^{-at}F(t)\,dt\right| \leq a\sup|F(t)|, t\in[0,A] + \varepsilon e^{-aA} \leq 2\varepsilon$$

pour a suffisament petit.

Correction de l'exercice 4450 ▲

$v_n \to 1$ (lorsque $n \to \infty$) par convergence dominée. $v_n - 1 = \int_{x=0}^{1} \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_{u=0}^{1} \frac{u^{-1/n}}{1+u}\,du \sim \frac{\ln 2}{n}$ donc la série diverge.

Correction de l'exercice 4451 ▲

$u_n \to 1$ (lorsque $n \to \infty$) par convergence dominée.
$u_n - 1 = \int_{x=0}^{1}\left(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n} - 1\right)dx = \frac{1}{n}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{1-1/n}}{1+u}(u^{-2/n}-1)\,du$.
On a $0 \leq u^{-2/n} - 1 = \exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right) - 1 \leq -\frac{2\ln(u)}{n}\exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right)$
d'où $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n^2}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{1-3/n}(-\ln u)}{1+u}\,du = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 4452 ▲

$I(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 1$. $I(2) = (x = e^u) = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{ue^{2u}}{(1+e^{2u})^2}\,du = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(e^u+e^{-u})^2}\,du = 0$ (parité). $I(3) = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{(e^u+e^{-u})^3}\,du = \int_{u=0}^{+\infty}\frac{-u(e^u-e^{-u})}{(e^u+e^{-u})^3}\,du = \left[\frac{u}{2(e^u+e^{-u})^2}\right]_{u=0}^{+\infty} - \int_{u=0}^{+\infty}\frac{du}{2(e^u+e^{-u})^2} = -\int_{u=0}^{+\infty}\frac{e^{2u}\,du}{2(1+e^{2u})^2} = \left[\frac{1}{4(1+e^{2u})}\right]_{u=0}^{+\infty} = -\frac{1}{8}$. $I(\alpha) \to 0$ (lorsque $\alpha \to +\infty$) par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4453 ▲

(a) $D_f =]0,1[$. f est convexe sur $]0,1[$ par intégration de l'inégalité de convexité pour $x \mapsto t^{-x}$ et $f(x) \to +\infty$ (lorsque $x \to 0$ ou $x \to 1$) par convergence monotone donc f décroît puis recroît.

(b)

(c) En 0 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{x+1}(1+t)}$ donc $f(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{t^x(1+t)} + \frac{1}{x} - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} \sim \frac{1}{x}$.

En 1 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^x} - \frac{t^{1-x}}{1+t}$ donc $f(x) = \frac{1}{1-x} - \int_{t=0}^{1} \frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{1-x}$.

(d) $f(1/n) =_{(t=u^n)} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{nu^{n-1}\,du}{u(1+u^n)} =_{(v=1/u)} \int_{v=0}^{+\infty} \frac{n\,dv}{1+v^n} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}$ (formule bien connue...)

Correction de l'exercice 4454 ▲

Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $u_n = 0$ pour tout n.

Sinon, $u_n = \mathrm{Im}\left(\int_{t=0}^{1} \sum_{k=1}^{n} t^{n+k-1} e^{ik\alpha}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\int_{t=0}^{1} \frac{t^n e^{i\alpha} - t^{2n} e^{i(n+1)\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\,dt\right) \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4455 ▲

$I_a = \int_{x=-a}^{a} |f(x)|\,dx \le \int_{x=-a}^{a} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt\,dx = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-a}^{a} \frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dx\,dt$. On a $\int_{x=-a}^{a} e^{-|x+t|}\,dx = \begin{cases} 2-2e^{-a}\operatorname{ch} t & \text{si } |t| < a \\ 2e^{-|t|}\operatorname{sh} a & \text{si } |t| \ge a, \end{cases}$

donc $I_a \le \int_{t=0}^{a} \frac{2\,dt}{(1+t)\sqrt{t}} + \int_{t=a}^{+\infty} \frac{4e^{-t}\operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}}\,dt = 4\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{a}) + \frac{4e^{-a}\operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}} \le \text{cste}$.

Correction de l'exercice 4456 ▲

(a) $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t) e^{-kxt}\,dt$.

On a $|\sin(t)e^{-kxt}| \le te^{-kxt}$ et $\int_{t=0}^{+\infty} te^{-kxt}\,dt = \frac{1}{k^2}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} |\sin(t)e^{-kxt}|\,dt$ converge ce qui légitime l'interversion intégrale-série. D'où $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2x^2+1}$.

(b) Sachant (?) que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{x\sin t}{e^{xt}-1} - \frac{\sin t}{t}\right) dt \\
&= \int_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right) \sin\left(\frac{u}{x}\right) du \\
&= -x\left[\underbrace{\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)}_{\to \frac{1}{2} \text{ si } u \to 0^+} \cos\left(\frac{u}{x}\right)\right]_{u=0}^{+\infty} + x\int_{u=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{-e^u}{(e^u-1)^2} + \frac{1}{u^2}\right)}_{\to \frac{1}{12} \text{ si } u \to 0^+} \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \\
&= x(\text{quantité bornée}) \to 0 \text{ si } u \to 0^+.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4457 ▲

Fonction de x de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, décroissante de limite $\pi/2$ en 0^+ et 0 en $+\infty$. Demi-tangente verticale en 0^+, Équivalente à $1/x$ en $+\infty$ (par IPP). Équation différentielle : $f(x) + f''(x) = 1/x$.

Correction de l'exercice 4458 ▲

(a) $[0,+\infty[$.

(b)

(c) $f(x) - f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2x}\,dt = (u = t\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

(d) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{x+u^2}\,du = \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+u^2/x}\,du \sim \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du = \frac{-\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

(e)

(f)

Correction de l'exercice 4459 ▲

(a)

(b) Théorème de Fubini : $\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(e^{(-\alpha+i\sin\theta)x})\,dx\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\alpha\,d\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ (couper en $\theta=\pi/2$ et poser $u=\tan\theta$).

Correction de l'exercice 4460 ▲

$I'(x) = \int_{t=0}^{+\infty}(\cos t - e^{-t})e^{-xt}\,dt = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}$ donc $I(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right) + \text{cste}$ et $I(x)\to 0$ (pour $x\to+\infty$) d'où cste $=0$. Alors $I(x)\to 0$ pour $x\to 0^+$.

Correction de l'exercice 4462 ▲

$D_f =]0,+\infty[$. Il y a domination locale, donc f est continue.

De même, pour $x>0$ on a $f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{-\ln(t)t^{x+1}}{(t^{x+1}+t+1)^2}\,dt$. En coupant l'intégrale en 1 et en posant $u=1/t$ dans l'intégrale sur $[1,+\infty[$ il vient : $f'(x) = \int_{t=0}^{1}\ln(t)t^{x+1}\left(\frac{1}{(t+t^{x+1}+t^{x+2})^2} - \frac{1}{(t^{x+1}+t+1)^2}\right)dt < 0$ car $\ln(t)<0$ et $t^{x+2}<1$ si $t\in]0,1[$. Donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

$\int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}+t} = \int_{t=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{t^{(k+1)x+1}}\,dt =$ (domination du reste avec le CSA) $= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)x} = \frac{\ln 2}{x}$.

$\left|f(x) - \int_{t=1}^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}+t}\right| = \int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t^{x+1}+t+1} + \int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{(t^{x+1}+t)(t^{x+1}+t+1)} \le \int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t+1} + \int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)} = 2\ln 2$ donc $f(x) = \frac{\ln 2}{x} + O_{x\to 0^+}(1)$.

Pour $x\to+\infty$, on a avec le TCM séparément sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$: lorsque $x\to+\infty$, $f(x)\to\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t+1} = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4463 ▲

Pour $\lambda\neq 0$: $I_n = \left[\frac{\exp(\lambda n\sin^2(x))}{2\lambda n\cos(x)}\right]_{x=0}^{\alpha} - \int_{x=0}^{\alpha}\frac{\sin(x)}{2\lambda n\cos^2(x)}\exp(\lambda n\sin^2(x))\,dx = \frac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)} - \frac{1}{2\lambda n} - \frac{J_n}{2\lambda n}$ avec $0\le J_n\le\frac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$. Donc $I_n\sim\frac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)}$ si $\lambda>0$ et $I_n\sim-\frac{1}{2\lambda n}$ si $\lambda<0$.

Correction de l'exercice 4464 ▲

(a) Pour $0\le t\le 1$ on a $t(1-t)(n-1)!\le t(1-t)\dots(n-t)\le n!$ d'où $\frac{1}{6n}\le|a_n|\le 1$ et $R=1$.

(b) $(-1)^n a_n = \int_{t=0}^{1} t(1-t)(1-t/2)\dots(1-t/n)\,dt$. Pour $0\le x\le\frac12$ on a $x\le-\ln(1-x)\le x+x^2$ (étude de fonction) donc pour $k\ge 2$ et $0\le t\le 1$: $e^{-t/k-t^2/k^2}\le 1-t/k\le e^{-t/k}$ d'où :

$$b_n = \int_{t=0}^{1} t(1-t)e^{-t(H_n-1)-t^2K_n}\,dt \le (-1)^n a_n \le \int_{t=0}^{1} te^{-tH_n}\,dt = c_n$$

avec $H_n = 1+1/2+\dots+1/n$ et $K_n = 1/2^2+\dots+1/n^2$.

Équivalent du majorant :

$$c_n = \frac{1-(1+H_n)e^{-H_n}}{H_n^2} \sim \frac{1}{H_n^2}.$$

Équivalent du minorant :

$$\begin{aligned} b_n &\ge \int_{t=0}^{1} t(1-t)(1-t^2K_n)e^{-t(H_n-1)}\,dt \\ &= \int_{t=0}^{1} te^{-t(H_n-1)}\,dt - \int_{t=0}^{1} t^2(1+t(1-t)K_n)e^{-t(H_n-1)}\,dt \\ &\ge \int_{t=0}^{1} te^{-t(H_n-1)}\,dt - (1+\tfrac14 K_n)\int_{t=0}^{1} t^2e^{-t(H_n-1)}\,dt \\ &\ge \frac{1-H_ne^{1-H_n}}{(H_n-1)^2} - (1+\tfrac14 K_n)\frac{2-(H_n^2+1)e^{1-H_n}}{(H_n-1)^3} \\ &\sim \frac{1}{H_n^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $a_n\sim\frac{(-1)^n}{H_n^2}\sim\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

Correction de l'exercice 4465 ▲

(a) $\sum u_n(t)$ converge pour $|t|<1$.

(b) $P_n(t)=t^{n+1}\sin(nx)-t^n\sin((n+1)x)+\sin(x)$, $Q(t)=t^2-2t\cos(x)+1=(t-\cos x)^2+\sin^2 x\geq\sin^2 x$.

(c) Pour $|t|<1$ on a $S_n(t)\to\frac{\sin t}{Q(t)}$ lorsque $n\to\infty$ et il y a convergence dominée vu la minoration de Q donc l'intégrale suit : $\int_{t=0}^1 S_n(t)\,dt\to\int_{t=0}^1\frac{\sin x\,dt}{t^2-2t\cos x+1}=(t-\cos x=u\sin x)=\int_{u=-\cot x}^{\tan(x/2)}\frac{du}{u^2+1}=\frac{\pi-x}{2}$.

(d) $\frac{\sin(nx)}{n}=\int_{t=0}^1 u_n(t)\,dt$ d'où $\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$.

Correction de l'exercice 4466 ▲

(a)

(b) $\sin^2(nt)=\frac{1-\cos(2nt)}{2}$, donc il suffit d'étudier $I_n=\int_{t=0}^{n\pi}\cos(2nt)f(t)\,dt$.

Posons $I_{n,p}=\int_{t=0}^{\min(n,p)\pi}\cos(2nt)f(t)\,dt$: on a $|I_n-I_{n,p}|\leq\int_{t=p\pi}^{+\infty}|f(t)|\,dt$, quantité indépendante de n et tendant vers 0 quand $p\to\infty$ donc le théorème d'interversion des limites s'applique :
$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty}I_{n,p}=\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_{n,p}=0$. On en déduit $u_n\to\frac12\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4467 ▲

(a) $0\leq f_n(x)\leq x^n$ et $f_n(1)=1$ donc lorsque $n\to\infty$ $f_n(x)\to\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x=1.\end{cases}$

(b) i. Non, la continuité n'est pas conservée.

ii. Oui, il y a décroissance évidente.

(c) Changement de variable $u=\left(\frac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n=\frac{2}{n(n-1)}\int_{u=1/2^n}^1(2u^{1/n}-1)^{2/(n-1)}u^{1/n}\,du$ et l'intégrale tend vers 1 quand $n\to\infty$ par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4468 ▲

Il y a convergence si et seulement si $x>-1$. $f'(x)=\int_{t=0}^1(1-t)t^x\,dt=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$, donc $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+C$ et $f(x)\to 0$ (lorsque $x\to+\infty$) d'où $C=0$.

Correction de l'exercice 4469 ▲

(a) $]1,+\infty[$.

(b)

(c) $I'(a)=-\int_{x=0}^{+\infty}\operatorname{sh}x e^{-ax}\,dx=\frac12\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)$. D'où $I(a)=\frac12\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+$ cste et $I(a)\to0$ lorsque $a\to+\infty$ donc la constante est nulle.

Correction de l'exercice 4470 ▲

(a) Intégrer par parties.

(b) Intégrer deux fois par parties.

(c) Pour $0<u<v$: $\int_{t=u}^v e^{-it^2/2}\,dt=\left[\frac{e^{-it^2/2}}{-it}\right]_{t=u}^v-\int_{t=u}^v\frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\,dt\to\frac{e^{-iu^2/2}}{iu}-\int_{t=u}^{+\infty}\frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\,dt$ lorsque $v\to+\infty$.
Ainsi $\int_{t=u}^{+\infty}e^{-it^2/2}\,dt$ converge et de même pour $\int_{t=-\infty}^{-u}e^{-it^2/2}\,dt$.

(d) On pose $f(t)=f(0)+t\varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Il vient :

$$g(x)\sqrt{x}=f(0)\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}}e^{-iu^2/2}\,du-\frac{1}{i\sqrt{x}}\left[e^{-iu^2/2}\varphi(u/\sqrt{x})\right]_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}}+\frac{1}{ix}\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}}e^{-iu^2/2}\varphi'(u/\sqrt{x})\,du$$
$$\to f(0).I$$

lorsque $x\to+\infty$.

Correction de l'exercice 4472 ▲

Pour x réel donné, la fonction $t \mapsto |t-x|f(t)$ est continue sur $[a,b]$ et donc $F(x)$ existe. Pour $x \leq a$, $F(x) = \int_a^b (t-x)f(t)\,dt = -x\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b tf(t)\,dt$. F est donc de classe C^1 sur $]-\infty,a]$ en tant que fonction affine et, pour $x < a$, $F'(x) = -\int_a^b f(t)\,dt$ (en particulier $F'_g(a) = -\int_a^b f(t)\,dt$)..
De même, pour $x \geq b$, $F(x) = x\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)\,dt$. F est donc de classe C^1 sur $[b,+\infty[$ en tant que fonction affine et, pour $x \geq b$, $F'(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ (en particulier $F'_d(b) = \int_a^b f(t)\,dt$).
Enfin, si $a \leq x \leq b$,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt + \int_x^b (t-x)f(t)\,dt = x(\int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt) - \int_a^x tf(t)\,dt + \int_x^b tf(t)\,dt.$$

F est donc de classe C^1 sur $[a,b]$ et, pour $a \leq x \leq b$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

(et en particulier, $F'_d(a) = -\int_a^b f(t)\,dt = F'_g(a)$ et $F'_g(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F'_d(b)$).
F est continue $]-\infty,a]$, $[a,b]$ et $[b,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$. F est de classe C^1 sur $]-\infty,a]$, $[a,b]$ et $[b,+\infty[$. De plus, $F'_g(a) = F'_d(a)$ et $F'_g(b) = F'_d(b)$. F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4473 ▲

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
Définition, dérivabilté, dérivée.
Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F(x) = G(2x) - G(x)$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

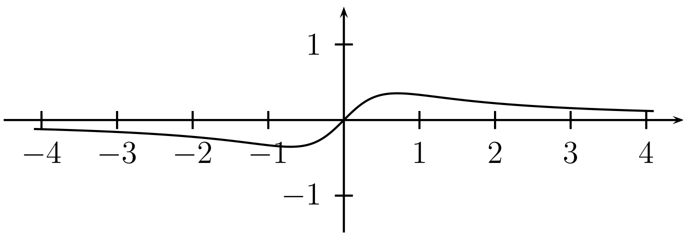
Parité.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $t = -u$ et donc $dt = -du$, on obtient, en notant que g est paire

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt = \int_x^{2x} g(-u).-du = -\int_x^{2x} g(u)\,du = -F(x).$$

F est donc impaire.
Variations.
Pour x réel,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(F'(x)) &= \text{sgn}(\frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}) = \text{sgn}(2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4-4x^2+1}) \\ &= \text{sgn}(4(x^4+x^2+1) - (16x^4+4x^2+1)) \text{ (par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &= \text{sgn}(-12x^4+3) = \text{sgn}(1-4x^4) = \text{sgn}(1-2x^2). \end{aligned}$$

F est donc strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.
Etude en $+\infty$.
Pour $x > 0$, $0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{x^4}}\,dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
Graphe.



Correction de l'exercice 4474 ▲

(a) Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$ et $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Par suite, $\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ existe. De plus,

$$x\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt\leq\int_x^{x^2}\leq\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\int_x^{x^2}t\frac{1}{t\ln t}\,dt\leq x^2\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

Mais,

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt=[\ln|\ln t|]_x^{x^2}=\ln|\ln(x^2)|-\ln|\ln(x)|=\ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right|=\ln 2.$$

Donc, $\forall x>1,\ x\ln 2\leq F(x)\leq x^2\ln 2$. On en déduit que $\lim_{x\to 1,\,x>1}F(x)=\ln 2$.
Si $0<x<1$, on a $x^2<x$ puis $[x^2,x]\subset]0,1[$. Donc, $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$ et $F(x)=-\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt$ existe.
Pour $t\in[x^2,x]$, on a $t\ln t<0$ et $x^2\leq t\leq x$. Par suite,

$$x\frac{1}{t\ln t}\leq t\frac{1}{t\ln t}=\frac{1}{\ln t}\leq x^2\frac{1}{t\ln t},$$

puis, $\int_{x^2}^{x}x\frac{1}{t\ln t}\,dt\leq\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt\leq\int_{x^2}^{x}x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt$, et finalement,

$$x^2\ln 2=\int_x^{x^2}x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt\leq F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt\leq\int_x^{x^2}x\frac{1}{t\ln t}\,dt=x\ln 2.$$

On obtient alors $\lim_{x\to 1,\,x<1}F(x)=\ln 2$ et finalement, $\lim_{x\to 1}F(x)=\ln 2$. On en déduit que F se prolonge par continuité en 1 en posant $F(1)=\ln 2$ (on note encore F le prolongement obtenu).

(b) On a déjà vu que F est définie (au moins) sur $]0,+\infty[$ (F désignant le prolongement). Il ne parait pas encore possible de donner un sens à $F(0)$ et encore moins à $F(x)$ quand $x<0$, car alors $[x,0]$ est un intervalle de longueur non nulle contenu dans $[x,x^2]$, sur lequel la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ n'est même pas définie.

$$D_F=]0,+\infty[.$$

Pour $t\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, posons $g(t)=\frac{1}{\ln t}$ et notons G une primitive de g sur cet ensemble. Alors, pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x)=G(x^2)-G(x)$. On en déduit que F est dérivable (et même de classe C^1) sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et que pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$F'(x)=2xg(x^2)-g(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}.$$

Maintenant, quand x tend vers 1, $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1. Ainsi, F est continue sur $]0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et F' a une limite réelle en 1. Un théorème classique d'analyse permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur D_F et en particulier, dérivable en 1 avec $F'(1)=1$.

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ F'(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{\ln x}\text{ si }x\neq 1\\ 1\text{ si }x=1.\end{cases}.$$

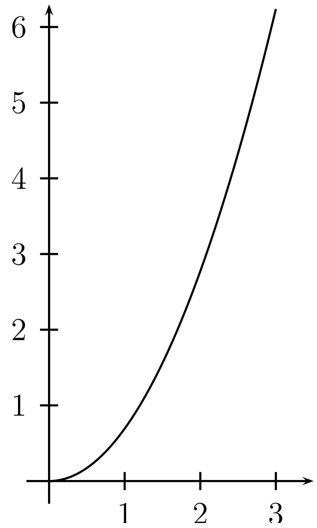
Si $x>1$, $x-1>0$ et $\ln x>0$ et si $0<x<1$, $x-1<0$ et $\ln x<0$. Dans tous les cas ($0<x<1$, $x=1$, $x>1$) $F'(x)>0$. F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
On a vu que $\forall x>1,\ F(x)>x\ln 2$ et donc $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. Plus précisément, pour $x>1$,

$$\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{x}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt\geq\frac{x^2-x}{x\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}.$$

Comme $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{F(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc que la courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).
Pour $x\in]0,1[$ et $t\in[x^2,x]$, on a $2\ln x=\ln(x^2)\leq\ln t\leq\ln x<0$ et donc $\frac{1}{\ln x}\leq\frac{1}{\ln t}\leq\frac{1}{2\ln x}$, puis $(x-x^2)\frac{1}{\ln x}\leq\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt\leq(x-x^2)\frac{1}{2\ln x}$ et finalement,

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x-x^2}{-2\ln x}\leq F(x)\leq\frac{x-x^2}{-\ln x}.$$

On obtient déjà $\lim_{x\to 0}F(x)=0$. On peut prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0)=0$. Ensuite, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{F(x)}{x}$ est compris entre $\frac{1-x}{-2\ln x}$ et $\frac{1-x}{-\ln x}$. Comme ces deux expressions tendent vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. F est donc dérivable en 0 et $F'(0)=0$.

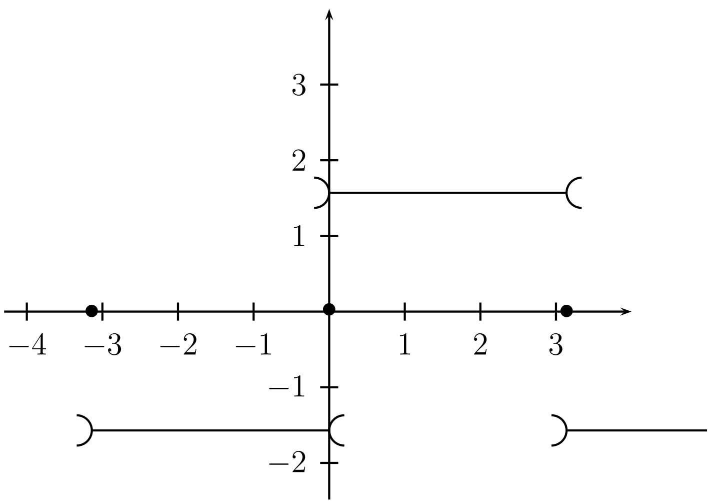


Correction de l'exercice 4475 ▲

Notons D le domaine de définition de f.
Si $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. f est donc impaire.
Si $x \in D$, $x + 2\pi \in D$ et $f(x+2\pi) = f(x)$. f est donc 2π-périodique.
On étudiera donc f sur $[0, \pi]$.
Soient $x \in [0, \pi]$ et $t \in [-1, 1]$. $t^2 - 2t\cos x + 1 = (t - \cos x)^2 + \sin^x \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\sin x = 0$ et $t - \cos x = 0$.
Ainsi, si $x \in]0, \pi[$, $\forall t \in]-1, 1[$, $t^2 - 2t\cos x + 1 \neq 0$. On en déduit que la fraction rationnelle $t \mapsto \frac{\sin t}{1-2t\cos x+t^2}$ est continue sur $[-1, 1]$, et donc que $f(x)$ existe.
Si $x = 0$, $\forall t \in [-1, 1[$, $\frac{\sin x}{t^2-2t\cos x+1} = \frac{0}{(t-1)^2} = 0$. On prut prolonger cette fonction par continuité en 1 et consisérer que $f(0) = \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0$. De même, on peut considérer que $f(\pi) = 0$.
Ainsi, f est définie sur $[0, \pi]$ et donc, par parité et 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in]0, \pi[$.Calculons $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{(t-\cos x)^2 + \sin^2 x}\, dt = \left[\text{Arctan}\, \frac{t - \cos x}{\sin x}\right]_{-1}^{1} = \text{Arctan}\, \frac{1-\cos x}{\sin x} + \text{Arctan}\, \frac{1+\cos x}{\sin x} \\ &= \text{Arctan}\, \frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} + \text{Arctan}\, \frac{2\cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \text{Arctan}(\tan(x/2)) + \text{Arctan}(\frac{1}{\tan(x/2)}) \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ (car } \tan(x/2) > 0 \text{ pour } x \in]0, \pi[). \end{aligned}$$

Ce calcul achève l'étude de f. En voici le graphe :



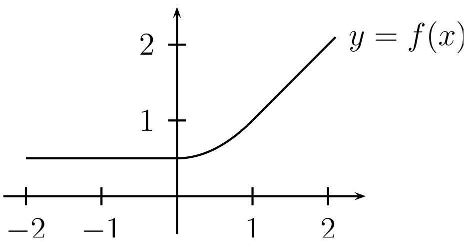
Correction de l'exercice 4476 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto \text{Max}(x,t)=\frac{1}{2}(x+t+|x-t|)$ est continue sur $[0,1]$ en vertu de théorèmes généraux. Par suite, $\int_0^1 \text{Max}(x,t)\,dt$ existe.
Si $x\leq 0$, alors $\forall t\in[0,1]$, $x\leq t$ et donc $\text{Max}(x,t)=t$. Par suite, $f(x)=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$.
Si $x\geq 1$, alors $\forall t\in[0,1]$, $t\leq x$ et donc $\text{Max}(x,t)=x$. Par suite, $f(x)=\int_0^1 x\,dt=x$.
Si $0<x<1$,

$$f(x)=\int_0^x x\,dt+\int_x^1 t\,dt=x^2+\frac{1}{2}(1-x^2)=\frac{1}{2}(1+x^2).$$

En résumé, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\text{ si }x\leq 0\\ \frac{1}{2}(1+x^2)\text{ si }0<x<1\\ x\text{ si }x\geq 1\end{array}\right.$.

f est déjà continue sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $f(0^+)=\frac{1}{2}=f(0)$ et $f(1^-)=1=f(1)$. f est ainsi continue à droite en 0 et continue à gauche en 1 et donc sur $\mathbb{R}$.
f est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $\lim_{x\to 0,\,x>0} f'(x)=\lim_{x\to 0,\,x>0} x=0$. f est donc continue sur $[0,1[$ de classe C^1 sur $]0,1[$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et en particulier, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$. Comme d'autre part, f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0)=0=f'_d(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
L'étude en 1 montre que f est dérivable en 1 et que $f'(1)=1$. Le graphe de f est le suivant :



Correction de l'exercice 4477 ▲

(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0<a<A$. On considère $F_n\ :\ \begin{array}{ccc}[a,A]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \frac{1}{(t^2+x^2)^n}\end{array}$.

• Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t\mapsto F_n(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $F_n(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{2n}}>0$ avec $2n>1$.

• La fonction F_n est admet sur $[a,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t)\in[a,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)=\frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}.$$

De plus,
- pour chaque $x\in[a,A]$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

-pour chaque $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
-pour chaque $(x,t)\in[a,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}}=\varphi(t),$$

où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction I_n est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0<a<A$, on a montré que la fonction I_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x>0,\ I_n'(x)=-2nx\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,dt=-2nxI_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n'(x)=-2nxI_{n+1}(x).}$$

(b) Pour $x>0$, on a $I_1(x)=\left[\frac{1}{x}\text{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}$. Ensuite, $I_2(x)=-\frac{1}{2x}I_1'(x)=\frac{\pi}{4x^3}$ puis $I_3(x)=-\frac{1}{4x}I_2'(x)=\frac{3\pi}{16x^5}$ et donc $I_3(1)=\frac{3\pi}{16}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt=\frac{3\pi}{16}.}$$

Correction de l'exercice 4478 ▲

(a) i. **Parité de F.** Soit x un réel du domaine de définition de F. En posant $t=\theta+\pi$, on obtient

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)\,dt \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln((-x)^2-2(-x)\cos t+1)\,dt=F(-x).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $F(x)$ existe si et seulement si $F(-x)$ existe et de plus $F(x)=F(-x)$.

$$\boxed{F \text{ est paire.}}$$

Définition de F. Soit $x\in[0,+\infty[$. Pour tout réel $\theta\in[-\pi,\pi]$,

$$x^2-2x\cos\theta+1=(x-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=\left|x-e^{i\theta}\right|^2\geqslant 0.$$

De plus, $\left|x-e^{i\theta}\right|=0\Leftrightarrow e^{i\theta}=x\Leftrightarrow x=1$ et $\theta=0$. Par suite,

• si $x\neq 1$, la fonction $\theta\mapsto x^2-2x\cos\theta+1$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.

• si $x=1$, pour tout réel $\theta\in[-\pi,\pi]$ on a $x^2-2x\cos\theta+1=2-2\cos\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$. La fonction $\theta\mapsto \ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$
est continue sur $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$ et quand θ tend vers 0

$$\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=2\ln 2+2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\sim 2\ln\left|\frac{\theta}{2}\right|\sim 2\ln|\theta|=o\left(\frac{1}{\sqrt{|\theta|}}\right).$$

On en déduit que la fonction $\theta\mapsto\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et donc que $F(1)$ existe.

Finalement, F est définie sur $[0,+\infty[$ et par parité

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque. Par parité de la fonction $\theta\mapsto\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$, pour tout réel x, on a encore $F(x)=2\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta$.

Continuité de F. Soit $A>1$. Soit $\Phi:\begin{array}{ccc}[0,A]\times]0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1)\end{array}$.

• Pour chaque $x\in[0,A]$, la fonction $\theta\mapsto\Phi(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$.

• Pour chaque $\theta\in]0,\pi]$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,A]$.

• Pour chaque $(x,\theta)\in\mathbb{R}^+\times]0,\pi]$, puisque $x^2-2x\cos\theta+1=(x-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2$,

$$\begin{aligned}|\Phi(x,\theta)|&\leqslant \text{Max}\{\left|\ln(0^2-0\cos\theta+1)\right|,\left|\ln(\cos^2\theta-2\cos\theta\cos\theta+1)\right|,\left|\ln(A^2-2A\cos\theta+1)\right|\}\\&=\text{Max}\{2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|,\left|\ln(A^2-2A\cos\theta+1)\right|\}=\varphi(\theta).\end{aligned}$$

On a vu que la fonction $f_1\ :\ \theta\mapsto 2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|$ est intégrable sur $]0,\pi]$ et d'autre part, la fonction $f_2\ :\ \theta\left|\ln(A^2-2A\cos\theta+1)\right|$ est intégrable sur $[0,\pi]$ et donc sur $]0,\pi]$ car continue sur $[0,\pi]$. Puisque $\varphi=\frac{1}{2}(f_1+f_2+|f_1-f_2|)$, on en déduit que la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,\pi]$. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $[0,A]$ et ceci pour tout $A>1$. Par suite, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$ puis par parité,

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Dérivabilité de F. Soient $A\in]0,1[$ puis $\Phi:\begin{array}{ccc}[-A,A]\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1)\end{array}$.

• Pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $\theta\mapsto\Phi(x,\theta)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.

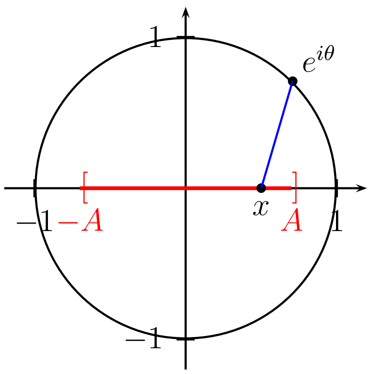
• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,\pi]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall(x,\theta)\in[-A,A]\times[0,\pi],\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\theta)=\frac{2x-2\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}.$$

De plus,
- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$,
- pour chaque $\theta \in [0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue sur $[-A,A]$,
- pour chaque $(x,\theta) \in [-A,A] \times [0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2|x-\cos\theta|}{|x-e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{4}{|A-1|^2} = \varphi(\theta).$$

La dernière inégalité écrite est claire géométriquement :



La plus courte distance d'un point du segment $[-A,A]$ au cercle trigonométrique est la distance de A à 1.

De plus, la fonction constante φ est intégrable sur le segment $[0,\pi]$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A \in]0,1[$, F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta$. La démarche est analogue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ et finalement F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta.}$$

ii. **Calcul de $F'(x)$.** Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a donc $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}F'(x) &= 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta = 8\int_0^{+\infty} \frac{x-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2-2x\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\,\frac{dt}{1+t^2}\\ &= 8\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)x-(1-t^2)}{((1+t^2)x^2-2x(1-t^2)+(1+t^2))(1+t^2)}\,dt\\ &= 8\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}\,dt\end{aligned}$$

Pour tout réel t,

$$\left(t^2+\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1) = \left(t-i\tfrac{x-1}{x+1}\right)\left(t+i\tfrac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

De plus, $\pm\frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x = 0$.
• $F'(0) = 4\int_0^{\pi}(-\cos\theta)\,d\theta = 0$.
• Si $x \neq 0$, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}$ sont simples et par parité, la décomposition en éléments simples de cette fraction s'écrit

$$\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{a}{t-i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{a}{t+i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{b}{t-i} - \frac{b}{t+i},$$

avec

$$\begin{aligned}a &= \frac{-(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+(x-1)}{(x+1)^2\left(2i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)} = \frac{-(x+1)(x-1)^2+(x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2-(x-1)^2)}\\ &= \frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)} = \frac{1}{4ix},\end{aligned}$$

et

$$b = \frac{-(x+1)+(x-1)}{2i(-(x+1)^2+(x-1)^2)} = \frac{1}{4ix}.$$

Donc

$$8\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{2}{ix}\left(\frac{1}{t-i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{t+i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)$$
$$= \frac{2}{ix}\left(\frac{2i\frac{x-1}{x+1}}{t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} + \frac{2i}{t^2+1}\right) = \frac{4}{x}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right)$$

Ensuite, en notant ε le signe de $\frac{x-1}{x+1}$

$$F'(x) = \frac{4}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right)\,dt$$
$$= \frac{4}{x}\left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\frac{x-1}{x+1}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{4}{x}(\varepsilon+1)\frac{\pi}{2}$$

Par suite, si $x \in]-1,1[$, $F'(x) = 0$ et si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-1,1[\\ \frac{4\pi}{x} \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}.}$$

iii. Soit $x > 1$.

$F(x) - 4\pi\ln(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta - \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{x}\cos\theta+\frac{1}{x^2}\right)\,d\theta = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par suite, $\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln(x)) = \lim_{x\to+\infty}F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}F(y) = F(0) = 0$ par continuité de F en 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln(x)) = 0.}$$

iv. • F est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée nulle sur $]-1,1[$. Donc la fonction F est constante sur l'intervalle $[-1,1]$. Par suite, pour tout réel $x \in [-1,1]$, $F(x) = F(0) = 0$.
• F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1$, $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi\ln x + C$ avec $C = \lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln x) = 0$. Donc $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi\ln x$.
• Si $x < -1$, $F(x) = F(-x) = 4\pi\ln(-x) = 4\pi\ln|x|$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 4\pi\ln(|x|) \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}.}$$

(b) i. Soit $x \in]-1,1[$. Pour $\theta \in [-\pi,\pi]$, on pose $f(\theta) = \ln(x^2-2x\cos\theta+1)$. Puisque $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$, $x^2-2x\cos\theta+1 > 0$ (voir 1)), f est dérivable sur $[-\pi,\pi]$ et pour $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$f'(\theta) = \frac{2x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}}{x-e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{x-e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{i}\left(-\frac{1}{1-xe^{-i\theta}} + \frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)$$
$$= \frac{1}{i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{in\theta} - \sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{-in\theta}\right)\ (\text{car } |xe^{i\theta}| = |xe^{-i\theta}| = |x| < 1)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n.$$

Soit $\theta \in [-\pi,\pi]$. I désigne l'intervalle $[0,\theta]$ ou $[\theta,0]$ suivant que θ soit positif ou négatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I$, posons $g_n(t) = 2\sin(nt)x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$, on a $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$. Comme $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$f(\theta) = f(0) + \int_0^{\theta}f'(t)\,dt = 2\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty}2x^n\int_0^{\theta}\sin(nt)\,dt$$
$$= 2\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \forall \theta \in [-\pi,\pi], \ln(x^2-2x\cos\theta+1) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}x^n.}$$

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [-\pi,\pi]$, $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n\right| \leqslant |x|^n$. Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$F(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta = 0.}$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{x}\cos\theta+\frac{1}{x^2}\right)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}(\ln(1-2x\cos\theta+x^2)-\ln(x^2))\,d\theta = -4\pi\ln|x|+F(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, F\left(\frac{1}{x}\right) = -4\pi\ln|x|+F(x).}$$

Soit $x > 1$. Puisque $\frac{1}{x} \in]0,1[$, $F(x) = 4\pi\ln x + F\left(\frac{1}{x}\right) = 4\pi\ln x$. On retrouve alors les résultats du 1).

Correction de l'exercice 4479 ▲

(a) Soit $A > 0$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[-A,A]$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.

• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,1],\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$,

- pour chaque $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

- pour chaque $(x,t) \in [-A,A]\times[0,1]$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2A = \varphi(t)$, la fonction φ étant continue et donc intégrable sur le

segment $[0,1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt.}$$

(b) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction G et pour tout réel x,

$$\boxed{G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = xt$, on obtient

$$F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,xdt = -e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand $x = 0$ par continuité des fonctions F' et G' sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $F'+G' = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x)+G(x) = F(0)+G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x)+G(x) = \frac{\pi}{4}.}$$

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqslant e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4e^{x^2}},$$

et puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4e^{x^2}} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

(e) Pour $x > 0$, on a $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqslant 0$ et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4480 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut poser $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $A > 0$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

-pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-A,A]$,

- pour chaque $(x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\operatorname{sh}(tx)| \leqslant te^{-t^2}\operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue maintenant une intégration par parties. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto te^{-t^2}$ et $t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\right]_0^A + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2}\operatorname{sh}(tA) + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt = \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = \frac{x}{2}f(x)$.

Ensuite, pour tout réel x, $e^{-x^2/4}f'(x) - \frac{x}{2}e^{-x^2/4}f(x) = 0$ ou encore $(e^{-x^2/4}f)'(x) = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2/4}f(x) = e^0 f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}.}$$

Correction de l'exercice 4481 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue sur $]0,1[$.

Etude en 1. $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 1}{\sim} 1\times 1 = 1$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

Etude en 0. $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t} > 0$.

-si $x > -1$, $-\frac{t^x}{\ln t} \underset{t\to 0}{=} o(t^x)$ et puisque $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- si $x \leqslant -1$, la fonction $t \mapsto -\frac{t^x}{\ln t}$ domine la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t\ln t}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque la fonction $-\frac{1}{t\ln t}$ est positive et que $\int_x^{1/2} -\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(1/2)| \underset{x\to 0}{\to} +\infty$, la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t\ln t}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > -1$. Pour $x > -1$, on peut poser $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $a > -1$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{t-1}{\ln t}t^x \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.

• La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times]0,1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=(t-1)t^x=t^{x+1}-t^x.$$

De plus,
- pour chaque $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,
-pour chaque $t\in]0,1[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,
- pour chaque $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|=(1-t)t^a=\varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable sur $]0,1[$ car $a>-1$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a>-1$, la fonction f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x>-1,\ f'(x)=\int_0^1(t-1)t^x\,dt=\left[\frac{t^{x+2}}{x+2}-\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$$

Par suite, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>-1,\ f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)+C\quad(*)$. Pour déterminer la constante C, on peut utiliser le résultat de l'exercice 2612 : $\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\ln 2$. On peut aussi obtenir directement la constante C sans aucun calcul d'intégrale. Pour cela, déterminons $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
La fonction $g\ :\ t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur le segment $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0)=0$ et $g(1)=1$. On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle $]0,1[$ (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).
Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $x>-1$, on a

$$|g(x)|\leqslant M\int_0^1 t^x\,dt=\frac{M}{x+1}.$$

Ceci montre que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient $C=0$. On a donc montré que

$$\boxed{\forall x>-1,\ \int_0^1\frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt=\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

On retrouve en particulier $\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\ln 2$.

Correction de l'exercice 4482 ▲

Existence de $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Soit $x\geqslant 0$. La fonction $t\mapsto\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ existe pour tout réel positif x et on pose $\forall x\geqslant 0,\ f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Continuité de f sur $[0,+\infty[$. Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}[0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\end{array}$.

- Pour chaque $x\in[0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour chaque $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour chaque $(x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|\Phi(x,t)|=\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leqslant\frac{1}{1+t^2}=\varphi_0(t).$$

De plus, la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car équivalente à $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur $[0,+\infty[$.

Dérivée seconde de f. Soit $a>0$. On pose $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}[0,+\infty[\times[a,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\end{array}$.
En plus de ce qui précède, Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=-\frac{te^{-tx}}{1+t^2}\text{ et }\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

- Pour chaque $x\in[a,+\infty[$, les fonctions $t\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour chaque $t\in[0,+\infty[$, les fonctions $x\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x\mapsto\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$.
- Pour chaque $(x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{te^{-tx}}{1+t^2}\leqslant\frac{te^{-at}}{1+t^2}=\varphi_1(t)\text{ et }\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right|=\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\leqslant\frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}=\varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt\text{ et }f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

Equation différentielle vérifiée par f. Pour $x>0$,

$$f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f(x)+f''(x)=\frac{1}{x}.}$$

Existence de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,dt$. Si $x=0$, l'exercice 2608, 1) montre que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.
Si $x>0$, une intégration par parties fournit pour $A>0$

$$\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}\,dt=-\frac{\cos A}{A+x}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

La fonction $t\mapsto\frac{\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $A\mapsto\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ et il en est de même de la fonction $A\mapsto\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}\,dt$. Ainsi, pour chaque $x\in[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$ est une intégrale convergente. Pour $x\geqslant 0$, on peut donc poser $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
Equation différentielle vérifiée par g. Pour $x>0$, on pose $u=x+t$. on obtient

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\,du=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.$$

(car toutes les intégrales considérées sont convergentes). Maintenant, les fonctions $c\ :\ u\mapsto\frac{\cos u}{u}$ et $s\ :\ u\mapsto\frac{\sin u}{u}$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et admettent donc des primitives sur $]0,+\infty[$. On note C (respectivement S) une primitive de la fonction c (respectivement s) sur $]0,+\infty[$). Pour tout réel $x>0$, $\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=\lim_{t\to+\infty}C(t)-C(x)$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-c$. De même, la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-s$. Mais alors la fonction g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\frac{\sin x\cos x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos x\sin x}{x}\\&=-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du.\end{aligned}$$

La fonction g' est encore de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos^2 x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du+\frac{\sin^2 x}{x}\\&=\frac{1}{x}-g(x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ g''(x)+g(x)=\frac{1}{x}.}$$

Egalité de f et g sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $(f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$. Donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall x>0$, $(f-g)(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x=A\cos(x+\varphi)$ pour $A=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ et pour un certain φ.
Maintenant, pour $x>0$, $|f(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x}$ et on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.
Ensuite, $|g(x)|\leqslant\left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du\right|+\left|\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\right|$. Puisque les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ sont des intégrales convergentes, on a $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=0$ et donc aussi $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.
Finalement, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$ ce qui impose $A=0$ et donc $\forall x>0$, $f(x)=g(x)$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Continuité de g en 0 et valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$. Pour $x>0$,

$$\begin{aligned}g(x)&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\\&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\sin x\int_x^1\frac{1-\cos u}{u}\,du-\sin x\ln x.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $\sin x\ln x\sim x\ln x$ et donc $\lim_{x\to 0}\sin x\ln x=0$. Ensuite, la fonction $u\mapsto\frac{1-\cos u}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que $\lim_{x\to 0}\sin x\int_x^1\frac{1-\cos u}{u}\,du=0\times\int_0^1\frac{1-\cos u}{u}\,du=0$. Il reste

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=g(0).$$

La fonction g est donc continue en 0. Puisque la fonction f est également continue en 0, on en déduit que

$$g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt \text{ et en particulier, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4483 ▲

(a) • Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0,T]$ et donc intégrable sur ce segment. Par suite, $f*g(x)$ existe.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $f*g(x+T) = \int_0^T f(x+T-t)g(t)\,dt = \int_0^T f(x-t)g(t)\,dt = f*g(x)$. Donc la fonction $f*g$ est T-périodique.

• Les fonction f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Ces fonctions sont en particulier bornées sur $\mathbb{R}$. On note M_1 et M_2 des majorants sur $\mathbb{R}$ des fonctions $|f|$ et $|g|$ respectivement.

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,T] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$.

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,T]$.
- Pour chaque $t \in [0,T]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, $|\Phi(x,t)| \leqslant M_1M_2 = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,T]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soient f et g deux éléments de E. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x-t$, on obtient

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_0^T f(x-t)g(t)\,dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u-t)\,(-du) = \int_{x-T}^x g(u-t)f(u)\,du \\ &= \int_0^T g(u-t)f(u)\,du \text{ (car la fonction } u \mapsto g(u-t)f(u) \text{ est } T\text{-périodique)} \\ &= g*f(x). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4486 ▲

(a) On cherche une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = ax$ pour $x \in]0,\infty[$. Alors en injectant $y(x)$ dans (E) on a

$$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$

donc $a^2 = 9$. On prend donc $y_0(x) = 3x$ comme solution particulière de (E) définie sur $]0,\infty[$.

(b) On fait le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $]0,\infty[$ à trouver. Ici $y_0(x) = 3x$ donc $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$. On calcule les dérivées et le carré de $y(x)$ pour l'injecter dans (E) : On a

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$

donc en injectant dans (E) on a

$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$

d'où en simplifiant et en arrangeant on a :

$$(E1) \qquad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1.$$

Correction de l'exercice 4490 ▲

Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2/2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. On cherche maintenant une solution particulière de E sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$ (méthode de la variation de la constante). On a :
$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}$. Donc y_p est solution de E si et seulement si : $c'(x) = xe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit la fonction c parmi les primitives de la fonction xe^{x^2}, par exemple : $c(x) = 1/2e^{x^2}$. Donc la fonction y_p telle que $y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$ est solution de

E.
Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}\ c \in \mathbb{R}.$$

Pour y solution de E_1, la condition $y(0) = 1$ équivaut à : $c = 1/2$.

Correction de **l'exercice 4498 ▲**

Les équations différentielles à résoudre dans cet exercice sont toutes linéaires du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

(a) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x\ln x f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \ln x f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\ln x.f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x} \end{aligned}$$

(b) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xf)'(x) = x + \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ sont continues sur $I =]-\infty, 0[$ et on saitque les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x} f(x) = \frac{x^3}{2} \\ &\forall x \in I,\ e^{\ln|x|/2} f'(x) + \frac{1}{2x} e^{\ln|x|/2} f(x) = \frac{x^3}{2} e^{\ln|x|/2} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{-x} f)'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{7/2} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x} f(x) = \frac{1}{9}(-x)^{9/2} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{9} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Les fonctions $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2 - 3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x} f'(x) + 2e^{2x} f(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x} f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \end{aligned}$$

Recherche d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$.
1ère méthode. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x)e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x-3)e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{4}(2x^2 - 8x + 3)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)e^{2x} + C \end{aligned}$$

2ème méthode. Cherchons les primitives de $x \mapsto (x^2-3x)e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})' = (2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))e^{2x} = (2ax^2+2(a+b)x+b+2c)e^{2x}.$$

Donc,

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})' = (x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a=1 \\ 2(a+b)=-3 \\ b+2c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=1 \end{array}\right. .$$

Résolution de (E).

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x) = (x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f(x) = (\frac{x^2}{2}-2x+1)e^{2x}+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x}.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme$x \mapsto \frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x}$,$\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)+f(x) = \frac{1}{1+2e^x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^xf'(x)+e^xf(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^xf(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x)+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)+\lambda)e^{-x}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)+\lambda)e^{-x}$,$\lambda \in \mathbb{R}$.

(f) Les fonctions $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sin x}$ sont continues sur $I =]0,\pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Mais $x \mapsto \sin x$ est une solution non nulle de (E_H) sur I et $x \mapsto \cos x$ est une solution de (E) sur $]0,\pi[$.
Les solutions de (E) sur $]0,\pi[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \sin x + \cos x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4499 ▲

L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

Soit I l'un des deux intervalles $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Résolution de (E) sur I. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (1-x^2)f'(x)-2xf(x) = x^2$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3}+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x^3+\lambda}{3(1-x^2)},$$

(en renommant λ la constante 3λ).
Si $I =]-1,+\infty[$.
Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 etλ_2 telles que, pour $-1<x<1$, $f(x) = \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x>1$, $f(x) = \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1) = -\frac{1}{2}$.
En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} \text{ si } -1<x<1 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x=1 \\ \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} \text{ si } x>1 \end{array}\right. .$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $]-1,1[$ et solution de (E) sur $]-1,1[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et solution de (E) sur $]1,+\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x=1$. Donc, f est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.
Pour $-1<x<1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}+\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{2x^3+2\lambda_1+3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1+\lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1\neq -1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si λ_2 n'est pas -1, f n'est pas dérivable à droite en -1. Ainsi, si f est solution de (E) sur I, nécessairement $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Dans ce cas, pour $x\in]-1,+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x)=\frac{x^3-1}{3(1-x^2)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)}=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x=1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$, nécessairement pour $x>-1$, $f(x)=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.
Sur $]-1,+\infty[$, (E) admet une et une seule solution à savoir la fonction $x\mapsto -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.
Si $I=\mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $]-1,+\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4500 ▲

Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.
Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ |x|f'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)+(1-\frac{1}{x})f(x)=x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x)+(1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x)=e^{x-\ln x}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'(x)=xe^x=((x-1)e^x)'\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda)=x^2-x+\lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$.
Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ f'(x)+(-1+\frac{1}{x})f(x)=-x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x)+(-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x)=-e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ (-xe^{-x}y)'=x^3e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x\mapsto -x^3e^{-x}$ de la forme $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=(-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))e^{-x}=(-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)e^{-x},$$

et

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=x^3e^{-x}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-a=-1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\b=3\\c=6=d\end{array}\right..$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
On peut montrer que l'équation admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ en « recollant » les expressions précédentes, mais en ce début d'année, on manque encore d'outils.

Correction de l'exercice 4501 ▲

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g\ :\ x\mapsto \lambda e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dans ce cas, pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x+T)=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt$. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt&=\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+\int_x^{x+T}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+\int_0^T e^{a(u+T)}f(u+T)\,du\\&=\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+e^{aT}\int_0^T e^{au}f(u)du.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}g(x+T)&=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+e^{-ax}\int_0^T e^{au}f(u)\,du\\&=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt+g(x)-\lambda e^{-ax}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}g\text{ est }T\text{-périodique}&\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt-\lambda e^{-ax}=0\\&\Leftrightarrow\lambda(1-e^{-aT})=e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\Leftrightarrow\lambda=\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\end{aligned}$$

($e^{-aT}\neq 1$ car $a\neq 0$ et $T\neq 0$). D'où l'existence et l'unicité d'une solution T-périodique :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dte^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt.$$

Correction de l'exercice 4506 ▲

$y''-3y'+2y=e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r)=(r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}\text{ avec }c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x)=P(x)e^x$, on est dans la situation (ii) la condition $(*)$ sur P est : $P''-P'=1$, et $P(x)=-x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x)=(c_1-x)e^x+c_2e^{2x}\text{ avec }c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4507 ▲

$y''-y=-6\cos x+2x\sin x$. Ici $f(r)=(r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}\text{ avec }c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y''-y=-6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y''-y=2x\sin x$, car $y_p(x)=3\cos x+y_1(x)$ sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que $2x\sin x=\mathrm{Im}(2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y''-y=2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i)=-2\neq 0$. On a $f'(i)=2i$, la condition $(*)$ sur P est donc : $2iP'(x)-2P(x)=2x$ ce qui donne après identification $P(x)=-x-i$. Alors $y_1(x)=\mathrm{Im}((-x+i)e^{ix})=-x\sin x-\cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+2\cos x-x\sin x\text{ avec }c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y''-y=2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x)=A(x)\sin x+B(x)\cos x$ où A,B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha+i\beta$ et non sur α ou β...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ...on obtient la condition :

$$(A''-A-2B')\sin x+(B''-B-2A')=2x\sin x$$

qui sera réalisée si : $\begin{cases} A''-A-2B'=2x \\ B''-B-2A'=0 \end{cases}$.
On écrit : $A(x)=ax+b$ et $B(x)=cx+d$, après identification on obtient : $a=d=-1$, $b=c=0$, ce qui détermine y_1.

Correction de l'exercice 4508 ▲

$4y''+4y'+5y=\sin xe^{-x/2}$. L'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1=-1/2+i$ et $r_2=\overline{r_1}$ et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x)=e^{-x/2}(c_1\cos x+c_2\sin x) \text{ avec } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

On a $\sin xe^{-x/2}=\mathrm{Im}(e^{(-1/2+i)x})$, on commence donc par chercher une solution z_p de l'équation avec le nouveau second membre $e^{(-1/2+i)x}$.Comme $-1/2+i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherchera $z_p(x)=P(x)e^{(-1/2+i)x}$ avec P de degré 1. Par conséquent la condition $(*)$ sur P :

$$4P''+f'(-1/2+i)P'+f(-1/2+i)P=1$$

s'écrit ici : $8iP'=1$ ($P''=0$, $f(-1/2+i)=0$ et $f'(-1/2+i)=8i$), on peut donc prendre $P(x)=-i/8x$ et $z_p(x)=-i/8xe^{(-1/2+i)x}$, par conséquent sa partie imaginaire $y_p(x)=\mathrm{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x})=1/8x\sin xe^{-x/2}$ est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x)=e^{-x/2}(c_1\cos x+(c_2+1/8x)\sin x) \text{ avec } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4509 ▲

(a) Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x)=x^2+2x+4$; son discriminant est $\Delta=-12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x)=e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x+b\sin\sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a,b décrivent $\mathbb{R}$.

(b) Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda=1$ et $Q(x)=x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x)=R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1)\neq 0$. On pose donc $R(x)=ax+b$. On a

$$y_p''(x)+2y_p'(x)+4y_p(x)=(7ax+7b+4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax+7a+4b=x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a=\frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b=\frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x)=\frac{1}{7}(x-\frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x)=e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x+b\sin\sqrt{3}x)+\frac{1}{7}(x-\frac{4}{7})e^x\ ;\ a,b\in\mathbb{R}.$$

(c) Soit h une solution de E. Les conditions $h(0)=1$, $h(1)=0$ sont réalisées ssi

$$a=\frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b=-\frac{53\cos\sqrt{3}+3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

(d) i. On a : $g'(x)=e^xf'(e^x)$ et $g''(x)=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$ d'où pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g''(x)+2g'(x)+4g(x)=e^{2x}f''(e^x)+2e^xf'(e^x)+4f(e^x)=e^x\log e^x=xe^x$$

donc g est solution de E.

ii. Réciproquement pour $f(t)=g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t)+b\sin(\sqrt{3}\log t))+\frac{t}{7}(\log t-\frac{4}{7})\ ;\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4515 ▲

(a) L'équation caractéristique $r^2-4r+4=0$ a une racine (double) $r=2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x)=(c_1x+c_2)e^{2x} \text{ où } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(b) Pour $d(x)=e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x)=ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x)=-2e^{-2x}$ et $y_1''(x)=4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (4a-4(-2a)+4a)e^{-2x}=e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a=\frac{1}{16}$.

Pour $d(x)=e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x)=ax^2e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x)=(2ax+2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x)=(2a+4ax+4ax+4ax^2)e^{2x}=(4ax^2+8ax+2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (4ax^2+8ax+2a-4(2ax+2ax^2)+4ax^2)e^{2x}=e^{2x}$$

donc si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.

(c) On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x)=\frac{1}{4}(y_1(x)+y_2(x))=\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x)=(c_1x+c_2)e^{2x}+\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}\text{ où }c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4523 ▲

Réponse : $(\lambda x+\mu)e^{-x}+\frac{e^x}{25}[(3x-4)\cos x-(4x-2)\sin x]+(\sin x-x\cos x)e^{-x}$.

Correction de l'exercice 4524 ▲

Réponse : $\frac{1}{2}(-x\cos x+\sin x)+\lambda\cos x+\mu\sinh x$.

Correction de l'exercice 4527 ▲

Réponse : $x\rightarrow\frac{\lambda x+\mu}{\sqrt{1+x^2}},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4528 ▲

Réponse : $x\rightarrow\lambda x\sinh x+\mu x\cosh x,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4529 ▲

(a) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+2y=0$ est $r^2-2r+2=0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^x(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y''-2y'+2y=\frac{x}{4}(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1-i)x}).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$.

$1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((1+i)^2(ax^2+bx)+2(1+i)(2ax+b)+2a)\\&\quad-2((1+i)(ax^2+bx)+(2ax+b))+2(ax^2+bx))e^{(1+i)x}\\&=(2(1+i)(2ax+b)+2a-2((2ax+b)))e^{(1+i)x}=(2i(2ax+b)+2a)e^{(1+i)x}\\&=(4iax+2a+2ib)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$f''-2f'+2f=xe^{(1+i)x}\Leftrightarrow 4ia=1\text{ et }2ib+2a=0\Leftrightarrow a=-\frac{i}{4}\text{ et }b=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1-i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{4}(ix^2+x)e^{(1-i)x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$.
$-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x \mapsto (ax+b)e^{(-1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f'' - 2f' + 2f &= (((-1+i)^2(ax+b) + 2(-1+i)a) - 2((-1+i)(ax+b)+a) + 2(ax+b))e^{(-1+i)x}\\ &= ((ax+b)(-2i-2(-1+i)+2) + 2(-1+i)a - 2a)e^{(-1+i)x}\\ &= (4(1-i)(ax+b) - 2(2-i)a)e^{(1+i)x} = (4(1-i)ax - 2(2-i)a + 4(1-i)b)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}f'' - 2f' + 2f = xe^{(-1+i)x} &\Leftrightarrow 4(1-i)a = 1 \text{ et } 4(1-i)b - 2(2-i)a = 0\\ &\Leftrightarrow a = \frac{1+i}{8} \text{ et } b = \frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)} = \frac{(3+i)(1+i)}{32} = \frac{1+2i}{16}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1-i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1-i)x + 1 - 2i)e^{(-1-i)x}$.
Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = x\cos x \operatorname{ch} x$ est donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(2\mathrm{Re}(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x} + \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x})\\ &= \frac{1}{32}\mathrm{Re}(4(-ix^2+x)(\cos x + i\sin x)e^x + (2x+1+2(x+1)i)(\cos x + i\sin x)e^{-x}\\ &= \frac{1}{32}(4(x\cos x + x^2\sin x)e^x + ((2x+1)\cos x - 2(x+1)\sin x)e^{-x})\end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{1}{8}(x\cos x + x^2\sin x) + \lambda\cos x + \mu\sin x)e^x + ((2x+1)\cos x - 2(x+1)\sin x)e^{-x})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(b) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $r^2 + 6r + 9 = 0$ qui admet la racine double $r = -3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{-3x}(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f'' + 6f' + 9f &= ((4(ax^2+bx+c) + 4(2ax+b) + 2a) + 6(2(ax^2+bx+c) + (2ax+b)) + 9(ax^2+bx+c))e^{2x}\\ &= (25(ax^2+bx+c) + 10(2ax+b) + 2a)e^{2x} = (25ax^2 + (20a+25b)x + 2a + 10b + 25c)e^{2x}\end{aligned}$$

puis,

$$f'' + 6f' + 9f = x^2e^{2x} \Leftrightarrow 25a = 1 \text{ et } 20a + 25b = 0 \text{ et } 2a + 10b + 25c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{25} \text{ et } b = -\frac{4}{125} \text{ et } c = \frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$ est $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)e^{2x}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{-3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(c) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet la racine double $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$.
1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x \mapsto ax^2e^x$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$f'' - 2f' + f = ((ax^2 + 2(2ax) + 2a) - 2(ax^2 + (2ax)) + ax^2)e^{2x} = 2ae^x$$

puis,

$$f'' - 2f' + f = e^x \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{-x}$.

$$f'' - 2f' + f = (a + 2a + a)e^{-x} = 4ae^{-x}$$

puis,

$$f'' - 2f' + f = e^{-x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{x^2}{4} + \lambda x + \mu)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2ky' + (1 + k^2)y = 0$ est $r^2 - 2kr + 1 + k^2 = 0$ dont le discriminant réduit vaut $-1 = i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k + i$ et $k - i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Le second membre s'écrit $\mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$. Résolvons donc l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.
Si $k \neq 1$, $1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{(1+i)x}$. Or,

$$f'' - 2kf' + (1 + k^2)f = a((1 + i)^2 - 2k(1 + i) + 1 + k^2)e^{(1+i)x} = ((k - 1)^2 - 2(k - 1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$f'' - 2kf' + (1 + k^2)f = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{k - 1}\frac{1}{k - 1 - 2i} = \frac{k - 1 + 2i}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{k-1-2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ est

$$\frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}\mathrm{Im}((k - 1 - 2i)(\cos x + i \sin x)e^x = \frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}(-2\cos x + (k - 1)\sin x)e^x.$$

Si $k \neq 1$, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}(-2\cos x + (k - 1)\sin x)e^x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{kx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4530 ▲

(a) Supposons y deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc, puisque pour tout réel t, $z(t) = y(e^t)$, la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions deux fois dérivables. Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto z(t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, puisque pour tout réel strictement positif x, $y(x) = z(\ln x)$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour t réel, posons donc $x = e^t$ puis, $z(t) = y(x) = y(e^t)$. Alors, $z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)$ puis $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = xy'(x) + x^2 y''(x)$. Donc, $xy'(x) = z'(t)$ et $x^2 y''(x) = z''(t) - xy'(x) = z''(t) - z'(t)$.
Par suite,

$$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = a(z''(t) - z'(t)) + bz'(t) + cz(t) = az''(t) + (b - a)z'(t) + cz(t).$$

Donc,

$$\forall x > 0,\ ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ az''(t) + (b - a)z'(t) + cz(t) = 0.$$

(c) On applique le 2) avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. L'équation à résoudre sur $\mathbb{R}$ est alors $z'' - 2z' + z = 0$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x \ln x + \mu x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4531 ▲

(a) $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$.

(b) $y = \frac{C+\sin x}{x}$.

(c) $y = -\cos x + \frac{\sin x+\lambda}{1+x}$.

(d) $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$.

(e) $y = \lambda x^{4/3} - x$.

(f) $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{3\sin 2x - 6\cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.

(g) $y = \frac{\mathrm{Argch}(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$

$y = \frac{\arcsin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$

$y = \frac{-\mathrm{Argch}(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$.

(h) $y = \frac{x-1}{2x}\arctan x + \frac{x+1}{2x}\left(\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda\right)$.

(i) $y = \frac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big)$.

Correction de l'exercice 4532 ▲

(a) $y = (x + a\cos x + b\sin x)e^x$.

(b) $y = (ax+b)e^{2x} + 2xe^x$.

(c) $y = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.

(d) $y = \sin x \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \lambda\cos x + \mu\sin x$ (variation de la constante avec sin).

(e) $y = (\lambda + \ln|x|)e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

(f) $y = \lambda\cos x + \mu\sin x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P^{(2n)}(x)$.

(g) $y = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2+b^2 = 1$ ou $y = \pm 1$.

Correction de l'exercice 4533 ▲

(a) $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.

(b) $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \frac{2x^2+3}{16}$.

(c) $y = \lambda x^2 + \mu\ln x$.

(d) $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$.

(e) $y = x^2\ln|x+1| + \lambda\left(x^2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + x - \frac{1}{2}\right) + \mu x^2$.

(f) $y = \frac{-1+a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x}{x^2}$.

(g) $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$.

(h) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\mathrm{ch}\,x - x\,\mathrm{sh}\,x) + b(x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x)$.

Correction de l'exercice 4534 ▲

(a) $2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3} \Rightarrow y = \begin{cases} a_0\cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geq 0 \\ a_0\,\mathrm{ch}(|x|^{3/2}) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Solution générale : $y = \begin{cases} a\cos u + b\sin u & \text{si } x \geq 0 \\ a\,\mathrm{ch}\,u + b\,\mathrm{sh}\,u & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$ avec $u = |x|^{3/2}$.

(b) $n(n+1)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = a_0\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}$.

Solution générale : $y = \frac{a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x}{x}$.

(c) $(2n+1)(2n+2)a_{n+1} = a_n \Rightarrow y = a_0\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$.

Solution générale sur $\mathbb{R}^+$: $u = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{x}) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{x})$.

(d) $n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2} = 0 \Rightarrow y = a_0(1-x^2)e^{-x^2/2} + a_1 z$.

Solution générale : $y = (1-x^2)e^{-x^2/2}(a + bF(x)) + bx$ avec $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2/2}\,dt$.

(e) $(n+2)(n+3)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = \frac{x-\mathrm{sh}\,x}{x^3}$.

Solution générale : $y = \frac{a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x + x}{x^3}$.

(f) $na_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow y = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}$.

Solution générale : $y = \frac{ax + b(1 + x\ln|x|)}{(1-x)^2}$.

Correction de l'exercice 4535 ▲

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.

Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ solution de l'équation.

Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Correction de l'exercice 4536 ▲

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.

$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\frac{x\sin kx}{2k^3}$.

Correction de l'exercice 4537 ▲

$y = x+1+\lambda e^x$ ou $y = x-1+\lambda e^{-x}$.

Correction de l'exercice 4538 ▲

$$y = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1-\cos x+\sin x & \text{si } 0 \le x < \frac{3\pi}{2} \\ e^{3\pi/2-x} - 1 & \text{si } x \ge \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4539 ▲

$4xz''+2z'+z = \frac{-1}{y^2}\left(4xy''+2y'-y-\frac{8xy'^2}{y}\right) = \frac{2}{y^3}(y^2+4xy'^2)$ donc $\frac{y'}{y} = \pm\frac{1}{\sqrt{-4x}}$ et $y = \lambda\exp(\pm\sqrt{-x})$ pour $x < 0$.

Résolution sans indication : on pose $x = \varepsilon t^2$ et $y(x) = z(t)$ d'où $\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon z = 0$.

Correction de l'exercice 4540 ▲

(a) $g(x) = be^{-ax} + \int_{t=0}^{x} e^{a(t-x)}f(t)\,dt$.

(b) $\int_{x=0}^{X} g(x)\,dx = \frac{b}{a}(1-e^{-aX}) + \int_{t=0}^{X}\int_{x=t}^{X} e^{a(t-x)}f(t)\,dx\,dt = \frac{b}{a}(1-e^{-aX}) + \int_{t=0}^{X}\frac{1-e^{a(t-X)}}{a}f(t)\,dt$

$\to \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $X \to +\infty$.

Donc l'intégrale de g converge. On montre la convergence absolue par majoration élémentaire.

Correction de l'exercice 4541 ▲

(a) $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t+2\beta-\gamma)e^{2t}, \quad y = (\gamma t+\beta)e^{2t}, \quad z = \alpha e^t + (\gamma t+\beta)e^{2t}$.

(b) $y = -1+\lambda e^{\alpha t}+\mu e^{\beta t}, \quad z = -1+\lambda(1+\alpha)e^{\alpha t}+\mu(1+\beta)e^{\beta t}, \quad \alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

(c) $y = \frac{-3\cos t-13\sin t}{25} + (at+b)e^{2t}, \quad z = \frac{-4\cos t-3\sin t}{25} + (at+a+b)e^{2t}$.

(d) $x = (a+bt+ct^2)e^t, \quad y = \left(a+\frac{b-c}{2}+(b+c)t+ct^2\right)e^t, \quad z = \left(a-\frac{b+c}{2}+(b-c)t+ct^2\right)e^t$.

(e) $x = -(b+c)e^t + (a+b+c)e^{2t}$,
$y = \frac{1}{2}(-a+5b+3c) - 2(b+c)e^t + \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$,
$z = \frac{1}{2}(a-5b-3c) + 3(b+c)e^t - \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$.

(f) $x = (at^2+(a+b+\frac{1}{2})t+a+b+c)e^t$,
$y = (at^2+(b-a+\frac{1}{2})t+a+c)e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$,
$z = (-at^2+(a-b-\frac{1}{2})t-c)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

Correction de l'exercice 4542 ▲

$y = (t^2+1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Rightarrow (t^2+1)x'' + 2tx' - 2x = 6t$.

Résolution par DSE $\Rightarrow x = a(1+t\arctan t) + bt + t\ln(1+t^2)$, $y = a\arctan t + b + 1 + \ln(1+t^2)$.

Correction de l'exercice 4545 ▲

Dériver deux fois. $f(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{2}+\lambda\operatorname{sh} x+\mu\cos x$.

Correction de l'exercice 4546 ▲

(a) $z'+\frac{z}{\operatorname{th} x}=0$.

(b) $y=\frac{ax+b}{\operatorname{sh} x}$.

(c)

(d)

(e)

Correction de l'exercice 4547 ▲

(a) spectre $=(x^2+1)$, $f_\lambda(t)=e^{-t^2/2}e^{\lambda t}$.

(b) Pour $\lambda\neq 0$, $\Phi^2(f)=\lambda^2 f\Leftrightarrow f=af_\lambda+bf_{-\lambda}$.
Pour $\lambda=0$, $\Phi^2(f)=0\Leftrightarrow f(t)=(at+b)e^{-t^2/2}$.

(c) $\Phi^2(y)=-2y\Leftrightarrow y=e^{-t^2/2}\big(a\cos(t\sqrt{2})+b\sin(t\sqrt{2})\big)$.

Correction de l'exercice 4548 ▲

(a) $\lambda=n^2 : P(X)=aX^n$.

(b) $\lambda>0 : f(x)=\alpha x^{\sqrt{\lambda}}+\beta x^{-\sqrt{\lambda}}$.
$\lambda=0 : f(x)=\alpha+\beta\ln x$.
$\lambda<0 : f(x)=\alpha\cos\big(\sqrt{-\lambda}\ln x\big)+\beta\sin\big(\sqrt{-\lambda}\ln x\big)$.

(c) $\lambda\in\mathbb{R} : f(x)=\alpha\exp\lambda\big(\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}\big)$.

Correction de l'exercice 4549 ▲

(a) $\lambda=2k$, $P=\alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$ pour $-n\leq k\leq n$.

(b) $\lambda=0$, $P=\alpha X^{2n}$.

(c) $\lambda=0$, $P=\alpha(X^2+1)^n$.

Correction de l'exercice 4550 ▲

$y=\int_{t=0}^{x}g(t)\,dt\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{x}\Rightarrow g(x)=\alpha x^{1\pm\sqrt{2}}$. Continuité en $0\Rightarrow g(x)=\alpha x^{1+\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 4551 ▲

Étudier $e^{-A}(y-z)$, $A'=a$.

Correction de l'exercice 4552 ▲

Point de concours : $\left(x_0-\frac{1}{a(x_0)},-\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

Correction de l'exercice 4554 ▲

(a)

(b) Soient y_0 une solution particulière et y_1 une solution non nulle de l'équation homogène : $y_1(x)=e^{-A(x)}$ avec $A'=a$. Alors $y_0(x+T)=y_0(x)+\alpha y_1(x)$, et pour une solution y quelconque, $y=y_0+\lambda y_1 : y(x+T)-y(x)=(\alpha+\lambda(e^{-I}-1))y_1(x)$ où $I=\int_{t=0}^{T}a(t)\,dt$.

Correction de l'exercice 4555 ▲

$\lambda \neq 0$: $\quad f(x) = a\sin(\alpha x), \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{4} (\operatorname{mod} \pi)$

$\lambda = 0$: $\quad f = 0$.

Correction de l'exercice 4556 ▲

$f(1) = e^{-k}\int_{t=0}^{1} g(t)e^{kt}\,dt$.

Avec Cauchy-Schwarz on obtient $\int_{t=0}^{1}(f'(t)+kf(t))^2\,dt \geq \frac{2k}{1-e^{-2k}}f(1)^2 = 9\frac{2k}{1-e^{-2k}}$.

Il y a égalité pour $f(t) = 3\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{k}-e^{-k}}$.

Correction de l'exercice 4557 ▲

(a) $u_n - u(t_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t} u'(x)\,dx\,dt$ et on majore l'intégrale interne par Cauchy-Schwarz.

(b) $w + w'' = u'$ donc $w(t) = \int_{x=t_n}^{t}\sin(t-x)u'(x)\,dx + \alpha\cos t + \beta\sin t$ puis

$$\begin{aligned}\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt &= \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t}\sin(t-x)u'(x)\,dx\,dt\\ &= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{t=x}^{t_n+2\pi}\sin(t-x)u'(x)\,dt\,dx\\ &= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}u'(x)(\cos(t_n-t)-1)\,dx\\ &\to 0,\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$

et $\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt = w(t_n) - w(t_n+2\pi) = -\int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}\sin(t-x)u'(x)\,dx$.

Correction de l'exercice 4558 ▲

(a) Formule de Duhamel : $y(t) = -\int_{x=0}^{t} e^{t-x}f(x)\,dx + \lambda e^{t}$.

Par convergence dominée, l'intégrale tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ donc toutes les solutions de (E) sont bornées au voisinage de $-\infty$.

Pour $t \geq 0$ on a $y(t) = e^{t}\left(\lambda - \int_{x=0}^{t} e^{-x}f(x)\,dx\right)$ donc il y a au plus une valeur de λ telle que y soit éventuellement bornée au voisinage de $+\infty$, c'est $\lambda = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}f(x)\,dx$.

Pour ce choix on a : $|y(t)| = \left|\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x}f(x)\,dx\right| \leq \int_{x=t}^{+\infty}|f(x)|\,dx \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{t=a}^{b}|F(t)|\,dt &\leq \int_{t=a}^{b}\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x}|f(x)|\,dxdt\\ &\leq \int_{x=a}^{b}\int_{t=a}^{x} e^{t-x}|f(x)|\,dtdx + \int_{x=b}^{+\infty}\int_{t=a}^{b} e^{t-x}|f(x)|\,dtdx\\ &\leq \int_{x=a}^{b}(1-e^{a-x})|f(x)|\,dx + \int_{x=b}^{+\infty}(e^{b-x}-e^{a-x})|f(x)|\,dtdx\\ &\leq \int_{x=-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

donc F est intégrable. $F' = F - f$ est aussi intégrable et $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F'(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Correction de l'exercice 4559 ▲

Poser $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^{x} g(t)\,dt$ puis résoudre :

$$\begin{cases} F(x) &= x - 1 + G'(x)\\ G(x) &= x - 1 + F'(x)\\ F(0) &= G(0) = 0.\end{cases}$$

On trouve $f(x)=g(x)=1$.

Correction de l'exercice 4560 ▲

y' étant bornée, y admet une limite finie en tout point fini donc la solution non prolongeable est définie sur $\mathbb{R}$.
Une solution y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ vu l'équation et $y''=(1+\sin(x+y))\cos(x+y)$ est du signe de $\cos(x+y)$. En un point (x_0,y_0) tel que $x_0+y_0 \equiv \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$ on a $y''=0$ et $\frac{d}{dx}(x+y)\neq 0$ donc y'' change de signe et il y a inflexion. En un point (x_0,y_0) tel que $x_0+y_0 \equiv \frac{3\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$ on a $x+y=$cste (car $y=\text{cste}-x$ est solution et il y a unicité) donc il n'y a pas inflexion.

Correction de l'exercice 4561 ▲

(a) thm de Cauchy-Lipschitz linéaire.
(b) $x\mapsto A(-x)$ et $x\mapsto -B(-x)$ sont solutions de (E) et vérifient les bonnes conditions initiales.
(c) Résoudre $u''(x)+ku(x)=2d\cos(x)u(x)$ par la formule de Duhamel.

Correction de l'exercice 4562 ▲

(a)
(b) Oui, $\operatorname{Ker} u=\{0\}$.
(c) Oui : si $g\in E$ alors $f=t\mapsto \int_{s=-\infty}^{t} e^{s-t}g(s)\,ds$ appartient à E et $f+f'=g$.

Correction de l'exercice 4563 ▲

(a)
(b) $u_p(x)=-\int_{t=0}^{x} pf(t)\operatorname{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right)dt+\frac{\operatorname{sh}(x/p)}{\operatorname{sh}(1/p)}\int_{t=0}^{1} pf(t)\operatorname{sh}\left(\frac{1-t}{p}\right)dt.$
(c) TCD : lorsque $p\to\infty$ $u_p(x)\to -\int_{t=0}^{x}(x-t)f(t)\,dt+x\int_{t=0}^{1}(1-t)f(t)\,dt=\int_{t=0}^{x}t(1-x)f(t)\,dt+\int_{t=x}^{1}x(1-t)f(t)\,dt$ (primitive deuxième de $-f$ s'annulant en 0 et 1).

Correction de l'exercice 4564 ▲

(a) Il suffit de démontrer que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont développables en série entière. La méthode des coefficients indéterminés donne $n(n-1)a_n=(\lambda-1)a_{n-4}$ si $n\geq 4$ et $a_2=a_3=0$ d'où $a_{4k}=\frac{(\lambda-1)^k a_0}{\prod_{i=1}^{k}4i(4i-1)}$, $a_{4k+1}=\frac{(\lambda-1)^k a_1}{\prod_{i=1}^{k}4i(4i+1)}$, $a_{4k+2}=a_{4k+3}=0$. On obtient une série de rayon infini pour tout choix de a_0,a_1 donc les solutions DSE forment un espace vectoriel de dimension 2 et on a ainsi trouvé toutes les solutions.
(b) On doit avoir $H''(x)-2xH'(x)+((2-\lambda)x^2-1)H(x)=0$. Si H est une fonction polynomiale non nulle, en examinant les termes de plus haut degré on obtient une contradiction. Donc il n'existe pas de telle solution.

Correction de l'exercice 4565 ▲

Considérer $h(t)=a+\int_{u=0}^{t}f(u)g(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t)\leq g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel.

Correction de l'exercice 4566 ▲

$f(x)=\int_{t=0}^{x}g(t)\sin(x-t)\,dt+\lambda\cos x+\mu\sin x$ avec $g=f+f''$.

Correction de l'exercice 4567 ▲

On pose $\varphi(t)=f''(t)+f'(t)+f(t)$.
$f(t)=e^{-t/2}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{u=0}^{t}\varphi(u)e^{u/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}(u-t)}{2}\right),du+A\cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)\right].$

Correction de l'exercice 4569 ▲

(a) $y=\int_{t=\alpha}^{x}b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt+y(\alpha)e^{-A(x)}$ avec $A'=a$ et $A(\alpha)=0$.
Comme $a\geq 1$, on a $A(x)\geq x-\alpha$ et $A(t)-A(x)\leq t-x$ pour $t\leq x$.
Donc $|y|\leq \int_{t=\alpha}^{z}|b(t)|e^{t-x}\,dt+\int_{t=z}^{x}|b(t)|e^{t-x}\,dt+|y(\alpha)|e^{\alpha-x}\leq \|b\|_\infty e^{z-x}+\sup_{[z,+\infty[}|b|+|y(\alpha)|e^{\alpha-x}$.
On choisit z tel que $z\to+\infty$ et $x-z\to+\infty \Rightarrow$ cqfd.

(b) Comme $A(t)-A(x) \leq t-x$ pour $t \leq x$, l'intégrale $\int_{t=-\infty}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$. Comme $e^{-A(x)} \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$, c'est la seule.

Correction de l'exercice 4570 ▲

(a) Sinon, la convexité de y est incorrecte.

(b) S'il existe x tel que $z(x) = z'(x) = 0$, alors $z = 0$ ce qui est absurde.
S'il existe x tel que $z(x) = 0 \neq z'(x)$, alors par convexité, z ne peut s'annuler ailleurs.

Correction de l'exercice 4572 ▲

Si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées alors y_1'' et y_2'' sont intégrables donc $y_i'(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $W_{y_1,y_2}(t) = 0$ pour tout t.

Correction de l'exercice 4573 ▲

(a) On suppose $y \neq 0$ sinon y n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) \neq 0$ sinon $y = 0$. Ceci implique que chaque zéro de y est isolé, donc la notion de zéros consécutifs est pertinente. Enfin, $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ sont de signes opposés sinon il existe un autre zéro dans $]x_0,x_1[$.

(b) $W' = (q-r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$ (non simplifiable).

(c) Si z ne s'annule pas dans $]x_0,x_1[$ alors W' est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de W' et de $W(x_1)-W(x_0)$ si $z(x_0) \neq 0$ ou $z(x_1) \neq 0$.

(d) On prend $r = q$, $z = u$. Si $u(x_0) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]x_0,x_1[$ et en permutant les rôles de u et y, le prochain zéro éventuel de u vient après y_1. Sinon, $u = \frac{u'(x_0)}{y'(x_0)}y$.

Correction de l'exercice 4574 ▲

(a)

(b) i. Wronskien.

ii. $\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y-zy'}{y^2}$ est de signe constant $\Rightarrow \frac{z}{y}$ est monotone.
$\frac{z}{y}$ admet des limites infinies en u et v. TVI

Correction de l'exercice 4575 ▲

$z' = -\frac{\lambda}{t^2}\sin(t-a)y(t)$ donc si y ne s'annule pas sur $]a,a+\pi[$, alors z est strictement monotone sur $[a,a+\pi]$. Mais $z(a+\pi)-z(a) = y(a+\pi)+y(a) \Rightarrow$ contradiction de signe.

Correction de l'exercice 4576 ▲

(a) L'ensemble des zéros est localement fini d'après Cauchy-Lipchitz.
Si y ne s'annule pas sur $[a,+\infty[$, par exemple $y > 0$, alors y est concave positive donc minorée, donc $y'' \to -\infty$ ce qui implique $y', y \to -\infty$, contradiction.

(b)

(c) Soit $b_n = \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Alors $b_{n+1} \leq 2\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \leq b_n$ et $b_n \to 0$ donc $b_n \sim b_{n+1} \sim 2\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right)$.
Alors $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{2}$, $b_n \sim \frac{1}{2n}$ et $a_n \sim 2\ln n$.

Correction de l'exercice 4577 ▲

Les formes linéaires $y \mapsto y(a)$ et $y \mapsto y(b)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace des solutions de l'équation homogène.

Correction de l'exercice 4578 ▲

On se ramène au cas $z = 0$. Soit x tel que $y(x) < 0$ et $y'(x) = 0$. Alors $y''(x) < 0$, donc y n'est pas minimale en x. Donc y n'a pas de minimum local sur $]a,+\infty[$.

Correction de l'exercice 4579 ▲

Si $x_i(0) > 0$ pour tout i on obtient une contradiction en considérant le plus petit t tel qu'il existe i avec $x_i(t) < 0$.
Cas général : dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales...

Correction de l'exercice 4580 ▲

$f'(x) = \frac{x+i}{2(x^2+1)} f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{\pi}(x^2+1)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right)$.

Correction de l'exercice 4581 ▲

(a) Soit f non identiquement nulle vérifiant $f'' = \lambda\Delta f$ avec $\lambda > 0$: sur tout intervalle où f est strictement positive, f est strictement convexe donc ne peut pas s'annuler aux deux bords ; idem quand f est strictement négative, il y a contradiction. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

(b) $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} f'(t)g'(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} f''(t)g(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} f(t)g''(t)\,dt$.

(c) i.

ii. Si f_λ a un nombre fini de zéros, soit x_n le dernier et $A = \max(x_n, 2)$. Sur $[A, +\infty[$, f est de signe constant, ε, et on a $f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1)f_\lambda = \varphi$ d'où $f_\lambda(x) = \int_{t=A}^{x} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt + \alpha\cos(x\sqrt{-\lambda}) + \beta\sin(x\sqrt{-\lambda})$. En particulier $f_\lambda(A) + f_\lambda\left(A + \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\right) = \int_{t=A}^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt$ est du signe de $-\varepsilon$, absurde.

Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation x on a $f_\lambda(x) = f_\lambda'(x) = 0$ d'où $f_\lambda = 0$, absurde.

Correction de l'exercice 4582 ▲

(a) Après le prolongement indiqué on peut appliquer le relation de Parseval à f et f' sachant que $c_0(f) = 0$ par imparité et $|c_n(f)| = |c_n(f')|/n \leq |c_n(f')|$ pour $n \neq 0$.

(b) $x''(t) + q(t)x(t) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi x'^2 = \left[xx'\right]_0^\pi - \int_0^\pi xx'' = \int_0^\pi qx^2 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Rmq : il n'est pas nécessaire d'avoir q de classe $\mathscr{C}^1$.

(c) Il existe x_0 de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant l'équation différentielle. Par différence avec x_0 on se ramène au cas $f = 0$ et il faut montrer que l'application $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x(0), x(\pi))$ est bijective, en notant $\mathscr{S}$ l'espace des solutions de l'équation homogène $x'' + qx = 0$. Or φ est linéaire et est injective d'après la question précédente, c'est donc une bijection car $\dim \mathscr{S} = 2$.

Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^1$ est inutile, continue suffit.

Correction de l'exercice 4583 ▲

x et $1/x$ sont solution $\Rightarrow x'^2 + qx^2 = 0$ donc une condition nécessaire est : $q(t) \leq 0$ et $q = -x'^2/x^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Réciproquement, supposons q négative de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $r(t) = \sqrt{-q(t)}$. Si x est solution de $x' = r(t)x$ alors sur tout intervalle I où q ne s'annule pas on a $x'' = r(t)x' + r'(t)x$ donc

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = (r(t) + p(t))x' + (r'(t) + q(t))x = (r(t)p(t) + r'(t))x$$

donc une deuxième condition nécessaire est : $p(t)q(t) = -\frac{1}{2}q'(t)$. Ces deux conditions sont suffisantes si q est strictement négative.

Correction de l'exercice 4584 ▲

La suite (X_k) de fonctions définie par $X_k(t) = X_0$, $X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{u=0}^{t} A(u)X_k(u)\,du$ converge localement uniformément vers X et $X_k(t)$ est clairement à composantes positives pour $t \geq 0$.

Correction de l'exercice 4585 ▲

Pour $n = 1$ et $A(t) = a > 0$ on trouve après les incantations usuelles (équation homogène, variation de la constante et mise en forme de l'intégrale) que $X\ :\ t \mapsto \int_{u=0}^{1} F(tu)u^{a-1}\,du$ est l'unique solution prolongeable en 0 et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 1$ et A non constante, on trouve de même :

$$X(t) = \int_{u=0}^{1} F(tu)u^{A(0)-1} \exp\left(\int_{v=t}^{tu} \frac{A(v) - A(0)}{v}\,dv\right) du$$

et l'on voit que X est $\mathscr{C}^\infty$ en écrivant $\frac{A(v)-A(0)}{v} = \int_{w=0}^{1} A'(vw)\,dw$.

Pour n quelconque et A constante : alors la fonction $X\ :\ t\mapsto\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}F(tu)\,du$ est l'unique solution prolongeable en 0, en convenant que $u^{A(0)-I}=\exp((A(0)-I)\ln(u))$ (l'intégrale converge en 0 car $u^{A(0)-I}=O(u^{\alpha-1}\ln(u)^n)$ pour tout $\alpha>0$ minorant les parties réelles des valeurs propres de $A(0)$).
Pour A non constante, on met l'équation sous forme intégrale :

$$tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)\Leftrightarrow X(t)=\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

Soit $a>0$ à choisir. Posons $E=\mathscr{C}([-a,a],(x^2+1)^n)$ et pour $X\in E$:

$$\Phi(X)=t\mapsto\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

On a facilement : $\Phi(X)\in E$ si $X\in E$ et Φ est contractante sur E pour $\|\ \|_\infty$ si a est choisi suffisament petit. Donc l'équation $tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)$ admet une solution (unique) définie au voisinage de 0, et cette solution est prolongeable en une solution sur $\mathbb{R}$ car le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en dehors de 0. Par ailleurs, on a :

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\ X(t)=\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du,$$

ce qui montre par récurrence sur $k\in|||$ que X est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4586 ▲

(a) Poser $F(t)=\int_{u=t_0}^{t}f(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $F'(t)\le g(t)+kF(t)$ par la formule de Duhamel.

(b)

$$\begin{aligned}
M'=AM &\Rightarrow |||M'(t)|||\le K|||M(t)|||\\
&\Rightarrow |||M(t)-I|||\le K\int_{u=t0}^{t}|||M(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||M(t)|||\le 1+K\int_{u=t0}^{t}|||M(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||M(t)|||\le 1+K\int_{u=t0}^{t}e^{K(t-u)}\,du=e^{K(t-t_0)}.\\
(M-N)'=(A-B)M+B(M-N)&\\
&\Rightarrow |||(M-N)'(t)|||\le \eta e^{K(t-t_0)}+(K+\eta)|||(M-N)(t)|||\\
&\Rightarrow |||(M-N)(t)|||\le \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+(K+\eta)\int_{u=t_0}^{t}|||(M-N)(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||(M-N)(t)|||\le \underbrace{\frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+\frac{(K+\eta)\eta}{K}\int_{u=t_0}^{t}e^{(K+\eta)(t-u)}(e^{K(u-t_0)}-1)\,du}_{=e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)}
\end{aligned}$$

(c) $X_0(t)=M_0(t)\alpha$ et $Y_0(t)=N_0(t)\alpha$, d'où $\|X_0(t)-Y_0(t)\|\le e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)\|\alpha\|$.

Correction de l'exercice 4587 ▲

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation différentielle considérée et (E_H) l'équation homogène associée.

(a) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ forment un $\mathbb{R}$-espace affine de direction l'espace des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1. La fonction $x\mapsto 1$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x\mapsto e^{-x}$ est une solution non nulle de (E_H) sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto 1+\lambda e^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

(b) Les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^{x/2}$. Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
1ère solution. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto a\cos x+b\sin x$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit f une telle fonction. Alors, pour tout réel x,

$$2f'(x)-f(x)=2(-a\sin x+b\cos x)-(a\cos x+b\sin x)=(-a+2b)\cos x+(-2a-b)\sin x.$$

Par suite,

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(x) - f(x) = \cos x \Leftarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ -2a-b=0 \end{cases}$$
$$\Leftarrow a = -\frac{1}{5} \text{ et } b = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \tfrac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x) + \lambda e^{x/2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2ème solution. Par la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x/2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit f une telle fonction.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur} \mathbb{R} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\left(\lambda'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\lambda(x)e^{x/2}\right) - 2\lambda(x)e^{x/2} = \cos(x)$$
$$\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x.$$

Or,

$$\int \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int e^{(-\frac{1}{2}+i)x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}}{-\frac{1}{2}+i}\right) + C = \frac{1}{5}e^{-x/2}\mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)(-1-2i)\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x) + C.$$

Par suite, on peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x)$ ce qui fournit la solution particulière $f_0(x) = \frac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x)$.

(c) Puisque les fonctions $x \mapsto -2$ et $x \mapsto xe^{2x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{-2x}f)'(x) = x$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\tfrac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

(d) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $z^2 - 4z + 4 = 0$ et admet $z_0 = 2$ pour racine double. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique, l'équation $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ admet une solution particulière f_0 de la forme : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = ax^2e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} - 4a(2x^2 + 2x)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 2ae^{2x},$$

et f_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\tfrac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

(e) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est $z^2 + 4 = 0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -2i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Une solution réelle de l'équation $y'' + 4y = \cos(2x)$ est la partie réelle d'une solution de l'équation $y'' + 4y = e^{2ix}$. Puisque le nombre $2i$ est racine simple de (E_c), cette dernière équation admet une solution de la forme $f_1 : x \mapsto axe^{2ix}$, $a \in \mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,

$$f_1''(x) + 4f_1(x) = a((-4x + 4i)e^{2ix} + 4xe^{2ix}) = 4iae^{2ix}.$$

et f_1 est solution de $y'' + 4y = e^{2ix}$ si et seulement si $a = \frac{1}{4i}$. On obtient $f_1(x) = \frac{1}{4i}xe^{2ix} = \frac{1}{4}x(-i\cos(2x) + \sin(2x))$ ce qui fournit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \frac{1}{4}x\sin(2x)$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \tfrac{1}{4}x\sin(2x) + \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

(f) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_H) est $z^2+2z+2=0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1=-1+i$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Pour tout réel x, $\cos(x)\operatorname{ch}(x)=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\operatorname{ch}(x)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}\right)$. Notons (E_1) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(f_1+f_2)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de superposition des solutions.

• (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1\ :\ x\mapsto ae^{(1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f_1''(x)+2f_1'(x)+2f_1(x)=a((1+i)^2+2(1+i)+2)e^{(1+i)x}=a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

et f_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{4+4i}=\frac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x)=\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.

• (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2\ :\ x\mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,

$$f_2''(x)+2f_2'(x)+2f_2(x)=a(((-1+i)^2x+2(-1+i))+2((-1+i)x+1)+2x)e^{(-1+i)x}=2iae^{(-1+i)x}$$

et f_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$. On obtient $f_2(x)=-\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}$.

• Une solution particulière f_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc définie pour tout réel x par

$$\begin{aligned}f_0(x)&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}-\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))e^{x}-\frac{i}{2}(\cos(x)+i\sin(x))e^{-x}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(\cos(x)+\sin(x))e^{x}+\frac{1}{2}\sin(x)e^{-x}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\frac{1}{16}(\cos(x)+\sin(x))e^{x}+\frac{1}{4}\sin(x)e^{-x}+(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Correction de l'exercice 4588 ▲

(a) Posons $g=f'+\alpha f$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+\alpha y=g$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\ell$. Ensuite,

$$\begin{aligned}f'+\alpha f=g&\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ e^{\alpha x}f'(x)+\alpha e^{\alpha x}f(x)=e^{\alpha x}g(x)\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ (e^{\alpha x}f)'(x)=e^{\alpha x}g(x)\\&\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ e^{\alpha x}f(x)=f(0)+\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(0)e^{-\alpha x}+e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt.\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Re}(\alpha)>0$ et que $\left|e^{-\alpha x}\right|=e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}$, $\lim_{x\to+\infty}f(0)e^{-\alpha x}=0$. Vérifions alors que $\lim_{x\to+\infty}e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt=\frac{\ell}{\alpha}$ sachant que $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\ell$.

On suppose tout d'abord $\ell=0$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $A_1>0$ tel que $\forall t\geqslant A_1$, $|g(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x\geqslant A_1$,

$$\begin{aligned}\left|e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|&\leqslant e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1}e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|+e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\operatorname{Re}(\alpha)t}|g(t)|\,dt\\&\leqslant e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1}e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|+e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\operatorname{Re}(\alpha)t}\times\frac{\varepsilon}{2}\,dt\\&=e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1}e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\alpha)(x-A_1)}\right)\\&\leqslant e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1}e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Maintenant $\lim_{x\to+\infty}e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1}e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|=0$ et donc il existe $A\geqslant A_1$ tel que $\forall x>A$, $e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1}e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x>A$, on a $\left|e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a ainsi montré que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0=\frac{\ell}{\alpha}$.

On revient maintenant au cas général ℓ quelconque.

$$\begin{aligned}f'+\alpha f\underset{x\to+\infty}{\to}\ell&\Rightarrow f'+\alpha f-\ell\underset{x\to+\infty}{\to}0\Rightarrow\left(f-\frac{\ell}{\alpha}\right)'+\alpha\left(f-\frac{\ell}{\alpha}\right)\underset{x\to+\infty}{\to}0\\&\Rightarrow f-\frac{\ell}{\alpha}\underset{x\to+\infty}{\to}0\Rightarrow f\underset{x\to+\infty}{\to}\frac{\ell}{\alpha}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall\alpha\in\mathbb{C}\text{ tel que }\operatorname{Re}(\alpha)>0,\ \lim_{x\to+\infty}(f'(x)+\alpha f(x))=\ell\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\ell}{\alpha}.}$$

(b) $f''+f'+f=(f'-jf)'-j^2(f'-jf)$. D'après 1), comme $\mathrm{Re}(-j^2)=\mathrm{Re}(-j)=\frac{1}{2}>0$,

$$f''+f'+f\underset{x\to+\infty}{\to}0\Rightarrow(f'-jf)'-j^2(f'-jf)\underset{x\to+\infty}{\to}0\Rightarrow f'-jf\underset{x\to+\infty}{\to}0\Rightarrow f\underset{x\to+\infty}{\to}0.$$

$$\boxed{\forall f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim_{x\to+\infty}(f''(x)+f'(x)+f(x))=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

(c) Montrons le résultat par récurrence sur n.

• Pour $n=1$, c'est le 1) dans le cas particulier $\ell=0$ (si $P=X-\alpha$, $P(D)(f)=f'-\alpha f$ avec $\mathrm{Re}(-\alpha)>0$).

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons le résultat acquis pour n. Soit P un polynôme de degré $n+1$ dont les racines ont des parties réelles strictement négatives et tel que $\lim_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x)=0$. Soit α une racine de P. P s'écrit $P=(X-\alpha)Q$ où Q est un polynôme dont les racines ont toutes une partie réelle strictement négative. Puisque

$$P(D)(f)=((D-\alpha Id)\circ(Q(D))(f)=(Q(D)(f))'-\alpha(Q(D)(f))\underset{+\infty}{\to}0,$$

on en déduit que $Q(D)(f)\underset{+\infty}{\to}0$ d'après le cas $n=1$ puis que $f\underset{+\infty}{\to}0$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 4589 ▲

On pose $g=f+f''$. Par hypothèse, la fonction g est une application continue et positive sur $\mathbb{R}$ et de plus, la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y=g$ sur $\mathbb{R}$. Résolvons cette équation différentielle, notée (E), sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0\ :\ x\mapsto\lambda(x)\cos(x)+\mu(x)\sin(x)$ où de plus les fonctions λ et μ sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'\cos(x)+\mu'\sin(x)=0\\-\lambda'\sin(x)+\mu'\cos(x)=g\end{array}\right..$$

Les formules de CRAMER fournissent $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda'(x)=-g(x)\sin(x)$ et $\mu'(x)=g(x)\cos(x)$. On peut alors prendre $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda(x)=-\int_0^x g(t)\sin(t)\,dt$ et $\mu(x)=\int_0^x g(t)\cos(t)\,dt$ puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_0(x)=-\cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\,dt+\sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\,dt=\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt.$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. La fonction f est l'une de ces solutions. Par suite, il existe $(\lambda_0,\mu_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda_0\cos(x)+\mu_0\sin(x)+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ et donc pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f(x)+f(x+\pi)&=\int_0^{x+\pi}g(t)\sin(x+\pi-t)\,dt+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt=-\int_0^{x+\pi}g(t)\sin(x-t)\,dt+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt\\&=\int_x^{x+\pi}g(t)\sin(t-x)\,dt=\int_0^\pi g(u+x)\sin(u)\,du\geqslant0.\end{aligned}$$

On a montré que si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f''(x)\geqslant0$, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f(x+\pi)\geqslant0$.

Correction de l'exercice 4590 ▲

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

(a) On note J l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. Sur J, l'équation (E) s'écrit encore $y'-\frac{2}{x}y=0$. Comme la fonction $x\mapsto-\frac{2}{x}$ est continue sur J, les solutions de (E) sur J constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Enfin, la fonction $x\mapsto x^2$ est une solution non nulle de (E) sur J et donc $\mathscr{S}_J=\{x\mapsto\lambda x^2,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2\text{ si }x>0\\0\text{ si }x=0\\\lambda_2x^2\text{ si }x<0\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2\text{ si }x\geqslant0\\\lambda_2x^2\text{ si }x<0\end{array}\right..$

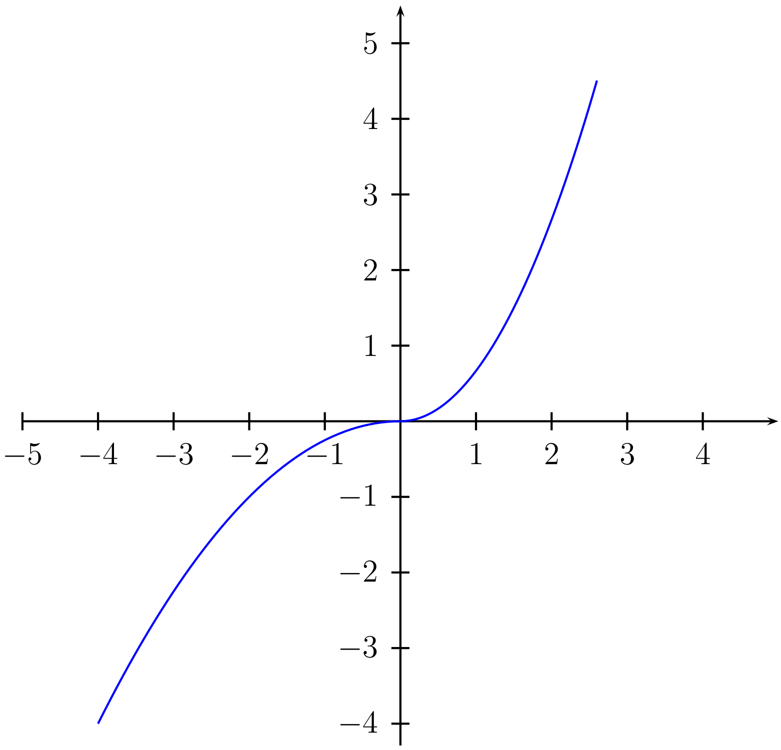
Réciproquement, une telle fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie encore l'équation (E) en 0 si de plus elle est dérivable en 0. Donc, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 pour tout choix de λ_1 et λ_2 et donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout choix de λ_1 et λ_2.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2\text{ si }x\geqslant0\\\lambda_2x^2\text{ si }x<0\end{array}\right.,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

On note que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. En effet, pour toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_1 \left\{ \begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. + \lambda_2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$. Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}(f_1, f_2)$ avec (f_1, f_2) clairement libre.

Un exemple de graphe de solution est donné à la page suivante.



(b) L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

(c) L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \lambda_2 x \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{0\}.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 0.

(d) Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } J &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ xf'(x) - 2f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ \frac{1}{x^2} f'(x) - \frac{2}{x^3} f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ \left(\frac{1}{x^2} f\right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in J,\ f(x) = x^3 + \lambda x^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \{x \mapsto x^3 + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

(e) Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2y'+2xy=1$ alors $0^2\times f'(0)+0\times f(0)=1$ ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\varnothing.}$$

(f) • **Résolution sur** $]-\infty,0[$**,** $]0,1[$ **et** $]1,+\infty[$**.** Soit I l'un des trois intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, l'équation (E) s'écrit encore $y'+\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2x(1-x)}$. Puisque les fonctions $x\mapsto\frac{1}{2x}$ et $x\mapsto\frac{1}{2x(1-x)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I. Pour $x\in I$, on note ε le signe de x sur I.

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=\frac{1}{2x(1-x)}\Leftrightarrow\forall x\in I,\ e^{\frac12\ln(\varepsilon x)}f'(x)+\frac{1}{2x}e^{\frac12\ln(\varepsilon x)}f(x)=\frac{e^{\frac12\ln(\varepsilon x)}}{2x(1-x)}\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\,f)'(x)=\frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1-x)}\Leftrightarrow\forall x\in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\,f)'(x)=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}.\end{aligned}$$

Déterminons alors les primitives de la fonction $x\mapsto\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}$ sur I. En posant $u=\sqrt{\varepsilon x}$ et donc $x=\varepsilon u^2$ puis $du=2\varepsilon udu$.

$$\int\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\,dx=\int\frac{\varepsilon}{2u(1-\varepsilon u^2)}2\varepsilon u\,du=\int\frac{1}{1-\varepsilon u^2}\,du.$$

-Résolution sur $]-\infty,0[$.
Dans ce cas, $\varepsilon=-1$ puis $\int\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\,dx=\int\frac{1}{1+u^2}\,du=\mathrm{Arctan}(u)+\lambda=\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda$. Par suite,

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ \sqrt{-x}f(x)=\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=\frac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[}=\left\{x\mapsto\frac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

-Résolution sur $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.
Dans ce cas, $\varepsilon=1$ puis $\int\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\,dx=\int\frac{1}{1-u^2}\,du=\left\{\begin{array}{l}\frac12\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\text{ si }x>1\\ \mathrm{Argth}(\sqrt{x})\text{ si }x\in]0,1[\end{array}\right.+\lambda$. Par suite,
-Résolution sur $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,1[}=\left\{x\mapsto\frac{\mathrm{Argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}\text{ et }\mathscr{S}_{]1,+\infty[}=\left\{x\mapsto\frac{\frac12\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

-Résolution sur $]0,+\infty[$ *et sur* $\mathbb{R}$. Si f est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$, alors $0\times f'(1)+0\times f(1)=1$ ce qui
est impossible. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\varnothing\text{ et }\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\varnothing.}$$

-Résolution sur $]-\infty,1[$. Si f est une solution de (E) sur $]-\infty,1[$, alors il existe nécessairement $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$\forall x\in]-\infty,1[,\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\frac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}}\text{ si }x<0\\ 1\text{ si }x=0\\ \frac{\mathrm{Argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}}\text{ si }0<x<1\end{array}\right.$. Réciproquement une telle fonction est solution si et seulement
si elle est dérivable en 0.
Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\lambda_1+\sqrt{-x}-\frac{(\sqrt{-x})^3}{3}+o\left((\sqrt{-x})^3\right)\right)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}}+1+\frac{x}{3}+o(x)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}}+f(0)+\frac{x}{3}+o(x).$$

et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_2+\sqrt{x}+\frac{(\sqrt{x})^3}{3}+o\left((\sqrt{x})^3\right)\right)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x}}+1+\frac{x}{3}+o(x)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x}}+f(0)+\frac{x}{3}+o(x).$$

Par suite, f est dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$ et dans ce cas, quand x tend vers 0,
$f(x)=f(0)+\frac{x}{3}+o(x)$ ce qui montre que f est dérivable en 0. En résumé, f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$ si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,1[}=\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\text{ si }x<0\\ 1\text{ si }x=0\\ \frac{\text{Argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\text{ si }0<x<1\end{array}\right.\right\}.}$$

(g) **Résolution de** (E) **sur** $]-\infty,0[$ **et sur** $]0,+\infty[$**.** Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. On note ε le signe de x sur I. Sur I, (E) s'écrit encore $y'+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)y=\varepsilon x^2$. Puisque les deux fonctions $x\mapsto\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)$ et $x\mapsto\varepsilon x^2$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ f'(x)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x)=\varepsilon x^2\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}f'(x)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}f(x)=\varepsilon x^2e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ \left((\varepsilon x)^{-\varepsilon}e^{\varepsilon x}f\right)'(x)=x^{-\varepsilon}x^2e^{\varepsilon x}\end{aligned}$$

• Si $I=]0,+\infty[$, $\varepsilon=1$ et

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow\forall x\in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x)=xe^x\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x}f(x)=(x-1)e^x+\lambda\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2-x+\lambda xe^{-x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

• Si $I=]-\infty,0[$, $\varepsilon=-1$ et

$$f\text{ solution de }(E)\text{ sur }]0,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in]0,+\infty[,\ \left(-xe^{-x}f\right)'(x)=x^3e^{-x}\Leftrightarrow\forall x\in]0,+\infty[,\ \left(xe^{-x}f\right)'(x)=-x^3e^{-x}.$$

Or, $\int -x^3e^{-x}\,dx=x^3e^{-x}-3\int x^2e^{-x}\,dx=(x^3+3x^2)e^{-x}-6\int xe^{-x}\,dx=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda$ et donc

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{6+\lambda e^x}{x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto x^2+3x+6+\frac{6+\lambda e^x}{x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Résolution de (E) **sur** $\mathbb{R}$**.** Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$,
$f(x)=\left\{\begin{array}{l}x^2-x+\lambda_1xe^{-x}\text{ si }x>0\\0\text{ si }x=0\\x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2e^x}{x}\text{ si }x<0\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}x^2-x+\lambda_1xe^{-x}\text{ si }x\geqslant 0\\x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2e^x}{x}\text{ si }x<0\end{array}\right.$. Réciproquement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.
Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x)=-x+o(x)+\lambda_1x(1+o(1))=(\lambda_1-1)x+o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de λ_1 et $f'_d(0)=\lambda_1-1$.
Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x)=6+3x+o(x)+\frac{6+\lambda_2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x}=\frac{6+\lambda_2}{x}+6+\lambda_2+\left(3+\frac{\lambda_2}{2}\right)x+o(x)$$

Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_2=-6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x)=o(x)$ et $f'_g(0)=0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0)=f'_g(0)$. Ceci équivaut à $\lambda_2=-6$ et $\lambda_1=1$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{l}x^2-x+xe^{-x}\text{ si }x\geqslant 0\\ x^2+3x+6+\frac{6(1-e^x)}{x}\text{ si }x<0\end{array}\right.\right\}.}$$

Correction de **l'exercice 4591 ▲**

• Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $a_n=(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\times\frac{n!^2}{(n+1)!^2}\times\frac{2n-1}{2n+1}=-\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\times\frac{2n-1}{2n+1}=-\frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Par suite, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}4$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, $R_a=\frac{1}{4}$. Pour x tel que la série converge, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$.

• Soit $x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $(n+1)a_{n+1}+4na_n=2a_n$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on multiplie les deux membres de cette égalité par x^n puis on somme sur n. On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ ou encore $(1+4x)f'(x)=2f(x)$. De plus $f(0)=a_0=1$. Mais alors

$$\begin{aligned}\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ (1+4x)f'(x)=2f(x)&\Rightarrow\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f'(x)-\frac{2}{1+4x}e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f(x)=0\\&\Rightarrow\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ \left(\frac{f}{\sqrt{1+4x}}\right)'(x)=0\Rightarrow\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}}=\frac{f(0)}{\sqrt{1+0}}\\&\Rightarrow\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ f(x)=\sqrt{1+4x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\left]-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n=\sqrt{1+4x}.}$$

• Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$. La suite u est strictement positive à partir du rang 1 et pour $n\geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(2n-1)}{4(n+1)}=\frac{2n-1}{2n+2}<1.$$

Ainsi, la suite u est décroissante à partir du rang 1. De plus, d'après la formule de STIRLING,

$$u_n=\frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)4^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)(2n)4^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Par suite, $u_n\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}0$. En résumé, la suite u est positive et décroissante à partir du rang 1 et $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. On en déduit que la série numérique de terme général $(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}=(-1)^{n-1}u_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées (théorème de LEIBNIZ).

• La fonction f est donc définie en $\frac{1}{4}$. Vérifions que f est continue en $\frac{1}{4}$.

Pour $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(x)=a_nx_n=(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$. Pour chaque x de $\left]0,\frac{1}{4}\right]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et la suite $((-1)^{n-1}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir du rang 1. Ensuite, pour $n\geqslant 1$ et $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$,

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|x=\frac{2(2n-1)}{n+1}x\leqslant\frac{2(2n-1)}{n+1}\times\frac{1}{4}=\frac{4n-2}{4n+4}<1$$

On en déduit que pour chaque x de $\left]0,\frac{1}{4}\right]$, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir du rang 1. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n\geqslant 1$ et $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\right|\leqslant|f_{n+1}(x)|=|a_{n+1}||x^{n+1}\leqslant\frac{|a_{n+1}|}{4^{n+1}}=u_{n+1},$$

et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\operatorname{Sup}\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\right|,\ x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]\right\}\leqslant u_{n+1}$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que la série de fonction de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $\left]0,\frac{1}{4}\right]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\left]0,\frac{1}{4}\right]$, f est continue sur $\left]0,\frac{1}{4}\right]$ et en particulier en $\frac{1}{4}$.

Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}=f\left(\tfrac{1}{4}\right)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\x<\frac{1}{4}}}f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\x<\frac{1}{4}}}\sqrt{1+4x}=\sqrt{1+4\times\frac{1}{4}}=\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}=\sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 4592 ▲

(a) Posons $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$.

$\chi_A=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$ puis $A=PDP^{-1}$ où $D=\text{diag}(2,3)$ et $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

Posons $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ puis $X_1=P^{-1}X=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{l}x'=4x-2y\\y'=x+y\end{array}\right.\Leftrightarrow X'=AX\Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X\Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X\Leftrightarrow (P^{-1}X)'=D(P^{-1}X)\Leftrightarrow X_1'=DX_1$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1'=2x_1\\y_1'=3y_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}x_1(t)=ae^{2t}\\y_1(t)=be^{3t}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ae^{2t}\\be^{3t}\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae^{2t}+2be^{3t}\\ae^{2t}+be^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{t\mapsto\begin{pmatrix}ae^{2t}+2be^{3t}\\ae^{2t}+be^{3t}\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

(b) Puisque la fonction $t\mapsto\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\0\end{pmatrix}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, les solutions réelles sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$. $\chi_A=\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)$ et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Un vecteur propre de A associé à la valeur propre i est $\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}$ et un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$ est $\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$. On sait alors que les solutions complexes sur $\mathbb{R}$ du système homogène associé sont les fonctions de la forme $X\ :\ t\mapsto ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+be^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$, $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

Déterminons alors les solutions réelles du système homogène.

$$X\text{ réelle}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+be^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}=\overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}+\overline{b}e^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow b=\overline{a}\text{ (car la famille de fonctions }(e^{it},e^{-it})\text{ est libre.)}$$

Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ du système homogène sont les fonctions de la forme $X\ :\ t\mapsto ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+\overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}=2\text{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\right)$, $a\in\mathbb{C}$. En posant $a=\lambda+i\mu$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

$$2\text{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\right)=2\text{Re}\left(\begin{pmatrix}(\lambda+i\mu)(\cos t+i\sin t)\\(\lambda+i\mu)(1-i)(\cos t+i\sin t)\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}\lambda\cos t-\mu\sin t\\\lambda(\cos t+\sin t)+\mu(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}.$$

Maintenant, le couple (λ,μ) décrit $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le couple $(2\lambda,2\mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$ et en renommant les constantes λ et μ, on obtient les solutions réelles du système homogène : $t\mapsto\lambda\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Résolution du système. D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière du système de la forme $t\mapsto\lambda(t)\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mu(t)\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ telles que pour tout réel t de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\lambda'(t)\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mu'(t)\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\0\end{pmatrix}$.

Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{\cos t}(\cos t - \sin t) = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$ et $\mu'(t) = -\frac{1}{\cos t}(\cos t + \sin t) = -1 - \frac{\sin t}{\cos t}$. On peut prendre $\lambda(t) = t + \ln(\cos t)$ et $\mu(t) = -t + \ln(\cos t)$ et on obtient la solution particulière

$$X(t) = (t + \ln(\cos t))\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + (-t + \ln(\cos t))\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \ln(\cos t)(\cos t - \sin t) \\ 2t\sin t + 2\cos t \ln(\cos t) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \ln(\cos t)(\cos t - \sin t) + \lambda \cos t - \mu \sin t \\ 2t\sin t + 2\cos t \ln(\cos t) + \lambda(\cos t + \sin t) + \mu(\cos t - \sin t) \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(c) Puisque la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda - 4)(\lambda - 7)$.

Un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 4 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 7 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs fournissent des combinaisons linéaires intéressantes des équations :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+y)' = 4(x+y) + e^t + t \\ (x-2y)' = 7(x-2y) + e^t - 2t \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} x(t) + y(t) = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + \lambda e^{4t} \\ x(t) - 2y(t) = -\frac{e^t}{6} + \frac{2t}{7} + \frac{2}{49} + \mu e^{7t} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -\frac{5e^t}{6} - \frac{3t}{14} - \frac{33}{392} + +2\lambda e^{4t} + \mu e^{4t} \\ y(t) = -\frac{e^t}{6} \frac{15t}{28} - \frac{81}{784} + \lambda e^{4t} - \mu e^{7t} \end{array} \right. \end{aligned}$$

(d) Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 2(-\lambda) + (-\lambda + 2) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 26\lambda + 12$$
$$= -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = -(\lambda - 6)(\lambda - 2 + \sqrt{2})(\lambda - 2 - \sqrt{2}),$$

et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$$(x,y,z) \in \text{Ker}(A - 6I) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow z = 0 \text{ et } x = y.$$

$\text{Ker}(A - 6I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \text{Ker}(A - (2+\sqrt{2})I) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3-\sqrt{2})x + y - z = 0 \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2z = 0 \\ x - y - (1+\sqrt{2})z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2((3-\sqrt{2})x + y) = 0 \\ x - y - (1+\sqrt{2})((3-\sqrt{2})x + y) = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ (-4+2\sqrt{2})x - \sqrt{2}y = 0 \\ -2\sqrt{2}x - (2+\sqrt{2})y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ y = (-2\sqrt{2} + 2)x \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = (-2\sqrt{2} + 2)x \\ z = (5 - 3\sqrt{2})x \end{array} \right. . \end{aligned}$$

$\text{Ker}(A - (2+\sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2-2\sqrt{2}, 5-3\sqrt{2})$. Un calcul conjugué montre alors que $\text{Ker}(A - (2-\sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2+2\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$.

On sait alors que les solutions du système homogène $t \mapsto ae^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + be^{(2+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{2} \\ 5-3\sqrt{2}) \end{pmatrix} + ce^{(2-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{2} \\ 5+3\sqrt{2}) \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(e) Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^3$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON permet alors d'affirmer que $(A - I)^3 = 0$.

On sait que les solutions du système $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{tA}X_0$ où $X_0 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{t(A-I)} \times e^{tI} \text{ (car les matrices } t(A-I) \text{ et } tI \text{ commutent)}\\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right) \times e^t I = e^t \left(\sum_{n=0}^{2} \frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\\
&= e^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)\\
&= e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les solutions du système sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{tA}X_0 = e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+(a+b)t)e^t \\ (b-(a+b)t)e^t \\ ((a+b)t+c)e^t \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Maintenant,

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{array} \right. .$$

La solution cherchée est $t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ (1-t)e^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4593 ▲

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \|X(t)\|_2^2 = (X(t)|X(t))$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$g'(t) = 2(X(t)|X'(t)) = 2(X(t)|AX(t)) = 2^t X(t)AX(t) \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction $\sqrt{g}\,:\, t \mapsto \|X(t)\|_2$.

Correction de l'exercice 4594 ▲

(a) Puisque les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, l'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Le couple de fonctions $(x,y) = (1,t)$ est solution du système homogène associé sur $]0,+\infty[$. Pour chaque réel strictement positif t, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Cherchons alors les solutions du système homogène sous la forme $t \mapsto \alpha(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \beta(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ t\alpha(t)+\beta(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = -\frac{1}{2t}\alpha + \frac{1}{2t^2}(t\alpha+\beta) \\ t\alpha' + \alpha + \beta' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2t}(t\alpha+\beta) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ t\alpha' + \beta' = \frac{\beta}{2t} \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ \frac{\beta}{2t} + \beta' = \frac{\beta}{2t} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta' = 0 \\ \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in]0,+\infty[, \left\{ \begin{array}{l} \beta(t) = \lambda \\ \alpha'(t) = \frac{\lambda}{2t^2} \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in]0,+\infty[, \left\{ \begin{array}{l} \beta(t) = \lambda \\ \alpha(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in]0,+\infty[, \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \\ y(t) = \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout réel strictement positif t, $w(t) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 1 \\ \frac{1}{2} & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ et donc les deux fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont deux solutions indépendantes du système homogène sur $]0,+\infty[$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ du système homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variations des constantes.

Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que pour tout réel strictement positif t, $\lambda'(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ t^2 & t \end{vmatrix} = -t^2$ et $\mu'(t) = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 2t \\ \frac{1}{2} & t^2 \end{vmatrix} = \frac{3t}{2}$. On peut prendre $\lambda(t) = -\frac{t^3}{3}$ et $\mu(t) = \frac{3t^2}{4}$ et on obtient la solution particulière $X(t) = -\frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{3t^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t^2/12 \\ 7t^3/12 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{11t^2}{12} - \frac{\lambda}{2t} + \mu \\ \frac{7t^3}{12} + \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(b) Puisque les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Les couples de fonctions $X_1 = (x,y) = (t,-1)$ et $(x,y) = (1,t)$ sont solutions du système homogène associé sur $\mathbb{R}$. De plus, pour chaque réel t, $w(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0$. Le couple de fonctions (X_1, X_2) est donc un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ du système homogène $X' = AX$. Les fonctions solutions du système homogène $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variation de la constante.

Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel t, $\lambda'(t) \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{vmatrix} (2t^2-1)/(t^2+1) & 1 \\ 3t/(t^2+1) & t \end{vmatrix} = \frac{2t^3+2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{t^2+1}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{vmatrix} t & (2t^2-1)/(t^2+1) \\ -1 & 3t/(t^2+1) \end{vmatrix}$ $\frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}$. On peut déjà prendre $\lambda(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$. Ensuite, $\int \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt = 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 6\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$ puis

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{t}{t^2+1} - \int t \times \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

et donc $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{Arctan} t\right) + C$. On peut prendre $\mu(t) = \frac{2t}{t^2+1} - 3\operatorname{Arctan} t$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t}{t^2+1} - 3\operatorname{Arctan} t + \lambda t + \mu \\ -\frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t^2}{t^2+1} - 3t\operatorname{Arctan} t - \lambda + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(c) Si de plus $y = \frac{1}{x}$, le système s'écrit $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ -\operatorname{sh}(2t)\frac{x'}{x^2} = -x + \operatorname{ch}(2t)\frac{1}{x} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ \operatorname{sh}(2t)x' = x^3 - \operatorname{ch}(2t)x \end{cases}$. On obtient $x^3 - \operatorname{ch}(2t)x = \operatorname{ch}(2t)x - \frac{1}{x}$ ou encore $x^4 - 2\operatorname{ch}(2t)x^2 + 1 = 0$. Ensuite,

$$x^4 - 2\operatorname{ch}(2t)x^2 + 1 = (x^2 - \operatorname{ch}(2t))^2 - \operatorname{sh}^2(2t) = (x^2 - e^{2t})(x^2 - e^{-2t}) = (x - e^t)(x + e^t)(x - e^{-t})(x + e^{-t}).$$

Ainsi, nécessairement $(x,y) \in \left\{(e^t, e^{-t}), (e^{-t}, e^t), (-e^t, -e^{-t}), (-e^{-t}, e^t)\right\}$. Réciproquement, si $(x,y) = (e^t, e^{-t})$,

$$\mathrm{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) - e^{-t} = \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})e^{t} = \mathrm{sh}(2t)e^{t} = \mathrm{sh}(2t)x'$$

et

$$-x+\mathrm{ch}(2t)y = -e^{t} + \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-3t}) = \frac{1}{2}(-e^{t}+e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})e^{-t} = -\mathrm{sh}(2t)e^{-t} = \mathrm{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_1 = (x,y) = (e^{t}, e^{-t})$ est une solution non nulle du système. De même, si $(x,y) = (e^{-t}, e^{t})$,

$$\mathrm{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-3t}) - e^{t} = \frac{1}{2}(-e^{t}-e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})e^{-t} = -\mathrm{sh}(2t)e^{-t} = \mathrm{sh}(2t)x'$$

et

$$-x+\mathrm{ch}(2t)y = -e^{-t} + \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})e^{t} = \mathrm{sh}(2t)e^{t} = \mathrm{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_2 = (x,y) = (e^{-t}, e^{t})$ est une solution non nulle du système. Enfin, $w(t) = \begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix} = e^{2t} - e^{-2t} = 2\,\mathrm{sh}(2t) \neq 0$ et le couple (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{t} + \mu e^{-t} \\ \lambda e^{-t} + \mu e^{t} \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Correction de l'exercice 4595 ▲

(a) Sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, (E) s'écrit $y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \frac{4x-2}{2x+1}$ et $x \mapsto -\frac{8}{2x+1}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Recherche d'une solution polynomiale non nulle de (E)**.** Soit P un éventuel polynôme non nul solution de (E). On note n son degré. Le polynôme $Q = (2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P$ est de degré au plus n. De plus, le coefficient de X^n dans Q est $(4n-8)\mathrm{dom}(P)$. Si P est solution de (E), on a nécessairement $(4n-8)\mathrm{dom}(P) = 0$ et donc $n = 2$.

Posons alors $P = aX^2 + bX + c$.

$$(2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P = (2X+1)(2a) + (4X-2)(2aX+b) - 8(aX^2+bX+c) = -4bX + 2a - 2b - 8c$$

Par suite, P est solution de (E) sur I si et seulement si $-4b = 2a - 2b - 8c = 0$ ce qui équivaut à $b = 0$ et $a = 4c$. La fonction $f_1\ :\ x \mapsto 4x^2 + 1$ est donc une solution non nulle de (E) sur I.

Recherche d'une solution particulière de la forme $f_\alpha\ :\ x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$(2x+1)(e^{\alpha x})'' + (4x-2)(e^{\alpha x})' - 8e^{\alpha x} = \left(\alpha^2(2x+1) + \alpha(4x-2) - 8\right)e^{\alpha x} = \left(2\alpha(\alpha+2)x + \alpha^2 - 2\alpha - 8\right)e^{\alpha x}$$

Par suite, f_α est solution de (E) sur I si et seulement si $2\alpha(\alpha+2) = \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$ ce qui équivaut à $\alpha = -2$. Ainsi, la fonction $f_2\ :\ x \mapsto e^{-2x}$ est solution de (E) sur I.

Résolution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Vérifions que le couple (f_1, f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Pour $x > -\frac{1}{2}$,

$$w(x) = \begin{vmatrix} 4x^2+1 & e^{-2x} \\ 8x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = (-8x^2 - 8x - 2)e^{-2x} = -2(2x+1)^2e^{-2x} \neq 0.$$

Donc le couple (f_1, f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[} = \left\{x \mapsto \lambda(4x^2+1) + \mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a aussi $\mathscr{S}_{\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[} = \left\{x \mapsto \lambda(4x^2+1) + \mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda_1(4x^2+1) + \mu_1 e^{-2x} \text{ si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4x^2+1) + \mu_2 e^{-2x} \text{ si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$ (par continuité à gauche en $-\frac{1}{2}$).

f ainsi définie est deux fois dérivables sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, solution de (E) sur chacun de ces deux intervalles et vérifie encore (E) en $x = -\frac{1}{2}$ si de plus f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$.

En résumé, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est deux fois dérivables en $-\frac{1}{2}$.

f est déjà deux fois dérivable à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$. De plus, en posant $h = x + \frac{1}{2}$ ou encore $x = -\frac{1}{2} + h$, on obtient quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures

$$f(x) = \lambda_1(2 - 4h + 4h^2) + \mu_1 ee^{-2h} = (2\lambda_1 + e\mu_1) + (-4\lambda_1 - 2e\mu_1)h + (4\lambda_1 + 2e\mu_1)h^2 + o(h^2),$$

et de même quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures, $f(x) = (2\lambda_2 + e\mu_2) + (-4\lambda_2 - 2e\mu_2)h + (4\lambda_2 + 2e\mu_2)h^2 + o(h^2)$. Par suite, f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$ si et seulement si $2\lambda_1 + e\mu_1 = 2\lambda_2 + e\mu_2$ ou encore $\mu_2 = \frac{2}{e}(\lambda_1 + \lambda_2) + \mu_1$.

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \begin{cases} a(4x^2+1) + be^{-2x} \text{ si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ c(4x^2+1) + \left(\frac{2}{e}(a+c) - b\right)e^{-2x} \text{ si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 3 et une base de cet espace est par exemple (f_1, f_2, f_3) où $f_1 : x \mapsto \begin{cases} 4x^2+1 \text{ si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{e}e^{-2x} \text{ si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$, $f_2 : x \mapsto \begin{cases} e^{-2x} \text{ si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ -e^{-2x} \text{ si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$ et $f_3 : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 4x^2+1+\frac{2}{e}e^{-2x} \text{ si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$.

(b) Sur $I =]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y'' - \frac{2}{x+1}y' + \frac{2}{x(x+1)}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto -\frac{2}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{2}{x(x+1)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
La fonction $f_1 : x \mapsto x$ est solution de (E) sur I. Posons alors $y = f_1 z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur I, la fonction y est deux fois dérivables sur I si et seulement si la fonction z est deux fois dérivables sur I. De plus, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned}(x^2+x)y'' - 2y' + 2y &= (x^2+x)(f_1''z + 2f_1'z' + f_1z'') - 2x(f_1'z + f_1z') + 2f_1z \\ &= (x^2+x)f_1z'' + (2(x^2+x)f_1' - 2xf_1)z' + ((x^2+x)f_1'' - 2f_1' + 2f_1)z \\ &= (x^3+x^2)z'' + 2xz'.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x^3+x^2)z''(x) + 2xz'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ z''(x) + \frac{2}{x(x+1)}z'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(e^{2\ln|x| - 2\ln|x+1|}z'\right)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ z'(x) = \lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in I,\ z(x) = \lambda\left(x + 2\ln|x| - \frac{1}{x}\right) + \mu \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in I,\ y(x) = \lambda(x^2 + 2x\ln|x| - 1) + \mu x.\end{aligned}$$

(c) Cherchons les solutions développables en série entière. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ une série entière dont le rayon R est supposé à priori strictement positif. Pour $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} 4xf''(x) - 2f'(x) + 9x^2f(x) &= 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 9x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\ &= 4\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-3)a_nx^{n-1} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-3)a_nx^{n-1} + 9\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^{n-1} \\ &= -a_1 + 4a_2x + \sum_{n=3}^{+\infty}(2n(2n-3)a_n + 9a_{n-3})x^{n-1}\end{aligned}$$

Par suite, f est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 3$, $2n(2n-3)a_n + 9a_{n-3} = 0$ ce qui s'écrit encore

$$a_1 = a_2 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 3,\ a_n = -\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}.$$

Les conditions $a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 3$, $a_n = -\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = 0$ et les conditions $a_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 3$, $a_n = -\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+2} = 0$.
Enfin les conditions $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{3p} = -\frac{9}{6p(6p-3)}a_{3p-3} = -\frac{1}{2p(2p-1)}a_{3(p-1)}$ sont équivalentes pour $p \geqslant 1$ à

$$a_{3p} = -\frac{1}{2p(2p-1)} \times -\frac{1}{(2p-2)(2p-3)} \times \ldots \times -\frac{1}{2\times 1}a_0 = \frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$, f est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}$.
Réciproquement, puisque pour tout réel x, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, $R = +\infty$ pour tout choix de a_0 ce qui valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}$, $x \in \mathbb{R}$.
Ensuite, pour $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x^{3/2})^{2n}=\cos\left(x^{3/2}\right).$$

Donc la fonction $x\mapsto\cos\left(x^{3/2}\right)$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$. La forme de cette solution nous invite à changer de variable en posant $t=x^{3/2}$. Plus précisément, pour $x>0$, posons $y(x)=z(x^{3/2})=z(t)$. Puisque l'application $\varphi\ :\ x\mapsto x^{3/2}$ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, la fonction y est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour $x>0$, on a $y(x)=z(x^{3/2})$ puis $y'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})$ puis $y''(x)=\frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2})+\frac{9}{4}xz''(x^{3/2})$ et donc

$$\begin{aligned}4xy''(x)-2y'(x)+9x^2y(x)&=4x\left(\frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2})+\frac{9}{4}xz''(x^{3/2})\right)-2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})\right)+9x^2z(x^{3/2})\\&=9x^2(z''(x^{3/2})+z(x^{3/2})).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y\text{ solution de }(E)\text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow\forall x>0,\ 9x^2(z''(x^{3/2})+z(x^{3/2}))=0\Leftrightarrow\forall t>0,\ z''(t)+z(t)=0\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t>0,\ z(t)=\lambda\cos t+\mu\sin t\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>0,\ y(x)=\lambda\cos(x^{3/2})+\mu\sin(x^{3/2}).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto\lambda\cos(x^{3/2})+\mu\sin(x^{3/2}),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

(d) Puisque les fonctions $x\mapsto-\frac{2}{1+x}$, $x\mapsto\frac{1-x}{1+x}$ et $x\mapsto\frac{xe^{-x}}{1+x}$ sont continues sur $]-1,+\infty[$, les solutions de (E) sur $]-1,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.
Résolution de l'équation homogène.
La fonction $f_1\ :\ x\mapsto e^x$ est solution sur $]-1,+\infty[$ de l'équation $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=0$. Posons alors $y=f_1z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. De plus, la formule de LEIBNIZ permet d'écrire pour $x>-1$

$$\begin{aligned}(1+x)y''(x)-2y'(x)+(1-x)y(x)&=(1+x)(f_1''z(x)+2f_1'(x)z'(x)+f_1(x)z''(x))-2(f_1'(x)z(x)+f_1(x)z'(x))\\&\quad+(1-x)f_1(x)z(x)\\&=(1+x)f_1(x)z''(x)+(2(1+x)f_1'(x)-2f_1(x))z'(x)=((1+x)z''(x)+2xz'(x))e^x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y\text{ solution de }(E_H)\text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow\forall x>-1,\ (1+x)z''(x)+2xz'(x)=0\Leftrightarrow\forall x>-1,\ z''(x)+\left(2-\frac{2}{1+x}\right)z'(x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x>-1,\ e^{2x-2\ln(1+x)}z''(x)+\left(2-\frac{2}{1+x}\right)e^{2x-2\ln(1+x)}z'(x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x>-1,\ \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}z'\right)'(x)=0\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x>-1,\ z'(x)=\lambda(x+1)^2e^{-2x}.\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\int(x+1)^2e^{-2x}\,dx&=-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}+\int(x+1)e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\\&=\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}+C=\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}-\frac{5}{4}\right)e^{-2x}+C=-\frac{1}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x}+C\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}y\text{ solution de }(E_H)\text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x>-1,\ z'(x)=\lambda(x+1)^2e^{-2x}\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>-1,\ z(x)=-\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x}+\mu\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>-1,\ y(x)=-\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-x}+\mu e^x.\end{aligned}$$

Maintenant, λ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si $-\frac{\lambda}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et en renommant la constante λ, les solutions de (E_H) sur $]-1,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda(2x^2+6x+5)e^{-x}+\mu e^x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière de (E). Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière de la forme $f_0 : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(1+x)((ax+b)e^{-x})'' - 2((ax+b)e^{-x})' + (1-x)(ax+b)e^{-x} &= ((1+x)((ax+b)-2a) - 2(-(ax+b)+a) \\ &\quad + (1-x)(ax+b))e^{-x} \\ &= (2bx + (4b-4a))e^{-x}.\end{aligned}$$

Par suite, f_0 est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si $2b=1$ et $4b-4a=0$ ce qui équivaut à $a=b=\frac{1}{2}$. Une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{x+1}{2}e^{-x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^x + \frac{x+1}{2}e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

(e) Puisque la fonction $x \mapsto \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est $z^2+4z+4=0$. Puisque cette équation admet -2 pour racine double, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-2x} + \mu(x)xe^{-2x}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)xe^{-2x} = 0 \\ -2\lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)(-2x+1)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}\end{array}\right. .$$

Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(x) = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} & (-2x+1)e^{-2x}\end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\mu'(x) = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. On peut prendre $\lambda(x) = -\sqrt{x^2+1}$ et $\mu(x) = \text{Argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ puis $f_0(x) = \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)e^{-2x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\lambda + \mu x + \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Correction de l'exercice 4596 ▲

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -f(-x) + e^x$. On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x,$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y = 2\text{ch}(x)$. Par suite, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ch}(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.

Réciproquement, soit f une telle fonction. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) + f(-x) = (\text{sh}(x) - \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)) + (\text{ch}(x) + \lambda\cos(x) - \mu\sin(x)) = e^x + (\lambda+\mu)(\cos(x)-\sin(x)),$$

et f est solution si et seulement si $\lambda+\mu = 0$.

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \text{ch}(x) + \lambda(\cos(x)-\sin(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4597 ▲

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$. On en déduit que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = -\frac{3}{16x^2}f'\left(\frac{3}{16x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f\left(\frac{3/16}{(3/16)/x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f(x),$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y'' + \frac{3}{16}y = 0$ (E). Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Cherchons une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ de la forme $g_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f_\alpha \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \frac{3}{16}x^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{3}{16} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ ou } \alpha = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Les deux fonctions $f_1 : x \mapsto x^{1/4}$ et $f_2 : x \mapsto x^{3/4}$ sont solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Le wronskien de ces solutions est $w(x) = \begin{vmatrix} x^{1/4} & x^{3/4} \\ \frac{1}{4}x^{-3/4} & \frac{3}{4}x^{-1/4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$ et donc (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Ainsi, si f est solution du problème, nécessairement $\exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$, $f(x) = \lambda_1 x^{1/4} + \lambda_2 x^{3/4}$.

Réciproquement, soit f une telle fonction.

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}$ et $f\left(\frac{3}{16x}\right) = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}$. Donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4} = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4} = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{1/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{3/4} = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{3/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{1/4} \text{ (après multiplication par } x\text{)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{4} = \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8} \text{ et } \frac{3\lambda_2}{4} = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2}{3^{3/4}}\lambda_1. \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\left(x^{1/4} + 2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/4}\right)$.

Correction de l'exercice 4598 ▲

La fonction nulle est solution. Dorénavant, f est une éventuelle solution non nulle. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

• L'égalité $f(x_0)f(0) = \int_{x_0-0}^{x_0+0} f(t)\,dt = 0$ fournit $f(0) = 0$.

• Pour tout réel y, $\int_{-y}^{y} f(t)\,dt = f(0)f(y) = 0$. Maintenant, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $y \mapsto \int_{-y}^{y} f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient pour tout réel y, $f(y) + f(-y) = 0$ et donc f est impaire.

• Pour tout réel y, on a alors $f(y) = \frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f. Mais alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t)\,dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

• En dérivant à y fixé ou x fixé l'égalité $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ et $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$. En dérivant la première égalité à y fixé et la deuxième à x fixé, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. En particulier, pour tout réel x, $f''(x)f(x_0) - f(x)f''(x_0) = 0$ ou encore $f''(x) - kf(x) = 0$ où $f = \frac{f''(x_0)}{f(x_0}$.

$$f \text{ est solution d'une équation différentielle du type } y'' - ky = 0.$$

• f est donc de l'un des types suivants : $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ ou $x \mapsto ax + b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ou $x \mapsto \lambda\,\text{ch}(\omega x) + \mu\,\text{sh}(\omega x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ (suivant que $k > 0$, $k = 0$ ou $k < 0$). De plus, f étant impaire, f est nécessairement de l'un des types suivants :

$$x \mapsto \lambda\sin(\omega x),\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \omega > 0 \text{ ou } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}* \text{ ou } x \mapsto \lambda\,\text{sh}(\omega x),\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \omega > 0.$$

Réciproquement,

- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x)f(y) = a^2xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{a}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2axy$. Donc f est solution si et seulement si $a = 2$. On obtient la fonction solution $x \mapsto 2x$.

- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\sin(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2\sin(\omega x)\sin(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{\omega}(\cos(\omega(x-y)) - \cos(\omega(x+y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\sin(\omega x)\sin(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\omega}$.
On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \frac{2}{\omega}\sin(\omega x)$, $\omega > 0$.

- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\,\text{sh}(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2\,\text{sh}(\omega x)\,\text{sh}(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{\omega}(\text{ch}(\omega(x+y)) - \text{ch}(\omega(x-y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\text{sh}(\omega x)\,\text{sh}(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\omega}$.
On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \frac{2}{\omega}\text{sh}(\omega x)$, $\omega > 0$.

Correction de l'exercice 4599 ▲

Existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$F \text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Dérivées de F. Soient $a > 0$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour tout réel $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

• La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

De plus

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{te^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_1(t)$ et $\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2e^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$ où les fonctions

φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car sont dominées en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), F est deux fois dérivable sur $[a,+\infty[$ et les dérivées de F s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

$$\forall x > 0,\ F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

Equation différentielle vérifiée par F. Pour $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

$$\forall x > 0,\ F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

Existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$. Soit $a > 0$. Montrons l'existence de $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

Soit $A > a$. Une intégration par parties fournit $\int_a^A \frac{\sin u}{u}\,du = -\frac{\cos a}{a} + \frac{\cos A}{A} - \int_a^A \frac{\cos u}{u^2}\,du$. Puisque $\left|\frac{\cos A}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$, on a $\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$.
D'autre part, puisque $\forall u \geqslant a$, $\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \frac{1}{u^2}$, la fonction $u \mapsto \frac{\cos u}{u^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ et en particulier, $\int_a^A \frac{\cos u}{u^2}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_a^A \frac{\sin u}{u}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$ ou encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge en $+\infty$. De même, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge en $+\infty$.
Mais alors, pour $x > 0$,

$$\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = G(x) \text{ existe.}$$

$$G \text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Equation différentielle vérifiée par G. Puisque la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De même, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ puis G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$G'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\cos x \sin x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos x \sin x}{x} = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du,$$

puis en redérivant

$$G''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{\sin^2 x}{x} + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos^2 x}{x} = -G(x) + \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0,\ G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}.$$

Limites de F et G en $+\infty$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ sont deux intégrales convergentes, $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
Pour tout réel $x > 0$, $|F(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$

Egalité de F et G. D'après ce qui précède, $(F-G)'' + (F-G) = 0$ et donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) - G(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Si $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, alors $\lambda \cos x + \mu \sin x = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\cos(x-x_0)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} F(x) - G(x) = 0$, on a nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et donc $F - G = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Remarque. On peut montrer que l'égalité persiste quand $x = 0$ (par continuité) et on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4600 ▲

(a) $y = -1 + \frac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y = -1$.

(b) $y \equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$.

(c) $y = \pm\sqrt{1 + (\sqrt{x}+\lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.

(d) $y = -\ln\big(1 - x(1-1/e)\big)$.

(e) $y = \left(\lambda + \frac{x}{2}\right)\left|\lambda + \frac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

Correction de l'exercice 4601 ▲

(a) $y=\frac{1-\lambda^2x^2}{2\lambda}$, $\lambda>0$.

(b) $y=-x\pm\sqrt{2x^2-\lambda}$ ou $y=x(-1\pm\sqrt{2})$.

(c) $y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda^2x^2}}{2\lambda}$ ou $y=\pm x$ ou $y=0$.

(d) $y=-x\pm\sqrt{\lambda+3x^2}$ et $y=x(-1\pm\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 4602 ▲

(a) $y=\frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y=0$.

(b) $y=\pm\sqrt[4]{x^2+\frac{\lambda}{x^2}}$.

(c) $y=((\sqrt{x}+2)^2+\lambda e^{\sqrt{x}})^2$.

(d) $y=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\lambda-x}\right)^2$ ou $y=0$.

(e) $y=\pm\frac{\sqrt{2}x^3}{\sqrt{2\lambda-x^4}}$ ou $y=0$.

Correction de l'exercice 4603 ▲

$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y=\frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 4604 ▲

$y=\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+1-x^2}$ ou $y=0$.

Correction de l'exercice 4605 ▲

(a) $\gamma_1(t)=(-x(t),y(t))$ et $\gamma_2(t)=(x(-t),-y(-t))$ sont aussi solutions de (S).
Par ailleurs, la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique, en particulier s'il existe t_0 tel que $x(t_0)=0$ alors $x(t)=0$ pour tout t. De même s'il existe t_0 tel que $x(t_0)=y(t_0)=0$ alors $x(t)=y(t)=0$ pour tout t.
Pour λ,μ non nuls et x ne s'annulant pas, $t\mapsto(\lambda x(\mu t),\lambda y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu=\lambda$.
L'ensemble des trajectoires maximales est donc stable par les symétries par rapport aux deux axes et par les homothéties de centre $(0,0)$. De plus toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport à cet axe.

(b) $x'(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=0$ ou $y(t_0)=0$. Dans le premier cas on a $x(t)=0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire (solution de $y'=y^2$). Dans le second cas $x(t_0)$ est arbitraire (Cauchy-Lipschitz) donc l'ensemble des points à tangente verticale est la réunion des deux axes privé de $(0,0)$ (où il n'y a pas de tangente).
$y'(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=\pm y(t_0)$, quantité arbitraire, donc l'ensemble des points à tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0,0)$.
Solutions particulières : $x(t)=0, y(t)=\frac{1}{\lambda-t}$.

(c) En supposant Φ de classe $\mathscr{C}^1$ on obtient l'équation $\frac{2}{n}x\Phi\Phi'=\Phi^2-x^2$ soit $\frac{2}{n}x\psi'=\psi-x^2$ avec $\psi=\Phi^2$. On obtient $\psi(x)=|x|^n\left(\lambda+\frac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n\neq 1$ et $\psi(x)=|x|(\lambda-\ln|x|)$ si $n=1$.
Une courbe intégrale (en fait une trajectoire) qui ne touche aucun des deux axes vérifie l'hypothèse $y=$ fonction de x car x' ne peut s'annuler donc x est une fonction injective de t. Une trajectoire qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe (déjà vu) et une trajectoire qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$ le traverse ($y'\neq 0$), donc est réunion de sous-arcs localement d'un seul côté de l'axe des x, de la forme $y=\Phi(x)=\pm\sqrt{\psi(x)}$.

Correction de l'exercice 4606 ▲

Méthode d'Euler :

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1.000	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.348
z	0.000	0.100	0.180	0.243	0.292	0.328	0.354	0.372	0.383	0.387	0.387

Solution théorique : $y=e^{-x}$, $z=xe^{-x}$.

Correction de l'exercice 4607 ▲

(a) $y=4\arctan((\sqrt{2}-1)e^x)$.

(b) $y = 2a - (\lambda x + \mu)^{2/3}$.

(c) $y = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)$.

Correction de l'exercice 4609 ▲

Si $a > 0$, $y'(0) = a^3$, si $a = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 6$. Donc y est croissante au voisinage de 0.
Si $y' > 0$ sur $]0,\gamma[$, alors $y(\gamma) > 0$ donc $y'(\gamma) > 0$ et $y' > 0$ sur $[\gamma,\gamma+\varepsilon[$ donc, par connexité, $y' > 0$ sur $]0,\beta[$.
$y' \geq y^3 \Rightarrow 1 \leq \frac{y'}{y^3} \Rightarrow x \leq \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2} \leq \frac{1}{2a^2}$.

Correction de l'exercice 4610 ▲

(a) Régionnement.

(b) idem.

(c) Pour $x < 0$, $y' < -e^y \Rightarrow -y'e^{-y} > 1 \Rightarrow x > e^{-y} + C > C$.

Correction de l'exercice 4612 ▲

Supposons $t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geq 0$. On peut alors poser $t_1 = \min\{t > t_0 \,|\, x^2(t) - t > 0\}$. On a alors $x^2(t_1) - t_1 = 0$. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$. On a $y'(t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$. Cela contredit le fait que, pour tout $t \in [t_0,t_1[$, $y(t) < 0$. De même si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $z(t) = x(t) + \sqrt{t}$ et on aboutit à une contradiction. Par conséquent la courbe intégrale reste dans D_0. Si la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0,\beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [t_0,\beta[$, $-\beta \leq x'(t) \leq 0$. On en déduit que x' est intégrable sur $[t_0,\beta[$ et donc que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β. On prolonge la fonction en β et la fonction prolongée vérifie (E) sur $[t_0,\beta]$ ce qui est impossible. On en déduit que $\beta = +\infty$. On a, pour tout $t \geq t_0$, $x'(t) < 0$, donc x est décroissante. Si $x(t)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ alors $x'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -t$, ce qui est impossible. Par conséquent $x(t) \to -\infty$ (lorsque $t \to +\infty$). En particulier, pour t assez grand, $x(t) \leq 0$. En dérivant (E) on a $x''(t) = 2x(t)(x^2(t) - t) - 1$. Si, à partir d'un certain rang, pour tout t, $x''(t) \geq 0$ alors x' est croissante et majorée. Elle ne peut tendre que vers 0 car sinon $x'(t) \sim \ell$, puis $x(t) \sim \ell t$ et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$. Sinon il existe t_1 tel que $x''(t_1) < 0$. S'il existe $t_2 > t_1$ tel que $x''(t_2) = 0$ (avec t_2 minimal) alors $x'''(t_2) = 2x + \frac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand. Ceci est impossible et donc dans ce cas $x''(t)$ reste négatif lorsque t tend vers $+\infty$, on a alors $0 < t - x^2(t) \leq \frac{-1}{2x(t)}$. Par conséquent $x^2(t) - t \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, on en déduit que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Correction de l'exercice 4616 ▲

Soient y,z deux solutions distinctes. D'après Cauchy-Lipschitz, $y'(a) \neq z'(a)$, donc par exemple $y'(a) > z'(a)$. Soit $c > a$ maximal tel que : $\forall\, x \in]a,c[$, $y(x) > z(x)$. Donc $y - z$ est strictement positive convexe sur $[a,c]$, et s'annule en a et c, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 4620 ▲

(a) Sinon $d(0, f'(\mathbb{R})) > 0$ et f ne peut pas être minorée.

(b) Supposons que pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ on a $\nabla f(a) \neq 0$.
On considère l'équation différentielle autonome : $x' = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. Pour $x(0)$ donné il existe une solution maximale, et elle est définie sur $\mathbb{R}$ car x' est bornée. Alors la fonction : $t \mapsto f(x(t))$ est $\mathscr{C}^1$ minorée sur $\mathbb{R}$ donc il esiste une suite de réels (t_n) telle que $\frac{d}{dt}(f(x(t_n))) = \|\nabla f(x(t_n))\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4621 ▲

$f_u : p \mapsto p + u \wedge p$ est linéaire injective car $f_u(p) = 0 \Rightarrow p \perp p$, donc bijective. L'application $u \mapsto f_u$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est $\mathscr{C}^\infty$, donc il en est de même de l'application inverse : $u \mapsto (f_u)^{-1}$ et l'équation différentielle donnée équivaut à $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ qui relève de la théorie de Cauchy-Lipschitz : il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I. D'après l'équation différentielle, $(u' \mid u) = 0$ d'où $\|u\|$ est constant. Alors $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ est borné, donc u admet une limite finie en tout point fini par uniforme continuité, ceci prouve que $I = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4622 ▲

(a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_{t=0}^{x} (f_n - f_{n-1})(t - t^2)\,dt$ donc par récurrence $f_{n+1} - f_n \geq 0$.
De plus $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq x\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ d'où $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leq \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \int_{t=0}^{x}(t - t^2)\,dt \leq \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ et $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ ce qui prouve que la série télescopique $\sum(f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente.

(b) Par passage à la limite uniforme sous le signe intégral on a $f(x) = 1+\int_{t=0}^{x} f(t-t^2)\,dt$ d'où f est $\mathscr{C}^1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$ ce qui entraine le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f par récurrence. $f'(0) = f'(1) = f(0) = 1$.

(c) f' est positive d'après l'équation différentielle vérifiée par f et $f''(x) = (1-2x)f'(x-x^2)$ est du signe de $1-2x$, c'est-à-dire que f est convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$ et concave sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

(d) $1+x = f_1(x) \leq f(x) = f_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x))$. De plus, $f'(x) = f(x-x^2) \leq f(x)$ d'où $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est décroissante et vaut 1 en 0 ce qui prouve que $f(x) \leq e^x$.

Correction de l'exercice 4623 ▲

(a) Qu'il en existe et qu'il y en a une unique maximale, son intervalle de définition est ouvert.

(b) Soit $(]\alpha,\beta[,x)$ une solution maximale. Si $t_0 \in]\alpha,\beta[$ est tel que $x(t_0) = a$ alors $x'(t_0) > 0$ donc $x(t)-a$ est du signe de $t-t_0$ au voisinage de t_0. Ceci montre que t_0 (éventuel) est unique, et en particulier $t_0 < 0$. De même, il existe au plus un réel t_1 tel que $x(t_1) = b$ et $t_1 < 0$. Par ailleurs l'existence de l'un des deux réels t_0 ou t_1 exclut l'autre. Enfin, $a \leq x(t) \leq b$ pour tout $t \in [0,\beta[$ donc d'après le théorème des bouts on a $\beta = +\infty$.

(c) Soit $\varphi : [a,b] \to [a,b], y \mapsto x(T)$. Comme deux courbes intégrales maximales distinctes n'ont aucun point commun, φ est injective et par disjonction de cas on montre que φ est strictement croissante et satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires. En particulier φ est continue et $\varphi(y)-y$ prend une valeur positive en a, négative en b donc s'annule pour un certain $y \in [a,b]$. Pour cet y, la solution correspondante est T-périodique.

Correction de l'exercice 4624 ▲

Remarque : la seule continuité de f implique l'existence d'une solution maximale à condition initiale donnée (thm. de Cauchy-Arzela, HP), mais pas son unicité.

thm des bouts : supposons y solution, définie sur $[t_0,\alpha[$ avec $\alpha < \sup J$.

On a $\frac{d}{dt}(\|y\|^2) = 2(y' \mid y) = 2(f(t,y) \mid y) \leq 2a\|y\|^2+2b$, ce que l'on écrit $z' = 2az+2b-c$ avec $z = \|y\|^2$ et c fonction continue positive. Donc $z(t) = \exp(2A(t)-2A(t_0))z(t_0)+\int_{s=t_0}^{t}\exp(2A(t)-2A(s))(2b(s)-c(s))\,ds$ où A est une primitive de a sur J. On en déduit que z est majorée sur $[t_0,\alpha[$ car A et b sont continues sur $[t_0,\alpha]$ et $c \geq 0$, donc $\|y'\| = \|f(t,y)\|$ est aussi majorée, et $\int_{s=t_0}^{\alpha} y'(s)\,ds$ est absolument convergente. Ainsi y admet une limite finie en α^-, et l'on peut prolonger y au dela de α avec le thm de Cauchy-Arzela ; y n'est pas maximale.

Correction de l'exercice 4625 ▲

(a) $\frac{d}{dt}f(x,y) = x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}$ donc f convient si $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x(y-1)$ (condition suffisante). Il n'existe pas de telle fonction (thm. de Schwarz), mais on peut accepter f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)x(y-1)$ où λ est une fonction bien choisie (appelée *facteur intégrant*). On voit immédiatement que $\lambda(x,y) = \frac{1}{xy}$ convient, d'où $f(x,y) = x+y-\ln(xy)$.

(b) D'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz, s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t, et de même pour y. Ainsi, si on fixe une condition initiale $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t. De plus, par le même raisonnement, si $(x(0),y(0)) \neq (1,1)$ alors $(x(t),y(t)) \neq (1,1)$ pour tout t. Désormais on suppose ces conditions satisfaites. Soit $k = f(x(0),y(0)) = x(0)+y(0)-\ln(x(0)y(0))$. Par étude de fonction, on voit que $k \neq 2$ et la courbe C_k d'équation $f(x,y) = k$ est une courbe fermée de classe $\mathscr{C}^1$ entourant le point $(1,1)$. Le point $M_t = (x(t),y(t))$ se déplace sur C_k avec une vitesse numérique $ds/dt = \sqrt{x^2(1-y)^2+y^2(x-1)^2} \geq \alpha_k > 0$ où α_k ne dépend que de k. On en déduit qu'une abscisse curviligne de M_t décrit $\mathbb{R}$ quand t décrit $\mathbb{R}$. En particulier il existe $t_0 > 0$ tel que $s(t_0)-s(0) = \text{longueur}(C_k)$ ce qui implique $M_{t_0} = M_0$ et le mouvement est t_0-périodique.

Correction de l'exercice 4626 ▲

$f(x,y) = (3x-2y)e^{4(x-y)}$.

Correction de l'exercice 4627 ▲

$f(x,y) = \frac{a(x-y)}{2}+g(x+y)$.

Correction de l'exercice 4628 ▲

$f(x,y) = g(xy)$.

Correction de l'exercice 4629 ▲

$f(x,y) = \ln|xy| + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 4630 ▲

$f(x,y) = g(\theta)$.

Correction de l'exercice 4631 ▲

(a) $g(\rho,\theta) = \lambda(\rho)e^{-2\theta}$.

(b) g est 2π-périodique, donc $\lambda = 0$, et $f = 0$.

Correction de l'exercice 4632 ▲

$f(x,y) = g\left(\frac{1+y^2}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 4634 ▲

$f(x,y) = \rho^{\alpha}A(\theta) + \rho^{1-\alpha}B(\theta)$.

Correction de l'exercice 4635 ▲

(a) $(a+b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a+b(\alpha+\beta)+2c\alpha\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + (a+b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

(b)

Correction de l'exercice 4636 ▲

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Rightarrow f(x,y) = A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + B\left(\frac{x}{y}\right)$.

Correction de l'exercice 4637 ▲

$2tg'(t) + (1+t^2)g''(t) = t \Rightarrow g(t) = \frac{t}{2} + \lambda \arctan t + \mu$.

Correction de l'exercice 4638 ▲

(a) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(b) $f(x,y) = \frac{xy}{16} + h(x) + k(y)$.

Correction de l'exercice 4639 ▲

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Rightarrow f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + h(xy)$.

Correction de l'exercice 4640 ▲

$(1-t^2)f'' - 2tf' = 0 \Rightarrow f(t) = \lambda \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \mu$.

Correction de l'exercice 4641 ▲

$\Delta f = 4(x^2+y^2)\Delta F$.

Correction de l'exercice 4642 ▲

(a) $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x}$.

(b) $f(x,y) = \frac{xy}{2} + h(u) + k(v)$ avec $u+v = y$, $uv = x$.

Correction de l'exercice 4643 ▲

$f(r) = A\cos r + B\sin r$.

Correction de l'exercice 4644 ▲

(a) Il existe G telle que $\frac{\partial G}{\partial u} = g + u\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial (ug)}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial v} = g + v\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial (vg)}{\partial v}$.
Donc $G = ug + \varphi(v) = vg + \psi(u)$, d'où $g = \frac{\varphi(v)-\psi(u)}{v-u}$. La réciproque est immédiate.

(b) $f(x,y) = x\left(\varphi\left(y - \frac{1}{x}\right) + \psi\left(y + \frac{1}{x}\right)\right)$.

Correction de l'exercice 4645 ▲

(a) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x+2y$. L'application $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y) = (u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u,v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x+2y) \text{ où } h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto \cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

(b) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ est un C^1-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}) / \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta) = h_1(r)\\
&\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}) / \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\
&\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}) / \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

(c) Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \rightarrow &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (u,uv) = (x,y) \end{array}$. Donc si on pose $f(x,y) = g(u,v)$, on a $g = f \circ \varphi$.

Soit $(x,y,u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = x \\ uv = y \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{array}\right. .$$

Ainsi, φ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x,\frac{y}{x}) = (u,v) \end{array}.$$

De plus, φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On sait alors que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même.

Puisque $g = f\circ\varphi$ et que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si et seulement si g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + \left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(v) \\ &\exists (h,k) \in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v) = uh(v) + k(v) \\ &\exists (h,k) \in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y) = xh(xy) + k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y) \mapsto xh(xy) + k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Correction de **l'exercice 4673 ▲**

(a) Le graphe est bien un paraboloïde de révolution ayant l'origine pour sommet, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le haut. Les lignes de niveau sont les cercles $x^2+y^2 = z_0,\ z_0 = c,\ c > 0$ étant une constante ; pour $c = 0$ c'est le somment, c.a.d. l'origine.

(b) Le graphe de la fonction f est un paraboloïde de révolution ayant le point $(0,0,25)$ pour sommet et plafonné par le plan des x et y, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le bas. Les lignes des niveau sont les cercles $x^2+y^2 = 25-z_0,\ z_0 = c,\ c < 25$ étant une constante qui dégénèrent en un point, le sommet, pour $c = 25$.

Le graphe de la fonction g est un demi-cône de révolution ayant le point $(0,0,5)$ pour sommet et plafonné par le plan des x et y, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le bas. Les lignes des niveau sont les cercles $x^2+y^2 = (5-z_0)^2$, $z_0 = c$ étant une constante telle que $0 \leq c \leq 5$ qui dégénèrent en un point, le sommet, pour $c = 5$.

(c) Dans $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (x,y,z), avec $f(x) = (y,z)$, le graphe en discussion est une hélice sur le cône de révolution $y2+z^2 = x^2$.

(d) Le support de cette courbe paramétrée est une spirale planaire qui rencontre l'origine et dont la pente à l'origine vaut zéro.

(e) Pour que $f(x,y,z) = \exp(x+y^2-z^2)$ soit constant il faut et il suffit que $x+y^2-z^2$ soit constant. Les surfaces de niveau en discussion sont donc les surfaces $x+y^2-z^2 = c$. Ce sont des paraboloïdes hyperboliques.

(f) Le graphe de l'application f en discussion est une surface dans $\mathbb{R}^4$, et la dimension 4 est trop grande pour représenter, sur une feuille de papier, ce graphe plongé dans $\mathbb{R}^4$. L'application f est un champs de vecteurs dans le plan cependant. De façon générale, on peut représenter graphiquement le champ de vecteurs $X : U \to \mathbb{R}^2$ dans l'ouvert U du plan en dessinant, au point (u_1,u_2) de U, le vecteur $X(u_1,u_2) = (x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2))$.

N.B. Quand on représente une surface dans l'espace de dimension 3 ordinaire par un dessin sur une feuille de papier, en vérité on ne dessine qu'une projection de l'espace de dimension 3 sur un plan.

Correction de l'exercice 4674 ▲

(a) La partie A_1 est ouverte. Car la courbe $x^2y^2 = 1$ a quatre branches, les deux branches de $xy = 1$ et les deux branches de $xy = -1$; ces quatre branches coupent le plan en cinq parties dont une contient l'origine. La courbe $x^2y^2 = 1$ étant une partie fermée, le complémentaire est un ouvert qui est réunion de cinq ouverts. La partie A_1 est la réunion des quatre parties qui ne contiennent pas l'origine. Puisque A_1 est ouvert, A_1 coïncide avec son intérieur. L'adhérence de A_1 est la réunion de A_1 avec les quatre branches de la courbe $x^2y^2 = 1$.

(b) La partie A_2 est le demi-cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre constitué des angles $0 < \varphi < \pi$ en radians et ce n'est ni ouvert ni fermé. La partie A_2 n'est pas ouverte car aucun disque de rayon positif n'est dans A_2 ; elle n'est pas fermée car les points $(\pm 1, 0)$ sont des points d'adhérence qui n'appartiennent pas à A_2. L'adhérence de A_2 est la partie
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$
du plan.

Correction de l'exercice 4675 ▲

(a) Soient q_1 un point de B_1 et q_2 un point de B_2, soient d_1 resp. d_2 la distance de q_1 au bord de B_1 resp. la distance de q_2 au bord de B_2, et soit $0 < d \leq \min(d_1, d_2)$. Alors la boule ouverte dans $\mathbb{R}^{n+m}$ centrée en (q_1, q_2) et de rayon d est dans $B_1 \times B_2$.

(b) Soient p un point de A, q un point de B, soit B_1 un disque ouvert dans A contenant p, et soit B_2 un intervalle ouvert dans B contenant q. D'après (1.), $B_1 \times B_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $B_1 \times B_2 \subseteq A \times B$ et (p,q) appartient à $B_1 \times B_2$. Par conséquent, $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 4676 ▲

(a) La réunion $\cup_n A_n$ d'une suite de parties ouvertes A_n de $\mathbb{R}^2$ est bien une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit q un point de $\cup_n A_n$. Alors il existe n_0 tel que q appartienne à A_{n_0}. Puisque A_{n_0} est ouvert, il existe un disque ouvert D dans A_{n_0} tel que q appartienne à D. Par conséquent, il existe un disque ouvert D dans $\cup_n A_n$ tel que q appartienne à D.

L'intersection $\cap_n A_n$ d'une suite de parties ouvertes A_n de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'intersection des intervalles ouverts $]-1/n, 1/n[$ est la partie $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

(b) La réunion $\cup_n B_n$ d'une suite de parties fermées B_n de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Car le complémentaire $\mathscr{C}(\cup_n B_n)$ de $\cup_n B_n$ est l'intersection $\cap_n \mathscr{C} B_n$ des complémentaires et c'est donc l'intersection d'une suite $(\mathscr{C} B_n)$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ qui, d'après (1.), n'est pas nécessairement une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. De même, l'intersection $\cap_n B_n$ d'une suite de parties fermées B_n de $\mathbb{R}^2$ est bien une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Car le complémentaire $\mathscr{C}(\cap_n B_n)$ de $\cap_n B_n$ est la réunion $\cup_n \mathscr{C} B_n$ des complémentaires et c'est donc la réunion d'une suite $(\mathscr{C} B_n)$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ qui, d'après (1.), est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4677 ▲

La partie A du plan n'est pas ouverte puisqu'elle ne contient aucun disque ouvert. Cette partie A n'est pas fermée non plus : L'origine est un point d'adhérence : Quel que soit le disque ouvert B centré à l'origine, il existe un point de B qui appartient à A. Mais l'origine n'appartient pas à A d'où A n'est pas fermé. L'adhérence $\overline{A}$ de A est la réunion $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Car quelle que soit la suite (x_n) de points de $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ telle que cette suite converge dans le plan, la limite appartient à $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Correction de l'exercice 4679 ▲

(a) Soit A une partie de E. $\overline{A}$ est fermé et donc $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et donc $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

(b) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.

• Pour tout $x \in E$, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

• Pour tout $x \in E$, $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow B \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$. Donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(c) Soient A et B deux parties de E.

$\overline{A} \cup \overline{B}$ est une partie fermée de E contenant $A \cup B$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (puisque $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E au sens de l'inclusion contenant $A \cup B$).

Réciproquement, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Finalement $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cap B$ et donc $\mathring{A}\cap\mathring{B}\subset\overset{\circ}{A\cap B}$.

Réciproquement , $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B\Rightarrow\overset{\circ}{A\cap B}\subset\mathring{A}$ et $\overset{\circ}{A\cap B}\subset\mathring{B}\Rightarrow\overset{\circ}{A\cap B}\subset\mathring{A}\cap\mathring{B}$.

Finalement, $\overset{\circ}{A\cap B}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$.

(d) $\overline{A}\cap\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cap B$ et donc $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A=[0,1[$ et $B=]1,2]$, $A\cap B=\varnothing$ puis $\overline{A\cap B}=\varnothing$ mais $\overline{A}\cap\overline{B}=[0,1]\cap[1,2]=\{1\}\neq\varnothing$.

$\mathring{A}\cup\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cup B$ et donc $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset\overset{\circ}{A\cup B}$.

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A=[0,1]$ et $B=[1,2]$, $A\cup B=[0,2]$ puis $\overset{\circ}{A\cup B}=]0,2[$ mais $\mathring{A}\cup\mathring{B}=]0,1[\cup]1,2[\neq]0,2[$.

(e) Soient A et B deux parties de E. Soit $x\in E$.

$$x\in\overset{\circ}{A\setminus B}\Leftrightarrow A\setminus B\in\mathscr{V}(x)\Leftrightarrow\exists\mathscr{B}\text{ boule ouverte de centre }x\text{ telle que }\mathscr{B}\subset A\setminus B$$
$$\Leftrightarrow\exists\mathscr{B}\text{ boule ouverte de centre }x\text{ telle que }\mathscr{B}\subset A\text{ et }\mathscr{B}\subset{}^cB\Leftrightarrow A\in\mathscr{V}(x)\text{ et }{}^cB\in\mathscr{V}(x)$$
$$\Leftrightarrow x\in\mathring{A}\text{ et }x\in\overset{\circ}{({}^cB)}\Leftrightarrow x\in\mathring{A}\text{ et }x\in{}^c(\overline{B})\Leftrightarrow x\in\mathring{A}\cap{}^c(\overline{B})\Leftrightarrow x\in\mathring{A}\setminus\overline{B}.$$

Donc $\overset{\circ}{A\setminus B}=\mathring{A}\setminus\overline{B}$.

(f) Soit A une partie de E. $\mathring{\overline{\mathring{A}}}\subset\overline{\mathring{A}}\Rightarrow\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}\subset\overline{\overline{\mathring{A}}}=\overline{\mathring{A}}$. D'autre part $\mathring{A}\subset\overline{\mathring{A}}\Rightarrow\mathring{A}=\mathring{\mathring{A}}\subset\mathring{\overline{\mathring{A}}}\Rightarrow\overline{\mathring{A}}\subset\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. Finalement, $\overline{\mathring{A}}=\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

$\mathring{\overline{A}}\subset\overline{\mathring{\overline{A}}}\Rightarrow\mathring{\overline{A}}=\mathring{\mathring{\overline{A}}}\subset\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. D'autre part $\mathring{\overline{A}}\subset\overline{A}\Rightarrow\overline{\mathring{\overline{A}}}\subset\overline{\overline{A}}=\overline{A}\Rightarrow\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}\subset\mathring{\overline{A}}$. Finalement, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}=\mathring{\overline{A}}$.

Correction de l'exercice 4680 ▲

L'exercice 4679 montre que l'on ne peut pas faire mieux.

Soit $A=([0,1[\cup]1,2])\cup\{3\}\cup(\mathbb{Q}\cap[4,5])$.

- $\mathring{A}=]0,1[\cup]1,2[$.
- $\overline{\mathring{A}}=[0,2]$.
- $\mathring{\overline{\mathring{A}}}=]0,2[$.
- $\overline{A}=[0,2]]\cup\{3\}\cup[4,5]$
- $\mathring{\overline{A}}=]0,2[\cup]4,5[$.
- $\overline{\mathring{\overline{A}}}=[0,2]\cup[4,5]$.

Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 4681 ▲

Soit $f\in E$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit g_n l'application définie par $\forall x\in[0,1]$, $g_n(x)=f(x)+\frac{1}{n}\left|x-\frac{1}{2}\right|$.

Chaque fonction g_n est continue sur $[0,1]$ mais non dérivable en $\frac{1}{2}$ ou encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $g_n\in E\setminus D$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\|f-g_n\|_\infty=\frac{1}{2n}$. On en déduit que la suite $(g_n)_{n\geqslant1}$ tend vers f dans l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_\infty)$.

f est donc limite d'une suite d'éléments de ${}^cD$ et donc est dans l'adhérence de ${}^cD$. Ceci montre que $\overline{{}^cD}=E$ ou encore ${}^c(\mathring{D})=E$ ou enfin $\mathring{D}=\varnothing$.

Enfin, puisque $P\subset D$, on a aussi $\mathring{P}=\varnothing$.

Correction de l'exercice 4682 ▲

(a) Soit $x\in E$. Puisque D est dense dans E, il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers x et puisque f et g sont continues et coincident sur D et donc en x

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to+\infty}d_n\right)=\lim_{n\to+\infty}f(d_n)=\lim_{n\to+\infty}g(d_n)=g\left(\lim_{n\to+\infty}d_n\right)=g(x).$$

On a montré que $f=g$.

(b) Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Soit $a=f(1)$.

- $x=y=0$ fournit $f(0)=0=a\times0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. $f(nx)=f(x+...+x)=f(x)+...+f(x)=nf(x)$. Ceci reste vrai pour $n=0$.

• En particulier $x=1$ fournit pour tout entier naturel non nul n, $f(n)=nf(1)=an$ puis $x=\frac{1}{n}$ fournit $nf\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)=a$ et donc $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a}{n}$.
• Ensuite, $\forall (p,q)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=a\frac{p}{q}$.
• Soit $x\in\mathbb{R}$. L'égalité $f(x)+f(-x)=f(0)=0$ fournit $f(-x)=-f(x)$.
• En particulier, $\forall (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(-\frac{p}{q}\right)=-f\left(\frac{p}{q}\right)=-a\frac{p}{q}$.
En résumé, si f est morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même, $\forall r\in\mathbb{Q}$, $f(r)=ar$ où $a=f(1)$.
Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, les deux applications $f\ :\ x\mapsto f(x)$ et $g\ :\ x\mapsto ax$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. D'après le 1), $f=g$ ou encore $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$ où $a=f(1)$.
Réciproquement, toute application linéaire $x\mapsto ax$ est en particulier un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même, continu sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Les morphismes continus du groupe } (\mathbb{R},+) \text{ dans lui-même sont les applications linéaires } x\mapsto ax,\ a\in\mathbb{R}.}$

Correction de l'exercice 4683 ▲

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace normé $(E,\|\ \|)$ ayant une unique valeur d'adhérence que l'on note ℓ. Montrons que la suite u converge vers ℓ.
Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas vers ℓ. Donc

$$\exists\varepsilon>0/\ \forall n_0\in\mathbb{N},\ \exists n\geqslant n_0/\ \|u_n-\ell\|\geqslant\varepsilon\quad(*).$$

ε est ainsi dorénavant fixé.
En appliquant $(*)$ à $n_0=0$, il existe un rang $\varphi(0)\geqslant n_0=0$ tel que $\|u_{\varphi(0)}-\ell\|\geqslant\varepsilon$.
Puis en prenant $n_0=\varphi(0)+1$, il existe un rang $\varphi(1)>\varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)}-\ell\|\geqslant\varepsilon$ ... et on construit ainsi par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)}-\ell\|\geqslant\varepsilon$.
Maintenant, la suite u est bornée et il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$. Puisque E est de dimension finie, le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS permet d'affirmer qu'il existe une suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de u convergeant vers un certain $\ell'\in E$. ℓ' est donc une valeur d'adhérence de la suite u. Mais quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $\|u_{\psi(n)}-\ell\|\geqslant\varepsilon$, on obtient $\|\ell'-\ell\|\geqslant\varepsilon$ et donc $\ell\neq\ell'$. Ceci constitue une contradiction et donc u converge vers ℓ.

Correction de l'exercice 4690 ▲

(a)
(b) $d(x_n,a)$ décroit, donc tend vers d. Il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers ℓ et $d(\ell,a)=d$. La suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(\ell)$ et on a $d(f(\ell),a)=d$, donc $\ell=a$. Il y a une seule valeur d'adhérence, donc la suite converge.

Correction de l'exercice 4691 ▲

C est stable par f_n qui est $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-lipschitzienne. Donc il existe $x_n\in C$ tel que $f_n(x_n)=x_n$; toute valeur d'adhérence de (x_n) est point fixe de f.

Correction de l'exercice 4695 ▲

(a)
(b)
(c) Soit $\ell=\lim_{n\to\infty}\delta(K_n)$. Il existe $x_n,y_n\in K_n$ tels que $d(x_n,y_n)=\delta(K_n)$. Après extraction de sous-suites, on peut supposer que $x_n\to x$ et $y_n\to y$. Pour $\varepsilon>0$, $(\overline{B}(x,\varepsilon)\cap K_n)$ et $(\overline{B}(y,\varepsilon)\cap K_n)$ forment des suites décroissantes de compacts non vides, donc $\overline{B}(x,\varepsilon)\cap K$ et $\overline{B}(y,\varepsilon)\cap K$ sont non vides. Par conséquent, $\delta(K)\geq\ell-2\varepsilon$.

Correction de l'exercice 4697 ▲

$U_{i,n}=\{x\in E \text{ tq } \overline{B}(x,1/n)\subset O_i\}$ est ouvert et les $U_{i,n}$ recouvrent E. On extrait un recouvrement fini $\Rightarrow r=\min(1/n)$.

Correction de l'exercice 4698 ▲

Soit (u^n) une suite de suites éléments de A : $u^n=(u^n_k)$. On peut trouver une sous-suite $(u^{n_{p_0}})$ telle que $(u_0^{n_{p_0}})$ converge vers $u_0\in[0,1]$, puis une sous-suite $(u^{n_{p_1}})$ telle que $(u_0^{n_{p_1}},u_1^{n_{p_1}})$ converge vers $(u_0,u_1)\in[0,1]^2$, etc. Alors la suite $(u^{n_{p_k}})_k$ converge dans A vers $(u_0,u_1,\dots)$.

Correction de l'exercice 4701 ▲

On choisit $a \in K$ et on considère pour $n \geq 1$ la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x)$. f_n est une $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-contraction de K donc admet un point fixe x_n. Si x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) alors $f(x) = x$.

Correction de l'exercice 4707 ▲

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)| = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|$.

• Tout d'abord $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n(\pi-\alpha))| = |\sin(n\alpha)|$ et donc $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$.
On en déduit que $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.

• $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sup\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Ensuite, si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geqslant \sin(\alpha) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Par suite $\underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{3}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.

• Soit alors $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$. Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
Il existe un unique entier naturel n_1 tel que $n_1\alpha \leqslant \frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha$ à savoir $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$.
Mais alors, $\frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha = n\alpha + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et l'entier $n_0 = n_1 + 1$ convient.
Ceci montre que $f(\alpha) \geqslant \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Finalement $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et donc $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Min}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4708 ▲

(a) $A\setminus]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[$ est fini.

(b)

Correction de l'exercice 4710 ▲

Soient $x < y$: Il existe $a \in |||$ tel que $n \geq a \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < y - x$.
Il existe $b \in |||$ tel que $\sqrt{a} - \sqrt{b} < x$.
Alors il existe $c \geq a$ tel que $x < \sqrt{c} - \sqrt{b} < y$.

Correction de l'exercice 4711 ▲

$n + p\sqrt{2} > 1 \Rightarrow n > 0,\ p > 0$, donc $A\cap]1,+\infty[$ admet un plus petit élément : $3+2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 4712 ▲

On construit un ensemble de type Cantor dont les trous ont pour longueur 1, $\frac{1}{2^a}$, $\frac{1}{4^a}$, ..., et on répartit les x_k de part et d'autre des trous en fonction de l'écriture décimale de k ($0 \to$ à gauche, $1 \to$ à droite).

Correction de l'exercice 4714 ▲

L'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle constitué de points fixes de $f \Rightarrow$ la suite (u_n) a une seule valeur d'adhérence.

Correction de l'exercice 4718 ▲

Soit $\ell = \liminf \frac{u_n}{n}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe p tel que $(\ell-\varepsilon)p \leq u_p \leq (\ell+\varepsilon)p$.
Alors pour $n \in |||$ et $0 \leq k < p$: $u_k + (\ell-\varepsilon)np \leq u_{np+k} \leq u_k + (\ell+\varepsilon)np$.

Correction de l'exercice 4719 ▲

(a) Il est supposé connu (et à savoir démontrer) le fait suivant : *si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, alors soit G est monogène, soit $\overline{G}=\mathbb{R}$.* Dans le cas de la question, le groupe G des périodes de f contient 1 et $\sqrt{2}$ donc n'est pas monogène car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ (la démonstration a été demandée à l'élève). De plus G est fermé par continuité de f, d'où f est constante.

(b) D'après la première question, pour tout $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ l'application $x\mapsto f(x,y)$ est constante et il en va de même si $y\in\mathbb{Q}$ par continuité de f. Donc f est de la forme $(x,y)\mapsto g(y)$ où g est 1-périodique. Réciproquement, toute fonction f de cette forme convient.

Correction de l'exercice 4720 ▲

1ère solution. • Montrons qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
Soient x et y deux réels tels que $x<y$. Soient $d=y-x$ puis n un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n}<d$ (par exemple, $n=E\left(\frac{1}{d}\right)+1$). Soient enfin $k=E(nx)$ et $r=\frac{k+1}{n}$. r est un rationnel et de plus

$$x=\frac{nx}{n}<\frac{k+1}{n}=r\leqslant\frac{nx+1}{n}=x+\frac{1}{n}<x+d=x+y-x=y.$$

En résumé, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x<y\Rightarrow\exists r\in\mathbb{Q}/\ x<r<y)$. Ceci montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2ème solution. On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux et en particulier tout réel est limite d'une suite de rationnels. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{Q}\text{ est dense dans }\mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4721 ▲

Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant 1)$.
Soit $x\in\mathbb{R}^+$ (le travail est analogue si $x\in\mathbb{R}^-$).
Pour $n\in\mathbb{N}$

$$|x-n\alpha|\leqslant\alpha\Leftrightarrow-\alpha\leqslant x-n\alpha\leqslant\alpha\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}-1\leqslant n\leqslant\frac{x}{\alpha}+1\Leftarrow n=E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose $n_0=E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(x)-f(x-\alpha)|+|f(x-\alpha)-f(x-2\alpha)|+\ldots+|f(x-(n_0-1)\alpha)-f(x-n_0\alpha)|+|f(x-n_0\alpha)-f(0)|+|f(0)|\\&\leqslant n_0+1+|f(0)|\ (\text{car }|x-n_0\alpha-0|\leqslant\alpha)\\&\leqslant\frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $|f(x)|\leqslant\frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|$. Par symétrie des calculs, $\forall x\in\mathbb{R}^-$, $|f(x)|\leqslant\frac{-x}{\alpha}+2+|f(0)|$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leqslant\frac{|x|}{\alpha}+2+|f(0)|$.

$$\boxed{f\text{ uniformément continue sur }\mathbb{R}\Rightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)\leqslant a|x|+b.}$$

Correction de l'exercice 4722 ▲

Soit $a\in\mathring{\overline{U}}\cap\mathring{\overline{V}}$: Il existe $B(a,r)\subset\overline{U}\cap\overline{V}$.
Soit $b\in B(a,r)\cap U$: Il existe $B(b,r')\subset B(a,r)\cap U$. Donc $b\notin\overline{V}$, contradiction.

Correction de l'exercice 4724 ▲

$\mathring{\overline{U}}\subset\overline{U}\Rightarrow\overline{\mathring{\overline{U}}}\subset\overline{U}$.
$U\subset\overline{U}\Rightarrow U\subset\mathring{\overline{U}}\Rightarrow\overline{U}\subset\overline{\mathring{\overline{U}}}$.

Correction de l'exercice 4725 ▲

Soit a intérieur à $\mathrm{Fr}(U)$: Il existe $B(a,r)\subset\overline{U}\setminus U$. $B(a,r)\cap U=\varnothing\Rightarrow a\notin\overline{U}$, contradiction.

Correction de l'exercice 4727 ▲

Par passage à la limite, $\delta(A)=\delta(\overline{A})\geq\delta(\mathrm{Fr}(A))$.
Soient $x,y\in A$ distincts et D la droite passant par x et y. D coupe A suivant un ensemble borné dont les extrémités appartiennent à $\mathrm{Fr}(A)$. Donc $\delta(\mathrm{Fr}(A))\geq\delta(A)$.

Correction de l'exercice 4729 ▲

Si f est continue : soit $x \in \overline{A}$: $x = \lim a_n \Rightarrow f(x) = \lim f(a_n) \in \overline{f(A)}$.
soit $x \in f^{-1}(B)^\circ$: $f(x) \in \mathring{B} \Rightarrow \exists\, B(f(x),r) \subset B$, $\exists\, \delta > 0$ tq $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),r)$
$\Rightarrow B(x,\delta) \subset f^{-1}(B)$.
si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$: soit $B \subset F$ fermé et $A = f^{-1}(B)$: $f(\overline{A}) \subset B$ donc $\overline{A} \subset A$.
si $f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)^\circ$: soit $B \subset F$ ouvert et $A = f^{-1}(B)$: $\mathring{A} \supset f^{-1}(\mathring{B}) = A$.

Correction de l'exercice 4734 ▲

(a) Pour $x, x' \in \mathbb{R}^n$ et $y \in A$ on a $d_A(x) \le \|x-y\| \le \|x-x'\| + \|x'-y\|$. En prenant la borne inférieure sur y on obtient $d_A(x) \le \|x-x'\| + d_A(x')$. Par symétrie on a aussi $d_A(x') \le \|x-x'\| + d_A(x)$ d'où $|d_A(x) - d_A(x')| \le \|x-x'\|$.

(b) On sait que $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } d_A(x) = 0\}$. Donc $d_A = d_B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$ et la réciproque résulte de la propriété facile $d_A = d_{\overline{A}}$.

(c) On note : $M = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, $\alpha = \sup\{d_B(x), x \in A\}$ et $\beta = \sup\{d_A(x),\ x \in B\}$. Par restriction de y à $A \cup B$ on obtient $M \ge \max(\alpha,\beta)$. Par ailleurs, pour $y \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et $b \in B$ on a $\|y-a\| - \|y-b\| \le \|a-b\|$ d'où $d_A(y) - \|y-b\| \le d_A(b)$ puis $d_A(y) - d_B(y) \le \beta$. Par symétrie on a aussi $d_B(y) - d_A(y) \le \alpha$ donc $|d_A(y) - d_B(y)| \le \max(\alpha,\beta)$ et finalement $M \le \max(\alpha,\beta)$.

Correction de l'exercice 4737 ▲

(a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la demi-droite d'origine O et d'angle polaire θ coupe K selon un intervalle non trivial (K est convexe et O est interieur à K), fermé borné (K est compact). On note $f(\theta)$ la longueur de cet intervalle, ce qui définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ 2π-périodique telle que $K = \{M(\rho,\theta) \text{ tq } 0 \le \rho \le f(\theta)\}$.

Continuité de f : soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M(\rho_0,\theta_0)$ tel que $f(\theta_0) - \varepsilon < \rho_0 < f(\theta_0)$. Donc $M \in \mathring{K}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que la boule de centre M et de rayon α est incluse dans K (faire un dessin). Ainsi, pour tout θ suffisament proche de θ_0 on a $f(\theta) \ge OM > f(\theta_0) - \varepsilon$. Considérons alors une hypothétique suite (θ_k) de réels convergeant vers θ_0 telle que la suite $(f(\theta_k))$ ne converge pas vers $f(\theta_0)$. Comme la suite $(f(\theta_k))$ est bornée on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer qu'elle converge vers un réel ℓ et le raisonnement précédent montre que $\ell > f(\theta_0)$. Si M_k désigne le point de K à la distance $f(\theta_k)$ dans la direction d'angle polaire θ_k alors la suite (M_k) converge vers le point $M(\ell,\theta_0)$ qui doit appartenir à K par compacité, mais qui contredit la définition de $f(\theta_0)$.

(b) Si g ne s'annule pas alors $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x)\,dx \ne 0$. Si g ne s'annule qu'en $\alpha \in [0,\pi]$ alors g est de signe constant sur $[0,\alpha]$ et sur $[\alpha,\pi]$, les signes sont opposés, et on obtient encore une contradiction en considérant $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x-\alpha)\,dx$ qui vaut 0 (développer le sinus).

(c) On choisit $O = G$. On a $\iint_{M\in K} \vec{OM} = \vec{0}$, soit $\int_{\theta=0}^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} f^3(\theta)\sin\theta\,d\theta = 0$, soit encore : $\int_{\theta=0}^{\pi}(f^3(\theta) - f^3(\theta+\pi))\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi}(f^3(\theta) - f^3(\theta+\pi))\sin\theta\,d\theta = 0$. D'après la question précédente, il existe $\alpha \ne \beta \in]0,\pi[$ tels que $f(\alpha) = f(\alpha+\pi)$ et $f(\beta) = f(\beta+\pi)$, ce qui prouve qu'il y a au moins deux diamètres de K dont $O = G$ est le milieu. On prouve l'existence d'un troisième diamètre en décalant l'origine des angles polaires de façon à avoir $f(0) = f(\pi)$, ce qui est possible vu l'existence de α, β.

Correction de l'exercice 4738 ▲

Pour $\|x\| \le 1$ et $\|y\| \le 1$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x-y\|$.

Pour $\|x\| \le 1 < \|y\|$ on a $\|f(x) - f(y)\| \le \|x-y\| + \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \|x-y\| + \|y\| - 1 \le \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \le 2\|x-y\|$.

Pour $1 < \|x\| \le \|y\|$ on a $\|f(x) - f(y)\| \le \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \le \frac{\|x-y\| + \|y\| - \|x\|}{\|x\|} \le \frac{2\|x-y\|}{\|x\|}$.

Remarque : dans le cas où la norme est euclidienne, $f(x)$ est le projeté de x sur la boule unité, c'est-à-dire le point de la boule unité le plus proche de x. Dans ce cas, f est 1-lipschitzienne. Dans le cas d'une norme non euclidienne on peut avoir $\|f(x) - f(y)\| > \|x-y\|$, par exemple avec $x = (1,1)$ et $y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $\|\ \|_\infty$.

Correction de l'exercice 4748 ▲

On construit (s_k) de proche en proche de sorte que pour tout n fixé la suite $(y_n^{s_k})$ soit convergente vers z_n. Comme $\sum_{n\le N}(y_n^{s_k})^2$ est bornée indépendamment de N et k la série $\sum_n z_n^2$ a ses sommes partielles bornées donc converge. On a alors $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$ pour toute suite x à support fini, puis pour toute suite de carré sommable par interversion de limites.

Correction de l'exercice 4749 ▲

(a) Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. On remplace la norme sur E par la norme infinie associée à $(e_1,\dots,e_p)$. Alors $\|\|u^n\|\| \le \sum_{i=1}^p \|u^n(e_i)\|$.

(b) Trigonaliser fortement u (ou son prolongement au complexifié de E). Comme (u^n) est borné, les valeurs propres de u sont de module inférieur ou égal à 1, et pour celles de module 1 le bloc triangulaire associé est en fait diagonal. On trouve $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n u^i \xrightarrow[n\to\infty]{}$ projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$.

Correction de l'exercice 4753 ▲

(a)

(b)

(c)

(d) (P_n) converge vers 0 pour $a\in\,]-2,2[$ et vers 1 pour $a=2$. La suite est non bornée si $|a|>2$; elle est bornée divergente pour $a=-2$.

(e) $(X/b)^n$ converge vers 1 pour N_b et vers 0 pour N_a.

Correction de l'exercice 4755 ▲

(a)

(b)

(c) $f(x)=\int_{t=0}^x \sin(x-t)(f(t)+f''(((t))\,dt$, $f''(x)=(f(x)+f''(x))-f(x)$.

Correction de l'exercice 4756 ▲

$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \Rightarrow (AB)_{ij}^2 \le \sum_{k=1}^n A_{ik}^2\times\sum_{k=1}^n B_{kj}^2$.

Correction de l'exercice 4757 ▲

Si A est une matrice de rang $r>0$ telle que $p(A)=0$ alors pour toute matrice M de rang $<r$ on peut trouver P et Q telles que $M=PAQ$ d'où $P(M)=0$. Donc p est nulle sur toute matrice de rang 1 et par inégalité triangulaire sur tout matrice.

Correction de l'exercice 4764 ▲

(a) $2^n\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

(b) Supposons qu'il existe une norme euclidienne $\|\ \|$ et deux réels $\alpha,\beta>0$ tels que $\alpha\|u\|_\infty \le \|u\| \le \beta\|u\|_\infty$ pour tout $u\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose $u(x)=1-2|x|$ pour $x\in[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$ et $u(x)=0$ sinon. Soit $n\in|||$ et pour $1\le i\le n$: $u_i(x)=u((n+1)x-i)$. Alors $\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\right\|^2 \le 2^n\beta^2$ et $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2 \ge 2^n n\alpha^2$ donc ces deux sommes ne peuvent rester égales quand $n\to\infty$.

(c) Même construction. On trouve

$$\sum_\sigma \Big\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\Big\|^2 \le 2^n\beta^2\|u\|_p^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/p}$$

et $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2 \ge 2^n\alpha^2\|u\|_p^2\,\frac{n}{(n+1)^{2/p}}$.

Correction de l'exercice 4766 ▲

(a)

(b) On prouve la convexité de B. Soient $x,y\in B$, $t\in[0,1]$ et $z=(1-t)x+ty$. On a $N^2(z)\le 2t^2+2(1-t)^2$, d'où $N(z)\le 1$ si $t=\frac12$. Ceci prouve déjà que B est stable par milieu, et on en déduit par récurrence sur $n\in|||$ que $z\in B$ si t est de la forme $a/2^n$ avec $a\in[[0,2^n]]$.

Si t n'est pas de cette forme, on écrit t comme barycentre de deux nombres dyadiques $t=u\frac{a}{2^n}+(1-u)\frac{b}{2^n}$ en faisant en sorte que u soit arbitrairement proche de $\frac12$. Si c'est possible, on obtient que z est barycentre de deux éléments de B avec les coefficients u et $1-u$, d'où $N^2(z)\le 2u^2+2(1-u)^2 \xrightarrow[u\to 1/2]{}$. Reste donc à choisir n, a, b : pour n donné, on choisit $a=[2^n]-n$ et $b=[2^n]+n$. C'est possible car $[2^nt]\sim 2^nt$ et on est dans le cas $0<t<1$ donc on a bien $a,b\in[[0,2^n]]$ si n est suffisament grand. Il vient $u=\frac{b-2^nt}{b-a}$, quantité comprise entre $\frac{n-1}{2n}$ et $\frac12$ et donc qui tend bien vers $\frac12$.

Remarque : la condition (iii) est aussi nécessaire, donc une norme est une application vérifiant (i), (ii) et (iii).

Correction de l'exercice 4772 ▲

(a) On procède par récurrence sur n. Pour $n=1$, l'application $[0,+\infty[\ \ni \lambda_1 \mapsto \|x-\lambda_1 a_1\|$ est continue, constante si $a_1=0$ et tend vers $+\infty$ quand $\lambda_1 \to +\infty$ si $a_1 \neq 0$. Dans les deux cas elle admet un minimum.
Pour $n \geq 2$, soit $C' = \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\right\}$. Soit pour $\lambda_n \in [0,+\infty[\ : \varphi(\lambda_n) = d(x-\lambda_n a_n, C')$. La distance à C' est 1-lipschitzienne donc $\varphi(\lambda_n) \geq d(-\lambda_n a_n, C') - \|x\| = \lambda_n d(-a_n, C') - \|x\| \xrightarrow[\lambda_n \to +\infty]{} +\infty$. Étant continue, φ admet un minimum sur $[0,+\infty[$ et on applique l'hypothèse de récurrence à $x-\lambda_n a_n$.

(b)

Correction de l'exercice 4773 ▲

On procède par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n=1$, en confondant E et $\mathbb{R}$, C est un intervalle dense, c'est $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, soit $E = H \oplus < a >$ où H est un hyperplan de E. On montre ci-dessous que $C' = C \cap H$ est une partie de H convexe et dense, donc égale à H, d'où $H \subset C$ et ce pour tout H. Ainsi $C=E$.
Densité de C' : soit $x \in H$, et (y_k), (z_k) des suites d'éléments de C convergeant respectivement vers $x+a$ et $x-a$. On écrit $y_k = y'_k + \lambda_k a$ et $z_k = z'_k + \mu_k a$ avec $y'_k, z'_k \in H$ et $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$. Par équivalence des normes en dimension finie, on a $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ et $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$, donc le point $x_k = \frac{\lambda_k z_k - \mu_k y_k}{\lambda_k - \mu_k}$ est bien défini et appartient à C' pour k assez grand, et converge vers x.
Remarque : Si E est de dimension infinie, alors il contient des hyperplans non fermés, donc des parties strictes, convexes denses.

Correction de l'exercice 4775 ▲

(a) $\overline{P} = P$, $\mathring{P} = \{$fonctions strictement positives$\}$.

(b) $\overline{P} = P$, $\mathring{P} = \varnothing$.

Correction de l'exercice 4776 ▲

$\overline{F} = F$, $\mathring{F} = \varnothing$.

Correction de l'exercice 4777 ▲

Oui pour $\pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, non pour les autres (les symétries non triviales).
$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est isolé car si $u \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ alors -1 est valeur propre de u et $\|u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\| \geq 2$. De même pour $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.
Si u est une symétrie non triviale, soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base propre de u avec $u(e_1)=e_1$ et $u(e_2)=-e_2$. Pour $p \in |||^*$ soit $u_p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $u_p(e_1) = e_1 + e_2/p$ et $u_p(e_i) = u(e_i)$ pour $i \geq 2$. On a $u_p^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $u_p \neq u$ et $u_p \xrightarrow[p\to\infty]{} u$.

Correction de l'exercice 4780 ▲

(a) $GL_n((x^2+1)^{)} = \det^{-1}((x^2+1)^{\setminus}\{0\})$ est ouvert. Il est dense car $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ quelconque est limite des matrices $A - \frac{1}{p}I$ inversibles pour presque tout entier p (A a un nombre fini de valeurs propres).

(b) Toute matrice triangulaire est limite de matrices triangulaires à coefficients diagonaux distincts.

(c) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \lim_{p\to\infty} \begin{pmatrix}\lambda & 1/p\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ donc une matrice triangulaire à valeurs propres non distinctes est limite de matrices non diagonalisables. Par conjugaison, la frontière de $D_n((x^2+1)^{)}$ contient l'ensemble des matrices ayant au moins une valeur propre multiple.
Réciproquement, soit (A_k) une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers une matrice A. Les matrices A_k ont toutes au moins une valeur propre multiple, et ces valeurs propres sont bornées (car si λ est une valeur propre de M alors $|\lambda| \leq \|M\|$ en prenant une norme sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ subordonnée à une norme sur $(x^2+1)^n)$ donc on peut trouver une suite (z_k) de complexes convergeant vers un complexe z telle que $\chi'_{A_k}(z_k) = 0$. A la limite on a $\chi_A(z) = 0$ ce qui prouve que A a au moins une valeur propre multiple.
Conclusion : la frontière de $D_n((x^2+1)^{)}$ est exactement l'ensemble des matrices diagonalisables ayant au moins une valeur propre multiple et l'intérieur de $D_n((x^2+1)^{)}$ est l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 4781 ▲

Si N est nilpotente, on peut se ramener au cas où N est triangulaire supérieure stricte.

Soit alors $P = \mathrm{diag}(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ avec $\alpha \in (x^2+1)^*$. Le coefficient général de $P^{-1}NP$ est $\alpha^{j-i}N_{ij} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$.

Réciproquement, s'il existe une suite (N_k) de matrices semblables à N convergeant vers la matrice nulle, alors par continuité du polynôme caractéristique, on a $\chi_N = (-X)^n$ et N est nilpotente.

Correction de l'exercice 4782 ▲

(a) Ω est ouvert : si P a n racines distinctes $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ on choisit $b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n$. La suite $(P(b_0), \dots, P(b_n))$ est constituée de termes non nuls de signes alternés, il en est de même pour la suite $(Q(b_0), \dots, Q(b_n))$ où Q est un polynôme unitaire arbitraire suffisament proche de P (pour une norme quelconque).

Ω n'est pas fermé car $\varnothing \neq \Omega \neq \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est connexe.

(b) Déjà, si l'on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de normes convenables, f est une isométrie bicontinue donc $f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)}$. Montrons que $\overline{f(\Omega)}$ est l'ensemble $\mathscr{S}$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, notons $M(P)$ la matrice compagne de P.

Si $P \in \mathscr{S}$ alors $M(P)$ est $\mathbb{R}$-trigonalisable, donc limite de matrices à valeurs propres réelles distinctes. Les polynômes caractéristiques de ces matrices, au signe près, appartienent à $f(\Omega)$ et convergent vers P d'où $\mathscr{S} \subset \overline{f(\Omega)}$.

Si (P_k) est une suite de polynômes de $f(\Omega)$ convergeant vers P alors il existe une suite (O_k) de matrices orthogonales telle que ${}^tO_kM(P_k)O_k$ est triangulaire supérieure (méthode de Schmidt). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que O_k converge vers une matrice orthogonale O et donc ${}^tOM(P)O$ est aussi triangulaire supérieure ce qui implique que $P \in \mathscr{S}$.

Correction de l'exercice 4784 ▲

Remarquer que la restriction de f à toute partie compacte est uniformément continue.

Correction de l'exercice 4791 ▲

(a)

(b) Soit F est un tel fermé, et $a \in F$. On prend $f(x) = x + d(x,F)$ si $0 \le x \le a$ et $f(x) = x - d(x,F)$ si $a \le x \le 1$.

Correction de l'exercice 4792 ▲

(a) Pour simplifier, on suppose $z = 0$ (sinon, se placer dans la base $(1, X-z, \dots, (X-z)^d)$ et invoquer l'équivalence des normes en dimension finie).

Soit $P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,d}x^d$. La suite (P_n) étant convergente est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_{n,k}| \le M$ pour tous n,k. De plus, $a_{n,0} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0 = 0$ et $a_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1 \neq 0$.

Posons alors $Q_n(x) = -\frac{a_{n,0}+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,d}x^d}{a_{n,1}}$ (bien défini si n est assez grand). On va montrer que Q_n vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur $\overline{B(0,\delta)}$ pour tout n assez grand si δ est choisi assez petit, ce qui implique l'existence et l'unicité d'une racine pour P_n dans $\overline{B(0,\delta)}$.

$Q_n(\overline{B(0,\delta)}) \subset \overline{B(0,\delta)}$? Soit $x \in \overline{B(0,\delta)}$: on a

$$|Q_n(x)| \le \frac{|a_{n,0}| + M(\delta^2 + \cdots + \delta^d)}{|a_{n,1}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{M(\delta^2+\cdots+\delta^d)}{|a_1|}.$$

On choisit $\delta > 0$ tel que $\frac{M(\delta+\cdots+\delta^{d-1})}{|a_1|} \le \frac{1}{2}$. Il existe alors $N_1 \in |||$ tel que $\frac{|a_{n,0}|+M(\delta^2+\cdots+\delta^d)}{|a_{n,1}|} \le \delta$ pour tout $n \ge N_1$.

Q_n est contractante sur $\overline{B(0,\delta)}$? Soient $x, y \in \overline{B(0,\delta)}$. On a :

$$\begin{aligned}
|Q_n(x) - Q_n(y)| &\le \frac{|a_{n,2}||x^2-y^2| + \cdots + |a_{n,d}||x^d - y^d|}{|a_n,1|} \\
&\le |x-y|\frac{|a_{n,2}||x+y| + \cdots + |a_{n,d}||x^{d-1} + \cdots + y^{d-1}|}{|a_{n,1}|} \\
&\le |x-y|\frac{M(2\delta + \cdots + d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|}.
\end{aligned}$$

Quitte à diminuer δ on peut imposer $\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_1|} \le \frac{1}{2}$ et donc $\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|} \le \frac{2}{3}$ pour tout $n \ge N_2$ et Q_n est $\frac{2}{3}$-lipschitzienne.

(b) Voir réponse précédente. Y a-t-il une réponse plus simple pour 1) ?

(c) Si z est zéro d'ordre k de P alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n assez grand, P_n a exactement k racines comptées avec leur ordre de multiplicité dans $\overline{B(0,\delta)}$. Ceci est une conséquence du *théorème des résidus* largement hors programme...

Correction de l'exercice 4793 ▲

Si f est constante c'est évident. Sinon, on a facilement $|f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$. Considérons un fermé F et une suite $(f(z_n))$ d'éléments de $f(F)$ convergeant vers $Z \in (x^2+1)$. D'après la remarque, la suite (z_n) est bornée, elle admet une valeur d'adhérence $z \in F$ et $Z = f(z) \in f(F)$.
Remarque : ce résultat est faux pour une fonction polynomiale sur $(x^2+1)^p$ avec $p \geq 2$, prendre par exemple $f(x,y) = x$ sur $(x^2+1)^2$ et $F = \{(x,y) \in (x^2+1)^2 \text{ tq } xy = 1\}$.

Correction de l'exercice 4794 ▲

On suppose P non constant, sans quoi le résultat est trivial. Soit $S(X) = \sup(|P(x)|,\ x \in X)$. On a par inclusion et continuité : $S(\mathrm{Fr}(U)) \leq S(\overline{U}) = S(U)$. Soit $x \in \overline{U}$ tel que $|P(x)| = S(\overline{U})$. On démontre par l'absurde que $x \in \mathrm{Fr}(U)$, ce qui entraîne l'égalité demandée. Supposons donc $x \in U$ et soit $n = \deg(P)$. Alors pour $\rho > 0$ suffisament petit, et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $x + \rho e^{i\theta} \in U$ et :

$$P(x+\rho e^{i\theta}) = P(x) + \rho e^{i\theta} P'(X) + \cdots + \frac{\rho^n e^{in\theta}}{n!} P^{(n)}(x).$$

avec $P^{(n)}(x) = P^{(n)} \neq 0$. On en déduit :

$$2\pi|P(x)| = \left|\int_{\theta=0}^{2\pi} P(x+\rho e^{i\theta})\,d\theta\right| \leq \int_{\theta=0}^{2\pi} |P(x+\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leq 2\pi S(U) = 2\pi|P(x)|.$$

On en déduit que les inégalités sont des égalités, et en particulier que la quantité $|P(x+\rho e^{i\theta})|$ est indépendante de ρ et θ. Il y a contradiction car $|P(x+\rho e^{i\theta})|^2$ est un polynôme de degré $2n$ en ρ.

Correction de l'exercice 4795 ▲

(a) $f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in |||$ par récurrence, puis pour tout $r \in \mathbb{Z}$ par différence, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par quotient et enfin pour tout $r \in \mathbb{R}$ par densité. Dans le cas de (x^2+1)-ev f est $\mathbb{R}$-linéaire mais pas forcément (x^2+1)-linéaire, ctrex : $z \mapsto \bar{z}$ de (x^2+1) dans (x^2+1).

(b) $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq M2^{-n-1}$ donc la série télescopique $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est uniformément convergente.

(c) $\|f_n(x+y) - f_n(x) - f_n(y)\| \leq M2^{-n}$ donc $\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leq 0$ et g est continue (limite uniforme des f_n) d'où g est linéaire continue. $\|f(x) - g(x)\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\| \leq 2M$ donc $f - g$ est bornée. Si h est une application linéaire telle que $f - h$ est bornée alors $g - h$ est aussi bornée ce qui entraîne $g = h$ par linéarité.

Correction de l'exercice 4798 ▲

(a)

(b) Si $c \neq 0$ alors P_c est continue pour toutes les normes N_p et $|||P_c|||_{N_p} = |c|^{-p}e^{|c|}$. Par contre P_0 n'est continue que pour N_0 car si $p > 0$ alors $N_p(x \mapsto e^{-n|x|}) = \frac{p^p e^{-p}}{(n+1)^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc la suite $(x \mapsto e^{-n|x|})$ converge vers la fonction nulle pour N_p, mais $P_0(x \mapsto e^{-n|x|}) = 1 \not\to 0$.

(c) Si $p < q$ alors $N_p(x \mapsto e^{-n|x|})/N_q(x \mapsto e^{-n|x|}) \to \infty$ losrque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4803 ▲

Prendre une base.

Correction de l'exercice 4804 ▲

$\frac{1}{1-X^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_k X}$, $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc $1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-X^n}{n(1-\omega_k X)}$.
Il s'agit de polynômes, donc on peut remplacer X par u, d'où : $(\mathrm{id}_E - u^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{id}_E - e^{2ik\pi/n}u\right)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4805 ▲

$\|X+iY\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$, $\|A(X+iY)\|^2 = \|AX\|^2 + \|AY\|^2 \leq |||A|||_{\mathbb{R}}^2(\|X^2\| + \|Y\|^2)$ donc $|||A|||_{(}x^2+1)^{\leq}|||A|||_{\mathbb{R}}$.

Correction de l'exercice 4806 ▲

(a) Non : $\|(x^2+1)^n\| = 2^n$.

(b) Oui : $\|\psi\| = \|A\|$.

(c) $\|\phi\| = e$, $\|\psi(x^n)\|/\|x^n\|$ si $mn \Rightarrow \psi$ est discontinue.

Correction de l'exercice 4807 ▲

(a) nv^{n-1}.

(b) Si u et v sont continus, $n\|v^{n-1}\| \leq 2\|u\|\,\|v^n\| \leq 2\|u\|\,\|v^{n-1}\|\,\|v\|$.
S'il existe k tel que $v^k = 0$, on peut remonter jusqu'à $v = 0$, absurde. Sinon, on a aussi une contradiction.

Correction de l'exercice 4808 ▲

(a)

(b) $\|P\| = N(P) + N(P') + N(P'') + \dots$ où N est une norme quelconque sur F.

Correction de l'exercice 4809 ▲

Les formes linéaires $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(2)$ constituent une base de E_2^* donc engendrent les formes linéaires $P \mapsto P'(1)$, $P \mapsto P'(2)$ et $P \mapsto P'(3)$. Après calculs, on trouve :

$$\forall\, P \in E_2,\quad \begin{cases} 2P'(1) = & P(2) & & - & P(0) \\ 2P'(2) = & 3P(2)- & 4P(1)+ & & P(0) \\ 2P'(3) = & 5P(2)- & 8P(1)+ & & 3P(0). \end{cases}$$

En notant $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$ on doit donc chercher :

$$|||\varphi||| = \frac{1}{2}\sup\{|c-a| + 4|3c-4b+a| + 9|5c-8b+3a|,\ \text{tq } |a|+|b|+|c| \leq 1\}.$$

La fonction $f : (a,b,c) \mapsto |c-a|+4|3c-4b+a|+9|5c-8b+3a|$ est convexe donc son maximum sur l'*icosaèdre* $I = \{(a,b,c)$ tq $|a|+|b|+|c| \leq 1\}$ est atteint en l'un des sommets $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$, $(0,0,\pm 1)$.
Finalement, $|||\varphi||| = \frac{1}{2}f(0,1,0) = 44$.

Correction de l'exercice 4811 ▲

(a)

(b) Si $x \notin \operatorname{Ker} f$: $\forall\, y \in \operatorname{Ker} f,\ |f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\|\,\|x-y\|$ donc $|f(x)| \leq \|f\| d(x, \operatorname{Ker} f)$.
Soit $z \in E : z = \alpha x + y$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$. Alors $|f(z)| = |\alpha||f(x)|$ et $\|z\| \geq |\alpha| d(x, \operatorname{Ker} f)$
donc $\frac{|f(z)|}{\|z\|} \leq \frac{|f(x)|}{d(x,\operatorname{Ker} f)}$.

Correction de l'exercice 4812 ▲

(a) $f(x_1) + f(x_2) \leq |||f|||\,\|x_1+x_2\| \leq |||f|||\,(\|x_1-\varepsilon\| + \|x_2+\varepsilon\|)$.

(b) Prendre α compris entre le sup du premier membre et l'inf du troisième. Le sup et l'inf sont dans cet ordre d'après la question précédente.

(c) Rmq : φ est mal définie, il faut ajouter "φ est linéaire". On a évidemment $|||\varphi||| \geq |||f|||$ puisque φ prolonge f, et il reste à montrer :
$$\forall x \in F,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ |f(x) + t\alpha| \leq |||f|||\,\|x + t\varepsilon\|.$$
Pour $t = 0$ c'est un fait connu. Pour $t > 0$, cela résulte de l'encadrement de α en prenant $x_1 = -x/t$ et $x_2 = x/t$.
Pour $t < 0$, prendre $x_1 = x/t$ et $x_2 = -x/t$.

(d) Si $u^k = (u_n^k)_{n\in|||} \in E$ et $(u^k)_{k\in|||}$ est une suite de Cauchy, alors pour tout $n \in |||$ la suite réelle $(u_n^k)_{k\in|||}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel ℓ_n. De plus la suite $(u^k)_{k\in|||}$ est bornée dans E donc la suite ℓ ainsi mise en évidence est sommable (les sommes partielles de $\sum|\ell_n|$ sont majorées), et on montre que $\|u^k - \ell\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ par interversion de limites.

(e) Prendre $F_n = \{u \in E$ tq $u_k = 0$ si $k \geq n\}$.

(f) D'après la question **3)** on peut construire f_n, forme linéaire sur $F + F_n$ telle que f_{n+1} prolonge f_n et a même norme que f_n (donc $|||f_n||| = |||f|||$). Soit $G = \cup_{n\in|||}(F+F_n)$ et g la forme linéaire sur G coï ncidant avec chaque f_n sur $F + F_n$. G est dense dans E donc on peut prolonger g en $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par uniforme continuité. Il est alors clair que φ est une forme linéaire prolongeant f et a même norme que f.

Correction de l'exercice 4814 ▲

(a) Si ν est subordonnée à $\| \|$: on a $|\lambda| \leq \nu(f^p)^{1/p}$ pour toute valeur propre λ et tout $p \geq 1$, donc il suffit de prouver que la suite $(x_p = \nu(f^p)^{1/p})$ est convergente. Soit $\ell = \inf\{x_p,\ p \geq 1\}$, $\varepsilon > 0$ et $p \geq 1$ tel que $x_p \leq \ell + \varepsilon$. Pour $n > p$ on note $n-1 = pq + r$ la division euclidienne de $n-1$ par p et l'on a :

$$\nu(f^n) = \nu((f^p)^q \circ f^{r+1}) \leq \nu(f^p)^q \nu(f^{r+1})$$

d'où :

$$\ell \leq x_n \leq x_p^{pq/n} x_{r+1}^{(r+1)/n} \leq (\ell+\varepsilon)^{pq/n} \max(x_1, \dots, x_p)^{(r+1)/n}.$$

Le majorant tend vers $\ell + \varepsilon$ quand n tend vers l'infini donc pour n assez grand on a $\ell \leq x_n \leq \ell + 2\varepsilon$ ce qui prouve la convergence demandée.

Dans le cas où ν est une norme quelconque sur $\mathscr{L}(E)$, il existe une norme subordonnée μ et deux réels $a, b > 0$ tels que $a\mu \leq \nu \leq b\mu$ et donc les suites $(\nu(f^p)^{1/p})$ et $(\mu(f^p)^{1/p})$ ont même limite par le théorème des gens d'armes. Remarque : il résulte de ceci que $\lim_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$ est indépendant de ν.

(b) Considérer la matrice de f^p dans une base propre pour f.

(c) On sait que $f^p = \sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(f)} \lambda^p P_\lambda(p)$ où P_λ est un polynôme. D'où $\rho(f) \leq \nu(f^p)^{1/p} \leq \rho(f) + o(1)$ et donc $\nu(f^p)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \rho(f)$ (thm du rayon spectral).

Correction de l'exercice 4815 ▲

Si $u(\mathring{B}(0,1))$ est ouvert alors il engendre $\mathbb{R}^m$ donc u est surjective.
Si u est surjective, soit $A = u(\mathring{B}(0,1))$. A est convexe, borné, symétrique par rapport à 0 et la réunion des homothétiques de A est égale à $\mathbb{R}^m$; la jauge associée à A est une norme sur $\mathbb{R}^m$ équivalente à l'une des normes usuelles donc A contient une boule de centre 0 et, par homothétie-translation, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ a une image ouverte dans $\mathbb{R}^m$.

Correction de l'exercice 4818 ▲

$E \setminus B$ est connexe par arcs et contient au moins un point $a \in A$. Soit $x \in E \setminus B$ et $\varphi : [0,1] \to E \setminus B$ un arc continu joignant a à x dans $E \setminus B$. Alors $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(A \cup B)$ est non vide, relativement ouvert et relativement fermé dans $[0,1]$, donc c'est $[0,1]$ ce qui prouve que $x \in A$.

Correction de l'exercice 4819 ▲

Le sens H est fermé $\Rightarrow$ $E \setminus H$ n'est pas connexe (par arcs) est évident. Réciproquement, si H n'est pas fermé alors $\overline{H} = E$. Soient $a, b \in E \setminus H$ et (x_n) une suite d'éléments de H telle que $x_0 = 0$ et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b$. On définit un arc continu $\varphi : [0,1] \to E \setminus H$ reliant a à b par : φ est affine sur $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, $\varphi(\frac{1}{n+1}) = b + x_n$ et $\varphi(0) = a$.

Correction de l'exercice 4820 ▲

Cas de la boule fermée. Soit $B = \{u \in E / \ \|u\| \leqslant 1\}$. Soient $(x,y) \in B^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi, $\forall (x,y) \in B^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$ et donc B est convexe.
Cas de la boule ouverte. Soit $B = \{u \in E / \ \|u\| < 1\}$. Soient $(x,y) \in B^2$ et $\lambda \in [0,1]$.
Puisque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \|x\| < 1$, on en déduit que $\lambda\|x\| < 1$. Comme $(1-\lambda)\|y\| \leqslant 1$ (et même < 1) et donc

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| < 1.$$

La boule unité fermée (ou ouverte) de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est un convexe de l'espace vectoriel E.

Correction de l'exercice 4821 ▲

(a) Puisque $p > 0$ et $q > 0$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ et donc $p > 1$. De même, $q > 1$. D'autre part, $q = \frac{p}{p-1}$.

i. L'inégalité est immédiate quand $y = 0$. Soit $y > 0$ fixé.
Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Puisque $p > 1$, la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = x^{p-1} - y$. f admet donc un minimum en $x_0 = y^{1/(p-1)}$ égal à

$$f\left(y^{1/(p-1)}\right) = \frac{y^{p(p-1)}}{p} + \frac{y^{p/(p-1)}}{q} - y^{1/(p-1)}y = y^{p/(p-1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right) = 0.$$

Finalement, f est positive sur $[0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.}$$

ii. Posons $A = \sum_{k=1}^n |a_k|^p$ et $B = \sum_{k=1}^n |b_k|^q$.
Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.
On suppose dorénavant que $A > 0$ et $B > 0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \times \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant \sum_{k=1}^n \left(\frac{|a_k|^p}{pA} + \frac{|b_k|^q}{qB}\right) = \frac{1}{pA}\sum_{k=1}^n |a_k|^p + \frac{1}{qB}\sum_{k=1}^n |b_k|^q = \frac{1}{pA}\times A + \frac{1}{qB}\times B = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

et donc $\sum_{k=1}^n |a_k||b_k| \leqslant A^{1/p}B^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k||b_k|$, on a montré que

$$\boxed{\forall ((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \sum_{k=1}^n |a_kb_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q} \text{ (Inégalité de HÖLDER).}}$$

Remarque. Quand $p = q = 2$, on a bien $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de HÖLDER s'écrit

$$\sum_{k=1}^n |a_kb_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)^{1/2} \text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).}$$

iii. Soit $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de HÖLDER, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (|a_k|+|b_k|)^p &= \sum_{k=1}^n |a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1} \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n (|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n (|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^n (|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

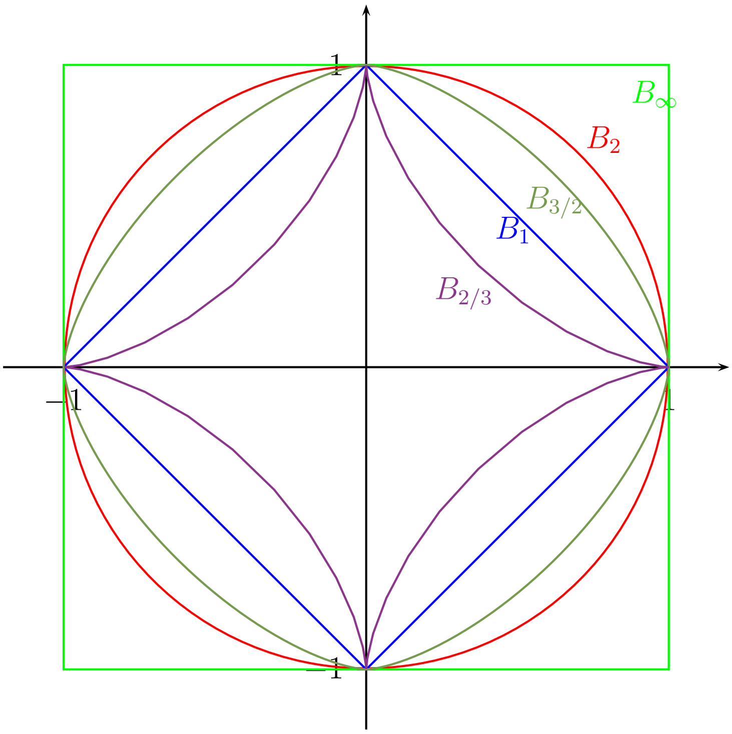
Si $\sum_{k=1}^n (|a_k|+|b_k|)^p = 0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.
Sinon $\sum_{k=1}^n (|a_k|+|b_k|)^p > 0$ et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\sum k = 1^n (|a_k|+|b_k|)^p$, on obtient $\left(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}$

$$\boxed{\forall ((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p} \text{ (Inégalité de MINKOWSKI)}}$$

(b) i. On sait déjà que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha > 1$.
(1) N_α est bien une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.
(2) Soit $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0$.
(3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha} = (|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha}N_\alpha(x) = |\lambda|N_\alpha(x)$.
(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de MINKOWSKI.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^n,\ N_\alpha \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n.}$$

ii. Quelques « boules unités » dans $\mathbb{R}^2$.



Remarque. Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E,\ N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall x \in E,\ N(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow N(-x) \leqslant 1.$$

iii. Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leqslant N_\alpha(x) \leqslant n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).}$$

iv. Soient $\alpha \in]0,1[$ puis $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \ N_\alpha(x) \leqslant 1\}$. Les vecteurs $x = (1,0,0,\dots,0)$ et $y = (0,1,0,\dots,0)$ sont des éléments de B. Le milieu du segment $[xy]$ est $z = \frac{1}{2}(1,1,0,\dots,0)$.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice 4820.
On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Correction de l'exercice 4822 ▲

• Il est connu que N est une norme sur E.
• Montrons que N' est une norme sur E.
(1) N' est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ car pour f dans E, f' est continue sur le segment $[0,1]$ et donc f' est intégrable sur le segment $[0,1]$.
(2) Soit $f \in E$. Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite, f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que $f(0) = 0$ et on en déduit que $f = 0$.
(3) $\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right) = |\lambda| N'(f)$.
(4) Soit $(f,g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt + \int_0^1 |g'(t)|dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc N' est une norme sur E.
• Montrons que N'' est une norme sur E. On note que $\forall f \in E,\ N''(f) = |f(0)| + N'(f')$ et tout est immédiat.

$$\boxed{N,\ N' \text{ et } N'' \text{ sont des normes sur } E.}$$

• Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$. Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$

$$|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(u)\,du| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|du \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\,du = N'(f),$$

et donc $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 N'(f)\,dt = N'(f)$.
Ensuite en appliquant le résultat précédent à f', on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$$\boxed{\forall f \in E, N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f).}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.
$N(f_n) = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E,N).
Par contre, pour $n \geqslant 1$, $N'(f_n) = n\int_0^1 t^{n-1}\,dt = 1$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E,N'). On en déduit que

$$\boxed{\text{les normes } N \text{ et } N' \text{ ne sont pas des normes équivalentes.}}$$

De même en utilisant $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, on montre que les normes N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Correction de l'exercice 4823 ▲

(a) Soit $x \in E$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $d_A(x)$.

(b) i. Soit A une partie fermée et non vide de E. Soit $x \in E$.
• Supposons que $x \in A$. Alors $0 \leqslant f(x) = \mathrm{Inf}\{\|x-a\|,\ a \in A\} \leqslant \|x-x\| = 0$ et donc $d_A(x) = 0$.
• Supposons que $d_A(x) = 0$. Par définition d'une borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A/\ \|x-a_\varepsilon\| < \varepsilon$.
Soit V un voisinage de x. V contient une boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ puis d'après ce qui précède, V contient un élément de A. Finalement, $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$ et donc $x \in \overline{A} = A$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est fermée, } \forall x \in E,\ (d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A).}$$

ii. Posons $d = d_A(x)$. Pour chaque entier naturel n, il existe $a_n \in A$ tel que $d \leqslant \|x-a_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}$.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_n\| \leqslant \|a_n - x\| + \|x\| \leqslant d + \frac{1}{n} + \|x\| \leqslant d + \|x\| + 1$.
Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ convergeant vers un certain élément a de E.
Ensuite, puisque A est fermée, on en déduit que $a \in A$. Puis, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d \leqslant \|x - a_{\varphi(n)}\| \leqslant d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

et puisque $\varphi(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$, on obtient quand n tend vers l'infini, $d = \lim_{n\to+\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$. Maintenant on sait que l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur l'espace normé $(E, \|\ \|)$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|x - a_{\varphi(n)}\right\| = \left\|x - \lim_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)}\right\| = \|x-a\|.$$

On a montré qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x-a\|$.

(c) Soit $x \in E$.
Puisque $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}}(x)$ est un minorant de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$. Comme $d_A(x)$ est le plus grand des minorants de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in \overline{A}$ tel que $\|x-y\| < d(x,\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$ et puis il existe $a \in A$ tel que $\||y-a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que

$$d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. Quand ε tend vers 0, on obtient $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$.
Finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_A(x) = d_{\overline{A}}(x).}$$

(d) Montrons que l'application d_A est Lipschitzienne. Soit $(x,y) \in E^2$
Soit $a \in A$. $d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$. Donc, $\forall a \in A$, $d_A(x) - \|x-y\| \leqslant \|y-a\|$ ou encore $d_A(x) - \|x-y\|$ est un minorant de $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$. Puisque $d_A(y)$ est le plus grand des minorants de $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_A(x) - \|x-y\| \leqslant d_A(y)$.
En résumé, $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x-y\|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x-y\|$ et finalement

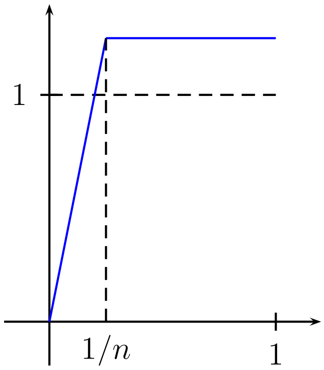
$$\forall (x,y) \in E^2,\ |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x-y\|.$$

Ainsi l'application $d_A : \begin{array}{ccc} (E, \| \ \|) & \to & (\mathbb{R}, | \ |) \\ x & \mapsto & d_A(x) \end{array}$ est 1-Lipschitzienne et en particulier d_A est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$.

(e) Soient A et B deux parties fermées et non vides de E telles que $d_A = d_B$.
Soit $a \in A$. $d_B(a) = d_A(a) = 0$ (d'après 2)) et donc $a \in B$ (d'après 2)). Ainsi $A \subset B$ puis, par symétrie des rôles, $B \subset A$ et finalement $A = B$.

(f) (A n'est pas un sous espace vectoriel de E.)
Soit $f \in A$. $1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_\infty$. Ainsi, $\forall f \in A$, $\|f\|_\infty \geqslant 1$ et donc $d_A(0) \geqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} (n+1)x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 + \frac{1}{n}\ x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{array} \right.$.



Pour chaque entier naturel non nul n, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant 1.$$

Donc, la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_A(0) \leqslant \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$.
En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant d_A(0) \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ et finalement

$$\boxed{d_A(0) = 1.}$$

Remarque. A est fermée mais la distance à A n'est malgré tout pas atteinte. En effet

• Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_\infty)$ vers un certain élément f de E. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et donc d'une part, $f(0) = \lim_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$ et d'autre part $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant 1$. Donc $f \in A$ et on a montré que A est fermée.

• Supposons qu'il existe $f \in A$ telle que $\|f\|_\infty = 1$. Alors l'encadrement $1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \|f\|_\infty = 1$ fournit $\int_0^1 f(x)\,dx = \|f\|_\infty = 1$ puis $\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(x))\,dx = 0$ et donc $\|f\|_\infty - f = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) ou encore $f = 1$ ce qui contredit $f(0) = 0$. On ne peut donc pas trouver $f \in A$ tel que $d_A(0) = d(0, f)$.

Correction de l'exercice 4824 ▲

Soient F_1, F_2 fermés non vides disjoints tels que $F_1 \cup F_2 = A$: Alors $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(F_1) \cup \mathrm{Fr}(F_2)$.

Correction de l'exercice 4826 ▲

Soient F_1, F_2 fermés non vides disjoints tels que $F_1 \cup F_2 = \{\text{va de } u_n\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(F_1, F_2) > \varepsilon$. Alors, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans un seul des F_i.

Correction de l'exercice 4831 ▲

Soit $r = \lim r_n$: $\|a_n - a_{n+k}\| \leq r_n - r_{n+k}$ donc la suite (a_n) est de Cauchy, et converge vers a.
On a $\|a_n - a\| \leq r_n - r$ donc $B(a,r) \subset B_n$.
Réciproquement, si $x \in \bigcap_n B_n$, alors $\|x - a_n\| \leq r_n$ donc $\|x - a\| \leq r$.

Correction de l'exercice 4833 ▲

Soit $a \in \mathring{F}$ et $B(a,r) \subset \bigcup_n F_n$: $B \setminus F_1$ est un ouvert non vide donc contient une boule $B_1(a_1, r_1)$. De même, $B_1 \setminus F_2$ contient une boule $B_2(a_2, r_2)$ etc. On peut imposer $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, donc il existe $c \in \bigcap_n B_n$, c.a.d. $c \in B$ mais pour tout n, $c \notin F_n$. Contradiction.

Correction de l'exercice 4834 ▲

Soit (a_n) définie par $a_{n+1} = f(a_n)$: les sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers le point fixe de $f \circ f$.

Correction de l'exercice 4835 ▲

Supposons qu'il existe une famille $(\mathscr{C}_i = \mathscr{C}(a_i, R_i))_{i \in I}$ de cercles disjoints dont la réunion est égale au plan P. On note D_i le disque fermé de frontière $\mathscr{C}_i$. Soit $i_0 \in I$ choisi arbitrairement, i_1 tel que $a_{i_0} \in \mathscr{C}_{i_1}$, i_2 tel que $a_{i_1} \in \mathscr{C}_{i_2}$ etc. On a $R_{i_k} < \frac{1}{2} R_{i_{k-1}}$ donc la suite (D_{i_k}) vérifie le théorème des fermés emboités, l'intersection des D_{i_k} est réduite à un point x par lequel ne passe aucun cercle $\mathscr{C}_j$.

Correction de l'exercice 4836 ▲

(a)

(b) demi-cercle unité $\Rightarrow x = 0$, $y = \frac{2}{\pi}$.

(c) Sommes de Riemann + l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

(d) $\vec{N}'(t) = \vec{\sigma}(\vec{M}'(t)) \Rightarrow \|\vec{N}'(t)\| = \|\vec{M}'(t))\|$.
$\int_{t=a}^{b} \vec{GN_t} \|\vec{N}'(t)\| \, dt = \vec{0} = \int_{t=a}^{b} \sigma(\vec{G}) N_t \|\vec{M}'(t)\| \, dt$, donc $\sigma(G) = G$.

(e)

Correction de l'exercice 4837 ▲

(a)

(b)

(c) $\vec{e_i}'' = \vec{\Omega}' \wedge \vec{e_i} + (\vec{\Omega} | \vec{e_i}) \vec{\Omega} - \|\vec{\Omega}\|^2 \vec{e_i}$.

Correction de l'exercice 4840 ▲

(a) Non : $f(t) = (t, t^2)$, $g(t) = (1, t)$.

(b) Non : $f(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$, $g(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 4842 ▲

(a) • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \mathrm{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|,\ k \in \mathbb{N}\right\} = \mathrm{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ existe dans $\mathbb{R}$.
• $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.
• Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.
• Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \mathrm{Max}\{|\lambda a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \mathrm{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \|P\|_\infty$.
• Soient $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ est une norme sur } E.}$$

(b) $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et donc $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$. On en déduit que $\mathrm{Sup}\left\{\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty},\ P \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$.
Ceci montre tout à la fois que f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et $|||f||| = 1$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||f||| = 1.}$$

Correction de l'exercice 4843 ▲

(La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que Δ est continu sur E et $|||\Delta||| \leqslant 2$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En résumé,

• $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$,

• $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2$.

On en déduit que

$$\boxed{\Delta \text{ est continu sur } (E, \| \ \|_\infty) \text{ et } |||\Delta||| = 2.}$$

(La linéarité de C est claire et C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Par suite T est continue sur E et $|||T||| \leqslant 1$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|C(u)\|_\infty = 1$. En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$,
- $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1$.

On en déduit que

$$\boxed{C \text{ est continu sur } (E, \| \ \|_\infty) \text{ et } |||C||| = 1.}$$

Correction de l'exercice 4844 ▲

(a) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_1 = \int_0^1 |Tf(x)|\,dx &= \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)\,dt \right| dx \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt \right) dx \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt \right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall f \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leqslant 1$. Ceci montre que T est continu sur $(E, \| \ \|_1)$ et que $|||T||| \leqslant 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \textstyle\int_0^1 (1-x)^n\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \textstyle\int_0^1 |Tf_n(x)|\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1})\,dx = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|||T||| \geqslant \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.
En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant |||T||| \leqslant 1$ et donc $|||T||| = 1$.

$$\boxed{T \text{ est continu sur } (E, \| \ \|_1) \text{ et } |||T||| = 1.}$$

(b) Supposons qu'il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$ ou encore $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx =$ 0. Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc $|||T|||$ n'est pas atteinte.

Correction de l'exercice 4845 ▲

L'application f est linéaire de (E,N) dans $(\mathbb{R}, |\ |)$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.

$$\begin{aligned}
|f(A)| = |\mathrm{Tr}(A)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N(A) = nN(A).
\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E,N) et que $|||f||| \leqslant n$. De plus, si $A = I_n \neq 0$, $\frac{|f(A)|}{N(A)} = \frac{n}{1} = n$. Donc

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E,N) \text{ et } |||f||| = n.}$$

Correction de l'exercice 4846 ▲

• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty=\text{Max}\{|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i,j\leqslant n\}$.

Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB=(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$.

Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}|\leqslant \textstyle\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}|\leqslant \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty\|B\|_\infty=n\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty\leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty}\leqslant n$.

De plus, pour $A_0=B_0=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0$, $\|A_0\|_\infty=\|B_0\|_\infty=1$ puis $\|A_0B_0\|_\infty=\|nA_0\|_\infty=n$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty}=n$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=n.}$$

En particulier, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.

• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\|AB\|_1&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|c_{i,j}|=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|\\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}|\right)=\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}|a_{i,k}||b_{k,j}|\\ &\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}|a_{i,j}||b_{k,l}|=\|A\|_1\|B\|_1.\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1}\leqslant 1$.

De plus, pour $A_0=B_0=E_{1,1}$, on a $A_0B_=E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1}=1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1.}$$

En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.

• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}c_{i,j}^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\ \text{(inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}\\ &=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right)=\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}a_{i,k}^2b_{l,j}^2=\left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}b_{l,j}^2\right)=\|A\|_2\|B\|_2\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2}\leqslant 1$.

De plus, pour $A_0=B_0=E_{1,1}$, on a $A_0B_=E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2}=1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1}$$

En particulier, $\|\ \|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Correction de l'exercice 4847 ▲

Une « norme trois barres » sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nécessairement sous-multiplicative. L'exercice précédent montre qu'il existe des normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas sous-multiplicatives (par exemple $\|\ \|_\infty$). Donc une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une « norme trois barres ».

Correction de l'exercice 4848 ▲

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 4846, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.
Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, N et $\|\ \|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\ \|_1 \leqslant N \leqslant \beta\|\ \|_1$.
Pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k = \frac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.
Remarque. Le résultat précédent signifie que $N' = \frac{1}{K}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = \frac{1}{k^2}N(AB) \leqslant \frac{1}{k^2}N(A)N(B) = \frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B) = N'(A)N'(B).$$

Correction de l'exercice 4849 ▲

Non, car si $A = E_{1,1} \neq 0$ et $B = E_{2,2} \neq 0$ alors $AB = 0$ puis $N(AB) < N(A)N(B)$.

Correction de l'exercice 4850 ▲

• Pour $\|\ \|_1$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\text{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\} = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X\|_1,\end{aligned}$$

en notant $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de la matrice A. Donc, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 \leqslant \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.
Soit alors $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|C_{j_0}\|_1 = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0-ème qui est égale à 1. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}| = \text{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}\times\|X_0\|_1.$$

En résumé,
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \text{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$,
(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \text{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
On en déduit que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 = \text{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
• Pour $\|\ \|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty \\ &\leqslant \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\|X\|_\infty = \text{Max}\{\|L_k\|_1,\ 1\leqslant k\leqslant n\}\times\|X\|_\infty,\end{aligned}$$

en notant $L_1,\dots,L_n$ les lignes de la matrice A. Donc, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty \leqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$.
Soit alors $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $\forall j \in [\![1,n]\!]$, ε_j est un élément de $\{-1,1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j|a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 1$).

$$\begin{aligned}\|AX_0\|_\infty &= \text{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\} \\ &\geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\times\|X_0\|_\infty.\end{aligned}$$

En résumé,
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant \text{Max}\left\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$,
(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geqslant \text{Max}\left\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$.
On en déduit que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty = \text{Max}\left\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
Ainsi, en notant $C_1,\dots,C_n$ et $L_1,\dots,L_n$ respectivement les colonnes et les lignes d'une matrice A,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_1 = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \text{ et } |||A|||_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.}$$

Correction de l'exercice 4851 ▲

Soit $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,
(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.
On en déduit que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}),\ |||D|||_2 = \rho(D)$.
Soit alors $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|AX\|_2 &= \|PD^tPX\|_2 \\ &= \|D(^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = {}^tPX.\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto {}^tPX = X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice ${}^tP$ est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2 = \|^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et en particulier,

$$|||A|||_2 = |||D|||_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$

Remarque. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est donc une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus cette norme est sous-multiplicative.

Correction de l'exercice 4861 ▲

(a) Soit $d : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$. On sait que l'application d est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme) et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux intervalles ouverts.
Par suite, $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynômedet$(A - xI)$ n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul) donc pour p entier naturel supérieur ou égal à un certain p_0, $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$. La suite $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p\geqslant p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ convergente de limite A. Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(b) $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.
Soit $n \geqslant 2$. Les matrices $A_p = pE_{1,1},\ p \in \mathbb{N}$, sont non inversibles et la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est non bornée. Par suite $Mn(R) \setminus GLn(R)$ est non borné et donc non compact.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé mais non compact.}}$$

(c) • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M, {}^tM) \end{array}$, $h : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \mapsto & MN \end{array}$ puis $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{M}_n(R) \\ M & \mapsto & M^tM \end{array}$.
g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h \circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

D'après le théorème de BOREL-Lebesgue, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe. En effet, les deux matrices I_n et $-I_n$ sont orthogonales mais le milieu du segment joignant ces deux matrices est 0 qui n'est pas une matrice orthogonale.

$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact mais non convexe.}}$

(d) $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé.}}$

(e) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et p un élément fixé de $[\![1,n-1]\!]$ (le résultat est clair si $p=0$ ou $p=n$).

A est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses mineurs de format $p+1$ sont nuls (hors programme).

Soient I et J deux sous-ensembles donnés de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $p+1$ et $A_{I,J}$ la matrice extraite de A de format $p+1$ dont les numéros de lignes sont dans I et les numéros de colonnes sont dans J.

Pour I et J donnés, l'application $A \mapsto A_{I,J}$ est continue car linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Par suite, l'application

$f_{I,J} \;:\; A \mapsto \det(A_{I,J})$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices A telles que $\det(A_{I,J}) = 0$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f_{I,J}$) et l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

(f) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On sait que toute matrice est triangulable dans $\mathbb{C}$ et donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$ telle que $A = PTP^{-1}$.

On munit dorénavant $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme multiplicative notée $\|\;\|$. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un réel strictement positif K telle que pour toute matrice M, $\|M\| \leqslant K\|M\|_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n-uplet de réels $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ tels que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}$ et les $\lambda_k + \varepsilon_k$ sont deux à deux distincts. (On prend $\varepsilon_1 = 0$ puis ε_2 dans $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_2 + \varepsilon_2 \neq \lambda_1 + \varepsilon_1$ ce qui est possible puisque $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini puis ε_3 dans $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_3 + \varepsilon_3$ soit différent de $\lambda_1 + \varepsilon_1$ et $\lambda_2 + \varepsilon_2$ ce qui est possible puisque $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini ...)

On pose $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis $T' = T + D$ et enfin $A' = PT'P^{-1}$. Tout d'abord les valeurs propres de A' sont deux à deux distinctes (ce sont les $\lambda_i + \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$) et donc A' est diagonalisable. Ensuite

$$\|A' - A\| = \|PDP^{-1}\| \leqslant \|P\|\|D\|\|P^{-1}\| \leqslant K\|P\|\|P^{-1}\|\|D\|_\infty < \varepsilon.$$

En résumé, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})/\ \|A' - A\| < \varepsilon$ et A' diagonalisable. On a montré que

$\boxed{\text{L'ensemble des matrices complexes diagonalisables dans } \mathbb{C} \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$

On ne peut remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} a - X & c - 1 \\ b + 1 & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) + (b - c) + 1.$$

Le discriminant de χ_{A+E} est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) - 4(b - c) - 4$. Supposons de plus que $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$. Alors

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) - 4(b - c) - 4 \leqslant \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$

Par suite, aucune des matrices $A + E$ avec $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$ n'a de valeurs propres réelles et donc aucun donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On a montré que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(g) La matrice de la forme quadratique $Q \;:\; (x,y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives si et seulement si $a + c > 0$ et $ac - b^2 > 0$. L'application $(a,b,c) \mapsto a + c$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car linéaire sur $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie et l'application $(a,b,c) \mapsto ac - b^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que polynôme.

L'ensemble des triplets considéré est l'intersection des images réciproques par ces applications de l'ouvert $]0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ et est donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

(h) Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est borné. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{S}$. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $0\leqslant a_{i,j}\leqslant 1$ et donc $\|A\|_\infty\leqslant 1$. Ainsi, $\forall A/in\mathscr{S}$, $\|A\|_\infty\leqslant 1$ et donc $\mathscr{S}$ est borné.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est fermé.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. L' application $f_{i,j}\ :\ A\mapsto a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]-\infty,0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par suite, $\left\{A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}/\ a_{i,j}\geqslant 0\right\}=f_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. L' application $g_i\ :\ A\mapsto\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. Le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Par suite, $\left\{A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}/\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}=1\right\}=g_i^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\mathscr{S}$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, $\mathscr{S}$ est un fermé borné de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie et donc $\mathscr{S}$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est convexe. Soient $(A,B)\in(\mathscr{S})^2$ et $\lambda\in[0,1]$. D'une part, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(1-\lambda)a_{i,j}+\lambda b_{i,j}\geqslant 0$ et d'autre part, pour $i\in[\![1,n]\!]$

$$\sum_{j=1}^n((1-\lambda)a_{i,j}+\lambda b_{i,j})=(1-\lambda)\sum_{j=1}^n a_{i,j}+\lambda\sum_{j=1}^n b_{i,j}=(1-\lambda)+\lambda=1,$$

ce qui montre que $(1-\lambda)A+\lambda B\in\mathscr{S}$. On a montré que $\forall(A,B)\in\mathscr{S}^2$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $(1-\lambda)A+\lambda B\in\mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ est convexe.

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(i) Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient $\gamma_1\ :\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & (1-t).A+t.0=(1-t)A\end{array}$ et $\gamma_2\ :\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & tB\end{array}$. Soit enfin $\gamma\ :\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}\gamma_1(2t)\text{ si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \gamma_2(2t-1)\text{ si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{array}\right.\end{array}$.

γ_1 est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et γ_2 est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc γ est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel $t\in[0,1]$, la matrice $\gamma_1(t)=(1-t)A$ est diagonalisable (par exemple, si $A=P\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ alors $(1-t)A=P\text{diag}((1-t)\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$) et de même, pour tout réel $t\in[0,1]$, la matrice $\gamma_2(t)=tB$ est diagonalisable. Finalement γ est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans $\mathbb{R}$, contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices diagonalisables dans } \mathbb{R} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Correction de l'exercice 4929 ▲

(a) Soit G l'isobarycentre du triangle (ABC). On a donc $G=\text{bar}(A(1),B(1),C(1))$. Notons A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. D'après le théorème du barycentre partiel, $G=\text{bar}(A(1),A'(2))$. En particulier, G est sur la médiane (AA'). De même, G est sur la médiane (BB') et sur la médiane (CC').

Finalement, G est sur les trois médianes. les trois médianes sont donc concourantes en G.

(b) Les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles. Par suite, les médiatrices respectives des côtés $[B,C]$ et $[C,A]$ ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point que l'on note O. Par définition de O, on a $OA=OB=OC$. O est donc à égale distance de A et B et est ainsi sur la médiatrice de $[A,B]$. Finalement, les trois médiatrices sont concourantes en O. De plus, O étant à égale distance de A, B et C, le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C.

Réciproquement, un cercle passant par A, B et C a pour centre un point à égale distance de ces points et donc nécessairement de centre O et de rayon OA. Ceci démontre l'existence et l'unicité du cercle circonscrit au triangle (ABC) : c'est le cercle de centre O et de rayon OA.

(c) Les hauteurs issues de A et B ne sont pas parallèles (car perpendiculaires à deux droites non parallèles). Elles admettent ainsi un et un seul point d'intersection. Ceci assure l'unicité d'un point commun aux trois hauteurs.

Soit h l'homthétie de centre G et de rapport -2. Puisque $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA}$, on a $h(A')=A$ et de même $h(B')=B$ et $h(C')=C$.

Par h, l'image de la médiatrice de $[B,C]$, c'est-à-dire de la droite passant par A' et perpendiculaire à (BC) est la droite passant par $h(A')=A$ et perpendiculaire à (BC) (car parallèle à la médiatrice de $[B,C]$). Cette droite est la hauteur issue de A du triangle (ABC). De même, les images des médiatrices de $[C,A]$ et $[A,B]$ sont respectivement les hauteurs issues de B et C.

Le point O est sur les trois médiatrices. Son image par h est donc sur les trois hauteurs (d'où l'existence d'un point commun aux trois hauteurs). Ces trois hauteurs sont ainsi concourantes en un point noté H et appelé l'orthocentre du triangle (ABC). De plus, l'égalité $h(O) = H$ s'écrit $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ ou encore $\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ ou enfin,

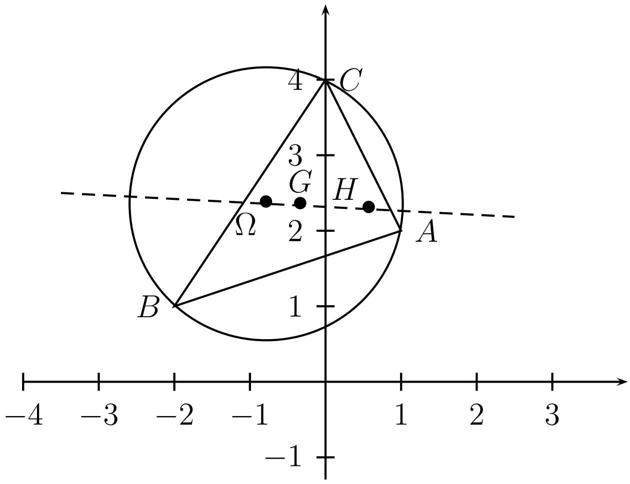
$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}\ \text{Euler.}}$$

Les trois points O, G et H, s'ils sont deux à deux distincts, sont en particulier alignés sur une droite appelée **droite d'**EULER du triangle (ABC).

(d) Deux bissectrices intérieures ne sont pas parallèles (démontrez-le) et sont donc sécantes en un point I à égale distance des trois côtés et à l'intérieur du triangle (ABC). Ce point étant à égale distance des trois côtés est centre du cercle tangent intérieurement aux trois côtés, le cercle inscrit.

Correction de l'exercice 4930 ▲

(Notez bien l'alignement des points G, H et O).



(a) On a $AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{(-3)(-1)+(-1)(2)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Par suite, $\widehat{BAC} = 81°$ à un degré près.

(b) $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\text{abs}(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}) = \frac{7}{2}$.

(c) Notons G l'isobarycentre du triangle (ABC). $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(1+2i-2+i+4i) = \frac{1}{3}(-1+7i)$, et donc $\boxed{G(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}).}$

Notons (x,y) les coordonnées de Ω, le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) (dans cette exercice, la lettre O désigne certainement l'origine du repère).

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2 \\ (x-1)^2+(y-2)^2 = x^2+(y-4)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ 2x-4y=-11 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = -\frac{11}{14} \text{ et } y = \frac{33}{14} \text{ (d'après les formules de Cramer)},$$

et donc
$\boxed{\Omega(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14}).}$

Notons (x,y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle (ABC).

1ère solution.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x-1)+3(y-2) = 0 \\ -(x+2)+2(y-1) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ -x+2y=4 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \text{ et } y = \frac{16}{7} \text{ (d'après les formules de Cramer)},$$

et donc, $\boxed{H(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}).}$

2ème solution. Il est bien meilleur de connaître la relation d'EULER $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$ et de l'utiliser.

$$H = \Omega + 3\overrightarrow{\Omega G} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{14} \\ \frac{33}{14} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{11}{14} \\ \frac{7}{3}-\frac{33}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le cercle circonscrit au triangle (ABC), on a déjà le centre Ω et le rayon

$$\Omega A = \sqrt{(1+\frac{11}{14})^2+(2-\frac{33}{14})^2} = \frac{1}{14}\sqrt{25^2+5^2} = \frac{5}{14}\sqrt{5^2+1} = \frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire l'équation cherchée :

$$(x+\frac{11}{14})^2+(y-\frac{33}{14})^2 = \frac{325}{98} \text{ ou encore } x^2+y^2+\frac{11}{7}x-\frac{33}{7}y+\frac{20}{7} = 0.$$

Néanmoins, on peut trouver directement une équation de ce cercle. Les points A, B et C n'étant pas alignés, on sait que le cercle circonscrit existe et est unique.

Soient alors $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2+ax+by+c = 0$.

$$(A,B,C) \in \mathscr{C}^3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+c=-5 \\ -2a+b+c=-5 \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-4b-16a-2b=11 \\ -2a-3b=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{11}{7} \\ b=-\frac{33}{7} \\ c=\frac{20}{7} \end{array}\right. \text{(CRAMER)}$$

(d) Les bissectrices de l'angle A sont les deux droites constituées des points à égale distance des droites (AB) et (AC). Ces deux droites admettent pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1(1,-3)$ et $\vec{n}_2(2,1)$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} d(M,(AB)) = d(M,(AC)) &\Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{AM}.\vec{n}_1)^2}{||\vec{n}_1||^2} = \frac{(\overrightarrow{AM}.\vec{n}_2)^2}{||\vec{n}_2||^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{((x-1)-3(y-2))^2}{10} = \frac{(2(x-1)+(y-2))^2}{5} \Leftrightarrow (x-3y+5)^2 = 2(2x+y-4)^2 \\ &\Leftrightarrow [(x-3y+5)+\sqrt{2}(2x+y-4)].[(x-3y+5)-\sqrt{2}(2x+y-4)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+2\sqrt{2})x+(-3+\sqrt{2})y+5-4\sqrt{2} = 0 \text{ ou } (1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x+1-\sqrt{2} \text{ ou } y = (1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

La bissectrice intérieure δ_A de l'angle $\widehat{A}$ est la droite (pour certains, cette bissectrice est une demi-droite) passant par $A(2,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = -\sqrt{10}.(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC})$. Ce vecteur a pour coordonnées $(3+\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \delta_A &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})(x-1)-(3+\sqrt{2})(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = (1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4931 ▲

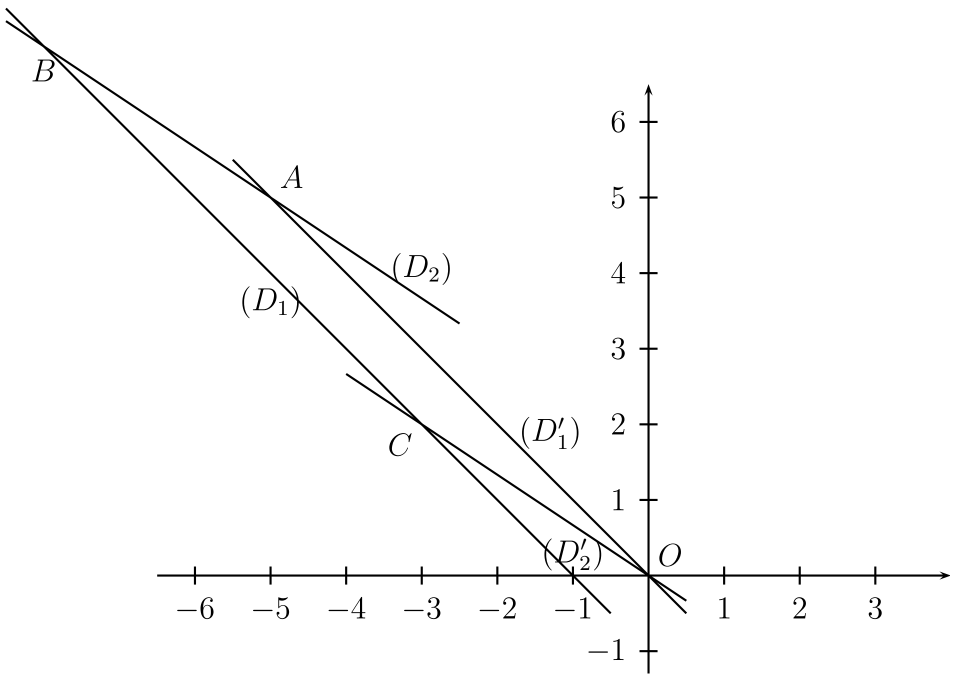
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5 = 2x^2+x(5y-3)+3y^2-2y-5 &= 2(x+\frac{1}{4}(5y-3))^2-\frac{1}{8}(5y-3)^2+3y^2-2y-5 \\ &= \frac{1}{8}(4x+5y-3)^2-\frac{1}{8}y^2+\frac{14}{8}y-\frac{49}{8} \\ &= \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y^2-14y+49)] = \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y-7)^2] \\ &= \frac{1}{8}(4x+4y+4)(4x+6y-10) = (x+y+1)(2x+3y-5) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5 = 0 \Leftrightarrow (x+y+1 = 0 \text{ ou } 2x+3y-5 = 0.$$

(E) est la réunion de la droite (D_1) d'équation $x+y+1=0$ et de la droite (D_2) d'équation $2x+3y-5=0$.



La parallèle à (D_1) passant par O est la droite (D'_1) d'équation $x+y=0$ et la parallèle à (D_2) passant par O est la droite (D'_2) d'équation $2x+3y=0$. Ces droites se coupent en les quatre points $O(0,0)$, $A(-5,5)$, $B(-8,7)$ et $C(-3,2)$. L'aire de ce parallélogramme vaut $\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\right| = 5$.

Correction de l'exercice 4932 ▲

Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $y=2x+1$, $y=2x+7$ et $y=-\frac{1}{2}x$. Soit $\mathscr{C}$ un cercle.

Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles. Donc, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D_1) et (D_2) à savoir la droite d'équation $y=2x+4$ et son rayon est la moitié de la distance de (D_1) à (D_2), ou encore la moitié de la distance d'un point de (D_1), par exemple $(0,1)$, à (D_2). Cette distance vaut $\frac{|2.0-1+7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre Ω a des coordonnées de la forme $(a,2a+4)$, $a\in\mathbb{R}$, et son rayon vaut $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ est tangent à (D_3) si et seulement si la distance de Ω à (D_3) est le rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{C} \text{ solution} &\Leftrightarrow d(\Omega,(D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a+2(2a+4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a+8| = 3\\ &\Leftrightarrow 5a+8=3 \text{ ou } 5a+8=-3 \Leftrightarrow a=-1 \text{ ou } a=-\frac{11}{5}\end{aligned}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $\Omega_1(-1,2)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $\Omega_2(-\frac{11}{5},-\frac{2}{5})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Correction de l'exercice 4933 ▲

Pour $1\leq i\leq n$, notons s_i la symétrie centrale de centre A_i. Le problème revient à trouver n points B_1,..., B_n tels que $B_2=s_1(B_1)$, $B_3=s_2(B_2)$,...,$B_n=s_{n-1}(B_{n-1})$, $B_1=s_n(B_n)$. Ceci équivaut à

$$\forall i\in\{2,...,n\},\ B_i = s_{i-1}\circ s_{i-2}\circ\ldots\circ s_1(B_1) \text{ et } B_1 = s_n\circ s_{n-1}\circ\ldots\circ s_1(B_1)\ (*).$$

Posons alors $f=s_n\circ s_{n-1}\circ\ldots\circ s_1$. f est une composée de symétries centrales. Il y a donc deux cas. Si n est pair, on peut regrouper les symétries deux par deux. f est alors (d'après l'exercice 5035) une composée de translations et donc f est une translation. Si n est impair, $n-1$ est pair et donc la composée des $n-1$ premières symétries est une translation. Par suite, f est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale et est donc une symétrie centrale (d'après l'exercice 5035).

Maintenant, $(*)$ a une solution si et seulement si f a un point invariant.

1er cas. Si n est impair, f étant une symétrie centrale, f a un et un seul point invariant : son centre. Il existe donc un et un seul point B_1 vérfiant $B_1=s_n\circ s_{n-1}\circ\ldots\circ s_1(B_1)$ et finalement, un et un seul n-uplet $(B_1,...,B_n)$ solution du problème posé.

2ème cas. Si n est pair, f est une translation. Si son vecteur est non nul, f n'a pas de point invariant et le problème n'a pas de solution. Si son vecteur est nul, f est l'identité et tout point est invariant par f.
Déterminons le vecteur de f. On pose $n = 2p$. On a alors

$$f = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \ldots s_2 \circ s_1 = t_{2\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}} \circ \ldots \circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}} = t_{2(\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}})}.$$

Quand $n = 2p$ est pair, le problème posé a des solutions si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \overrightarrow{0}$.

Correction de l'exercice 4934 ▲

Tout d'abord, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-2x+4y+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 4$ et $\mathscr{C}$ est le cerlce de centre $\Omega(1,-2)$ et de rayon 2.

(a) Le point $A(2,-2+\sqrt{3})$ est effectivement sur $\mathscr{C}$ car $(2-1)^2+(-2+\sqrt{3}+2)^2 = 1+3 = 4$. La tangente (T) en A à $\mathscr{C}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

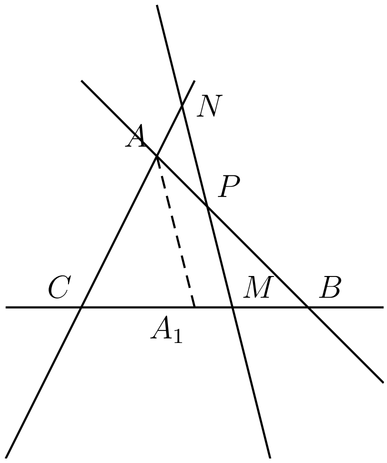
$$M(x,y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow (x-2)+\sqrt{3}(y+2-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x+\sqrt{3}y-5+2\sqrt{3} = 0.$$

(b) Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2. Une équation de ce cercle est $x^2+y^2-2x-3 = 0$. Par suite,

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-2x+4y+1 = 0 \\ x^2+y^2-2x-3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y+4 = 0 \quad ((1)-(2)) \\ x^2+y^2-2x-3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1 \\ x^2-2x-2 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1+\sqrt{3} \text{ ou } x = 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Il ya donc deux points d'intersection : $(1+\sqrt{3},-1)$ et $(1-\sqrt{3},-1)$.

Correction de l'exercice 4935 ▲



Montrons tout d'abord que si M, N et P sont alignés, alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ $(*)$.
On suppose donc que M, N et P sont alignés et on note (Δ) la droite contenant M, N et P.

1ère solution. Soit A_1 le projeté de A sur la droite (BC) parallèlement à la droite (Δ). D'après le théorème de THALES, on a

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \text{ et } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

et donc,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}.\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}} = 1.$$

2ème solution. Soit h_1 l'homothétie de centre M et de rapport $k_1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, de sorte que $h_1(C) = B$. Soit h_2 l'homothétie de centre N et de rapport $k_2 = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, de sorte que $h_2(A) = C$.
Maintenant, le produit k_1k_2 peut-il être égal à 1 ? Si c'était le cas, on aurait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. La réciproque du théorème de THALES permettrait alors d'affirmer que (MN) et (AB) sont parallèles, ce qui n'est pas. Donc, $k_1k_2 \neq 1$ et d'après l'exercice 5035, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie. Puisque $h_1 \circ h_2$ transforme A en B, son centre est sur la droite (AB). Mais d'autre part, son centre est sur la droite des centres (MN). Finalement, le centre de $h_1 \circ h_2$ est le point d'intersection de (MN) et (AB), c'est-à-dire le point P.
Mais alors, le rapport de $h_1 \circ h_2$ vaut également $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Ainsi, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

3ème solution. On se place dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $M(m,1-m)$, $N(0,n)$ et $P(p,0)$ où m, n et p sont distincts de 0 et de 1.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MB}$ sont $(1-m,m-1)$ et celles de $\overrightarrow{MC}$ sont $(-m,m)$. Par suite, $m\overrightarrow{MB} = (m-1)\overrightarrow{MC}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{m-1}{m}$. On trouve de même $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{n-1}{n}$ et $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{p}{p-1}$. Finalement,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Maintenant,

$$M, N \text{ et } P \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1)-(p-m)(m+n-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow -pm-pn+p+mn = 0 \Leftrightarrow mn = p(m+n-1) \Leftrightarrow mn$$
$$= -p(m-1)(n-1)+pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1) = mn(p-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)} = 1$$

Montrons maintenant que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, alors les points M, N et P sont alignés. Pour cela, vérifions tout d'abord que (MN) n'est pas parallèle à (AB). Dans le cas contraire, le théorème de THALES fournirait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, puis $\overline{PA} = \overline{PB}$ et finalement $\overline{AB} = 0$, ce qui n'est pas.
Par suite, la droite (MN) coupe la droite (AB) en un point P_1 vérifiant d'après le début de l'exercice
$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = 1$. On en déduit que $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Notons k la valeur commune de ce rapport.
On a déjà que $k \neq 1$, ou encore $1-k \neq 0$. Par suite, $P_1 = \text{bar}\{A(1), B(-k)\} = P$, ce qui montre que les points M, N et P sont alignés.

Correction de l'exercice 4936 ▲

(a) Le fait que (D) et (D') soient sécantes équivaut à $ab'-a'b \neq 0$.
Soit $A(x_A, y_A)$ le point d'intersection de (D) et (D').
Si (Δ) est une droite ayant une équation de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ alors, puisque

$$\lambda(ax_A+by_A+c)+\mu(a'x_A+b'y_A+c') = \lambda.0+\mu.0 = 0,$$

le point A appartient à (Δ).
Réciproquement, soit (Δ) une droite d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées (α,β). Puisque $ab'-a'b \neq 0$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a,b)$ et $\overrightarrow{u}'(a',b')$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$ est une base du plan (vectoriel). Par suite, il existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ (car $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{u}'$, ou encore tel que $\alpha = \lambda a+\mu a'$ et $\beta = \lambda b+\mu b'$. Toute droite (Δ) admet donc une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by)+\mu(a'x+b'y)+\gamma = 0$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.
Maintenant, si $A \in (\Delta)$, alors

$$\gamma = -\lambda(ax_A+by_A)+\mu(a'x_A+b'y_A) = -\lambda(-c)-\mu(-c') = \lambda c+\mu c'.$$

Finalement, si $A \in (\Delta)$, (Δ) admet une équation de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

(b) Les deux droites (D) et (D') considérées sont bien sécantes car $5.2-7(-3) = 31 \neq 0$. Notons A leur point d'intersection et B le point de coordonnées $(1,0)$. B n'est sur aucune des deux droites considérées de sorte qu'il existe une et seule droite, notée (Δ), solution du problème posé.
Puisque (Δ) passe par A, (Δ) a une équation de la forme $\lambda(5x+7y+1)+\mu(-3x+2y+1) = 0$. Il est clair que l'on ne peut avoir $\lambda = 0$ (car (Δ) n'est pas (D')) et après division par λ, l'équation s'écrit sous la forme $(5x+7y+1)+k(-3x+2y+1) = 0$ où k est un réel. Maintenant, (Δ) passe par B si et seulement si $6-2k = 0$ ou encore $k = 3$.
Une équation cartésienne de (Δ) est donc $(5x+7y+1)+3(-3x+2y+1) = 0$ ou encore $-4x+13y+4 = 0$.

(c) Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\forall m \in \mathbb{R},\ M \in (D_m) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ (2m-1)x+(m+1)y-4m-1 = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ m(2x+y-4)-x+y-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4 = 0 \\ -x+y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 2$$

Toutes les droites (D_m) passent par le point $A(1,2)$.
La droite (D_{-1}) passe par A et est parallèle à (Oy). Ensuite, pour $m \neq -1$, (D_m) est la droite passant par A et de coefficient directeur $f(m) = \frac{-2m+1}{m+1} = -2+\frac{3}{m+1}$. Quand m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(m)$ prend toutes les valeurs réelles sauf -2.
La droite passant par A de coefficient directeur -2 (et donc d'équation $y = -2x+4$) n'est pas une droite (D_m). Toute autre droite passant par A est une droite (D_m).

Correction de l'exercice 4937 ▲

• **Repère de** (D).

$$\left\{\begin{array}{l}x-z-a=0\\y+3z+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=a+z\\y=-1-3z\end{array}\right..$$

(D) est la droite passant par $A(a,-1,0)$ et dirigée par $u(1,-3,1)$. • **Repère de** (D').

$$\left\{\begin{array}{l}x+2y+z-2b=0\\3x+3y+2z-7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2y+z=2b-x\\3y+2z=7-3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=4b-7+x\\z=14-6b-3x\end{array}\right.$$

(D') est la droite passant par $A'(0,4b-7,-6b+14)$ et dirigée par $u'(1,1,-3)$. • Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ccc}x-a&1&1\\y+1&-3&1\\z&1&-3\end{array}\right|=0\Leftrightarrow 8(x-a)+4(y+1)+4z=0\Leftrightarrow 2x+y+z=2a-1.$$

• Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D)\text{ et }(D')\text{ sécantes}\Leftrightarrow A'\in(P)\Leftrightarrow(4b-7)+(-6b+14)=2a-1\Leftrightarrow b=-a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b=-a+4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x+y+z=2a-1$.

Correction de l'exercice 4938 ▲

• (Δ) est parallèle à (D) si et seulement si (Δ) est dirigée par le vecteur $u(3,2,1)$ ou encore (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l}x=a+3\lambda\\y=b+2\lambda\\z=c+\lambda\end{array}\right.$. Ensuite, (Δ) est sécante à (D_1) si et seulement si on peut choisir le point (a,b,c) sur (D_1) ou encore si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l}x=3\lambda\\y=b+2\lambda\\z=4+\lambda\end{array}\right.$. Enfin,

$$(\Delta)\text{ et }(D_2)\text{ sécantes}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ b+2\lambda=4+\lambda+4=0\Leftrightarrow b+2\times(-8)=0\Leftrightarrow b=16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de (Δ) : un système d'équations paramétriques de (δ) est $\left\{\begin{array}{l}x=3\lambda\\y=16+2\lambda\\z=4+\lambda\end{array}\right.$. Un système d'équations cartésiennes de (Δ) est $\left\{\begin{array}{l}x=3(z-4)\\y=16+2(z-4)\end{array}\right.$ ou encore

$$\boxed{(\Delta):\left\{\begin{array}{l}x-3z+12=0\\y-2z-8=0\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 4939 ▲

Notons (Δ) une éventuelle droite solution. • (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et par un point de la forme $(b,1,0)$ ou encore si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et est dirigée par un vecteur de la forme $(b-1,1,-a)$. Ainsi, (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda(b-1)\\y=\lambda\\z=a-\lambda a\end{array}\right.$ ou encore un système d'équations cartésiennes de la forme $\left\{\begin{array}{l}x-(b-1)y=1\\ay+z=a\end{array}\right.$.

• Ensuite, (Δ) et (D_3) sécantes $\Leftrightarrow\exists y\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}-(b-1)y=1\\ay+1=a\end{array}\right.\Leftrightarrow b\neq1$ et $-\frac{a}{b-1}+1=a\Leftrightarrow b\neq0$ et $b\neq1$ et $a=1-\frac{1}{b}$. En résumé, les droites sécantes à (D_1), (D_2) et (D_3) sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\left\{\begin{array}{l}x-(b-1)y=1\\(1-\frac{1}{b})y+z=1-\frac{1}{b}\end{array}\right.,\ b\notin\{0,1\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} &\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y=1\\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z=1-\frac{1}{b}\\ x=y=-6z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} -6z+6(b-1)z=1\\ -6\left(1-\frac{1}{b}\right)z+z=1-\frac{1}{b}\\ x=y=-6z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow b\notin\{0,1,2\} \text{ et } -6\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{6(b-2)}+\frac{1}{6(b-2)}=1-\frac{1}{b}\\
&\Leftrightarrow b\notin\{0,1,2\} \text{ et } -6(b-1)+b=6(b-1)(b-2)\Leftrightarrow b\notin\{0,1,2\} \text{ et } 6b^2-13b+6=0\\
&\Leftrightarrow b\in\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les droites solutions sont } (\Delta_1) : \left\{\begin{array}{l} 3x+y=3\\ y-2z=1\end{array}\right. \text{ et } (\Delta_2) : \left\{\begin{array}{l} 2x-y=2\\ y+3z=1\end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 4940 ▲

• Déterminons le centre de gravité G.

$$G=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C=\frac{1}{3}(2,-2,0)+\frac{1}{3}(4,2,6)+\frac{1}{3}(-1,-3,0)=\left(\frac{5}{3},-1,2\right).$$

• Déterminons le centre du cercle circonscrit O. Une équation du plan (ABC) est $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3\\ y+2 & 4 & -1\\ z & 6 & 0\end{vmatrix}=0$ ou encore $6(x-2)-18(y+2)+10z=0$ ou enfin $3x-9y+5z=24$. Posons alors $O(a,b,c)$. Ensuite, $OA=OB\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(c-6)^2\Leftrightarrow 4a+8b+12c=48\Leftrightarrow a+2b+3c=16$ et $OA=OC\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a+1)^2+(b+3)^2+c^2\Leftrightarrow -6a-2b=2\Leftrightarrow 3a+b=-1$. D'où le système

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} 3a-9b+5c=24\\ a+2b+3c=16\\ 3a+b=-1\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1\\ 3a-9(-3a-1)+5c=24\\ a+2(-3a-1)+3c=16\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1\\ 6a+c=3\\ -5a+3c=18\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1\\ c=3-6a\\ -5a+3(3-6a)=18\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{9}{23}\\ b=\frac{4}{23}\\ c=\frac{123}{23}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right)$. • Déterminons l'orthocentre H. D'après la relation d'EULER,

$$H=O+3\overrightarrow{OG}=\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right)+3\left(-\frac{9}{23}-\frac{5}{3},\frac{4}{23}+1,\frac{123}{23}-2\right)=\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right).$$

• Déterminons le centre du cercle inscrit I. On sait que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$ où $a=BC=\sqrt{5^2+5^2+6^2}=\sqrt{86}$, $b=AC=\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$ et $c=AB=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{54}$. Donc

$$\begin{aligned}
I&=\frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}A+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}B+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}C\\
&=\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).
\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

$$\boxed{\begin{array}{c} G\left(\frac{5}{3},-1,2\right),\ O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right) \text{ puis}\\[2ex] I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).\end{array}}$$

Correction de l'exercice 4941 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-4z \\ y=-4+3z \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. • Soit $M(x,y,z)$ un point du plan. On sait que

$$d(A,(D))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{\sqrt{(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}$$

• Notons $\mathscr{C}$ le cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

$$M(x,y,z)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow d(A,(D))=2\Leftrightarrow (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104$$

Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2 est $(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104$.

Correction de l'exercice 4942 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-z-1 \\ 2x+y=-5z+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4z+3 \\ y=3z-4 \end{array}\right.$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. • Déterminons un repère de (D').

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-z+2 \\ 2x+y=5z+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6z+1 \\ y=-7z+1 \end{array}\right.$$

Un repère de (D') est $\left(A',\overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(1,1,0)$ et $\overrightarrow{u'}(6,-7,1)$. • $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{0}$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D'). • On sait que la distance d de (D) à (D') est donnée par

$$d=\frac{\text{abs}\left(\left[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]\right)}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\|},$$

avec $[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}]=\begin{vmatrix}-2&-4&6\\5&3&-7\\0&1&1\end{vmatrix}=10\times(-2)+10\times5=30$ et donc $d=\frac{30}{10\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

$$\boxed{d((D),(D'))=\sqrt{3}.}$$

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{l}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\\ \left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\end{array}\right.$. Or,

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix}x-3&-4&1\\y+4&3&1\\z&1&1\end{vmatrix}=2(x-3)+5(y+4)-7z=2x+5y-7z+14,$$

et

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix}x-1&6&1\\y-1&-7&1\\z&1&1\end{vmatrix}=-8(x-1)-5(y-1)+13z=-8x-5y+13z+13.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est $\left\{\begin{array}{l}2x+5y-7z=-14\\8x+5y-13z=13\end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 4943 ▲

$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1} \cap \overrightarrow{P_2} \cap \overrightarrow{P_3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z-2y=0 \\ 2x-3z=0 \\ 3y-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3y \\ z=2y \end{array}\right.$. Ainsi, les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont tous trois parallèles à la droite affine (D) d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=3y \\ z=2y \end{array}\right.$. Ces plans définissent donc un prisme. Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan (P) d'équation $3x+y+2z=0$ est perpendiculaire à la droite (D). Son intersection avec les plans (P_1), (P_2) et (P_3) définit donc une section droite du prisme. • Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_1)\cap(P_2)\cap(P) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z-2y=5 \\ 2x-3z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{z-5}{2} \\ x=\frac{3}{2}z \\ \frac{9}{2}z+\frac{z-5}{2}+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\frac{5}{14} \\ y=-\frac{65}{28} \\ x=\frac{15}{28} \end{array}\right.$$

Notons $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$. • Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_1)\cap(P_3)\cap(P) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z-2y=5 \\ 3y-x=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2y+5 \\ x=3y \\ 9y+y+2(2y+5)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{5}{7} \\ x=-\frac{15}{7} \\ z=\frac{25}{7} \end{array}\right.$$

Notons $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$.

• Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_2)\cap(P_3)\cap(P) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3z=0 \\ 3y-x=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Une section droite est OAB où $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$ et $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$. De plus

$$\begin{aligned}\text{aire de}(OAB) &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\| = \frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\left\|\begin{pmatrix}3\\-13\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\sqrt{63^2+21^2+42^2} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\times 21\sqrt{3^2+1^2+2^2} = \frac{75}{4\sqrt{14}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'une section droite est } \frac{75}{4\sqrt{14}}.}$$

Correction de **l'exercice 4944 ▲**

Soient (P) le plan d'équation $x+2y+2z=3$ et (P') le plan d'équation $x+y=0$. L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{n'}(1,1,0)$:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}}{\|\overrightarrow{n}\|\|\overrightarrow{n'}\|}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de **l'exercice 4945 ▲**

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M,(P_1)) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|4x+4y-7z-1|}{9} \text{ et } d(M,(P_2)) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d(M,(P_1)) = d(M,(P_2) &\Leftrightarrow |4x+4y-7z-1| = |8x-4y+z+7| \Leftrightarrow (4x+4y-7z-1)^2 = (8x-4y+z+7)^2 \\ &\Leftrightarrow ((4x+4y-7z-1)-(8x-4y+z+7))((4x+4y-7z-1)+(8x-4y+z+7)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6) = 0 \Leftrightarrow x-2y+2z+2=0 \text{ ou } 2x-z+1=0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les plans bissecteurs de } (P_1) \text{ et } (P_2) \text{ admettent pour équation cartésienne } x-2y+2z+2=0 \text{ et } 2x-z+1=0.}$$

Correction de **l'exercice 4946 ▲**

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l}x+y-3z+4=0\\2x-z+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y-3z=-x-4\\z=2x+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=5x-1\\z=2x+1\end{array}\right.$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,1)$ et $\overrightarrow{u}(1,5,2)$. • Puisque un système d'équations de (D') est $\left\{\begin{array}{l}x=z-1\\y=z-1\end{array}\right.$, un repère de (D') est $\left(A',\overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(-1,-1,0)$ et $\overrightarrow{u'}(1,1,1)$. • $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}=\left(\begin{array}{c}1\\5\\2\end{array}\right)\wedge\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}3\\1\\-4\end{array}\right)\neq\overrightarrow{0}$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D').

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{l}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\\\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\end{array}\right.$. Or,

$$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\left|\begin{array}{ccc}x&1&3\\y+1&5&1\\z-1&2&-4\end{array}\right|=-22x+10(y+1)-14(z-1)=-22x+10y-14z+24,$$

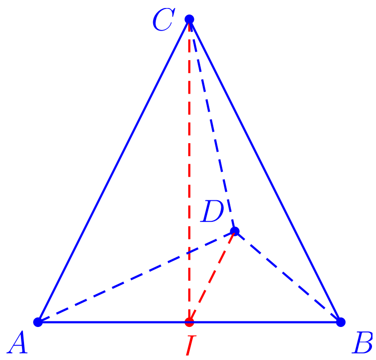
et

$$\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\left|\begin{array}{ccc}x+1&1&3\\y+1&1&1\\z&1&-4\end{array}\right|=-5(x+1)+7(y+1)-2z=-5x+7y-2z+2.$$

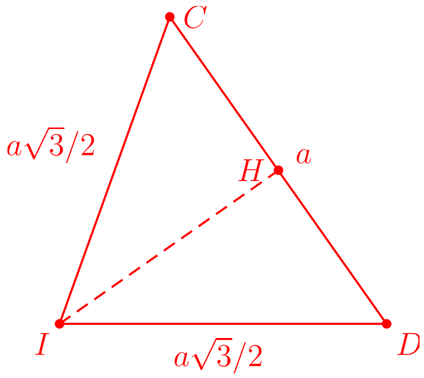
Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à } (D) \text{ et } (D') \text{ est } \left\{\begin{array}{l}11x-5y+7z=12\\5x-7y+2z=2\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 4947 ▲



Angle entre deux arêtes. Les faces du tétraèdre $ABCD$ sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est $60°$.



Angle entre une arête et une face. C'est l'angle $\widehat{CDI}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI}=\text{Arccos}\left(\frac{HD}{DI}\right)=\text{Arccos}\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right)=\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=54,7\ldots°.$$

Angle entre deux faces. C'est l'angle $\widehat{CID}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID}=\pi-2\widehat{CDI}=2\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=2\,\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=70,5\ldots°.$$

Correction de l'exercice 4948 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z=y \\ y+2y=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{10}{3} \\ z=x-\frac{10}{3} \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3},0\right)$ et $\overrightarrow{u}(1,0,1)$. On sait alors que

$$d(O,(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{10}{3}\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(O,(D)) = \frac{10}{\sqrt{6}}.}$$

Correction de l'exercice 4949 ▲

$\det(\vec{MI},\vec{MJ})+\det(\vec{MJ},\vec{MK})+\det(\vec{MK},\vec{MI}) = \det(\vec{IJ},\vec{IK})$.

Correction de l'exercice 4950 ▲

Le système $\left\{\begin{array}{l} P \\ P' \\ Q \end{array}\right.$ doit être lié.

Correction de l'exercice 4951 ▲

$11x+2y-13z=-4$.

Correction de l'exercice 4952 ▲

(a) $a=-4$

(b) $x-5y+3z=-9$

Correction de l'exercice 4953 ▲

(a) Le plan passant par A et D' n'est pas parallèle à D''.

(b) On doit pouvoir s'en sortir avec un repère adéquat …

Correction de l'exercice 4955 ▲

Repère $(A,\vec{AB},\vec{AD})$.

Correction de l'exercice 4956 ▲

$\binom{0}{4/3}$.

Correction de l'exercice 4957 ▲

$\dim(\mathscr{H}) = \dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})$ si $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\neq\varnothing$.
$\dim(\mathscr{H}) = \dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})+1$ sinon.

Correction de l'exercice 4959 ▲

(a) $ux+vy+h=\lambda^2(ua+v)+\lambda(u+va)+h$. Ceci est nul pour tout λ si et seulement si $ua+v=0$, $u+va=0$, $h=0$ soit $(u,v,a,h)=(u,-u,1,0)$ ou $(u,v,a,h)=(u,u,-1,0)$.

(b) $x-y+(\lambda-\lambda^2)(z-1)=0$ et $x+y-(\lambda+\lambda^2)(z+1)=0$.

(c)

Correction de l'exercice 4960 ▲

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, on choisit d'exprimer x et z en fonction de y. Soit $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. D'après les formules de CRAMER, on a

$$M \in (D) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y+2z+7=0 \\ 2x+2y+3z-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z=y-7 \\ -2x-3z=2y-5 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=31-7y \\ z=-19+4y \end{array}\right. .$$

$$\boxed{(D) \text{ est la droite passant par } A(31,0,-19) \text{ dirigée par le vecteur } u(-7,1,4).}$$

Correction de l'exercice 4961 ▲

Soit $M(2+\lambda, 3-\lambda, 7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D).

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2+\lambda)+3(3-\lambda)-5\times 7+2=0 \Leftrightarrow \lambda=12.$$

$(P)\cap(D)$ est donc un singleton. Pour $\lambda=12$, on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$\boxed{(P)\cap(D)=\{(14,-9,7)\}.}$$

Correction de l'exercice 4962 ▲

• **Repère de** (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-2z \\ y=3(-2-2z)+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-2z \\ y=-6-5z \end{array}\right.$$

(D) est la droite passant par $A(0,-1,-1)$ et dirigée par $u(2,5,-1)$. • **Repère de** (D').

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y=z-1 \\ 2x+y=z+a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2z+a-1 \\ y=2-a-3z \end{array}\right.$$

(D') est la droite passant par $A'(a-1, 2-a, 0)$ et dirigée par $u'(2,-3,1)$. • Déjà u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y+1 & 5 & -3 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x-4(y+1)-16(z+1)=0 \Leftrightarrow -x+2y+8z=-10.$$

• Enfin, (D) et (D') sont coplanaires si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow -(a-1)+2(2-a)=-10 \Leftrightarrow a=\frac{5}{3}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(D) \text{ et } (D') \text{ sont coplanaires si et seulement si } a=\frac{5}{3} \text{ et dans ce cas, une équation du plan contenant } (D) \\ \text{et } (D') \text{ est } -x+2y+8z=-10.\end{array}}$$

Correction de l'exercice 4963 ▲

Puisque P parallèle à la droite (Oy), le vecteur $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$ est dans $\overrightarrow{P}$. De même, le vecteur $\overrightarrow{AB}=(-1,3,1)$ est dans $\overrightarrow{P}$. P est donc nécessairement le plan passant par $A(0,-1,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$. Réciproquement, ce plan convient. Une équation de P est donc $(x-0)+(z-2)=0$ ou encore $x+z=2$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan parallèle à la droite } (Oy) \text{ et passant par } A(0,-1,2) \text{ et } B(-1,2,3) \text{ est } x+z=2.}$$

Correction de l'exercice 4966 ▲

(a) $\begin{cases} 2x' = x - 2y - z + 1 \\ 2y' = -x - z + 1 \\ 2z' = -x - 2y + z + 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x' = -5x - 3y + 2z - 3 \\ 2y' = 3x + y - 2z - 1 \\ z' = -3x - 3y + z - 3 \end{cases}$

Correction de l'exercice 4967 ▲

affinité de base $\mathscr{P} : x + 2y + z = 2$, de direction $\mathrm{vect}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$, de rapport 3.

Correction de l'exercice 4968 ▲

si trois points sont non alignés, $ABCD$ doit être un parallélogramme.
si deux points sont distincts et A, B, C, D sont alignés, on doit avoir $A = C$, $B = D$.

Correction de l'exercice 4970 ▲

affinité de rapport $\lambda\mu$ si $\lambda\mu \neq 1$, transvection ou id sinon.

Correction de l'exercice 4972 ▲

5. $\mathscr{B} = \{3(x + y + z) = 1\}$, $\quad \vec{\mathscr{F}} = \mathrm{vect}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $\quad 9\vec{u} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.

Correction de l'exercice 4973 ▲

oui ssi $\vec{P'Q'}$ est colinéaire à $\vec{PQ}$. Dans ce cas, f est unique.

Correction de l'exercice 4974 ▲

Il existe une homothétie de centre O transformant A en A', B en B', et C en C', et l'homothétie de centre $G, -\frac{1}{2}$ transforme A en α, B en β, C en γ.

Correction de l'exercice 4993 ▲

Repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \Rightarrow$ les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Correction de l'exercice 4994 ▲

$A_i^{(k)} = \mathrm{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k} \sum_{l \equiv j (\mathrm{mod}\, n)} C_k^{|l-i|}\right)$.

Correction de l'exercice 4995 ▲

$\vec{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1} \vec{GA_i^{(k)}}$.

Correction de l'exercice 4996 ▲

$A_k = \mathrm{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$ où α_k, β_k, γ_k vérifient : $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 2x_{k-3}$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $2, j, j^2$, donc $x_k \sim \lambda 2^k$ avec $\lambda = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{7} = \frac{1}{7}$.
Donc $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, et $A_k \to G$, isobarycentre de $A_0 A_1 A_2$.

Correction de l'exercice 5000 ▲

$\frac{1}{7}$.

Correction de l'exercice 5001 ▲

(a)

(b) $N = \mathrm{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.

(c)

(d) homothétie de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$.

Correction de **l'exercice 5002 ▲**

Repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Correction de **l'exercice 5003 ▲**

$M_1 \mapsto M_4$ est affine, et échange A et B. $\Rightarrow$ involutive.

Correction de **l'exercice 5004 ▲**

(a)

(b) G et les symétriques de A, B, C par rapport aux milieux des côtés opposés.

Correction de **l'exercice 5006 ▲**

(a) Soit $\alpha' = \overline{(\vec{A'A}, \vec{A'B})}$: $\frac{A'B}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AB}{\sin(\alpha')}$, $\frac{A'C}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AC}{\sin(\pi-\alpha')}$.

(b) $I = \mathrm{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Correction de **l'exercice 4993 ▲**

Repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \Rightarrow$ les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Correction de **l'exercice 4994 ▲**

$A_i^{(k)} = \mathrm{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k} \sum_{l \equiv j (\mathrm{mod}\, n)} C_k^{|l-i|}\right)$.

Correction de **l'exercice 4995 ▲**

$\vec{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1} \vec{GA_i^{(k)}}$.

Correction de **l'exercice 4996 ▲**

$A_k = \mathrm{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$ où α_k, β_k, γ_k vérifient : $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 2x_{k-3}$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $2, j, j^2$, donc $x_k \sim \lambda 2^k$ avec $\lambda = \frac{x_0+x_1+x_2}{7} = \frac{1}{7}$.
Donc $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, et $A_k \to G$, isobarycentre de $A_0A_1A_2$.

Correction de **l'exercice 5000 ▲**

$\frac{1}{7}$.

Correction de **l'exercice 5001 ▲**

(a)

(b) $N = \mathrm{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.

(c)

(d) homothétie de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$.

Correction de **l'exercice 5002 ▲**

Repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Correction de l'exercice 5003 ▲

$M_1 \mapsto M_4$ est affine, et échange A et B. $\Rightarrow$ involutive.

Correction de l'exercice 5004 ▲

(a)

(b) G et les symétriques de A, B, C par rapport aux milieux des côtés opposés.

Correction de l'exercice 5006 ▲

(a) Soit $\alpha' = \overline{(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B})}$: $\frac{A'B}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AB}{\sin(\alpha')}$, $\frac{A'C}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AC}{\sin(\pi-\alpha')}$.

(b) $I = \mathrm{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Correction de l'exercice 5007 ▲

(a) $-\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$.

(b) $H = \mathrm{Bar}(A : \tan\alpha, B : \tan\beta, C : \tan\gamma) = \mathrm{Bar}\left(A : \frac{a}{\cos\alpha}, B : \frac{b}{\cos\beta}, C : \frac{c}{\cos\gamma}\right)$.

Correction de l'exercice 5008 ▲

Il revient au même de démontrer que, si le plan est rapporté à un repère orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, non alignés et à coordonnées entières. On sait que $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||}$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||}$.

Par suite, ou bien le triangle (ABC) est rectangle en A (et n'est donc pas équilatéral), ou bien $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$. Dans ce dernier cas, $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un quotient de deux nombres entiers, et est donc un rationnel. Malheureusement, pour un triangle équilatéral, la tangente de chacun de ses angles vaut $\sqrt{3}$ qui n'est pas un rationnel.

Quand le repère est orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

Correction de l'exercice 5018 ▲

Soit f la transformation considérée.

(a) f est la translation de vecteur $\vec{u}(3, -1)$.

(b) $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.

(c) $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(d) $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 5024 ▲

Cercle circonscrit au triangle $A'BC$ symétrique de ABC par rapport à (BC).

Correction de l'exercice 5025 ▲

$xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = r^2 - OM^2$ avec $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O, r)$.

$xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = xAM^2 + yBM^2 + zCM^2$.

Correction de l'exercice 5027 ▲

$\Omega = (1, 2)$.

Correction de l'exercice 5029 ▲

Décomposer les rotations en symétries.

Correction de l'exercice 5030 ▲

la symétrie centrale ($\alpha+\beta+\gamma=\pi$) autour de K, point de contact du cercle inscrit et de (AC).

Correction de l'exercice 5032 ▲

$x'=\frac{ay^2}{x^2+y^2-ax}$, $y'=\frac{-axy}{x^2+y^2-ax}$, M' est bien défini ssi M n'appartient pas au cercle de diamètre $[AO]$.

Soit D le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$, D est caractérisé par les inégalités $x^2+y^2-ax<0$, $y>0$ d'où $x'<0$ et $y'>0$. La réciproque se traite (péniblement) en remarquant que seuls les points de D ont une image dans ce quart de plan et que f est quasi-involutive.

Correction de l'exercice 5033 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $(1,3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0+\lambda.\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0+\lambda,y_0+3\lambda)$.

$$M_0+\lambda.\vec{n}\in(D)\Leftrightarrow(x_0+\lambda)+3(y_0+3\lambda)-5=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{-x_0-3y_0+5}{10}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $(x_0+\frac{-x_0-3y_0+5}{10},y_0+3\frac{-x_0-3y_0+5}{10})$ ou encore $(\frac{9x_0-3y_0+5}{10},\frac{-3x_0+y_0+15}{10})$.

Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0)=M_0+2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$.

Ses coordonnées sont donc $(x_0+2(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}-x_0),y0+2(\frac{-3x_0+y_0+15}{10}-y_0)$ ou encore $(\frac{4x_0-3y_0+5}{5},\frac{-3x_0-4y_0+15}{5})$.

(Remarque. Si on n'avait pas déjà $p(M_0)$ on aurait cherché le symétrique sous la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$, λ étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment $[M_0,s(M_0)]$ appartient à (D).)

Correction de l'exercice 5034 ▲

Puisque $(ABDC)$ un parallélogramme, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées de D dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont donc $(1,1)$.

Correction de l'exercice 5035 ▲

(a) Soient k et k' deux réels non nuls, Ω et Ω' deux points (pas nécessairement distincts), puis h (resp.h') l'homothétie de centre Ω (resp. Ω') et de rapport k (resp. k').
Soient M un point du plan, puis $M'=h(M)$ et $M''=h'(M')$.

$$M''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'M'}=\Omega'+k'(\overrightarrow{\Omega'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M'})=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}\ (*)$$

Chechons alors les points invariants par $h'\circ h$.

$$h'\circ h(M)=M\Leftrightarrow\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}=M\Leftrightarrow-\overrightarrow{\Omega'M}+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow(kk'-1)\overrightarrow{\Omega M}=(k'-1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}\ (**)$$

1er cas. Si $kk'\neq1$, $(**)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}=\frac{k'-1}{kk'-1}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, ce qui signifie que l'équation $(**)$ a une et eune seule solution que l'on note Ω'', ou encore $h'\circ h$ a un et un seule point invariant, le point Ω'' tel que $\Omega''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}$. Mais alors, l'égalié $(*)$ s'écrit pour tout point M

$$M''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}+kk'\overrightarrow{\Omega''M}=\Omega''+kk'\overrightarrow{\Omega''M}.$$

$h'\circ h$ est donc l'homothétie de rapport kk' et de centre Ω''. On doit noter que le centre Ω'' est sur la droite $(\Omega\Omega')$.

$\boxed{\text{Si } kk'\neq1,\ h'\circ h \text{ est une homothétie de rapport } kk'.}$

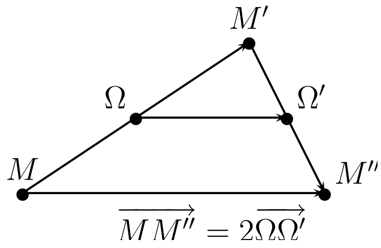
2ème cas. Si $kk'=1$, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M, $M''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ et donc

$$\overrightarrow{MM''}=\Omega'+k'(\Omega-\Omega')+(M-\Omega)-M=(1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

Dans ce cas, $h'\circ h$ est la translation de vecteur $(1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

En résumé, **la comoposée de deux homothéties de rapport respectifs k et k′ tous deux non nuls est une homothétie de rapport kk′ si kk′ $\neq$ 1 et une tranlation si kk′ = 1** (ce résultat est à connaître).

(b) C'est un cas particulier de la question précédente. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1. Puisque $(-1)(-1) = 1$, $s'\circ s$ est une translation. Son vecteur est $\overrightarrow{\Omega s'\circ s(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega s'(\Omega)} = 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



La composée de deux symétries centrales est une translation.

(c) Soit Ω' le point tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$, c'est-à-dire $\Omega' = \Omega - \frac{1}{2}\vec{u}$. Soit s' la symétrie centrale de centre Ω'. D'après 2), $s\circ s'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega'\Omega} = \vec{u}$. Par suite, $s\circ t = s\circ s\circ s' = s'$.
La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

Correction de l'exercice 5046 ▲

Droite parallèle à (AC) passant par $D = \mathrm{Bar}(A:1, B:-\frac{1}{3})$.

Correction de l'exercice 5047 ▲

Pour $k = -1, -5$: plan médiateur de $G = \mathrm{Bar}(A:1, B:2, C:k)$ et $I = \mathrm{Bar}(D:1, E:1)$.
Pour $k \neq -1, -3, -5$: sphère de centre $O = \mathrm{Bar}(G:(3+k)^2, I:-4)$.
Pour $k = -3$: sphère de centre I.

Correction de l'exercice 5048 ▲

$221C_1 = (949, 149, -615)$, $93C_2 = (128, -71, 397)$.

Correction de l'exercice 5049 ▲

$A_P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda)$, $A_Q = (1, 1-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$, $A_R = (1-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2})$, $A_S = (\frac{7-\lambda}{11}, -\frac{1+3\lambda}{11}, \frac{10\lambda-4}{11})$.
coplanaires $\Leftrightarrow 8\lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Correction de l'exercice 5050 ▲

(a) $\Omega : (1,1,1)$, $R = \sqrt{5}$.

(b) $(ABC) : x+y+z = 6$. $(ABD) : 4x-2y+z = 3$. $(ACD) : x+4y-2z = 3$. $(BCD) : 7x+y-5z = 12$.

(c)
$$I : (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-a-b-c &= r\sqrt{3} \\ 4a-2b+c-3 &= r\sqrt{21} \\ a+4b-2c-3 &= r\sqrt{21} \\ 12-7a-b+5c &= r\sqrt{75} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a &= 9-2\sqrt{7} \\ 2b &= 6-\sqrt{7} \\ 2c &= 3 \\ 2r &= \sqrt{21}-2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5051 ▲

$H : (-18/54, 8/54, -28/54)$, $K : (7/54, 13/54, -33/54)$.

Correction de l'exercice 5052 ▲

$H : (-2/19, 28/19, 35/19)$, $K : (-6/19, 40/19, 23/19)$, $d = 4\sqrt{19}$.

Correction de l'exercice 5053 ▲

Soient B', D' les projetés de B, D sur (AC). Alors $BB' = DD'$ donc la perpendiculaire commune à (AC) et (BD) passe par le milieu de $[B,D]$. Par symétrie, elle passe aussi par le milieu de $[A,C]$ et par Pythagore $AB = CD$.

Correction de l'exercice 5054 ▲

$a/\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 5055 ▲

$d^2 = \frac{(x+2y-z+3)^2}{6} + \frac{(3x+3z+11)^2}{9}$.

Correction de l'exercice 5056 ▲

$$\begin{cases} 14x' = 13x - 2y - 3z + 4 \\ 14y' = -2x + 10y - 6z + 8 \\ 14z' = -3x - 6y + 5z + 12. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5057 ▲

$D' : (9/53, 40/53, -117/53)$, $E' : (-14/53, 32/53, 23/53)$, $\vec{u} : (23, 8, -140)$.

Correction de l'exercice 5058 ▲

$2x - 7y - z = -1$.

Correction de l'exercice 5061 ▲

$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2\sin^2(\pi/5)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 5062 ▲

$x^2 + y^2 + z^2 - 10z = 9$.

Correction de l'exercice 5063 ▲

Soient A, B deux points de S distincts. Intersection de S avec un plan passant par A et $B \Rightarrow S$ est réunion de cercles passant par A et B. On considère le plan médiateur de $[A, B]$, P qui coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Le plan $Q = (OAB)$ coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}'$. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont en commun les points C, D. (CD) est médiatrice de $[A, B]$ dans Q donc est un diamètre de $\mathscr{C}'$ et passe par O, donc est aussi diamètre de $\mathscr{C}$. Ainsi $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de même centre et même rayon dans des plans perpendiculaires. En considérant les plans coupant P et Q à angle droit, on obtient que S est une sphère de centre O.

Correction de l'exercice 5064 ▲

Soient $D, \vec{u}, \alpha$ l'axe, le vecteur, et l'angle de g. Alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est le vissage d'axe $f(D)$, de vecteur $\vec{f}(\vec{u})$, et d'angle α.
On veut que ce soit g, donc D est invariant par f, ce qui implique que D soit l'axe de f.
Réciproquement, si f et g ont même axe, alors ils commutent.

Correction de l'exercice 5065 ▲

Soit $v = \sigma_1 \circ \sigma_2$. (vissage autour de la perp. commune à D_1 et D_2)
$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour $\Rightarrow v \circ \sigma_3 \circ v \circ \sigma_3 =$id, donc $\sigma_3 \circ v \circ \sigma_3^{-1} = v^{-1}$.
L'axe de v est donc invariant par σ_3, donc parallèle ou perpendiculaire à D_3. Si parallèle, alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est encore un vissage $\Rightarrow$ ne convient pas.

Correction de l'exercice 5066 ▲

$d_{AD}(D) = D$, $\quad d_{AC}(D) = D'$ tq $\vec{AD'} = \vec{DC}$.
La droite (AD') est parallèle à (DC) qui est perpendiculaire à (AB).
Donc $f(D) = d_{AB}(D') = D''$ tq $\vec{AD''} = \vec{CD}$.
$d_{AD}(D'') = C$, $\quad d_{AC}(C) = C$, $\quad f(D'') = d_{AB}(C) = C'$ tq $\vec{AC'} = \vec{CB}$.
$d_{AD}(C') = C''$ tq $\vec{AC''} = \vec{BC}$, $\quad d_{AC}(C'') = B$, $\quad f(C') = d_{AB}(B) = B$.

$d_{AD}(B) = B'$ tq $\vec{AB'} = \vec{BD}$, $\quad d_{AC}(B') = B''$ tq $\vec{AB''} = \vec{DB}$, $\quad f(B) = d_{AB}(B'') = D$.
Soit E le symétrique de C par rapport à (BD) : f est le $\frac{1}{4}$-tour autour de (AE) envoyant D sur B.

Correction de l'exercice 5067 ▲

ABC équilatéral : 12, $\quad ABC$ isocèle : 4, $\quad ABC$ scalène : 2.

Correction de l'exercice 5068 ▲

(a) 24 éléments :

identité	(1)
rotations autour de l'axe d'une face	(8)
symétries % plan médiateur d'une arête	(6)
$\frac{1}{2}$-tour autour de la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées	(3)
$\frac{1}{4}$-tour autour de la perp. ...+ symétrie % plan médian	(6)

(b) 48 éléments :

identité		(1)
symétries	% plan médian d'une face	(3)
	% plan diagonal d'une face	(6)
	% axe d'une face	(3)
	% axe d'une arête	(6)
	% centre du cube	(1)
rotation	$\pm 2\pi/3$ autour d'une diagonale	(8)
	$\pm\pi/2$ autour de l'axe d'une face	(6)
symétries-rotations	$\pm\pi/2$ % axe face	(6)
	$\pm\pi/3$ % diagonale	(8)

(c) si les droites ne sont pas perpendiculaires :

identité	(1)
$\frac{1}{2}$-tour autour de la perpendiculaire commune	(1)
$\frac{1}{2}$-tour autour d'une bissectrice	(2)

si elles sont perpendiculaires, il y a aussi :

symétrie % plan contenant une droite et la perp. commune	(2)
symétrie-$\frac{1}{4}$-tour autour de la perp. commune	(2)

Correction de l'exercice 5069 ▲

L'application $M_1 \mapsto M_4$ est affine donc est une homothétie-translation (dim 1) et le coefficient d'homothétie est strictement inférieur à 1.

Correction de l'exercice 5070 ▲

• $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(2,-3,-4)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, A et B ne sont pas alignés et le plan (OAB) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,-3,-4)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $2x-3y-4z=0$. • $\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(4,-9,-1)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, C et D ne sont pas alignés et le plan (OCD) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(4,-9,-1)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $4x-9y-z=0$. •$-\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ a pour coordonnées $(33,14,6)$. Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans (OAB) et (OCD) sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par $O(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(33,14,6)$. Un système d'équations cartésiennes de cette droite est $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y-4z=0 \\ 4x-9y-z=0 \end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 5071 ▲

Les vecteurs $(2,-3,1)$ et $(1,2,0)$ ne sont pas colinéaires, de sorte que (P) est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de (P)

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (P) &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda+\mu \\ y = -1-3\lambda+2\mu \\ z = 1+\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} \lambda = z-1 \\ x = 1+2(z-1)+\mu \\ y = -1-3(z-1)+2\mu \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} \lambda = z-1 \\ \mu = x-2z+1 \\ y = -1-3(z-1)+2(x-2z+1) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow -2x+y+7z-4 = 0
\end{aligned}$$

Soit alors $M(2+3t,-t,1+t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de (D)

$$M\in(P)\Leftrightarrow -2(2+3t)+(-t)+7(1+t)-4=0\Leftrightarrow 0\times t-1=0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc $(D)\cap(P)=\varnothing$. La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(P)\cap(P')&\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}x=-5-\nu\\ y=3+\nu+3\eta\\ z=\nu+\eta\\ -2x+y+7z-4=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}x=-5-\nu\\ y=3+\nu+3\eta\\ z=\nu+\eta\\ -2(-5-\nu)+(3+\nu+3\eta)+7(\nu+\eta)-4=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}\eta=-\nu-\frac{9}{10}\\ x=-5-\nu\\ y=3+\nu+3\left(-\nu-\frac{9}{10}\right)\\ z=\nu+\left(-\nu-\frac{9}{10}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists\nu\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}x=-\nu-5\\ y=-2\nu+\frac{3}{10}\\ z=-\frac{9}{10}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

(P) et (P') sont donc sécants en la droite passant par le point $\left(-5,\frac{3}{10},-\frac{9}{10}\right)$ et de vecteur directeur $(1,2,0)$.

Correction de l'exercice 5072 ▲

Soit r la rotation cherchée. Notons u le vecteur $\frac{1}{3}(1,2,2)$ (u est unitaire) et θ l'angle de r. r est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire u. On sait que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$

$$r(v)=(\cos\theta)v+(1-\cos\theta)(v.u)u+(\sin\theta)u\wedge v\quad(*)$$

et en particulier que $[v,r(v),u]=\sin\theta\|v\wedge u\|^2$. L'égalité $r(j)=k$ fournit

$$\sin\theta\|j\wedge u\|^2=[j,r(j),u]=[u,j,k]=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}.$$

Comme $u\wedge j=\frac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j=-\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$, on a $\|j\wedge u\|^2=\frac{5}{9}$ et donc $\sin\theta=\frac{3}{5}$. L'égalité $r(j)=k$ fournit ensuite

$$k=(\cos\theta)j+(1-\cos\theta)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}(i+2j+2k)+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j$$

En analysant la composante en i, on en déduit que $\frac{2}{9}(1-\cos\theta)-\frac{2}{5}=0$ et donc $\cos\theta=-\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout vecteur $v=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'égalité $(*)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
r(v)&=-\frac{4}{5}(x,y,z)+\frac{9}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(x+2y+2z)(1,2,2)+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}(2z-2y,2x-z,-2x+y)\\
&=\frac{1}{5}(-4x+(x+2y+2z)+(2z-2y),-4y+2(x+2y+2z)+(2x-z),-4z+2(x+2y+2z)+(-2x+y))\\
&=\frac{1}{5}(-3x+4z,4x+3z,5y)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&0&4\\4&0&3\\0&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&0&\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5}&0&\frac{3}{5}\\ 0&1&0\end{pmatrix}}.$$

Correction de l'exercice 5073 ▲

On note $\mathscr{C}$ la courbe considérée.

(a) i. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les x positifs. Son foyer est le point $F\left(\frac{1}{4},0\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ x=-\frac{1}{4}$.

ii. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les x négatifs. Son foyer est le point $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ x=\frac{1}{4}$.

iii. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les y positifs. Son foyer est le point $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ y = -\frac{1}{4}$.

iv. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les y négatifs. Son foyer est le point $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ y = \frac{1}{4}$.

(b) i. $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a = 5 > 3 = b$ et donc d'axe focal (Ox).
Ses sommets sont $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$.
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ et donc les foyers sont $F(4,0)$ et $F'(-4,0)$.
L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.
Les directrices ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e} = \frac{25}{4}$ et $x = -\frac{25}{4}$.

ii. $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a = 3 < 5 = b$ et donc d'axe focal (Oy).
Ses sommets sont $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B(0,5)$ et $B'(0,-5)$.
$c = \sqrt{b^2 - a^2} = 4$ et donc les foyers sont $F(0,4)$ et $F'(0,-4)$.
L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$.
Les directrices ont pour équations respectives $y = \frac{b}{e} = \frac{25}{4}$ et $y = -\frac{25}{4}$.

iii. $x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$.

$\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ et donc d'axe focal (Ox).

Ses sommets sont $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B'\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

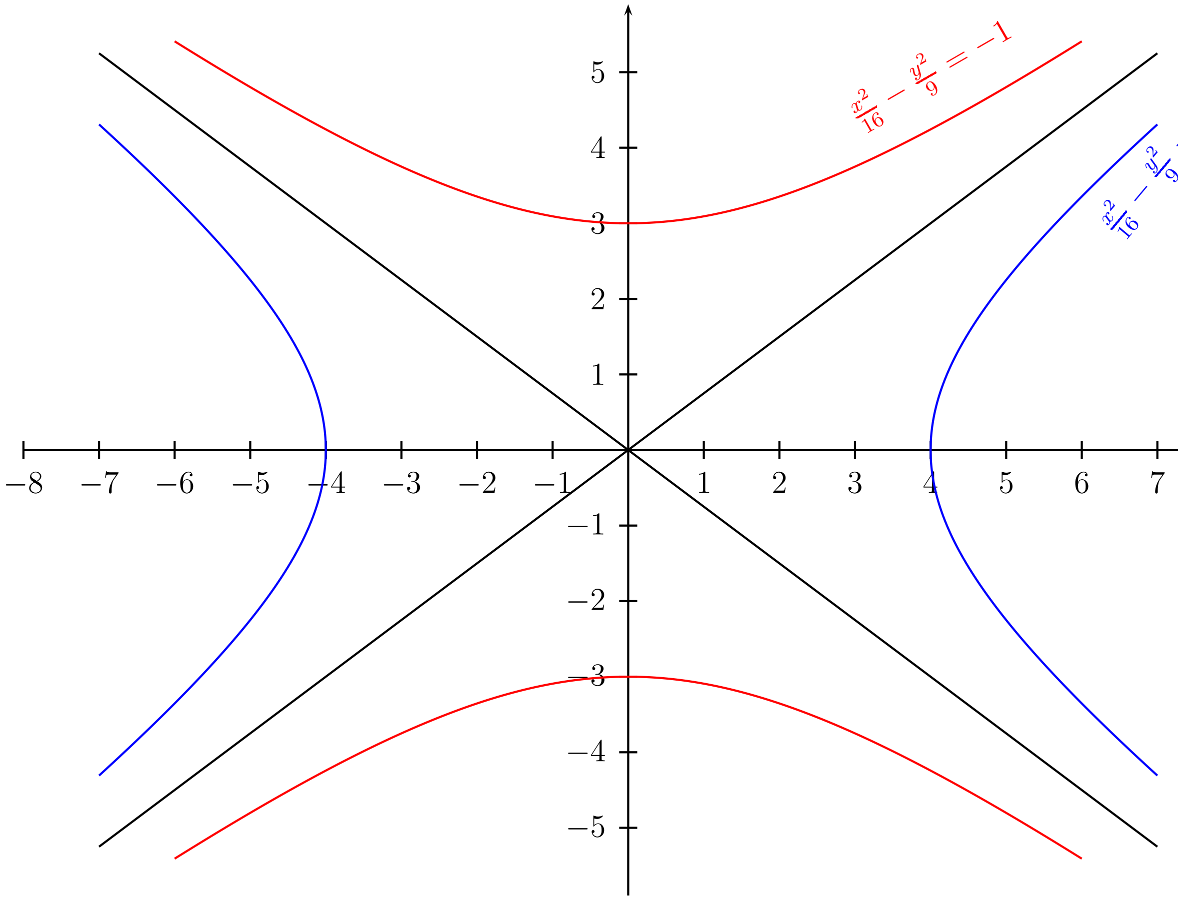
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc les foyers sont $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les directrices ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e} = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

(c) i. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a = 4$ et $b = 3$ et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, puis $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.
Les sommets sont $A(4,0)$ et $A'(-4,0)$ et les foyers sont $F(5,0)$ et $F(-5,0)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $x = \frac{a}{e} = \frac{16}{5}$ et $x = -\frac{16}{5}$.
Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.

ii. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Oy) avec $a = 4$ et $b = 3$ et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, puis $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.
Les sommets sont $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$ et les foyers sont $F(0,5)$ et $F(0,-5)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $y = \frac{b}{e} = \frac{9}{5}$ et $y = -\frac{9}{5}$.
Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.



iii. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a=b=1$ et donc $c=\sqrt{2}$, puis $e=\sqrt{2}$. Les sommets sont $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$ et les foyers sont $F(\sqrt{2},0)$ et $F(-\sqrt{2},0)$. Les directrices sont les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y=x$ et $y=-x$.

Correction de l'exercice 5074 ▲

(a) i. $y=x^2+x+1 \Leftrightarrow y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=\frac{1}{2}$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et de directrice d'équation $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

ii. $y^2+y-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{1}{8}\right)$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$.

iii. $y=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ et $y\geq 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-parabole de sommet $S\left(-\frac{3}{2},0\right)$, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},0\right)=(-1,0)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$.

(b) i. $x^2+x+2y^2+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=1$. $\mathscr{C}$ est une ellipse. Centre : $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. $a=\sqrt{\frac{3}{8}}>\frac{\sqrt{3}}{4}=b$. Axe focal : $y=-\frac{1}{4}$. Sommets : $A\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$. Directrices : $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $y=-2\sqrt{-x^2+x} \Leftrightarrow y^2=4(-x^2+x)$ et $y\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+y^2=1$ et $y\leq 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-ellipse. Centre : $\left(\frac{1}{2},0\right)$. $a=\frac{1}{2}<1=b$. Axe focal : $x=0$. Sommets : $A(1,0)$, $A'(0,0)$ et $B'\left(\frac{1}{2},-1\right)$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Foyers : $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) $x^2-y^2+x+y+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-1$. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$. $a=b=1$. Sommets : $B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ puis $e=\frac{c}{b}=\sqrt{2}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Asymptotes : $y = x+1$ et $y = -x$.

Correction de l'exercice 5075 ▲

(a) On note $\mathscr{H}$ l'hyperbole considérée. On tourne de $\frac{\pi}{4}$. Pour cela, on pose $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$. On a alors

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Ainsi, si $\mathscr{R}$ est le repère orthonormé initial $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\mathscr{R}'$ est le repère $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ où $\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}$ est $xy = 1$ et une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}'$ est $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$. On obtient $a = b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$ et $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$. Les formules de changement de repère s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$ et les formules inverses s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{array}\right.$ (dans ce qui suit, les coordonnées d'un point dans $\mathscr{R}'$ seront notées avec $\mathscr{R}'$ en indice alors que les coordonnées dans $\mathscr{R}$ seront notées sans écrire $\mathscr{R}$ en indice).

$\boxed{\text{Centre O(0,0)}}$.

Asymptotes : bien sûr, les axes (Ox) et (Oy).
Axe focal : l'axe (OX) ou encore la droite d'équation $y = x$ (dans $\mathscr{R}$).

Sommets : $A(\sqrt{2}, 0)_{\mathscr{R}'}$, $A'(-\sqrt{2}, 0)_{\mathscr{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Sommets A(1,1) et A'(-1,-1)}}$.

Foyers : $F(2,0)_{\mathscr{R}'}$, $F'(-2,0)_{\mathscr{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Foyers } F(\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ et } F'(-\sqrt{2},-\sqrt{2}).}$

Directrices : les droites d'équations $X = \pm\frac{a}{e} = \pm 1$ et donc dans $\mathscr{R}$, les droites d'équations respectives $x+y = \pm\sqrt{2}$.

(b) Le discriminant de cette conique vaut $41 \times 34 - 12^2 = 1250 > 0$. Il s'agit donc d'une conique du genre ellipse. On pose $\left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{array}\right.$ et on détermine θ (ou plutôt $\cos\theta$ et $\sin\theta$) de sorte que le terme en XY disparaisse. Mais, le coefficient de XY dans

$$41x^2-24xy+34y^2 = 41(\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y)^2-24(\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y)(\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y)+34(\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y)^2,$$

vaut

$$-82\cos\theta\sin\theta - 24(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 68\cos\theta\sin\theta = -24(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 14\cos\theta\sin\theta.$$

Ce coefficient est nul si et seulement si $-12\cos^2\theta + 12\sin^2\theta - 7\cos\theta\sin\theta = 0$ ou encore, après division par $\cos^2\theta$, $12\tan^2\theta - 7\tan\theta - 12 = 0$. On peut alors prendre $\tan\theta = \frac{4}{3}$, puis on peut prendre $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{3}{5}\frac{4}{3} = \frac{4}{5}$.

Posons donc $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3X-4Y}{5} \\ y = \frac{4X+3Y}{5} \end{array}\right.$ $(*)$. On a alors

$$\begin{aligned} 41x^2-24xy+34y^2-106x+92y+74 &= \frac{1}{25}(41(3X-4Y)^2-24(3X-4Y)(4X+3Y)+34(4X+3Y)^2 \\ &\quad -530(3X-4Y)+460(4X+3Y)+1850) \\ &= \frac{1}{25}(625X^2+1250Y^2+250X+3500Y+1850) \\ &= 25\left(X^2+2Y^2+\frac{2}{5}X+\frac{28}{5}Y+\frac{74}{25}\right) \end{aligned}$$

Une équation de la courbe dans le repère défini par $(*)$ est donc $X^2+2Y^2+\frac{2}{5}X+\frac{28}{5}Y+\frac{74}{25} = 0$. Ensuite,

$$X^2+2Y^2+\tfrac{2}{5}X+\tfrac{28}{5}Y+\tfrac{74}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(X+\tfrac{1}{5}\right)^2+2\left(Y+\tfrac{7}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(X+\tfrac{1}{5}\right)^2+\frac{\left(Y+\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

$\mathscr{C}$ est une ellipse. On trouve $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis Centre $\Omega(1,-1)$. Axe focal : $3x+4y+1 = 0$ et axe non focal : $-4x+3y+7 = 0$.

Sommets : $A\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(\frac{2}{5},-\frac{9}{5}\right)$, $B\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{5},-1+\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ et $B'\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{5},-1-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$.

Foyers : $F\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ et $F'\left(\frac{9}{5},-\frac{8}{5}\right)$. Directrices : $4x-3y+3 = 0$ et $4x-3y+17 = 0$.

(c) $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$. On pose donc $\left\{\begin{array}{l}X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\\ Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)\end{array}\right.$.

$$x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0 \Leftrightarrow 2Y^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X+Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(-X+Y)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(Y+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2+\frac{5}{\sqrt{2}}X+\frac{15}{16}=0 \Leftrightarrow \left(Y+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X+\frac{3}{8\sqrt{2}}\right).$$

$\mathscr{C}$ est une parabole de paramètre $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$.

Sommet : $S\left(-\frac{5}{16},\frac{1}{16}\right)$. Axe focal : $x+y+\frac{1}{4}=0$.

Foyer : $F\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$. Directrice : $x-y-\frac{1}{4}=0$.

(d) $\mathscr{C}$ est le point d'intersection des droites d'équation $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ c'est-à-dire le point de coordonnées $(0,1)$.

(e) $x^2+y^2-3x-y+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ et donc $\mathscr{C}$ est vide.

(f) $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$ est une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

(g) Si on pose $\left\{\begin{array}{l}X=x+y+1\\ Y=x-y+3\end{array}\right.$, on effectue un changement de repère non orthonormé. Dans le nouveau repère, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne $XY=3$ et donc $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Avec le changement de repère effectué, on obtient directement les éléments affines de cette hyperbole mais pas ses éléments métriques : hyperbole d'asymptotes les droites d'équations $x+y+1=0$ et $x-y+3=0$ et donc de centre $(-2,1)$. Pour obtenir l'axe focal, l'excentricité, les foyers et les directrices il faut faire un changement de repère orthonormé.

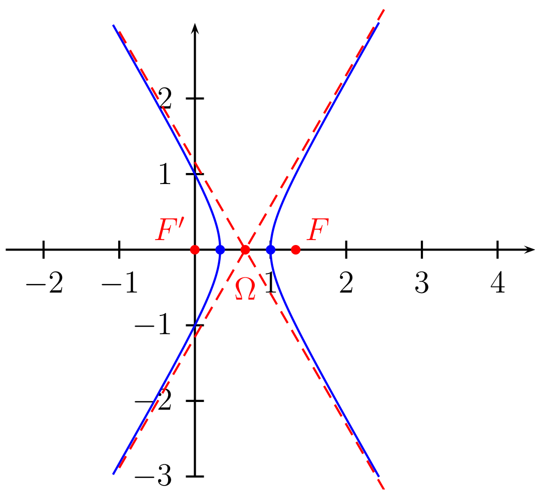
(h) Si on pose $\left\{\begin{array}{l}X=2x+y+1\\ Y=3x+3y\end{array}\right.$, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne dans le nouveau repère $Y=X^2$ et donc $\mathscr{C}$ est une parabole. Pour obtenir ces éléments métriques, il faut un changement de repère orthonormé.

Correction de l'exercice 5076 ▲

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

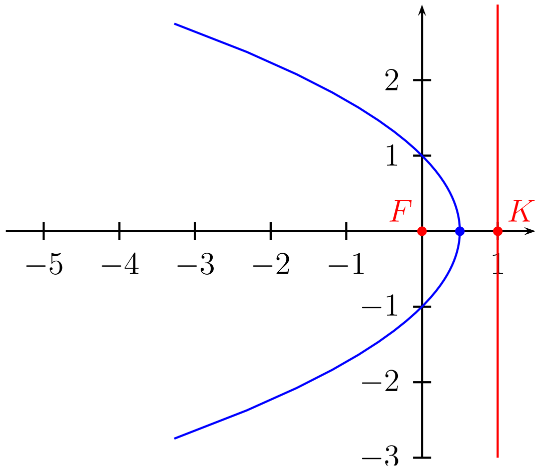
$$1)\ r=\frac{1}{1+2\cos\theta}\quad 2)\ r=\frac{1}{1+\cos\theta}\quad 3)\ r=\frac{1}{2+\cos\theta}\quad 4)\ r=\frac{1}{1-\sin\theta}\quad 5)\ r=\frac{1}{2-\cos\theta}.$$

(a) $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole.



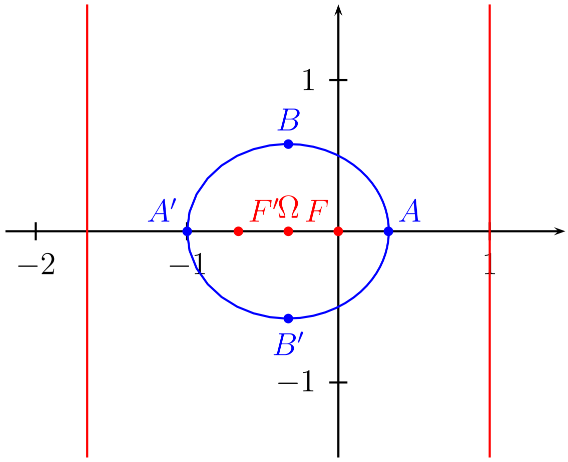
L'axe focal est (Ox). Les sommets sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et (Ox) c'est-à-dire les points $M(0)$ et $M(\pi)$ de coordonnées cartésiennes respectives $A'\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A(1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ c'est-à-dire $\Omega\left(\frac{2}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F'=O$ et l'autre est le symétrique de F' par rapport à Ω : c'est le point $F\left(\frac{4}{3},0\right)$. Puisque $a=\frac{1}{3}$ et $e=2$, les directrices sont les droites d'équation $x=x_\Omega-\frac{a}{e}=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{5}{6}$. Les branches infinies sont obtenues pour $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}$. Les asymptotes sont donc les droites passant par Ω d'angle polaire $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ce sont les droites d'équations cartésiennes $y=\pm\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

(b) $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité 1 et donc une parabole.



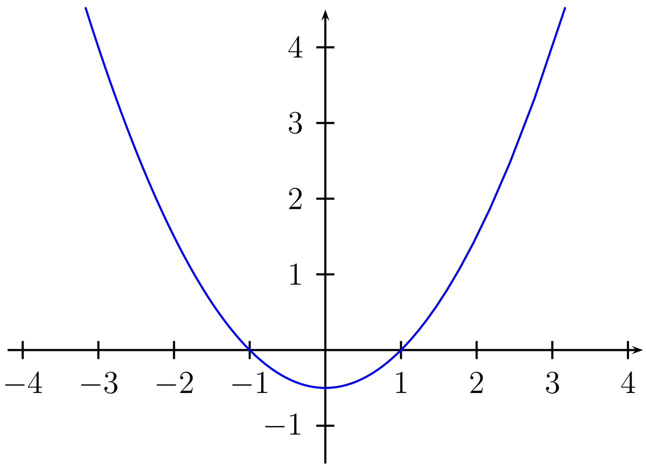
L'axe focal est (Ox). Le sommet est le point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $S\left(\frac{1}{2},0\right)$. Le foyer est $F=O$. Le point K est le symétrique de F par rapport à S et a pour coordonnées $(1,0)$. La directrice a donc pour équation $x=1$.

(c) $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité $e=\frac{1}{2}$ et donc une ellipse.

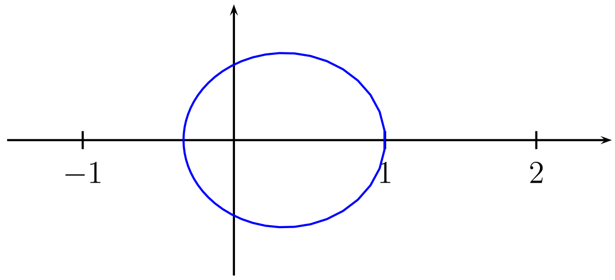


L'axe focal est (Ox). Les sommets sur cet axe sont $A=M(0)$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A'=M(\pi)$ de coordonnées $(-1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F=O$. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω : c'est le point F' de coordonnées $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. Par suite, $c=\frac{1}{3}$ $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où les sommets $B\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Les directrices sont les droites d'équations $x=x_\Omega+\frac{a}{e}=1$ et $x=-\frac{5}{3}$.

(d) $M\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\left[r\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\theta-\frac{\pi}{2}\right]=\left[\frac{1}{1+\cos\theta},\theta-\frac{\pi}{2}\right]=\mathrm{rot}_{O,-\pi/2}\left(\left[\frac{1}{1+\cos\theta},\theta\right]\right)$. Donc $\mathscr{C}$ est l'image de la parabole d'équation polaire $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$ par le quart de tour indirect de centre O.



(e) $M(\theta+\pi)=[r(\theta+\pi),\theta+\pi]=\left[\frac{1}{2+\cos\theta},\theta+\pi\right]=s_O\left(\left[\frac{1}{2+\cos\theta},\theta\right]\right)$. Donc $\mathscr{C}$ est l'image de l'ellipse d'équation polaire $r=\frac{1}{2+\cos\theta}$ par la symétrie centrale de centre O.



Correction de l'exercice 5077 ▲

Un point du plan est sur le cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si son affixe z est de module 1 ou encore si et seulement si il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Or, pour θ réel,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+1+e^{-i\theta}} = \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{1+2\cos\theta}\right)}.$$

L'ensemble cherché est donc la symétrique par rapport à (Ox) de la courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$. Cette dernière est une ellipse, symétrique par rapport à $(0x)$. Donc l'ensemble cherché est l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ (voir l'exercice 5076, 1)).

Correction de l'exercice 5078 ▲

(a) Soit M un point du plan. **1er cas.** Supposons que $M \notin (AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

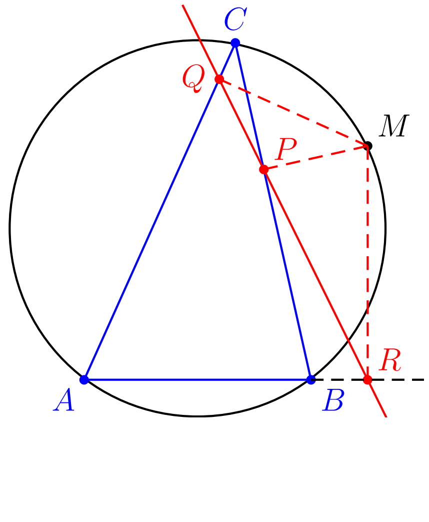
$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

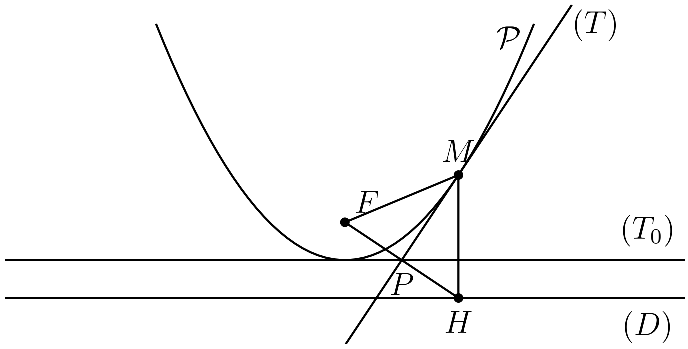
$$\begin{aligned}
P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C).
\end{aligned}$$

2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction. Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate. En résumant les deux cas,

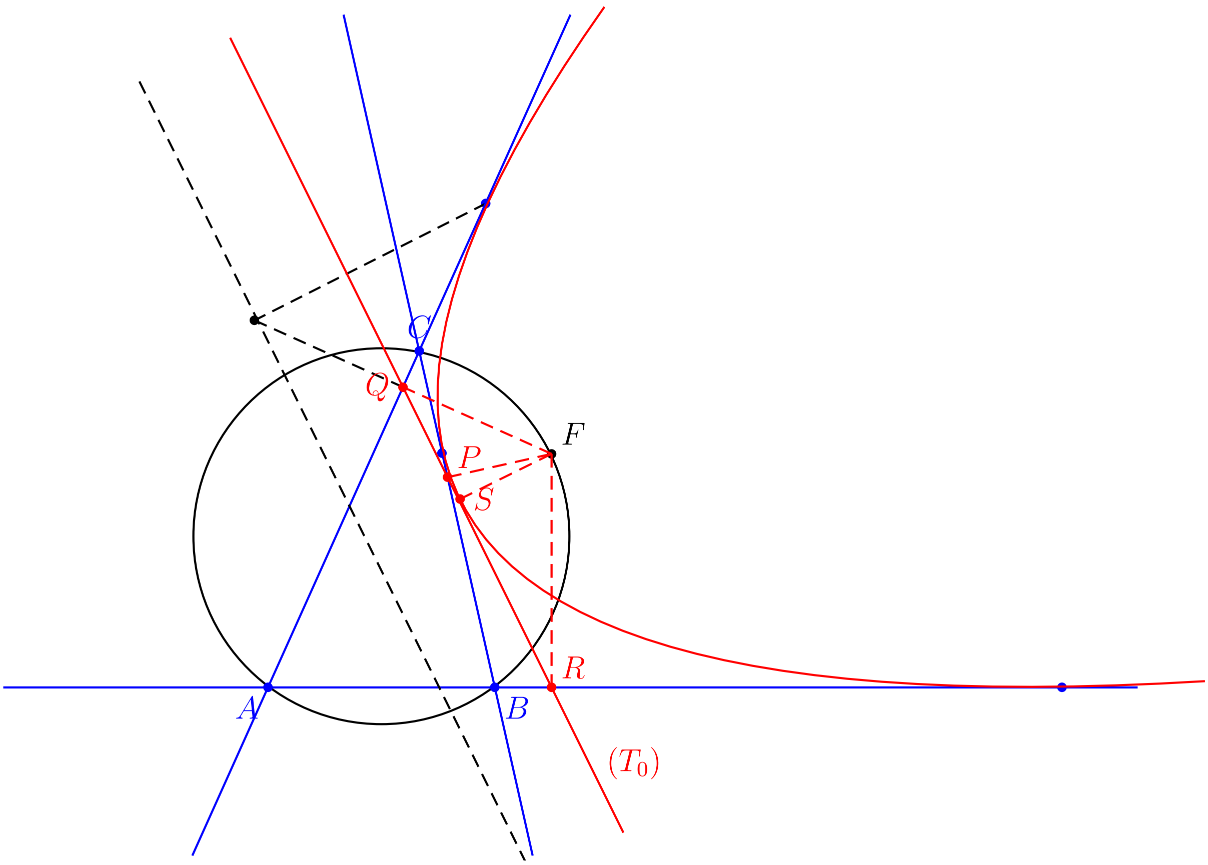
$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$



(b) **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0$) la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$.



Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathscr{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer. Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB). On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de SIMSON (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.



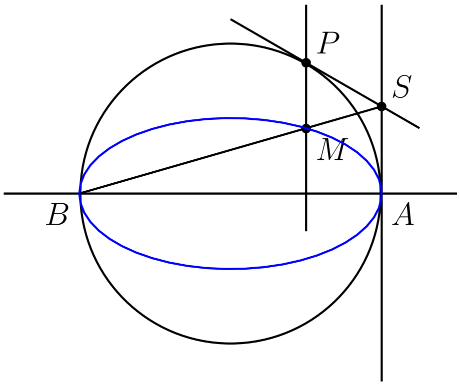
Correction de l'exercice 5079 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel A a pour coordonnées $(R,0)$ et $(\mathscr{C})$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $P(R\cos t, R\sin t)$ un point de $(\mathscr{C})$. La tangente (D) à $(\mathscr{C})$ en A est la droite d'équation $x = R$ et la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en

P est la droite d'équation $x\cos t + y\sin t = R$. Quand $t \notin \pi\mathbb{Z}$, (T) recoupe (D) en le point S de coordonnées $\left(R, R\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)$ ou encore $\left(R, R\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.
Une équation de la droite (BS) est $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x+R)+2y=0$. L'abscisse de M est $R\cos t$ et donc

$$y_M = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x_M+R) = \frac{1}{2}R\tan\left(\frac{t}{2}\right)(\cos t+1) = R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}R\sin t.$$

L'ensemble des points M est donc le support de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = \frac{1}{2}R\sin t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. C'est l'image du cercle $\mathscr{C}$ dans l'affinité de base (AB), de direction (D) et de rapport $\frac{1}{2}$ et donc une ellipse de grand axe $[AB]$.



Correction de l'exercice 5080 ▲

Dans tout l'exercice, on pose $\mathscr{R} = (O,i,j)$ et (Γ) l'ensemble considéré, d'équation $f(x,y)=0$.

(a) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = 2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1$ et $Q((x,y)) = 2x^2+6xy+5y^2$.
Le discriminant de cette conique est $\Delta = 2\times 5 - 3^2 = 1 > 0$ et la courbe (Γ) est du genre ellipse c'est-à-dire soit une ellipse, éventuellement un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.
Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+6y+4=0 \\ 6x+10y+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1 \text{ et } y=0.$$

On note Ω le point de coordonnées $(-1,0)$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Réduction de Q en base orthonormée. La matrice de Q dans la base (i,j) est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2-7X+1$ et les valeurs propres de A sont $\alpha = \frac{7+3\sqrt5}{2}$ et $\beta = \frac{7-3\sqrt5}{2}$.
$\mathrm{Ker}(A-\alpha I_2)$ est la droite d'équation $-(1+\sqrt5)x+2y=0$ et est engendrée par le vecteur unitaire $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt5}}(2,1+\sqrt5)$. Puis $\mathrm{Ker}(A-\alpha I_2)$ est la droite d'équation $-(1-\sqrt5)x+2y=0$ et est engendrée par le vecteur unitaire $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt5}}(2,1-\sqrt5)$.
Equation réduite de (Γ) dans $\mathscr{R}' = (\Omega,e_1,e_2)$.
Les termes de degré 1 disparaissent car Ω est l'origine de $\mathscr{R}'$ et d'autre part, $Q(xi+yj) = Q(Xe_1+Ye_2) = \alpha X^2+\beta Y^2$.
Il manque simplement la constante mais si on effectue le changement de variables $x = x_0+aX+bY$ et $y = y_0+cX+dY$, la constante est bien sûr $f((x_0,y_0))$. Donc une équation cartésienne de (Γ) dans $\mathscr{R}'$ est $\alpha X^2+\beta Y^2+f((-1,0))=0$ ce qui s'écrit encore

$$\frac{7+3\sqrt5}{2}X^2+\frac{7-3\sqrt5}{2}Y^2=1.$$

Eléménts caractéristiques de la courbe (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'$.
(Γ) est une ellipse de centre Ω, d'axe focal (ΩY) car $a = \frac{1}{\sqrt{\frac{7+3\sqrt5}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{7-3\sqrt5}{2}}} = b$ et d'axe non focal (ΩX).

- *Centre* $\Omega(0,0)_{\mathscr{R}'}$.
- *Excentricité* $c^2 = b^2-a^2 = \frac{2}{7-3\sqrt5}-\frac{2}{7+3\sqrt5} = 3\sqrt5$ puis $e^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{3\sqrt5}{7+3\sqrt5} = \frac{-45+21\sqrt5}{4}$ et $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45+21\sqrt5} = 0,69\ldots$
- *Sommets* $A\left(\sqrt{\frac{7-3\sqrt5}{2}},0\right)_{\mathscr{R}'}$ $A'\left(-\sqrt{\frac{7-3\sqrt5}{2}},0\right)_{\mathscr{R}'}$ $B\left(0,\sqrt{\frac{7+3\sqrt5}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ $B'\left(0,-\sqrt{\frac{7+3\sqrt5}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$
- *Foyers* $\Omega F = \Omega F' = c = \sqrt{3\sqrt5}$ et puisque (ΩY) est l'axe focal, $F(0,\sqrt{3\sqrt5})$ et $F'(0,-\sqrt{3\sqrt5})$.
- *Directrices* $\Omega K = \Omega K' = \frac{b}{e} = 2\sqrt{\frac{2}{(7-3\sqrt5)(-45+21\sqrt5)}} = \frac{2}{7-3\sqrt5}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt5}} = \frac{7+3\sqrt5}{\sqrt{6\sqrt5}}$ et donc

$(D) : Y = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et $(D') : Y = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.

Eléménts caractéristiques de (Γ) dans $\mathscr{R}$.

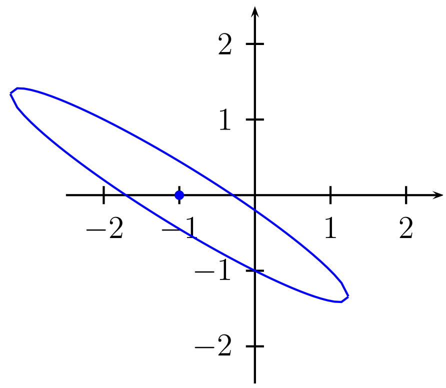
Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- *Centre* $\Omega(-1,0)_{\mathscr{R}}$ et excentricité $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45+21\sqrt{5}} = 0,69...$

- *Sommets* $A\left(-1+\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $A'\left(-1-\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ puis $B\left(-1+\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $B'\left(-1-\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$

- *Foyers* $F\left(-1+\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, \sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $F'\left(-1-\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, -\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$

-*Directrices* $(D) : \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et $(D') : \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.



(b) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+3x-2y+1$ puis $Q((x,y)) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Q est de rang 1 et donc (Γ) est du genre parabole c'est-à-dire soit une parabole, soit une réunion de deux droites parallèles éventuellement confondues, soit l'ensemble vide.

Si (Γ) est non vide, (Γ) est une conique est de direction asymptotique d'équation $y = -x$ (fournie par $Q(x,y) = 0$).

1ère étude. On étudie l'intersection de (Γ) avec une perpendiculaire quelconque à sa direction. Soit (D_k) la droite d'équation $y = x+k$, $k \in \mathbb{R}$.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_k) est $x^2+2x(x+k)+(x+k)^2+3x-2(x+k)+1 = 0$ ou encore

$$4x^2+(4k+1)x+k^2-2k+1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (4k+1)^2-16(k^2-2k+1) = 40k-15$. Puisque ce discriminant change de signe, (Γ) est une parabole.

Le discriminant est nul pour $k = \frac{3}{8}$ ce qui founit la tangente au sommet $(T) : y = x+\frac{3}{8}$ et aussi le sommet :

$$x_S = -\frac{4\times\frac{3}{8}+1}{2\times 4} = -\frac{5}{16} \text{ et } y_S = x_S+\frac{3}{8} = \frac{1}{16}.$$

Le sommet de la parabole (Γ) est le point $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$.

L'axe focal est la perpendiculaire à la droite (T) en S. Une équation de l'axe focal (Δ) est $y+\frac{5}{16} = -\left(x-\frac{1}{16}\right)$ ou encore $y = -x-\frac{1}{4}$.

Pour obtenir le paramètre, le foyer et la directrice, on constate tout d'abord au vu du signe du discriminant calculé plus haut que $F = S+\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $K = S-\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Il ne manque plus que le paramètre p. Soit M l'un des deux points de (Γ) situé sur la parallèle à la tangente au sommet passant par F. La construction usuelle d'une parabole point par point montre que le quadrilatère (M,F,K,H) est un carré. Le paramètre p cherché est alors $p = FK = FM$.

Dans ce cas, la droite (MK) est la tangente à (Γ) en M et la bissectrice de l'angle des droites (D) et (Δ). Cette tangente est donc parallèle à l'un des axes de coordonnées.

L'équation générale de la tangente en un point (x_0,y_0) de (Γ) est fournie par la règle de dédoublement des termes : $xx_0+xy_0+x_0y+yy_0+\frac{3}{2}(x+x_0)-(y+y_0)+1 = 0$ ou encore $x\left(x_0+y_0+\frac{3}{2}\right)+y(x_0+y_0-1)+x_0-y_0+1 = 0$.

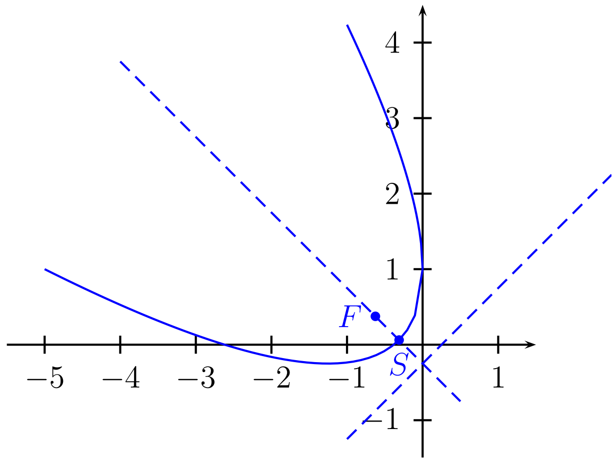
Cette tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées si et seulement si $x_0+y_0+\frac{3}{2} = 0$ ou $x_0+y_0-1 = 0$.

M est donc sur l'une des deux droites $(\Delta_1) : x+y+\frac{3}{2} = 0$ ou $(\Delta_2) : x+y-1 = 0$ qui sont toutes deux parallèles à l'axe focal $(\Delta) : x+y+\frac{1}{4} = 0$.

p est donc aussi la distance de (Δ) à l'une quelconque de ces deux droites ou la distance d'un point quelconque de (Δ) à la droite (Δ_1). Comme le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ est sur (Δ),

$$p=\frac{\left|-\frac{1}{4}+0+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

puis $F=S+\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{5}{16}-\frac{5}{16},\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\right)=\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$ et $K=S-\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{5}{16}+\frac{5}{16},\frac{1}{16}-\frac{5}{16}\right)=\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ de sorte que la directrice (D) a pour équation $y=x-\frac{1}{4}$.



2ème étude. On pose $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ et $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ ou encore $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ ce qui correspond au changement de bases orthonormées de matrice $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. On note (e_1,e_2) la famille de matrice P dans la base (i,j). Déterminons une équation de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2)$.

$$(x+y)^2+3x-2y+1=0\Leftrightarrow 2X^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X-Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(X+Y)+1=0\Leftrightarrow 2X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1=0\Leftrightarrow\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(Y-\frac{3}{8\sqrt{2}}\right).$$

Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}'$.
- (Γ) est une parabole de *sommet* $S\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.
- *Paramètre* $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$. L'axe focal de (Γ) est l'axe (SY) et le foyer a une ordonnée strictement supérieure à Y_S.
- *Foyer* $F=S+\frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.
- *Directrice* $K=S-\frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et donc $(D):Y=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Eléments de la parabole (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.
- *Paramètre* $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$. *Sommet* $S=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_S-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_S,\frac{1}{\sqrt{2}}X_S+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_S\right)_{\mathscr{R}}=\left(-\frac{5}{16},\frac{1}{16}\right)_{\mathscr{R}}$.
- Le *foyer* F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_F-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_F,\frac{1}{\sqrt{2}}X_F+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_F\right)_{\mathscr{R}}=\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)_{\mathscr{R}}$.
- La *directrice* (D) a pour équation $\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ et donc $y=x-\frac{1}{4}$.

(c) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y)=2x^2-4xy-3x+3y+1$ puis $Q((x,y))=2x^2-4xy=0$.
Le discriminant de cette conique est $\Delta=2\times 0-(-2)^2=-4<0$ et la courbe est du genre hyperbole c'est-à-dire soit une hyperbole, soit une réunion de deux droites sécantes. Dans les deux cas, les deux directions asymptotiques admettent pour équation respective $x=0$ et $x=2y$ (fourni par $Q(x,y)=0$)
Point critique.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-4y-3=0\\ -4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\text{ et }y=0.$$

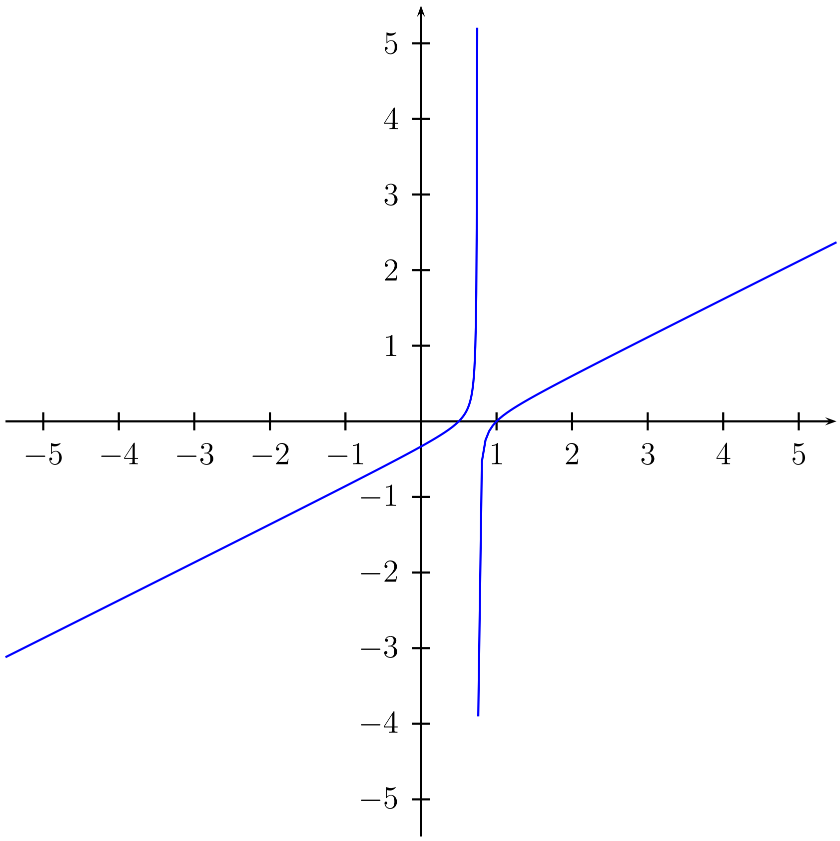
On note Ω le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4},0\right)$ dans le repère $\mathscr{R}$.
Asymptotes. Ce sont les droites passant par Ω de directions d'équations $x=0$ et $x=2y$. Les asymptotes sont les droites $(D_1):x=\frac{3}{4}$ et $(D_2):x-\frac{3}{4}=2y$. La réunion de ces deux droites a pour équation $\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}-2y\right)=0$ ou encore $2x^2-4xy-3x+3y+\frac{9}{2}=0$. (Γ) n'est pas $(D_1)\cup(D_2)$ et donc (Γ) est une hyperbole.
Axe focal et axe transverse.
Ce sont les deux bissectrices de la paire de droites $((D_1),(D_2))$ ou encore l'ensemble des points à égale distance de ces deux droites ou encore l'ensemble des points de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$ tels que $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{5}\left(x-2y-\frac{3}{4}\right)^2$.

Ce sont donc les droites d'équations respectives $\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-2y-\frac{3}{4}\right)=0$ et $\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-2y-\frac{3}{4}\right)=0$ ou encore $y=-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$ et $y=\frac{\sqrt{5}+1}{8}(4x-3)$. Seule l'une de ses deux droites a une intersection non vide avec (Γ), à savoir l'axe focal et les deux points d'intersection sont les sommets de l'hyperbole.
L'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_1) est

$$2x^2-4x\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right)-3x+3\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right)+1=0$$

ou encore $2\sqrt{5}x^2-3\sqrt{5}x+\frac{9\sqrt{5}-1}{8}=0$ ou enfin $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{1}{16\sqrt{5}}=0$ dont le discriminant vaut $\frac{1}{4\sqrt{5}}>0$.

L'axe focal est donc la droite d'équation $y=-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$. Les solutions de l'équation précédente fournissent les abscisses des sommets.



(d) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $Q(x,y)=-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2$. Le discriminant de (Γ) vaut $-5-27=-32<0$.
La conique est du genre hyperbole et de centre O. Comme $O\notin(\Gamma)$, (Γ) est plus précisément une hyperbole de centre O. Les asymptotes sont fournies par l'égalité $Q(x,y)=0$ et sont donc les droites d'équations $y=(-3\sqrt{3}\pm 4\sqrt{2})x$.

La matrice de Q dans la base canonique est $M=\begin{pmatrix}-5 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_M=X^2+4X-32=(X-4)(X+8)$. Ensuite, $M=PD^tP$ où $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{diag}(-8,4)$.

Les formules de changement de repère s'écrivent $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}X+Y)\\ y=\frac{1}{2}(-X+\sqrt{3}Y)\end{array}\right.$ ou aussi $\left\{\begin{array}{l}X=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y)\\ Y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)\end{array}\right.$.

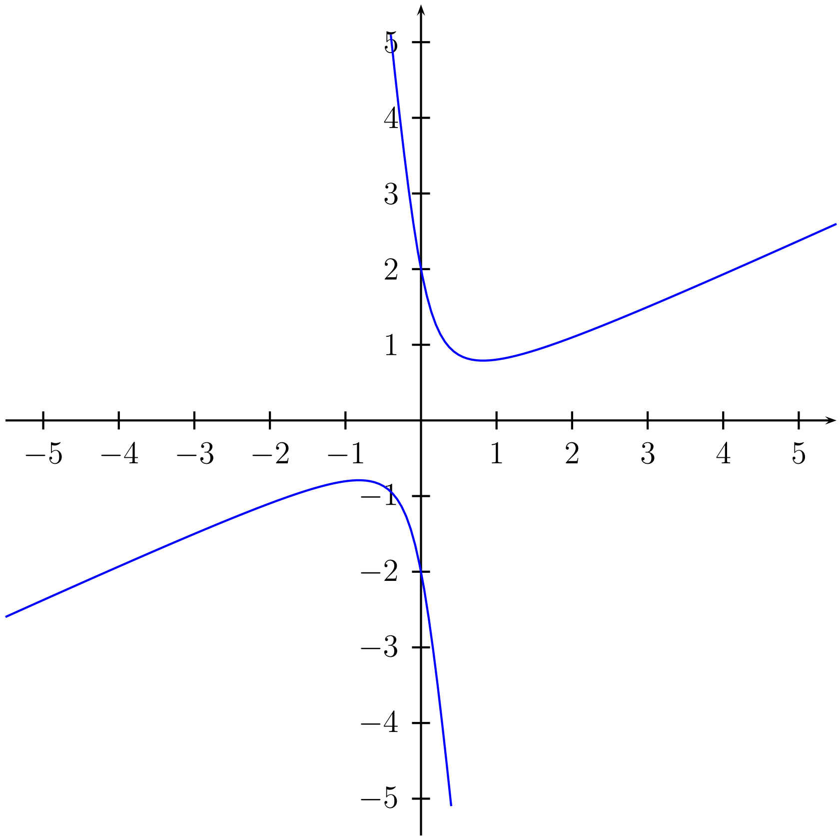
Dans $\mathscr{R}'(O,e_1,e_2)$, (Γ) a pour équation $-8X^2+4Y^2-4=0$ ou encore $-\frac{X^2}{(1/\sqrt{2})^2}+Y^2=1$. Donc $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=1$ et $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Eléments de l'hyperbole dans $\mathscr{R}'$ puis $\mathscr{R}$. L'axe focal est (O,e_2) c'est-à-dire la droite d'équation $X=0$ dans $\mathscr{R}'$ ou encore $y=\sqrt{3}x$ dans $\mathscr{R}$.

- Les *sommets* sont les points B et B' de coordonées $(1,0)$ et $(-1,0)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans $\mathscr{R}$.

- *Excentricité, foyers, directrices.* $c=\sqrt{\frac{3}{2}}$ puis $e=\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Les foyers F et F' ont pour coordonnées $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et $\left(0,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}$.

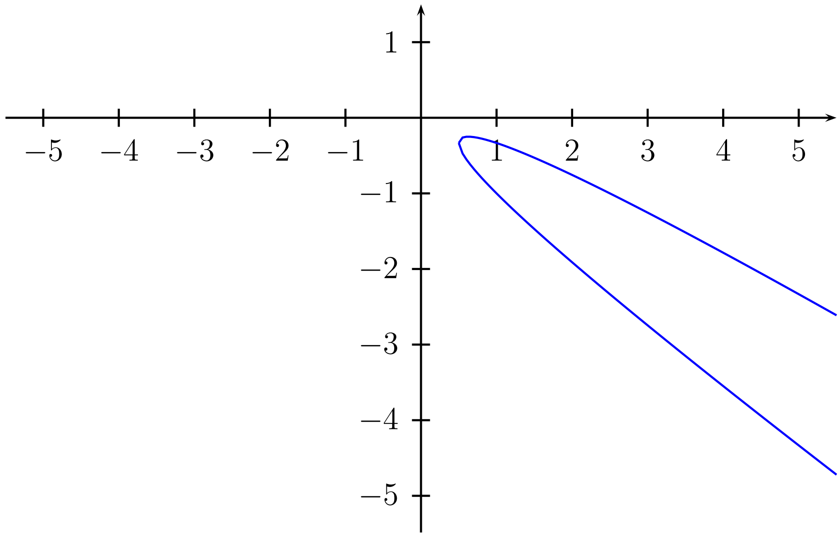
En ce qui concerne les directrices, $K = O + \frac{1}{e}\overrightarrow{OB} = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\mathscr{R}'}$. Les directrices sont les droites d'équations respectives $Y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et $Y = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ dans $\mathscr{R}'$ ou encore d'équations respectives $x + \sqrt{3}y = \frac{4}{\sqrt{6}}$ et $x + \sqrt{3}y = -\frac{4}{\sqrt{6}}$.



(e) L'équation proposée s'écrit $(2x+3y)^2 - 2x + 1 = 0$. Il s'agit d'une conique du genre parabole de direction asymptotique éventuelle $2x + 3y = 0$.
Posons $X = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x+3y)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y)$ ou encore $x = \frac{1}{\sqrt{13}}(2X+3Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{13}}(3X-2Y)$.
Dans $\mathscr{R}' = (O, X, Y)$, (Γ) admet pour équation cartésienne :

$$\begin{aligned}13X^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}(2X+3Y) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 13\left(X - \frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{6}{\sqrt{13}}Y + \frac{165}{169} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(X - \frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{6}{13\sqrt{13}}\left(Y - \frac{55}{26\sqrt{13}}\right)\end{aligned}$$

Ceci montre que (Γ) est une parabole, fournit le paramètre $p = \frac{6}{13\sqrt{13}}$ puis les éléments de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'$:
$S = \left(\frac{2}{13\sqrt{13}}, \frac{55}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ puis $F = S + \frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(\frac{2}{13\sqrt{13}}, \frac{61}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et $K = S - \frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(\frac{2}{13\sqrt{13}}, \frac{49}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et donc $(D) : Y = \frac{49}{26\sqrt{13}}$.
Eléments de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.
$S\left(\frac{173}{338}, -\frac{49}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ puis $F\left(\frac{191}{338}, -\frac{55}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ et $(D) : 3x - 2y = \frac{49}{26}$.



(f) (Γ) est le point d'intersection des droites d'équations respectives $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ à savoir le point de coordonnées $(0,1)$.

(g) L'équation s'écrit $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. (Γ) est le cercle de centre $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(h) On reconnait une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

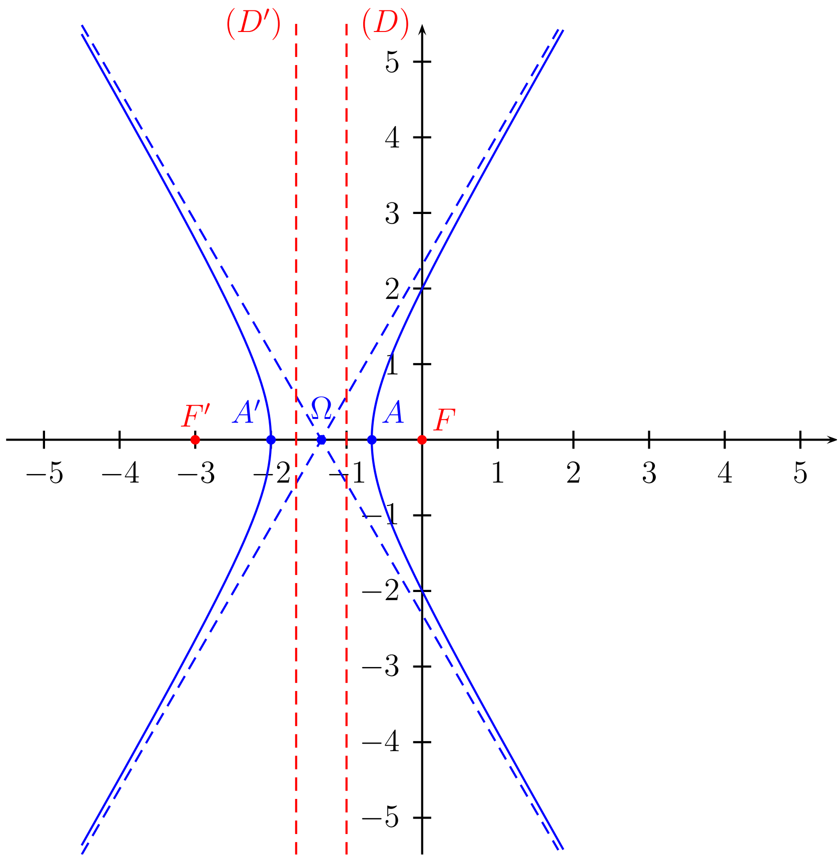
(i) Si on pose $X=x+2y-4$ et $Y=x-y-1$, l'équation s'écrit $XY=3$ ce qui montre immédiatement que la courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations respectives $x+2y-4=0$ et $x-y-1=0$ et donc de centre le point d'intersection de ces deux droites $\Omega(2,1)$. Ce changement de repère non orthonormé ne peut pas fournir davantage et si on veut les éléments métriques de l'hyperbole, il faut revenir aux méthodes de 3) ou 4).

(j) De nouveau, si on pose $X=2x+y-1$ et $Y=x+y$ (ou même $Y=3(x+y)$) , l'équation s'écrit $X^2=3Y$. Le nouveau repère est quelconque mais on peut tout de même affirmer que la courbe est une parabole de direction asymptotique $2x+y=0$. Avec cette équation, on ne lit cependant aucun des éléments métriques de celle-ci.

Correction de l'exercice 5081 ▲

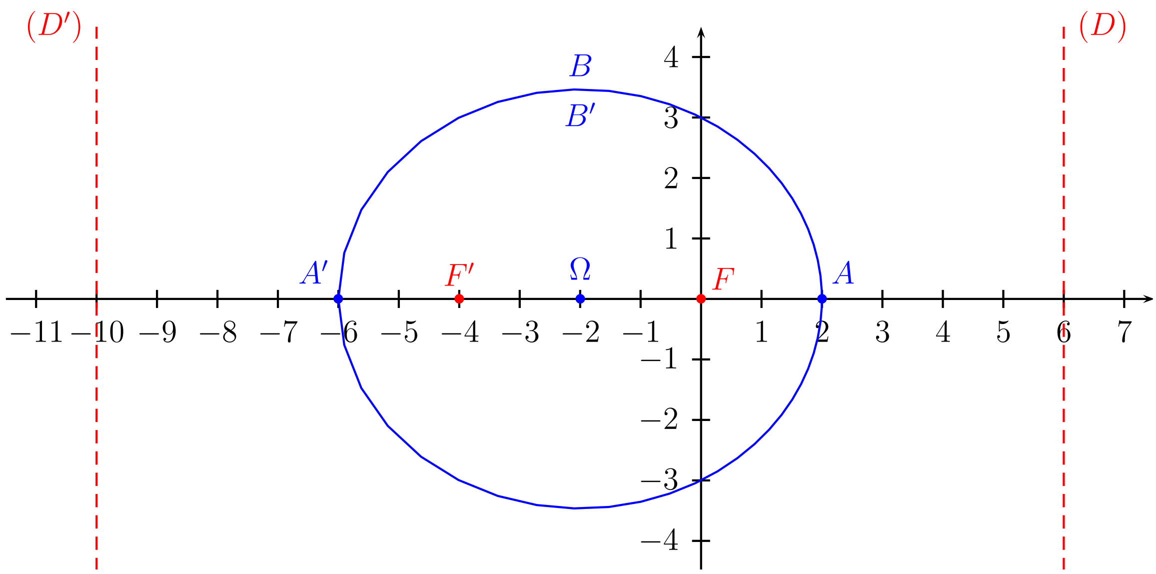
Les trois courbes proposées sont des coniques propres (équation polaire d'une conique propre dans un repère dont l'axe des abscisses est l'axe focal d'origine un foyer : $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ où $p=ed=eFK$).

(a) $e=2$. Il s'agit une hyperbole dont l'un des foyers est l'origine.



L'axe focal est (Ox) et donc les sommets de l'hyperbole sont les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox). Ce sont les points A et A' de coordonnées cartésiennes $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ et $(-2,0)$ obtenus pour $\theta=\pi$ et $\theta=0$ respectivement.
Le centre est le milieu du segment $[AA']$ à savoir le point $\Omega\left(-\frac{4}{3},0\right)$.
les directions asymptotiques sont fournies par : $2\cos\theta-1=0 \Leftrightarrow \theta\in\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}$. Les asymptotes sont les droites d'angle polaire $\pm\frac{\pi}{3}$ passant par Ω. Ce sont les droites d'équations respectives $y=\sqrt{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)$ et $y=-\sqrt{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)$.
L'un des foyers F est l'origine. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω à savoir le point F' de coordonnées $(-3,0)$.
Les directrices sont fournies par les points $K=\Omega+\frac{1}{e}\overrightarrow{OA}=(-1,0)$ et $K'=\Omega-\frac{1}{e}\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{5}{3},0\right)$. Les directrices sont les droites (D) et (D') d'équations respectives $x=-1$ et $x=-\frac{5}{3}$.

(b) L'équation s'écrit $r=\frac{3}{\frac{1}{2}+\cos\theta}$. Donc $e=\frac{1}{2}$ et la courbe est une ellipse.



Les sommets du grand axe sont les points $A(2,0)$ et $A'(-6,0)$ obtenus pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$. Le centre est le milieu Ω de $[AA']$ de coordonnées $(-2,0)$.

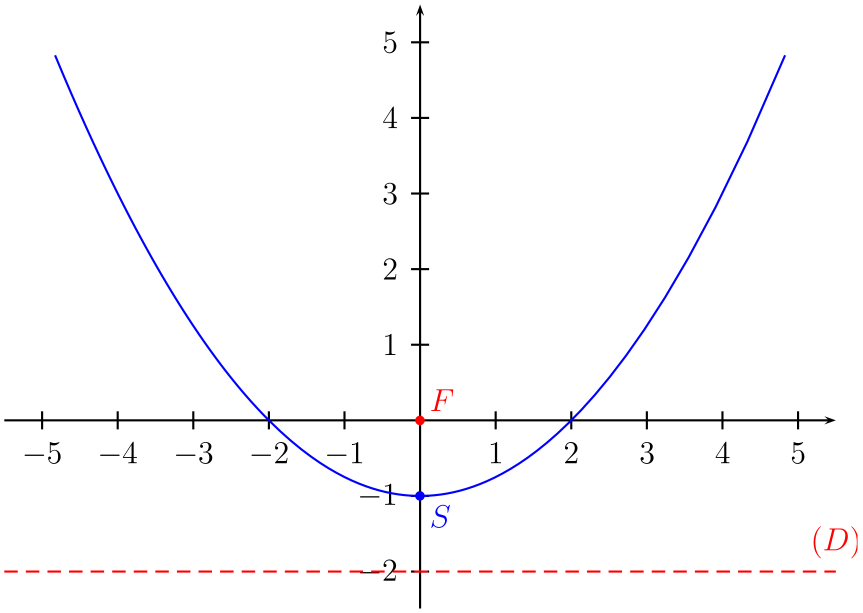
Le premier foyer F est l'origine et le deuxième est le symétrique du point F par rapport à Ω à savoir le point $F'(-4,0)$.

Les points K et K' sont définis par : $K = \Omega + \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (6,0)$ et $K' = \Omega - \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (-10,0)$. Les directrices sont les droites (D) et (D') d'équations respectives $x = 6$ et $x = -10$.

Les sommets du petit axe sont déterminés par $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ puis $B = \Omega + b\overrightarrow{j} = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ et $B = \Omega - b\overrightarrow{j} = \left(-2, -2\sqrt{3}\right)$

(c) L'équation $r = \frac{2}{1+\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. On reconnait une parabole dans une présentation non traditionnelle.

Le foyer est toujours l'origine et comme la direction asymptotique est obtenue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et a donc pour angle polaire $\frac{\pi}{2}$), l'axe focal est donc la droite passant par l'origine F et d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. Le sommet est l'intersection de la courbe avec l'axe (Oy) obtenue pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on obtient $r = 1$ et donc $S(-1,0)$. Puis $K = s_S(F) = (-2,0)$ et la directrice (D) est la droite d'équation $y = -2$. Enfin, $p = FK = 2$.



Remarque. Si on n'est pas à l'aise en polaires, on peut toujours repasser en cartésien mais c'est une très grosse perte de temps :

En 1), $r(1 - 2\cos\theta) = 2$ s'écrit $r - 2x = 2$ puis $x^2 + y^2 = (2x+2)^2$.

En 2), $r(2 + \cos\theta) = 6$ s'écrit $2r + x = 6$ et donc $4(x^2 + y^2) = (-x+6)^2$.

En 3), $r(1 - \sin\theta) = 2$ s'écrit $r - y = 2$ puis $x^2 + y^2 = (y+2)^2$ et donc $y = \frac{x^2}{4} - 1$.

Correction de l'exercice 5082 ▲

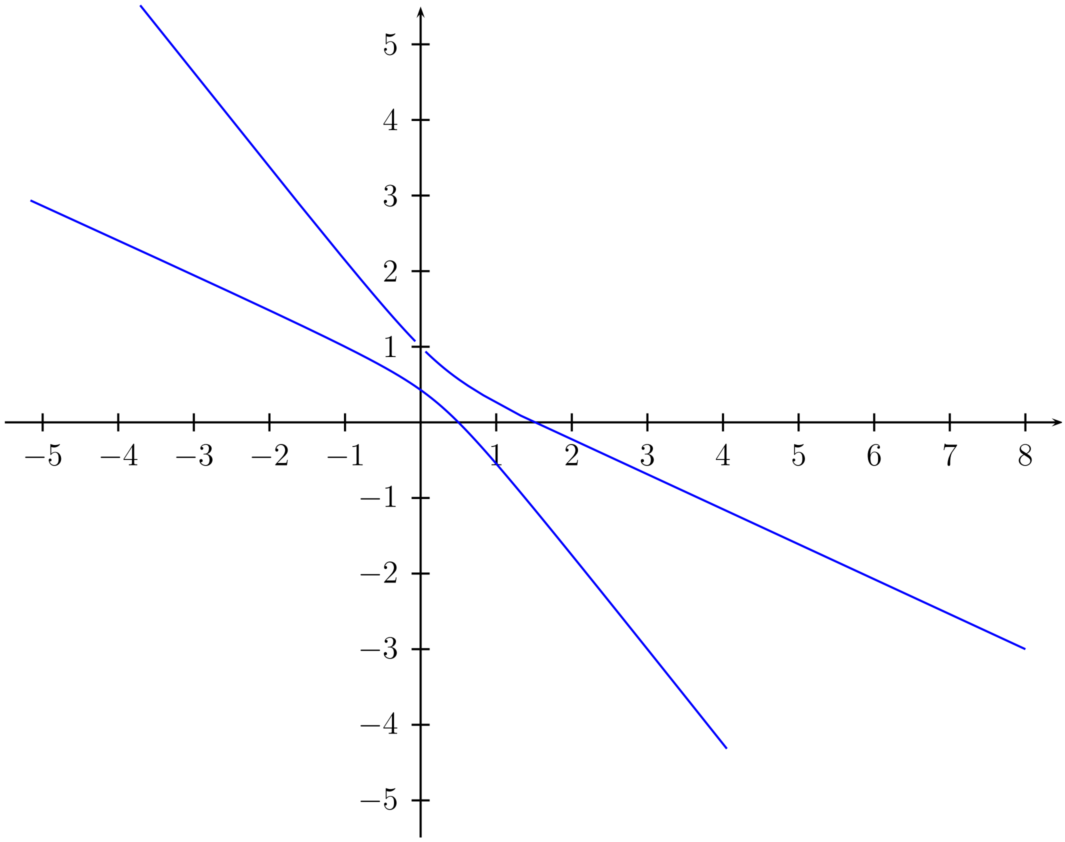
(a) Une ellipse (privée d'un point) admet une représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} a\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ b\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, dans un repère adapté. Une branche d'hyperbole admet une représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ b\frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$, $t \in]-1,1[$, dans un repère adapté. Une parabole admet une représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{cases}$, dans un repère adapté ...

Réciproquement, si la courbe admet une paramétrisation du type de l'énoncé, les six polynômes P^2, PQ, Q^2, PR, QR et R^2 sont dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui est de dimension 5 et donc sont linéairement dépendants. On en déduit qu'il existe $(a,b,c,d,e,f) \neq (0,0,0,0,0,0)$ tel que $aP^2 + 2bPQ + cQ^2 + 2dPR + 2eQR + fR^2 = 0$ ou encore tel que pour tout réel t tel que $R(t) \neq 0$,

$$a\left(\frac{P(t)}{R(t)}\right)^2 + 2b\frac{P(t)}{R(t)} \times \frac{Q(t)}{R(t)} + c\left(\frac{Q(t)}{R(t)}\right)^2 + 2d\frac{P(t)}{R(t)} + 2e\frac{Q(t)}{R(t)} + f = 0.$$

Le support de l'arc est donc contenu dans la courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ où $(a,b,c,d,e,f) \neq (0,0,0,0,0,0)$).

(b) Construction de la courbe $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y=\frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{array}\right.$.



Correction de l'exercice 5085 ▲

Soient P, P' les symétriques de F par rapport aux tangentes. Donc $F'P = F'P' = 2a$.
Le triangle FPP' est rectangle, donc T est le milieu de $[P, P']$, et $TF = TP = TP'$.
Donc, $TF^2 + TF'^2 = F'P^2 = 4a^2$.
$TF^2 + TF'^2 = 2TO^2 + OF^2 + OF'^2$ donc T appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

Correction de l'exercice 5086 ▲

(a) $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.

(b) $M : \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \end{pmatrix}$, $P : \begin{pmatrix} 2a\cos\alpha \\ 2a\sin\alpha \end{pmatrix}$: (MP) est tangente à $\mathscr{E}' \Leftrightarrow \theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Correction de l'exercice 5087 ▲

(a) $\frac{x^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = d^2$.

Correction de l'exercice 5088 ▲

$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow T : \begin{pmatrix} a/e \\ b^2(e-X)/d \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{FM} \cdot \vec{FT} = 0$.

Correction de l'exercice 5091 ▲

Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des points considérés. Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

$$\begin{aligned} P(x) = P(y) &\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + A(x^2 - y^2) + B(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)((x^2 + xy + y^2) + A(x+y) + B) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe $\mathscr{E}$ d'équation $x^2+xy+y^2+A(x+y)+B=0$. Pour déterminer la nature de $\mathscr{E}$, on fait un changement de repère orthonormé en posant

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$$

On obtient

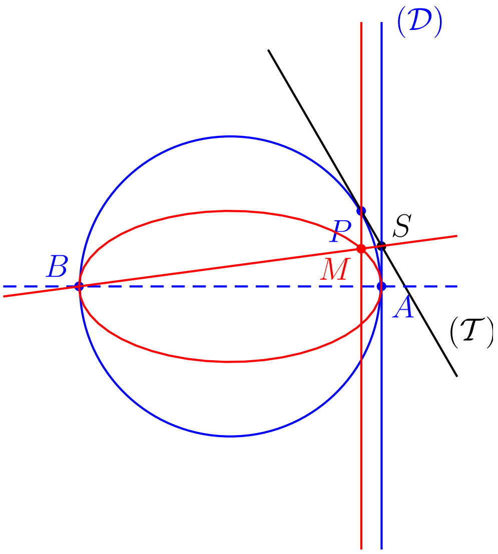
$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2+A(x+y)+B=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X-Y)^2+(X-Y)(X+Y)+(X+Y)^2)+\frac{A}{\sqrt{2}}X+B=0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2+Y^2+\sqrt{2}AX+2B=0 \Leftrightarrow 3\left(X+\frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2+Y^2=\frac{A^2-12B}{6}\ (*) \end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est une ellipse si et seulement si $A^2-12B>0$ (sinon $\mathscr{E}$ est un point ou est vide). Dans ce cas, puisque $a=\frac{1}{\sqrt{3}}<1=b$,

$$e=\tfrac{c}{b}=\tfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\tfrac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\tfrac{1}{3}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 5092 ▲

On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel le point A a pour coordonnées $(1,0)$ et le point B a pour coordonnées $(-1,0)$. Dans le repère $\mathscr{R}$, la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation $x=1$. Ensuite, il existe un réel θ tel que le point P ait pour coordonnées $(\cos\theta,\sin\theta)$. La tangente $(\mathscr{T})$ a pour équation $x\cos\theta+y\sin\theta=1$. Pour $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, le point S a pour coordonnées $\left(1,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ ou encore $\left(1,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.



La perpendiculaire à la droite (AB) passant P admet pour équation $x=\cos\theta$. La droite (BS) admet pour équation $-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(x+1)+2y=0$. Ces deux droites se coupent en le point M de coordonnées $\left(\cos\theta,\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\cos\theta)\right)$ ou encore $\left(\cos\theta,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ ou enfin $(\cos\theta,\frac{1}{2}\sin\theta)$.

L'ensemble des points M est donc l'ensemble des points de coordonnées $\left(\cos\theta,\frac{1}{2}\sin\theta\right)$ quand θ décrit $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ ou encore l'ellipse d'équation $x^2+4y^2=1$ privée des points A et B.

Correction de l'exercice 5093 ▲

Posons $P=X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma$.

$$\begin{aligned} P(x)=P(y) &\Leftrightarrow (y^3-x^3)+\alpha(y^2-x^2)+\beta(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta)=0 \\ &\Leftrightarrow y-x=0 \text{ ou } x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la réunion de la droite (D) d'équation $y=x$ et de la courbe (Γ) d'équation $x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0$. Pour étudier la courbe (Γ) qui est du genre ellipse, posons $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ puis notons $\mathscr{R}'$ le repère (OXY).

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X+Y)^2+(X+Y)(X-Y)+(X-Y)^2)+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(X+Y+X-Y)+\beta=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3X^2+Y^2)+\alpha\sqrt{2}X+\beta=0 \Leftrightarrow 3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta). \end{aligned}$$

(Γ) est une ellipse si et seulement si $\alpha^2-3\beta>0$ (sinon (Γ) est un point ou est vide). Dans ce cas, $3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta)\Leftrightarrow$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ où $a^2=\frac{2}{9}(\alpha^2-3\beta)<\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta)=b^2$. Par suite,

$$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 5097 ▲

(a) Soit O ce milieu. La tangente en M est parallèle à (FH'), et passe par le milieu de $[F,H]$, donc par le milieu de $[H,H']$.

(b) Calcul d'angles. $\overline{(\vec{MO},\vec{MF})}\equiv\overline{(\vec{FH'},\vec{FM'})}$.

Correction de l'exercice 5098 ▲

Soit O' ce centre. Les triangles MPQ et MAB sont semblables, donc O' est l'image de O par l'homothétie de centre M qui transforme A en P.
Soit $(A'B')$ la symétrique de (AB) par rapport à O. D'après l'homothétie,

$$\frac{O'M}{d(O',\Delta)}=\frac{OM}{d(O,(AB))}=(cste)=\frac{OM-O'M}{d(O,(AB))-d(O',\Delta)}=\frac{OO'}{d(O',(A'B'))}.$$

Donc O' décrit une partie d'une conique de foyer O et de directrice $(A'B')$.

Correction de l'exercice 5099 ▲

Repère $(O,\frac{\vec{OA}}{R},\vec{j})\Rightarrow$ parabole $\rho=\frac{R}{1+\sin\theta}$.

Correction de l'exercice 5100 ▲

arcs de paraboles de foyer F et de directrices Δ,Δ', parallèles à D à la distance $2a$ de D.

Correction de l'exercice 5102 ▲

$A:(t^2/2p,t)$, $B:(u^2/2p,u)$ avec $t(t+u)=-2p^2$. AB est minimal pour $t^2=2p^2$ et vaut alors $3p\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 5103 ▲

(a) Parabole : $y^2=2px\Rightarrow x=2pt^2, y=2pt$. Corde : $\begin{vmatrix}2pa^2 & 2pb^2 & x\\ 2pa & 2pb & y\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

(b) $a^2+ab+ac+bc+1=0$.

(c) $c=-\frac{a^2+ab+1}{a+b}$.
$(BC):(2pa+y)b^2+(2pa^2+2p-x)b-(ax+a^2y+y)=0$.
Point fixe : $y=-2pa$, $x=2p(a^2+1)$.

(d) Parabole translatée de $\mathscr{P}$ de $(2p,0)$.

Correction de l'exercice 5104 ▲

(a) $M=(2pt^2,2pt)\Rightarrow 2t^2+2tt_0+1=0$. Il y a deux solutions si $|t_0|>\sqrt{2}$, une seule si $|t_0|=\sqrt{2}$ et aucune si $|t_0|<\sqrt{2}$.

(b) $t_1+t_2=-t_0$, $t_1^2+t_2^2=t_0^2-1$. Centre : $(4pt_0^2-2p,0)$ (1/2-droite).

Correction de l'exercice 5105 ▲

(a) $x_C-x_A=2p\pm\sqrt{4p^2+8pxA}$.

(b) $x_{n+1}=x_n+\sqrt{8px_n+4p^2}+2p=x_n\left(1+\sqrt{\frac{8p}{x_n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)\right)$ donc $\sqrt{x_{n+1}}=\sqrt{x_n}+\sqrt{2p}+o(1)$ et $x_n\sim 2pn^2$.

Correction de l'exercice 5106 ▲

Dans un certain repère orthonormé, la parabole $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2 = 2py$. D'après la règle de dédoublement des termes, une équation de la tangente $\mathscr{T}_{x_0}$ en un point $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$ de $\mathscr{P}$ est

$$xx_0 = p(y + y_0).$$

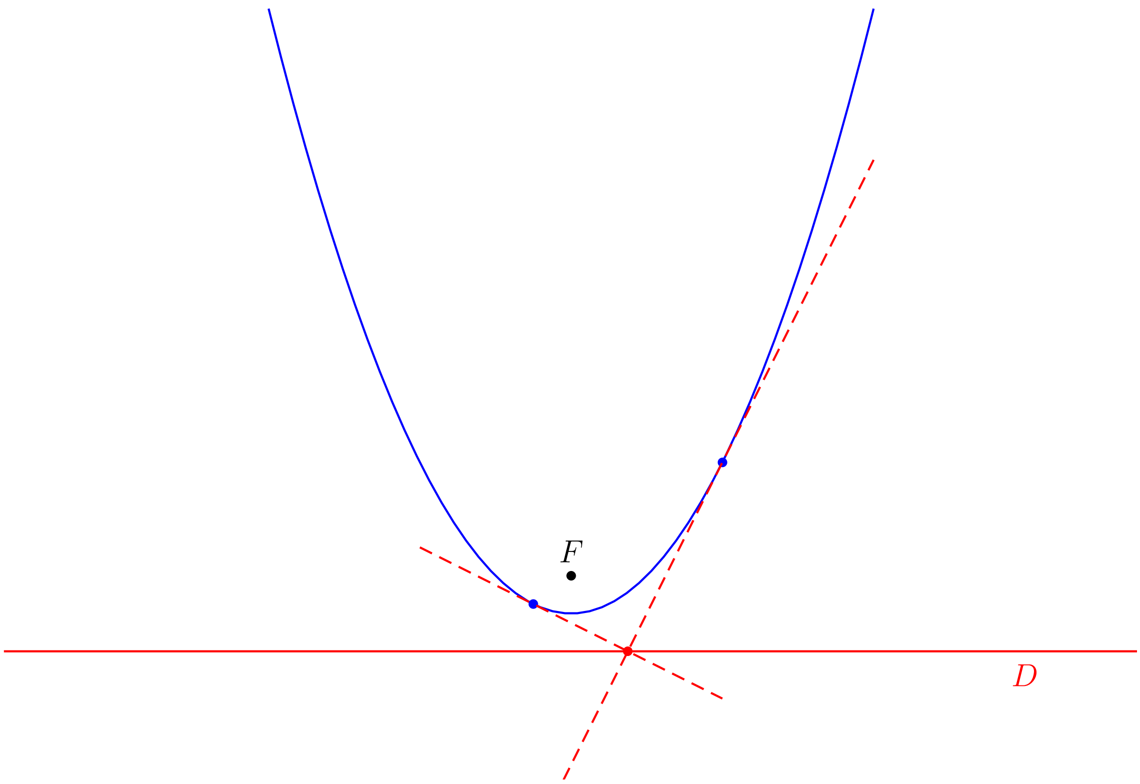
Les tangentes en $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont perpendiculaires si et seulement si $x_0x_1 + p^2 = 0$. L'orthoptique $\mathscr{C}$ est donc l'ensemble des points d'intersection de $\mathscr{T}_{x_0}$ et $\mathscr{T}_{-p^2/x_0}$ où x_0 décrit $\mathbb{R}^*$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} xx_0 = p\left(y + \frac{x_0^2}{2p}\right) \\ -x\frac{p^2}{x_0} = p\left(y + \frac{p^3}{2x_0^2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} tx - py = \frac{t^2}{2} \\ px + ty = -\frac{p^3}{2t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{t^2+p^2}\left(\frac{t^3}{2} - \frac{p^4}{2t}\right) \\ y = \frac{1}{t^2+p^2}\left(-\frac{p^3}{2} - \frac{pt^2}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^2-p^2}{2t} \\ y = -\frac{p}{2} \end{array}\right. .$$

Maintenant, $\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-p^2}{2t} = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2-p^2}{2t} = +\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{t^2-p^2}{2t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, quand t décrit $]0, +\infty[$, $x = \frac{t^2-p^2}{2t}$ décrit $\mathbb{R}$. Finalement, l'orthoptique $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$ ou encore

l'orthoptique d'une parabole est sa directrice.



Correction de l'exercice 5107 ▲

On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}_1 = \left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ tel que le plan d'équation $x + y + z = 1$ dans $\mathscr{R}$ soit le plan d'équation $Z = 0$ dans $\mathscr{R}_1$. On prend $O' = (1,0,0)$ puis $\overrightarrow{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et enfin $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Ensuite, soit M un point de l'espace dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ sont notées (x, y, z) et les coordonnées dans $\mathscr{R}_1$ sont notées (X, Y, Z).

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x^2+x+1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}=\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}+1\right)^2+\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}+1\right)+1 \\ Z=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Z=0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}=\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+1\right)^2+\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Z=0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{4X}{\sqrt{2}}+\frac{2Y}{\sqrt{6}}+3=0 \end{array}\right. .$$

On travaille maintenant en dimension 2 et on note encore $\mathscr{R}_1$ le repère $\left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. Une équation de (Γ) dans $\mathscr{R}_1$ est $\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{4X}{\sqrt{2}}+\frac{2Y}{\sqrt{6}}+3=0$ ou encore $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}X}{2}+\frac{Y}{2}\right)^2+\frac{4X}{\sqrt{2}}+\frac{2Y}{\sqrt{6}}+3=0$. On pose $\left\{\begin{array}{l} x'=\frac{\sqrt{3}X}{2}+\frac{Y}{2} \\ y'=-\frac{X}{2}+\frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{\sqrt{3}x'}{2}-\frac{y'}{2} \\ Y=\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{array}\right.$ et on note $\mathscr{R}'=\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ le nouveau repère défini par ces formules.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2+\frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x'}{2}-\frac{y'}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}y'}{2}\right)+3=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2+\frac{7x'}{\sqrt{6}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}+3=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x'+\frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2=\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x'+\frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y'+\frac{1}{8\sqrt{2}}\right).$$

(Γ) est une parabole de paramètre $p=\frac{3}{4\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}'$: sommet $S\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, axe : $x'=-\frac{21}{4\sqrt{6}}$, foyer $F\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, directrice : $y'=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}_1$ en repassant à trois coordonnées : sommet $S\left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, axe : $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{3}X+Y=-\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z=0 \end{array}\right.$, foyer $F\left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, directrice : $\left\{\begin{array}{l} -X+\sqrt{3}Y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z=0 \end{array}\right.$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}$: sommet $S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)_{\mathscr{R}}$, axe : $\left\{\begin{array}{l} 8x-4y-4z+21=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$, foyer $F\left(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, 10\right)_{\mathscr{R}}$, directrice : $\left\{\begin{array}{l} 2y-2z+1=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 5108 ▲

On cherche l'équation d'une telle parabole $\mathscr{P}$ sous la forme $(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0,\ a^2+b^2=1,\ a>0$.

$$(1,0) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{a^2+2c+e=0} \text{ et } (0,2) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{4b^2+4d+e=0}.$$

D'après la règle de dédoublement des termes, une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{P}$ en $(1,0)$ est $a^2x+aby+c(x+1)+dy+e=0$ ou encore $(a^2+c)x+(ab+d)y+c+e=0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $\boxed{a^2+c=c+e=0 \text{ et } ab+d \neq 0.}$ Une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{P}$ en $(0,2)$ est $2abx+2b^2y+cx+d(y+2)+e=0$ ou encore $(2ab+c)x+(2b^2+d)y+2d+e=0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $\boxed{2b^2+d=2d+e=0 \text{ et } 2ab+c \neq 0.}$ En résumé, $\mathscr{P}$ est solution si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} c=-a^2 \\ d=-2b^2 \\ e=a^2=4b^2 \\ a^2+b^2=1 \\ ab+d \neq 0 \\ 2ab+c \neq 0 \\ a>0 \end{array}\right. .$$

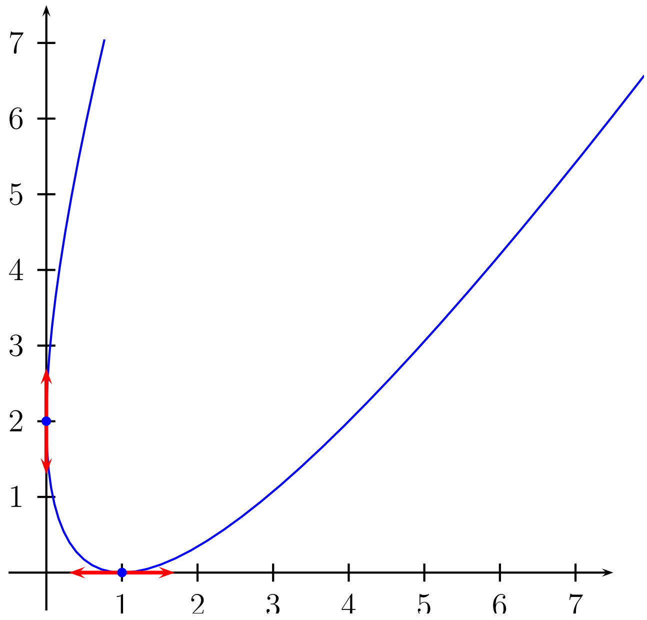
Maintenant, $\left(a^2=4b^2,\ a^2+b^2=1 \text{ et } a>0\right) \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Le cas $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ fournit $d=-\frac{2}{5}$ puis $ab+d=0$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ puis $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ et $e=\frac{4}{5}$ qui sont effectivement solution du système. On obtient ainsi une et une seule courbe du second degré solution, à savoir la courbe d'équation cartésienne

$$\boxed{(2x-y)^2-8x-4y+4=0.}$$

Il reste à vérifier que cette courbe est effectivement une parabole. On pose $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x-2y) \\ Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y) \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2X-Y) \end{array}\right.$.

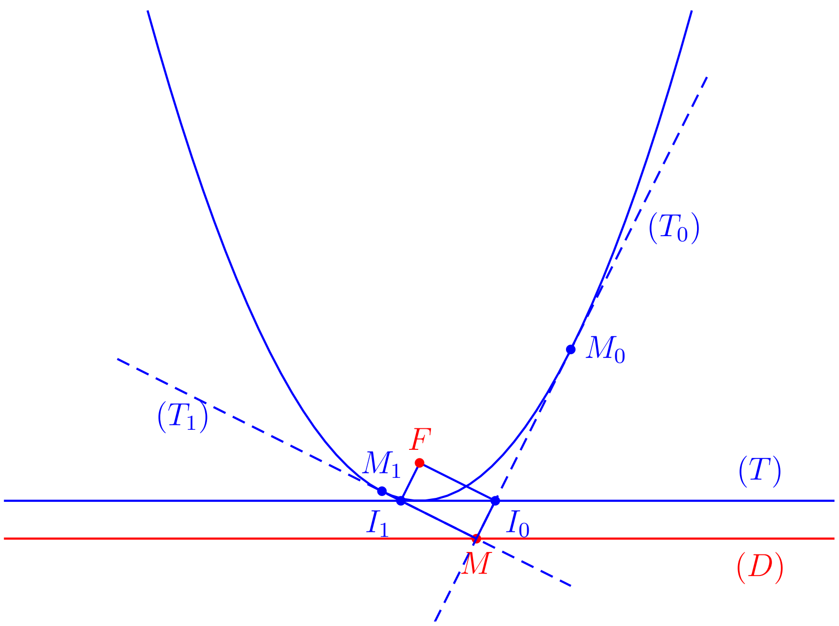
$$(2x-y)^2-8x-4y+4=0 \Leftrightarrow 5Y^2-\frac{8}{\sqrt{5}}(-X+2Y)-\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X-Y)+4=0 \Leftrightarrow 5Y^2-\frac{12}{\sqrt{5}}Y+\frac{16}{\sqrt{5}}X+4=0$$
$$\Leftrightarrow 5\left(Y-\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}\left(X+\frac{4}{5\sqrt{5}}\right).$$

$\mathscr{C}$ est donc effectivement une parabole.



Correction de l'exercice 5109 ▲

Solution géométrique.



Soit M un point de l'othoptique. M est sur les tangentes (T_0) et (T_1) à la parabole en deux points distincts M_0 et M_1 et clairement distinct du sommet S. Soient I_0 et I_1 les points d'intersection des droites (T_0) et (T_1) respectivement avec la tangente (T) au sommet de la parabole. On sait (construction usuelle de la parabole par points et tangentes) que les droites (T_0) et (T_1) sont perpendiculaires aux droites (FI_0) et (FI_1) respectivement. Donc le quadrilatère FI_0MI_1 est un rectangle (3 angles droits connus). Par suite, le milieu de $[FM]$ qui est aussi le milieu de $[I_0I_1]$ est sur la tangente au sommet (T) et M est l'image d'un point de la tangente (T) par l'homothétie de centre F et de rapport 2. Finalement, le point M est sur la directrice de la parabole.

Réciproquement, soit M un point de la directrice et I le milieu de $[FM]$. On reconstruit le rectangle précédent en plaçant d'abord sur la tangente au sommet (T) les points I_0 et I_1 tels que I soit le milieu de $[I_0I_1]$ et tels que $I_0I_1=MI$. Les droites (MI_0) et (MI_1) sont effectivement des tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires l'une à l'autre.

$\boxed{\text{L'orthoptique d'une parabole est sa directrice.}}$

Solution analytique. On choisit un repère orthonormé dans lequel la parabole a pour équation cartésienne $y^2 = 2px$. Une équation de la tangente (T_0) à la parabole en un point $M_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ est $-px_0 + yy_0 = px_0$.

Deux tangentes (T_0) et (T_1) sont perpendiculaires si et seulement si $p^2 + y_0 y_1 = 0$ (en particulier $y_0 y_1 \neq 0$). Le point d'intersection des tangentes (T_0) et (T1) en deux points distincts est la solution du système $\left\{\begin{array}{l} -px + yy_0 = px_0 \\ -px + yy_1 = px_1 \end{array}\right.$ et a donc pour coordonnées $\left(\frac{p(x_0y_1 - y_0x_1)}{p(y_0 - y_1)}, \frac{p^2(x_0 - x_1)}{p(y_0 - y_1)}\right) = \left(-\frac{y_0y_1}{2p}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)\right)$.

En résumé, un point $M(x,y)$ est sur l'orthoptique si et seulement si il existe $y_0 \neq 0$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right) \end{array}\right.$ ce qui montre déjà qu'un point de l'orthoptique est sur la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$ c'est-à-dire sur la directrice de la parabole. Réciproquement, la fonction $y_0 \mapsto \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers $-\infty$ quand y_0 tend vers 0 par valeurs supérieures et tend vers $+\infty$ quand y_0 tend vers $+\infty$. Donc $\frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ décrit $\mathbb{R}$ quand y_0 décrit $]0, +\infty[$, ce qui montre que l'on obtient la totalité de la directrice.

Correction de l'exercice 5110 ▲

(a) Soit M un point du plan.

1er cas. Supposons que $M \notin (AB) \cup (AC) \cup (BC)$.

$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

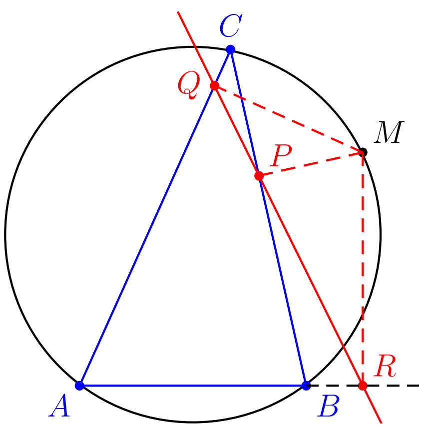
Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

$$\begin{aligned} P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C). \end{aligned}$$

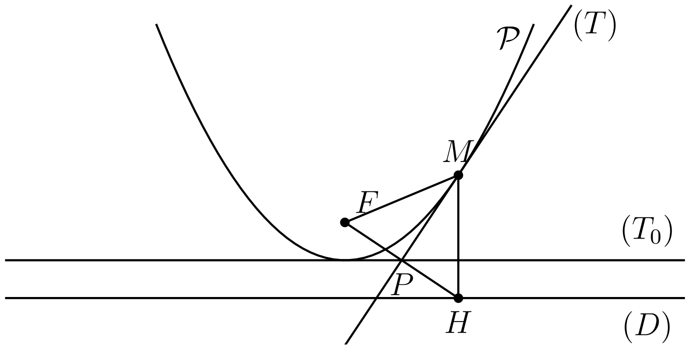
2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction. Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate.

En résumant les deux cas,

$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$



(b) **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0)$ la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

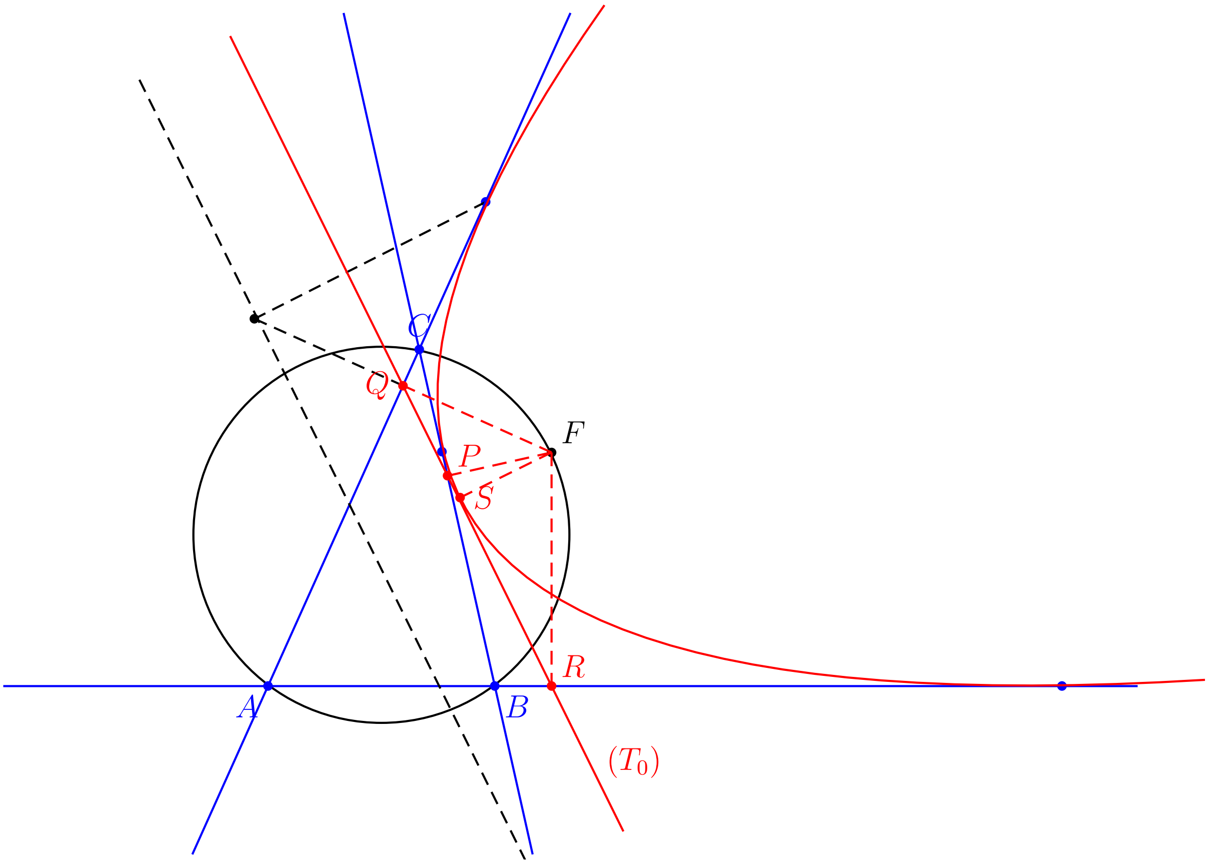


Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathscr{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer.

Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB).

On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de SIMSON (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.



Correction de l'exercice 5111 ▲

(Γ) est l'intersection d'un cylindre parabolique de direction (Oz) et d'un plan non perpendiculaire à la direction de ce cylindre. On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}' = (\Omega, X, Y, Z)$ dans lequel le plan d'équation $x+y+z-1=0$ dans le repère $\mathscr{R} = (O,x,y,z)$ soit le plan (Ω, X, Y) ou encore le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

On pose donc $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-1)$ puis par exemple $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$ ce qui s ?écrit

$$\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$, la courbe (Γ) admet pour système d'équations

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z+\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z+\frac{1}{3}\right)+1\\ Z=0\end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{3}\right)+1\\ Z=0\end{cases}.$$

Continuons à deux coordonnées X et Y dans le plan (Ω,X,Y).

$$\begin{aligned}M(X,Y)\in(\Gamma)&\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{3}\right)+1\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X+Y)^2+\frac{2}{3\sqrt{6}}(\sqrt{3}X+Y)+\frac{1}{9}+\sqrt{2}X+1=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X+Y)^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}X+\frac{2}{3\sqrt{6}}Y+\frac{10}{9}=0\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}X+Y)^2+8\sqrt{2}X+\frac{2\sqrt{6}}{3}Y+\frac{20}{3}=0.\end{aligned}$$

On trouve déjà une conique du genre parabole. On pose maintenant $x'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}X+Y)$ et $y'=\frac{1}{2}(-X+\sqrt{3}Y)$ correspondant aux formules de changement de repère $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}X+Y)\\ y'=\frac{1}{2}(-X+\sqrt{3}Y)\end{cases}$ ou encore $\begin{cases} X=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y')\\ Y=\frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y')\end{cases}$.

Dans le repère (Ω,x',y'), une équation de la courbe (Γ) est

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}X+Y)^2+8\sqrt{2}X+\frac{2\sqrt{6}}{3}Y+\frac{20}{3}=0&\Leftrightarrow 4x'^2+4\sqrt{2}(\sqrt{3}x'-y')+\frac{\sqrt{6}}{3}(x'+\sqrt{3}y')+\frac{20}{3}=0\\ &\Leftrightarrow x'^2+\frac{13}{2\sqrt{6}}x'-\frac{3}{2\sqrt{2}}y'+\frac{5}{3}=0\\ &\Leftrightarrow \left(x'+\frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2-\frac{3}{2\sqrt{2}}y'+\frac{5}{3}-\frac{169}{96}=0\Leftrightarrow\left(x'+\frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y'+\frac{1}{8\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

(Γ) est la parabole de paramètre $p=\frac{3}{4\sqrt{2}}$ et dont les éléments caractéristiques dans le repère (Ω,x',y') sont $S\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$, $F=S+\frac{p}{2}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$ puis $K=S-\frac{p}{2}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)-\frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et donc (D) : $y'=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

On repasse maintenant dans le repère (Ω,X,Y). S a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{13}{4\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{8\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{16\sqrt{2}}\\ -\frac{29}{16\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, F a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{13}{4\sqrt{6}}\\ \frac{1}{4\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4\sqrt{2}}\\ -\frac{5}{4\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ puis (D) a pour équation $-X+\sqrt{3}Y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On revient enfin au repère (O,x,y,z).

Le point S a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{25}{16\sqrt{2}}\\ -\frac{29}{16\sqrt{6}}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{13}{16}\\ \frac{15}{16}\end{pmatrix}$ puis le point F a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et enfin}$$

$$(D) : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x+y-2z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x+y+z-1=0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (\Gamma) \text{ est la parabole de paramètre } p = \frac{3}{4\sqrt{2}}, \text{ de sommet } S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right), \text{ de foyer } F\left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}\right) \\ \text{et de directrice } (D) : \left\{ \begin{array}{l} -y+z = \frac{1}{2} \\ x+y+z-1=0 \end{array} \right. . \end{array}}$$

Correction de l'exercice 5112 ▲

On cherche une équation sous la forme $(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0$ avec $a^2+b^2=1$ et $a>0$.

• $(1,0) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow a^2+2c+e=0$ et $(0,2) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 4b^2+4d+e=0$.

• D'après la règle de dédoublement des termes, la tangente en $(1,0)$ à $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $a^2x+aby+c(x+1)+dy+e=0$ ou encore $(a^2+c)x+(ab+d)y+c+e=0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $a^2+c=0$ et $c+e=0$ et $ab+d\neq 0$.

• La tangente en $(0,2)$ à $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $2abx+2b^2y+cx+d(y+2)+e=0$ ou encore $(2ab+c)x+(2b^2+d)y+2d+e=0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $2b^2+d=0$ et $2d+e=0$ et $2ab+c\neq 0$.

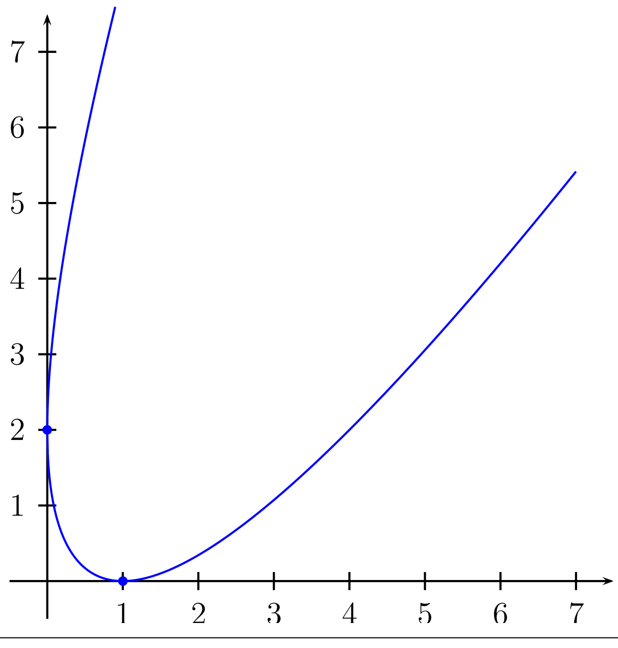
En résumé, $(\mathscr{P})$ est solution si et seulement si $c=-a^2$, $d=-2b^2$, $e=a^2=4b^2$, $a^2+b^2=1$, $ab+d\neq 0$, $2ab+c\neq 0$ et $a>0$.

$a>0$, $a^2=4b^2$ et $a^2+b^2=1 \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les égalités $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ fournissent $ab+d=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$ ce qui ne convient pas.

Il reste $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $b=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ et $e=\frac{4}{5}$ qui fournit bien une solution. On trouve une et une seule parabole.

$$\boxed{\text{La parabole } (\mathscr{P}) \text{ admet pour équation cartésienne } (2x-y)^2-8x-4y+4=0.}$$



Correction de l'exercice 5113 ▲

Hyperbole d'excentricité $\frac{1}{\cos\alpha}$, avec $\overline{(\vec{D},\vec{\Delta})} \equiv \frac{\pi}{2}-\alpha$.

Correction de l'exercice 5114 ▲

(a) $xy=\frac{a^2}{2}$.

Correction de l'exercice 5116 ▲

(a) $MH = \frac{1}{2}MF \Rightarrow IMH$, IMN, et INF sont semblables.

Correction de l'exercice 5117 ▲

Soit $\alpha \equiv \overline{(\vec{AM},\vec{AO})}$.
$\frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin(2\alpha)} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{AM}{OM}$.
Al-Khâshi $\Rightarrow \frac{AM^2}{OM}(OM-OA) = (OM-OA)(OM+OA)$.
$OM = OA \Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4}$.
$OM \neq OA \Rightarrow OM = 2d(M,\Delta)$ où Δ est la médiatrice de $[O,A]$, et M est du côté de O.

Correction de l'exercice 5118 ▲

$M : \begin{pmatrix} 1/\cos\theta \\ -\tan\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$ hyperbole.

Correction de l'exercice 5119 ▲

On se ramène à une hyperbole d'équation $xy = 1$. Soient $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c, \frac{1}{c}\right)$. Alors $H = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right) \in \mathscr{H}$.

L'équation du cercle circonscrit à ABC est : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ et les points communs au cercle et à $\mathscr{H}$ vérifient donc : $x^4+\alpha x^3+\gamma x^2+\beta x+1 = 0$. On connaît 3 racines : $x = a,b,c$ donc la quatrième est $q = \frac{1}{abc}$ ce qui prouve que Q et H sont symétriques par rapport à O.

Correction de l'exercice 5120 ▲

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole. Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{H}$ admet une équation catésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0$, $b > 0)$. Dans ce repère, les asymptotes ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = -1$ ou encore si et seulement si $a = b$. L'excentricité de $\mathscr{H}$ est alors

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

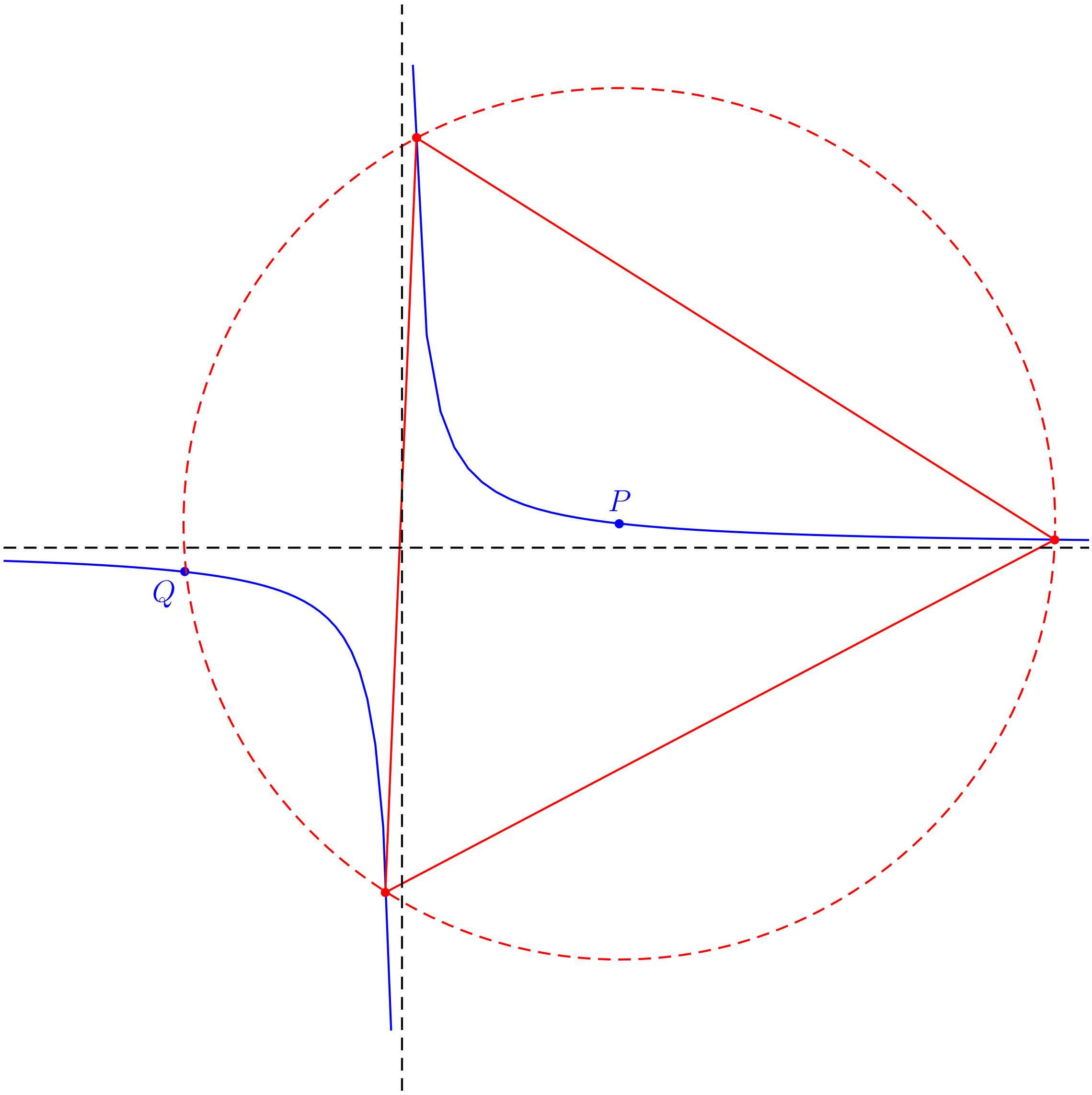
$$\boxed{\text{L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut } \sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 5121 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel P a pour coordonnées (a,b), $a > 0$, $b > 0$ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ a pour équation $xy = ab$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre P et de rayon PQ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t \\ y = b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M\left(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t, b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t\right)$ un point de $\mathscr{C}$.

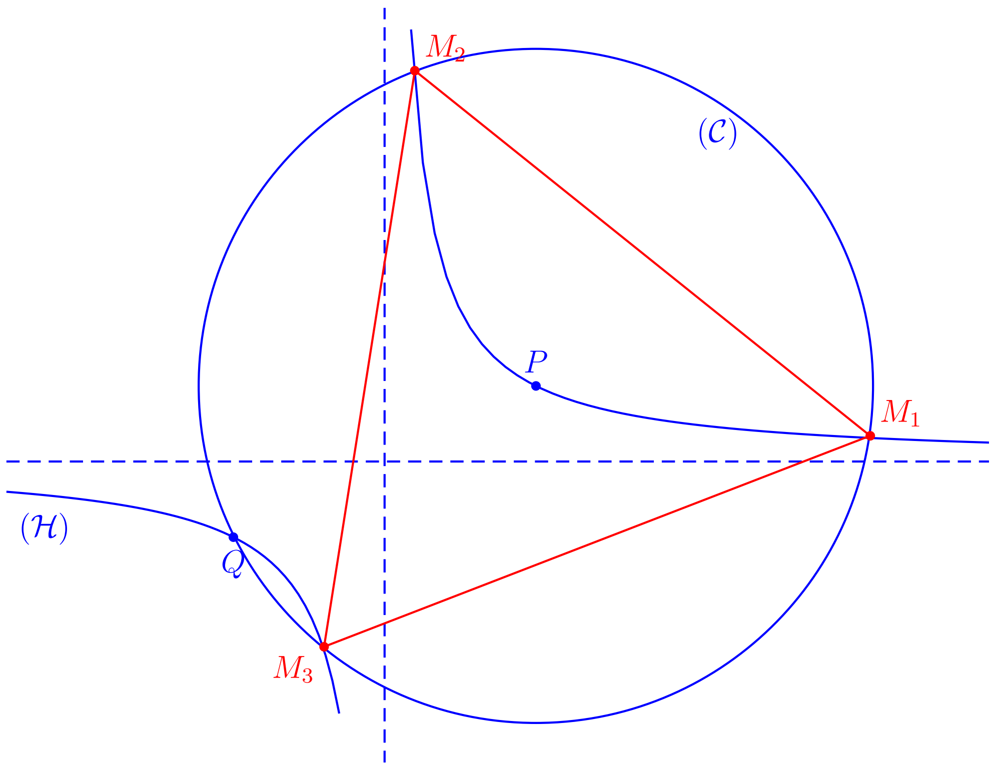
$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t) = ab \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos t+a\sin t)+4(a^2+b^2)\cos t\sin t = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t+\sin(2t) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(2t)+\sin(t+t_0)+0 \text{ où } \cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2t = -t-t_0+2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2t = \pi+t+t_0+2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ t = -\frac{t_0}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ t = \pi+t_0+2k\pi.
\end{aligned}$$

$t = \pi+t_0+2k\pi$ fournit le point de coordonnées $(-a,-b)$ c'est-à-dire le point Q. Sinon, on obtient trois autres points les points $M\left(-\frac{t_0}{3}\right)$, $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ et $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$. On note A, B et C ces trois points. Puisque ces trois points sont sur un cercle de centre P et que $\left(\vec{PA},\vec{PB}\right) = \left(\vec{PB},\vec{PC}\right) = \left(\vec{PC},\vec{PA}\right) = \frac{2\pi}{3}$, le triangle ABC est équilatéral.



Correction de l'exercice 5122 ▲

On peut choisir un repère orthonormé dans lequel $(\mathscr{H})$ admet pour équation équation cartésienne $xy = ab$ et P a pour coordonnées (a,b) où a et b sont deux réels strictement positifs.



Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre P et de rayon $PQ = 2OP$ admet la paramétrisation $\left\{\begin{array}{l} x = a + 2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta \\ y = b + 2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta \end{array}\right.$.

Soit $M(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta, b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, un point du cercle $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in (\mathscr{H}) &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta) = ab \\
&\Leftrightarrow (a^2+b^2)\cos\theta\sin\theta + 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos\theta + a\sin\theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2\theta) + \sin(\theta+\theta_0) = 0 \text{ où } \theta_0 = \operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\theta+\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi) \text{ ou } \theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Les égalités $\theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi)$ fournissent le point Q.
Les égalités $\theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$ fournissent trois valeurs deux à deux distinctes de θ modulo 2π et donc trois points deux à deux distincts M_1, M_2 et M_3 de l'hyperbole tels que les trois angles au centre P du triangle $M_1M_2M_3$ soient égaux à $\frac{2\pi}{3}$. Puisque P est le centre du cercle circonscrit à ce triangle, ce triangle est équilatéral de centre P.

Correction de l'exercice 5123 ▲

(a) vp $= 1, 1\pm\sqrt{2}$. er : $X^2 + (1+\sqrt{2})Y^2 + (1-\sqrt{2})Z^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow$ hyperboloïde à 2 nappes.
(b) vp $= -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0$. er : $-\frac{3}{2}(X^2+Y^2) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$ cylindre de révolution.
(c) vp $= 0, 0, 14$. er : $14Z^2 + 4 = 0 \Rightarrow \varnothing$.
(d) vp $= 0, -1\pm\sqrt{7}$. er : $-(1+\sqrt{7})Y^2 + (-1+\sqrt{7})Z^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
(e) vp $= 0, 2, 3$. er : $2Y^2 + 3Z^2 - \frac{8X}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$ paraboloïde elliptique.
(f) vp $= -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$. er : $-\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ hyperboloïde de révolution à une nappe.
(g) vp $= 0, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$. er : $\frac{9Y^2}{2} - \frac{3Z^2}{2} = 0 \Rightarrow$ deux plans sécants.
(h) vp $= 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. er : $Y^2 - Z^2 = \sqrt{2} \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
(i) vp $= 1, 1, 0$. er : $X^2 + Y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ cylindre de révolution.

Correction de l'exercice 5126 ▲

(a) $\frac{(xz_0-x_0z)^2}{a^2}+\frac{(yz_0-y_0z)^2}{b^2}=(z-z_0)^2$.

(b) $y_0=0$, $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{b^2}=1$.

Correction de l'exercice 5127 ▲

(a)

(b)

(c) Non lorsque la valeur propre médiane est nulle (paraboloïde hyperbolique, cylindre hyperbolique, cylindre parabolique, plans).

Correction de l'exercice 5128 ▲

(a) $x^2+y^2=1+\lambda^2z^2$.

(b)

Correction de l'exercice 5130 ▲

(a) Hyperbole équilatère d'asymptotes : $\begin{cases} x-z-1=\pm y\sqrt{2} \\ x+z=1. \end{cases}$

(b) $x^2+y^2=2z^2$, cône de révolution.

Correction de l'exercice 5131 ▲

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V=\frac{8\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 5132 ▲

$\lambda=0$: $S=(0,0,0)$, cône de révolution.
$\lambda=\frac{4}{3}$: $S=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, cône de révolution.

Correction de l'exercice 5134 ▲

$\frac{\vec{MP}}{a^2}=\frac{\vec{MQ}}{b^2}=\frac{\vec{MR}}{c^2}$.

Correction de l'exercice 5137 ▲

$e<1$: ellipsoïde de révolution, $e=1$: cylindre parabolique, $e>1$: hyperboloïde de révolution.

Correction de l'exercice 5138 ▲

Ellipsoïde.

Correction de l'exercice 5139 ▲

$x^2\cos^2\theta+y^2-2xz\cos\theta\sin\theta-z^2\cos^2\theta=0\Rightarrow$ cône elliptique.

Correction de l'exercice 5140 ▲

Soit r le rayon de S et h la distance du centre I de S à P. On choisit un repère tel que $P=Oxy$ et $I=(0,0,h)$. Soit S' une sphère de centre $M(x,y,z)$:
Pour $z>0$: S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h+r)z=h^2-r^2+x^2+y^2$.
S à l'intérieur de $S'\Leftrightarrow 2(h-r)z=h^2-r^2+x^2+y^2$ si $h>r$.
S' à l'intérieur de $S\Leftrightarrow 2(h-r)z=h^2-r^2+x^2+y^2$ si $h<r$.
Pour $z<0$: S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h-r)z=h^2-r^2+x^2+y^2$ si $h<r$.
S' à l'intérieur de $S\Leftrightarrow 2(h+r)z=h^2-r^2+x^2+y^2$ si $h<r$.

Correction de l'exercice 5142 ▲

(a) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2yz$.
Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2+y^2+z^2-2yz = x^2+(y-z)^2 = X^2+2Y^2$ en posant $X = x$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ correspondant au changement de bases orthonormées de matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
Notons $\mathscr{R}' = (O,e_1,e_2,e_3)$ le repère orthonormé ainsi défini. La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation dans $\mathscr{R}$? $X^2+2Y^2-4X+2\sqrt{2}(Y+Z)-1 = 0$ ou encore

$$(X-2)^2+2\left(Y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(Z-\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde elliptique de sommet S de coordonnées $\left(2,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $(2,2,1)$ dans $\mathscr{R}$.

(b) En posant $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ et $Z = z$, on obtient : $2X^2+Z^2 = 1$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre elliptique d'axe (OY) ou encore d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} y=-x \\ z=0 \end{array}\right.$.

(c) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy+2xz$.
La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} &= (1-X)^3+(X-1)+(X-1) = (1-X)((1-X)^2-2) \\ &= (1-X)(1+\sqrt{2}-X)(1+\sqrt{2}-X).\end{aligned}$$

Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$. La surface $(\mathscr{S})$ peut être un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône de révolution.
$\text{Ker}(A-I_3) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.
$\text{Ker}(A-(1+\sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2},-1,1)$ et $\text{Ker}(A-(1-\sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2},1,-1)$
La matrice de passage correspondante est la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère (O,e_1,e_2,e_3).

$$\begin{aligned}
&X^2+(1+\sqrt{2})Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(Y+Z)-\frac{1}{2}(\sqrt{2}X-Y+Z)+\frac{1}{2}(\sqrt{2}X+Y-Z)+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y^2+\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}Y\right)+(1-\sqrt{2})\left(Z^2-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}Z\right)+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+\frac{3+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3+\sqrt{2})^2}{8(1+\sqrt{2})}+(1-\sqrt{2})\left(Z-\frac{3-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3-\sqrt{2})^2}{8(1-\sqrt{2})}+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{11+6\sqrt{2}}{8(1+\sqrt{2})}+\frac{11-6\sqrt{2}}{8(1-\sqrt{2})}-1 \\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -\frac{3}{4} \\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2-\frac{4(1+\sqrt{2})}{3}\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes de centre de coordonnées $\left(0,-1+\frac{\sqrt{2}}{4},1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

(d) On pose $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y)$ et $Z = z$. Dans le repère $\mathscr{R}'$ ainsi défini, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $5X^2+5Z^2-\frac{2}{\sqrt{5}}(X+2Y)+\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X+Y) = 0$ ou encore $5\left(X-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5Z^2 = 1$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ Z=0 \end{array}\right.$ dans $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(e) $x^2-4x-3y-2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=3(y+2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre parabolique de direction (Oz).

(f) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz$. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 10\\ 2 & -2 & 8\\ 10 & 8 & 4\end{pmatrix}$.

$$\chi_A=\begin{vmatrix} 7-X & 2 & 10\\ 2 & -2-X & 8\\ 10 & 8 & 4-X\end{vmatrix}=(7-X)(X^2-2X-72)-2(-2X-72)+10(10X+36)$$
$$=-X^3+9X^2+162X=-X(X+9)(X-18).$$

Donc Q est de rang 2 et de signature $(1,1)$.

$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(A)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}7x+2y+10z=0\\ 2x-2y+4z=0\\ 10x+8y+4z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y=-4z\\ 5x+4y=-2z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2z\\ y=2z\end{array}\right.$ et $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{3}(-2,2,1)$.

$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(A+9I_3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}16x+2y+10z=0\\ 2x+7y+8z=0\\ 10x+8y+13z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-8x-5z\\ z=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x\\ z=-2x\end{array}\right.$ et $\mathrm{Ker}(A+9I_3)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)$.

$\mathrm{Ker}(A-18I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)$ où $e3=-e_1\wedge e_2=\frac{1}{3}(2,1,2)$.

La matrice de passage du changement de bases ainsi défini est $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$

$$7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0$$
$$\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2-12(-2X+Y+2Z)+24(2X+2Y+Z)-36(X-2Y+2Z)+36=0$$
$$\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2+36X+108Y-72Z+36=0\Leftrightarrow -Y^2+2Z^2+4X+12Y-8Z+4=0$$
$$\Leftrightarrow 4(X+8)=(Y-6)^2-2(Z-2)^2.$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde hyperbolique. Son point selle est le point de cordonnées $(-8,6,2)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

(g) La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne : $x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx-x+y=0$.
Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx$. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$. Un base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de vecteurs propres est la famille de matrice $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

Dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $\frac{3}{2}(X^2+Y^2)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)=0$ ou encore $\frac{3}{2}(X^2+Y^2)-\sqrt{2}X=0$ ou enfin $\left(X-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{9}$.

La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l}X=\frac{\sqrt{2}}{3}\\ Y=0\end{array}\right.$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(h) En posant $X=y$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ (et $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z)$, $xy+yz=0\Leftrightarrow XY=\sqrt{2}$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre hyperbolique.

(i) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=xy+yz+zx$.
La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône du second degré et dans tous les cas une surface de révolution (puisque les deux valeurs propres négatives sont égales) d'axe de direction $\mathrm{Ker}(A-I_3)=\mathrm{Vect}(1,1,1)$ et passant par le point critique $\Omega(-1,1,-1)$.

Quand on se place dans le repère (Ω,i,j,k), la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $XY+YZ+ZX+2=0$ (car $f(-1,1,-1)=2$) puis dans le repère (Ω,e_1,e_2,e_3), $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+Z^2+2=0$ ou encore $\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}Y^2-\frac{1}{2}Z^2=1$. La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Correction de l'exercice 5143 ▲

On cherche $(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j)\neq(0,...,0)$ tel que la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx+2gx+2hy+2iz+j=0$ contienne la parabole $(\mathscr{P})$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{t^2}{2}\\ y=t\\ z=0\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$, la parabole $(\mathscr{P}')$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=t\\ z=\frac{t^2}{2}\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$, et le point $A(2,3,2)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P})\subset(\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+bt^2+dt^3+gt^2+2ht+j=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+dt^3+(b+g)t^2+2ht+j=0\\ &\Leftrightarrow a=d=h=j=0 \text{ et } g=-b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ est contenue dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+cz^2+2eyz+2fzx-2bx+2iz=0$ avec $(b,c,e,f,i)\neq(0,0,0,0,0)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}')\subset(\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ bt^2+\frac{c}{4}t^4+et^3+it^2=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{c}{4}t^4+et^3+(b+i)t^2=0\\ &\Leftrightarrow c=e=0 \text{ et } i=-b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont contenues dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+2fzx-2bx-2bz=0$ avec $(b,f)\neq(0,0)$.
Enfin, $A\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 9b+8f-4b-4b=0\Leftrightarrow b=-8f$ et $f\neq 0$. On trouve donc une et une seule quadrique à savoir la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $-4y2+zx+8x+8z=0$.
En posant $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $Y=y$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$, on obtient

$$\begin{aligned}-4y2+zx+8x+8z &= -4Y^2+\frac{1}{2}(X+Z)(X-Z)+8\sqrt{2}X\\ &=\frac{1}{2}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-4Y^2+\frac{1}{2}Z^2-64.\end{aligned}$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation cartésienne de la surface $(\mathscr{S})$ est $\frac{1}{128}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{16}Y^2+\frac{1}{128}Z^2=1$ et $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes.

Correction de l'exercice 5144 ▲

Soit $(\mathscr{S})$ une surface du second degré d'équation $f(x,y,z)=0$ où f est symétrique en x, y et z. Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les trois fonctions symétriques élémentaires en x, y et z.
Puisque f est symétrique en x, y et z, f est un polynôme en σ_1, σ_2 et σ_3. f est d'autre part un polynôme de degré 2 en x, y et z et donc

$$\text{il existe } (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \text{ avec } (a,b)\neq(0,0) \text{ tel que } f=a\sigma_1^2+b\sigma_2+c\sigma_1+d.$$

Réciproquement, si f est de la forme ci-dessus, alors f est symétrique en x, y et z.
Puisque $\sigma_2=xy+yz+zx=\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))$, $(\mathscr{S})$ admet une une équation cartésienne de la forme :

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)(x+y+z)^2-b(x^2+y^2+z^2)+c(x+y+z)+d=0 \text{ où } (a,b)\neq(0,0).$$

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par O dirigée par $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{n}$ est vecteur normal à tout plan d'équation $x+y+z=k$, $k\in\mathbb{R}$) et soit r une rotation quelconque d'axe $(\mathscr{D})$.
Si M est un point de coordonnées (x,y,z) et $M'=r(M)$ a pour coordonnées (x',y',z') alors $x+y+z=x'+y'+z'$ car M et M' sont dans un plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$ car une rotation est une isométrie et car $r(O)=O$.
Finalement, pour toute rotation r d'axe $(\mathscr{D})$, $M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow r(M)\in(\mathscr{S})$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est une surface de révolution d'axe $(\mathscr{D})$.

Correction de l'exercice 5145 ▲

Soit $A(a,b,c)$ un point quelconque de l'espace E_3.
Déterminons un système d'équation du cercle (C_A) d'axe (Δ) d'équations $x=y=z$ passant par A.
Ce cercle est par exemple l'intersection du plan passant par A de vecteur normal $(1,1,1)$ et de la sphère de centre O et de rayon OA.

Un système d'équations de (C_A) est $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \end{array}\right.$.

Déterminons alors une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x,y,z)$ soit un point de $(\mathscr{S})$ est $(C_M)\cap(\mathscr{D})\neq\varnothing$. Donc

$$M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} x+y+z=\alpha+\beta+\gamma \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \\ x+y+z=\gamma+2+2\gamma+1+\gamma \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \\ \gamma=\frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2+\left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2+\left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z+5)^2+4(x+y+z-1)^2+(x+y+z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)=6(x+y+z)^2-2(x+y+z)+38$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)-(x+y+z)-19=0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de }(\mathscr{S})\text{ est }5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)-(x+y+z)-19=0.}$$

La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont 8, valeur propre d'ordre 2 associée au plan d'équation $x+y+z=0$ et -1 valeur propre d'ordre 1 associé à la droite d'équation. Dans le repère $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ où $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ et $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 8x'^2+8y'^2-z'^2-\sqrt{3}z'-19=0\Leftrightarrow 8\left(x'-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 8y'^2-z'^2=19+\frac{3}{32}.$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à une nappe.

Correction de l'exercice 5146 ▲

(a) On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{O\}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ O+\lambda\overrightarrow{OM}\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} \lambda x=t \\ \lambda y=t^2 \\ \lambda z=t^3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} t=\lambda x \\ y=\lambda x^2 \\ z=\lambda^2x^3 \end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq 0\text{ et }y\neq 0\text{ et }z=\left(\frac{y}{x^2}\right)^2x^3$$

$$\Leftrightarrow x\neq 0\text{ et }y\neq 0\text{ et }z=y^2x.$$

Si on récupère le point O, $M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow(x=y=0\text{ ou }xy\neq 0)\text{ et }z=y^2x$.

On peut noter que la surface d'équation $z=y^2x$ est la réunion du cône, sommet O compris, et des axes (Ox) et (Oy) qui ne font pas partie du cône (à l'exception du point O).

(b) On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{S\}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ S+\lambda\overrightarrow{SM}\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ (1+\lambda(x-1),-1+\lambda(y+1),\lambda z)\in(\mathscr{C})$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} -1+\lambda(y+1)+\lambda z=1 \\ (1+\lambda(x-1))^2+(-1+\lambda(y+1))^2=\lambda z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{y+z+1}(x-1)\right)^2+\left(-1+\frac{2}{y+z+1}(y+1)\right)^2=\frac{2}{y+z+1}z$$

$$\Leftrightarrow(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z\text{ et }y+z+1\neq 0.$$

En résumé, $M(x,y,z)$ est dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $M=S$ ou $M\neq S$ et $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ et $y+z+1\neq 0$.

Maintenant le point $S(1,-1,0)$ est dans le plan (P) d'équation $y+z+1=0$ et la courbe $(\mathscr{C})$ n'a aucun point dans ce plan. Donc la surface $(\mathscr{S})$ contient un et un seul point de ce plan.

Notons alors $(\mathscr{S}')$ la surface d'équation $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ et vérifions que l'intersection de $(\mathscr{S}')$ et de (P) est $\{S\}$. Ceci montrera que $(\mathscr{S}')=(\mathscr{S})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z+1=0\\(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z+1=0\\2x+y+z-1=0\\y-z+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-1\\z=0\\x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow M=S$$

Finalement $(\mathscr{S}')=(\mathscr{S})$. Une équation de $(\mathscr{S})$ est donc $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ ou encore $4x^2+2y^2+4xy+4xz-2yz-4x+2y-6z+2=0$. $(\mathscr{S})$ est donc un cône du second degré.

Correction de l'exercice 5147 ▲

Notons (C) le cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$.

(a) Ici $(\mathscr{S})$ est la sphère de centre O et de rayon 3 et le point S est extérieur à cette sphère. Donc

$$M(x,y,z)\in(C)\Leftrightarrow M=S\text{ ou }M\neq S\text{ et }d(O,(SM))=3\Leftrightarrow M=S\text{ ou }M\neq S\text{ et }\|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\|=3\|\overrightarrow{SM}\|$$
$$\Leftrightarrow\|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\|=3\|\overrightarrow{SM}\|\Leftrightarrow\|(0,5,0)\wedge(x,y-5,z)\|=3\|(x,y-5,z)\|$$
$$\Leftrightarrow(5z)^2+(5x)^2=9(x^2+(y-5)^2+z^2)\Leftrightarrow16x^2-9(y-5)^2+16z^2=0.$$

(b) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $(\mathscr{S})$ (c'est-à-dire tel que $x_0^2+x_0y_0+z_0-1=0$). $(\mathscr{S})$ est une surface du second degré. Une équation du plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M_0 est fournie par la règle de dédoublement des termes :

$$xx_0+\tfrac{1}{2}(y_0x+x_0y)+\tfrac{1}{2}(z+z_0)-1=0.$$

Ce plan tangent contient le point $S(0,0,0)$ si et seulement si $z_0=2$ ce qui montre déjà que la courbe de contact admet pour système d'équations $\left\{\begin{array}{l}x^2+xy+z-1=0\\z=2\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}x^2+xy+1=0\\z=2\end{array}\right.$. C'est une hyperbole du plan d'équation $z=2$.

Le cône de sommet S circonscrit à $(\mathscr{S})$ est alors le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l}x^2+xy+1=0\\z=2\end{array}\right.$.

On trouve la surface d'équation $4x^2+4xy+z^2=0$. C'est un cône du second degré.

Correction de l'exercice 5148 ▲

Une équation de $(\mathscr{S})$ est encore $xy+yz+zx-\lambda x-\lambda y-\lambda z+\lambda=0$.

La matrice de la forme quadratique $Q\ :\ (x,y,z)\mapsto xy+yz+zx$ dans la base (i,j,k) est $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ est les valeurs propres de cette matrice sont $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et 1. Le rang de Q est 3 et sa signature est $(1,2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est à priori soit un hyperboloïde, soit un cône du second degré. Donc $(\mathscr{S})$ est un cône du second degré si et seulement si son (unique) centre de symétrie qui est aussi l'unique point critique de la fonction $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda$ appartient à $(\mathscr{S})$.

Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z=\lambda\\z+x=\lambda\\x+y=\lambda\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}.$$

On note alors Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.

$(\mathscr{S})$ est un cône $\Leftrightarrow\Omega\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow\frac{3\lambda^2}{4}-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\in\{0,\frac{4}{3}\}$.

• Si $\lambda=0$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy+yz+zx=0$. Dans le repère (O,X,Y,Z) où $X=/dfrac1\sqrt{2}(x-y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}Z^2=0$ ou encore $(\mathscr{S})$ est le cône de révolution de sommet O et de section droite le cercle d'équations $\left\{\begin{array}{l}Z=1\\X^2+Y^2+Z^2=3\end{array}\right.$ dans (O,X,Y,Z) ou encore $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=\sqrt{3}\\x^2+y^2+z^2=3\end{array}\right.$ dans (O,x,y,z).

Puisque $(\mathscr{S})$ est un cône de révolution de sommet O et d'axe la droite d'équations $x=y=z$, il est plus interessant de fournir le demi angle au sommet θ. Le point $A(1,1,1)$ est sur l'axe et le point $M(2,2-1)$ est sur le cône. Donc $\theta=\text{Arccos}\left(\frac{|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}|}{OA\times OM}\right)=\text{Arccos}\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right)=\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

• Si $\lambda = \frac{4}{3}$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy + yz + zx - \frac{4}{3}(x+y+z) + \frac{4}{3} = 0$ dans (O, i, j, k) ou encore $XY + XZ + YZ = 0$ dans (Ω, i, j, k) ce qui ramène au cas précédent.

Correction de l'exercice 5149 ▲

Pour tout réel t, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \frac{1}{4}e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2) = \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(z(t))^2$ et le support de l'arc considéré est contenu dans le cône de révolution d'équation $z^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Correction de l'exercice 5150 ▲

(a)

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos t + \lambda \\ y = b\sin t \\ z = a\cos t \sin t + \lambda \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} \lambda = x - a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = a\cos t \sin t + x - a\cos t \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} y = b\sin t \\ z = a\cos t \sin t + x - a\cos t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} y = b\sin t \\ z - x = a\cos t(\sin t - 1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} y = b\sin t \\ b(z-x) = a\cos t(y-b) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow b^4(z-x)^2 + y^2a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2.$$

En effet,
• $\Rightarrow$ / s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = b\sin t$ et $b(z-x) = a\cos t(y-b)$ alors

$$\begin{aligned} b^4(z-x)^2 + y^2a^2(y-b)^2 &= b^2a^2\cos^2 t(y-b)^2 + b^2\sin^2 t a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2b^2(y-b)^2. \end{aligned}$$

• $\Leftarrow$ / Réciproquement, si $b^4(z-x)^2 + y^2a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2$ alors $b^4(z-x)^2 = a^2(y-b)^2(b^2 - y^2)$ et donc
ou bien $y = b$, ou bien $b^2 - y^2 \geqslant 0$. Par suite, il existe un réel t tel que $y = b\sin t = b\sin(\pi - t)$ puis

$$\begin{aligned} b^4(z-x)^2 = a^2(y-b)^2(b^2 - y^2) &\Rightarrow b^4(z-x)^2 = a^2(b\sin t - b)^2b^2\cos^2 t \Rightarrow b(z-x) = \pm a\cos t(b\sin t - b) \\ &\Rightarrow b(z-x) = a\cos t(y-b) \text{ ou } b(z-x) = a\cos(\pi - t)(y-b) \end{aligned}$$

et il existe un réel t' tel que $y = b\sin t'$ et $b(z-x) = a\cos t'(y-b)$.

(b)

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3/ \left\{ \begin{array}{l} x = X \\ y = Y + \lambda \\ z = Z + \lambda \\ Y + Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} (y-\lambda) + (z-\lambda) = 1 \\ x^2 + (y-\lambda)^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y+z-1)\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (y-z+1)^2 = 4.$$

Correction de l'exercice 5151 ▲

La direction du cylindre est orthogonale au plan d'équation $z = x$ et est donc engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1, 0, -1)$.

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3/ \left\{ \begin{array}{l} x = X - \lambda \\ y = Y \\ z = Z + \lambda \\ Z = X \\ 2X^2 + Y^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} z - \lambda = x + \lambda \\ 2(x+\lambda)^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}(z-x)\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+z)^2 + 2y^2 = 2.$$

Correction de l'exercice 5152 ▲

Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A, \overrightarrow{u})$ où $A(2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

$$\begin{aligned}M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D})) = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|^2 = R^2\|\overrightarrow{u}\|^2 &\Leftrightarrow \|(x-2,y-1,z)\wedge(1,1,1)\|^2 = R^2\|(1,1,1)\|^2\\ &\Leftrightarrow (y-z-1)^2+(x-z-2)^2+(x-y-1)^2 = 3R^2\\ &\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz-6x+6z+6-3R^2=0.\end{aligned}$$

La droite (Oz) est tangente à $(\mathscr{C})$ si et seulement si $d((Oz),(\mathscr{D})) = R$.

$$(Oz) \text{ est tangente à } (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \frac{\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{k},\overrightarrow{u}\right]^2}{\left\|\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{u}\right\|^2} = R^2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}^2 = \|(-1,1,0\|^2 \Leftrightarrow 1 = 2R^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 5153 ▲

En un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de l'ellipsoïde la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent : $xx_0+2yy_0+3zz_0 = 21$.

Ce plan est parallèle au plan d'équation $x+4y+6z=0$ si et seulement si le vecteur $(x_0,2y_0,3z_0)$ est colinéaire au vecteur $(1,4,6)$ ou encore si et seulement si $2x_0 = y_0 = z_0$.

Enfin le point $(x_0,2x_0,2x_0)$ est sur l'ellipsoïde si et seulement si $x_0^2+8x_0^2+12x_0^2=21$ ce qui équivaut à $x_0^2=1$.

Les plans cherchés sont les deux plans d'équations respectives $x+4y+6z=21$ et $x+4y+6z=-21$.

Correction de l'exercice 5154 ▲

Le plan tangent (P_0) en (x_0,y_0,z_0) tel que $x_0-8y_0z_0=0$ admet pour équation $(x+x_0)-8(z_0y+y_0z)=0$ ou encore $x-8z_0y-8y_0z+8y_0z_0=0$.

Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(-2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(4,0,-1)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}) \subset (P_0) &\Leftrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (-2+4\lambda)-8z_0+8y_0\lambda+8y_0z_0=0 \Leftrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (8y_0+4)\lambda+8y_0z_0-8z_0-2=0\\ &\Leftrightarrow 8y_0+4=0 \text{ et } 8y_0z_0-8z_0-2=0 \Leftrightarrow y_0=-\frac{1}{2} \text{ et } z_0=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

On trouve un et un seul plan tangent contenant la droite $(\mathscr{D})$, à savoir le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$ d'équation $3x+4y+12z+2=0$.

Correction de l'exercice 5155 ▲

(a) Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(3,3,1)$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D}))=3 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|^2 = 9\|\overrightarrow{u}\|^2\\ &\Leftrightarrow \|(x,y+1,z-2)\wedge(3,3,1)\|^2 = 9\times19 \Leftrightarrow (y-3z+7)^2+(x-3z+6)^2+9(x-y-1)^2=171.\end{aligned}$$

(b) Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(3,3,1)$. De plus, $S=A$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow M=A \text{ ou } M\neq A \text{ et } \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right|}{AM\times\|\overrightarrow{u}\|} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right)^2 = \frac{1}{4}AM^2\|\overrightarrow{u}\|^2\\ &\Leftrightarrow 4(3x+3(y+1)+(z-2))^2 = 19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2)\\ &\Leftrightarrow 4(3x+3y+z+1)^2-19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2)=0\\ &\Leftrightarrow 17x^2+17y^2-15z^2+72xy+24xz+24yz+24x-14y+84z-91=0.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5158 ▲

(a) Parabole. axes = $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. sommet : $X=-\frac{4}{5}$, $Y=-\frac{16}{5}$.

(b) Ellipse. $\Omega = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.

(c) Ellipse. $\Omega = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(d)

(e) Centre $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} & & m & <0 & \Rightarrow & \text{ellipse horizontale.}\\ 0 & < & m & <1/2 & \Rightarrow & \text{hyperbole verticale.}\\ 1/2 & < & m & <1 & \Rightarrow & \text{hyperbole horizontale.}\\ 1 & < & m & & \Rightarrow & \text{ellipse verticale.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 5159 ▲

axes d'angle $-\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} 2\ [\pi/2]$, excentricité = $\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$.

Correction de l'exercice 5160 ▲

$\mathscr{C} : x^2(1-e^2)+y^2+2e^2dx-e^2d^2 = 0$
$T_u, v : x(u(1-e^2)+e^2d)+vy = e^2d(d-u)$
$uv'-u'v = 0 \Rightarrow x = d$.

Correction de l'exercice 5182 ▲

(a)

(b)

(c) $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{2t(t^2-t-1)}{(t-1)^2} \Rightarrow t = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(d) $\det(M', M'') = \frac{3}{2}\sin 4t + 3\sin 2t \Rightarrow t = k\pi$.

Correction de l'exercice 5183 ▲

(a)

(b) $\frac{m'(t)}{m(t)} = \frac{-2(t-1)(t^2+t+1)(t^3-3t-1)}{t(2t^3+1)(t^3+2+3t)}$.

Correction de l'exercice 5188 ▲

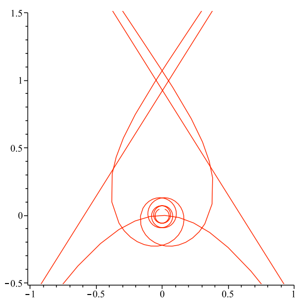
(a)

(b) Repère $(0, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ avec θ constant $\Rightarrow$ point de concours : $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$.

Correction de l'exercice 5189 ▲

Coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{2}\left(4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)$ avec $A = (a, 0)$.

Correction de l'exercice 5190 ▲



La courbe est symétrique par rapport à Oy. $M(\rho,\theta)=M_1(\rho_1,\theta_1)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\theta_1\equiv\theta\ [2\pi]\\ \rho_1=\rho\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l}\theta_1\equiv\theta+\pi\ [2\pi]\\ \rho_1=-\rho.\end{array}\right.$

Dans le premier cas, $\rho=\rho_1\Leftrightarrow\theta\theta_1=-1$ pour $\theta\neq\theta_1$ ce qui donne l'équation en θ :

$$\theta^2+2k\pi\theta+1=0$$

avec $k\in\mathbb{Z}$. Cette équation à k fixé non nul admet deux racines, ce qui donne deux familles de points doubles. De même, le second cas ammène deux autres familles définies par l'équation :

$$\theta^2+(2k+1)\pi\theta+1=0.$$

Correction de l'exercice 5191 ▲

(les grands classiques)

(a) **L'astroïde.**

i. **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi)=M(t)$. Par suite, la courbe complète est obtenue quand t décrit un segment de longueur

2π comme par exemple $[-\pi,\pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t)=\left(\begin{array}{c}\cos^3(-t)\\ \sin^3(-t)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\cos^3 t\\ -\sin^3 t\end{array}\right)=s_{(Ox)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t\in[0,\pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

• Pour tout réel t,

$$M(t+\pi)=\left(\begin{array}{c}\cos^3(t+\pi)\\ \sin^3(t+\pi)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-\cos^3 t\\ -\sin^3 t\end{array}\right)=s_O(M(t)).$$

La portion de courbe obtenue quand t décrit $[-\pi,0]$ est donc aussi la symétrique par rapport à O de la portion de

courbe obtenue quand t décrit $[0,\pi]$. Néanmoins, cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine

d'éude.

• Pour tout réel t,

$$M(\pi-t)=\left(\begin{array}{c}\cos^3(\pi-t)\\ \sin^3(\pi-t)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-\cos^3 t\\ \sin^3 t\end{array}\right)=s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis

par réflexion d'axe (Ox).

• Pour tout réel t,

$$M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\left(\begin{array}{c}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\\ \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\sin^3 t\\ \cos^3 t\end{array}\right)=s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite

d'équation $y=x$, puis d'axe (Oy) et enfin d'axe (Ox).

Variations conjointes de x et y. La fonction $t\mapsto x(t)$ est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et la fonction $t\mapsto y(t)$ est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. **Etude des points singuliers.** Pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)=\left(\begin{array}{c}-3a\cos^2 t\sin t\\ 3a\sin^2 t\cos t\end{array}\right)=3a\cos t\sin t\left(\begin{array}{c}-\cos t\\ \sin t\end{array}\right).$$

Pour tout réel t, le vecteur $\left(\begin{array}{c}-\cos t\\ \sin t\end{array}\right)$ est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 3a\cos t\sin t=0\Leftrightarrow\cos t=0 \text{ ou } \sin t=0\Leftrightarrow t\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

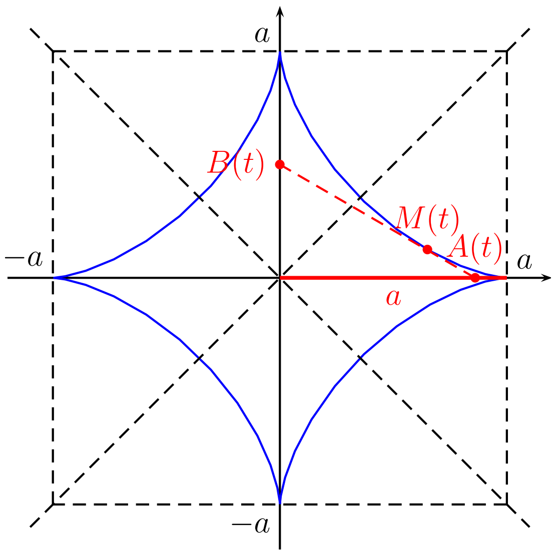
Les points singuliers sont donc les $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $M(t)$ est un point régulier et la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Etudions alors le point singulier $M(0)$. Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{a\sin^3 t}{a\cos^3 t - a} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)}$$
$$= \frac{8\sin^3 \frac{t}{2}\cos^3 \frac{t}{2}}{-2\sin^2 \frac{t}{2}(\cos^2 t + \cos t + 1)} = \frac{-4\sin \frac{t}{2}\cos^3 \frac{t}{2}}{\cos^2 t + \cos t + 1},$$

et donc, $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0$. (Si on connaît déjà les équivalents, c'est plus court : $\frac{\sin^3 t}{(\cos t-1)(\cos^2 t+\cos t+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{t^2}{2}\times 3} = -\frac{2t}{3} \to 0$). La courbe admet en $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $(1,0)$. Par symétrie, la courbe admet également une tangente en $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $M(\pi)$, dirigée respectivement par $(0,1)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Toujours par symétrie, ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que

pour tout réel t, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$.

On en déduit la courbe.



ii. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a vu que la tangente (T_t) en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$. Une équation cartésienne de T_t est donc : $-\sin t(x - a\cos^3 t) - \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$, ou encore

$$x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \ (T_t).$$

On en déduit immédiatement que $A(t)$ a pour coordonnées $(a\cos t, 0)$ et que $B(t)$ a pour coordonnées$(0, b\sin t)$ puis que

$$\boxed{\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[, \ A(t)B(t) = a.}$$

(b) **La cycloïde.**

i. La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = MI$

ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + R\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R\sin t = R(t - \sin t)$$

et

$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + R\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$

ii. **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

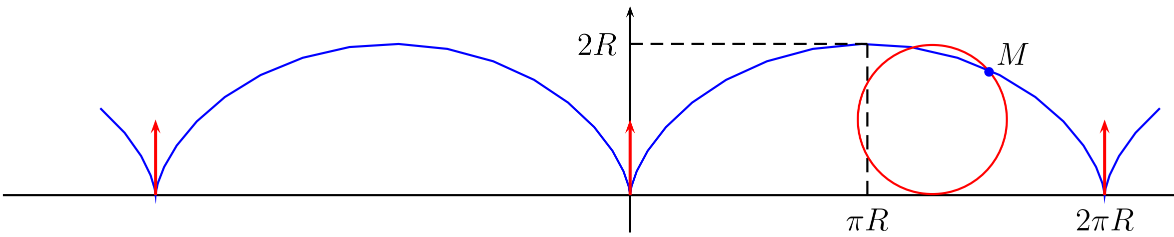
• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t) + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}(2\pi R, 0)$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0, 2\pi]$ et la
courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\overrightarrow{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour tout réel t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0, \pi]$, puis on complète
par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.

Etude des points singuliers. Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1-\cos t) = 2R\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y'(t) = R\sin t = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in]0, \pi]$. Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R\sin^2(t/2) \\ 2R\sin(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Etudions également le point singulier $M(0)$. Pour $t \in]0, \pi]$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{R(1-\cos t)}{R(t-\sin t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = +\infty$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(0,1)$. Ainsi, dans tous les cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0, \pi]$.



(c) **une courbe de** LISSAJOUS **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$ et la courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

• Pour tout réel t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi - 2t) \\ \sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

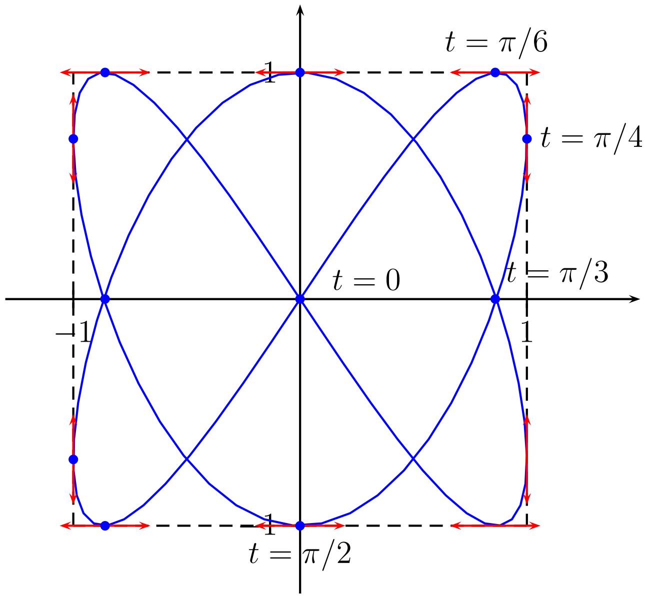
On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis
par symétrie centrale de centre O.

• On note aussi que $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, mais cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine
d'étude.

Variations conjointes de x **et** y**.** Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ et $y'(t) = 3\cos(3t)$. On en déduit immédiatement le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0			$-$	

puis on en déduit la courbe.



Points multiples. D'abord, tout point de l'arc est multiple, puisque la courbe est parcourue une infinité de fois. Il y a essentiellement deux « vrais points » multiples à déterminer, les autres s'en déduisent par symétrie. L'un des deux est le point de (Ox) d'abscisse strictement positive obtenu pour un certain réel t de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Soit $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$$y(t)=0\Leftrightarrow\sin(3t)=0\Leftrightarrow 3t\in\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow t\in\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}.$$

Le point de la courbe qui est sur (Ox) et qui a une abscisse strictement positive est le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.
Sinon, on cherche $t_1\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ et $t_2\in\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $M(t_1)=M(t_2)$.

$$\begin{aligned}M(t_1)=M(t_2)&\Rightarrow x(t_1)=x(t_2)\Leftrightarrow t_2\in t_1+\pi\mathbb{Z}\text{ ou }t_2\in\frac{\pi}{2}-t_1+\pi\mathbb{Z}\Rightarrow t_2\in\frac{\pi}{2}-t_1+\pi\mathbb{Z}\\&\Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}-t_1-\pi\Rightarrow t_2=-\frac{\pi}{2}-t_1.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $t_2=-\frac{\pi}{2}-t_1$, alors $x(t_1)=x(t_2)$ et donc,

$$\begin{aligned}M(t_1)=M(t_2)&\Leftrightarrow y\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)=y(t_1)\Leftrightarrow\sin\left(3\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)\right)=\sin(3t_1)\\&\Leftrightarrow 3t_1\in-\frac{3\pi}{2}-3t_1+2\pi\mathbb{Z}\text{ ou }3t_1\in\pi+\frac{3\pi}{2}+3t_1+2\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 6t_1\in-\frac{3\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow t_1\in-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\Leftrightarrow t_1=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Le point $M\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le point multiple d'abscisse et d'ordonnée strictement positives.

(d) **La lemniscate de** BERNOULLI **Domaine d'étude.**
• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.
• Pour tout réel t, $M(-t)=s_O(M(t))$. On étudie et construit la courbe quand t décrit $\mathbb{R}^+$ et on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.
• Pour $t>0$,

$$M\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}},\frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^4}}\right)=\left(\frac{t^3}{1+t^4},\frac{t}{1+t^4}\right)=s_{y=x}(M(t)).$$

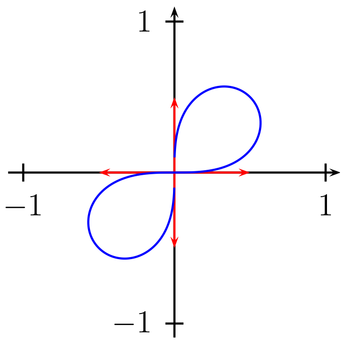
On étudie et construit la courbe quand t décrit $[0,1]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite d'équation $y=x$ puis par symétrie centrale de centre O. **Variations conjointes de** x **et** y**.** Les fonctions x et y sont dérivables sur $[0,1]$ et pour $t\in[0,1]$,

$$x'(t)=\frac{(1+t^4)-t(4t^3)}{(1+t^4)^2}=\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}\text{ et }y'(t)=\frac{3t^2(1+t^4)-t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2}=\frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On en déduit immédiatement le tableau :

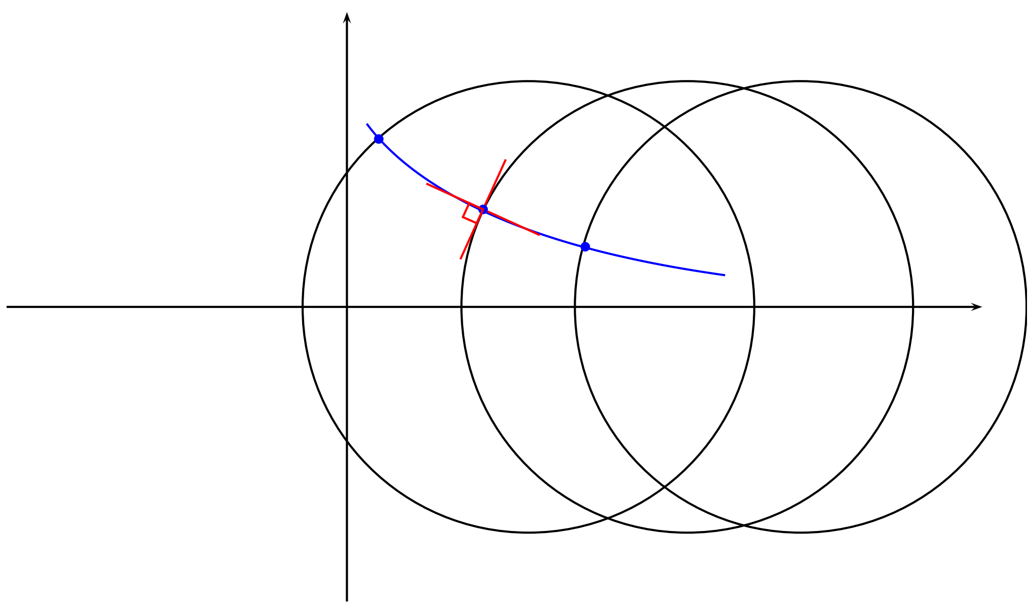
t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	-	
x	0	$\nearrow$	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0		$\nearrow$		$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0		$+$		

La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(1,0)$. Par symétrie, la tangente en « $M(+\infty)$ » est dirigée par le vecteur $(0,1)$.



(e) **Les tractrices**

i. Cherchons les arcs solutions sous la forme $\left\{\begin{array}{l} x = f(t)+R\cos t \\ y = R\sin t \end{array}\right.$ où f est une foncton dérivable sur un certain intervalle I (de sorte que le point $M(t)$ est sur le cercle $\mathscr{C}(t)$ de centre $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon R). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle $\mathscr{C}(t)$ si et seulement si la tangente à cette trajectoire en $M(t)$ est orthogonale à la tangente au cercle $\mathscr{C}(t)$ en $M(t)$ ou encore « si et seulement si » les vecteurs $(f'(t)-R\sin t, R\cos t)$ et $(-\sin t, \cos t)$ sont orthogonaux. Cette dernière condition s'écrit $-f'(t)\sin t + R(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$ ou encore $f'(t) = \frac{R}{\sin t}$ ou enfin, $f(t) = R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$. Les arcs solutions sont les arcs de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + C \\ R\sin t \end{pmatrix}$, où $C \in \mathbb{R}$.



Les courbes solutions se déduisent de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+\cos t\right) \\ R\sin t \end{pmatrix}$ par translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{i}$. On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

ii. **Domaine d'étude.** La fonction $t \mapsto M(t)$ est 2π-périodique et on l'étudie donc sur $[-\pi,\pi]$. Pour $t \in [-\pi,\pi]$, $M(t)$ existe si et seulement si $t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$. Pour $t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ puis

$$M(\pi-t) = \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\right|+\cos(\pi-t)\right) \\ R\sin(\pi-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\left(-\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|-\cos t\right) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe quand t décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox). **Dérivée. Etude des points singuliers.** Pour $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right) \\ R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ R\cos t \end{pmatrix} = R\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point singulier. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $y(t)-y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\sin t-1) = -R\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right) \sim -\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2$. D'autre part, posons $h = \frac{\pi}{2}-t$ ou encore $t = \frac{\pi}{2}-h$. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R\frac{\cos^2 t}{\sin t} = R\frac{\sin^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

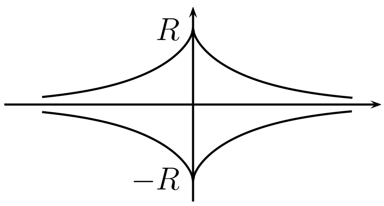
et donc par intégration,

$$x(t)-x(\frac{\pi}{2}) = \frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right) \sim \frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Comme d'autre part, $y(t)-y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R(1-\sin t) = -R(1-\cos h) \sim -\frac{R}{2}h^2 = -\frac{R}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2$, on en déduit que

$$\frac{y(t)-y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t)-x\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{R}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)},$$

et donc $\lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2} \\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{y(t)-y(\frac{\pi}{2})}{x(t)-x(\frac{\pi}{2})} = +\infty$. Par symétrie d'axe (Oy), la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x' et y' sont strictement positives sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que x et y sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe. D'autre part, x croit de $-\infty$ à 0 pendant que y croit de 0 à 1. **Courbe.**



Correction de l'exercice 5192 ▲

(a) **Domaine d'étude.** $M(t)$ existe si et seulement si $t \notin \{-1,1\}$. Sinon, il n'y a pas de symétrie particulière (la fonction y est effectivement paire, mais x n'est ni paire ni impaire).
Dérivée. Pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$x'(t) = x(t)(3\ln|t|-2\ln|t+1|-\ln|t-1|)' = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\left(\frac{3}{t}-\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)$$
$$= \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\frac{3(t^2-1)-2(t^2-t)-(t^2+t)}{t(t+1)(t-1)} = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2},$$

et

$$y'(t) = \frac{2t(t^2-1)-2t(t^2)}{(t^2-1)^2} = \frac{-2t}{(t^2-1)^2},$$

ce qui reste vrai par continuité de x et y en 0.

Etude des points singuliers. Pour $t \in]-1,1[$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$. $M(0) = (0,0)$ est l'unique point singulier. Pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{t^2}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{t^3} = \frac{t+1}{t}.$$

Par suite, $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et vers $-\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs inférieures. La tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{j}$ et d'autre part, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Etude quand t tend vers $\pm\infty$. Quand t tend vers $\pm\infty$, $M(t)$ tend vers le point $(1,1)$. On prolonge la courbe en posant $M(\infty) = 1,1)$. On a alors

$$\frac{y(t)-y(\infty)}{x(t)-x(\infty)} = \left(\frac{t^2}{t^2-1}-1\right)\left(\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}-1\right)^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{-t^2+t+1} = \frac{t+1}{-t^2+t+1} \sim -\frac{1}{t}.$$

Cette expression tend donc vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$ et la tangente en $M(\infty)$ est dirigée par $\vec{i}$.

Etude quand t tend vers 1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim 14(t-1)$ et $y(t) \sim \frac{1}{2(t-1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim 2$. Puis,

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2}{t^2-1} - 2\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{t^2(t+1)-2t^3}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{t^2}{(t+1)^2}.$$

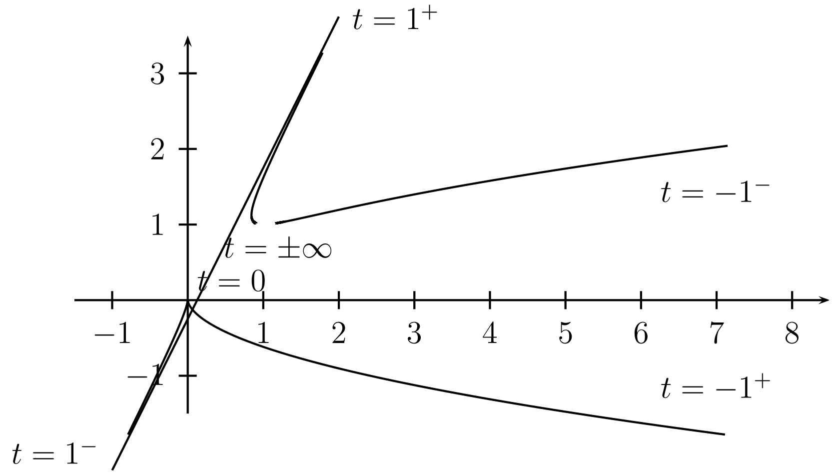
Cette dernière expression tend vers $-\frac{1}{4}$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe.

Etude quand t tend vers -1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim 12(t+1)^2$ et $y(t) \sim \frac{-1}{2(t+1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim -(t+1)$. Par suite, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers -1. La courbe admet une barnche parabolique de direction (Ox).

Variations conjointes de x et y. On rappelle que pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $x'(t) = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}$ et $y'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$. On en déduit le tableau suivant :

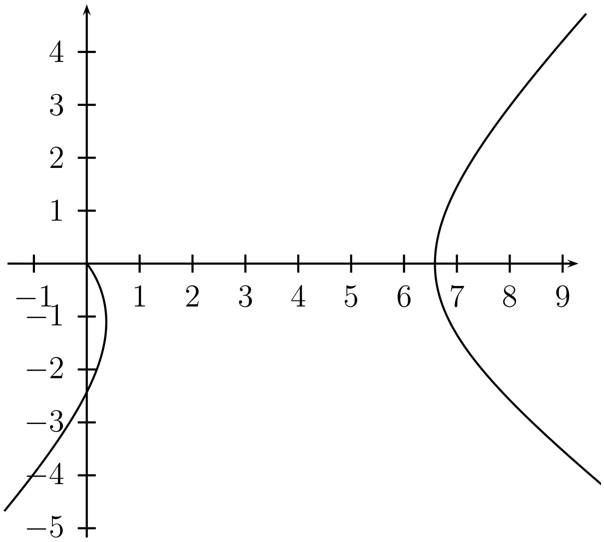
t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{32}$	$\nearrow$	1
y	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1
$y'(t)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$		$-$		

On peut noter que la tangente en $M(3)$ est dirigée par le vecteur $\vec{j}$. Voir graphique page suivante.

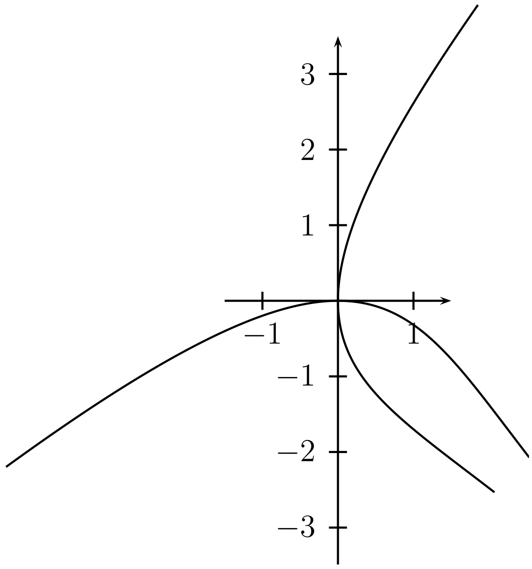


Dans la suite de cet exercice, je ne détaillerai que très peu ou pas du tout l'étude de la courbe.

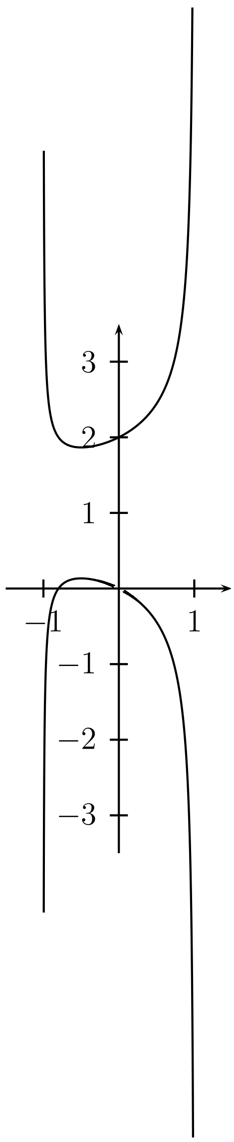
(b)



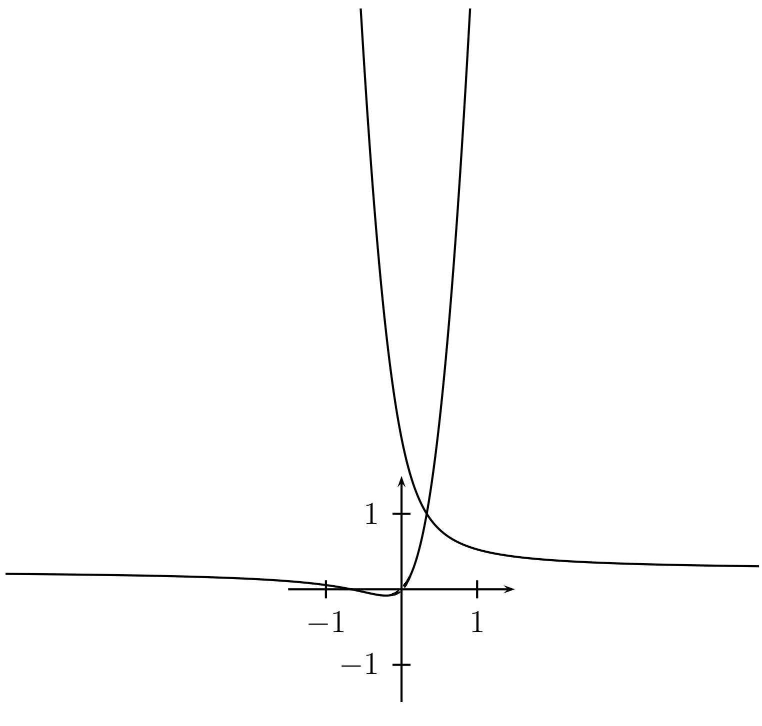
(c)



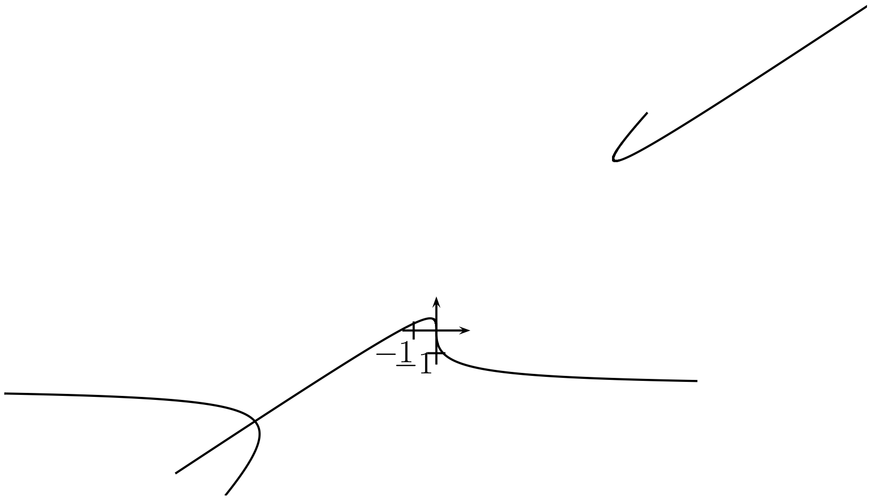
(d) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$



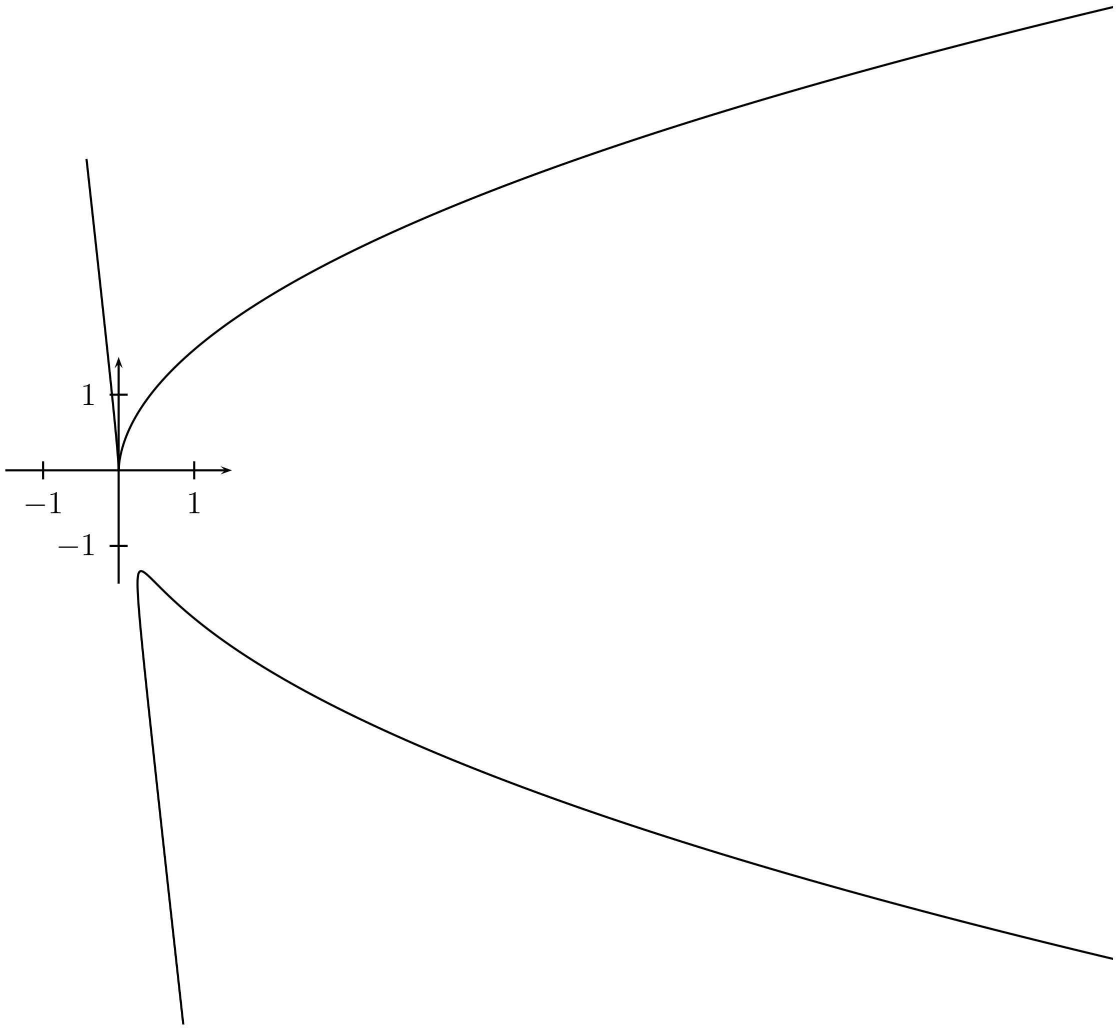
(e)



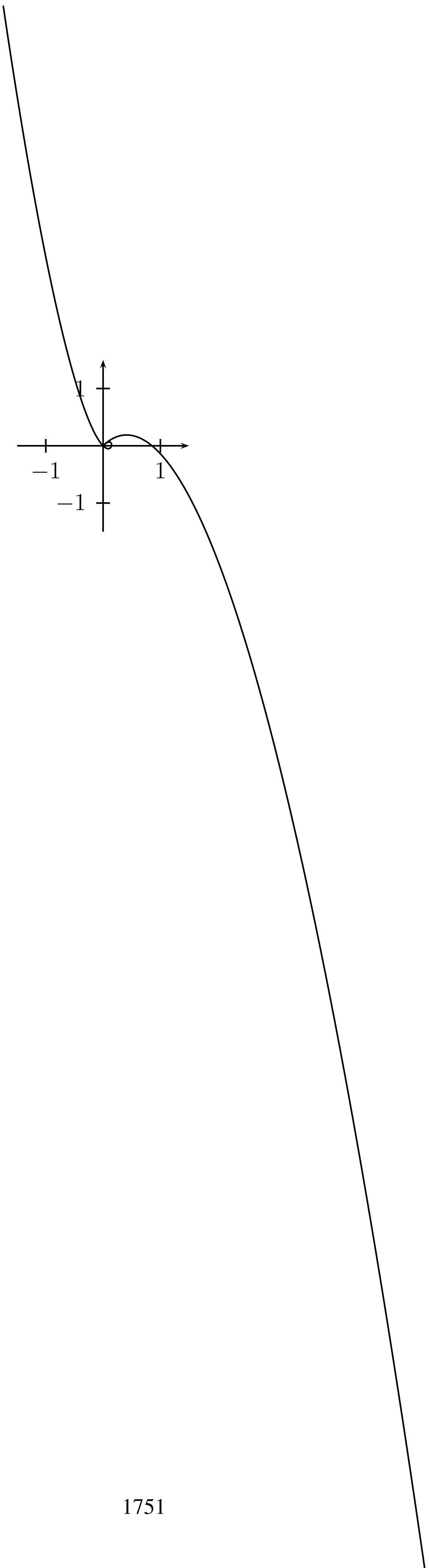
(f) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$



(g) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$



(h) $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$



1
−1
1
−1

Correction de l'exercice 5193 ▲

(a) On a vu dans l'exercice 5191, que la tangente (T_t) en $M(t)$ est toujours dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (-\cos t, \sin t)$. Une équation de la tangente en $M(t)$ est donc $\sin t(x - a\cos^3 t) + \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$ ou encore

$$x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t\ (T_t).$$

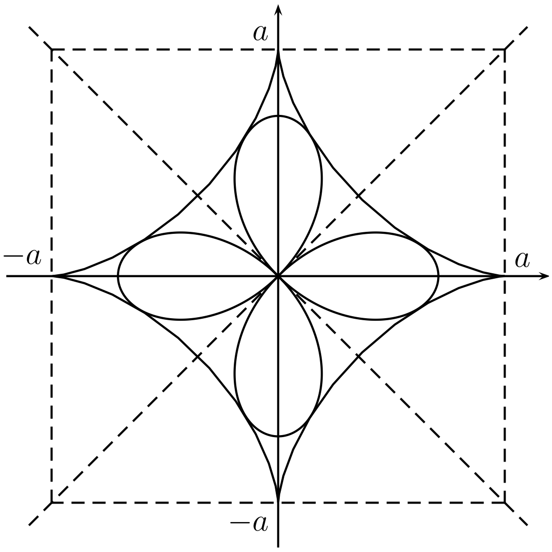
Soit $(t,u) \in [-\pi,\pi]^2$.

$$(T_t)\perp(T_u) \Leftrightarrow \vec{u}(t)|\vec{u}(u) = 0 \Leftrightarrow \cos t\cos u + \sin t\sin u = 0 \Leftrightarrow \cos(t-u) = 0 \Leftrightarrow u \in t + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Il est alors clair que l'orthoptique est l'ensemble des points d'intersection des tangente (T_t) et $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

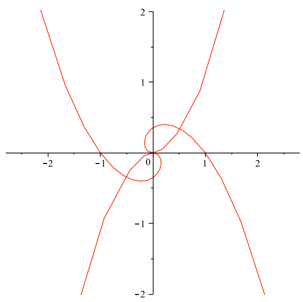
$$M(x,y)\ (T_t)\cap(T_{t+\frac{\pi}{2}}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \\ x\cos t - y\sin t = -a\sin t\cos t \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x = -\begin{vmatrix} a\sin t\cos t & \cos t \\ -a\sin t\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \text{ et } y = -\begin{vmatrix} \sin t & a\sin t\cos t \\ \cos t & -a\sin t\cos t \end{vmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = a\sin t\cos t(-\cos t + \sin t) \text{ et } y = a\sin t\cos t(\cos t + \sin t)$$

L'orthoptique cherchée est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} a\sin t\cos t(-\cos t + \sin t) \\ a\sin t\cos t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$.

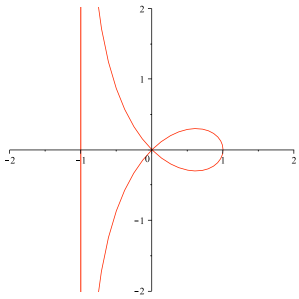


Correction de l'exercice 5208 ▲

(a)

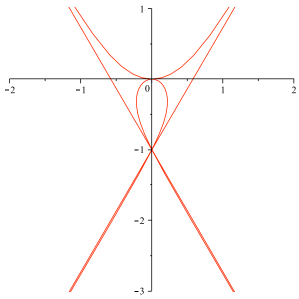


(b)



aire de la boucle : $2-\dfrac{\pi}{2}$

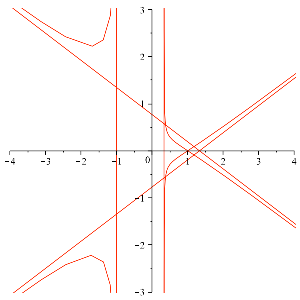
(c)



asymptotes : $y=\pm x\sqrt{3}-1$

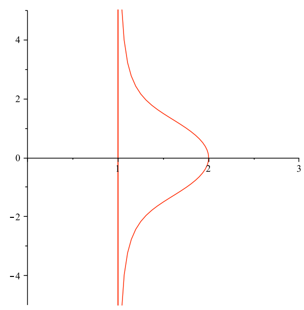
la courbe traverse ses asymptotes au point de concours

(d)

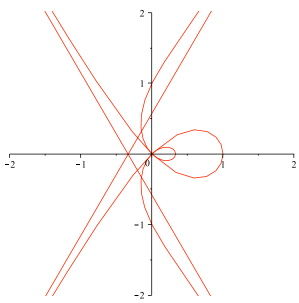


asymptotes : $x\pm y\sqrt{3}=\dfrac{4}{3}$

(e)

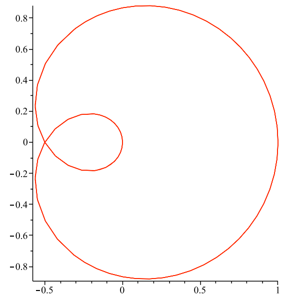


(f)

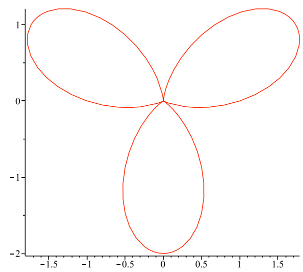


asymptotes : $3x \pm y\sqrt{3} = -1$

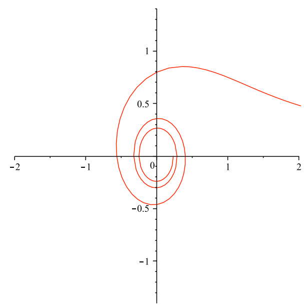
(g)



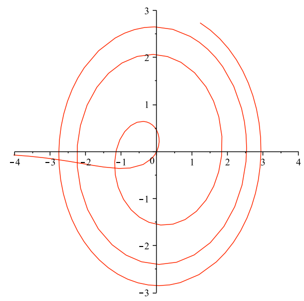
(h)



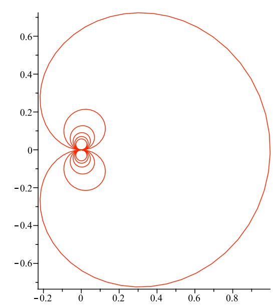
(i)



(j)



(k)



Correction de l'exercice 5209 ▲

Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.

Tout d'abord, pour tout réel θ, $1+\sin(2\theta)\geq 0$, $1-\sin(2\theta)\geq 0$ puis $\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}>0$, car $\sin(2\theta)$ ne peut valoir simultanément 1 et -1. La fonction $r\mapsto r(\theta)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, clairement 2π-périodique.

Ainsi,

$$M(\theta+2\pi)=[r(\theta+2\pi),\theta+2\pi]=[r(\theta),\theta+2\pi]=M(\theta).$$

On obtient donc l'ensemble complet quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$ par exemple.

La fonction $r\mapsto r(\theta)$ est plus paire. Par suite,

$$M(-\theta)=[r(-\theta),-\theta]=[r(\theta),-\theta]=s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta\in[0,\pi]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Pour $\theta\in[0,\pi]$, on a clairement $r(\pi-\theta)=r(\theta)$. Par suite,

$$M(\pi-\theta)=[r(\pi-\theta),\pi-\theta]=[r(\theta),\pi-\theta]=s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a clairement $r(\frac{\pi}{2}-\theta)=r(\theta)$. Par suite, en notant (Δ) la droite d'équation $y=x$,

$$M(\frac{\pi}{2}-\theta)=[r(\frac{\pi}{2}-\theta),\frac{\pi}{2}-\theta]=[r(\theta),\frac{\pi}{2}-\theta]=s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Δ) puis par symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

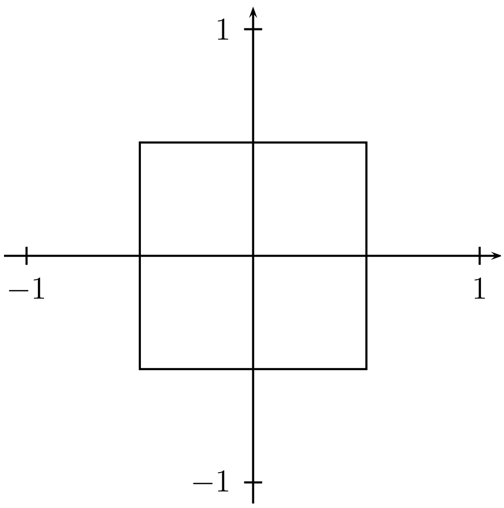
Maintenant, pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}}&=\frac{1}{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}+\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}\\&=\frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\theta))}=\frac{1}{2\cos\theta}.\end{aligned}$$

En notant x et y les coordonnées d'un point M, on a alors

$$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow r=\frac{1}{2\cos\theta}\Leftrightarrow r\cos(\theta)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

D'où le graphique :



Correction de l'exercice 5210 ▲

(a) (**Lemniscate de** BERNOULLI.) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r=\sqrt{\cos(2\theta)}$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta\mapsto\sqrt{\cos(2\theta)}$. • $\theta\in D\Leftrightarrow\theta+2\pi\in D$ et pour $\theta\in D$,

$$M(\theta+2\pi)=[r(\theta+2\pi),\theta+2\pi]=[r(\theta),\theta+2\pi]=[r(\theta),\theta]=M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$. • $\theta\in D\Leftrightarrow -\theta\in D$ et pour $\theta\in D$,

$$M(-\theta)=[r(-\theta),-\theta]=[r(\theta),-\theta]=s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

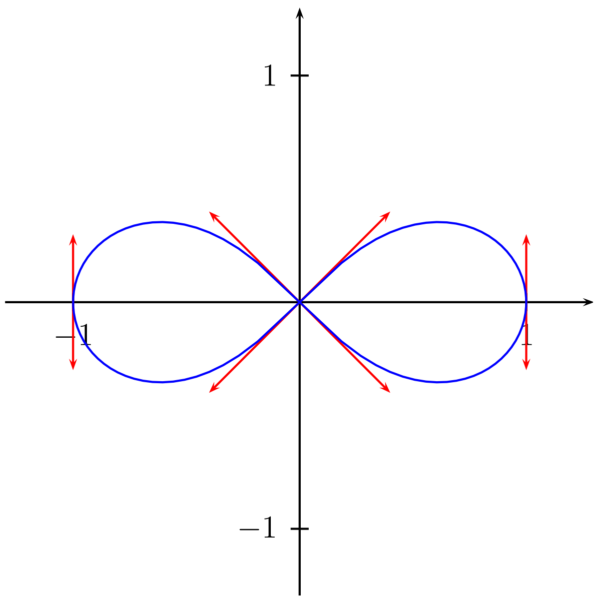
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in[0,\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). • $\theta\in D\Leftrightarrow\pi-\theta\in D$ et pour $\theta\in D$,

$$M(\pi-\theta)=[r(\pi-\theta),\pi-\theta]=[r(\theta),\pi-\theta]=s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis d'axe (Ox). Pour $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in D\Leftrightarrow\cos(2\theta)\geqslant 0\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. On étudie donc la courbe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{4}$. **Etude en $\frac{\pi}{4}$.** $M\left(\frac{\pi}{4}\right)=O$ et donc la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ ou encore la droite d'équation $y=x$.
Etude en 0. $M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1,0)$. Pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)=-\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\overrightarrow{u}_\theta+\sqrt{\cos(2\theta)}\overrightarrow{v}_\theta \text{ et donc } \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(0)=\overrightarrow{v}_0=\overrightarrow{j}.$$

$M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1,0)$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$



(b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r=\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. **Domaine d'étude.** • Pour $\theta\in\mathbb{R}$,

$$M(\theta+6\pi)=[r(\theta+6\pi),\theta+6\pi]=[r(\theta),\theta+6\pi]=[r(\theta),\theta]=M(\theta).$$

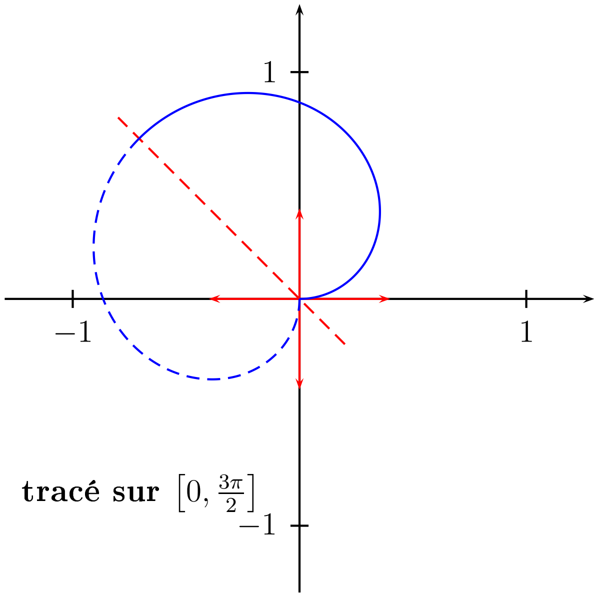
On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi,3\pi]$. • Pour $\theta\in[-3\pi,3\pi]$,

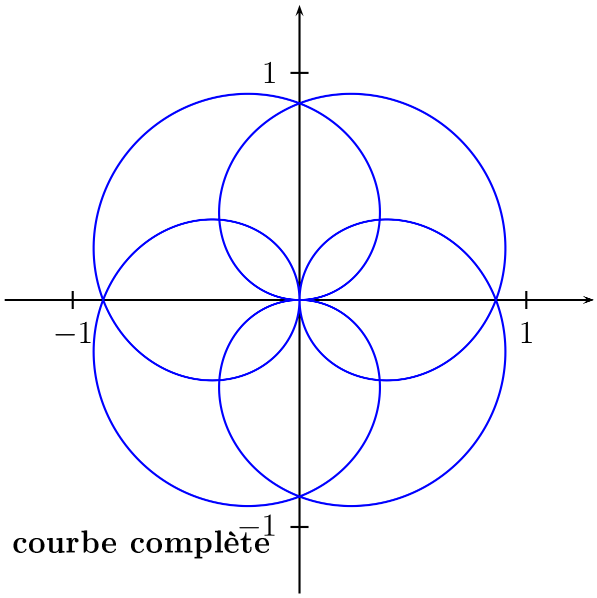
$$M(-\theta)=[r(-\theta),-\theta]=[-r(\theta),-\theta]=[r(\theta),\pi-\theta]=s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in[0,3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy). • Pour $\theta\in[0,3\pi]$, $M(3\pi-\theta)=[r(3\pi-\theta),3\pi-\theta]=[-r(\theta),3\pi-\theta]=[r(\theta),-\theta]=s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis d'axe (Oy).
• Pour $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\left[r\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right),\frac{3\pi}{2}-\theta\right]=\left[r(\theta),\frac{3\pi}{2}-\theta\right]=s_{y=-x}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axes la droite d'équation $y=-x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy).
• **Remarque.** La fonction r admet 3π pour plus petite période strictement positive. Pourtant, on n'obtient pas la courbe complète quand θ décrit $[0,3\pi]$ car 3π ne fournit pas un nombre entier de tours. Plus précisément,

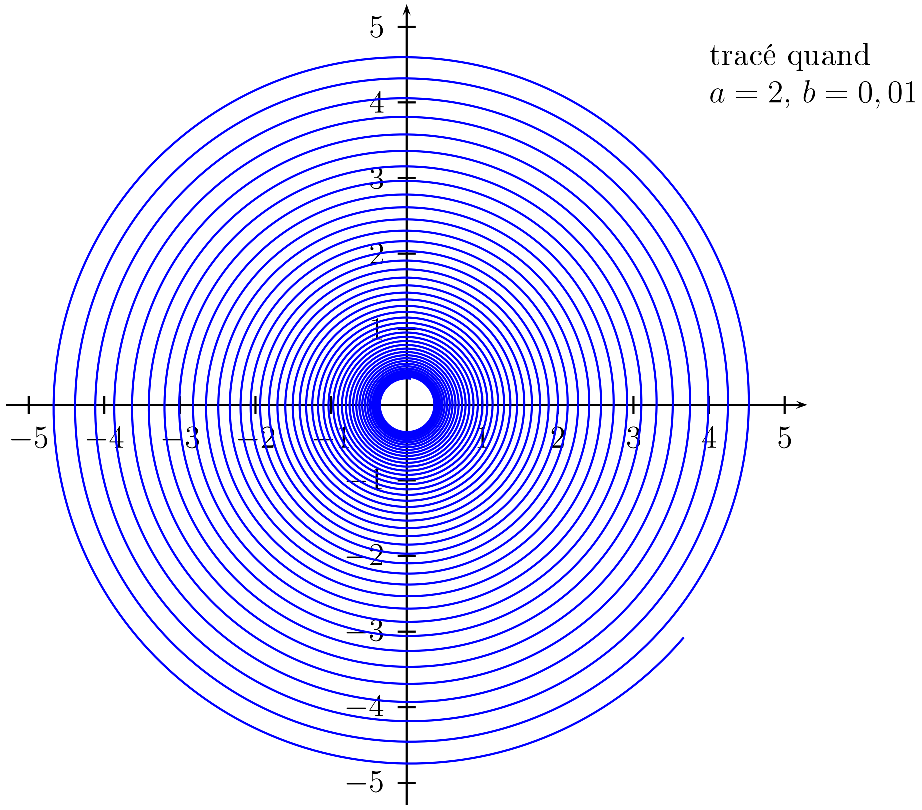
$$M(\theta+3\pi)=[r(\theta+3\pi),\theta+3\pi]=[r(\theta),\theta+\pi]=s_O(M(\theta)).$$

Variations et signe de r. La fonction r est strictement positive sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right]$ et s'annule en 0. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. • $M(0)$ est le point O. La tangente en $M(0)$ est la droite passant par O d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox).



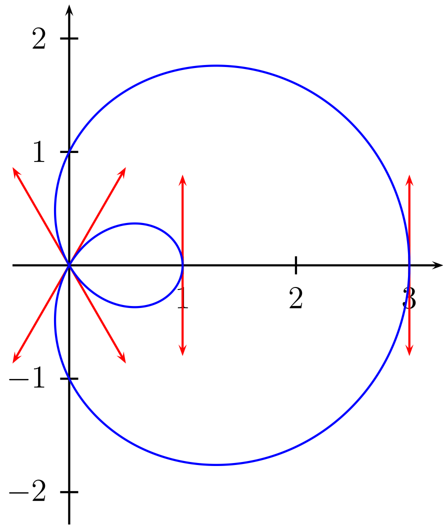


(c) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$. L'étude est très brève. La fonction $r : \theta \mapsto ae^{b\theta}$ est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Tout en tournant, on ne cesse de s'écarter de l'origine : la courbe est une spirale.



(d) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = 2\cos(\theta)+1$.

Domaine d'étude. • Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta+2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$. • Pour $\theta \in [-\pi,\pi]$, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0,\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. La fonction r est strictement positive sur $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{2\pi}{3},0\right]$ et s'annule en $\frac{2\pi}{3}$. Donc la fonction $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$ est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$. • $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est le point O. La tangente en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est la droite passant par O d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\sqrt{3}x$. • Par symétrie par rapport à (Ox), les tangentes en $M(0)$ et $M(\pi)$ sont parrallèles à (Oy).



(e) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta+6\pi \in D$ et $M(\theta+6\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi,3\pi]$. • $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et $M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0,3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy). • $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi-\theta \in D$ et $M(3\pi-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy). • $\theta \in D \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}-\theta \in D$ et

$$M\left(\tfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=\left[-r(\theta),\tfrac{3\pi}{2}-\theta\right]=\left[r(\theta),\tfrac{\pi}{2}-\theta\right]=s_{y=x}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe la droite d'équation $y=x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy). • Pour $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, $r(\theta)$ existe si et seulement si $\theta\neq\frac{3\pi}{4}$. On étudie donc sur $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right[$.

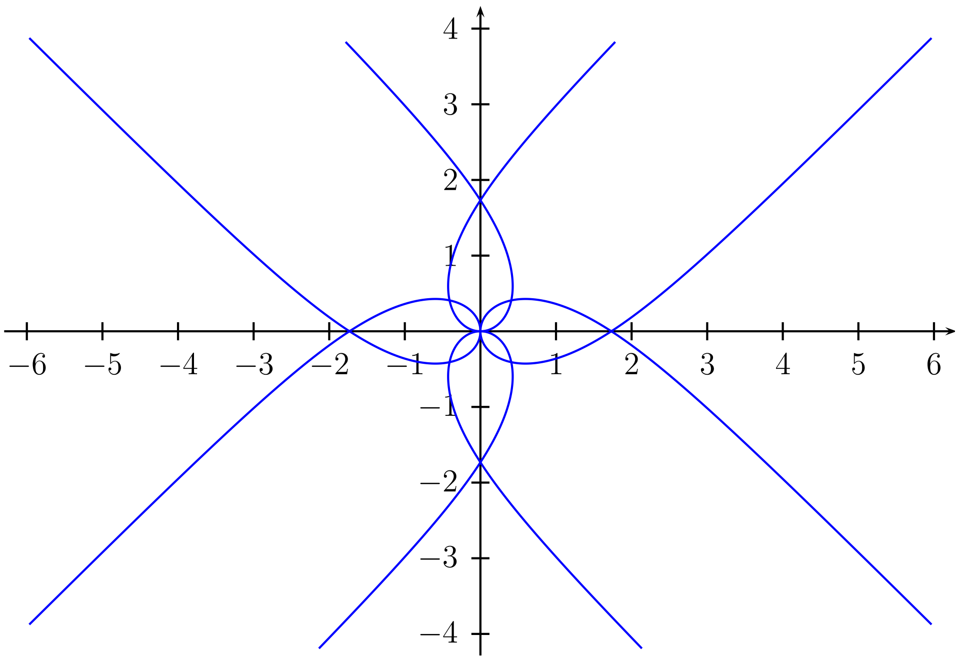
Variations et signe de r. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right[$, strictement positive sur $\left]0,\frac{3\pi}{4}\right[$ et s'annule en 0.

• La tangente en $M(0)=O$ est la droite passant par O et d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox). • **Etude quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$.** Quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$ par valeurs inférieures, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$. la courbe admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\frac{3\pi}{4}$ ou encore d'équation $y=-x$. Recherchons une éventuelle droite asymptote. Pour cela, étudions $\lim\limits_{\substack{\theta\to\frac{3\pi}{4}\\ \theta<\frac{3\pi}{4}}} r(\theta)\sin\left(\theta-\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Posons $h=\frac{3\pi}{4}-\theta$ ou encore $\theta=\frac{3\pi}{4}-h$.

$$r(\theta)\sin\left(\theta-\tfrac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{2h}{3}\right)\sin(-h)=-\operatorname{cotan}h\sin h=-\cos h\to -1.$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D) quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$. De plus,

$$M(x,y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{\frac{3\pi}{4}}=-1\Leftrightarrow-\tfrac{1}{\sqrt{2}}x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}y=-1\Leftrightarrow y=-x+\sqrt{2}.$$



Correction de **l'exercice 5211 ▲**

Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta\mapsto\frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$. $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\theta\in D\Leftrightarrow\theta+2\pi\in D$ et $M(\theta+2\pi)=M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$. Pour $\theta\in[-\pi,\pi]$, $2\sin\theta+1=0\Leftrightarrow\theta\in\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$. On étudie donc la courbe sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$. **Signe de r.**

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos\theta+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2\sin\theta+1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de r		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Variations de r. La fonction r est dérivable sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$ et pour $\theta\in[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$

$$r'(\theta)=\frac{-2\sin\theta(2\sin\theta+1)-2\cos\theta(2\cos\theta+1)}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\cos\theta-2\sin\theta}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta+1)^2}<0.$$

La fonction r est strictement décroissante sur $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right[$, sur $\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]-\frac{\pi}{6},\pi\right]$. **Etude quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$.** $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x<-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x>-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\frac{5\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Etudions maintenant l'existence d'une éventuelle droite asymptote et pour cela étudions $\lim_{\theta\to-\frac{5\pi}{6}} r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$. On pose $h=\theta+\frac{5\pi}{6}$ ou encore $\theta=-\frac{5\pi}{6}+h$ de sorte que θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si h tend vers 0. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1-\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{-\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}h}\times h=1-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_1) quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{5\pi}{6}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Etude quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x<-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\frac{\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$. On pose ensuite $h=\theta+\frac{\pi}{6}$. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1+\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}h}\times h=1+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_2) quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{\pi}{6}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tableau de variation de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$r'(\theta)$		$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		
r	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

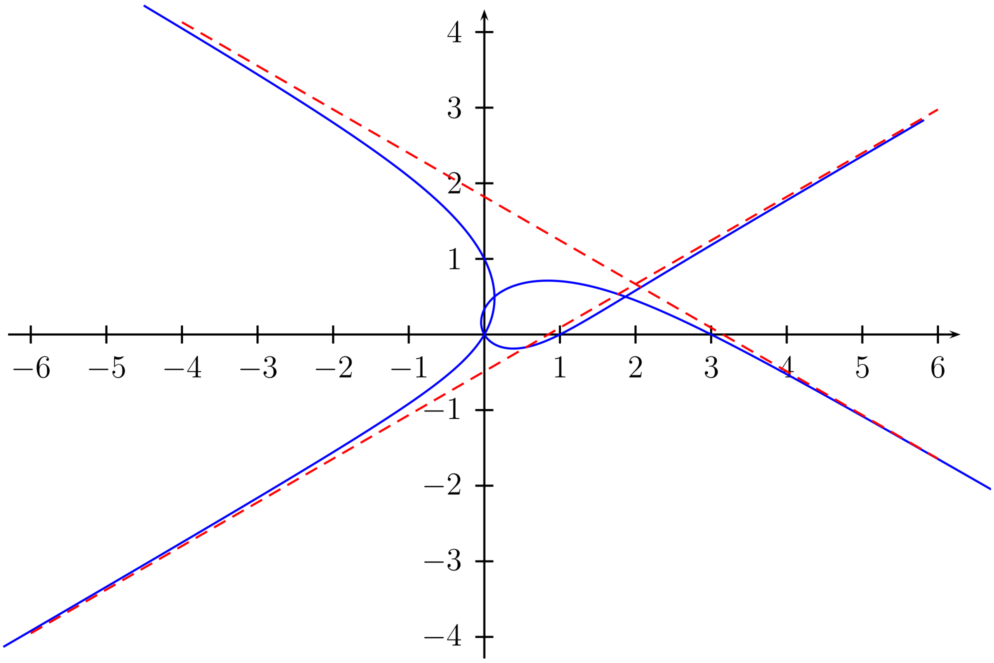
Recherche des points multiples. Soit $(\theta_1,\theta_2)\in\left([-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}\right)^2$ tel que $\theta_1<\theta_2$. On suppose de plus que $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ et $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ de sorte que $M(\theta_1)\neq O$ et $M(\theta_2)\neq O$.

$$\begin{aligned}M(\theta_1)=M(\theta_2)&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+2k\pi\text{ et }r(\theta_2)=r(\theta_1))\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+\pi+2k\pi\text{ et }r(\theta_2)=-r(\theta_1))\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\text{ et }r(\theta_2)=-r(\theta_1)\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\text{ et }\frac{-2\cos(\theta_1)+1}{-2\sin(\theta_1)+1}=-\frac{2\cos(\theta_1)+1}{2\sin(\theta_1)+1}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\theta\in[-\pi,0]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right\}$

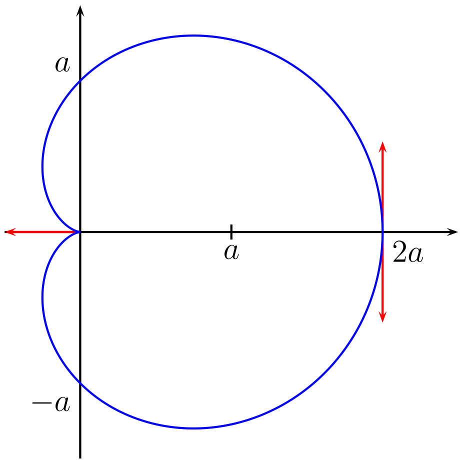
$$\begin{aligned}\frac{-2\cos(\theta)+1}{-2\sin(\theta)+1}=-\frac{2\cos(\theta)+1}{2\sin(\theta)+1}&\Leftrightarrow-4\cos(\theta)\sin(\theta)+1=4\cos(\theta)\sin(\theta)-1\Leftrightarrow\sin(2\theta)=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow 2\theta\in\frac{\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z}\text{ ou }2\theta\in\frac{5\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\in\frac{\pi}{12}+\pi\mathbb{Z}\text{ ou }\theta\in\frac{5\pi}{12}+\pi\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow\theta\in\left\{-\frac{11\pi}{12},-\frac{7\pi}{12}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, les points doubles distincts de l'origine sont $M\left(-\frac{11\pi}{12}\right)=M\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $M\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=M\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Sinon, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=M\left(\frac{2\pi}{3}\right)=O$.



Correction de l'exercice 5212 ▲

(a) **Domaine d'étude.** La fonction r est 2π-périodique et paire. Donc on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \pi]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). **Variations et signe de** r**.** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, strictement positive sur $]0, \pi]$ et s'annule en π. **Etude pour** $\theta = \pi$**.** La tangente en $M(\pi) = O$ est la droite passant par O d'angle polaire π c'est-à-dire l'axe (Ox). Par symétrie par rapport à (Ox), le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.



(b) Soient $\theta \in [-\pi, \pi]$ puis $M = O + a(1 + \cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre θ.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} &= -a\sin\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right)\\ &= 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Longueur ℓ de la cardioïde. On a $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (pour $\theta \in [-\pi, \pi]$) et donc

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| d\theta = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta/2)\,d\theta = 4a\left[\sin(\theta/2)\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

La cardioïde d'équation polaire $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$, a pour longueur $8a$.

Développée. Le point $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $\theta \neq \pm\pi$. Dans ce cas,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et aussi } \overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$$

En notant $\alpha(\theta)$ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\tau}(\theta)\right)$, on peut prendre $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$. En notant $R(\theta)$ le rayon de courbure au point $M(\theta)$,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

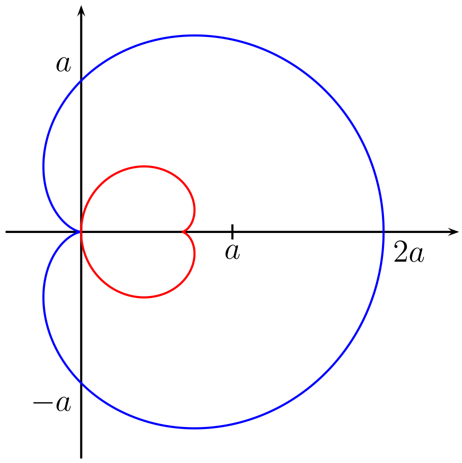
Ensuite, $\overrightarrow{n}(\theta) = r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{\tau}(\theta)\right) = -\overrightarrow{u}_{3\theta/2}$ et donc, en notant $\Omega(\theta)$ le centre de courbure au point $M(\theta)$,

$$\begin{aligned}
\Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta) \\
&= O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta - \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{3\theta/2} \\
&= O + a(1+\cos\theta)\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}\right) - \frac{4}{3}a\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{i} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{j}\right) \\
&= O + a\left[\left(\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta) + \cos(2\theta))\right)\overrightarrow{i} + \left(\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{2}{3}(\sin(\theta) + \sin(2\theta))\right)\overrightarrow{j}\right] \\
&= O + a\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\overrightarrow{j}\right] \\
&= O + \frac{2a}{3}\overrightarrow{i} + \frac{a}{3}(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta
\end{aligned}$$

Notons Γ la développée cherchée. On a $\Gamma = t \circ h(\mathscr{C}_1)$ où t est la translation de vecteur $\frac{2a}{3}\overrightarrow{i}$, h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ et $\mathscr{C}_1$ la courbe d'équation polaire $r = a(1-\cos\theta)$. Maintenant, en notant r la fonction $\theta \mapsto a(1+\cos\theta)$ et r_1 la fonction $\theta \mapsto a(1-\cos\theta)$,

$$[r_1(\theta+\pi), \theta+\pi)] = [a(1+\cos\theta), \theta+\pi] = s_O([r(\theta), \theta)]).$$

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc la symétrique par rapport à O de la courbe $\mathscr{C}$. En résumé, la développée de $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation $t \circ h \circ s_O$: c'est encore une cardioïde.



Correction de l'exercice 5213 ▲

Soient $(R, \theta) \in \mathbb{R}^2$ puis M le point du plan dont un couple de coordonnées polaires est $[r, \theta]$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow x^2(x^2+y^2) - (y-x)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta \times r^2 - (r\sin\theta - r\cos\theta)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow r^2[r^2\cos^2\theta - (\sin\theta - \cos\theta)^2] = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r^2 = \left(\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \text{ (}\cos\theta = 0 \text{ ne fournit pas de solution)} \\
&\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = \tan\theta - 1 \text{ ou } r = 1 - \tan\theta.
\end{aligned}$$

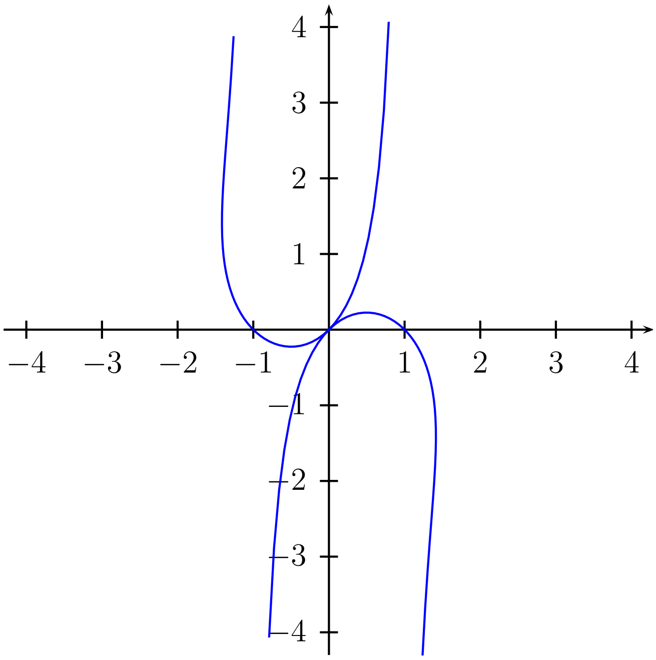
$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ d'équation polaire $r = \tan\theta - 1$, $(\mathscr{C}_2)$ d'équation polaire $r = 1 - \tan\theta$ et $\{O\}$. On note que le point O appartient à $(\mathscr{C}_1)$ car $\theta = \frac{\pi}{4}$ fournit $r = 0$. Donc $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \{O\} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$. Ensuite, on notant r_1 et r_2 respectivement la fonction $\theta \mapsto \tan\theta - 1$ et $r_2 = -r_1$,

$$M[\theta+\pi, r_2(\theta+\pi)] = M[\theta+\pi, r_2(\theta)] = M[\theta+\pi, -r_1(\theta)] = M[\theta, r_1(\theta)],$$

et comme $\theta + \pi$ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si θ décrit $\mathbb{R}$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont une seule et même courbe.

$\mathscr{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = \tan\theta - 1$.

Construction de $\mathscr{C}$.



Correction de **l'exercice 5214 ▲**

Développée. $M(\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta}$ puis

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = ae^{\theta}(\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta}) = a\sqrt{2}e^{\theta}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u}_{\theta} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{v}_{\theta}\right) = a\sqrt{2}e^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

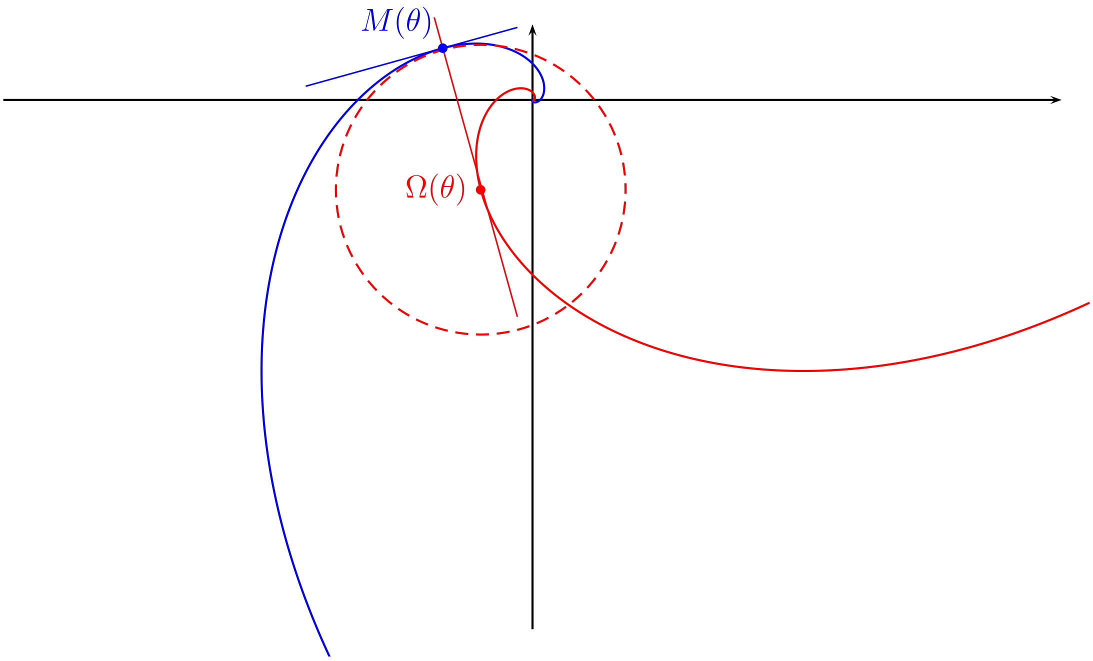
On en déduit $\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{2}e^{\theta}$ et $\overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}$. On peut alors prendre $\alpha(\theta) = \theta + \frac{\pi}{4}$ et donc $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$. Par suite

$$R(\theta) = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{a\sqrt{2}e^{\theta}}{1} = a\sqrt{2}e^{\theta}.$$

D'autre part, $\overrightarrow{n}(\theta) = \overrightarrow{\tau}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta})$ et donc

$$\Omega(\theta) = M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta} + a\sqrt{2}e^{\theta}.\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta}) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{v}_{\theta} = r_{O,\frac{\pi}{2}}(M(\theta)).$$

La développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^{\theta}$ est l'image de cette spirale par le quart de tour direct de centre O.



Correction de l'exercice 5215 ▲

(a) $y = ae^{bx}$.

(b) $y = \pm\sqrt{ax+b}$.

(c) $(a-x)^2 + y^2 = b^2$.

(d) $x = a\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + b, \quad y = a\sin t$.

(e) $y^2 = \frac{x^2}{2} + a^2\ln|x| + b$.

Correction de l'exercice 5216 ▲

(a) $\rho = \frac{1}{a\theta+b}$.

(b) $\rho = a\theta + b$. (Spirale d'Archimède)

Correction de l'exercice 5217 ▲

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow 2x + y\left(t - \frac{1}{t}\right) = a$ (cste).

On dérive : $2x' + y'\left(t - \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0 \Rightarrow y'\left(t + \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0$.

$\Rightarrow y = \frac{\lambda}{t}$, $x = b + \frac{\lambda}{2t^2}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5218 ▲

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow y\left(t + \frac{1}{t}\right) = a$ (cste).

$y = \frac{at}{1+t^2}$ et $x' = ty' \Rightarrow x = a\left(\ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{1+t^2}\right) + b$.

Correction de l'exercice 5219 ▲

La tangente ne doit pas être parallèle à Oy, donc on peut paramétrer $\mathscr{C}$ sous la forme : $y = f(x)$, ce qui donne l'équation :

$$|x + yy'| = |y|\sqrt{1 + y'^2} \Leftrightarrow 2xyy' = y^2 - x^2.$$

(équation homogène) on obtient : $y = \pm\sqrt{\lambda x - x^2}$. Les courbes cherchées sont des arcs de cercles centrés sur Ox passant par O.

Correction de l'exercice 5220 ▲

On suppose que la droite est Ox et on paramètre la courbe cherchée, $\mathscr{C}$, par une abscisse curviligne s. Soient $M = (x,y) \in \mathscr{C}$, $I = (x - R\frac{dy}{ds}, y + R\frac{dx}{ds})$ le centre de courbure en M où R est le rayon de courbure. On veut $|R| = \left|y + R\frac{dx}{ds}\right| = |y + R\cos\varphi|$ d'où :

$$\pm\frac{dR}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dR}{ds}\cos\varphi = \frac{dR}{ds}\cos\varphi.$$

Ceci implique $\frac{dR}{ds} = 0$ donc R est constant (cercle) ou $\varphi \equiv 0 \bmod \pi$ (droite horizontale). Le deuxième cas est exclu (courbe birégulière) donc il reste le cas d'un cercle qui convient s'il est tangent à Ox.

Correction de l'exercice 5221 ▲

$y + 2R\cos\varphi = \pm 2R \Rightarrow 2\frac{dR}{d\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + R\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ ou $2\frac{dR}{d\varphi}\cos\frac{\varphi}{2} - R\sin\frac{\varphi}{2} = 0$.

cas 1 : $R = \frac{K}{\sin\varphi/2}$, $x = 2K\ln\left|\tan\frac{\varphi}{4}\right| - 4K\cos\frac{\varphi}{2} + L$, $y = 4K\sin\frac{\varphi}{2}$.

cas 2 : $R = \frac{K}{\cos\varphi/2}$, $x = -2K\ln\left|\tan\frac{\varphi+\pi}{4}\right| + 4K\sin\frac{\varphi}{2} + L$, $y = -4K\cos\frac{\varphi}{2}$.

Correction de l'exercice 5222 ▲

$M + a\vec{t} \in Ox$ (tractrices) $x = a\cos\varphi + a\ln|\tan\varphi/2| + b$, $y = a\sin\varphi$.

Correction de l'exercice 5224 ▲

(a) $x = \int^s \cos\ln|t|\,dt, \quad y = \int^s \sin\ln|t|\,dt, \quad \rho = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta+\pi/4}$.

(b) $x = \int_0^s \cos\frac{u^2}{2}\,du, \quad y = \int_0^s \sin\frac{u^2}{2}\,du$ (Clothoïde ou spirale de Cornu)

(c) $x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi), \quad y = a(-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)$.

(d) $x = \ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad y = \frac{1}{\cos\varphi} = \operatorname{ch} x$.

(e) $x = \frac{a}{4}(\sin 2\varphi + 2\varphi), \quad y = \frac{a}{4}\cos 2\varphi$ (cycloïde).

Correction de l'exercice 5225 ▲

Développante de cercle : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dR}{ds}\vec{N} \Rightarrow \frac{dR}{d\varphi} = r$.
$\Rightarrow x = x_0 + r(\cos\varphi - 1 + \varphi\sin\varphi), \quad y = y_0 + r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

Correction de l'exercice 5226 ▲

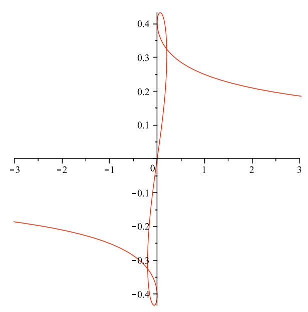
$y = \frac{s}{2}\sin\varphi \Rightarrow s = a\sin\varphi \Rightarrow x = \frac{a\sin 2\varphi}{4} + \frac{a\varphi}{2} + b, \quad y = \frac{a\sin^2\varphi}{2}$. (cycloïde)

Correction de l'exercice 5227 ▲

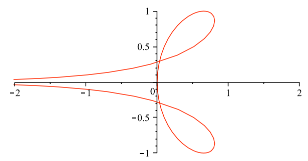
Soit θ l'angle polaire de $\vec{OM}$: $\vec{MC} = \frac{ds}{d\varphi}\vec{n}$ et $\vec{MN} = \frac{ds}{d\theta}\vec{n}$.
$\frac{ds}{d\theta} = k\frac{ds}{d\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{k} + b \Rightarrow V = a\theta + b$ avec $a = \frac{1}{k} - 1$.
$\frac{\rho}{\rho'} = \tan(a\theta + b) \Rightarrow \rho = \lambda\cos(a\theta + b)^{-1/a}$ si $a \neq 0$ ou $\rho = \lambda e^{\mu\theta}$ si $a = 0$.
$k = 1 \Rightarrow$ Spirale logarithmique.
$k = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Parabole de foyer O.
$k = 2 \Rightarrow$ Cardioïde.
$k = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Hyperbole de centre O.
$k = -1 \Rightarrow$ Lemniscate de Bernouilli.

Correction de l'exercice 5229 ▲

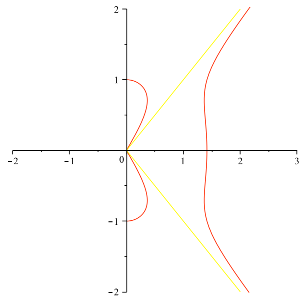
(a)



(b)

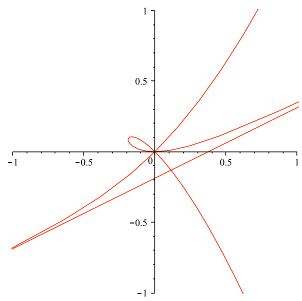


(c)



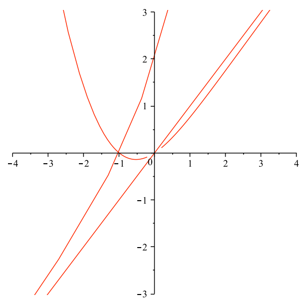
asymptotes : $y = \pm x$
$x - y \sim 1/(4x) \Rightarrow$ aire infinie
$y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, (\sqrt{6} \pm \sqrt{2})/2$

(d)



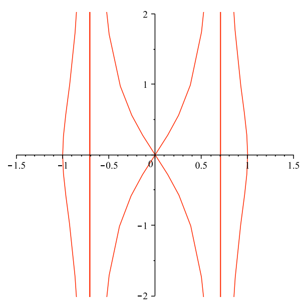
asymptote : $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{16}$ (traversée)

(e)



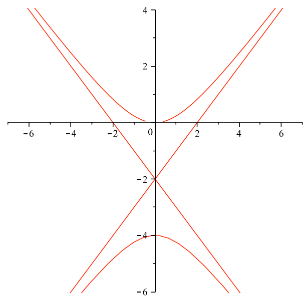
asymptote : $y = x$

(f)



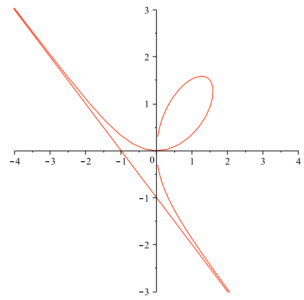
inflexions : $\tan \frac{t}{2} = 0, \pm 3$

(g)



hyperbole : $(y+2)^2 - x^2 = 4$

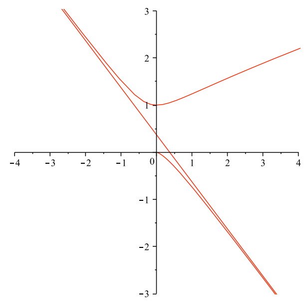
(h)



asymptote : $x+y=-1$

équation cartésienne : $x^3+y^3=3xy$

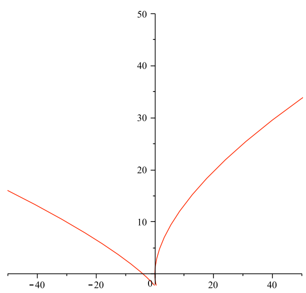
(i)



asymptote : $x+y=e^{-1}$

branche parabolique horizontale

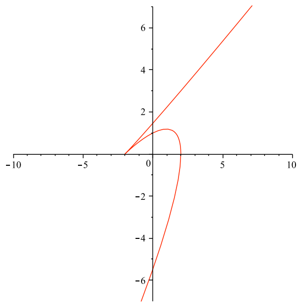
(j)



branche parabolique horizontale

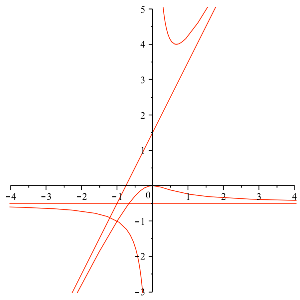
rebroussement pour $t=1$

(k)



branche parabolique de coefficient 1

(l)



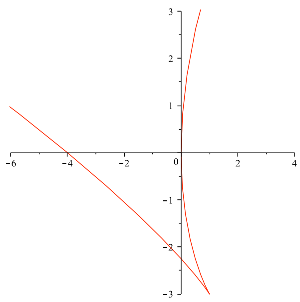
asymptote : $y = 2x + \frac{3}{2}$

point double : $t^2 + t = 1$, $x = y = -1$ les tangentes sont orthogonales

---

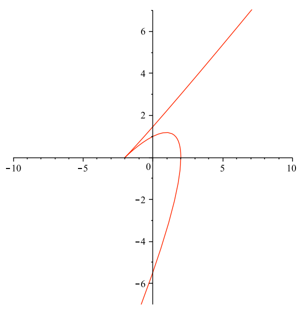
Correction de l'exercice 5230 ▲

(a)



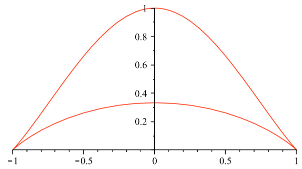
branche parabolique horizontale

(b)



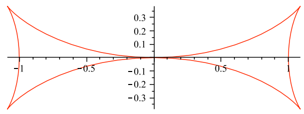
branche parabolique de coefficient 1

(c)



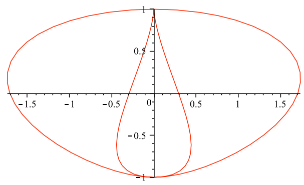
inflexion : $\cos t = \frac{2}{3}$

(d)



rebroussement : $\cos^2 t = \frac{1}{3}$.

(e)



Correction de l'exercice 5231 ▲

$x = \frac{3\cos\theta - \cos 3\theta}{4}$, $y = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$.

Correction de l'exercice 5232 ▲

$M = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $S = (a, 0)$:

On obtient les équations paramétriques : $x = \frac{R(R\cos\theta - a)}{R - a\cos\theta}$, $y = \frac{(R^2 - a^2)\sin\theta}{R - a\cos\theta}$.

Pour $R \neq a$, il s'agit de la conique de centre O et d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1$.

Correction de l'exercice 5233 ▲

$y_A = t \Rightarrow \begin{cases} 2px = t^2 + ht + h^2/2 \\ y = t + h/2 \end{cases} \Rightarrow$ parabole $y^2 + h^2/4 = 2px$.

Correction de l'exercice 5234 ▲

$y_A = t, y_B = u \Rightarrow C : \left(\frac{ut}{2p}, \frac{t+u}{2}\right)$; aire $= \frac{|u-t|^3}{8p}$.

enveloppe : $M = \mathrm{mil}(A, B)$, parabole $y^2 + a^2/4 = 2px$.

Correction de l'exercice 5235 ▲

(a) F.

(b) $M = (t^2/2p, t)$, $M' = (t'^2/2p, t') \Rightarrow tt' = -p^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{4}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \\ y = \frac{p}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \end{cases}$ avec $u = \frac{t}{p}$. (Parabole passant par F)

(c) $\begin{cases} x = \frac{3p}{4}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \\ y = -\frac{p}{4}\left(u - \frac{1}{u}\right)^3 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 5236 ▲

(a) Foyer.

(b) Point d'impact : $\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ Point caractéristique : $\left(\frac{3t^2}{2p}, \frac{t(3p^2 - t^2)}{2p^2}\right)$.

Correction de l'exercice 5237 ▲

$M = (t^2/2p, t) \Rightarrow I = (3t^2/2p + p, -t^3/p^2)$. Soit $P = (u^2/2p, u)$:
$IP = IM \Leftrightarrow (u-t)^3(u+3t) = 0 \Rightarrow u = -3t$.
Enveloppe : $\begin{cases} x = -3t^2/2p \\ y = 3t. \end{cases}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5238 ▲

équation polaire : $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p(\cos\theta - \sin\theta)}{2 + e(\cos\theta - \sin\theta)} \\ y = \frac{p(\cos\theta + \sin\theta)}{2 + e(\cos\theta - \sin\theta)} \end{cases}$ conique d'excentricité $\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 5239 ▲

$3x = \cos 2\theta + 2\cos\theta$, $3y = \sin 2\theta + 2\sin\theta$: cardioïde à rebroussement en $(-1/3, 0)$.

Correction de l'exercice 5240 ▲

$D = Ox$, rayon $= 1$: $x = \theta - \cos\theta\sin\theta$, $y = \sin^2\theta$. pt caractéristique = projeté de I.

Correction de l'exercice 5241 ▲

$M = \begin{pmatrix} a(1 + \cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2a\cos t(1 + \cos t) \\ 2a\sin t(1 - \cos t) \end{pmatrix}$. Hypocycloïde à trois rebroussements.

Correction de l'exercice 5242 ▲

$x = a\cos 4\theta$, $y = a\sin 4\theta$.

Correction de l'exercice 5243 ▲

(a) $x = \frac{\cos t}{a}(a^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t)$, $y = \frac{\sin t}{b}(b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t)$.

(b)

(c) Point stationnaire ssi $a^2 > 2b^2$, obtenu pour $\sin^2 t = \frac{a^2 - 2b^2}{3(a^2 - b^2)}$. Rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Correction de l'exercice 5244 ▲

$D = Ox$, $A = (0, a)$,$M = (t, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2/a. \end{cases}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5252 ▲

(a) $\mathrm{sh}^2 t$.

(b) $\theta - \operatorname{th}\frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 5253 ▲

$2-\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 5254 ▲

(a) $4\sqrt{2}+4\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}-\pi = 4\sqrt{2}+4\operatorname{Arctan}\sqrt{2}-\pi$.

(b) 4.

Correction de l'exercice 5255 ▲

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \Rightarrow 2\sqrt{xy}=1-x-y \Rightarrow (x-y)^2 = 2(x+y)-1$. La courbe est un arc de parabole d'axe la première bissectrice et tangent aux axes en $(1,0)$ et en $(0,1)$.

Longueur : $x-y=\operatorname{sh}t$, $2(x+y)=\operatorname{ch}^2 t \Rightarrow x=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t+\frac{1}{4}\operatorname{sh}t$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t-\frac{1}{4}\operatorname{sh}t$, $\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{2}}$.

$L=\int_{t=-\operatorname{Argsh}1}^{\operatorname{Argsh}1}\frac{\operatorname{ch}^2 t\,dt}{\sqrt{2}}=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}+1$.

Correction de l'exercice 5256 ▲

Soit (a_i) une subdivision de $[a,b]$ et P la ligne brisée passant par les points $(a_i, f(a_i))$. On montre ci-dessous que pour toute courbe rectifiable L située au dessus de P et ayant même extrémités, on a $\operatorname{long}(L) \geq \operatorname{long}(P)$ (résultat intuitivement évident : planter des clous aux points $(a_i, f(a_i))$ et attacher un élastique en $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, passant au dessus de ces clous). Cela étant montré, l'inégalité demandée en résulte en faisant tendre le pas de la subdivision vers zéro.

Démonstration du thm de l'élastique : par récurrence sur le nombre n de segments de P. Pour $n=1$ c'est un fait connu. $n-1 \Rightarrow n$: si L passe par $(a_1, f(a_1))$ alors l'hypothèse de récurrence s'applique. Sinon, notons D la demi-droite issue de $(a_0, f(a_0))$ et passant par $(a_1, f(a_1))$. Par concavité, P est en dessous de D. L contient un point d'abscisse a_1 strictement au dessus de D, et aboutit en $(b, f(b))$ en dessous de D, donc il existe un point (u,v) sur $L\cap D$ avec $u>a_1$. En remplaçant l'arc $(a_0, f(a_0))$ – (u,v) de L par le segment correspondant on obtient une ligne L' plus courte que L, encore au dessus de P, et qui relève du premier cas.

Correction de l'exercice 5257 ▲

(a) $x=-4t^3$, $y=\frac{3+6t^2-3t^4}{2}$.

(b) $x=6\cos t-3\cos 2t$, $\quad y=6\sin t+3\sin 2t$.

(c) $x=t+\sin t$, $\quad y=-1+\cos t$, $I_t=M_{t-\pi}+(\pi,-2)$.

(d) $x=a(\cos^3 t+3\cos t\sin^2 t)$, $\quad y=a(\sin^3 t+3\sin t\cos^2 t)$. $x\pm y=a(\cos t\pm\sin t)^3 \Rightarrow$ similitude de centre O, rapport 2, angle $\frac{\pi}{4}$.

(e) $x_I=\frac{3x^4+1}{2x^3}$, $\quad y_I=\frac{x^4+3}{2x}$.

(f) $x=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$, $\quad y=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$.

(g) $\rho=e^{\theta-\pi/2}$.

(h) $x=\frac{2+\cos\theta-\cos^2\theta}{3}$, $\quad y=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{3}$, $\quad$ cardioïde homothétique.

Correction de l'exercice 5258 ▲

Calcul.

Correction de l'exercice 5261 ▲

(a)

(b) Cercle de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5262 ▲

$R=\frac{1}{2}$ aux sommets principaux $(0,\pm 1)$ et $R=\sqrt{2}$ aux sommets secondaires $(\pm 1/\sqrt{2},0)$.

Correction de l'exercice 5263 ▲

$-\frac{156}{125\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 5264 ▲

$y'(0)=\lambda \Rightarrow I=(-\lambda-\lambda^3, 1+\lambda^2)$.

Correction de l'exercice 5266 ▲

$c_i=\frac{1}{\sqrt{1+a^2c^2}}\left(\frac{ac'}{1+a^2c^2}\pm c\right)$ où c est la courbure en M et $c'=\frac{dc}{ds}$.
Dans le repère de Frenet, les normales ont pour équations : $X=0$, $\pm X=acY-a$, donc se coupent en C.

Correction de l'exercice 5267 ▲

(a) Soit θ l'angle polaire de D. Dans le repère $(O,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y=aX^2+bX$.
On veut que $\mathscr{P}$ soit tangente à Oy, soit $b=-\tan\theta$ et que le rayon de courbure soit R, soit $a=\frac{1}{2R\cos^3\theta}$.
Équation dans $0xy$: $x^2\sin^2\theta-2xy\cos\theta\sin\theta+y^2\cos^2\theta-2Rx\cos^2\theta=0$.

(b) O.

Correction de l'exercice 5268 ▲

(a)

(b) $x=\frac{4t^3+a(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y=\frac{t^4-3t^2+2at}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 5269 ▲

$x=a\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad y=a\cos t$.

Correction de l'exercice 5270 ▲

(a) L'astroïde complète est obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$ et pour des raisons de symétrie, $L=4\int_0^\pi 2\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|dt$. Or $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix}-3a\sin t\cos^2 t\\ 3a\cos t\sin^2 t\end{pmatrix}=3a\sin t\cos t\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ et donc $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|=3a|\sin t\cos t|=\frac{3a}{2}|\sin(2t)|$ puis

$$L=4\int_0^{\pi/2}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|dt=6a\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt=6a\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}=6a.$$

$$\boxed{L=6a.}$$

(b) $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix}R(1-\cos t)\\ R\sin t\end{pmatrix}=2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin t\cos t\begin{pmatrix}\sin(t/2)\\ \cos(t/2)\end{pmatrix}$ et donc $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|=2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$ puis

$$L=\int_0^{2\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|dt=2R\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,dt=4R\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=8R.$$

$$\boxed{L=8R.}$$

(c) Une représentation paramétrique de Γ est $\left\{\begin{array}{l}x=t\\ y=\frac{t^2}{2p}\end{array}\right.$, $0\leqslant t\leqslant a$ et donc

$$\begin{aligned}L&=\int_0^a\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt=p\int_0^{a/p}\sqrt{u^2+1}\,du\\&=p\left(\left[u\sqrt{u^2+1}\right]_0^{a/p}-\int_0^{a/p}\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}\,du\right)=a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}-p\int_0^{a/p}\frac{u^2+1-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du\\&=a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}-L+p\,\mathrm{Argsh}\left(\frac{a}{p}\right),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} + p\,\text{Argsh}\left(\frac{a}{p}\right)\right).}$$

(d) La cardioïde complète est obtenue quand θ décrit $[-\pi, \pi]$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = a((-\sin\theta)\overrightarrow{u}_\theta + (1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right).$$

Comme le vecteur $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta$ est unitaire, $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ puis

$$L = \int_{-\pi}^{\pi}\left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| dt = 4a\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) dt = 8a\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8a.$$

$$\boxed{L = 8a.}$$

Correction de l'exercice 5271 ▲

On obtient la courbe complète quand t décrit $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Puisque $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ et $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$, on se contente d'étudier et de construire la courbe quand $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe (Oy) puis d'axe (Ox). Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(-\sin t + \frac{1}{\sin t}) \\ R\cos t \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix} = R\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = R\,\text{cotan}\, t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque $R\,\text{cotan}\, t > 0$ pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = R\,\text{cotan}\, t \text{ puis } \overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On a donc $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = t$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = R\,\text{cotan}\, t,$$

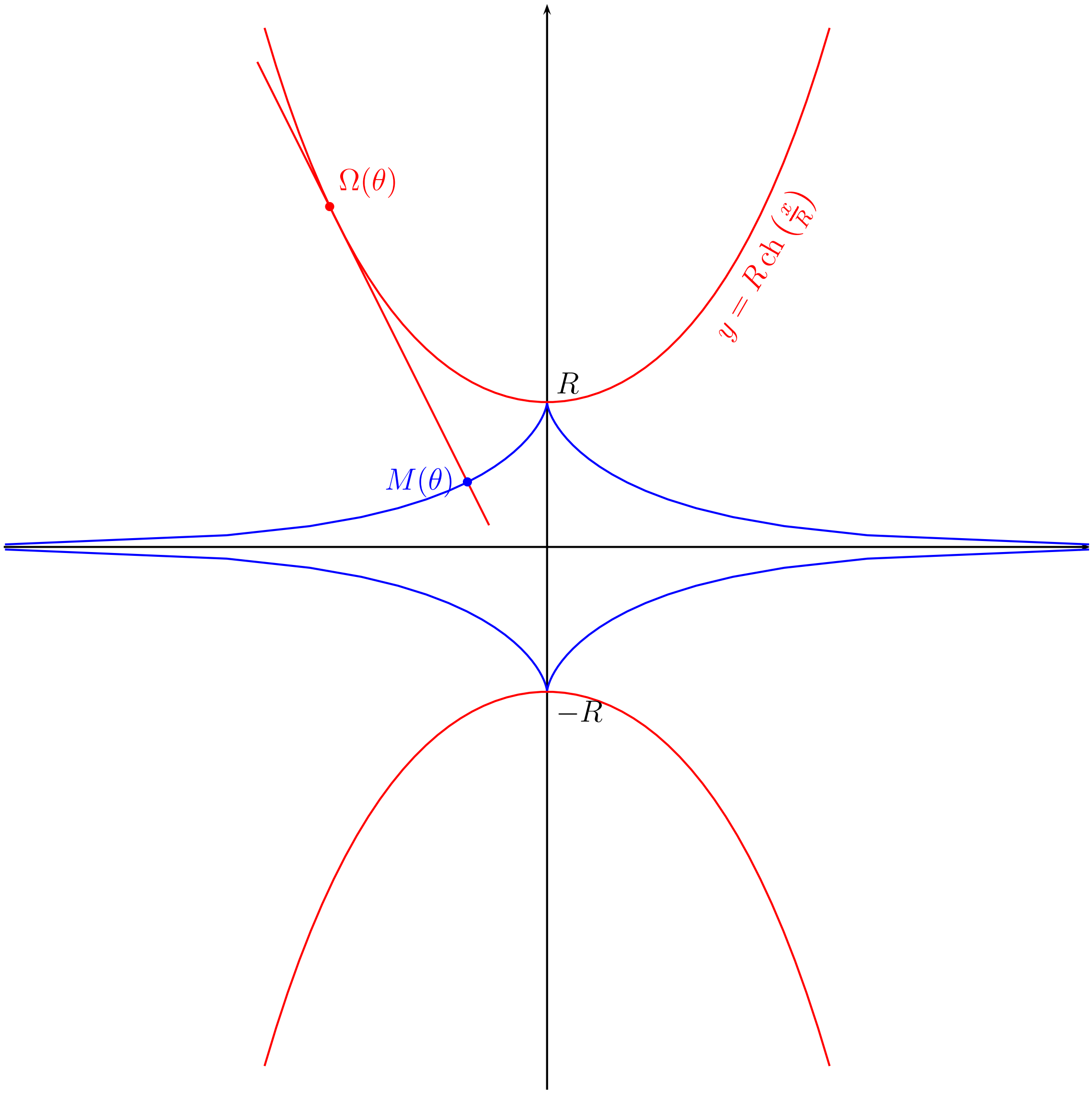
puis

$$\Omega(t) = M(t) + \rho(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\cos t + \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ R\sin t \end{pmatrix} + R\,\text{cotan}\, t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}.$$

La développée cherchée est l'arc $t \mapsto \begin{pmatrix} R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}$, $t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ (en complétant par symétrie). Quand t décrit $]0, \pi[$, on effectue alors le changement de paramètres $t \mapsto R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| = u$ qui est un C^1-difféomorphisme de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$. On obtient $x = u$ puis

$$y = \frac{R}{\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}} = \frac{R}{2}\left(\tan\frac{t}{2} + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right) = R\frac{e^{u/R}+e^{-u/R}}{2} = R\,\text{ch}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Le support de la développée sur $]0, \pi[$ est aussi le support de l'arc $u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ R\,\text{ch}\left(\frac{u}{R}\right) \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ ou encore la chaînette d'équation cartésienne $y = R\,\text{ch}\left(\frac{x}{R}\right)$.



12. Quand t décrit $[0, 2\pi]$, on obtient une arche de cycloïde complète. Les autres arches s'en déduisent par translations de vecteurs $2k\pi R\overrightarrow{i}$. Pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\sin t \end{pmatrix} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le point $M(t)$ est régulier pour $t \in]0, 2\pi[$ et pour $t \in]0, 2\pi[$, $2R\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$. Puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -4R\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

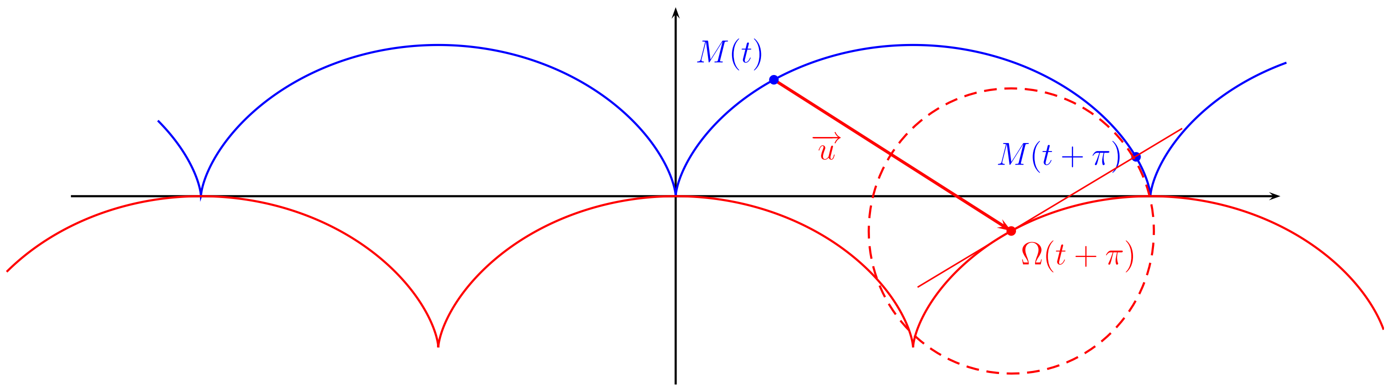
et donc

$$\Omega(t) = M(t) + \rho(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} R(t-\sin t) \\ R(1-\cos t) \end{pmatrix} - 4R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t-\sin t)+2R\sin t \\ R(1-\cos t)-2R(1-\cos t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R(t+\sin t) \\ -R(1-\cos t) \end{pmatrix}.$$

La développée cherchée est l'arc $t \mapsto \begin{pmatrix} R(t+\sin t) \\ -R(1-\cos t) \end{pmatrix}$. Poursuivons.

$$\Omega(t+\pi) = \begin{pmatrix} R(t+\pi-\sin t) \\ -R(1+\cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t-\sin t) \\ R(1-\cos t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi R \\ -2R \end{pmatrix} = t_{\overrightarrow{u}}(M(t)) \text{ où } \overrightarrow{u} = (\pi R, -2R).$$

Ainsi, le centre de courbure au point $M(t+\pi)$ est le translaté du point $M(t)$ dans la translation de vecteur $(\pi R, -2R)$ et donc la développée de la cycloïde est la translatée de la cycloïde par la translation de vecteur $(\pi R, -2R)$. En particulier, c'est encore une cycloïde.



13. $\mathscr{C}$ est le support de la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$. $M(t)$ est birégulier si et seulement si $t/neq0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$. Par suite

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+9t^4} \text{ et } \overrightarrow{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Donc, d'une part $\overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part, puisque les coordonnées de $\overrightarrow{\tau}(t)$ sont positives, on peut prendre $\alpha(t) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)$. Par suite, pour $t \neq 0$

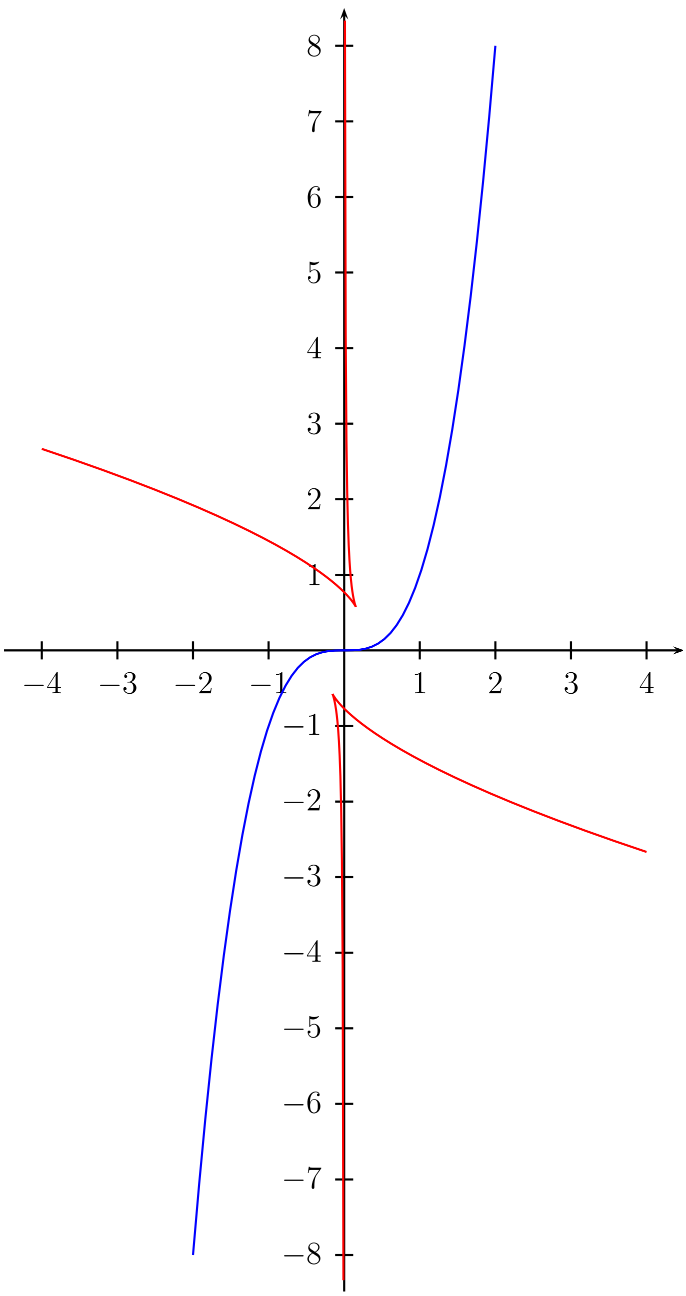
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(-\frac{1}{2}\right) 36t^3(1+9t^4)^{-3/2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+9t^4}}} = \frac{6t}{1+9t^4}$$

puis

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{(1+9t^4)^{3/2}}{6t},$$

et donc

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{1+9t^4}{6t} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - \frac{9t^5}{2} \\ \frac{5t^3}{2} + \frac{1}{6t} \end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 5272 ▲

$\mathscr{C}$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln t \end{pmatrix}$, $t > 0$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \\ 1/\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}.$$

Donc, $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ puis

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} = -\frac{1}{t^2+1},$$

et finalement

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}.$$

Pour $t > 0$, posons $f(t) = |R(t)| = \frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $t > 0$,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}(t^2+1)^{3/2} + 3(t^2+1)^{1/2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(-(t^2+1)+3t^2) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(2t^2-1).$$

f admet un minimum en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ égal à $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de courbure minimum est } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et est le rayon de courbure en } M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 5273 ▲

$\mathscr{C}$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix}$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin t/\cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque $\frac{1}{\cos t} > 0$ et que $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a successivement $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\alpha(t) = -t$ puis

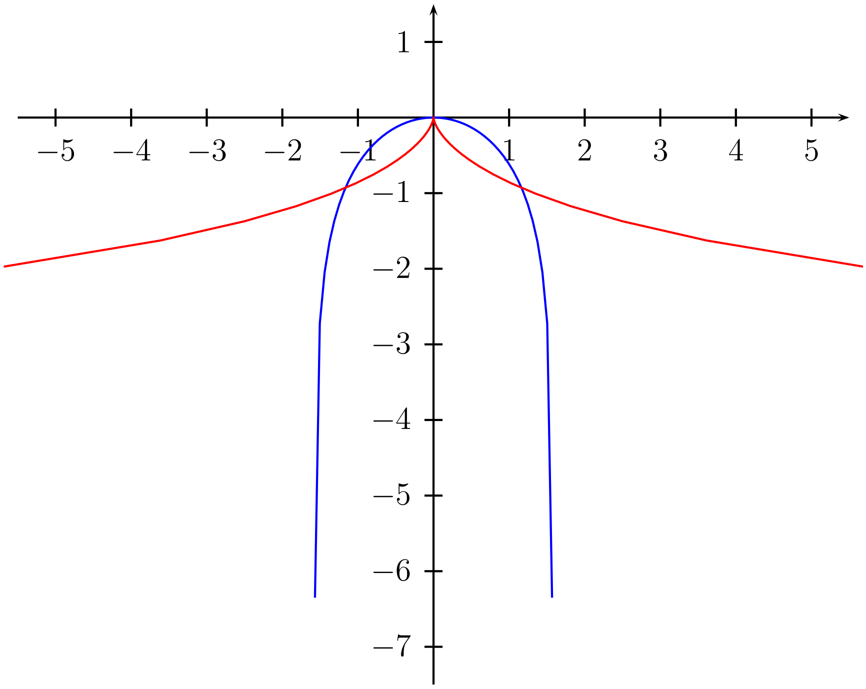
$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Ensuite, si s est l'abscisse curviligne d'origine 0 orientée dans le sens des t croissants,

$$s(t) = \int_0^t s'(u)\,du = \int_0^t \frac{1}{\cos u}\,du = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Enfin,

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan t \\ \ln(\cos t) - 1 \end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 5274 ▲

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{C}_\lambda$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \lambda t e^{-t} \end{pmatrix}$. $\mathscr{C}_0$ est l'axe (Ox) et donc C_0 n'est pas défini, puis $\mathscr{C}_{-\lambda}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport à l'axe (Ox) et donc $C_{-\lambda}$ est le symétrique de C_λ par rapport à l'axe (Ox). Dans ce qui suit, on suppose $\lambda > 0$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Par suite $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$,

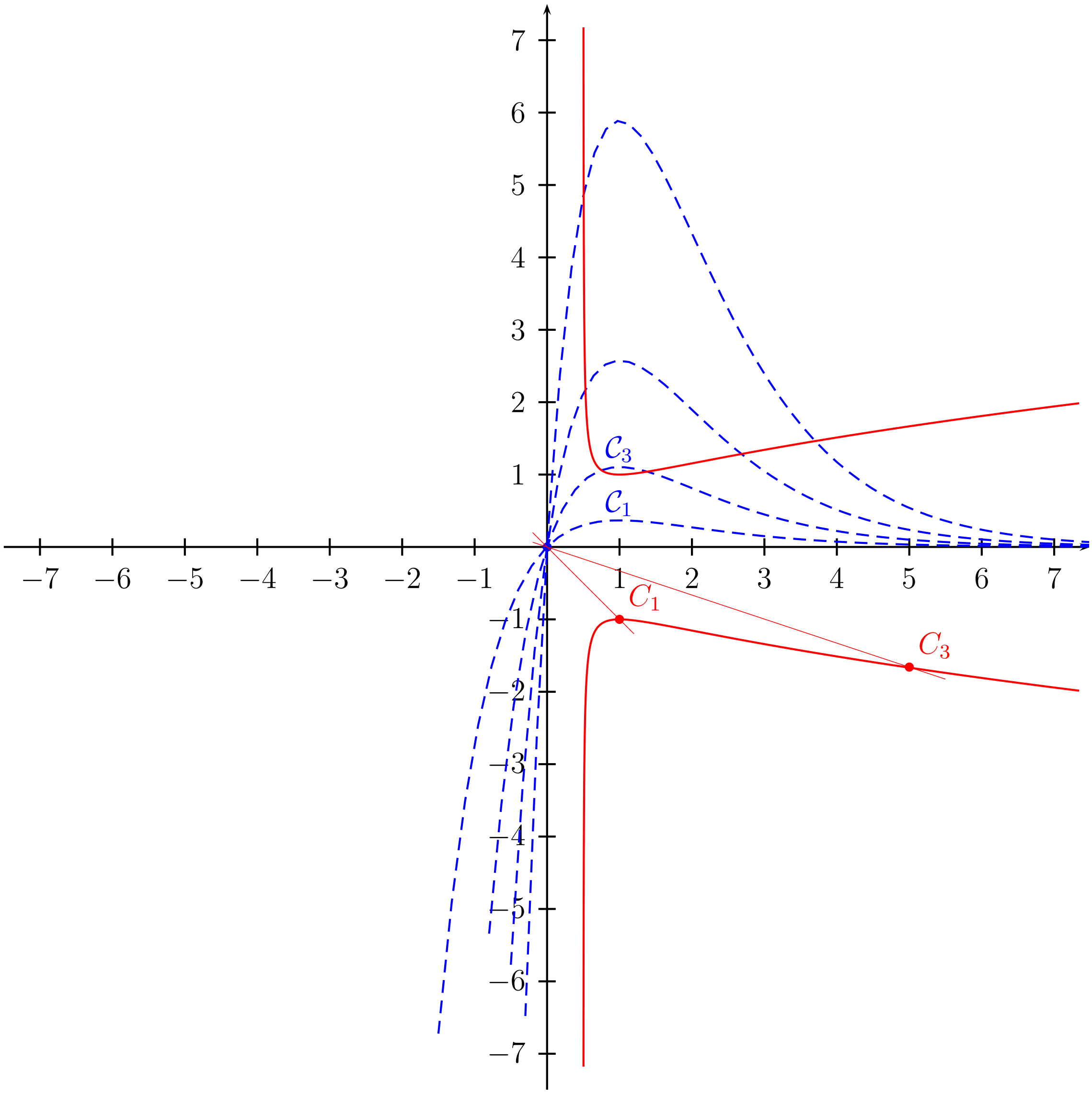
$\overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} -\lambda(1-t)e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\right)$ (car $\overrightarrow{\tau}(t)$ a une abscisse strictement positive). Ensuite,

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\lambda^2((2t-2)-2(t-1)^2)e^{-2t}}{2(1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t})^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}}$$

et donc $\frac{d\alpha}{dt}(0)=\frac{-4\lambda^2}{2(1+\lambda^2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2}}}=\frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}$ puis $R(0)=\frac{ds/dt}{d\alpha/dt}(0)=-\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}$ et donc

$$C_\lambda=\Omega(0)=M(0)+R(0)\overrightarrow{n}(0)=O-\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix}-\lambda\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+\lambda^2)/2\\-(1+\lambda^2)/(2\lambda)\end{pmatrix}.$$

L'ensemble des C_λ, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, est le support de l'arc $\lambda\mapsto\begin{pmatrix}(1+\lambda^2)/2\\-(1+\lambda^2)/(2\lambda)\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.



Correction de l'exercice 5275 ▲

M_1,M_2,M_3,M_4 sont coplanaires si et seulement s'il existe $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ tels que le plan P d'équation $ax+by+cz-d=0$ passe par ces points, ce qui équivaut à : t_1,t_2,t_3,t_4 sont les racines (distinctes) du polynôme $at^4+bt^3+ct^2-d$. Un tel polynôme existe si et seulement si $t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4=0$ soit : $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}=0$ si aucun des t_i n'est nul.

Correction de l'exercice 5276 ▲

(a) $\frac{d\vec{T}}{ds}=-\frac{\tau}{c}\vec{B}\Rightarrow\vec{T}_1=\vec{B}$, $\frac{ds_1}{ds}=-\frac{\tau}{c}$, $\vec{N}_1=-\vec{N}$, $c_1=c$.

(b) $\tau_1=-\frac{c^2}{\tau}$.

Correction de l'exercice 5277 ▲

$c_1 = \sqrt{1+\frac{\tau^2}{c^2}}$, $\tau_1 = \frac{c\tau'-\tau c'}{c(c^2+\tau^2)}$.

Correction de l'exercice 5278 ▲

Pt caractéristique : $P = M + a(s)\vec{N} + b(s)\vec{B}$: CNS $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{c} \\ \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2} = \text{Arctan}(b/a)' = \tau. \end{cases}$ Rmq : le point caractéristique se projette sur I.

Correction de l'exercice 5279 ▲

$\vec{B} = \vec{T} + 2\vec{k} \Rightarrow s^2\frac{d^2\vec{T}}{ds^2} + s\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{T} = -\vec{k}$.
on pose $s = e^u$: $\vec{OM} = e^u\cos u\vec{A} + e^u\sin u\vec{B} - e^u\vec{k}$ où $(\vec{A},\vec{B},\vec{k})$ est orthogonale et $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{k}\|$.
(spirale logarithmique relevée sur un cône)

Correction de l'exercice 5313 ▲

(a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $P(x,y) = 2x+2y+e^{x+y} = Q(x,y)$. Les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2+e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.
Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y+e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x+2y+e^{x+y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y) = x^2+2xy+e^{x+y}+g(y) \\ 2x+e^{x+y}+g'(y) = 2x+2y+e^{x+y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y) = x^2+2xy+e^{x+y}+g(y) \\ g(y) = y^2+\lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2/\ f(x,y) = (x+y)^2+e^{x+y}+\lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto (x+y)^2+e^{x+y}+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Remarque. On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x,y) = (x+y)^2+e^{x+y}$ alors $df = \omega$.

(b) La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ y > x\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ car convexe. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur Ω si et seulement si ω est fermée sur Ω.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y} + y\frac{1}{(x-y)^2}\right) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2y}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3}$.
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y-x} - x\frac{1}{(y-x)^2}\right) = \frac{1}{(y-x)^2} + \frac{2x}{(y-x)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$.
Donc ω est exacte sur l'ouvert Ω. Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \Omega, \begin{cases} f(x,y) = \frac{y}{x-y}+g(y) \\ \frac{x}{(x-y)^2}+g'(y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) = \frac{y}{x-y}+\lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{y}{x-y}+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in]-\infty,0]\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Sur Ω, ω est exacte si et seulement si ω est fermée d'après le théorème de SCHWARZ.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Donc ω est exacte sur Ω. Soit f une application de classe C^1 sur Ω.

$$df=\omega \Leftrightarrow \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-y\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)\\ \frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}-y\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda.$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Les fonctions précédentes sont encore des primitives de ω sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et donc ω est exacte sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(d) ω est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc ω est exacte sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si ω est fermée sur $]0,+\infty[^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right)=\frac{1}{x^2y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)=-\frac{1}{x^2y^2}$. Donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right)\neq\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ et ω n'est pas exacte sur $]0,+\infty[^2$.

On cherche un facteur intégrant de la forme $h\ :\ (x,y)\mapsto g(x^2+y^2)$ où g est une fonction non nulle de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right)=\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right)=-\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)+\frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$h\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2 \Leftrightarrow \forall (x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)=-\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)+\frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall t>0,\ -tg'(t)+g(t)=0\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t>0,\ g(t)=\lambda t.$$

La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)dy=(x^2+y^2)\omega.$$

Correction de l'exercice 5314 ▲

(a) C est l'arc paramétré $t\mapsto\left(\frac{t^2-1}{2},t\right)$, t variant en croissant de -1 à 1.

$$\int_C\omega=\int_{-1}^{1}\left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+t^2}t+\frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+t^2}\right)dt$$
$$=0\text{ (fonction impaire).}$$

$$\boxed{\int_C\omega=2\ln 2.}$$

(b)

$$\int_C\omega=\int_0^{2\pi}((\cos t-\sin^3 t)(-\sin t)+\cos^3 t(\cos t))dt=\int_0^{2\pi}(\cos^4 t+\sin^4 t-\cos t\sin t)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}((\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t-\cos t\sin t)dt=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sin(2t)}{2}-\frac{\sin^2(2t)}{2}\right)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sin(2t)}{2}-\frac{1}{4}(1-\cos(4t))\right)dt=2\pi\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

$$\boxed{\int_C\omega=\frac{3\pi}{2}.}$$

(c)

$$\int_C\omega=\int_0^{\pi/2}(\cos t\sin t\cos t\sin t)(-\sin t)\,dt=-\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^3 t\,dt$$
$$=\int_0^{\pi/2}(-\cos^2 t\sin t+\cos^4 t\sin t)dt=\left[\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$
$$=-\frac{2}{15}.$$

$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.}$

Correction de l'exercice 5315 ▲

(a) $\omega = x^2dx + y^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et est fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ. Par suite, l'intégrale de ω le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.

(b) $\omega = y^2dx + x^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.

On parcourt le cercle C le cercle de centre (a,b) et de rayon $R > 0$ une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à 2π.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \Big((b+R\sin t)^2(-R\sin t) + (a+R\cos t)^2(R\cos t)\Big)\ dt \\
&= R\int_0^{2\pi} (a\cos t - b\sin t + 2aR\cos^2 t - 2bR\sin^2 t + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t))\ dt \\
&= R^2\int_0^{2\pi} (2a\cos^2 t - 2b\sin^2 t + R(\cos^3 t - \sin^3 t))\ dt \\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a(1+\cos t) - b(1-\cos t) + R(\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t\sin t + \sin^2 t))\ dt \\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a - b + R(\cos t - \sin t)(1 + \cos t\sin t))\ dt \\
&= R^2\left(2\pi(b-a) + \int_0^{2\pi} R(\cos t - \sin t + \cos^2 t\sin t - \cos t\sin^2 t)\ dt\right) \\
&= 2\pi R^2(b-a).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5316 ▲

(a) La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. D'après le théorème de SCHWARZ, sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme différentielle ω est exacte si et seulement si la forme différentielle ω est fermée.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, posons $P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)$ et $Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x\sin x + \cos x + y\cos x) \\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x\cos x + y\sin x) + (x^2+y^2)(-x\sin x + \cos x + y\cos x)) \\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x) \\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x\sin x - y\cos x) - 2y(x\sin x - y\cos x) - (x^2+y^2)\cos x) \\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle ω est exacte sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On choisit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leqslant 0\}$. Ω est un ouvert étoilé (en tout point de la forme $(0,y)$, $y > 0$) de $\mathbb{R}^2$ contenant le contour fermé Γ. Puisque ω est exacte sur Ω, on sait alors que $\int_\Gamma \omega = 0$.

(b) Le contour Γ est constitué de 4 arcs :

- Γ_1 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de r à R,
- Γ_2 est l'arc $t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à π.
- Γ_3 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de $-R$ à $-r$,
- Γ_4 est l'arc $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, t variant en décroissant de π à 0.

D'après la question 1), $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_3}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt = \int_r^R P(t,0)\,dt\\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2}\times t\sin t\,dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_3}\omega = \int_{-R}^{-r}\frac{\sin t}{t}\,dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\,dt$ (puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire) et donc $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_3}\omega = 2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ puis pour tout $(r,R) \in]0,+\infty[^2$ tel que $r < R$,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}\omega &= \int_0^\pi (P(R\cos t, R\sin t)(-\sin t) + Q(R\cos t, \sin t)(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}((\cos t\sin(R\cos t) - \sin t\cos(R\cos t))(-\sin t) + (\cos t\cos(R\cos t) + \sin t\sin(R\cos t))(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_4}\omega = \int_\pi^0 e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = -\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ et on a montré que

$$\boxed{\forall (r,R) \in]0,+\infty[^2,\ r < R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt - \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right).}$$

(c) • Etudions $\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt$. Pour $R > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right| &\leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\left|\cos(R\cos t)\right|\,dt \leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt\\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)}\,dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right])\\ &= \frac{\pi}{R}\left[-e^{-2Rt/\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{R}(1-e^{-2R})\\ &\leqslant \frac{\pi}{R}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{R}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, $\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt = 0$. On en déduit que pour tout $r > 0$, l'intégrale $\int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge en $+\infty$ et que

$$\boxed{\forall r > 0,\ \int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt.}$$

• Etudions maintenant $\lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$. Soit $F : \begin{array}{ccc}[0,+\infty[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ (r,t) & \mapsto & e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\end{array}$.

- Pour tout réel $r \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto F(r,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
- Pour tout réel $t \in [0,\pi]$, la fonction $r \mapsto F(r,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(r,t) \in [0,+\infty[\times[0,\pi]$, $|F(r,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $r \mapsto \int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = \int_0^\pi e^0\cos(0)\,dt = \pi,$$

et finalement que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 5317 ▲

Supposons tout d'abord que le support de l'arc γ est de longueur $L=2\pi$. Puisque γ est un arc de classe C^1 régulier, on peut choisir pour γ une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe C^1 $t\mapsto(x(t),y(t))$, $t\in[0,2\pi]$, telle que $\forall t\in[0,2\pi]$, $x'^2(t)+y'^2(t)=1$. L'arc étant fermé, on a de plus $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$. Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions x et y en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π-périodiques.

Puisque les fonctions x' et y' sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de PARSEVAL permet d'écrire

$$\begin{aligned}
L=2\pi&=\int_0^{2\pi}1\,dt=\int_0^{2\pi}(x'^2(t)+y'^2(t))\,dt=\int_0^{2\pi}x'^2(t)\,dt+\int_0^{2\pi}y'^2(t)\,dt\\
&=\pi\left(\frac{a_0^2(x')}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x'))+\frac{a_0^2(y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)\\
&=\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x')+a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)(a_0(x')=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x'(t)\,dt=\frac{1}{\pi}(x(2\pi)-x(0))=0=a_0(y'))\\
&\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^2(a_n^2(x)+b_n^2(x)+a_n^2(y)+b_n^2(y))\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de GREEN-RIEMANN

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}&=\int_\gamma xdy=\int_0^{2\pi}x(t)y'(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}((x(t)+y'(t))^2-(x(t)-y'(t))^2)\,dt\\
&=\frac{\pi}{4}\left(\frac{a_0^2(x+y')}{2}-\frac{a_0^2(x-y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x+y')-a_n^2(x-y')+b_n^2(x+y')-b_n^2(x-y'))\right)\\
&=\pi\left(\frac{a_0(x)a_0(y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(x)a_n(y')+b_n(x)b_n(y'))\right)\text{ (par linéarité des coefficients de FOURIER)}\\
&=\frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y))\\
&\leqslant\frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y))=\frac{\mathscr{L}}{2}\times\frac{\mathscr{L}}{\pi}=\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour $n\geqslant1$,

$$n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y))\leqslant n\times\tfrac{1}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y))\leqslant\tfrac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)),$$

sont des égalités. En particulier, pour $n\geqslant2$, on a $a_n(x)=a_n(y)=b_n(x)=b_n(y)=0$. D'autre part, quand $n=1$, $a_1(x)b_1(y)-b_1(x)a_1(y)=\frac{1}{2}(a_1^2(x)+b_1^2(y)+b_1^2(x)+a_1^2(y))$ impose $(a_1(x)-b_1(y))^2+(b_1(x)+a_1(y))^2=0$ et donc $a_1(y)=-b_1(x)$ et $b_1(y)=a_1(x)$.

D'après le théorème de DIRICHLET, en posant $\alpha=\frac{a_0(x)}{2}$, $\beta=\frac{a_0(y)}{2}$, $a=a_1(x)$ et $b=b_1(x)$,

$$\forall t\in[0,2\pi],\ \begin{cases}x(t)=\alpha+a\cos t+b\sin t=\alpha+\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-t_0)\\ y(t)=\beta-b\cos t+a\sin t=\beta+\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-t_0)\end{cases}$$

où $\cos(t_0)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(t_0)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Le support de l'arc γ est donc un cercle. La réciproque est claire.

L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où $L=2\pi$ et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc γ est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe C est un réel strictement positif $\mathscr{L}$ quelconque, l'homothétique (C') de (C) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2\pi}{\mathscr{L}}$ a une longueur $\mathscr{L}'$ égale à 2π et délimite une aire $\mathscr{A}'=\left(\frac{2\pi}{\mathscr{L}}\right)\times\mathscr{A}$.

L'inégalité $\mathscr{A}'\leqslant\frac{\mathscr{L}'^2}{2\pi}=2\pi$ s'écrit encore $\mathscr{A}\leqslant2\pi\times\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi^2}=\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}$. De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe (C) est un cercle (dans ce cas, $\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2R^2}{4\pi}=\pi R^2=\mathscr{A}$).

$$\boxed{\mathscr{A}\leqslant\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}\text{ avec égalité si et seulement si la courbe }(C)\text{ est un cercle.}}$$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

Correction de l'exercice 5318 ▲

Droite orthogonale à $\vec{S}\wedge\vec{u}$, $\vec{u}\perp\vec{\mathscr{P}}$, ou $\varnothing$ ou $\mathscr{P}$.

Correction de l'exercice 5321 ▲

Soit $\mathscr{T}$ un torseur : on décompose $\mathscr{T}(A)$ en $\alpha\vec{AB}\wedge\vec{BC}+\beta\vec{AB}\wedge\vec{BD}+\gamma\vec{AC}\wedge\vec{CD}$, et $\vec{R}$ en $\alpha'\vec{AB}+\beta'\vec{AC}+\gamma'\vec{AD}$.
$\Rightarrow$ famille génératrice.

Correction de l'exercice 5323 ▲

(a) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2$ puis pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $g(x,y,z)=z-f(x,y)$. $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z=f(x,y)$ ou encore $g(x,y,z)=0$.
La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, g\right)(x,y,z)=\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x^3+3x^2-y\\ -x+2y\\ 1\end{pmatrix}\neq\vec{0}.$$

Donc, la surface $\mathscr{S}$ est régulière et en tout point (x_0,y_0,z_0) de la surface $\mathscr{S}$, le vecteur gradient est un vecteur normal au plan tangent $\mathscr{P}_0$ à la surface $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0). Le plan

$$\mathscr{P}_0 \text{ parallèle à } \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4x_0^3+3x_0^2-y_0=0\\ -x_0+2y_0=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0=2y_0\\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0=2y_0\\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1)=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow y_0=0=x_0 \text{ ou } (y_0=\frac{1}{4}\text{ et } x_0=\frac{1}{2}) \text{ ou } (y_0=\frac{1}{8}\text{ et } x_0=\frac{1}{4})$$

On obtient ainsi les trois points $O(0,0,0)$, $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right)$ et $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{256}\right)$.

(b) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

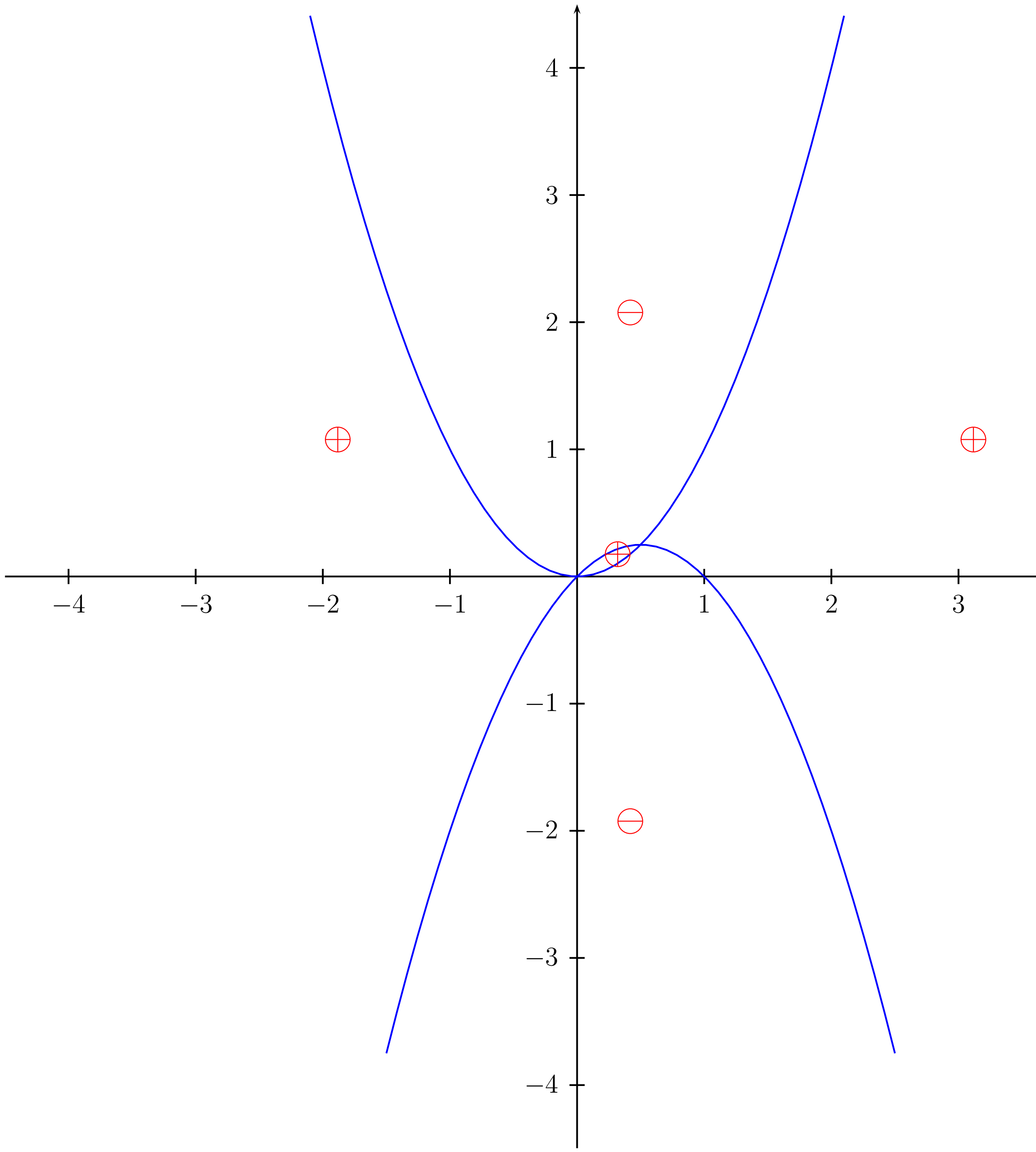
$$rt-s^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^2=(12x^2-6x)(-2)-1^2=-24x^2+12x-1$$

• En O, le plan tangent est le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. De plus, $(rt-s^2)(0,0)=-1<0$. Donc le point O est un point selle.
• En A, le plan tangent est aussi le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. De plus, $(rt-s^2)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-1<0$. Donc le point A est un point selle.
• En B, le plan tangent est le plan d'équation $z=\frac{1}{256}$. De plus, $(rt-s^2)\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}>0$. Donc la surface $\mathscr{S}$ a une disposition en ballon au point B.

(c) Il s'agit maintenant d'étudier le signe de $z=f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2=(x^4-y^2)-x(x^2-y)=(x^2-y)(x^2+y-x).$$

L'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est donc la réunion des deux paraboles d'équations respectives $y=x^2$ et $y=-x^2+x$ dans le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Représentons cette intersection ainsi que le signe de $f(x,y)\oplus\ominus$.



Correction de l'exercice 5325 ▲

$4x^2+4y^2-3z^2=a^2$.

Correction de l'exercice 5326 ▲

(Γ) est l'intersection d'un cylindre hyperbolique et d'un plan. C'est une hyperbole dans ce plan.
Pour $M(x,y,z)\in\Gamma$, on pose $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et on élimine x et y entre les équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2-y^2-4x+2=0 \\ x+z=1. \end{cases}$$

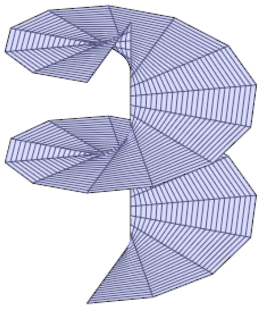
ce qui donne $2z^2=r^2$, donc Γ est incluse dans l'hyperboloïde de révolution d'équation $2z^2=x^2+y^2$ et la surface cherchée itou. La réciproque est évidente.

Correction de l'exercice 5327 ▲

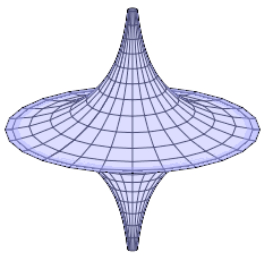
(a) $\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}-\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)x-\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}+\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)y+\rho z=\rho f-\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}$.

(b) $f-\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}=a(\theta)\Rightarrow f(\rho,\theta)=a(\theta)+b(\theta)\rho$.

(c)



Correction de l'exercice 5328 ▲



Correction de l'exercice 5329 ▲

La normale en M est parallèle ou sécante à $Oz \Leftrightarrow y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial\theta}=0\Leftrightarrow f=f(\rho)$.

Correction de l'exercice 5331 ▲

(a) Hyperboloïde de révolution à deux nappes.

(b) $x=2y$, $z^2=1+5y^2$.

Correction de l'exercice 5332 ▲

(a) $z=x^2+y^2$.

(b) $x+y=\frac{1}{2}$.

(c) $(x-y+\frac{1}{2})^2=2(z-y+\frac{1}{4})$.

Correction de l’exercice 5333 ▲

$x^2+y^2+z^2-2xz-2yz+2z=1$.

Correction de l’exercice 5336 ▲

(a) $\begin{pmatrix} (x+2y)(y+2z) \\ -(2x+y)(y+2z) \\ (2x+y)(2y+z) \end{pmatrix}$ sauf pour $M=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(1,-2,1)$.

(b) $(x-z)(x+y+z)=0$.

(c) segment $x=z\in[-1,1]$ et ellipse $x^2+z^2+xz=1$.

Correction de l’exercice 5337 ▲

$a^2y^2=(x^2+y^2)(r^2-z^2)$.

Correction de l’exercice 5338 ▲

$y(x^2+(y-1)^2+z^2)=z^2$.

Correction de l’exercice 5339 ▲

$x=\frac{a}{2}(1+\cos u)$, $y=\frac{v}{2}(1+\cos u)$, $z=\frac{\sqrt{a^2+v^2}}{2}\sin u$.

Correction de l’exercice 5340 ▲

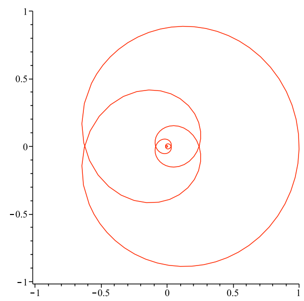
(a) $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(b) On paramètre (Σ) par : $\begin{cases} x=a\cos u/\operatorname{ch} v \\ y=a\sin u/\operatorname{sh} v \\ z=a\operatorname{th} v. \end{cases}$

La tangente à la méridienne passant par $M(u,v)$ est dirigée par $\frac{\partial\vec{M}}{\partial v}$ et la tangente à (Γ) passant par $M(t,mt)$ est dirigée par $\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}+m\frac{\partial\vec{M}}{\partial v}$. Après calculs, le cosinus de ces deux vecteurs vaut $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ donc est constant.

(c) Une courbe tracée sur (Σ) est définie par la donnée de u et v en fonction d’un paramètre t. Le cosinus de l’angle entre cette courbe et une méridienne de (Σ) vaut $\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}$, donc est constant si et seulement si le rapport v’$_{\overline{u'}}$ est constant. En notant m cette constante et en prenant $u(t)=t$, on trouve les courbes déduites de (Γ) par rotation autour de Oz.

(d)



Correction de l’exercice 5341 ▲

Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a 20 !.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

(a) Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2}=190$ choix ;

(b) Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;

(c) Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a 18! choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Correction de l'exercice 5342 ▲

- Une tenue est un triplet (P,T,C) : il y a $5\times 6\times 8 = 240$ tenues différentes ;
- «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2\times 4\times 5 = 40$ façons.
La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.
- «Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements : N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par : $(N_1\cap\overline{N_2}\cap\overline{N_3})\cup(\overline{N_1}\cap N_2\cap\overline{N_3})\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2}\cap N_3)$. Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

Correction de l'exercice 5343 ▲

Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2\cdot\binom{30}{2} = 870$ bises.

Correction de l'exercice 5344 ▲

(a) Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.

(b) L'événement E «répondre au hasard au moins 6 fois correctement» est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions. Notons A_n l'événement : «répondre au hasard exactement n fois correctement». Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10-n$ sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10, et donc il y a : $\binom{10}{n}\times 3^{10-n}$ façons de réaliser A_n et :

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n}\cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$

pour $n = 6,7,8,9,10$. $P(E) = \sum_{n=6}^{10}\frac{\binom{10}{n}\cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728\times 10^{-2}$, soit environ 2%.

Correction de l'exercice 5345 ▲

Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1-0.7)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.9) = 0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1-0.015 = 0.985$.

Correction de l'exercice 5346 ▲

L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\binom{300}{10}$. Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1-\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Correction de l'exercice 5347 ▲

$P(A\cap B) = pq$ car les maladies sont indépendantes. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = p+q-pq$

Correction de l'exercice 5348 ▲

Soit A : l'événement «tirer un roi» et B : «tirer un pique».
$P(A\cap B) = \frac{1}{52}; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
Donc $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants.
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.

Correction de l'exercice 5349 ▲

Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $P(A) = \frac{2}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{4}$. On en conclut que : $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{G,F\}, b \in \{G,F\}, c \in \{G,F\}\}$ représente les $2^3 = 8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $P(A) = 1 - P(\{(G,G,G),(F,F,F)\}) = \frac{6}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8}$, $P(A \cap B) = P\{(F,G,G),(G,F,G),\{(G,G,F)\} = \frac{3}{8}$. On a $P(A)P(B) = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$, et les événements A et B sont indépendants

Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$, $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$ $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ si et seulement si $n = 3$.

Correction de l'exercice 5350 ▲

Notons les différents événements : Fe : «être femme», Lu : «porter des lunettes», H : «être homme»

Alors on a $P(Fe) = 0.6$, $P(Lu/Fe) = \frac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a $P(Lu/H) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $P(Fe/Lu)$. D'après la formule des probabilités totales on a : $P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$ avec $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$.

Application numérique : $P(Lu) = 0.4$, donc $P(Fe/Lu) = \frac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$. Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

Correction de l'exercice 5351 ▲

C'est évidemment le même que le précédent (exercice **??**), seul le contexte est différent : il suffit d'adapter les calculs faits. En pronostiquant un enfant, le présentateur a une chance sur deux environ de ne pas se tromper.

Correction de l'exercice 5352 ▲

Fumeurs

Définissons les événements : F_n «Fumer le $n^{\text{ème}}$ jour», et $\overline{F_n}$ l'événement complémentaire. Alors $\{\overline{F_n}, F_n\}$ constitue un système complet d'événements, $P_n = P(F_n)$; on peut donc écrire : $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n) + P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$.

Comme $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$ et $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$ $1 - P_{n+1} = 0.9P_n + 0.3(1 - P_n)$, soit $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$. Notons (R) cette relation.

Pour connaître le comportement à long terme, il faut étudier cette suite récurrente ; il y a des techniques mathématiques pour ça, c'est le moment de s'en servir.

Cherchons la solution de l'équation «$\ell = -0.6\ell + 0.7$», la limite éventuelle satisfait nécessairement cette équation : faire un passage à la limite dans la relation (R), ou utiliser le théorème du point fixe.

On trouve $\ell = \frac{7}{16}$; alors, la suite $Q_n = (P_n - \ell)$ vérifie : $Q_{n+1} = -0.6Q_n$, ce qui permet de conclure : $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$ et comme $((-0.6)^n)$ est une suite qui tend vers 0, on peut dire que la suite (Q_n) tend vers 0 et donc que la suite (P_n) tend vers $\ell = \frac{7}{16}$.

Conclusion : la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n tend vers $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$.

Correction de l'exercice 5353 ▲

$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$. Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Correction de l'exercice 5354 ▲

La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geq 0.8$. On a facilement : $n \geq 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geq 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geq 21$.

Correction de l'exercice 5355 ▲

(a) Le taux global de personnes soulagées : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.

(b) Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/P(S) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%$.

Correction de l'exercice 5356 ▲

(a) Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $P(CB/YB) = P(YB/CB)P(CB)/P(YB)$=$P(YB \cap CB)/P(YB) = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$.

(b) La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB)$=$\frac{0.15}{0.25} = 0.6$.

(c) La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $P(\text{non}YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$.

Correction de l'exercice 5357 ▲

On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler : $1 - p + p(1-q)^2$.

Correction de l'exercice 5358 ▲

(a) La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$ or $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$. D'où : $P(M/T^+) = 23.7\%$.

(b) La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 76.3\%$.

(c) La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P(M/T^-) = 0.0017$.

(d) La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Correction de l'exercice 5359 ▲

Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a 8 !. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

(a) Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $BMMMMMMM$, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a 7! permutations de ce type. Donc $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$, on s'en doutait !

(b) De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $MBMMMMMM$: il y en a encore 7 !, et la probabilité est la même.

(c) Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Correction de l'exercice 5360 ▲

(a) L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\frac{1}{6!}$.

(b) André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a 5! permutations pour ces derniers : $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.

(c) André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a 4! permutations pour ces derniers : $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.

(d) André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : «André danse avec son épouse» ; D_2 : «René danse avec son épouse». Alors $D = D_1 \cup D_2$ et $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$.

Correction de l'exercice 5361 ▲

(a) Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

(b) Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à «choisir» parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

$$| \bullet\bullet || \bullet | \bullet\bullet\bullet | \bullet\bullet |$$

les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.0591 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.
D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Correction de l'exercice 5362 ▲

(a) $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{G_n})P(\overline{G_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.
$v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.
Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1-u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \frac{3}{7}$. Donc $u_n = \frac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \frac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Correction de l'exercice 5363 ▲

(a) On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $P(A) = 1 - (\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.

(b) La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Correction de l'exercice 5364 ▲

On utilise une loi hypergéométrique

$P(A) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.73626$

$P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.1978 \times 10^{-2}$

$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.49451$

Correction de l'exercice 5365 ▲

Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15}0.75^{15}0.25^5 = 0.20233$.

Correction de l'exercice 5366 ▲

La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0,1,2,3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[X = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3-k$ sujets parmi les 40 non révisés.
Alors :

(a) Les trois sujets tirés ont été révisés : $P[X=3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.

(b) Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $P[X=2] = \frac{\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.

(c) Aucun des trois sujets : $P[X=0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0,1,2,3\}$ par :

$$P[X=k] = \frac{\binom{60}{k}\cdot\binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :
$k = 0 : P[X=0] \simeq 6.110 \times 10^{-2}$
$k = 1 : P[X=1] \simeq 0.289$
$k = 2 : P[X=2] \simeq 0.438$
$k = 3 : P[X=3] \simeq 0.212$
L'espérance est $E(X) = 1.8$ (selon la formule $E(X) = np$).

Correction de l'exercice 5367 ▲

Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\frac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $P[X=k]=C_{20}^k(\frac{1}{4})^k(1-\frac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.
Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $E(X)=np=5$

Correction de l'exercice 5368 ▲

Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre X de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda=60\times 0.1=6$. L'espérance de X est donc $E(X)=6$;

On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X=k]=\frac{6^ke^{-6}}{k!}$. Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X=3]\simeq 0.9\%$; $P[X=4]\simeq 13.4\%$; $P[X=5]=P[X=6]\simeq 16.1\%$; $P[X=7]\simeq 13.8\%$;$P[X=8]\simeq 10.3\,\%$.

Remarque : de façon générale si le paramètre λ d'une loi de Poisson est un entier K, on a : $P[X=K-1]=\frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!}=\frac{K^Ke^{-K}}{K!}=P[X=K]$.

Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X\geq 10]=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{6^ke^{-6}}{k!}\simeq 8.392\times 10^{-2}$.

Correction de l'exercice 5369 ▲

La probabilité $p=\frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p=1$ au nombre X de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X\geq 1]=1-P[X=0]=1-e^{-1}\simeq 63\%$.
Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X'\geq 1]=1-e^{-2}\simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X'=1]$ et $[X'=2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si X obeit à une loi de Poisson d'espérance K, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X=K-1]$ et $[X=K]$.

Correction de l'exercice 5370 ▲

(a) 30% est la probabilité de l'événement Panne, noté Pa ; la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans, d'être hors d'usage est $P(HU)=P(HU/Pa)P(Pa)+P(HU/nonPa)P(nonPa)=0.3\cdot 0.75+0.4\cdot 0.7=0.505$.

(b) La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est $P(\text{non}\,Pa/HU)=P(HU/\text{non}\,Pa)P(\text{non}\,Pa)/P(HU)=0.4\cdot 0.7/0.505=0.55446$.

(c) La loi de probabilité de X est une loi binomiale, $n=10$, $p=0.4$, espérance 4.

(d) $P[X=5]=\binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5=0.10292$

Correction de l'exercice 5371 ▲

Le nombre X de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.

La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[X=0]=1-e^{-\frac{100}{80}}=1-e^{-\frac{5}{4}}=0.71350$.

Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[Y=0]=1-e^{-\frac{300}{80}}=0.97648$.

334 Loi normale et approximations

Correction de l'exercice 5372 ▲

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p=1-P[7.97\leq D\leq 8.03]$. Or $P[7.97\leq D\leq 8.03]=P[-\frac{0.03}{0.02}\leq\frac{D-8}{0.02}\leq\frac{0.03}{0.02}]=F(1.5)-F(-1.5)=0.8664$. La proportion de billes rejetées est donc $p=13.4\%$.

Correction de l'exercice 5373 ▲

(a) La probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm est : $P[X\leq 0.36]=P[\frac{X-0.3}{0.1}\leq 0.6]=0.726$, soit 72.6%.

(b) La probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm est $P[0.25\leq X\leq 0.35]=2F(0.5)-1=0.383$, soit 38.3%. Pour $n=20$, la loi de $Z=\sum X_i$ est une loi normale de paramètres : d'espérance $E(Z)=3$ et de variance $\operatorname{Var}Z=0.2$.

Correction de l'exercice 5374 ▲

Pour $n=2000$, la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» est une loi de Poisson de paramètre 2 : alors $P[N\le 3]=0.86$.

Remarquons qu'en faisant l'approximation par une loi normale et en employant le théorème central limite, on obtient : $P[N\le 3]\simeq 0.76$, et avec correction de continuité on obtient $P[N\le 3]\simeq 0.85$.

Correction de l'exercice 5375 ▲

Par des méthodes analogues on trouve que la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6 mm est 14.3.

Correction de l'exercice 5376 ▲

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y=\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X\le 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{165-m}{\sigma}]=0,56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15)=0.5596$.

De même, si $P[X\ge 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma}\ge\frac{180-m}{\sigma}]=0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{180-m}{\sigma}]=0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28)=0.8997$.

Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma}=0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma}=1.28$ d'où $\sigma\simeq 13.27$, $m\simeq 163$ cg. Alors, $P[X\ge 182]=P[\frac{X-m}{\sigma}\ge\frac{182-m}{\sigma}]=1-F(1.43)=0.0764$.

Sur 10000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

Correction de l'exercice 5377 ▲

(a) Loi binomiale $B(365;\frac{4}{365})$, approchée par la loi de Poisson de paramètre 4, d'espérance et variance 4.

(b) Loi binomiale $B(6;\frac{1}{2})$, d'espérance 3 et variance $\frac{3}{2}$.

(c) Loi hypergéométrique.

Correction de l'exercice 5378 ▲

(a) La loi de X est la loi binomiale $B(1000;0.02)$, d'espérance 20, d'écart-type $\sqrt{19.6}$.

(b) En approchant cette loi par celle d'une loi normale de paramètre $m=20$, écart-type $\sqrt{19.6}$. $P[18\le X\le 22]=P[(17.5-20)/\sqrt{19.6}\le (X-20)/\sqrt{19.6}\le (22.5-20)/\sqrt{19.6}]\simeq 0.428$.
Sans correction de continuité on trouve $P[(17-20)/\sqrt{19.6}\le (X-20)/\sqrt{19.6}\le (22-20)/\sqrt{19.6}]\simeq 0.348$.
Approchée par la loi de Poisson de paramètres : espérance 20 et variance 20, on trouve $P[18\le X\le 22]\simeq 0.423$.
Enfin par la vraie loi binomiale : on trouve $P[18\le X\le 22]\simeq 0.427$.

Correction de l'exercice 5379 ▲

(a) Soit F l'événement «la pièce est fausse» ; soit U l'événement «la pièce est un euro» ; soit D l'événement «la pièce est deux euros». Alors $P(F)=P(F/U)P(U)+P(F/D)P(D)=2.9\%$.

(b) On cherche $P(U/F)=(P(F/U)P(U))/P(F)=51.7\%$.

(c) X la variable aléatoire «nombre de pièces fausses parmi 1000» obéit à une loi binomiale$B(1000;5\%)$. Espérance : 50 ; écart-type : $\sigma=\sqrt{47.5}$. En approchant cette loi par une loi normale $N(50;\sigma)$, la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52 est : $P[(47.5-50)/\sigma\le (X-50)/\sigma\le (52.5-50)/\sigma]\simeq 28.3\%$.

Correction de l'exercice 5380 ▲

(a) La loi de X est une loi binomiale $B(180;\frac{1}{6})$ Espérance : 30 ; écart-type : $\sigma=\sqrt{25}=5$.

(b) En approchant cette loi par une loi normale $N(30;\sigma)$ la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 : $P[(28.5-30)/\sigma\le (X-30)/\sigma\le (32.5-30)/\sigma]\simeq 30.94\%$. Avec la vraie loi, on trouve la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 est 30.86%.

Correction de l'exercice 5381 ▲

(a) Lorsque l'on tire un bulletin au hasard, la probabilité que ce soit un bulletin pour A est de 0.2.

(b) Il y a suffisamment de bulletins de vote en tout pour que l'on puisse assimiler ces tirages à des tirages avec remise ; alors la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0.2$; or $np=40$; on peut faire l'approximation normale. L'espérance de X est donc $m=40$ et l'écart-type : $\sqrt{40\times 0.8}=4\sqrt{2}$.

(c) $P[X\geq 45]=1-P[X\leq 44]\simeq 1-F(\frac{44.5-40}{4\sqrt{2}})\simeq 21\%$, c'est la probabilité pour que le nombre de voix pour A soit supérieur à 45 dans un lot de 200 bulletins. De même, $P[30\leq X\leq 50]\simeq F(\frac{50.5-m}{\sigma})-F(\frac{29.5-m}{\sigma})\simeq 93.6\%$.

(d) Reprenons le calcul pour le candidat B qui n'a obtenu que 2% des voix. Alors pour $n=100$ et $p=0.02$ l'approximation par une loi de Poisson d'espérance $\lambda=2$ est légitime. On peut dire que $P[Y\geq 5]=1-P[Y\leq 4]=1-\sum_{k=0}^{4}\frac{e^{-2}2^k}{k!}$, de l'ordre de 5%.
Enfin $P[1\leq Y\leq 4]=\sum_{k=1}^{4}\frac{e^{-2}2^k}{k!}\simeq 0.812$.

Correction de l'exercice 5382 ▲

(a) i. Pour calculer la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année, posons le nombre de contrôles comme une variable aléatoire. Elle obéit à une loi binomiale $B(700;0.1)$. On peut l'approcher par la loi normale $N(70;\sqrt{63})$.
$P[60\leq X\leq 80]=P[-10/\sqrt{63}\leq X\leq 10/\sqrt{63}]\simeq 2F(10.5/\sqrt{63})-1=0.814$. La probabilité d'être contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année est 81.4.

ii. Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12\times 700=784$ euros. Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est aX, si a est l'amende fixée par la compagnie.
On cherche donc a pour que : $P[aX\geq 784]\geq 0.75$: Soit $P[aX\leq 784]\leq 0.25$: Par lecture de table : $a=784/64.642=12.128$ Il faut que l'amende dépasse 13 euros.

(b) Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12\times 300=336$ euros Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est bX, si b est l'amende fixée par la compagnie. X obéit à une loi binomiale $B(300;0.5)$. On cherche donc b pour que : $P[bX\geq 336]\geq 0.75$. Par un raisonnement analogue, on obtient cette fois le résultat : il suffit que l'amende dépasse 2 euros 30 !

Correction de l'exercice 5383 ▲

(a) On obtient, sur l'échantillon, la moyenne $m_e=214$, l'écart-type $\sigma_e=55.77$.

(b) La moyenne sur l'entreprise est estimée par m_e. L'écart-type est estimé par : $\widehat{\sigma_e}=\sqrt{\frac{100}{99}}55.77\simeq 56.05$.

(c) On en déduit, au seuil 95%, un intervalle de confiance pour la moyenne : $[m_e-y_\alpha\frac{\widehat{\sigma_e}}{\sqrt{n}};m_e+y_\alpha\frac{\widehat{\sigma_e}}{\sqrt{n}}]=[203.01;224.99]$.
Ainsi le taux moyen de cholestérol est, à un seuil de confiance 95%, située entre 203 et 225 cg.

Correction de l'exercice 5384 ▲

Il s'agit ici d'estimer une proportion, suite à une observation qui vaut : $f=\frac{13}{12000}\simeq 1.0833\times 10^{-3}$.
On peut utiliser une approximation par une loi normale pour la moyenne d'échantillon. On en déduit un intervalle de confiance pour la proportion, au seuil 95% : $I_\alpha=[f-y_\alpha\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}};p+y_\alpha\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}]\simeq[4.7\times 10^{-4},1.7\times 10^{-3}]$.
On peut choisir I_α comme intervalle de confiance, au seuil 95%, de la proportion cherchée. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a l'intervalle $I=[f-a,f+a]$, avec : $P[\left|\overline{X}-p\right|\leq a]\geq 1-(\frac{\mathrm{Var}\overline{X}}{a^2})$ et $P[|X-p|\leq a]\geq 0.95$ si $1-\frac{\mathrm{Var}\overline{X}}{a^2}\geq 0.95$, soit $a\geq 1.3979\times 10^{-3}$.
On préfèrera donc la première méthode.

Correction de l'exercice 5385 ▲

Un intervalle dans lequel on soit «sûr» à 95% de trouver le nombre exact de personnes à soigner sur les 10000 : $[p-y_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};fe+y_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$. Fréquence entre 65,7% et 94,3%. Donc entre 698 et 802 personnes sur 10000

Correction de l'exercice 5386 ▲

La loi exacte suivie par X est une loi binomiale de paramètres : n,p. $E(X)=0.75n$ et $\mathrm{Var}X=0.25\cdot 0.75n$. Comme $n>150$, on peut faire l'approximation par la loi normale d'espérance $0,75n$ et d'écart-type $\sigma=\sqrt{0.25\cdot 0.75n}$. $P[X>150]\leq 0.05$ si $P[X\leq 150]\geq 0.95$ si : $P[\frac{X-0.75n}{\sqrt{0.25\cdot 0.75n}}\leq\frac{150-0.75n}{\sqrt{0.25\cdot 0.75n}}]\geq 0.95$. Dans la table de Gauss, on lit $F(1.645)=0.95$. On n'a plus qu'à résoudre l'inéquation : $\frac{150.5-0.75n}{\sqrt{0.25\cdot 0.75n}}\geq 1.645$, dont les solutions sont :

$$0\leq n\leq 187.$$

Ainsi, en vendant moins de 187 billets, la compagnie ne prend qu'un risque inférieur à 5% de devoir indemniser des voyageurs en surnombre. Faisons varier les paramètres, cela ne pose aucun problème :

$N = 150$, $p = 0.5$. n est solution de l'inéquation : $\frac{150.5-0.5n}{\sqrt{0.5.0.5n}} \geq 1.645$. Solution : $n \leq 272$.
$N = 300$, $p = 0.75$. n est solution de l'inéquation : $\frac{300.5-0.75n}{\sqrt{0.25.0.75n}} \geq 1.645$. Solution : $n \leq 381$.
$N = 300$, $p = 0.5$. n est solution de l'inéquation : $\frac{300.5-0.5n}{\sqrt{0.5.0.5n}} \geq 1.645$. Solution : $n \leq 561$.

Correction de l'exercice 5387 ▲

(a) La loi de X est la loi binomiale $n = 30$, $p = 0.2$.

(b) Un intervalle de confiance au seuil 95%, permettant d'estimer le nombre de clients à prévoir : c'est pour la fréquence : 0.657 ; 0.943. Soit entre 20 et 28 personnes. C'est une large fouchette due à n petit.

Correction de l'exercice 5388 ▲

(a) On peut estimer m par la moyenne de l'échantillon : 68 kg, et σ par $\sigma_e\sqrt{\frac{300}{299}} = 7\sqrt{\frac{300}{299}} \simeq 7.0117$ kg. On en déduit un intervalle de confiance pour la moyenne m : $I_\alpha = [67.2; 68.8]$.

(b) La borne supérieure de l'intervalle étant de 69 kg, il est raisonnable de prendre 70 kg comme espérance de la variable poids d'un passager.

(c) Le décollage est autorisé si le poids total des voyageurs et de leurs bagages ne dépasse pas 26.2 tonnes. Pour chacun des 300 passagers, notons : X_i son poids et Y_i le poids de ses bagages. Faisons l'hypothèse d'indépendance entre les variables X_i et Y_i. Le poids total $Z = \sum_{i=1}^{300}(X_i + Y_i)$ est la somme de 600 variables aléatoires indépendantes ; le théorème central limite s'applique sous cette hypothèse. Comme l'espérance totale est $E(Z) = 300 \cdot (70 + 15) = 25\,500$ et la variance de Z est : $\operatorname{Var} Z = 300 \cdot (\operatorname{Var} X_i + \operatorname{Var} Y_i)$. Alors Z suit approximativement une loi normale de moyenne $m = 25\,500$, d'écart-type $\sigma = \sqrt{300 \cdot (8^2 + 5^2)} = 163.4$. Alors $Z' = \frac{Z-m}{\sigma}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite. Le décollage est interdit si : $Z > 26\,200$, c'est-à-dire si $Z' > 4.284$. On lit dans la table de Gauss : pour $t = 4$, $F(t) = 0.999\,968 = P[Z' \leq 4]$. Le décollage est interdit pour cause de surcharge pondérale avec une probabilité inférieure à $0.000\,04$.

Correction de l'exercice 5389 ▲

(a) L'intervalle de temps de 4 minutes est la répétition de 240 secondes, au cours desquelles les appels surviennent de façon indépendante, avec la probabilité d'appel de $\frac{1}{20}$; la loi de probabilité du nombre d'appels reçus en 4 minutes est donc une loi binomiale, de paramètres $n = 240$ et $p = \frac{1}{20}$.

(b) Comme $n \geq 30$ et $np \leq 15$, il est possible d'approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre λ estimé par $np = 12$.

(c) Un échantillon de taille 200 a été réalisé pour estimer le nombre moyen d'appels par minute ; c'est un échantillon de taille 50 pour la variable précédente (nombre d'appels reçus en 4 minutes) qui suit une loi de Poisson d'espérance et de variance 12. Un intervalle de confiance au niveau 95% pour la moyenne est $I_\alpha = [11; 13]$.

Correction de l'exercice 5390 ▲

Posons H_0 «les rejets chimiques ne modifient pas le nombre de plages atteintes par les algues».

Notons $p_0 = 0.1$ la proportion théorique de plages atteintes par l'algue verte avant les rejets chimiques ; p la proportion théorique de plages atteintes par l'algue verte après les rejets chimiques et f la fréquence observée dans l'échantillon.

Considérons alors la variable aléatoire X_i, $i \leq 50$, qui a deux modalités : 1 si la plage est atteinte, 0 sinon. C'est une variable de Bernoulli, alors le nombre total de plages atteintes dans l'échantillon est une variable aléatoire qui, sous H_0, obéit à une loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p_0 = 0.1$.

Sous H_0, «$p = p_0 = 0.1$» la variable «moyenne d'échantillon» :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{i=50} X_i}{n}$$

dont une réalisation est la fréquence observée, soit $\frac{10}{50}$, obéit à une loi que l'on peut approcher par une loi normale de paramètres : moyenne p_0 et écart-type $\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{50}}$.

A l'aide de la formule de cours, on détermine l'intervalle de confiance associé : $I \simeq [0.017; 0.183]$. On constate que la fréquence observée est dans la zone de rejet (non chimique) : 0.2 n'est pas dans l'intervalle de confiance au seuil 95%. On peut donc rejeter H_0 et conclure, au risque 0.05, que les rejets chimiques modifient de façon significative le nombre de plages atteintes par l'algue.

Correction de l'exercice 5391 ▲

Mise en oeuvre du test :

(a) On définit un risque : 5%. Pour étudier la dépendance de ces caractères faisons l'hypothèse H_0 : «les deux caractères sont indépendants » et voyons ce qui se passerait sous cette hypothèse. Notons les événements :
  – C : «avoir un cancer dans la population observée»
  – F : «être fumeur dans la population observée»

  Si les événements F et C sont indépendants, alors : $P(F \cap C) = P(F) \cdot P(C)$ et de même pour les trois autres possibilités : $P(\overline{C} \cap F)$, $P(\overline{C} \cap \overline{F}), P(C \cap \overline{F})$, quantités que l'on peut donc calculer sous H_0 :
  $P(F) = \frac{600}{1000}$, $P(C) = \frac{500}{1000}$, $P(F) \cdot P(C) = \frac{3}{10}$, alors l'effectif théorique correspondant à la catégorie «fumeur et cancéreux» est de 300.

(b) On en déduit le tableau théorique sous H_0 :

Théorique	cancer	non cancer	marge
fumeur	300	300	600
non fumeur	200	200	400
marge	500	500	1000

(c) On calcule alors la valeur de $s = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$: on obtient : $s = 34.73$. On a précisé le risque de %, mais pour $\alpha = 0,001$, on lit dans la table du khi-deux à un degré de liberté : $P[\chi^2 \geq 10.83] = 0.001$ et le χ^2 calculé est 34.73 !

(d) On décide de rejeter H_0. Ainsi, en rejetant l'hypothèse de l'indépendance des caractères «être fumeur» et «avoir un cancer de la gorge», on a moins de une chance sur 1000 de se tromper, puisque moins de un tableau possible sur mille conduit à un calcul de χ^2 plus grand que 10.83 ; beaucoup moins sans doute, conduiraient à un calcul de χ^2 plus grand que 34.73.

Correction de l'exercice 5393 ▲

Soit G sous-groupe de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, alors Card$G$ divise Card$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = 8$. Donc Card$G \in \{1,2,4,8\}$. De plus si G contient la classe $\bar{n}$ d'un nombre impair, alors G contient le sous-groupe engendré par $\bar{n}$ qui est $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ car alors n et 8 sont premiers entre eux, donc $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Étude des cas. Si Card$G = 8$ alors $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Si Card$G = 4$ alors G ne peut contenir que des classes d'entiers pairs d'après la remarque précédente, mais comme il y a exactement 4 classes d'entiers pairs alors $G = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Si Card$G = 2$ alors $G = \{\bar{0}, x\}$ et x est un élément d'ordre 2, le seul élément d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est $\bar{4}$. Donc $G = \{\bar{0}, \bar{4}\}$. Enfin si Card$G = 1$ alors $G = \{\bar{0}\}$.

Correction de l'exercice 5396 ▲

La relation d'équivalence associée au quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$ est :

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} > 0.$$

Si $x > 0$ alors $x \sim +1$ car $x(1)^{-1} > 0$ (en fait x est équivalent à n'importe quel réel strictement positif) ; si $x < 0$ alors $x \sim -1$ car $x(-1)^{-1} > 0$, enfin -1 et $+1$ ne sont pas équivalents. Il y a donc deux classes d'équivalence : $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* = \{\overline{+1}, \overline{-1}\}$.
L'application $\phi : \mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\phi(\overline{+1}) = \bar{0}$ et $\phi(\overline{-1}) = \bar{1}$ est un isomorphisme entre les deux groupes.

Correction de l'exercice 5400 ▲

(a) Il faut montrer que pour $x \in G$ et $y \in D(G)$, $xyx^{-1} \in D(G)$. Commençons par montrer ceci pour y un générateur de $D(G)$. Si $y = ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g, h \in G$. Nous remarquons que :

$$xyx^{-1} = \left(xghx^{-1}(gh)^{-1}\right)\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)\left(hgx(hg)^{-1}x^{-1}\right)$$

  qui est un produit d'éléments de $D(G)$. Donc xyx^{-1} est un élément de $D(G)$.
  Soit maintenant y un élément quelconque de $D(G)$, alors il s'écrit comme produit de générateurs :

$$y = y_1 y_2 \dots y_n, \quad \text{avec } y_i = g_i h_i g_i^{-1} h_i^{-1}.$$

  Écrivons $xyx^{-1} = (xy_1x^{-1})(xy_2x^{-1}) \dots (xy_nx^{-1})$. Chaque xy_ix^{-1} appartient à $D(G)$. Et donc xyx^{-1}. Donc $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

(b) Soit $\alpha, \beta \in G/D(G)$, alors il existe $a, b \in G$ tels que $\bar{a} = \alpha$ et $\bar{b} = \beta$. Nous savons que $aba^{-1}b^{-1} \in D(G)$ et donc $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \varepsilon$ où ε est l'élément neutre de $G/D(G)$. Mais

$$\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\overline{ba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

  Donc $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \varepsilon$, autrement dit $\alpha\beta = \beta\alpha$. Et ceci quelque soit α et β, donc $G/D(G)$ est commutatif. Généralisation : si H est un sous-groupe distingué.

  - Si $D(G) \subset H$ alors $G/D(G)$ est un sous-groupe de G/H donc G/H est commutatif car $G/D(G)$ l'est.

- Si G/H est commutatif alors pour $g,h \in G$ la classe de $ghg^{-1}h{-}1$ dans G/H vérifie :

$$\overline{ghg^{-1}h{-}1} = \bar{g}\overline{hg^{-1}h^{-1}} = \bar{g}\overline{g^{-1}}\bar{h}\overline{h^{-1}} = \varepsilon.$$

Mais les éléments dont la classe dans G/H est l'élément neutre sont exactement les éléments de H. Donc $ghg^{-1}h^{-1}$ appartient à H. Ainsi tous les générateurs de $D(G)$ sont dans H et donc $D(G) \subset H$.

Correction de l'exercice 5404 ▲

Notons $C = AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Un calcul donne $C^8 = I$ et pour $1 \leq k \leq 7$, $C^k \neq I$. Donc le groupe H engendré par C est d'ordre 8. Attention ! même si $A^2 = I$ et $B^2 = I$ on a $(AB)^2 \neq I$ car $AB \neq BA$.

(b) Pour montrer que H est distingué il suffit de montrer que ACA^{-1} et BCB^{-1} sont dans H. Mais $ACA^{-1} = ACA = AABA = BA = (AB)^{-1} \in H$. De même $BCB^{-1} = (AB)^{-1}$. Donc H est distingué dans H.

Un élément M de G s'écrit

$$M = A^{a_1}B^{b_1}A^{a_2}\ldots A^{a_n}B^{b_n} \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

Mais dans G/H tout terme $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ vaut $\bar{I}$ Donc $G/H = \{\bar{I}, \bar{A}, \bar{A}^2, \bar{A}^3, \ldots, \bar{B}, \bar{B}^2, \bar{B}^3, \ldots\}$ mais comme $A^2 = B^2 = I$ et $AB \in H$ alors G/H s'écrit simplement :

$$G/H = \left\{\bar{I}, \bar{A}\right\}.$$

Enfin, par la formule $|G| = |H| \times |G/H|$ nous obtenons $|G| = 8 \times 2 = 16$.

Correction de l'exercice 5405 ▲

(a) i. $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x',y+y') = 3(x+x')+6(y+y') = 3x+6y+3x'+6y' = f(x,y)+f(x',y')$.

ii. $\mathrm{Ker} f = \{(x,y); f(x,y) = 0\} = \{(x,y); 3x+6y = 0\} = \{(x,y); x = -2y\} = \{(-2k,k); k \in \mathbb{Z}\}$. Si $\mathrm{Ker} f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ alors $f(p,0) = 0$ donc $3p = 0$ soit $p = 0$. De même $f(0,q) = 0$ implique $q = 0$ et alors $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$, ceci contredit le fait que $f(-2,1) = 0$.

iii. On a $f(\mathbb{Z}^2) = 3\mathbb{Z}$, le morphisme $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ définit par passage au quotient par le noyau un morphisme injectif $\bar{f} : \mathbb{Z}^2/\mathrm{Ker} f \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ (c'est le théorème de factorisation). De plus comme f est surjectif alors $\bar{f}$ l'est aussi. Ainsi $\bar{f}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{Z}^2/\mathrm{Ker} f = \mathbb{Z}^2/(-2,1)\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$.

(b) Définissons $g : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $g(x,y) = (\bar{x},\bar{y})$ où $\bar{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le noyau de g est $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} = \langle (2,0);(0,2) \rangle = G$. Le passage au quotient par le noyau définit l'isomorphisme $\bar{g}$ cherché.

Correction de l'exercice 5409 ▲

(I) (a) $E \neq \emptyset$ car $X \in E$. L'ensemble $A_0 = \bigcap_{A \in E} A$ est de manière évidente le plus petit élément de E.

(b) On a $\varphi(A_0) \subset A_0$ puisque $A_0 \in E$. On déduit, par la croissance de φ, que $\varphi(\varphi(A_0)) \subset \varphi(A_0)$, ce qui donne $\varphi(A_0) \in E$ et donc $A_0 \subset \varphi(A_0)$.

(II) (a) La croissance de φ est immédiate.

(b) Considérons la partie A_0 associée à φ. D'après le (b) du (I), on a $X \setminus h(X \setminus g(A_0)) = A_0$. Autrement dit, les parties A_0 et $h(X \setminus g(A_0))$ constituent une partition de X. Considérons l'application $f : X \to X$ définie comme étant g sur A_0 et h^{-1} sur $h(Y \setminus g(A_0))$. On voit sans difficulté que f est une bijection (noter que les images respectives des deux restrictions précédentes sont $g(A_0)$ et $Y \setminus g(A_0)$ et qu'elles constituent une partition de Y).

Correction de l'exercice 5410 ▲

Pour tout $x \in X$, posons $C(x) = \{y \in X \mid x \text{ et } y \text{ sont comparables}\}$ et considérons $Y = \bigcap_{x \in X} C(x)$. La partie Y est totalement ordonnée puisque dès que $y, y' \in Y$, alors $y' \in C(y)$ et donc y et y' sont comparables. De plus, pour tout $x \notin Y$, il existe $y \in X$ tel que $x \notin C(y)$, c'est-à-dire, y et x non comparables.

Il n'y a pas unicité de l'ensemble Y en général. En effet, dans un ensemble ordonné où il existe un élément y qui n'est comparable qu'à lui-même, on peut prendre $Y = C(y) = \{y\}$. Il est facile de construire des ensembles ordonnés possédant plusieurs tels éléments y (penser à la relation d'égalité, dont le graphe est la diagonale).

Correction de l'exercice 5414 ▲

Pour la dernière question, vérifier par récurrence que $x^{\star\, n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x^k$.

Correction de l'exercice 5415 ▲

(a) Désignant par b l'inverse à gauche de a et par c l'inverse à gauche de b, on a $ab = (cb)(ab) = c(ba)b = cb = e$. L'élément b est donc l'inverse de a.

(b) découle immédiatement de (a).

Correction de l'exercice 5416 ▲

(a) Pour $x, y \in E$ quelconques, notons x' et y' leurs inverses à gauche respectifs. Si $xy = e$, on a aussi $yx = (x'x)yx = x'(xy)x = x'x = e$.

(b) Soit f un élément neutre à gauche. On a donc $fe = e$. D'après (a), on a aussi $ef = e$, c'est-à-dire $f = e$.

(c) Pour tout $x \in E$, on a $xe = x(x'x) = (xx')x = x$ puisque d'après (a), $xx' = e$.

(d) résulte alors de (a), (b) et (c).

Correction de l'exercice 5421 ▲

Pour tous $x, y \in G$, on a $xyx^{-1}y^{-1} = xyxy = (xy)(xy) = 1$ c'est-à-dire $xy = yx$. Donc G est abélien. Si G est fini, il peut être considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et est alors nécessairement de dimension finie, ce qui donne G isomorphe comme espace vectoriel à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et donc $|G| = 2^n$.

Correction de l'exercice 5422 ▲

En groupant chaque élément $x \in G$ avec son inverse x^{-1}, on obtient une partition de G en sous-ensembles $\{y, y^{-1}\}$ qui ont deux éléments sauf si $y = y^{-1}$, c'est-à-dire si $y^2 = e$. L'élément neutre e est un tel élément y. Ce ne peut pas être le seul, sinon G serait d'ordre impair.

Correction de l'exercice 5425 ▲

Pour tout $h \in H$, on a $ha = k_h b$ pour un certain $k_h \in K$. En écrivant $ha = h(ea) = hk_e b$, on obtient $k_h = hk_e$, ce qui donne $h = k_h (k_e)^{-1} \in K$.

Correction de l'exercice 5427 ▲

(a) Supposons que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G et que H ne soit pas inclus dans K, c'est-à-dire, qu'il existe $h \in H$ tel que $h \notin K$. Montrons que $K \subset H$. Soit $k \in K$ quelconque. On a $hk \in H \cup K$. Mais $hk \notin K$ car sinon $h = (hk)k^{-1} \in K$. D'où $hk \in H$ et donc $k = h^{-1}(hk) \in H$.

(b) découle immédiatement de (a).

Correction de l'exercice 5428 ▲

Soit H une partie finie non vide de G stable par la loi de composition. Pour montrer que H est un sous-groupe, il reste à voir que pour tout $x \in H$, $x^{-1} \in H$. Les puissances x^k où $k \in |||$ restant dans H, il existe $m, n \in |||$ tels que $m > n$ et $x^m = x^n$. On a alors $x^{m-n-1} \cdot x = 1$, soit $x^{-1} = x^{m-n-1}$, ce qui montre que $x^{-1} \in H$.

Si H est infini, la propriété précédente n'est pas vraie en général. Par exemple $|||$ est une partie stable de $\mathbb{Z}$ pour l'addition mais n'en est pas un sous-groupe.

Correction de l'exercice 5431 ▲

Soient $a, b \in G$ d'ordre respectifs m et n. Posons $\mu = \text{ppcm}(m, n)$. On a $(ab)^\mu = a^\mu \cdot b^\mu = e \cdot e = e$ ($a^\mu = b^\mu = e$ résultant du fait que m et n divisent μ). L'ordre de ab divise donc μ.

Supposons que $\text{pgcd}(m, n) = 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(ab)^k = 1$, soit $a^k = b^{-k}$. On en déduit que $a^{nk} = e$ et $b^{mk} = e$. D'où $m|nk$ et $n|mk$. L'hypothèse $\text{pgcd}(m, n) = 1$ donne alors $m|k$ et $n|k$ et donc $\text{ppcm}(m, n)|k$. Cela combiné à la première partie montre que ab est d'ordre $\text{ppcm}(m, n) = mn$.

Correction de l'exercice 5434 ▲

Etant donné $a \in F$, soit S une partie de G contenant a et engendrant G. Si $< S - \{a\} > \neq G$, alors il existe un sous-groupe propre maximal G_i tel que $< S - \{a\} > \subset G_i$. Mais alors $< S > \subset < S - \{a\} >< a > \subset G_i$. Contradiction, donc $< S - \{a\} > \neq G$.

Inversement, supposons que $a \notin F$, c'est-à-dire, il existe $i \in I$ tel que $a \notin G_i$. Alors pour $S = G_i \cup \{a\}$, on a $< S >= G$ (par maximalité de G_i) mais $< S - \{a\} >= G_i \neq G$.

Correction de l'exercice 5437 ▲

(a) ($\Rightarrow$) Si HK est un groupe, pour tous $h \in H$ et $k \in K$, on a $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in HK$ et donc $kh \in (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$. D'où $HK \subset KH$. L'autre inclusion s'obtient similairement.

($\Leftarrow$) On vérifie aisément en utilisant l'hypothèse $HK = KH$ que $(HK) \cdot (HK) \subset HK$ et que $(HK)^{-1} \subset HK$.

(b) Etant donnés $h_0, h \in H$ et $k_0, k \in K$, on a $h_0k_0 = hk$ si et seulement si $h_0^{-1}h = k_0k^{-1}$. Cet élément est nécessairement dans l'intersection $H \cap K$. On a donc $h_0k_0 = hk$ si et seulement s'il existe $u \in H \cap K$ tel que $h = h_0u$ et $k = u^{-1}k_0$. Pour chaque élément fixé $h_0k_0 \in HK$, il y a donc $|H \cap K|$ façons de l'écrire hk avec $(h,k) \in H \times K$. D'où le résultat.

Correction de l'exercice 5438 ▲

D'après le théorème de Lagrange, les sous-groupes de S_3 sont d'ordre 1, 2, 3 ou 6. Les sous-groupes d'ordre 1 et 6 sont les sous-groupes triviaux $\{1\}$ et S_3 respectivement. Comme 2 et 3 sont premiers, les sous-groupes d'ordre 2 et 3 sont cycliques. Un sous-groupe d'ordre 2 est tout sous-groupe engendré par une transposition : il y en a 3. Il existe un seul sous-groupe d'ordre 3, celui engendré par le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$.

Correction de l'exercice 5439 ▲

Les éléments différents de 1 sont d'ordre 5, 7 ou 35. S'il existe un élément g d'ordre 35 (*i.e.*, si le groupe est cyclique d'ordre 35), alors g^5 est d'ordre 7 et g^7 est d'ordre 5. Supposons que le groupe n'est pas cyclique et qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 7. Tout élément différent de 1 serait alors d'ordre 5 et le groupe serait réunion de sous-groupes d'ordre 5. Mais de tels sous-groupes sont soit égaux soit d'intersection $\{1\}$ (car 5 est premier). On aurait alors $35 = 4n + 1$ avec n le nombre de sous-groupes distincts d'ordre 5, ce qui donne la contradiction cherchée. Le raisonnement est le même s'il n'existe pas d'élément d'ordre 5.

Correction de l'exercice 5440 ▲

Si $p = 2$ alors $|G|$ est d'ordre 4 : G est le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ dont tous les éléments différents de 1 sont d'ordre 2. On peut donc supposer pour la suite que p est impair. En procédant comme dans l'exercice 5439, on montre qu'il existe forcément dans G un élément d'ordre 2. Enfin si tous les éléments différents de 1 étaient d'ordre 2, alors d'après l'exercice 5421, l'ordre de G serait une puissance de 2. Il existe donc aussi un élément d'ordre p.

Correction de l'exercice 5441 ▲

On a $2^{2^n} \equiv -1$ modulo p. On en déduit que $2^{2^{n+1}} \equiv 1$ modulo p. Ces deux conditions donnent que l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est 2^{n+1}. Cet ordre devant diviser l'ordre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire $p-1$, on obtient le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 5442 ▲

Comme $2^n \equiv 1$ modulo $2^n - 1$, l'ordre de 2 modulo $2^n - 1$, disons m, divise n. Si $m < n$, on aurait $2^m \equiv 1$ modulo $2^n - 1$, c'est-à-dire $2^n - 1$ divise $2^m - 1$, ce qui n'est pas possible. L'ordre de 2 modulo $2^n - 1$ est donc n, et celui-ci doit diviser l'ordre de $(\mathbb{Z}/(2^n-1)\mathbb{Z})^\times$, qui vaut $\varphi(2^n - 1)$.

Correction de l'exercice 5453 ▲

$HK = \{hk\ / h \in H, k \in K\}$.

(a) Soit $\phi : H \times K \to HK$ définie par $\phi(h,k) = hk$. Montrons que ϕ est bijective : ϕ est surjective par définition de HK et si $\phi(h,k) = \phi(h',k')$ alors $hk = h'k'$ et donc $h'^{-1}h = k'k^{-1}$ or $H \cap K = \{e_G\}$ et donc $h'^{-1}h = e_G$ et donc $h = h'$, de même $k = k'$ et donc ϕ est injective.

Comme ϕ est bijective $\mathrm{Card} H \times K = \mathrm{Card} HK$ et donc $\mathrm{Card} HK = \mathrm{Card} H . \mathrm{Card} K$.

(b) Supposons qu'il existe deux sous-groupes H et K distincts et d'ordre p. Montrons d'abord que $H \cap K = \{e_G\}$. En effet $H \cap K$ est un sous-groupe de H et donc le cardinal de $H \cap K$ divise $\mathrm{Card} H = p$ avec p premier. Or comme $H \neq K$ alors $H \cap K \neq H$ et donc $\mathrm{Card} H \cap K = 1$, c'est ce que nous voulions démontrer.

Maintenant d'après la première question HK est un sous-groupe de cardinal p^2 dans le groupe G de cardinal $pq < p^2$. Donc il ne peut exister deux sous-groupe d'ordre p.

Supposons maintenant que H soit un sous-groupe d'ordre p, c'est donc l'unique sous-groupe d'ordre p d'après ce que nous venons de démontrer. Pour $g \in G$ le sous-groupe gHg^{-1} est du même ordre que H (car pour g fixé le morphisme θ_g de G dans G, $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ est un automorphisme et en particulier un biction donc $\mathrm{Card}\theta_g(H) = \mathrm{Card} H$). Par conséquent $gHg^{-1} = H$ et donc H est un sous-groupe distingué.

Correction de l'exercice 5460 ▲

Soient $x,y \in G$ quelconques. De $(xy)^n = x^n y^n$, on déduit $(yx)^{n-1} = x^{n-1}y^{n-1}$ puis $(yx)^n = yx^n y^{n-1}$ et donc $y^n x^n = yx^n y^{n-1}$, ce qui donne $y^{n-1}x^n = x^n y^{n-1}$. Ainsi, pour tout $y \in G$, y^{n-1} commute à tous les éléments de la forme x^n avec $x \in G$, et est donc dans le centre de G, puisque l'application $x \to x^n$ est supposée surjective.

Correction de l'exercice 5461 ▲

Tout automorphisme φ du groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permute les trois éléments d'ordre 2, c'est-à-dire l'ensemble G^* des trois éléments non triviaux. La correspondance qui à $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ associe sa restriction à G^* induit un morphisme $\chi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to S_3$. Tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ étant déterminé par sa restriction à G^*, ce morphisme χ est injectif. De plus, tout automorphisme linéaire (pour la structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est un automorphisme de groupes. Il y a 6 tels automorphismes (autant qu'il y a de bases). L'image de χ contient donc au moins 6 éléments. Comme c'est un sous-groupe de S_3, c'est S_3 lui-même et χ est un isomorphisme.

Correction de l'exercice 5462 ▲

Le sous-groupe H est à la fois la classe à gauche et la classe à droite modulo H de l'élément neutre. Si $[G:H] = 2$, son complémentaire H^c dans G est donc l'autre classe, à droite et à gauche. Classes à droite et classes à gauche coincident donc, soit $gH = Hg$ et donc $gHg^{-1} = Hgg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$.

Correction de l'exercice 5463 ▲

D'après l'hypothèse, pour tout $x \in G$, il existe $z \in G$ tel que $xH \cdot x^{-1}H = zH$. On en déduit $xHx^{-1} \subset zH$. Cela entraine que $1 \in zH$ et donc que $z \in H$. D'où finalement $xHx^{-1} \subset H$.

Correction de l'exercice 5464 ▲

Etant donnés $y,z \in H$, on a $y \simeq 1$ et $z \simeq 1$. La compatibilité de la loi donne d'une part $yz \simeq 1$, soit $yz \in H$, et d'autre part $yy^{-1} \simeq y^{-1}$ soit $y^{-1} \in H$. Cela montre que H est un sous-groupe de G. Pour tout $x \in G$, on a aussi $xyx^{-1} \simeq x1x^{-1} = 1$ et donc $xyx^{-1} \in H$. Le sous-groupe H est donc distingué.

De plus, pour $x,x' \in G$, si $x \simeq x'$, alors par compatibilité de la loi, on a $x'x^{-1} \simeq xx^{-1} = 1$, c'est-à-dire $x'x^{-1} \in H$. Réciproquement, si $x'x^{-1} \in H$, alors $x'x^{-1} \simeq 1$, et donc, par compatibilité de la loi, $x \simeq x'$.

Correction de l'exercice 5465 ▲

Pour tout $g \in G$, la conjugaison $c_g : G \to G$ par g induit un automorphisme de H si H est distingué dans G. Si de plus K est caractéristique dans H, alors K est stable par c_g. D'où K est alors distingué dans G.

Le sous-ensemble V_4 du groupe symétrique S_4 consistant en l'identité et les trois produits de transpositions disjointes : $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$ et $(1\,4)(2\,3)$ est un sous-groupe (vérification immédiate) qui est distingué : cela résulte de la formule $g(i\,j)(k\,l)g^{-1} = (g(i)\,g(j))(g(k)\,g(l))$ pour $i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}$ distincts. Le sous-groupe K (d'ordre 2) engendré par $(1\,2)(3\,4)$ est distingué dans V_4 (car V_4 est abélien). Mais K n'est pas distingué dans S_4 (comme le montre encore la formule précédente).

Correction de l'exercice 5468 ▲

Le groupe μ_{mn} a un élément d'ordre mn. En revanche tout élément $x \in \mu_m \times \mu_n$ vérifie $x^\mu = 1$ avec $\mu = \mathrm{ppcm}(m,n)$ et est donc d'ordre un diviseur de μ, lequel est $< mn$ si m et n ne sont pas premiers entre eux. Les groupes μ_{mn} et $\mu_m \times \mu_n$ ne peuvent donc pas être isomorphes.

Correction de l'exercice 5472 ▲

Considérons la surjection canonique $s : G \to G/H$. D'après l'exercice 5470, $|s(K)|$ divise $\mathrm{pgcd}(|K|, |G/H|)$ qui est égal à $\mathrm{pgcd}(|H|, |G/H|)$ (puisque $|H| = |K|$) et vaut donc 1. Conclusion : $s(K) = \{1\}$, c'est-à-dire $K \subset H$. D'où $K = H$ puisqu'ils ont même ordre.

Correction de l'exercice 5473 ▲

On a $f(n) = f(1)^n$ pour tout entier $n > 0$. Mais on a aussi $f(1/n)^n = f(1)$ pour tout $n > 0$. Cela n'est pas possible car un nombre rationnel positif $\neq 0,1$ ne peut être une puissance n-ième dans $\mathbb{Q}$ pour tout $n > 0$. (Pour ce dernier point, noter par exemple qu'être une puissance n-ième dans $\mathbb{Q}$ entraîne que tous les exposants de la décomposition en facteurs premiers sont des multiples de n). Les deux groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}_+^\times, \times)$ ne sont donc pas isomorphes.

Correction de l'exercice 5476 ▲

On a $n = |G/H|$. Pour toute classe $aH \in G/H$, on a donc $(aH)^n = H$ c'est-à-dire, $a^nH = H$ ou encore $a^n \in H$. Cela devient faux si H n'est pas distingué dans G. Par exemple le sous-groupe H de S_3 engendré par la transposition $(1\ 2)$ est d'indice 3 dans S_3 et, pour $a = (2\ 3)$, on a $a^3 = a \notin H$.

Correction de l'exercice 5477 ▲

Soit H' un sous-groupe de G d'ordre n et d'indice m. Pour tout $h \in H'$, on a $h^n = 1$ et $h^m \in H$ (voir l'exercice 5476). Puisque n et m sont premiers en eux, on peut trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$. On obtient alors $h = (h^m)^u(h^n)^v \in H$. D'où $H' \subset H$ et donc $H = H'$ puisque $|H| = |H'|$.

Correction de l'exercice 5479 ▲

(a) La correspondance $x \to e^{2i\pi x}$ induit un morphisme $\mathbb{R} \to T$, surjectif et de noyau $\mathbb{Z}$. D'où $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T$. La correspondance $z \to z/|z|$ induit l'isomorphisme $(x^2+1)^{\times}/\mathbb{R}_+^{\times} \simeq T$. Similairement $z \to z^2/|z|^2$ fournit l'isomorphisme $(x^2+1)^{\times}/\mathbb{R}^{\times} \simeq T$. Les isomorphismes $T/\mu_n \simeq T$ et $(x^2+1)^{\times}/\mu_n \simeq (x^2+1)^{\times}$ s'obtiennent à partir de la correspondance $z \to z^n$.

(b) La correspondance $x \to e^{2i\pi x}$ induit un morphisme $\mathbb{Q} \to \mu_\infty$, surjectif et de noyau $\mathbb{Z}$. D'où $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \mu_\infty$. Si G est un sous-groupe fini de μ_∞, alors il existe $m \in |||$ tel que $G \subset \mu_m$. Les sous-groupes du groupe cyclique μ_m sont les μ_n où $n|m$.

(c) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Q}$ de type fini, c'est-à-dire engendré par un nombre fini de rationnels $p_1/q_1, \dots, p_r/q_r$. On a alors $q_1 \cdots q_r G \subset \mathbb{Z}$. Soit q le plus petit entier > 0 tel que $qG \subset \mathbb{Z}$. Le sous-groupe qG est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in |||$ premier avec q (car l'existence d'un facteur commun contredirait la minimalité de q). On obtient $G = (a/q)\mathbb{Z}$. Si de plus $\mathbb{Z} \subset G$ alors $1 \in G$ et s'écrit donc $1 = ka/q$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $ka = q$. Comme $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$, on a nécessairement $a = 1$ et donc $G = (1/q)\mathbb{Z}$.

Soit $s : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Si $\overline{G}$ est un sous-groupe de type fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors $G = s^{-1}(\overline{G})$ est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$, contenant $\mathbb{Z}$ et de type fini (si $p_1/q_1, \dots, p_r/q_r$ sont des antécédents par s de générateurs de $\overline{G}$, alors $1, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r$ engendrent G). D'après ce qui précède, on a $G = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ et donc $\overline{G} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Via l'isomorphisme de la question (b), on déduit les sous-groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de type fini : ce sont les sous-groupes $\{e^{2ik\pi/q} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mu_q$ avec q décrivant $|||^{\times}$.

(d) On vérifie sans difficulté que pour tout nombre premier p, μ_{p^∞} est un sous-groupe de μ_∞. Il n'est pas de type fini : en effet le sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui lui correspond par l'isomorphisme de la question (b) est engendré par les classes de rationnels $1/p^n$ modulo $\mathbb{Z}$, n décrivant $|||$. Un tel sous-groupe G n'a pas de dénominateur commun, c'est-à-dire, il n'existe pas d'entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $qG \subset G$. En conséquence il ne peut pas être de type fini.

Correction de l'exercice 5480 ▲

Soit $z \in (x^2+1)$ quelconque et $\zeta \in (x^2+1)$ une racine n-ième de z. Le sous-groupe G est distingué dans (x^2+1) (puisque (x^2+1) est commutatif). Si n est l'indice de G dans (x^2+1), on a donc $\zeta^n = z \in G$ (voir l'exercice 5476). D'où $(x^2+1)^{\subset}G$. L'inclusion inverse est triviale.

Correction de l'exercice 5483 ▲

(a) Soit $\varphi : \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^m$ un morphisme de groupes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ sa classe modulo p. Tout élément $\overline{x} \in \mathbb{F}_p^n$ peut s'écrire $\overline{x} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. On a alors $\varphi(\overline{n} \cdot \overline{x}) = \varphi(\overline{nx}) = \varphi(n\overline{x}) = n\varphi(\overline{x}) = \overline{n} \cdot \varphi(\overline{x})$. Le morphisme φ est donc compatible avec les lois externes de $\mathbb{F}_p^n$ et $\mathbb{F}_p^m$. Comme il est aussi additif, c'est une application $\mathbb{F}_p$-linéaire.

(b) Considérons l'application $V : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui à tout automorphisme χ associe $\chi(1)$. Cette application est à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (si $\chi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, alors $\ker(\chi) = \{0\}$). C'est un morphisme de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ muni de la composition vers le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{F}_p^{\times}$: en effet si $\chi, \chi' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et si on pose $\chi'(1) = \overline{c}$ (classe de $c \in \mathbb{Z}$ modulo p), alors $(\chi \circ \chi')(1) = \chi(\overline{c}) = c\chi(1) = \overline{c} \cdot \chi(1) = \chi'(1) \cdot \chi(1) = \chi(1) \cdot \chi'(1)$. Ce morphisme V est de plus injectif puisque tout automorphisme χ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est déterminé par $\chi(1)$. Enfin, pour tout $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non nul, la correspondance $\overline{n} \to \overline{a} \cdot \overline{n}$ induit un automorphisme χ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\chi(1) = \overline{a}$. L'image du morphisme V est donc tout $\mathbb{F}_p^{\times}$. Ce qui établit l'isomorphisme demandé.

(c) D'après la question (a), il s'agit de compter le nombre d'automorphismes linéaires du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathbb{F}_p^n$, qui est égal au nombre de bases de $\mathbb{F}_p^n$, c'est-à-dire $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$.

Correction de l'exercice 5485 ▲

Soit G un groupe abélien fini tel que $pG = \{0\}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $g \in G$, l'élément ng ne dépend que de la classe de n modulo p ; on peut le noter $\overline{n} \cdot g$. La correspondance $(\overline{n}, g) \to \overline{n} \cdot g$ définit une loi externe sur le groupe additif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ et lui confère ainsi une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Cet espace vectoriel, étant fini, est de dimension finie. Il est donc isomorphe comme espace vectoriel, et en particulier comme groupe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ pour un certain entier $n \geq 0$.

Correction de l'exercice 5488 ▲

Le centre $Z(G)$ est ni trivial (car G est un p-groupe) ni égal à G (car G non abélien). En utilisant l'exercice 5481, on voit qu'il n'est pas non plus d'ordre p^2. Il est donc d'ordre p. Mais alors $G/Z(G)$ est d'ordre p^2 et est donc abélien (exercice 5482). D'après l'exercice 5487, on a alors $D(G) \subset Z(G)$. Comme $D(G) \neq \{1\}$ (sinon G serait abélien), on a $D(G) = Z(G)$.

Correction de l'exercice 5490 ▲

(a) On vérifie les deux formules : $(a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$ pour a,b,c distincts, et $(a\ b)(c\ d) = (a\ b)(b\ c)(b\ c)(c\ d) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$, pour a,b,c,d distincts. On déduit que toute permutation paire, produit d'un nombre pair de transpositions, peut s'écrire comme produit de 3-cycles. Le groupe alterné A_n est donc engendré par les 3-cycles si $n \geq 3$.

(b) On a $(1\ 2\ j)\ (1\ 2\ i)\ (1\ 2\ j)^{-1} = (2\ j\ i)$ pour i,j distincts et différents de 1 et 2, et si en plus k est différent de $1,2,i,j$, on a $(1\ 2\ k)\ (2\ j\ i)\ (1\ 2\ k)^{-1} = (k\ j\ i)$. Le groupe engendré par les 3-cycles $(1\ 2\ i)$ où $i \geq 3$ contient donc tous les 3-cycles ; d'après (a), c'est le groupe alterné A_n.

Correction de l'exercice 5492 ▲

Les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont immédiats. On peut supposer $n \geq 3$. On vérifie aisément la formule $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n)\ (a_{n-1}\ a_n\ a_{n-2} \ldots\ a_2\ a_1) = (a_1\ a_n\ a_{n-1})$ où $a_1,\ldots,a_n$ sont les éléments d'un ensemble de cardinal n. On en déduit que le groupe PC_n engendré par les permutations circulaires contient les 3-cycles et donc le groupe alterné A_n (voir exercice 5490). Les permutations circulaires sont de signature $(-1)^{n-1}$. Si n est impair, elles sont donc paires d'où $PC_n \subset A_n$ et donc finalement $PC_n = A_n$ dans ce cas. Si n pair, les permutations circulaires sont impaires, donc $PC_n \neq A_n$. L'indice de PC_n dans S_n devant diviser 2 (puisque $PC_n \supset A_n$), il vaut 1, c'est-à-dire $PC_n = S_n$.

Correction de l'exercice 5493 ▲

Supposons $\sigma\tau = \tau\sigma$. Pour tout $x \notin I$, on a $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x)$; $\tau(x)$, fixé par σ, n'appartient pas à I. Cela montre que le complémentaire de I est invariant par τ. Comme τ est injective, I l'est aussi. Montrons que, sur I, τ est égal à une puissance de σ. Quitte à renuméroter $\{1,\ldots,n\}$, on peut supposer que $I = \{1,\ldots,m\}$ (où $m \leq n$) et $\sigma|_I = (1\ 2\ \ldots\ m)$. L'entier $\tau(1)$ est dans I ; soit k l'unique entier entre 1 et m tel que $\tau(1) = \sigma^k(1)$. Pour tout $i \in I$, on a alors $\tau(i) = \tau\sigma^{i-1}(1) = \sigma^{i-1}\tau(1) = \sigma^{i-1}\sigma^k(1) = \sigma^k\sigma^{i-1}(1) = \sigma^k(i)$ (l'identité $\tau\sigma^{i-1} = \sigma^{i-1}\tau$ utilisée dans le calcul découle facilement de l'hypothèse $\sigma\tau = \tau\sigma$). On obtient donc $\tau|_I = (\sigma|_I)^k$. L'implication réciproque est facile.

Correction de l'exercice 5494 ▲

Un sous-groupe distingué de S_n qui contient une transposition contient toute sa classe de conjugaison, c'est-à-dire, toutes les transpositions (cf les indications de l'exercice 5491, "Rappel") et donc le groupe qu'elles engendrent, c'est-à-dire S_n.

Correction de l'exercice 5495 ▲

L'ensemble H est le sous-groupe de S_4 fixant la paire $\{1,2\}$. Tout élément de H fixe aussi la paire $\{3,4\}$. Cela fournit un morphisme $H \to S_2 \times S_2$ qui est clairement bijectif. D'où $H \simeq S_2 \times S_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On a $\sigma \in K$ si et seulement si $\sigma(1) \equiv \sigma(3)$ [mod 2] et $\sigma(2) \equiv \sigma(4)$ [mod 2], c'est-à-dire si et seulement si $\sigma(\{1,3\})$ est soit la paire $\{1,3\}$ soit la paire $\{2,4\}$ (auquel cas $\sigma(\{2,4\})$ est la paire $\{2,4\}$ ou la paire $\{1,3\}$ respectivement). Grâce à l'identité $\sigma\ (1\ 3)\ (2\ 4)\ \sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(3))\ (\sigma(2)\ \sigma(4))$, on voit que la condition est également équivalente au fait que la conjugaison par σ stabilise la permutation $(1\ 3)\ (2\ 4)$. Autrement dit K est le sous-groupe des éléments de S_4 commutant avec $(1\ 3)\ (2\ 4)$. La classe de conjugaison 2-2 ayant 3 éléments, le groupe H est d'ordre $4!/3 = 8$. On peut dresser la liste de ses éléments : si $\omega = (1\ 2\ 3\ 4)$ et $\tau = (1\ 2)\ (3\ 4)$, alors $K = \{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\tau,\omega\tau,\omega^2\tau,\omega^3\tau\}$. On vérifie les relations $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Le groupe K est égal au produit semi-direct de son sous-groupe distingué $< \omega >$ par son sous-groupe $< \tau >$ et est donc isomorphe au groupe diédral d'ordre 8.

Correction de l'exercice 5497 ▲

L'ordre d'une permutation $\omega \in S_n$ est le ppcm des longueurs des cycles de la décomposition de ω en cycles à supports disjoints. De plus, la somme des longueurs de ces cycles (ceux de longueur 1 y compris) vaut n. Pour une permutation d'ordre 10 dans S_8, il n'y a qu'un type possible : 5-2-1. La signature vaut alors $(-1)^{5-1}(-1)^{2-1} = -1$.

Correction de l'exercice 5498 ▲

(a) Un 3-cycle ω est d'ordre 3 et vérifie donc $\omega^3 = 1$ soit encore $\omega = (\omega^2)^2$. Le groupe engendré par tous les carrés de permutations dans S_n contient donc tous les 3-cycles, et donc aussi le groupe qu'ils engendrent, c'est-à-dire A_n. L'autre inclusion est facile puisque le carré d'une permutation est toujours une permutation paire.

(b) Si H est un sous-groupe d'indice 2 de S_n, il est distingué. On a alors $\sigma^2 \in H$ pour tout $\sigma \in S_n$ (cf exercice 5476). D'après la question (a), $H = A_n$.

Correction de l'exercice 5499 ▲

Les classes de conjugaison de S_n correspondent aux types possibles d'une permutation de n éléments (cf indication exercice 3 Rappel). Pour $n=4$, on a 5 classes : 1-1-1-1, 2-1-1, 2-2, 3-1 et 4.

Soit H un sous-groupe distingué non trivial de S_4. Si H contient la classe 2-1-1 (transpositions), alors $H=S_4$. Si H contient la classe 3-1, alors $H\supset A_4$ (cf exercice 5490) et donc $H=A_4$ ou $H=S_4$. Si H contient la classe 4, alors $H=S_4$ (cf exercice 5492). Si H contient la classe 2-2, alors $H\supset V_4$ (voir la correction de l'exercice 5465 définition de V_4), ce qui donne $H=V_4$ ou bien, au vu des cas précédents, $H=A_4$ ou $H=S_4$. Les sous-groupes distingués de S_4 sont donc $\{1\}$, V_4, A_4 et S_4.

Correction de l'exercice 5501 ▲

Soit H un sous-groupe d'indice m d'un groupe G. L'action de G par translation à gauche sur l'ensemble quotient G/H des classes à gauche modulo H induit un morphisme $G\to \mathrm{Per}(G/H)$ qui est non-trivial et donc est injectif puisque le noyau, distingué dans G, ne peut être trivial si G est simple. L'ordre de G doit donc diviser l'ordre du groupe $\mathrm{Per}(G/H)$ qui vaut $m!$. Il faut nécessairement que $|G|=m!$. Mais alors le morphisme précédent est un isomorphisme et G est isomorphe au groupe symétrique S_m, ce qui contredit la simplicité de G.

Correction de l'exercice 5503 ▲

(a) L'identité $a^2b^2=(ab)^2$, par simplification à gauche par a et à droite par b, se réécrit $ab=ba$.

(b) La correspondance $(x,y)\to(x+y,y)$ définit un automorphisme σ de $\mathbb{F}_3^2$ d'ordre 3. Identifions le groupe $<\sigma>$ au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et considérons le produit semi-direct $\mathbb{F}_3^2\rtimes\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Pour tout élément $((x,y),i)$, on a $((x,y),i)^2=((x,y)+\sigma^i(x,y),2i)$ et $((x,y),i)^3=((x,y)+\sigma^i(x,y)+\sigma^{2i}(x,y),3i)=((0,0),0)$ puisque $(\mathrm{Id}+\sigma^i+\sigma^{2i})(x,y)=(3x+iy+2iy,3y)=(0,0)$. La formule $a^3b^3=(ab)^3$ est donc satisfaite pour tous a,b dans $\mathbb{F}_3^2\rtimes\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Mais ce produit semi-direct n'est pas commutatif car l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ n'est pas l'action triviale.

Correction de l'exercice 5504 ▲

(a) Que R soit une relation d'équivalence est immédiat. La classe d'un élément $x\in G$ est l'ensemble HxH, lequel est égal à la réunion des ensembles hxH où h décrit H. Ces derniers ensembles sont des classes à gauche modulo H et sont donc égaux ou disjoints.

(b) Pour tout $i=1,\dots,d(x)$, hx_iH est une classe à gauche, contenue dans $h(HxH)H\subset HxH$, donc est de la forme x_jH. La formule $h*x_iH=hx_iH$ définit ainsi une permutation de l'ensemble des classes $x_1H,\dots,x_{d(x)}H$ (la permutation réciproque est celle induite par h^{-1}) et donc une action de H sur cet ensemble. Cette action est transitive : pour $i,j\in\{1,\dots,d(x)\}$, $h=x_i^{-1}x_j$ vérifie $h*x_iH=x_jH$.

Un élément $h\in H$ est dans le fixateur $H(x_iH)$ d'une classe x_iH si et seulement si $hx_iH=x_iH$ c'est-à-dire si $h\in x_iHx_i^{-1}$. D'où $H(x_iH)=H\cap x_iHx_i^{-1}$. On obtient alors $d(x)=[H:(H\cap x_iHx_i^{-1})]$ ce qui prouve que $d(x)$ divise $|H|$ et donc aussi $|G|$.

(c) Si H est distingué dans G, alors classes à droite et classes à gauche modulo H coincident d'où $HxH=xHH=xH$ et donc $d(x)=1$ pour tout $x\in G$. Inversement, pour tout $x\in G$, si $d(x)=1$, alors $HxH=xH$ ce qui entraine $Hx\subset xH$ et donc $x^{-1}Hx\subset H$.

(d) (i) De façon générale, on a $d(x)\le[G:H]$. On a ainsi $d(x)\le p$ si $[G:H]=p$. Comme $d(x)$ divise $|G|$ et que p est le plus petit premier divisant $|G|$, nécessairement $d(x)=1$ ou $d(x)=p$.

(ii) Si H n'est pas distingué alors il existe $x\in G$ avec $d(x)\neq 1$ et donc $d(x)=p$. Mais alors $\mathrm{card}(HxH)=d(x)\,|H|=p\,|H|=[G:H]\,|H|=|G|$. C'est-à-dire, il n'existe qu'une seule classe $HxH=G$, laquelle est aussi la classe de l'élément neutre $H1H=H$, ce qui contredit l'hypothèse $[G:H]=p>1$. Conclusion : le sous-groupe H est distingué dans G.

Correction de l'exercice 5505 ▲

Toute orbite $\mathscr{O}=\mathscr{O}_x$ d'un élément $x\in X$ est en bijection avec l'ensemble $G/\cdot G(x)$ des classes à gauche de G modulo le fixateur $G(x)$ de G. En particulier, le cardinal de $\mathscr{O}$ divise l'ordre de G. De plus la somme des longueurs des orbites est égale au cardinal de l'ensemble X.

(a) Si $|G|=15$, $\mathrm{card}(X)=17$ et s'il n'y a pas d'orbite à un seul élément, il n'y a qu'une seule possibilité : 4 orbites de longueur 3 et une de longueur 5.

(b) Supposons $|G|=33$ et $\mathrm{card}(X)=19$. Aucune somme de diviseurs $\neq 1$ de 33 n'est égale à 19 donc nécessairement il existe au moins une orbite réduite à un élément.

Correction de l'exercice 5506 ▲

(a) Si g'_1,g'_2 sont dans la même classe à gauche de G modulo H, c'est-à-dire, si $g'_1H=g'_2H$ ou encore si $(g'_2)^{-1}g'_1\in H$ alors $(gg'_2)^{-1}(gg'_1)=(g'_2)^{-1}g'_1\in H$: les classes gg'_1H et gg'_2H sont égales. Pour tous $g,g'\in H$, la classe $gg'H$ ne dépend donc pas du représentant choisi g' de la classe $g'H$; on peut la noter $g\cdot g'H$. On vérifie sans difficulté que la correspondance $(g,g'H)\to g\cdot g'H$ satisfait les autres conditions de la définition d'une action de G sur l'ensemble quotient $G/\cdot H$.

Pour $g,\gamma \in G$, on a $\gamma \cdot gH = gH$ si et seulement si $g^{-1}\gamma g \in H$ ce qui équivaut à $\gamma \in gHg^{-1}$. Le fixateur de la classe gH est le sous-groupe conjugué gHg^{-1} de H par g.

(b) Pour tout $y \in Y$ et tout $g \in G$, on a $f(g \cdot f^{-1}(y)) = g \cdot f(f^{-1}(y)) = g \cdot y$. En appliquant f^{-1}, on obtient $g \cdot f^{-1}(y) = f^{-1}(g \cdot y)$, ce qui montre que f^{-1} est compatible à l'action de G.

(c) Soit $x \in X$ fixé. Pour $g \in G$, l'élément $g \cdot x$ ne dépend que de la classe à gauche de g modulo le fixateur $G(x)$ de x. Cela permet de définir une application $G/\cdot G(x) \to X$: à chaque classe $gG(x)$ on associe $g \cdot x$. On montre sans difficulté que cette application est compatible avec l'action de G (vérification formelle), injective (par construction) et surjective (par l'hypothèse de transitivité) ; c'est donc un isomorphisme de G-ensembles.

(d) i) Supposons donnée une application $f : G/\cdot H \to G/\cdot K$ compatible avec l'action de G. Pour tout $h \in H$, on a $f(hH) = f(H) = h \cdot f(H)$. Ce qui, d'après la question (a), donne $h \in gKg^{-1}$, où g est un représentant de la classe $f(H)$ dans $G/\cdot K$.

Réciproquement, supposons $H \subset gKg^{-1}$ avec $g \in G$. Considérons l'application $\varphi : G/\cdot H \to G/\cdot K$ qui à toute classe γH associe la classe γgK. Cette application est bien définie : en effet, si $\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in H$, alors $(\gamma_2 g)^{-1}\gamma_1 g = g^{-1}(\gamma_2^{-1}\gamma_1)g \in g^{-1}Hg \subset K$; la classe γgK ne dépend donc pas du représentant γ de la classe γH. De plus φ est compatible à l'action de G : pour tous $\gamma, \gamma' \in G$, on a $\varphi(\gamma' \cdot \gamma H) = \varphi(\gamma'\gamma H) = \gamma'\gamma gK = \gamma' \cdot \varphi(\gamma H)$.

Si $f : G/\cdot H \to G/\cdot K$ est compatible avec l'action de G, alors son image contient toute orbite dès qu'elle en contient un élément. Comme l'action de G sur sur $G/\cdot K$ ne possède qu'une orbite, l'image de f contient tout $G/\cdot K$: f est surjective.

D'après ce qui précède, les ensembles $G/\cdot H$ et $G/\cdot K$ sont isomorphes comme G-ensembles si et seulement si $H \subset gKg^{-1}$ avec $g \in G$ et $\mathrm{card}(G/\cdot H) = \mathrm{card}(G/\cdot K)$ ce qui équivaut à $H \subset gKg^{-1}$ et $|H| = |K|$ ou encore à $H = gKg^{-1}$.

ii) Il suffit de réécrire les résultats de la question précédente en remplaçant $G/\cdot H$ et $G/\cdot K$ par $G/\cdot G(x)$ et $G/\cdot G(y)$ qui, d'après la question (c) sont G-isomorphes à X et Y respectivement (où x et y sont des points fixés de X et Y respectivement).

Correction de l'exercice 5507 ▲

(a) Pour $1 \leq i, j \leq r$ quelconques et $x_i, x_j \in X_i \times X_j$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_i = x_j$ (par transitivité de G). On a alors $g \cdot X_i = X_j$. En particulier $\mathrm{card}(X_i) = \mathrm{card}(g \cdot X_i) = \mathrm{card}(X_j)$.

(b) Si l'action de G sur $G/\cdot H$ est imprimitive, le sous-ensemble $K = \{g \in G \mid g \cdot X_1 = X_1\}$, où X_1 est par exemple celui des sous-ensembles $X_i \subset X$ qui contient la classe neutre H de $G/\cdot H$, est un sous-groupe propre de G ($K \neq G$ car G agissant transitivement, il existe $g \in G$ tel que $(g \cdot X_1) \cap X_2 \neq \emptyset$) et contenant strictement H (car encore par transitivité, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot H$ soit un élément de X_1 (ce qui assure que $g \in K$) mais différent de H (ce qui assure que $g \notin H$)).

Inversement, si un tel sous-groupe K de G existe, la relation "$gH \sim g'H$ si $(g')^{-1}g \in K$" est bien définie sur $G/\cdot H$ (la définition ne dépend pas des représentants dans G des classes gH et $g'H$) et est une relation d'équivalence (immédiat). La partition associée de $G/\cdot H$ en classes d'équivalence vérifie les conditions de la définition d'imprimitivité (pour l'action de G sur $G/\cdot H$) : la partition est non triviale car K est strictement contenu entre H et K ; et si $(\gamma H)K$ est une de ces classes d'équivalence et $g \in G$, alors $g \cdot (\gamma H)K$ est la classe $(g\gamma H)K$: l'action de G permute bien les classes constituant la partition de X.

(c) D'après l'exercice 5506, les ensembles X et $G/\cdot G(x)$ sont isomorphes comme G-ensembles. L'action de G sur X est primitive si et seulement si celle de G sur $G/\cdot G(x)$ l'est, ce qui, d'après la question précédente, équivaut à dire que le fixateur $G(x)$ est maximal parmi les sous-groupes de G.

(d) Soient $x \in X$ et $G(x)$ son fixateur. Le sous-groupe H étant distingué dans G, l'ensemble $HG(x)$ est un sous-groupe ; c'est le sous-groupe engendré par H et $G(x)$. De plus, l'action de H sur G n'étant pas triviale, H n'est pas contenu dans $G(x)$ et par conséquent $HG(x)$ contient strictement $G(x)$. D'après la question (c), il en résulte que $HG(x) = G$. On vérifie sans peine que l'application $H/\cdot (H \cap G(x)) \to (HG(x))/\cdot G(x)$ qui à toute classe $h(H \cap G(x))$ associe la classe $hG(x)$ est une bijection (ce qui généralise le théorème d'isomorphisme $HK/K \simeq H/(H \cap K)$ qui est vrai sous l'hypothèse supplémentaire "K distingué" (qui assure que les ensembles HK/K et $H/(H \cap K)$ sont des groupes et non de simples ensembles comme ici)). On obtient donc que les ensembles $H/\cdot (H \cap G(x))$ et $G/\cdot G(x)$ sont isomorphes comme G-ensembles (la compatibilité des actions est immédiate). Or ces deux ensembles sont en bijection avec les orbites de x sous H et sous G respectivement. Conclusion : l'action de H est, comme celle de G, transitive sur l'ensemble X.

Correction de l'exercice 5508 ▲

Soit H un sous-groupe primitif de S_n contenant une transposition. On peut supposer que H contient la transposition $(1\ 2)$. Le sous-groupe engendré par le fixateur $H(1)$ et $(1\ 2)$ contient strictement $H(1)$. D'après l'exercice 5507 (question (c)), ce groupe est H.

Considérons l'ensemble $\mathscr{O}$ réunion de l'orbite $H(1) \cdot 2$ de 2 sous $H(1)$ et du singleton $\{1\}$. Pour montrer que $\mathscr{O}$ est l'orbite de 2 sous H, il suffit de montrer que $2 \in \mathscr{O}$ (ce qui est clair) et que $\mathscr{O}$ est stable sous l'action de H, ou, ce qui est équivalent, stable sous l'action de $H(1)$ et de $(1\ 2)$. L'élément 1 est envoyé sur $1 \in \mathscr{O}$ par les éléments de $H(1)$ et sur $2 \in \mathscr{O}$ par $(1\ 2)$. L'ensemble $H(1) \cdot 2$ est invariant sous l'action de $H(1)$. Enfin, si $h \cdot 2$ désigne un élément quelconque de $H(1) \cdot 2$, alors son image par la permutation $(1\ 2)$ est 2 si $h \cdot 2 = 1$, 1 si $h \cdot 2 = 2$ et $h \cdot 2$ si $h \cdot 2 \neq 1, 2$; dans tous les cas, l'image est dans $\mathscr{O}$.

On a donc $\mathscr{O} = H \cdot 2 = H(1) \cdot 2 \cup \{1\}$. L'action de H étant transitive, cet ensemble est égal à $\{1, \ldots, n\}$ et donc $H(1) \cdot 2 = \{2, \ldots, n\}$ (puisque $1 \notin H(1) \cdot 2$). Cela montre que l'action de $H(1)$ sur $\{2, \ldots, n\}$ est transitive, et donc que H agit transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$ (exercice 21).

Pour i, j entiers distincts entre 1 et n, choisissons alors $g \in G$ tel que $g(1) = i$ et $g(2) = j$. On a $g(1\,2)g^{-1} = (g(1)\; g(2)) = (i\; j)$. Cela montre que H contient toutes les transpositions. Conclusion : $H = S_n$.

Correction de l'exercice 5511 ▲

Notons G le groupe des isométries de l'espace euclidien de dimension 3 laissant invariant l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_4\}$ des 4 sommets d'un tétraèdre régulier. Le fixateur $G(a_4)$ agit transitivement sur $\{a_1, a_2, a_3\}$: en effet ce sous-groupe contient la rotation d'axe la droite joignant a_4 au centre de gravité du triangle de sommets a_1, a_2, a_3, laquelle agit sur ces points comme un 3-cycle. D'après l'exercice 5509, le groupe G agit 2-transitivement sur $\{a_1, \ldots, a_4\}$. De plus $G(a_4)$ contient une isométrie agissant sur $\{a_1, \ldots, a_4\}$ comme une transposition, par exemple la symétrie par rapport au plan médiateur P du segment $[a_1, a_2]$, laquelle échange a_1 et a_2 et fixe a_3 et a_4 qui sont dans P. D'après l'exercice 5508, on a $G \simeq S_4$.

Notons G_+ le sous-groupe de G constitué de ses isométries directes. Le groupe G_+ est le noyau du morphisme det : $G_+ \to \{1, -1\}$ qui à tout $g \in G$ vu comme matrice associe son déterminant. Comme ce morphisme est surjectif (la rotation et la symétrie considérées ci-dessus sont respectivement directe et indirecte), G_+ est d'indice 2. D'où $G \simeq A_4$ puisque A_4 est le seul sous-groupe de S_4 d'indice 2 (cf exercice 5498).

Correction de l'exercice 5516 ▲

Le sous-groupe $H \subset G$ étant distingué, G agit par conjugaison sur H. Comme G est un p-groupe, H l'est aussi et les orbites non triviales de cette action sont de longueur divisible par p. On déduit que la réunion des orbites triviales, c'est-à-dire l'ensemble $H \cap Z(G)$ des points fixes, est aussi de cardinal divisible par p. Comme il contient l'élément neutre, il contient au moins p éléments et n'est donc pas réduit à l'élément neutre.

Correction de l'exercice 5517 ▲

(a) Soit G un p-groupe d'ordre p^r. Son centre $Z(G)$ est un p-groupe non trivial. Soit $x \in Z(G) \setminus \{1\}$. Si $p^\nu > 0$ est son ordre, alors $x^{p^{\nu-1}}$ est d'ordre p et dans $Z(G)$; on peut donc supposer que x lui-même est d'ordre p. Le groupe $< x >$ est distingué dans G et le groupe quotient $G/ < x >$ est d'ordre p^{r-1}. Par hypothèse de récurrence, pour tout $k \leq r$, le groupe $G/ < x >$ possède un sous-groupe distingué $\mathscr{H}$ d'ordre p^{k-1}. Soit H le sous-groupe image réciproque de $\mathscr{H}$ par la surjection canonique $G \to G/ < x >$. Le sous-groupe H, image réciproque par un morphisme d'un sous-groupe distingué, est distingué dans G et $\mathscr{H} = H/ < x >$, ce qui donne $|H| = |\mathscr{H}|\, | < x > | = p^k$.

Correction de l'exercice 5518 ▲

Comme p divise $|G|$, il existe dans G un élément s d'ordre p. Le sous-groupe $H = < s >$, d'indice 2, est nécessairement distingué dans G. Il est de plus le seul sous-groupe d'ordre p (cf l'exercice 5477).

De façon générale, un automorphisme χ d'un groupe cyclique $< \zeta >$ d'ordre p est déterminé par $\chi(\zeta) = \zeta^{i_\chi}$ et cet automorphisme est d'ordre 2 si et seulement si $i_\chi^2 \equiv 1$ [mod p], c'est-à-dire si $\chi(\zeta) = \zeta$ ou $\chi(\zeta) = \zeta^{-1}$ ce qui correspond aux deux automorphismes “identité” et “passage à l'inverse” (que p soit premier n'intervient pas ici ; le résultat est valable pour tout entier $p \geq 1$).

Soit $t \in G$ d'ordre 2 (qui existe car 2 divise $|G|$). La conjugaison par t induit un automorphisme du sous-groupe distingué H. D'apès ce qui précède, on a $tst^{-1} = s$ ou bien $tst^{-1} = s^{-1}$. Dans le premier cas, la correspondance $(s^i, t^\varepsilon) \to s^i \cdot t^\varepsilon$ ($i = 0, 1, 2$ et $\varepsilon = \pm 1$) induit un morphisme entre le produit direct $< s > \times < t >$ et G, lequel est injectif (car $< s > \cap < t >= \{1\}$) et donc est bijectif (puisque les groupes de départ et d'arrivée ont même ordre $2p$). Dans ce cas on a donc $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ cyclique. Dans l'autre cas, G est non commutatif (puisque $tst^{-1} = s^{-1} \neq s$) ; il est engendré par s et t qui vérifient les relations $s^p = 1$, $t^2 = 1$ et $tst^{-1} = s^{-1}$. Dans ce cas G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'ordre $2p$.

Correction de l'exercice 5519 ▲

(a) Le groupe G n'étant pas abélien n'est pas cyclique d'ordre 8 et possède au moins un élément $a \neq 1$ qui n'est pas d'ordre 2 (cf l'exercice 5421). Cet élément est nécessairement d'ordre 4. Le sous-groupe $H = < a >$ est distingué car d'indice 2.

(b) Supposons qu'il existe $b \in G \setminus H$ d'ordre 2 et posons $K = < b >$. On a $H \cap K = \{1\}$ car $b \notin H$. Le sous-groupe H étant distingué dans G, on peut écrire que $HK/H \simeq K$, ce qui donne $|HK| = |H|\; |K| = 8$ et donc $G = HK$. De plus, l'inclusion $K \subset G$ est une section de la suite exacte $1 \to H \to G \to K \to 1$. Le groupe G est donc isomorphe au produit semi-direct de H par K. L'action sur H du générateur b d'ordre 2 de K est nécessairement donnée par le passage à l'inverse (cf exercice 5518).

(c) Dans le cas contraire à (b), tous les éléments de $G \setminus H$ sont nécessairement d'ordre 4. Les éléments de G d'ordre 2 sont donc dans H, qui n'en possède qu'un : a^2, qu'on note -1.

Le centre $Z(G)$ est d'ordre différent de 1 car G est un 2-groupe et différent de 8 car G est non abélien. Il n'est pas non plus d'ordre 4 car alors on aurait $G = Z(G) \cup xZ(G)$ pour un $x \in G \setminus Z(G)$ mais alors G serait abélien. Le centre $Z(G)$ est donc d'ordre 2. D'après ce qui précède $Z(G) = \{1, -1\}$.

Soit $b \in G \setminus H$. Alors G est engendré par a et b. D'autre part b est d'ordre 4 et b^2 d'ordre 2 ce qui entraine $b^2 = -1$. La conjugaison par b induit un automorphisme du sous-groupe distingué $< a >$; on a donc $bab^{-1} = a^{-1}$, le seul autre cas $bab^{-1} = a$ étant exclu car G non abélien. On obtient ensuite aisément que si $ab = c$, on a $c^2 = -1$ ($c^2 = abab = aa^{-1}bb = b^2 = -1$) et $ba = -ab = -c$, $bc = -cb = a$, $ca = -ac = b$.

Correction de l'exercice 5521 ▲

(a) On a $\theta(g)(xH) = gxH$ $(g,x \in G)$. Le noyau de θ est l'intersection de tous les conjugués xHx^{-1} de H, c'est-à-dire, d'après les théorèmes de Sylow, l'intersection de tous les 3-Sylow de G. Comme l'intersection de deux 3-Sylow distincts est triviale, le noyau est $\neq \{1\}$ si et seulement s'il n'existe qu'un seul 3-Sylow, qui est alors automatiquement distingué dans G.

Si H est non distingué dans G, alors θ est injectif et fournit un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_4. Ce sous-groupe devant être d'ordre 12 comme G, c'est nécessairement A_4 (cf l'exercice 5498).

(b) Si G n'est pas isomorphe à A_4, alors nécessairement H est distingué dans G et c'est alors l'unique 3-Sylow de G. Notons $1, a, a^2$ les trois élément distincts du groupe cyclique H.

Supposons que G contienne un élément b d'ordre 4. On a $b^4 = a^3 = 1$. D'autre part, la conjugaison par b laissant invariant le sous-groupe distingué $H = < a >$, l'élément bab^{-1} doit être un générateur de $< a >$, c'est-à-dire a ou a^{-1}. Mais la première possibilité est exclue car sinon b serait dans le centre de G et G serait abélien (cf exercice 5481). La seconde possibilité existe bien : on prend par exemple pour G le produit semi direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ où l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ se fait à travers la surjection canonique $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, les classes de 0 et 2 modulo 4 agissent comme l'identité et celles de 1 et 3 comme le passage à l'inverse.

Supposons au contraire qu'aucun élément de $G \setminus H$ soit d'ordre 4. Les 2-Sylow sont donc isomorphes au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, deux quelconques B et B' d'entre eux sont forcément d'intersection non triviale car sinon l'ensemble produit BB' (qui est en bijection avec $B \times B'$ par $(b,b') \to bb'$) serait de cardinal $|B|\,|B'| = 16 > 12$. Il y a donc strictement moins de $3 \times 3 = 9$ éléments d'ordre 2 dans G. Comme $G \setminus H$ est de cardinal 9, il existe dans G un élément c d'ordre $\neq 2$. Cet élément ne pouvant non plus être d'ordre 3 (H est le seul 3-Sylow), ni d'ordre 4 (par hypothèse) est d'ordre 6. Le groupe $< c >$ est alors d'indice 2 et donc distingué dans G. Comme $< c >$ est cyclique, il ne possède qu'un seul élément d'ordre 2. On peut donc trouver dans un 2-Sylow de G un élément $d \in G \setminus < c >$ d'ordre 2. La conjugaison par d induit un automorphisme de $< c >$ qui envoie c sur un générateur de $< c >$, c'est-à-dire ou bien c ou bien c^{-1}. Mais la première possibilité est exclue car G n'est pas abélien. On a donc $dcd^{-1} = c^{-1}$; le groupe G est dans ce cas isomorphe au groupe diédral D_6.

(c) Les groupes d'ordre 12 sont

- les groupes abéliens : $\mathbb{Z}/3Z \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et

- les groupes non abéliens : A_4, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (pour l'action donnée ci-dessus) et D_6.

Correction de l'exercice 5523 ▲

Le groupe P est un p-sous groupe maximal de G et donc aussi de HP puisque $P \subset HP$ (noter que HP est un sous-groupe car H est supposé distingué dans G) ; P est donc un p-Sylow de HP. Si $|P| = p^n$, alors $|HP| = p^n s$ avec p ne divisant pas s. On peut aussi écrire $|H| = p^m r$ avec p ne divisant pas r ; on a alors nécessairement $m \leq n$ et s multiple de r. On a aussi $HP/H \simeq P/(H \cap P)$ ce qui donne $|H \cap P| = |P||H|/|HP| = p^m(r/s)$. On obtient donc que $s = r$ et que $H \cap P$ est un p-Sylow du groupe H.

On a aussi $|G| = p^n t$ avec p ne divisant pas t et t multiple de s. On en déduit $|G/H| = p^{n-m}(t/r)$. Comme t/r est un entier non divisible par p et que HP/H est un sous-groupe de G/H d'ordre $|HP/H| = p^{n-m}$, le groupe HP/H est un p-Sylow de G/H.

Correction de l'exercice 5524 ▲

D'après les théorèmes de Sylow, le nombre de 5-Sylow d'un groupe d'ordre $200 = 5^2.2^3$ est $\equiv 1$ [mod 5] et divise 8. Ce ne peut être que 1. L'unique 5-Sylow est nécessairement distingué puisque ses conjugués sont des 5-Sylow et coincident donc avec lui. Le groupe ne peut pas être simple.

Correction de l'exercice 5525 ▲

Les p-Sylow de S_p sont d'ordre p puisque p, étant premier, ne divise pas $p!/p = (p-1)!$. Chaque p-Sylow est donc cyclique d'ordre p et contient $p-1$ éléments d'ordre p. Les éléments d'ordre p de S_p sont les p-cycles ; il y en a $(p-1)!$. Il y a donc $(p-2)!$ p-Sylow. (On retrouve le théorème de Wilson : $(p-2)! \equiv 1$ [mod p] (ou $(p-1)! + 1 \equiv 0$ [mod p]) si p est premier).

Correction de l'exercice 5527 ▲

Le groupe alterné A_5 est d'ordre $60 = 2^2.3.5$.

Les 5-Sylow sont d'ordre 5, donc cycliques ; chacun est engendré par un 5-cycle et contient 4 5-cycles. Les 5-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$. Comme il y a 24 5-cycles dans A_5, il y a 6 5-Sylow. (On peut aussi utiliser les théorèmes de Sylow : Le nombre de 5-Sylow est $\equiv 1$ [mod 5] et divise 12 ; c'est donc 1 ou 6. Comme ce ne peut être 1 (car il y aurait alors un unique 5-Sylow qui serait distingué, ce qui est impossible car A_5 est simple), c'est 6.)

Les 3-Sylow sont d'ordre 3, donc cycliques ; chacun est engendré par un 3-cycle et contient 2 3-cycles. Les 3-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$. Comme il y a 20 3-cycles dans A_5, il y a 10 3-Sylow. (Par les théorèmes de Sylow : le nombre de 3-Sylow est $\equiv 1$ [mod 3] et divise 20 ; c'est donc 1, 4 ou 10. Comme ci-dessus, ce ne peut être 1. Si c'etait 4, la conjugaison de A_5 sur ces 3-Sylow induirait un morphisme $A_5 \to S_4$ non trivial (puisque cette action par conjugaison est transitive) et donc injectif (puisque le noyau, distingué, est forcément trivial). Or l'ordre de A_5 ne divise pas celui de S_4. Il y a donc 10 3-Sylow.)

Les 2-Sylow sont d'ordre 4, donc commutatifs. Comme il n'y a pas d'élément d'ordre 4 dans A_5, chaque 2-Sylow est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; il est engendré par deux produits de deux transpositions qui commutent et contient 3 éléments d'ordre 2. On voit ensuite que ces trois éléments d'ordre 2 sont les 3 produits de deux transpositions qui commutent qu'on peut former avec quatre éléments de $\{1,\dots,5\}$. On en déduit que les 2-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$. Il y a 15 éléments d'ordre 2 dans A_5 et il y a 5 2-Sylow.

Tout élément de A_5 est d'ordre 1, 2, 3 ou 5 et est donc contenu dans un p-Sylow. On a bien $6.4+10.2+5.3+1=60$.

Correction de l'exercice 5528 ▲

(a) Le nombre de 5-Sylow dans un groupe G d'ordre $60=2^2.3.5$ est $\equiv 1$ [mod 5] et divise 12. Comme G est supposé simple, ce ne peut être 1 ; il y a donc 6 5-Sylow. Le morphisme $\alpha : G \to S_6$ correspondant à l'action de G par conjugaison sur les 5-Sylow (une fois une numérotation des 5-Sylow de G choisie) est forcément injectif puisque son noyau, étant un sous-groupe distingué différent de G (d'après les théorèmes de Sylow, G agit transitivement sur les 5-Sylow), est nécessairement trivial. Considérons ensuite le groupe $\alpha^{-1}(A_6)$. C'est un sous-groupe distingué de G (comme image réciproque par un morphisme du sous-groupe distingué A_6 de S_6). Si $\alpha^{-1}(A_6)=\{1\}$ alors, pour tout $g\in G$, comme $\alpha(g^2)=\alpha(g)^2\in A_6$, on aurait $g^2=1$ et donc G abélien, ce qui est absurde. On a donc $\alpha^{-1}(A_6)=G$, c'est-à-dire, $\alpha(G)=H\subset A_6$.

(b) Notons $\varphi : A_6 \to S_6$ le morphisme correspondant à l'action de A_6 par translation à gauche sur $A_6/.H$ (une fois une numérotation des éléments de $A_6/.H$ choisie). En utilisant la simplicité de A_6, on montre comme ci-dessus que φ est injectif et que $\varphi(A_6)\subset A_6$. Il en découle que φ est un isomorphisme entre A_6 et $\varphi(A_6)=A_6$.

(c) Un élément $x\in A_6$ fixe la classe neutre H si et seulement si $x\in H$. On obtient que H est isomorphe, *via* φ, au fixateur d'un entier, disons 6, dans l'action de A_6 sur $\{1,\dots,6\}$, c'est-à-dire, à $A_6\cap S_5=A_5$.

Correction de l'exercice 5531 ▲

Le nombre de q-Sylow d'un groupe G d'ordre p^2q est $\equiv 1$ [mod q] et divise p^2. Ce ne peut être ni p ni p^2 car p^2-1 est supposé non divisible par q ; c'est donc 1. De même le nombre de p-Sylow est $\equiv 1$ [mod p] et divise q et ce ne peut être q car $q-1$ est supposé non divisible par p ; c'est donc 1. Ainsi il y a un unique p-Sylow P d'ordre p^2, et donc abélien, et un unique q-Sylow Q d'ordre q, et donc cyclique, tous deux nécessairement distingués. Il en résulte que tout élément $x\in P$ commute avec tout élément $y\in Q$: en effet le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}=(xyx^{-1})y^{-1}=x(yx^{-1}y^{-1})$ est dans l'intersection $P\cap Q$ qui est le groupe trivial. Cela montre que le groupe PQ est abélien ; il est isomorphe au produit direct $P\times Q$ et est donc de cardinal $|P|\,|Q|=p^2q=|G|$. D'où finalement $G=PQ$ est abélien.

Correction de l'exercice 5532 ▲

Soit G un groupe d'ordre p^2q qu'on suppose simple. On distingue deux cas :

<u>1er cas</u> : $p>q$. Le nombre de p-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod p] et divise q. Comme G est simple, ce ne peut être 1 (car sinon l'unique p-Sylow serait distingué). Il y a donc q p-Sylow d'ordre p^2, lesquels sont conjugués. L'action par conjugaison de G sur ces q p-Sylow définit un morphisme $G\to S_q$ non trivial (car l'action est transitive) et donc injectif puisque le noyau, distingué et $\neq G$, est forcément trivial. On en déduit que p^2q divise $q!$ et donc p divise un entier entre 1 et $q-1$, ce qui contredit l'hypothèse $p>q$.

<u>2ème cas</u> : $p<q$. Le nombre de q-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod q] et divise p^2. Comme ci-dessus, G étant simple, ce ne peut être 1. Ce ne peut-être ni p ni p^2. En effet, dans le cas contraire, p serait $\equiv \pm 1$ [mod q] et donc $p\geq q-1$. Comme $p<q$, la seule possibilité est $p=q-1$ et donc $p=2$ et $q=3$. Dans ce dernier cas, il y a 4 3-Sylow d'ordre 3 qui contiennent 8 éléments d'ordre 3. Ne reste de la place que pour un seul 2-Sylow qui devrait être distingué. Ce dernier cas n'est donc lui non plus pas possible.

Conclusion : il n'existe pas de groupe G simple d'ordre p^2q.

Correction de l'exercice 5533 ▲

(a) Le nombre de 19-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod 19] et divise 21 ; ce ne peut être que 1. Le groupe G a donc un unique 19-Sylow P qui est distingué.

(b) Comme P est distingué dans G, $N=PQ$ est un sous-groupe de G. De $P\cap Q=\{1\}$, on déduit que $PQ/P\simeq Q$ et donc que PQ est d'ordre $7.19=133$. D'après l'exercice 15, le groupe N est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, lequel est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$ par le lemme chinois.

(c) Le nombre de 7-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod 7] et divise 57. Les seules possibilités sont 1 et 57. Or ce n'est pas 1 non plus car on suppose que Q n'est pas distingué. Le groupe G admet donc 57 7-Sylow, et donc 57 sous-groupes cycliques d'ordre 133 par la question précédente. Ces 57 groupes d'ordre 133 sont bien distincts car deux 7-Sylow distincts engendrent avec P deux groupes cycliques d'ordre 133 distincts puisque le 7-Sylow est l'unique sous-groupe d'ordre 7 du groupe cyclique. Par conséquent leurs ensembles de générateurs sont deux à deux disjoints. On obtient ainsi $57\times\phi(133)=57\times 6\times 18$ éléments d'ordre 133 dans G (ϕ désigne ici la fonction indicatrice d'Euler), ce qui est manifestement absurde. On peut donc conclure que Q est distingué dans G et que l'unique sous-groupe cyclique $N=PQ$ d'ordre 133 l'est aussi.

(d) Comme N est distingué dans G, NR est un sous-groupe de G. De $N\cap R=\{1\}$, on déduit que $NR/N\simeq R$ et donc que NR est d'ordre $133.3=399$. Ainsi $G=NR$ et l'isomorphisme précédent $G/N\simeq R$ montre que l'inclusion $R\to G$ est une section de la suite exacte

$1 \to N \to G \to R \to 1$. Le groupe G est donc isomorphe au produit semi-direct du groupe cyclique N d'ordre 133 par le groupe cyclique R d'ordre 3.

Correction de l'exercice 5544 ▲

Cours... Non, les rôles des deux opérations ne sont pas interchangeables, puisque l'une est distributive sur l'autre.

Correction de l'exercice 5545 ▲

(a) une seule solution $x = a^{-1}(c-b)$

(b) pas de solution, et deux solutions. Attention, dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, on ne peut pas inverser 2. Ecrire $2x = 3+10k$ pour obtenir que $2|3$, et $2x = 6+10k$ pour simplifier par 2... dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5546 ▲

(a) Ecrire $(0+a)a = a.a$ d'une part (0 est neutre pour $+$) et $(0+a).a = 0.a + a.a$ (distributivité).

(b) $(-1).a + a = (-1+1).a = 0.a = 0$ (distributivité, puis question précédente)

(c) Si $|A| = 1$, $1 = 0$. Si $1 = 0$, $\forall a \in A, a = 1.a = 0.a = 0$, donc $A = \{0\}$.

Correction de l'exercice 5547 ▲

(a) Si $xy \in A^{\times}$, soit $z \in A$, $(xy)z = 1$. Alors $x(yz) = 1$ et $(zx)y = 1$ donc x et y sont inversibles.

(b) Soit $x \in A^{\times}$, et $y \in A, xy = 0$. Alors $x^{-1}xy = y = 0$. Donc x n'est pas diviseur de 0.

Correction de l'exercice 5548 ▲

Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Soit $\phi_a : A \to A, x \mapsto ax$. Si $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, alors $ax = ay$, donc $a^{-1}ax = a^{-1}ay$ et $x = y$. ϕ_a est donc injective de A dans A. Comme A est fini, elle est donc aussi surjective : $\exists x \in A, \phi_a(x) = 1$.

Correction de l'exercice 5549 ▲

Ce sont tous des anneaux. Montrer que A est stable par addition, par passage à l'opposé, contient 0, est stable par multiplication et contient 1. Le reste (associativité et distributivité) est automatique puisqu'il s'agit des restrictions des opérations usuelles sur $\mathbb{C}$)

(a) A est l'ensemble des nombres dont le développement décimal s'arrête ("nombre fini de chiffres après la virgule").
Stabilité par addition : Soit $x = 10^{-n}a$ et $y = 10^{-m}b$. Supposons par exemple que $n \geq m$. Alors $x+y = 10^{-n}(a+10^{n-m}b)$ et $a+10^{n-m}b \in \mathbb{Z}$ donc $x+y \in A$. Les autres vérifications sont analogues.
Ce n'est pas un corps : 3 n'est pas inversible, puisque si $3 \cdot 10^{-n}a = 1$, alors $3a = 10^n$ donc $3|10^n$ ce qui est impossible. Un élément est inversible ssi il est de la forme $10^{-n}2^{\alpha}5^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

(b) Stabilité par addition : Soit $x = \frac{a}{b} \in A$ et $y = \frac{c}{d} \in A$, avec $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(c,d) = \text{pgcd}(p,b) = \text{pgcd}(p,d) = 1$. Alors $x+y = \frac{ad+bc}{bd}$.
Ce n'est pas un corps : p n'est pas inversible. Un élément est inversible ssi ce n'est pas un multiple de p.

(c) N'est pas un corps : 2 n'est pas inversible. Les seuls éléments inversibles sont $1, -1, i, -i$. En effet, si $z \in A^{\times}$, alors $|z| \geq 1$ et $|z^{-1}| \geq 1$. Donc $|z| = 1$ et $z \in \{\pm 1, \pm i\}$. Réciproquement, ces éléments sont bien tous inversibles.

Correction de l'exercice 5556 ▲

$1 \in I+J$ donc $\exists (x,y) \in I \times J, 1 = x+y$. En multipliant cette égalité par x, on obtient $x^2 + xy = x$. On en déduit que $xy \in I$, donc $\forall p \in \mathbb{N} ; x^p y \in I^p$, et donc $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, x^p y^q \in I^p$. Par symétrie, on a aussi $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, x^p y^q \in J^q$.
Soit maintenant $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Notons $N = 2\sup(m,n)$. Alors $1 = 1^N = (x+y)^N = \sum_{p+q=N} C_N^p x^p y^q$. Comme : $(p+q = 2N) \Rightarrow (p \geq n$ ou $q \geq m)$, tous les termes de cette somme sont dans I^n ou dans J^m, et donc $1 \in I^n + J^m$

Correction de l'exercice 5557 ▲

(a) $3, 5, 7, 11$ sont deux à deux premiers entre eux, donc la solution est unique modulo $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 13 \mod 15 \\ x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 88 \mod 105 \\ x \equiv 2 \mod 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x \equiv 508 \mod 1155 \right.$$

(b) Un diviseur commun de 2001 et 2002 divise leur différence, et donc $\operatorname{pgcd}(2001,2002) = 1$. De même, $\operatorname{pgcd}(2002,2003) = 1$, et comme $2 \not| 2001$, $\operatorname{pgcd}(2001,2003) = 1$.
$2001, 2002, 2003$ sont donc deux à deux premiers entre eux, et la solution est donc unique modulo $2001 \cdot 2002 \cdot 2003$.

$$\begin{cases} x \equiv 997 \mod 2001 \\ x \equiv 998 \mod 2002 \\ x \equiv 999 \mod 2003 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -1004 \mod 2001 \\ x \equiv -1004 \mod 2002 \\ x \equiv -1004 \mod 2003 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv -1004 \mod (2001 \cdot 2002 \cdot 2003)$$

Correction de l'exercice 5558 ▲

On a $72 = 8 \cdot 9$ et $\operatorname{pgcd}(8,9) = 1$, donc $\mathbb{Z}_{72} \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$. De même, $\mathbb{Z}_{84} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{36} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ et $\mathbb{Z}_{168} \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$. Donc $\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_{84} \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{128}$

Correction de l'exercice 5559 ▲

(a) $11, 31, 61$ sont premiers donc 2 à 2 premiers entre eux. Ainsi $20^{15} \equiv 1[11 \cdot 31 \cdot 61] \Leftrightarrow \begin{cases} 20^{15} \equiv 1[11] \\ 20^{15} \equiv 1[31] \\ 20^{15} \equiv 1[61] \end{cases}$

- En utilisant le petit théorème de Fermat, on obtient que, modulo 11 : $20^{15} \equiv 20^5 \equiv -2^5 \equiv 1[11]$.
- $(20^{15})^2 = 20^{30} \equiv 1[31]$. On en déduit que $20^{15} \equiv \pm 1[31]$. Comme $31 \not\equiv 1[4]$, d'après le théorème de Wilson, $x^2 = -1$ n'a pas de solution modulo 31, et donc $20^{15} \equiv 1[31]$. $20^2 \equiv -3[31]$ est premier
- $20^{15} \equiv (9^2)^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1[61]$

(b) $1155 = 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$. De plus (petit théorème de Fermat) $2^{6754} \equiv 2^4 \equiv 5[11]$. De même, $2^{6754} \equiv 2^4 \equiv 2[7]$, $2^{6754} \equiv 2^2 \equiv -1[5]$, et $2^{6754} \equiv 2^0 \equiv 1[3]$. Or

$$\begin{cases} a \equiv 5[11] \\ a \equiv 2[7] \\ a \equiv 4[5] \\ a \equiv 1[3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 5[11] \\ a \equiv 2[7] \\ a \equiv 4[15] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 5[11] \\ a \equiv -26[105] \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv 709[1155]$$

Donc le reste de la division de 2^{6754} par 1155 est 709.

Correction de l'exercice 5560 ▲

13 est premier et $100 = 12 \cdot 8 + 4$ donc $10^{100} \equiv 10^4 \equiv (-3)^4 \equiv 3 \equiv -10[13]$. De même $10^{100} \equiv 10^{-8} \equiv 2^8 \equiv 9 \equiv -10[19]$. En utilisant le lemme chinois, on en déduit que $10^{100} \equiv -10[247]$. Comme $\operatorname{pgcd}(10,247) = 1$, on peut simplifier cette expression par 10 et on a $10^{99} \equiv -1[247]$, et donc $247 | 10^{99} + 1$.

Correction de l'exercice 5561 ▲

$C = A \times B$.

$$\begin{aligned} (a,b) \in (A \times B)^\times &\Leftrightarrow \exists (c,d) \in A \times B,\ (a,b)(c,d) = (1,1) \\ &\Leftrightarrow \exists (c,d) \in A \times B,\ ac = 1 \text{ et } bd = 1 \\ &\Leftrightarrow a \in A^\times \text{ et } b \in B^\times \end{aligned}$$

donc $(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$.
De même, on obtient que l'ensemble $\mathscr{D}_{A \times B}$ des diviseurs de 0 de $A \times B$ est

$$\mathscr{D}_{A \times B} = \mathscr{D}_A \times B \cup A \times \mathscr{D}_B \cup (A \setminus \{0\}) \times \{0\} \cup \{0\} \times (B \setminus \{0\}).$$

Enfin, pour les nilpotents $Nil(A \times B) = Nil(A) \times Nil(B)$.

Correction de l'exercice 5562 ▲

(a) En posant $y = x+1$, on a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+x+1) = \{0,1,x,y,x^2,y^2,xy,xy+1\}$. Les tables des opérations sont les suivantes (elles sont symétriques) :

$\oplus$	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
0	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
1		0	y	x	y^2	x^2	$xy+1$	xy
x			0	1	xy	$xy+1$	x^2	y^2
y				0	$xy+1$	xy	y^2	x^2
x^2					0	1	x	y
y^2						0	y	x
xy							0	1
$xy+1$								0

$\otimes$	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
x			x^2	xy	$xy+1$	y^2	y	1
y				y^2	y	0	y^2	xy
x^2					1	y^2	xy	x
y^2						0	0	y^2
xy							y^2	y
$xy+1$								x^2

Pour $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$, $(x-1)$ et $(x+1)$ sont deux idéaux étrangers, et le lemme chinois nous donne $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Z}[x]/(x-1) \times \mathbb{Z}[x]/(x+1)$. Or $\mathbb{Z}[x]/(x+1) \simeq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[x]/(x-1) \simeq \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
La factorisation de (x^8-1) sur $\mathbb{Q}$ est $(x^8-1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$. En utilisant le lemme chinois, on obtient que $\mathbb{Q}[x]/(x^8-1) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x+1) \times \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \times \mathbb{Q}[x]/(x^4+1)$ soit :

$$\mathbb{Q}[x]/(x^8-1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[i] \times \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}].$$

Montrons en effet que $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Q}[i]$: l'application $\phi : \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{Q}[i]$ définie par $\bar{P} \mapsto P(i)$ est un morphisme d'anneau.

– injectivité : Soit $\bar{P} \in \ker\phi$. Alors $P(i) = 0$. Comme P est à coefficient rationnels donc réels, $-i$ est aussi raine de P. Donc $x^2+1|P$.
– surjectivité : Soit $z = a+ib \in \mathbb{Q}[i]$. Alors $z = \phi(ax+b)$.

De même pour $\mathbb{Q}[x]/(x^4+1) \simeq \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}]$. Considérons le morphisme ϕ : $\mathbb{Q}[x]/(x^4+1) \to \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}]$ défini par $\phi(\bar{P}) = P(e^{i\pi/4})$. ϕ est bien définie, c'est un morphisme d'anneau.

– injectivité : Soit $\bar{P} \in \ker\phi$. Alors $P(e^{i\pi/4}) = 0$. Par ailleurs X^4+1 est *irréductible* dans $\mathbb{Q}$: sa factorisation sur $\mathbb{R}$ est $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, et aucun de ces deux polynômes, même à inversible réel près, n'est rationnel. On en déduit que si (x^4+1) ne divise pas P, alors $\text{pgcd}(X^4+1,P) = 1$. Il existerait donc $U,V \in \mathbb{Q}[x]$, $UP+V(X^4+1) = 1$. En évaluant en $x = e^{i\pi/4}$, on obtient une contradiction. Donc $X^4+1|P$. (cf. exexercice 5579).
– surjectivité : Soit $z = a+be^{i\pi/4} \in \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}]$. Alors $z = \phi(ax+b)$.

(b) On a $K[x]/(f^n g^m) \simeq K[x]/(f^m) \times K[x]/(g^m)$. On en déduit que les diviseurs de 0 sont les polynômes de la forme $\bar{P}$ où P satisfait l'une des conditions suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} f^n|P \text{ et } g^m \nmid P & (\{0\} \times K[x]/(g^m) \setminus \{0\}) \\ g^m|P \text{ et } f^n \nmid P & (K[x]/(f^n) \setminus \{0\} \times \{0\}) \\ f|P \text{ et } f^n \nmid P & (\mathscr{D}_{K[x]/(f^n)} \times K[x]/(g^m)) \\ g|P \text{ et } g^m \nmid P & (K[x]/(f^n) \times \mathscr{D}_{K[x]/(g^m)}) \end{array}\right.$$

Les nilpotents sont donnés par les conditions

$$\left\{\begin{array}{l} fg|P \\ (f^n g^m \nmid P \text{ si on veut exclure } 0) \end{array}\right.$$

(c) Les idéaux de $K[x]/(f^n)$ sont les idéaux engendrés par les diviseurs de f^n soit les f^k pour $0 \leq k \leq n$.

La démonstration peut se faire en toute généralité exactement de la même manière que dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs de f^n (modulo K^*). Ici, $\mathscr{D} = \{f^k, 0 \leq k \leq n\}$. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble de idéaux de $K[x]/(f^n)$. On a une flèche de $\mathscr{D} \to \mathscr{I}$, donnée par $d \mapsto (\bar{d})$.

– surjectivité Soit $I \in \mathscr{I}$. I est principal : notons $I = (\bar{h})$. Soit $d = \text{pgcd}(f,h)$, et h_1 le polynôme déterminé par $h = dh_1$. Alors $\text{pgcd}(f,h_1) = 0$ et h_1 est inversible dans le quotient. On en déduit que $(\bar{h}) = (\bar{d}) = I$ (or $d \in \mathscr{D}$).

– injectivité Soit $d,d' \in \mathscr{D}$ tels que $(\bar{d}) = (\bar{d'})$. On a alors $d = h_1 d' + h_2 f$ donc $d'|d$. De même, $d|d'$. On en déduit que $d \sim d'$.

Revenons à notre exercice : les idéaux de $K[x]/(f^n) \times K[x]/g^m$ sont donc de la forme $(f^\alpha) \times (g^\beta)$. En revenant à $K[x]/(f^n g^m)$, on obtient que l'ensemble des idéaux est

$$\{(f^\alpha g^\beta), 0 \leq \alpha, \beta \leq n\}$$

(d) Les inversibles de $K[x]/(f^n)$ sont les (classes des) polynômes premiers avec f. Le complémentaire est donc formé des multiples de f, il y en a donc autant que de polynômes de degré $(nd-1)-d$ où d est le degré de f, soit $p^{(n-1)d}$. Il y a donc $p^{(n-1)d}(p-1)$ inversibles dans $K[x]/(f^n)$.
On en déduit qu'il y en a $p^{(n-1)d_f+(m-1)d_g}(p-1)^2$ dans $K[x]/(f^n g^m)$, où d_f et d_g sont les degrés respectifs de f et g.

(e) Plus généralement, si les f_i sont des polynômes irréductibles distincts, dans $K[x]/(f_1^{n_1}\cdots f_k^{n_k})$ il y a $p^{\Sigma(n_i-1)d_i}(p-1)^k$ inversibles, où d_i est le degré de f_i.

Correction de l'exercice 5563 ▲

Pour obtenir les facteurs multiples, on utilise la remarque suivante : g est un facteur multiple de f ssi g est un facteur commun à f et à f' (dérivé formel de f).
Ainsi $\mathrm{pgcd}(f,f')$ est le produit de tous les facteurs multiples de f, avec exposant diminué de 1 par rapport à f. Ainsi $f/\mathrm{pgcd}(f,f')$ est le produit de tous les facteurs irréductibles de f, avec exposant 1 pour tous. Finalement, $\mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(f,f'), f/\mathrm{pgcd}(f,f'))$ est le produit de tous les facteurs multiples de f avec exposant 1.

Correction de l'exercice 5565 ▲

Soit $z = n+m\sqrt{d}, z' = n'+m'\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(n+m\sqrt{d})(n'+m'\sqrt{d})}\\ &= \overline{(nn'+mm'd)+(nm'+n'm)\sqrt{d}}\\ &= (nn'+mm'd)-(nm'+n'm)\sqrt{d}\\ &= (n-m\sqrt{d})(n'-m'\sqrt{d})\\ &= \bar{z}\bar{z}'\end{aligned}$$

Donc $\forall z,z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.
On a alors $\forall z,z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}],\ N(zz') = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z}' = N(z)N(z')$.

Correction de l'exercice 5566 ▲

(a) – Si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible :
Alors $zz^{-1} = 1$, donc $N(z)N(z^{-1}) = 1$. Comme $N(z) \in \mathbb{Z}$ et $N(z^{-1}) \in \mathbb{Z}$, on a donc $N(z) \in \{1,-1\}$.
– Si $N(z = \pm 1)$:
Alors $z\bar{z} = \pm 1$, donc $z(\pm\bar{z}) = 1$. Comme $\pm\bar{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, z est inversible.

(b) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tels que $z = z_1 z_2$. Alors $N(z_1)N(z_2) = \pm p$. Comme $\pm p$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, on en déduit que $N(z_1) = \pm 1$ ou $N(z_2) = \pm 1$. D'après la question précédente, on a $z_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ ou $z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$: on en déduit que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
(Attention : p est premier donc irréductible dans $\mathbb{Z}$, mais peut être réductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$! cf. 2 dans $\mathbb{Z}[i]$.)

(c) On a $N(3) = N(2+\sqrt{-5}) = 9$. On peut montrer en fait que tout élément z de norme 9 est irréductible : si $z = z_1 z_2$, alors $N(z_1)N(z_2) = 9$. Donc $\{N(z_1), N(z_2)\} = \{1,9\}$ ou $\{3,3\}$ (dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la norme est toujours positive). Or pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}^2, n^2+5m^2 \neq 3$. En effet, si $|m| \geq 1, n^2+5m^2 \geq 5$ et pour $m = 0$, l'équation revient à $n^2 = 3$, qui n'a pas de solution entière. Ainsi, $N(z_1) = 1$ ou $N(z_2) = 1$, donc z_1 ou z_2 est inversible. z n'a donc pas de factorisation non triviale : z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. En particulier, 3 et $2+\sqrt{-5}$ le sont.

(d) Tout élément de A de norme 9 est irréductible. Il suffit donc de trouver tous les éléments de norme 9. Soit $z = n+m\sqrt{-5} \in A$. Si $|m| \geq 2$ ou $|n| \geq 4$, alors $N(z) > 9$. On cherche donc les éléments de norme 9 parmi les éléments $z = n+m\sqrt{-5}$ avec $|n| \leq 3$ et $|m| \leq 1$. Pour $m = 0$, les seules solutions sont $n = \pm 3$, pour $|m| = 1$, les solutions sont obtenues pour $|n| = 2$. Ainsi :

$$\forall z \in A : \ N(z) = 9 \Leftrightarrow z \in \{\pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{5})\}$$

(e) On a $N(9) = 81$. Donc si $9 = z_1 z_2$ est une factorisation de 9 dans A, $N(z_1)N(z_2)$ est une factorisation de 81 (dans $\mathbb{Z}$), et plus précisément on a $\{N(z_1), N(z_2)\} \in \Big\{\{1,81\},\{3,27\},\{9,9\}\Big\}$.
Si $N(z_1) = 1$ ou $N(z_2) = 1$, la factorisation est triviale.

A n'a pas d'élément de norme 3 donc la paire $\{3,27\}$ n'est pas réalisable.
Si enfin $N(z_1) = N(z_2) = 9$, alors $z_1, z_2 \in \{\pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{5})\}$. Comme $9 = 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, tous ces éléments sont diviseurs de 9.
Les diviseurs de 9 sont donc $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{-5}), \pm 9\}$.

Comme $N(3(2+\sqrt{-5})) = 81$, le même raisonnement montre que si $d \in A$ divise $3(2+\sqrt{-5})$, alors $d \in \{\pm 1, \pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{-5}), \pm 3(2 \pm \sqrt{-5})\}$.
Si $(2-\sqrt{-5})a = 3(2+\sqrt{-5})$, alors $N(a) = 9$, donc $a = \pm 3$ ou $\pm(2 \pm \sqrt{-5})$. Comme A est intègre, si $a = \pm 3$, on obtient $2-\sqrt{-5} = \pm(2+\sqrt{-5})$, ce qui est faux. Si $a = \pm(2+\sqrt{-5})$, on obtient $2-\sqrt{-5} = \pm 3$, ce qui est faux. Si enfin $a = \pm(2-\sqrt{-5})$, on obtient $\pm(-1-4\sqrt{-5}) = 6+3\sqrt{-5})$, ce qui est encore faux. Donc $2-\sqrt{-5}$ ne divise pas $3(2+\sqrt{-5})$ dans A. Tous les autres éléments de norme 9 divisent $3(2+\sqrt{-5})$, donc, finalement :
Les diviseurs de $3(2+\sqrt{-5})$ sont $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2+\sqrt{-5}), \pm 3(2+\sqrt{-5})\}$.
(Attention : Le seul fait que 3 et $2+\sqrt{-5}$ soient irréductibles ne permet pas de conclure ! Si l'anneau n'est pas factoriel, un produit d'irréductibles $p_1 p_2$ peut avoir d'autres diviseurs (à association près) que p_1 et p_2... cf $3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$!)

(f) On connaît la liste des diviseurs de 3 et de $2+\sqrt{-5}$. Les seuls qui soient communs sont 1 et -1. On en déduit que 1 est un pgcd de 3 et $2+\sqrt{-5}$.

9 et $3(2+\sqrt{-5})$ sont des multiples communs de 3 et $2+\sqrt{-5}$, donc si ces deux éléments admettent un ppcm m, on a $m|9$ et $m|3(2+\sqrt{-5})$. On connaît la liste des diviseurs de 9 et $3(2+\sqrt{-5})$: à association près, on en déduit que $m \in \{1, 3, 2+\sqrt{-5}\}$. Comme $3|m$, la seule possibilité est $m = 3$, et comme $(2+\sqrt{-5})|m$, la seule possibilité est $m = 2+\sqrt{-5}$. Il y a donc contradiction :
3 et $2+\sqrt{-5}$ n'ont pas de ppcm dans A.

(g) Supposons I principal : soit $a \in A$ un générateur : $I = (a)$. Alors a est un diviseur commun à 3 et $2+\sqrt{-5}$, donc $a = \pm 1$. (En particulier, $I = A$). Soient $u = u_1 + u_2\sqrt{-5}$ et $v = v_1 + v_2\sqrt{-5}$ deux éléments de A. On a :

$$\begin{aligned} 3u + (2+\sqrt{-5})v = 1 &\Leftrightarrow (3u_1 + 2v_1 - 5v_2) + (3u_2 + v_1 + 2v_2)\sqrt{-5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2v_1 - 5v_2 & = 1 \\ 3u_2 + v_1 + 2v_2 & = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 & \equiv 1[3] \\ v_1 - v_2 & \equiv 0[3] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\forall u, v \in A,\ 3u + (2+\sqrt{-5})v \neq 1$. Donc $1 \notin I$, ce qui est une contradiction : I n'est pas principal.
L'anneau A n'est pas principal puisqu'il a au moins un idéal non principal. Il n'est pas non plus factoriel, puisque $9 = 3\,3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ admet deux factorisation en irréductibles non équivalentes à association près.

(h) – Les diviseurs communs de 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ sont $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2+\sqrt{-5})\}$. Si 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ admettent un pgcd d, alors d est dans cette liste, et divisible par tous les membre de cette liste. Mais 3 n'est pas divisible par $2+\sqrt{-5}$ et $2+\sqrt{-5}$ ne divise pas 3 : 9 et $2+\sqrt{-5}$ n'ont pas de pgcd.
– Supposons que 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ admettent un ppcm M. Alors il existe des éléments $a, b \in A$ tels que $M = 9a = 3(2+\sqrt{-5})b$. Notons $m = 3a = (2+\sqrt{-5})b$ (A est intègre).
m est un multiple commun de 3 et $2+\sqrt{-5}$.
Soit k un multiple commun de 3 et $2+\sqrt{-5}$. Alors $3k$ est un multiple commun de 9 et $3(2+\sqrt{-5})$, donc $M|3k$: $\exists c \in A, 3k = Mc = 3mc$. On en déduit que $k = mc$ (A est intègre), donc $m|k$. On en déduit que m est un ppcm de 3 et $2+\sqrt{-5}$, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 5567 ▲

(a) $\bar{n}$ est inversible ssi $\mathrm{pgcd}(n,36) = 1$ (Bezout !), i.e. $\bar{n} \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17\}$. Les autres éléments sont tous des diviseurs de 0 puisque $\bar{n}$ divise 0 ssi $\mathrm{pgcd}(n,36) \neq 1$. Enfin, $\bar{n}$ est nilpotent ssi $2|n$ et $3|n$, donc ssi $6|n$, soit $\bar{n} \in \{0, \pm 6, \pm 12, 18\}$.

(b) Montrons que l'ensemble $\mathscr{I}$ des idéaux de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{D} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ des diviseurs (positifs) de 36.
Considérons l'application $\phi : \mathscr{D} \to \mathscr{I}$ définie par $\phi(d) = (\bar{d})$.
Injectivité : Si $\phi(d) = \phi(d')$, alors $\exists a, b \in \mathbb{Z}, d = d'a + 36b$. Comme $d|36$, on en déduit que $d|d'$. De même, on a $d'|d$, et donc $d = d'$.
*Surjectivité :*Soit $I \in \mathscr{I}$. $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ est principal, donc $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Soit $d = \mathrm{pgcd}(a,36)$. Notons $a = da'$: $\mathrm{pgcd}(a',36) = 1$. On en déduit que $\bar{a}'$ est inversible dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Alors $\bar{d} \sim \bar{a}$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. On en déduit que $I = (\bar{d}) = \phi(d)$.
Finalement, il y a donc 9 idéaux dans $\mathbb{Z}_{36}$:
– $(\bar{1}) = \mathbb{Z}_{36}$,
– $(\bar{2}) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 16, 18\}$,
– $(\bar{3}) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, 18\}$,
– $(\bar{4}) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16\}$,

– $\overline{(6)} = \{0, \pm 6, \pm 12\}$
– $\overline{(9)} = \{0, \pm 9, 18\}$
– $\overline{(12)} = \{0, \pm 12\}$
– $\overline{(18)} = \{0, 18\}$
– $\overline{(36)} = \{0\}$,

(c) Si $a, b \in A^\times$, alors $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$ donc $ab \in A^\times$.
Si $ab \in A^\times$, soit $c = (ab)^{-1}$. Alors $a(bc) = 1$ donc $a \in A^\times$ et $b(ac) = 1$ donc $b \in A^\times$.

(d) On a $(6x+1)(-6x+1) = 1$ dans $\mathbb{Z}_{36}[x]$, donc $18x+1$ y est inversible.

(e) Soit f un inversible de $\mathbb{Z}_{36}[x]$. Choisissons $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\bar{P} = f$ et $Q \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\bar{Q} = f^{-1}$.
La projection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ se factorise par $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_2$. Ces projections sont bien définies, et sont des morphismes d'anneaux. Notons $P_{[2]}$ la réduction de P modulo 2 : on a alors $P_{[2]}Q_{[2]} = (PQ)_{[2]} = 1$, et comme $\mathbb{Z}_2$ est un corps, $P_{[2]} = 1$, $Q_{[2]} = 1$. On en déduit que 2 divise tous les coefficients de P, sauf celui de degré 0. De même, en considérant la réduction modulo 3, on obtient que 3 divise tous les coefficients de P, sauf celui de degré 0. Finalement, 6 divise tous les coefficients de P sauf celui de degré 0, qui est inversible modulo 36 : à association (dans $\mathbb{Z}_{36}$) près, f est donc de la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{d} 6a_i x^i + 1, \qquad (a_i) \in \mathbb{Z}_{36}.$$

Réciproquement, si f est de cette forme, c'est à dire $f = 1 + 6xf_1$, avec $f_1 \in \mathbb{Z}_{36}[x]$, alors :

$$(1 + 6xf_1)(1 - 6xf_1) = 1$$

donc f est inversible.

Correction de l'exercice 5568 ▲

(a) Le critère d'Eisenstein avec 2 pour module donne directement le résultat.

(b) La réduction modulo 2 de Q est $Q_{[2]} = x^6 + x^2 + 1$, qui n'a pas de racine, et n'est pas divisible par $x^2 + x + 1$, le seul irréductible de degré 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$. Ainsi, $Q_{[2]}$ est soit irréductible, auquel cas Q l'est aussi sur $\mathbb{Z}$, soit le produit de deux irréductibles de degré 3.
Si $Q_{[2]}$ n'est pas irréductible, on considère la réduction modulo 3 de Q : $Q_{[3]} = x^6 + 1 = (x^2+1)^3$. $x^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}_3$, car il est de degré 2 et n'a pas de racine. Soit $Q = RS$ une factorisation non triviale de Q sur $\mathbb{Z}$. On peut supposer R et S unitaires. Alors, en considérant la réduction modulo 2, on obtient que $R_{[2]}$ et $S_{[2]}$ sont deux irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}_2[x]$. En particulier $\deg(R) = \deg(R_{[2]}) = 3$ (car R est unitaire) et $\deg(S) = \deg(S_{[2]}) = 3$. Cependant, la réduction modulo 3 de Q n'admet pas de factorisation suivant deux polynômes de degré 3. C'est une contradiction : on en déduit que Q n'a pas de factorisation non triviale.

Correction de l'exercice 5569 ▲

Soit p un nombre premier impair. Notons $p = 2m+1$. On a

$$(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1}[p]$$

en effet, (modulo p) :

$$\begin{aligned}(p-1)! &= \prod_{k=1}^{2m} k = m! \prod_{k=1}^{m}(m+k)\\ &= m! \prod_{k=1}^{m}(m+k-p) = m! \prod_{k=1}^{m}(-k)\\ &= (-1)^m (m!)^2\end{aligned}$$

Or, dans $\mathbb{Z}_p[x]$, $1^{-1} = 1$ et $(p-1)^{-1} = p-1$, donc $\forall k \in \{2, ..., p-2\}$, $k^{-1} \in \{2, ..., p-2\}$. Ainsi, $\prod_{k=2}^{p-1} k \equiv 1[p]$, et donc $(p-1)! \equiv -1[p]$. D'où le résultat.

– Si $p \equiv 1[4]$, $(-1)^{m+1} = -1$, et donc $m!$ est une solution de $x^2 \equiv -1[p]$.
– Si cette équation a une solution, alors $x^{2m} \equiv 1[p]$, et comme $x^{p-1} \equiv 1[p]$, $1 \equiv (-1)^m[p]$. On en déduit que m est pair, donc $p \equiv 1[4]$.

Correction de l'exercice 5570 ▲

(a)

$$f = g(x^3+x+1)+(x^2+x)$$
$$g = (x^2+x)x+1$$

donc $\text{pgcd}(f,g)=1$ et

$$1 = g-(x^2+x)x = g-(f-g(x^3+x+1))x = (x^4+x^2+x+1)g - xf$$

(b) $f=(x^4+x+1)(x^2+x+1)$ donc f n'est pas irréductible.
g est de degré 3 et n'a pas de racine, donc g est irréductible.

(c) Les éléments de A sont en bijection avec les polynômes de $\mathbb{Z}_2[x]$ de degré $<\deg(g)=3$. Il y a 8 polynômes de degré au plus 2 sur $\mathbb{Z}_2$, donc A a 8 éléments.

(d) On utilise la représentation linéaire $uf+vg=1$ de $\text{pgcd}(f,g)$ obtenue plus haut. $uf=1+vg$, donc $\bar{u}\bar{f}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1}$. Donc $(\bar{f})^{-1}=\bar{u}=\bar{x}$.

(e) Soit $f_1=x^2+x+1$ et $f_2=x^4+x+1$. Alors $f_1f_2=f$ donc $\bar{f}_1\bar{f}_2=\bar{0}$. Pourtant, f ne divise ni f_1 ni f_2, donc $\bar{f}_1\neq\bar{0}$ et $\bar{f}_2\neq\bar{0}$: B n'est pas intègre, donc B n'est pas un corps.

Correction de l'exercice 5571 ▲

(a) Le polynôme X n'est jamais inversible dans $A[X]$. Si A n'est pas intègre, comme $A\subset A[X]$, $A[X]$ ne l'est pas non plus et ne peut pas être un corps. Si A est intègre et si $X=PQ$, alors $\deg(P)+\deg(Q)=1$ donc P ou Q est une constante. Supposons par exemple que ce soit P. $P|X$ donc $P|1$ donc P est inversible, et $Q\sim X$.

(b) Soit $P=X+a$ un polynôme unitaire linéaire de $A[X]$. Supposons que $P=P_1P_2$. Comme A estintègre, on a $\deg(P_1)+\deg(P_2)=1$, donc P_1 ou P_2 est une constante. Supposons que ce soit P_1. Alors $P_1|1$ et $P_1|a$. En particulier, P_1 est inversible, et donc $P_2\sim P$.

(c) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 (théorème de Gauss).
Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelles. En effet, soit $P\in\mathbb{R}[X]$. P se factorise sur $\mathbb{C}[X]$ sous la forme $P=a\prod(X-\lambda_i)^{\nu_i}$ (avec $i\neq j\Rightarrow\lambda_i\neq\lambda_j$). Comme cette factorisation est unique, et que $P=\overline{P}$, on en déduit que si λ_i est racine de P avec multiplicité ν_i, alors il en va de même pour $\overline{\lambda_i}$. Ainsi, on obtient une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$: $P=a\prod_{\lambda_i\in\mathbb{R}}(X-\lambda_i)^{\nu_i}\prod(X^2-2\text{Re}(\lambda_i)X+|\lambda_i|^2)^{\nu_i}$.
P est donc irréductible ssi P est de la forme $P=a(X-\lambda)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ ou $P=a(X^2-2\text{Re}(\lambda_i)X+|\lambda_i|^2)$ avec $\lambda\notin\mathbb{R}$.

(d) Supposons que $K[X]$ ait un nombre fini de polynômes unitaires irréductibles $P_1,\dots,P_k$. Soit alors $P=\prod_{i=1}^k P_i+1$. Comme K est un corps, les irréductibles sont de degré au moins 1, et donc P n'est pas l'un des P_i. Comme P est unitaire, P n'est pas irréductible. En particulier, l'un au moins des P_i divise P. Supposons par exemple que ce soit P_1 : $\exists Q\in K[X], P=P_1Q$. Alors $P_1(Q-\prod_{i=2}^k P_i)=1$. Donc P_1 est inversible, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 5572 ▲

(a) Supposons (X,n) principal dans $\mathbb{Z}[X]$: $(X,n)=(P_0)$. Alors $P_0|n$ donc $P_0\in\mathbb{Z}$, et $P_0|X$ donc $P_0=\pm1$. Ainsi $(P_0)=\mathbb{Z}[X]$. Or (X,n) est l'ensemble des polynômes dont le terme constant est un multiple de n : en effet, si $P\in(X,n)$, $\exists A,B\in\mathbb{Z}[X], P=AX+Bn$ donc le terme constant de P est un multiple de n. Réciproquement, si le terme constant de $P=\sum p_iX^i$ est un multiple de n, $p_0=p_0'n$, alors $P=X(\sum_{i\geq1}p_iX^i)+p_0'n\in(X,n)$. Ainsi, $1\notin(X,n)$. Donc (X,n) n'est pas principal.

(b) Si $A[X]$ est principal, soit $a\in A\setminus\{0\}$, et $I=(X,a)$. $A[X]$ étant principal, $\exists P_0\in A[X], I=(P_0)$. Alors $P_0|a$ donc $P_0\in A$, et $P_0|X$ donc $P_0|1$ et P_0 est inversible. On en déduit que $I=A[X]$. En particulier $1\in I$: $\exists U,V\in A[X], XU+aV=1$. Le terme constant de $XU+aV$ est multiple de a et vaut 1. a est donc inversible.
Si A est un corps, on dispose de la division euclidienne. Soit I un idéal de $A[X]$. Soit P_0 un élément de $I\setminus\{0\}$ de degré minimal. Soit $P\in I$. $\exists!(Q,R)\in A[X]^2, P=P_0Q+R$ et $\deg(R)<\deg(P)$. Comme $R=P-P_0Q$, on a $R\in I$, et comme $\deg(R)<\deg(P_0)$, on a $R=0$. Ainsi $P\in(P_0)$. On a donc $I\subset(P_0)\subset I$.

Correction de l'exercice 5573 ▲

Notons $f(x^n)=P(x-1)$. Alors $f(1)=0\cdot P(1)=0$ et donc $(x-1)|f$. Notons $f=Q(x-1)$. On a alors $f(x^n)=Q(x^n)(x^n-1)$. (x^n-1) divise bien f.

Correction de l'exercice 5574 ▲

Notons (Q,R) le quotient et le reste de cette division euclidienne : $(x-2)^m+(x-1)^n-1=Q(x-2)(x-1)+R$ avec $\deg(R)\leq 1$. Notons $R=ax+b$. En évaluant en 1, on obtient $(-1)^m-1=a+b$, et en évaluant en 2, $2a+b=0$. On en déduit $b=-2a$ et $a=1-(-1)^m$, soit $R=(1-(-1)^m)(x-2)$.

Correction de l'exercice 5575 ▲

(a) Soit P un polynôme de degré $d=2$ ou 3 de $K[X]$.
Si P a une racine $a\in K$, alors $(X-a)|P$, et P n'est pas irréductible.
Réciproquement, si $P=AB$ avec $A,B\in K[X]$ et $A,B\notin K[X]^\times=K\setminus\{0\}$, alors $\deg(A)\geq 1$, $\deg(B)\geq 1$, et $\deg(A)+\deg(B)=d=2$ ou 3, donc l'un au moins des deux polynômes A et B est de degré 1. On peut supposer que c'est A. Notons $A=aX+b$. Alors $(X+a^{-1}b)|P$, et $-a^{-1}b$ est racine de P.
Finalement P a une racine ssi P n'est pas irréductible.

(b) Irréductibles de degré 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: Soit $P=aX^2+bX+c$ un polynôme de degré 2. $a\neq 0$ donc $a=1$.

$$\begin{aligned}
P \text{ irréductible} &\Leftrightarrow P \text{ n'a pas de racine}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) & \neq 0\\ P(1) & \neq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) & = 1\\ P(1) & = 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1\\ 1+b+1 & = 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow P=X^2+X+1
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a un seul irréductible de degré 2, c'est $I_2=X^2+X+1$.
Irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d$ un polynôme de degré 2. $a\neq 0$ donc $a=1$.

$$\begin{aligned}
P \text{ irréductible} &\Leftrightarrow P \text{ n'a pas de racine}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d & = 1\\ 1+b+c+1 & = 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d & = 1\\ (b,c) & = (1,0) \text{ ou } (b,c)=(0,1)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow P=X^3+X+1 \text{ ou } P=X^3+X^2+1
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux irréductibles de degré 3 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$: $I_3=X^3+X+1$ et $I_3'=X^3+X^2+1$.

(c) Soit $P=5X^3+8X^2+3X+15\in\mathbb{Z}[X]$. Soient A et B deux polynômes tels que $P=AB$. L'application $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n\mapsto\bar{n}$ induit une application $\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X], P=\sum a_iX^i\mapsto\bar{P}=\sum\bar{a}_iX^i$. Cette application est compatible avec les opérations : en particulier $\overline{AB}=\bar{A}\,\bar{B}$ (pourquoi ?). Ainsi on a : $\bar{P}=\bar{A}\bar{B}$. Or $\bar{P}=X^3+X+1$ est irréductible, donc (quitte à échanger les rôles de A et B on peut supposer que) $\bar{A}=1$ et $\bar{B}=X^3+X+1$. On en déduit que B est au moins de degré 3, d'où $\deg(A)=0$. $A\in\mathbb{Z}$ et $A|P$, donc $A|5$, $A|8$, $A|3$, et $A|15$. On en déduit que $A=\pm 1$. Finalement, $A=\pm 1$ et $B\sim P$. P est donc irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Soit $P=X^5+2X^3+3X^2-6x-5\in\mathbb{Z}[X]$. Soient A et B deux polynômes tels que $P=AB$. On a comme précédemment : $\bar{P}=\bar{A}\bar{B}$ où $\bar{P}=X^5+X^2+1$. $\bar{P}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc si $\bar{P}$ est réductible, il doit être le produit d'un irréductible de degré 2 et d'un irréductible de degré 3. Or $\bar{P}\neq I_2I_3$ et $\bar{P}\neq I_2I_3'$ (faire le calcul !), donc $\bar{P}$ est irréductible. Le même raisonnement montre alors que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

(d) Un polynôme de degré 4 est réductible ssi il a une racine ou est le produit de deux irréductibles de degré 2. Soit $P=\sum_{i=0}^4 a_iX^i\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$, avec $a_4=1$.

$$\begin{aligned}
P \text{ irréductible} &\Leftrightarrow \begin{cases} P(0)\neq 0\\ P(1)\neq 0\\ P\neq I_2^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_0=1\\ 1+a_3+a_2+a_1+1=1\\ P\neq I_2^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow P\in\{X^4+X^3+1, X^4+X+1, X^4+X^3+X^2+X+1\}
\end{aligned}$$

Un polynôme de degré 5 est irréductible ssi il n'a pas de racine et l'est pas le produit d'un irréductible de degré 2 et d'un irréductible de degré 3. Tous calculs fait, on obtient la liste suivante : $\{X^5+X^2+1, X^5+X^3+1, X^5+X^4+X^3+X^2+1, X^5+X^4+X^3+X+1, X^5+X^4+X^2+X+1, X^5+X^3+X^2+X+1,\}$.

Correction de l'exercice 5576 ▲

(a) On raisonne exactement comme pour l'exercice 5575. On peut réduire un peu les discussions en remarquant que puisqu'on est sur un corps, on peut se contenter de chercher les irréductibles *unitaires* : on obtient les autres en multipliant les irréductibles unitaires par les inversibles, soit ± 1.
Les irréductibles de degré 2 sont caractérisés par $P(0) \neq 0$, $P(1) \neq 0$ et $P(-1) \neq 0$. On obtient finalement la liste suivante : $\{X^2+1, X^2-X-1, -X^2-1, -X^2+X+1\}$.

Sans commentaire, on obtient la liste suivante pour les irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$: $\{\pm(X^3+X^2-X+1), \pm(X^3-X^2+X+1), \pm(X^3-X^2+1), \pm(X^3-X+1), \pm(X^3+X^2+X-1), \pm(X^3-X^2-X-1) \pm(X^3+X^2-1), \pm(X^3-X-1), \}$.

(b) $X^2+X+1 = (X-1)^2$
$X^3+X+2 = (X+1)(X^2-X+2)$
$X^4+X^3+X+1 = (X+1)(X^3+1) = (X+1)^4$

Correction de l'exercice 5577 ▲

On raisonne comme pour l'exercice 5575. Soit $P = X^5-6X^3+2X^2-4X+5$, A, B deux polynômes tels que $P = AB$. En considérant la réduction modulo 2, on a $\bar{P} = X^5+1$ donc la décomposition en facteurs irréductibles est $\bar{P} = (X+1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$. Comme P est unitaire, A et B le sont aussi, et la réduction modulo 2 préserve donc le degré de A et B. On en déduit que si $\bar{A} = X+1$, alors A est de degré 1.
La réduction modulo 3 de P devrait donc avoir une racine. Mais $P \mod 3 = X^5-X^2-X-1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On en déduit que dans la réduction modulo 2, la factorisation $\bar{P} = $ '$\bar{A}\bar{B}$ est triviale ($\bar{A} = 1$ et $\bar{B} = \bar{P}$ ou le contraire), puis que la factorisation $P = AB$ elle même est triviale ($A = \pm 1$ et $B = \mp P$ ou le contraire). Ainsi, P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Pour $P = 7X^4+8X^3+11X^2-24X-455$, on procède de la même façon. Si $P = AB$, comme 7 est premier, l'un des polynômes A ou B a pour coefficient dominant ± 7 et l'autre ∓ 1. On en déduit que les réductions modulo 2 ou 3 préservent le degré de A et de B. Les décompositions en facteurs irréductibles sont les suivantes : $P \mod 2 = (X^2+X+1)^2$ et $P \mod 3 = (X-1)(X^3-X-1)$. Si la factorisation $P = AB$ est non triviale, alors les réductions modulo 2 de A et B sont de degré 2, et donc $\deg(A) = \deg(B) = 2$. Mais la décomposition modulo 3 impose que ces degrés soient 1 et 3. La factorisation $P = AB$ est donc nécessairement triviale, et P est donc irréductible.

Correction de l'exercice 5578 ▲

Commençons par montrer que ces polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$.

-Le cas de $f = \prod_{i=1}^n (X-a_i) - 1$ Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $f = PQ$. On peut supposer sans perte de généralité que P et Q ont des coefficients dominants positifs (i.e. sont unitaires).
On a : $\forall i, f(a_i) = P(a_i)Q(a_i) = -1$ donc
$$P(a_i) = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad Q(a_i) = \mp 1$$
Soit $I = \{i, P(a_i) = -1\}$ et $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. On notera $|I|$ et $|J|$ le nombre d'éléments de I et J.
Supposons $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$: Alors $\prod_{i \in I}(X-a_i) | (P+1)$ et $\prod_{i \in J}(X-a_i) | (Q+1)$. Ainsi $\deg(P+1) \geq |I|$ et $\deg(Q+1) \geq |J| = n - |I|$, et comme $\deg(P) + \deg(Q) = n$, on en déduit que $\deg(P) = |I|$ et $\deg(Q) = |J|$, puis que (puisque P et Q sont unitaires) :
$$P = \prod_{i \in I}(X-a_i) - 1 \qquad \text{et} \qquad Q = \prod_{i \in J}(X-a_i) - 1.$$
Ainsi $f = \prod_{k \in I \cup J}(X-a_k) - 1 = (\prod_{i \in I}(X-a_i) - 1)(\prod_{j \in J}(X-a_j) - 1) = f - \left(\prod_{i \in I}(X-a_i) + \prod_{j \in J}(X-a_j) - 2\right)$, donc $\prod_{i \in I}(X-a_i) + \prod_{j \in J}(X-a_j) - 2 = 0_{\mathbb{Z}[X]}$, ce qui est faux.
Ainsi $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$. On peut supposer sans perte de généralité que $I = \emptyset$. Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}, Q(a_i) = -1$. Donc les a_i sont tous racine de $Q+1$. Comme $\deg(Q+1) \leq n$ et $Q+1 \neq 0$, on en déduit que $Q = f$, et $P = 1$. f est donc bien irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

-Le cas de $g = \prod_{i=1}^n (X-a_i)^2 + 1$. Supposons que $g = PQ$, avec $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.On a $g(a_i) = 1 = P(a_i)Q(a_i)$, donc $P(a_i) = Q(a_i) = \pm 1$.
Comme g n'a pas de racine réelle, il en va de même de P et Q, qui sont donc de signe constant (théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues sur $\mathbb{R}$!). On peut donc supposer sans perte de généralité que P et Q sont positifs.
Alors $P(a_i) = Q(a_i) = 1$. Ainsi, tous les a_i sont racines de $P-1$ et de $Q-1$. On a donc $\prod_{i=1}^n (X-a_i) | P-1$ et $\prod_{i=1}^n (X-a_i) | Q-1$.
En particulier, si $P-1 \neq 0$ et $Q-1 \neq 0$, $\deg(P) \geq n$ et $\deg(Q) = 2n - \deg(P) \geq n$. Ainsi $\deg(P) = \deg(Q) = n$. Comme en plus P et Q sont unitaires, on en déduit que
$$P - 1 = \prod_{i=1}^n (X-a_i) \qquad \text{et } Q - 1 = \prod_{i=1}^n (X-a_i).$$

On devrait donc avoir $(\prod_{i=1}^n (X-a_i)+1)^2 = \prod_{i=1}^n (X-a_i)^2+1$, ce qui est faux $(\prod_{i=1}^n (X-a_i) \neq 0_{\mathbb{Z}[X]})$!
Ainsi $P-1=0$ ou $Q-1=0$, et on en déduit bien que g est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ On a le lemme suivant :
Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, alors il l'est aussi dans $\mathbb{Q}[X]$.
L'ingrédient de base de la démonstration est la notion de *contenu* d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$: c'est le pgcd de ses coefficients, souvent noté $c(P)$. Il satisfait la relation suivante :

$$c(PQ) = c(P)c(Q).$$

Supposons que $P = QR$, avec $Q,R \in \mathbb{Q}[X]$, Q et R unitaires. En réduisant tous leurs coefficients de au même dénominateur, on peut mettre Q et R sous la forme :

$$Q = \frac{1}{a}Q_1 \qquad \text{et} \qquad R = \frac{1}{b}R_1$$

avec $a,b \in \mathbb{Z}$, $Q_1,R_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $c(Q_1)=1$, $c(R_1)=1$.
Alors $abP = Q_1R_1$, donc $c(abP) = c(Q_1)c(R_1) = 1$. Comme $ab|c(abP)$, on a $ab = \pm 1$, et en fait $P,Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Correction de l'exercice 5579 ▲

f est irréductible, donc si f, ne divise pas g, alors f et g sont premiers entre eux. Ainsi,$\exists u,v \in \mathbb{Q}[X], uf+vg=1$. En évaluant en α, on obtient $u(\alpha)\cdot 0 + v(\alpha)\cdot 0 = 1$ ce qui est impossible !

Correction de l'exercice 5580 ▲

Supposons que la fraction soit réductible. Alors, il existe $p,q,d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} 11n+2m &= pd \\ 18n+5m &= qd \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} 19n &= 5pd-2qd \\ 19m &= -18pd+1qd \end{cases}$$

En particulier, $d|19n$ et $d|19m$. Si $d \neq 19$, on a $\mathrm{pgcd}(n,m) \neq 1$. Si $d = 19$, alors

$$\begin{cases} n &= 5p-2q \\ m &= -18p+1q \end{cases} \tag{36}$$

Réciproquement, si $\mathrm{pgcd}(n,m) \neq 1$ ou si n,m sont de la forme donnée par (36), alors la fraction est réductible.

Correction de l'exercice 5581 ▲

Soit $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$. Notons $n = dn'$ et $m = dm'$. Alors $X^n - 1 = (X^d)^{n'} - 1$. Or $(Y-1)|Y^{n'}-1$ donc $(X^d-1)|(X^n-1)$. De même, $(X^d-1)|(X^m-1)$, et donc $(X^d-1)|\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$.
Par ailleurs, soit $D = \mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$. Les racines de D dans $\mathbb{C}$ sont des racines à la fois n-iéme et m-ième de 1, qui sont touts simples : elles sont donc de la forme $\omega = e^{i2\pi\alpha}$ où $\alpha = \frac{k}{n} = \frac{k'}{m}$. Ainsi $km' = k'n'$. On a $\mathrm{pgcd}(m',n') = 1$, donc par le théorème de Gauss, on en déduit que k' est un multiple de m', soit $\frac{k'}{m} = \frac{k''}{d}$, et ω est donc une racine d-ième de 1. On en déduit que $D|X^d-1$, et finalement :

$$\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1) = X^{\mathrm{pgcd}(m,n)}-1.$$

Correction de l'exercice 5582 ▲

Utiliser l'algorithme d'Euclide. (on travaille dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} x^5+x^4+1 &= (x^4+x^2+1)(x+1)+x^3+x^2+x \\ x^4+x^2+1 &= (x^3+x^2+x)(x+1)+x^2+x+1 \\ x^3+x^2+x &= (x^2+x+1)x+0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(x^5+x^4+1, x^4+x^2+1) = x^2+x+1$, et

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x^4+x^2+1)+(x^3+x^2+x)(x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)+\big((x^5+x^4+1)+(x^4+x^2+1)(x+1)\big)(x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)(1+(x+1)^2)+(x^5+x^4+1)(x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)(x^2)+(x^5+x^4+1)(x+1) \end{aligned}$$

De même, $\operatorname{pgcd}(x^5+x^3+x+1, x^4+1) = x^3+1$ et $x^3+1 = (x^5+x^3+x+1)+(x^4+1)x$.

Correction de l'exercice 5583 ▲

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $\operatorname{pgcd}(x^4+1, x^3+x+1) = x^2+x-1$.
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\operatorname{pgcd}(x^4+1, x^3+x+1) = 1$.

Correction de l'exercice 5584 ▲

Sur $\mathbb{Z}[X]$, $\operatorname{pgcd}(x^4+x^3-3x^2-4x-1, x^3+x^2-x-1) = 1$.

Correction de l'exercice 5585 ▲

(a) P est primitif, 2 divise tous les coefficients de P sauf le dominant, et 4 ne divise pas le terme constant : d'après le critère d'Eisenstein, on en déduit que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$ (puis dans $\mathbb{Q}[x]$ car il est unitaire...).

(b) On peut appliquer le même critère, avec 3 cette fois.

(c) f est primitif, et sa réduction modulo 2 est irréductible. Donc f est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

(d) $f(x+1) = \sum_{k=1}^{p} C_p^k x^{k-1}$. Or $p | \frac{p!}{k!(p-k)!}$ (car p apparaît au numérateur, tandis que tous les facteurs du dénominateur sont $< p$; comme p est premier, ils sont donc premiers avec p). De plus $C_p^1 = p$, donc p^2 ne divise pas le terme constant de $f(x+1)$. D'après le critère d'Eisenstein, $f(x+1)$ est irréductible, et donc f aussi.

Correction de l'exercice 5586 ▲

Soit $P = x^2-x+1$. Si P a une factorisation non triviale, P est divisible par un polynôme de degré 1, et comme P est unitaire, ce diviseur peut être choisi unitaire : on en déduit que P a une racine. On calcule $P(a+bi\sqrt{3}) = (a^2-3b^2-a+1)+(2ab-b)i\sqrt{3}$. Comme $1/2 \notin A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, $2a-1 \neq 0$, donc si $P(a+bi\sqrt{3}) = 0$, alors $b = 0$, et $P(a) = 0$. Mais x^2-x+1 est primitif et se réduction modulo 2 est irréductible, donc il est irréductible sur $\mathbb{Z}[x]$. En particulier il n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$. On en déduit que P n'a pas de racine sur A, et est donc irréductible.

Soit $K = \operatorname{frac}(A) = \mathbb{Q}[i\sqrt{3}]$. On a $P(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$ donc P a une racine dans K, donc P est réductible sur K.

Correction de l'exercice 5587 ▲

Si P a une racine α dans $\mathbb{Z}$, alors $P(\alpha) = 0$, et en considérant la réduction modulo n, $\bar{P}(\bar{\alpha}) = 0$, donc $\bar{P}$ a une racine dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout n.

(a) Si $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs, $\bar{P}(\bar{0}) = \bar{1}$ et $\bar{P}(\bar{1}) = \bar{1}$, donc $\bar{P}$ n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc P n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}$.

(b) Si n ne divise aucun des $P(0), \dots, P(n-1)$, alors $\bar{P}(\bar{0}) \neq 0, \dots, \bar{P}(\overline{n-1}) \neq 0$, donc $\bar{P}$ n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc P n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5588 ▲

(a) $(X-\frac{a}{b})|P$ donc $\exists Q \in \mathbb{Q}[x]$, $P = (x-\frac{a}{b})Q = (bx-a)\frac{Q}{b}$. En réduisant tous les coefficients de Q au même dénominateur, on peut mettre Q sous la forme : $Q = \frac{1}{m}Q_1$, avec $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ primitif. Alors $bdP = (bx-a)Q_1$. En considérant les contenus de ces polynômes, on a $c(bx-a) = \operatorname{pgcd}(a,b) = 1$, $c(Q_1) = 1$ donc $c(bdP) = bd\,c(P) = 1$. Ainsi $bd = \pm 1$, et $(bx-a)|P$.

(b) On considère par exemple les cas $k = 0, \dots, 3$. (Pour $k = 2$, on constate que $P(2) = 0$: on peut diviser P par $(X-2)$ et déterminer les trois racines complexes de P...). On obtient que

$$\begin{array}{ccc} (*) & a|14 & (k=0), \\ (**) & (a-b)|4 & (k=1), \\ (***) & (a-3b)|2^3 5 & (k=3). \end{array}$$

Au passage On peut remarquer que si $\alpha \leq 0$, $P(\alpha) < 0$, donc on peut supposer $a > 0$ et $b > 0$.

- Si $a = 1$: $(**) \Rightarrow b \in \{2,3,5\}$. Aucune de ces possibilités n'est compatible avec $(***)$.
- Si $a = 2$: $(**) \Rightarrow b \in \{1,3,4,6\}$. Comme $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$, 4et 6 sont exclus. 3 n'est pas compatible avec $(***)$. Pour 2, on vérifie que $P(2) = 0$.
- Si $a = 7$: $(**) \Rightarrow b \in \{3,5,9,11\}$. Mais aucune de ces solution ne convient.
- Si $a = 14$: $(**) \Rightarrow b \in \{10,12,16,18\}$ mais $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$ exclu toutes ces possibilités.

Finalement, 2 est la seule racine rationnelle de P.

Correction de l'exercice 5589 ▲

(a) Notons $P=\sum_{i=0}^{d} a_iX^i$. Dans le calcul de $P(n+km)$, en développant tous les termes $(n+km)^i$ à l'aide du binôme, on obtient que $P(n+km)=\sum_{0\leq j\leq i\leq d} a_iC_i^jn^j(km)^{i-j}=P(n)+mN$ où $N=\sum_{0\leq j<i\leq d} a_iC_i^jn^j(km)^{i-j}-1\in\mathbb{Z}$. Donc $m|P(n+km)$.

(b) Supposons qu'un tel polynôme existe : soit $m=P(0)$. $\forall k\in\mathbb{Z}, m|P(km)$. Comme $P(km)$ est premier, on en déduit que $P(km)=\pm m$. Ceci est en contradiction avec $\lim_{k\to+\infty} P(km)=\pm\infty$.

Correction de l'exercice 5590 ▲

(a) Soit $f=\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\in\mathbb{Q}[x]$. Soit $a_i=\frac{p_i}{q_i}$ le représentant irréductible de a_i. Soit $m=\text{ppcm}(q_0,\dots,q_n)$. Notons $m=q_im_i$. Alors $f=\frac{1}{m}\sum a_im_ix^i$. En mettant en facteur $d=\text{pgcd}(a_0m_0,\dots,a_nm_n)$, on obtient $f=\frac{d}{m}f_0$, où $f_0\in\mathbb{Z}[x]$ est primitif.

(b) Notons $\alpha=\frac{p}{q}$, avec $\text{pgcd}(p,q)=1$ et $q>0$. Soit $g_1=\alpha g$. On a $qg=pg_1$, donc $qc(g)=pc(g_1)$. On en déduit que $q|p$, et donc que $q=1 : \alpha\in\mathbb{Z}$.

(c) Soit $g\in\mathbb{Q}[x]$ tel que $f=dg$. Soit $g=\frac{p}{q}g_0$ la décomposition de g donnée par la question 1. Alors $qf=pdg_0$ donc $qc(f)=pc(d)c(g_0)=p$. Donc $q|p$ et finalement $q=1$. On en déduit que $g=pg_1\in\mathbb{Z}[x]$.

(d) $d=\text{pgcd}_{\mathbb{Q}}(f,g)=\frac{p}{q}d_0$. Alors d_0 est primitif et divise f et g sur $\mathbb{Q}$. Donc d_0 divise f et g sur $\mathbb{Z}$.
Soit h un diviseur commun de f et g dans $\mathbb{Z}[x]$. On a $c(h)|c(f)=1$ donc h est primitif. Par ailleurs, h est un diviseur commun à f et g dans $\mathbb{Q}[x]$, donc $h|d_0$ dans $\mathbb{Q}[x]$. On en déduit que $h|d_0$ dans $\mathbb{Z}[x]$.
Ainsi, d_0 est bien un pgcd de f et g dans $\mathbb{Z}[x]$.

(e) Soit $d=\text{pgcd}(c(f),c(g))$, $h=\text{pgcd}(f,g)=c(h)h_0$, $h'=\text{pgcd}(f_0,g_0)$.
On a $d|c(f)$, $d|c(g)$, $h'|f_0$ et $h'|g_0$ donc $dh'|f$ et $h'|g$, et donc $dh'|h$.
$c(h)|c(f)$ et $c(h)|c(g)$ donc $c(h)|d$. $h|f$, donc il existe $f_1\in\mathbb{Z}[x]$ tel que $f=h_0c(h)f_1$. On a alors $c(h)c(f_1)=c(f)$, et après simplification, on en déduit que $f_0=h_0f_1'$, avec $f_1'\in\mathbb{Z}[x]$: $h_0|f_0$. De même pour g : $h_0|g_0$. On en déduit que $h_0|h'$, et donc que $h|dh'$.

Correction de l'exercice 5591 ▲

Soit K un corps, A un anneau non trivial, et $K\xrightarrow{\phi}A$ un morphisme d'anneaux. Soit $x\in K\setminus\{0\}$. On a $1=\phi(1)=\phi(xx^{-1})=\phi(x)\phi(x^{-1})\neq 0$ (car A n'est pas l'anneau trivial). Donc $\phi(x)\neq 0$. Ainsi $\ker\phi=\{0\}$, donc ϕ est injectif.

Correction de l'exercice 5592 ▲

Soit $x\in R\setminus\{0\}$. Alors $(x)\supset(x^2)\supset(x^3)\supset$ est une suite décroissante d'idéaux. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang : $\exists k\in\mathbb{N},(x^k)=(x^{k+1})$. En particulier, $\exists a\in R, k^{k+1}=ax^k$. Comme A est intègre, on en déduit que $ax=1$, donc $x\in R^\times$.
$R^\times=R\setminus\{0\}$ donc R est un corps.

Correction de l'exercice 5593 ▲

Soit A un anneau fini, et I un idéal premier. Alors A/I est intègre, et fini (!), donc A/I est un corps (voir exercice 5548). Donc I est maximal.

Correction de l'exercice 5594 ▲

On rappelle que le produit de deux idéaux I et J est l'idéal engendré par les produits de la forme ab avec $a\in I$, $b\in J$:

$$I\cdot J=\{\sum_{i=0}^{N} a_ib_i, N\in\mathbb{N}, a_i\in I, b_i\in J\}$$

– Si I est un idéal premier : Soient J et K deux idéaux tels que $J\cdot K\subset I$. Alors si $J\not\subset I$, $\exists a\in x\setminus I$. Soit $y\in K$. On a $xy\in J\cdot K$ donc $xy\in I$. Comme I est premier, $x\in I$ ou $y\in I$. Mais $x\notin I$ donc $y\in I$. Ainsi $\forall y\in K, y\in I$: on a montré que : $J\not\subset I\Rightarrow K\subset I$. On a donc bien $J\subset I$ ou $K\subset I$.
– Si $\forall J,K$ idéaux, $(J\cdot K\subset I\Rightarrow J\subset I$ ou $K\subset I)$: Soit $a,b\in A$ avec $ab\in I$. Alors $(a)\cdot(b)=(ab)$ donc $(a)\subset I$ ou $(b)\subset I$ et donc $a\in I$ ou $b\in I$. I est donc premier.

On a $M^n = M\cdot M^{n-1}$. Donc si I est premier et contient M^n alors I contient M ou M^{n-1}, et par une récurrence finie, on obtient que I contient M. Ainsi : $M\subset I\subsetneq A$. Comme M est maximal on en déduit que $M=I$.

Correction de l'exercice 5595 ▲

- $A[X]/(X)$: X est unitaire donc on dispose de la division euclidienne par X. On vérifie (comme dans le cours) que chaque classe a un et un seul représentant de degré 0. On en déduit que $A[X]/(X)$ est en bijection avec A. Il reste alors à remarquer que cette bijection est un morphisme d'anneaux.
  Une autre façon de dire la même chose est de remarquer que l'application $\phi : A[X]\to A$, $P\mapsto P(0)$ est un morphisme d'anneaux. $\ker\phi = (X)$ et $\operatorname{Im}\phi = A$. Comme $A/\ker\phi\sim\operatorname{Im}\phi$, on a bien $A[X]/(X)\sim A$.
- On peut considérer $\phi : A[X,Y]\to A[Y]$, $P\mapsto P(0,Y)$. C'est un morphisme d'anneaux. En séparant les termes ne dépendant que de Y des autres, on peut mettre tout polynôme P de $A[X,Y]$ sous la forme $P=P_1(Y)+XP_2(X,Y)$ où $P_1\in A[Y]$ et $P_2\in A[X,Y]$. Alors $\phi(P)=0$ ssi $P_1=0$, ssi $P=XP_2$, c'est à dire $P\in(X)$. Ainsi $\ker\phi=(X)$. Par ailleurs, tout polynôme P de $A[Y]$ peut être vu comme un polynôme $\tilde P$ de $A[X,Y]$. Alors $P=\phi(\tilde P)$, donc $\operatorname{Im}\phi = A[Y]$. Finalement : $A[X,Y]/(X)\sim A[Y]$.
- $A[X,Y]/(X,Y)$: Soit $\phi : A[X,Y]\to A$, $P\mapsto P(0,0)$. ϕ est un morphisme d'anneaux, et avec les notations précédentes, pour $P=P_1(Y)+XP_2(X,Y)$, avec $\phi(P)=0$, on a $P_1(0)=0$, donc $Y|P_1(Y)$. Ainsi, P est la somme de deux polynômes, l'un multiple de X, l'autre multiple de Y donc $P\in(X,Y)$. Réciproquement, si $P\in(X,Y)$, alors $P(0,0)=0$. Donc $\ker\phi=(X,Y)$. $\forall a\in A\phi(a)=a$ donc ϕ est surjective. Finalement $A[X,Y]/(X,Y)\sim A$.
- $A[X_1,\dots,X_n]/(X_1,\dots,X_n)$: Soit ϕ $: A[X_1,\dots,X_n]\to A$, $P\mapsto P(0)$. ϕ est un morphisme d'anneaux. En regroupant tous les termes dépendant de X_n, puis tous les termes restant dépendant de X_{n-1}, et ainsi de suite jusqu'aux termes dépendant seulement de X_1, et enfin le terme constant, tout polynôme $P\in A[X_1,\dots,X_n]$ peut se mettre sous la forme $P=X_nP_n+X_{n-1}P_{n-1}+\dots+X_1P_1+p_0$, avec $P_i\in A[X_1,\dots,X_i]$ (et $p_0\in A$). On en déduit que $\ker\phi=(X_1,\dots,X_n)$. Par ailleurs $\forall a\in A, \phi(a)=a$, donc $A[X_1,\dots,X_n]/(X_1,\dots,X_n)\sim A$.

Comme un idéal est premier (resp. maximal) ssi le quotient est intègre (resp. un corps), on en déduit que

- dans $A[X]$, (X) est premier ssi A est intègre, maximal ssi A est un corps,
- dans $A[X,Y]$, (X) est premier ssi A est intègre, et n'est jamais maximal,
- dans $A[X_1,\dots,X_n]$, $(X_1,\dots,X_n)$ est premier ssi A est intègre, maximal ssi A est un corps.

Correction de l'exercice 5596 ▲

Soit $\alpha = a+b\sqrt d\in\mathbb Z[\sqrt d]$. Soit $a=mp+a'$ la division euclidienne de a par m, et $b=mq+b'$ celle de b par m. Alors $\alpha = m(p+q\sqrt d)+a'+b'\sqrt d$. On en déduit que chaque classe du quotient $\mathbb Z[\sqrt d]/(m)$ a un représentant dans

$$\mathscr C = \left\{a+b\sqrt d,\ (a,b)\in\{0,\dots,m-1\}^2\right\}$$

Par ailleurs si deux éléments $a+b\sqrt d$ et $a'+b'\sqrt d$ de cet ensemble sont dans la même classe, alors $\exists c,d\in\mathbb Z,\ a+b\sqrt d=(a'+b'\sqrt d)+m(c+d\sqrt d)$. On en déduit que $a=a'+mc$ et $b=b'+md$, et donc $a=a'$, $b=b'$.
Ainsi chaque classe de $\mathbb Z[\sqrt d]/(m)$ a un représentant unique dans $\mathscr C$. $\mathbb Z[\sqrt d]/(m)$ et $\mathscr C$ sont donc en bijection : en particulier, $\mathbb Z[\sqrt d]/(m)$ a m^2 éléments.
Remarque : on a

$$\mathbb Z[\sqrt d]\sim\mathbb Z[X]/(X^2-d).$$

En effet l'application $\phi : \mathbb Z[X]/(X^2-d)\to\mathbb Z[\sqrt d]$, $\bar P\mapsto P(\sqrt d)$ est bien définie (si $\bar(P)=\bar Q$, alors $P(\sqrt d)=Q(\sqrt d)$), et c'est un morphisme d'anneaux. De plus, si $\phi(P)=0$, notons $P=Q(X^2-d)+(aX+b)$ la division euclidienne de P par X^2-d. En évaluant en $\sqrt d$, on a $a\sqrt d+b=0$ donc $R=0$. On en déduit que $(X^2-d)|P$, i.e. $\bar P=0$. On en déduit que $\ker\phi=\{0\}$, donc ϕ est injective. Par ailleurs $\forall(a,b)\in\mathbb Z^2, \phi(a+bX)=a+b\sqrt d$ donc ϕ est surjective.

Si d est pair, comme $\sqrt d\cdot\sqrt d=|d|\in(2)$ alors que $\sqrt d\notin(2)$, (2) n'est pas premier.
Si d est impair : $(1+\sqrt d)(1+\sqrt d)=(1+d)+2\sqrt d\in(2)$, mais $(1+\sqrt d)\notin(2)$ donc (2) n'est pas premier.
Remarque : $\mathbb Z[\sqrt d]/(2)\sim\mathbb Z_2[X]/(X^2+\bar d)$. $(X^2+\bar d)$ est X^2 ou X^2+1. Aucun de ces deux polynômes n'est irréductible. Donc le quotient ne saurait être intègre.

Correction de l'exercice 5597 ▲

- Si $x\in A$ est premier : soit $a,b\in A$ tels que $ab=x$. Alors $ab\in(x)$ donc $a\in(x)$ ou $b\in(x)$. On en déduit que $a\sim x$ ou $b\sim x$. Donc x est irréductible.
- A est supposé factoriel. Soit I un idéal premier. Soit $x\in I$ et $x=p_1\dots p_k$ "la" factorisation de x en produit d'irréductibles. Alors $(p_1\cdots p_{n-1})p_n\in I$ donc $(p_1\cdots p_{n-1})\in I$ ou $p_n\in I$. si p_n in I, I contient un irréductible. Sinon, $(p_1\cdots p_{n-2})p_{n-1}\in I$. Par une récurrence finie, l'un au moins des $p_i\in I$, donc I contient un irréductible.
- Dans $\mathbb Z[\sqrt{-5}]$, $9\in(3)$. Pourtant $9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ et $(2\pm\sqrt{-5})\notin(3)$. Donc (3) n'est pas premier.
- 2 est irréductible : $2=z_1z_2$ avec $z_i\in\mathbb Z[\sqrt{-5}]$, alors $|z_1|^2|z_2|^2=4$, donc $\{|z_1|^2,|z_2|^2\}=\{1,4\}$ ou $\{2,2\}$. Dans le premier cas, on a affaire à une factorisation triviale. Le second est impossible, puisque l'équation $a^2+5b^2=2$ n'a pas de solution entière (a,b).
  Par ailleurs, $(1+\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5})=6\in(2)$, mais $(1\pm\sqrt{-5})\notin(2)$ donc 2 n'est pas premier dans $\mathbb Z[\sqrt{-5}]$.

Correction de l'exercice 5598 ▲

(a) Soit $\mathscr{J}$ un idéal de A/I. Soit π la projection canonique $A \to A/I$, et $J = \pi^{-1}(\mathscr{J})$. J est un idéal de A qui est principal donc $\exists a \in A, J = (a)$. Montrons que $\mathscr{J} = (\pi(a))$.
On a $\pi(a) \in \mathscr{J}$ donc $(\pi(a)) \subset \mathscr{J}$. Soit $\alpha \in \mathscr{J}$, et b un représentant de α, i.e. $b \in A$ et $\pi(b) = \alpha$. Alors $b \in J = (a)$, donc $\exists k \in A, b = ka$. Alors $\pi(b) = \pi(ka) = \pi(k)\pi(a)$, donc $\pi(b) \in (\pi(a))$. Donc $\mathscr{J} \subset (\pi(a))$.
Finalement, $\mathscr{J} = (\pi(a))$. On en déduit que A/I est principal.

(b) – $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Soit I un idéal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. I est principal, donc $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Or $(\bar{a}) = \{\alpha\bar{a}, \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = \{\bar{p}\bar{a}, p \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{pa}, p \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\pi^{-1}(I) = \{pa + qn, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est l'idéal engendré sur $\mathbb{Z}$ par a et n donc l'idéal engendré par $d = (\mathrm{pgcd}(n,a))$. On en déduit que $I = (\bar{d})$. En particulier, I est engendré par un diviseur de n.
Soit maintenant d_1 et d_2 deux diviseurs (positifs) de n tels que $(\bar{d_1}) = (\bar{d_2})$. On a $\pi^{-1}((d_1)) = d_1\mathbb{Z} = d_2\mathbb{Z}$ donc $d_1 = d_2$.
Ainsi, les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont engendrés par les diviseurs de n, et deux diviseurs distincts engendrent deux idéaux distincts : il y a donc autant d'idéaux dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que de diviseurs de n.
– $\mathbb{Q}[X]/(f)$: On raisonne de la même manière : la remarque clef étant si $I = (\bar{g})$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]/(f)$, alors $\pi^{-1}(I) = (f,g) = (\mathrm{pgcd}(f,g))$.

(c) Les idéaux maximaux sont ceux pour lesquels le quotient est un corps, (donc aussi ceux pour lesquels le quotient est intègre puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini). On a le diagramme suivant ($I = (\bar{d})$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2\circ\pi_1"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_2"] & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I \\
\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

En effet, π_1 et π_2 sont des morphismes d'anneaux, et $\ker(\pi_2 \circ \pi_1) = d\mathbb{Z}$. Donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I$ est un corps ssi d est premier.
De même, $(\mathbb{Q}[X]/(f))/I$ est un corps ssi $I = (\bar{g})$ où g est un facteur premier de f.

Correction de l'exercice 5599 ▲

(a) Soit $\alpha, \beta \in \bar{J}$ et $\lambda, \mu \in A/I$. Alors $\exists a, b \in J,\ l, m \in A,\ \alpha = \pi(a), \beta = \pi(b), \lambda = \pi(l), \mu = \pi(m)$. On a donc $\lambda\alpha + \mu\beta = \pi(la + mb)$. Or $la + mb \in J$ (car J est un idéal), donc $\lambda\alpha + \mu\beta \in \bar{J}$. Donc $\bar{J}$ est un idéal de A/I.

(b) Comme dans l'exercice 5598, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2\circ\pi_1"] & A/I \arrow[r, "\pi_2"] & (A/I)/\bar{J} \\
A/(I+J) \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

En effet, si $x \in \ker(\pi_2 \circ \pi_1)$, alors $\pi_1(x) \in \ker \pi_2 = \bar{J}$, donc $\exists y \in A, \pi_1(x) = \pi_1(y)$. Alors $x - y \in \ker \pi_1 = I$, donc $\exists z \in I, x = y + z$: on a donc $x \in I + J$. Réciproquement, si $x \in I + J$, alors $\exists (x_1, x_2) \in I \times J, x = x_1 + x_2$. Alors $\pi_1(x) = \pi_1(x_2) \in \bar{J}$, donc $\pi_2 \circ \pi_1(x) = 0$.
Donc $\ker(\pi_2 \circ \pi_1) = I + J$. Donc $A/(I+J) \sim (A/I)/\bar{J}$.

Correction de l'exercice 5600 ▲

(a) Soit $J \subset B$ un idéal premier de B. Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in f^{-1}(J)$. Alors $f(a)f(b) = f(ab) \in J$ donc $f(a) \in J$ ou $f(b) \in J$. Ainsi, $a \in f^{-1}(J)$ ou $b \in f^{-1}(J)$. On en déduit que $f^{-1}(J)$ est premier.
Cette proposition n'est pas vraie pour les idéaux maximaux. Par exemple, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}[X]$, $f(k) = k$, et $J = (X)$. Alors $f^{-1}(J) = \{0\}$ n'est pas maximal.

(b) Prenons $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(k) = k$. $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{Q}$ ($1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et pourtant $1 \times \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)
Supposons f surjectif. Soit $x, y \in f(I)$, $a, b \in B$. Il existe $x_0, y_0 \in I$ tels que $x = f(x_0)$ et $y = f(y_0)$. De plus, comme f est surjectif, $\exists a_0, b_0 \in A$ tels que $a = f(a_0)$ et $b = f(b_0)$. Alors $ax + by = f(a_0)f(x_0) + f(b_0)f(y_0) = f(a_0x_0 + b_0y_0)$ et comme I est un idéal, $(a_0x_0 + b_0y_0) \in I$, donc $(ax + by) \in f(I)$.
$f(I)$ est donc bien un idéal de B.

(c) Soit I un idéal maximal de A et $J = f(I)$. Supposons $J \neq B$. Soit K un idéal de B tel que $J \subset K$. Alors $I \subset f^{-1}(K)$, donc $f^{-1}(K) = I$ ou $f^{-1}(K) = A$. Dans le premier cas, on $K = f(f^{-1}(K)) = J$, dans le second cas, on a $K = f(f^{-1}(K)) = f(A) = B$. L'idéal J est donc maximal.

(d) $(X+2)(X+3) = X^2+5X$ dans $\mathbb{Z}_6[X]$, donc $(X+\bar{2})(X+\bar{3}) \in (X)$, mais $(X+\bar{2}) \notin (X)$ et $(X+\bar{3}) \notin (X)$, donc $r_6((X))$ n'est pas premier dans $\mathbb{Z}_{36}[X]$.
$(X+1)^2 = (X^2+1)$ dans $\mathbb{Z}_2[X]$, or $(X+1) \notin (X^2+1)$, donc $r_2((X^2+1))$ n'est pas premier dans $\mathbb{Z}_2[X]$.

Correction de l'exercice 5601 ▲

(a) Soit $J = B \cap I$. Soit $x, y \in J$, $a, b \in B$, alors $ax+by \in B$ puisque B est un sous-anneau de A. $ax+by \in I$ puisque I est un idéal. On en déduit que J est un idéal.
$B+I$ est stable par addition (car B et I le sont). Soit $\alpha = a+x \in B+I$ et $\beta = b+y \in B+I$. Alors $\alpha\beta = (ab)+(ay+bx+xy) \in B+I$, donc $B+I$ est stable par multiplication. $1 \in B+I$, donc $B+I$ est un sous anneau de A. $I \subset B+I$, et I est absorbant pour la multiplication dans A, donc aussi dans B : Iest un idéal de $B+I$.

(b) On a le diagramme (de morphismes d'anneaux) suivant :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\phi"] \arrow[d, "\pi_0"] & B+I \arrow[r, "\pi"] & (B+I)/I \\
B/\ker\phi \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

Or, pour $x \in B$, on a : $x \in \ker\phi \Leftrightarrow x = i(x) \in \ker\pi = I$. Donc $\ker\phi = B \cap I$, et par suite :

$$B/(B\cap I) \sim (B+I)/I.$$

Correction de l'exercice 5602 ▲

(a) Soit $P = x^3-x+2$. Sa réduction $\bar{P} = x^3-x-1$ modulo 3 est de degré 3 et n'a pas de racine, donc $\bar{P}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_3[x]$. Comme P est primitif, on en déduit que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$, puis dans $\mathbb{Q}[x]$. Comme $\mathbb{Q}[x]$ est principal, on en déduit que (P) est maximal, et donc que $\mathbb{Q}[x]/(P)$ est un corps.

(b) Dans $\mathbb{Q}[x]/(P)$, on a $y^3-y+2=0$, donc $y(y^2-1) = -2$ et finalement $y(\frac{1}{2}(1-y^2)) = 1$. Ainsi $y^{-1} = \frac{1}{2}(1-y^2)$.

(c) $1+y+y^2 = \pi(1+x+x^2)$. On a $\mathrm{pgcd}(P, 1+x+x^2) = 1$, et plus précisément, en utilisant l'algorithme d' Euclide : $13 = (x+4)P-(x^2+3x-5)(x^2+x+1)$ donc $(y^2+y+1)^{-1} = \frac{-1}{13}(y^2+3y-5)$.

Correction de l'exercice 5603 ▲

Notons $f = \sum_{i=0}^d a_i x^i$. On a $\mathrm{pgcd}(a_0, \ldots, a_d) \sim 1$ et $\pi \nmid a_d$. Notons $\bar{f} \in A/(\pi)[X]$ la réduction de f modulo π. Soit $f = gh$ une factorisation de f dans $A[x]$. Alors $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$, et donc (quitte à échanger g et h) $\bar{g} \sim 1$ et $\bar{h} \sim \bar{f}$. Comme $\pi \nmid a_d$, on a $\deg(\bar{f}) = d$, et donc $\deg(\bar{h}) = d$ puis $\deg(h) \geq d$, et finalement $\deg(h) = d$. Par conséquent $\deg(g) = 0$: $g \in A$. Comme $g|f$, on a $g|c(f) \sim 1$ donc $g \sim 1$. Ainsi, toute factorisation de f dans $A[x]$ est triviale : $f$est irréductible.

Correction de l'exercice 5604 ▲

(a) Ce polynôme est unitaire donc primitif. 11 est nombre premier qui divise tous les coefficients sauf le dominant. $11^2 = 121$ ne divise pas le coefficient de degré 0, donc, d'après le critère d'Eisenstein, c'est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

(b) $f(X,Y) = (X^2+1)Y^3+(X-1)^2Y^2+(X-1)$. Regardons f comme un polynôme de $A[Y]$ avec $A = \mathbb{C}[X]$. Alors, f est primitif sur A, et $(X-1)$ est un irréductible de A qui divise tous les coefficients de f sauf le dominant, et dont le carré ne divise pas le terme constant. D'après le critère d'Eisenstein, on en déduit que f est irréductible dans $A[Y] = \mathbb{C}[X,Y]$.
Dans $\mathbb{Z}_2[X,Y]$, on a $(X^2+1) = (X+1)^2$ et $f = (X+1)((X+1)(Y^3+Y^2)+1)$, donc f n'est pas irréductible..

(c) $f(X,Y) = Y^7+Y^6+7Y^4+XY^3+3X^2Y^2-5Y+X^2+X+1$. Considérons f comme un polynôme de $A[X]$ où $A = \mathbb{Q}[Y]$. Alors f est primitif sur A. Soit $\pi = Y \in A$. π est irréductible, π ne divise pas le coefficient dominant de f, et la réduction $\bar{f}$ modulo π est $\bar{f} = X^2+X+1 \in A/(\pi)[X] = \mathbb{Q}[X,Y]/(Y) \simeq \mathbb{Q}[X]$. $\bar{f}$ est donc irréductible dans $A/(\pi)$, donc d'après l'exercice précédent, f est irréductible dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Correction de l'exercice 5605 ▲

Soit $f = x^2 + y^2 + 1 \in A[x,y]$ ($A = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$). Soit $B = A[y]$, et regardons f comme un polynôme de $B[x]$. Le coefficient dominant de f (qui est 1) est inversible dans B, donc on peut effectuer la division euclidienne de tout polynôme par f : $\forall g \in B[y], \exists (q,r) \in B[x]^2, g = qf + r$ et $\deg_x r \leq 1$. Notons $r = a(y)x + b(y), a, b \in A[y]$. De plus, pour des raisons de degré, le quotient et le reste de cette division sont uniques. On peut donc identifier $A[x,y]/(x^2+y^2+1)$ à $\{a(y)x + b(y),\ a(y), b(y) \in A[y]\}$. Supposons que $\bar{y}$ soit inversible dans cet quotient. Il existe $a, b \in A[y]$ tels que $y(a(y)x + b(y)) = \bar{1}$. On a donc $ya(y) = 0$ et $yb(y) = 1$, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 5607 ▲

Rappelons que $(a) \cdot (b) = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i, n \in \mathbb{N}, a_i \in (a), b_i \in (b)\} = (ab)$. De plus $(ab) \subset (a) \cap (b)$ donc

$$
\begin{aligned}
(ab) = (a) \cap (b) &\Leftrightarrow (a) \cap (b) \subset (ab) \\
&\Leftrightarrow \forall m \in A,\ (a|m \text{ et } b|m \Rightarrow ab|m) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{ppcm}(a,b) \sim ab \\
&\Leftrightarrow \operatorname{ppcm}(a,b) \sim \operatorname{pgcd}(a,b)\operatorname{ppcm}(a,b) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{pgcd}(a,b) \sim 1
\end{aligned}
$$

Si A est principal, alors $\exists d \in A,\ (a,b) = (d)$. Alors $a \in (d)$ et $b \in (d)$ donc d est un diviseur commun à a et b. Si de plus d' est un autre diviseur commun à a et b, alors $a \in (d')$ et $b \in (d')$ et comme (a,b) est le plus petit idéal contenant a et b, on en déduit que $(a,b) = (d) \subset (d')$, et donc que $d'|d$: finalement, $\operatorname{pgcd}(a,b) = d$.

Correction de l'exercice 5608 ▲

(a) $I = (5, x^2+3)$. On a $\operatorname{pgcd}(5, x^2+3) = 1$, donc si I était principal, on aurait $1 \in I$, et donc $I = \mathbb{Z}[X]$. Si $1 \in I$, il existe $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$, tels que $1 = 5P + (x^2+3)Q$. En considérant la réduction modulo 5 de ces polynômes, on obtient $(x^2 + \bar{3})\bar{Q} = \bar{1}$, ce qui est impossible pour des raisons de degré ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est intègre). Donc $1 \notin I$, et I n'est donc pas intègre.

$x^2 + 1 = (x+2)(x-2) + 5$, donc $(x^2+1, x+2) = (x+2, 5)$. Or $(x+2, 5)$ n'est pas principal pour les mêmes raisons que précédemment.

On a $(x-1) = (x^4-1) - x(x^3-1)$ donc $(x-1) \subset (x^4-1, x^3-1)$. Par ailleurs, $(x-1)|(x^4-1)$ et $(x-1)|(x^3-1)$ donc $x^4 - 1 \in (x-1)$ et $x^3 - 1 \in (x-1)$, donc $(x^4-1, x^3-1) \subset (x-1)$. Donc (x^4-1, x^3-1) est principal.

(b) $I = (x, x+1) = \mathbb{Z}$ car $1 = (x+1) - x$. Donc I n'est pas propre.
$I = (5, x^2+4)$. $\mathbb{Z}[X]/I \sim \mathbb{Z}_5/(x^2+\bar{4})$. Mais $(x^2+\bar{4}) = (x-\bar{1})(x+\bar{1})$ est réductible dans $\mathbb{Z}_5[x]$, donc $\mathbb{Z}_5/(x^2+\bar{4})$ n'est pas intègre : I n'est pas premier.
$I = (x^2+1, x+2) = (x+2, 5)$. $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}_5[x]/(x+\bar{2})$. $x+\bar{2}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_5[x]$, qui est principal, donc $(x+\bar{2})$ est maximal, donc le quotient est un corps, et I est maximal.

Correction de l'exercice 5609 ▲

(a) Soit $a, b \in B$, $ab \in I \cap B$. Alors $ab \in I$ donc $a \in I$ ou $b \in I$. Comme $a, b \in B$, on a $a \in I \cap B$ ou $b \in I \cap B$. Donc, si $I \cap B$ est propre, $I \cap B$ est premier.

(b) Soit J un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$. Alors $J \cap \mathbb{Z}$ est soit $\mathbb{Z}$ soit un idéal premier de $\mathbb{Z}$. Si $J \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, alors $1 \in J$, et donc $J = \mathbb{Z}[X]$, ce qui est exclu. On en déduit que $J = (0)$ ou $J = (p)$ avec p premier.

(c) On suppose $J \cap \mathbb{Z} = (0)$ et $J \neq (0)$. Soit alors f un polynôme de $J \setminus \{0\}$ de degré minimal. Notons $f = c(f) f_0$ où $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ est primitif. Comme J est premier, on a $c(f) \in J$ ou $f_0 \in J$. Comme $J \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, le premier cas est exclu, donc $f_0 \in J$.
Soit maintenant $g \in J$. Soit $g = f_0 q + r$ la division euclidienne de g par f_0 dans $\mathbb{Q}$ ($q, r \in \mathbb{Q}[x]$). Notons $q = \frac{a}{b} q_0$ avec $q_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitif, et $r = \frac{a'}{b'} r_0$, avec $r_0 \in \mathbb{Q}[x]$ primitif.
Alors $bb'g = ab' q_0 f_0 + a' b r_0$ On en déduit que $a' b r_0 \in J$, et pour des raisons de degré, $r_0 = 0$. Finalement, $bb'g = ab' q_0 f_0$, et en considérant les contenus, on en déduit que $bb'|ab'$, donc $b|a$, et donc $q \in \mathbb{Z}[x]$. On en déduit que $g \in (f_0)$, et finalement $J = (f_0)$.

(d) On suppose que $J \cap \mathbb{Z} = (p)$. Soit r_p la projection $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p[x]$ tels que $\alpha\beta \in r_p(J)$. Soit f, g des représentants de α et β (i.e. $r_p(f) = \alpha$, $r_p(g) = \beta$). Alors $fg \in r_p^{-1}(r_p(J)) = J + (p) = J$. Donc $f \in J$ ou $g \in J$, et donc $\alpha \in r_p(J)$ ou $\beta \in r_p(J)$: $r_p(J)$ est premier.
$\mathbb{Z}_p[x]$ est principal, donc il existe un polynôme π irréductible dans $\mathbb{Z}_p[x]$ tel que $r_p(J) = (\pi)$. Soit g un représentant de π. Alors $J = (p, g)$: en effet, on a vu que $J = r_p^{-1}((\pi))$ et $r_p^{-1}((\pi)) = (g) + (p) = (p, g)$.

(e) Supposons J maximal dans $\mathbb{Z}[x]$. J est en particulier premier, donc a une des deux formes ci dessus. Supposons $J = (f)$, avec f irréductible et primitif. Soit p un nombre premier ne divisant pas le coefficient dominant de f. Alors $J \subset (p, f) \subset \mathbb{Z}[x]$, mais $(p, f) \neq \mathbb{Z}[x]$. En effet, sinon, il existerait $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ tels que $1 = pg + fh$, et en considérant la réduction modulo p, $\bar{f}$ serait inversible dans $\mathbb{Z}_p[x]$: comme $\deg \bar{f} > 0$, c'est impossible. On en déduit que J n'est pas maximal.
J est donc de la forme (p, g), avec $r_p(g)$ irréductible dans $\mathbb{Z}_p[x]$.

Correction de l'exercice 5610 ▲

(a) Considérons $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \lambda$. Alors F est de classe C^1, $JacF(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ et $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. Si $\lambda \neq 0$, rang$(JacF(x_1, x_2, x_3)) = 1$ (le maximum possible) car sinon x_1, x_2, x_3 seraient tous nuls : impossible car $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda \neq 0$. Comme $(0,0,0) \notin S_\lambda, \forall a \in S_\lambda$, rang$JacF(a) = 1$ et donc S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
Si $\lambda = 0$ $T_0(S_\lambda) = \{$vecteurs tangents à S_n en $0\}$. Alors $T_0 S_0$ est un cône et donc S_0 n'est pas une sous-variété.

(b) Soientt $x, y \in \mathbb{R}^3$, $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ et $x \in S_\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, $JacF(x) = (2x_1, 2x_2, -2x3)$ et donc

$$T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3 ; DF(x).u = 0\} = \{u = (u_1, u_2, u_3) ; (2x_1, 2x_2, -2x_3). \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0\} =$$

$$\{(u_1, u_2, u_3) ; 2x_1 u_1 + 2x_2 u_2 - 2x_3 u_3 = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3) ; 2B(x, u) = 0\}$$

d'où

$$T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3 ; B(x, u) = 0\}.$$

Correction de l'exercice 5611 ▲

Cas de $\mathbb{R}^2$.

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse sur u implique que $u_{12} = u21$. Si $x = (x_1, x_2)$, on a

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$< u(x), x >= \sum_{i=1}^{2} u_i(x) x_i = (u_{11} x_1 + u_{12} x_2) x_1 + (u_{21} x_1 + u_{22} x_2) x_2 = u_{11} x_1^2 + u_{12} x_1 x_2 + u_{21} x_1 x_2 + u_{22} x_2^2.$$

Posons $f(x) =< u(x), x > -1$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{21} x_2 = 2u_{11} x_1 + 2u_{12} x_2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2u_{22} x_2 + u_{12} x_1 + u_{21} x_1 = 2u_{21} x_1 + 2u_{22} x_2.$$

Calculons

$$Df(x).x = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(u_{11} x_1^2 + u_{12} x_2 x_1 + u_{21} x_1 x_2 + u_{22} x_2^2) = 2 < u(x), x > .$$

Si $x = (x_1, x_2) \in Q$ alors $< u(x), x >= 1 \neq 0$ et donc $Df(x)$ étant non nul, il est de rang au moins 1 et donc de rang maximal. Q est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.
Déterminons le plan tangent de Q.

$$T_x Q = \{y \in \mathbb{R}^2 ; Df(x)(y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) y_i = 0\} =$$

$$\{y \in \mathbb{R}^n ; 2 < u(x), y >= 0\}.$$

Correction de l'exercice 5617 ▲

(a) On a par définition $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R} ; |x - 0| = |x| < 1\} = [-1, 1]$.

(b) C'est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, $B_1(0,1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ c'est le disque de centre l'origine et de rayon 1.

(c) $B_2(0,1) = \{(x, y) ; |x| < 1 et |y| < 1\}$. C'est un carré.

(d) $B_3(0,1) = \{(x,y); |x|+|y| < 1\}$. Dans le quart de plan $P^{++} = \{(x,y); x \geq 0, y \geq$, on a $B_3(0,1) \cap P^{++} = \{(x,y) \in p^{++}; x+y < 1\}$ c'est le triangle délimité par les droites $x=0, y=0$ et $x+y=1$. En faisant de même pour les 3 autres secteurs du plan, on trouve que $B_3(0,1)$ est un losange (ou carré) dont les sommets sont les points $(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)$.

Toutes ces distances étant invariantes par translation (ce sont des normes), il suffit de montrez que les normes associés $||.||_i = d_i((x,y),0)$ sont équivalentes.
On a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}||.||_1 \leq ||.||_2 \leq ||.||_1.$$

En effet,

$$\begin{aligned}||(x,y)||_1 = \sqrt{(x^2+y^2)} &\leq \sqrt{\sup(x^2,y^2)+\sup(x^2,y^2)}\\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{\sup(x^2,y^2)}\\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{(\sup(|x|,|y|))^2} \leq \sqrt{2}||(x,y)||_2\end{aligned}$$

. De plus,

$$\begin{aligned}||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} &\geq \sqrt{\sup(x^2,y^2)}\\ &\geq \sqrt{(\sup(|x|,|y|)^2} \geq \sup(|x|,|y|) \geq ||(x,y)||_2.\end{aligned}$$

Les distances d_1 et d_2 sont donc équivalentes.
De même on montre que

$$||.||_2 \leq ||.||_3 \leq 2||.||_2.$$

Correction de l'exercice 5618 ▲

Il faut trouver une suite de cauchy de fonctions de E qui ne converge pas dans E. Il suffit, par exemple, de prendre une suites de fonctions $\{f_n\}$ convergeant pour $\|.\|$ vers une fonction non continue. Par exemple, prendre

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 1-n(x-1/2) \text{ si } 1/2 \leq x \leq 1/2+1/n \\ 0 \text{ si } x > 1/2+1/n \end{array}\right\}$$

et

$$f_0(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 0 \text{ si } x \geq 1/2 \end{array}\right\}$$

On a alors $\|f_n - f_0\|_1 = 1/(2n)$, la suite converge simplement et en norme $\|.\|$ vers la fonction f_0 qui n'est pas continue. Il suffit de montrer alors qu'il n'existe aucune fonction continue g telle que $\|f-g\| = 0$ ce qui interdit l'existence d'une limite à f_n dans E.

Correction de l'exercice 5620 ▲

On montre par récurrence que $f(nx) = nx$ si $n \in \mathbb{N}$. Montrer $f(-x) = -f(x)$ pour arriver à $f(nx) = nf(x)$ si $n \in \mathbb{Z}$ puis $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ $p,q \in \mathbb{Z}$. Ainsi f est linéaire sur $\mathbb{Q}$. Il reste à montrer qu'elle l'est sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il reste à montrer que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Prenons $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$. On a alors

$$f(\lambda_x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda-\lambda_n)x).$$

Soit $c_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$||(\lambda-\lambda_n)x||_E \leq c_n \leq 2||(\lambda-\lambda_n)x||_E.$$

Alors

$$f((\lambda-\lambda_n)x) = f(c_n\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x) = c_n f(\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x)$$

et

$$||\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x|| \leq 1.$$

L'application f étant borné sur la boulle unité par une constante $M > 0$, on a

$$||f((\lambda-\lambda_n)x)|| \leq c_n M$$

et donc

$$||f((\lambda-\lambda_n)x)|| \leq c_n M \leq 2M||(\lambda-\lambda_n)x||_E$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f((\lambda-\lambda_n)x) = 0$$

, en remarquant qu'on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$

on obtient

$$f(\lambda x) = \lim_{n\to\infty}[\lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x)] = \lambda f(x).$$

Correction de l'exercice 5621 ▲

Soit $X = (x,y)$, on a $M.X = (ax+by, cx+dy)$ or

$$|ax+by| \le |ax| + |by| \le (|a|+|b|)\sup(|x|,|y|) \le (|a|+|b|)||(x,y)||_1.$$

de même,

$$|cx+dy| \le (|c|+|d|)||(x,y)||_1.$$

Par conséquent

$$||M.X||_2 \le \sup(|a|+|b|, |c|+|d|)||(x,y)||_1$$

et donc

$$||M|| \le \sup(|a|+|b|, |c|+|d|).$$

Supposons $|a|+|b| \ge |c|+|d|$ (inverser l'ordre sinon) et prenons $X_0 = (a/|a|, b/|b|)$ (on suppose $a \ne 0$ et $b \ne 0$ sinon vérification facile). On a alors $||X_0|| = 1$ et

$$||M.X_0||_2 = \sup(|a|+|b|, |ca/|a| + db/|b||) \ge |a|+|b|.1 \ge (|a|+|b|)||X_0||_1$$

et donc

$$||M|| \ge \sup(|a|+|b|, |c|+|d|)$$

et finalement

$$||M|| = \sup(|a|+|b|, |c|+|d|)$$

Correction de l'exercice 5623 ▲

(a) Soit x une suite, on a

$$||S(x)||_\infty = Max(\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{n-1}|, 0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1.||x||_\infty.$$

Donc $||S|| = 1$.

(b) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$

$$||Tf||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)g(x) \le ||f||_\infty ||g||_\infty.$$

Donc

$$||T|| \le ||g||_\infty.$$

Or

$$||T1||_\infty = ||g||_\infty = ||1||_\infty ||g||_\infty.$$

Donc

$$||T|| \ge ||g||_\infty$$

et finalement on a bien

$$||T|| = ||g||_\infty.$$

(c) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on a

$$||u(f)|| = |\int_0^1 f(x)g(x)dx| \le \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \le \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| \int_0^1 |f(x)|dx \le ||g||_\infty.||f||.$$

On a donc

$$||u|| \le ||g||_\infty.$$

Comme g ne s'annule qu'au point $x = 1/2$, elle ne change de signe qu'une seule fois. Soit

$$f_0 = g/|g|,$$

cette fonction n'est pas continue (ni définie) en $x = 1/2$ mais vérifie $f_0 g = |g|$. Prenons $f_n = g/|g|$ si $|x - 1/2| > 1/n$, pour $|x-1/2| \le 1/n$, on relie les deux segments du graphe par une ligne. Alors $1 - 1/(2n) \le ||f_n|| \le 1$ et

$$||u(f_n)|| = |\int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx + \int_{|x-1/2|\le 1/n} f_n(x)g(x)dx| \ge$$

$$|(|\int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx| - |\int_{|x-1/2|\ge 1/n} f_n(x)g(x)dx|)|$$

$$\ge ||g||_\infty \int_{|x-1/2|>1/n} |f_n(x)|dx - 2/n||g||_\infty \ge ||g||_\infty(||f_n|| - 2/n).$$

Ainsi
$$\lim_{n\to\infty} ||u(\frac{f_n}{||f_n||})|| \geq ||g||_\infty(1-\frac{1}{2n||f_n||} \geq ||g||_\infty(1-\frac{1}{2n(1-1/2n))} \geq ||g||_\infty(1-\frac{1}{2n-1})$$
et donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$||u|| \geq ||g||_\infty(1-\frac{1}{2n-1}),$$
en faisant tend n vers l'infini
$$||u|| \geq ||g||_\infty$$
ce qui montre la deuxième inégalité et on obtient $||u|| = ||g||_\infty$.

(d) si on prend $(x_n) = (a_n)$ on obtient
$$u((a_n)) = \sum a_n^2 = ||(a_n)||_2^2 = ||(a_n)||_2.||(a_n)||_2$$
et donc
$$||u|| \geq ||(a_n)||_2.$$
Or D'après Cauchy-Schwartz, on a
$$||u(a_n)|| = |u(a_n)| = |\sum a_n x_n| \leq ||(a_n)||_2||(x_n)||_2$$
et donc $||u|| \leq ||(a_n)||_2$ d'où l'égalité
$$||u|| = ||(a_n)||_2.$$

(e) Pour tout $j\in\mathbb{N}$ on a $|x_j| \leq ||(x_n)||_\infty$ et par conséquent
$$|u((x_n))| = |\lim_{j\to\infty} x_j| \leq ||(x_n)||_\infty$$
et donc
$$||u|| \leq 1.$$
Prenons la suite (x^0) définie par $x_n^0 = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ alors
$$|u(x^0)| = |\lim_{j\to\infty} 1| = 1 = ||x^0||_\infty$$
et donc
$$||u|| \geq 1$$
d'où l'égalité $||u|| = 1$.

Correction de l'exercice 5625 ▲

(a) (Etude en 0). $|sin(1/x)| \leq 1$ par conséquent $|x^2 sin(1/x)| \leq x^2$. De même $|y^2 sin(1/y)| \leq y^2$. Par conséquent
$$|f(x,y)| \leq x^2+y^2 \leq (\sqrt{x^2+y^2})^2 \leq (||(x,y)||_2)^2$$
Et donc
$$\lim_{||(x,y)||\to 0} |f(x)-f(0)| = 0$$
et donc f est continue à l'origine. En remarquant que $||(x,y)||_2^2 = o(||(x,y)-(0,0)||_2)$ on a $f(x,y) = 0 + o(||(x,y)-(0,0)||_2)$ et donc f est différentiable en 0 et
$$Df(0) = 0.$$
Par conséquent f admet des dérivées partielles dans toutes les directions à l'origine qui sont nulles. La fonction f n'est pas contre par de classe C^1 à l'origine. Il suffit de remarquer que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur la droite $y=0$ n'est pas continue en 0.

(b) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f est continue en (x,y) et même de classe C^∞ en tant que composés sommes, produits et quotient de telles fonctions. Il reste à étudier f à l'origine. Or,
$$|f(x,y)| = \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq |x| \leq ||(x,y)||_2.$$
Ainsi, f est continue à l'origine et y tend vers 0.
Montrons par l'absurde que f n'est pas dérivable à l'origine. Notons $Df(0)$ la (supposée) différentielle de f à l'origine. L'application linéaire $Df(0)$ s'obtient par la calcul de l'image de vecteurs de la base de $\mathbb{R}^2$. Calculons pour 'les dérivées directionnelles de f à l'origine :
$$D_{(1,0)}f(0) = [Df(0)]((1,0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h(1,0))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$D_{(0,1)}f(0) = [Df(0)]((0,1)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h(0,1))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$Df(0) = 0$$

Or,

$$D_{(1,1)}f(0) = [Df(0)]((1,1)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h(1,1))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h} = \frac{1}{2}\neq 0$$

ce qui donne la contradiction recherchée.

Correction de l'exercice 5627 ▲

En tout point (x_0,y_0) avec $x_0\neq y_0$, f est continue et même de classe C^2 car composée (projections sur (0x) et (Oy)), différence et quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas. Dans ces points, la différentielle de f est donnée par la matrice jacobienne :

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & , & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{g'(x_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2} & , & \frac{-g'(y_0)(x_0-y_0)+(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2} \end{pmatrix}$$

qui est bien de classe C^1 (g étant de classe C^2, g' est de classe C^1). Montrons que F est continue aux points de la forme (a,a). Le DL de g à l'ordre 2 entre x et y donne $g(y)=g(x)+(y-x)g'(c_{x,y})$ avec $c\in[x,y]$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} g'(c_{x,y}) = g'(a) = F(a,a)$$

car comme (x,y) tend vers (a,a), x et y tendent tous les deux vers a et donc $c_{x,y}$ aussi (et g' est continue). Pour montrer que F est C^1 (sachant que F est continue), il suffit de montrer que la différentielle de F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$. Le DL de g à l'ordre 2 entre x_0 et y_0 est :

$$g(x_0) = g(y_0)+(x_0-y_0)g'(y_0)+\frac{(x_0-y_0)^2}{2}g^{(2)}(c_1) \text{ avec } c_1\in[x_0,y_0].$$
$$g(y_0) = g(x_0)+(y_0-x_0)g'(x_0)+\frac{(y_0-x_0)^2}{2}g^{(2)}(c_2) \text{ avec } c_2\in[x_0,y_0].$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{(x_0-y_0)^2 g^{(2)}(c_2)}{2(x_0-y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{(x_0-y_0)^2 g^{(2)}(c_1)}{2(x_0-y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_1)}{2}$$

La fonction g étant de classe C^2, on a

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(a,a)} Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} g^{(2)}(a)/2 & , & g^{(2)}(a)/2 \end{pmatrix}$$

et donc Df se prolonge par continuité sur tout $\mathbb{R}^2$. F est donc bien de classe C^1.

Correction de l'exercice 5628 ▲

Soit $F_1(P)=\int_0^1 P^3-P^2dt$, et soit h un polynôme de degré n alors

$$F_1(P+h)-F_1(P) = \int_0^1 [(P^3+3P^2h+3Ph^2+h^3)+(P^2+2Ph+h^2)-P^3-P^2]dt =$$
$$\int_0^1 h(3P^2+2P)dt + \int_0^1 3Ph^2+h^3+h^2dt$$

Or $|\int_0^1 3Ph^2+h^3+h^2dt| = o(||h||_\infty)$ donc

$$DF_1(h) = \int_0^1 (3P^2+2P)hdt.$$

Soit $F_2(P)=P'-P^2$ et soit h un polynôme de degré n alors

$$F_2(P+h)-F_2(P) = (P+h)'-(P+h)^2-P'+P^2 = h'-2Ph-h^2$$

Or $h^2=o(||h||)$ (pour toute norme a choisir). On a donc

$$DF_2(h) = h'-2Ph.$$

Correction de l'exercice 5629 ▲

(a) On a $g(x,y) = < f(x,y) - a, f(x,y) - a >$ où $< .,. >$ est le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^2$. L'application g est différentiable en tant que composée et produit de fonctions différentiables. La différentielle Df est donné par la matrice Jacobienne

$$(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$$

et Dg par la matrice

$$(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x,y)}{\partial y})$$

On a alors

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} < f(x,y) - a, f(x,y) - a > =$$

$$< \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a), f(x,y) - a > + < f(x,y) - a, \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a) > =$$

$$2 < \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f(x) - a > .$$

De même,

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2 < \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, f(x) - a > .$$

(b) L'application f est continue (car différentiable) et tend vers l'infini quand (x,y) tend vers l'infini. Ainsi

$$\forall A > 0, \exists B > 0, ||(x,y)|| \geq B \Rightarrow ||f(x,y)|| \geq A.$$

Soit $m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)$, pour $A = m+1$, il existe $B > 0$ tel que

$$||(x,y)|| \geq B \Rightarrow g(x,y) = ||f(x,y)||^2 \geq A^2 \geq (m+1)^2 \geq m+1.$$

On a donc

$$m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \inf_{||(x,y)||\leq B} g(x,y).$$

Or la boule $\overline{B}(0,B)$ étant compacte et g continue, l'inf y est ateint en un point $X_0 = (x_0,y_0) \in B(0,B) \subset \mathbb{R}^2$. Comme X_0 est un minimum global de g, c'est aussi un minimum de la restriction de g sur toute droite passant par X_0. Comme la dérivé d'une fonction réelle en un minimum est nulle, toute les dérivées partielles de g sont nulles et donc $Dg(X_0) = 0$ et par conséquent la matrice jacobienne de g est nulle. On a donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 2 < \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), f(x) - a > = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 2 < \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), f(x) - a > = 0.$$

Comme Df est injective, ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent les projections de $f(x) - a$ sur la base $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0); \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$ sont nulles et donc

$$f(x_0,y_0) - a = 0 \Leftrightarrow f(x_0,y_0) = a$$

et donc a admet bien un antécédent. Ceci étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on a montré que f est surjective.

Correction de l'exercice 5630 ▲

(a) Pour montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$, il faut montrer que si $h \in \mathbb{R}^n$, on a $|Df(x).h| \leq ||h||$. On a

$$|Df(x).h| = |D_h f(x)| = |\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}|.$$

Or f est 1-lipschitzienne et donc $|f(x+th) - f(x)| \leq ||th|| = t||h||$. Par conséquent pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $|Df(x).h| \leq ||h||$ ce qui donne l'inégalité demandée.

(b)

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} = Df(x).(y-x).$$

Ou encore, soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application $\psi(t) = (1-t)x + ty$, on a alors $\varphi(t) = f \circ \psi$ et d'après la formule de différentielle d'une composition :

$$\varphi'(0) = Df(\psi(0)).D\psi(0) = Df(x).(y-x).$$

Or,

$$d(x,F) = d(x,y) = ||x-y|| = \frac{1}{1-t}||(1-t)(x-y)|| =$$

$$\frac{1}{1-t}||[(1-t)x + ty] - [ty + (1-t)y]|| = \frac{1}{1-t} d((1-t)x + ty, y).$$

Notons $x_t = (1-t)x + ty$, on a alors
$$d(x_t, y) = (1-t)d(x,F).$$
Or, $\varphi(t) = d(x_t, F) \leq d(x_t, y) \leq (1-t)d(x,y) \leq \varphi(0)$ et donc
$$|\varphi'(0)| = \lim_{t\to 0} \frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t} \geq$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{d(x,y)-(1-t)d(x,y)}{t} \geq d(x,y) = ||x-y||.$$
Donc
$$|Df(x)(x-y)| \geq ||x-y||$$
d'où la deuxième inégalité.

(c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux point y_1 et y_2 tels que $d(x,F) = d(x,y_1) = d(x,y_2)$. Alors, de la même manière que précédement, on a $Df(x).(x-y_1) = Df(x).(x-y_2) = d(x,F)$ et donc $Df(x).(x-y_1+x-y_2) = 2d(x,F)$. Or, $||x-y_1+x-y_2|| < 2d(x,F)$ car les vecteurs $x-y_1$ et $x-y_2$ ne sont pas alignés. Mais alors cela contredit le fait que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}\backslash,\mathbb{R})} = 1$.

Correction de l'exercice 5640 ▲

Montrons que f se prolonge par continuité au point b, on montrera alors que f est dérivable à gauche au point b est que cette dérivée est $\lim_{x\to b^-} f'(x)$. Pour celà montrons qu'il existe un réel k tel que toute suite $\{x_n\}$ tendant vers b vérifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k$. Remarquons que la dérivée $f'(x)$ admettant une limite au point b, elle est bornée sur un petit voisinage (à gauche) de b (notons M ce majorant). Soit y_n une suite convergent vers b. Alors la suite $f(y_n)$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. La suite $\{y_n\}$ étant de cauchy,
$$\exists N \in \mathbb{N}, p,q \geq N \Rightarrow |y_p - y_q| \leq \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$
Or d'après les accroissements finis :
$$f(y_p) - f(y_q) = (y_p - y_q) f'(c_{p,q}) \text{ où } c_{p,q} \in]y_p, y_q[.$$
Par conséquent,
$$|f(y_p) - f(y_q)| \leq |y_p - y_q|.|f'(c_{p,q})| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M \leq \frac{epsilon}{2} < \varepsilon$$
et donc la suite $\{f(y_n)\}$ est de cauchy et converge vers un réel que nous noterons l. Montrons que c'est le cas pour toute autre suite $\{x_n\}$ qui tend vers b. On a
$$f(x_n) = f(x_n) - f(y_n) + f(y_n).$$
D'après les accroissements finis, $|f(x_n) - f(y_n)| \leq M.|x_n - y_n|$ et donc tend vers zero car les suites x_n et y_n tendent vers b. De plus, comme on l'a vu, $f(y_n)$ tend vers k et donc $f(x_n)$ aussi. Prolongeons f par continuité au point b en posant $f(b) = k$. On a alors le taux d'accroissement
$$T_x f = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{(b-x)f'(c_x)}{b-x} = f'(c_x) \text{ où } c_x \in]x, b[.$$
Quand x tend vers b, c_x aussi et donc $T_x f$ tend vers l.

Correction de l'exercice 5641 ▲

On a $f'(x) = ie^{ix}$ (on peut le vérifier en coordonnées). Si l'égalité des accroissement finis était vérifiée il existerait
$$c \in]0, \pi[\text{ tel que } f(\pi) - f(0) = (\pi - 0) ie^{ic}$$
ce qui est impossible car en prenant les modules on trouverait $2 = \pi$.

Correction de l'exercice 5642 ▲

(a) f est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont (polynômes). g l'est car c'est la composée de deux fonctions C^∞.

(b) La matrice jacobienne de f est :
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$
D'apès la formule de différentielle d'une composée, on a
$$Dg(x,y) = Df(f(x,y)) \circ Df(x,y).$$
Or $f(0,0) = 0$ et
$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et donc
$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Par continuité de $Dg(x,y)$ à l'origine et en prenant $\varepsilon = 1/2$ on a :

$$\exists \rho > 0, ||(x,y)-(0,0)|| \leq \rho \Rightarrow ||Dg(x,y)-Dg(0,0)|| \leq 1/2$$

d'où le résultat demandé.

(d) D'après les accroissements finis, pour tous $X,Y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$||g(X)-g(Y)|| \leq \sup_{Z \in \overline{B}_\rho((0,0))} ||Dg(Z)||.||X-Y|| \leq 1/2||X-Y||$$

et donc g est contractante. Le Boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ la boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ étant compacte et complète, le théorème du point fixe permet de conclure.

Correction de l'exercice 5643 ▲

(a) On a

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ \cos x & \sin y \end{pmatrix}$$

On a

$$|||Df(x,y)||| = \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{||Df(x,y).(a,b)||}{||(a,b)||} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 y + 2ab\sin x\cos x + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 y + 2ab\cos x\sin y}}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(x+y)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{1+\frac{2|a||b|}{a^2+b^2}} \leq \sqrt{2}$$

car

$$(|a|-|b|)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2|a||b|.$$

(b) Soient $U_n = (x_n,y_n)$ et $G(x,y) = 1/2F(x,y)$, alors $|||G||| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $U_{n+1} = G(U_n)$. D'après les accroissements finis, G est contractante et donc le théorème du point fixe donne le résultat demandé.

Correction de l'exercice 5648 ▲

Appliquer le théorème des accroissements finis à $g(x) = f(x) - Df(a)x$ en remarquant que la matrice jacobienne de $Df(a)x$ est la matrice $Df(a)$.

Correction de l'exercice 5649 ▲

(a) Calculons l'accroissement :

$$f(x+h)-f(x) = f(x)+f(h)-f(x) = f(h)+0.$$

Or, par définition $f(h)$ est linéaire en h, continue et $0 = o(||h||)$. Par conséquent f est différentiable et

$$Df(x) = f, \text{ ou encore } Df(x).h = f(h).$$

On remarque que Df est l'application constante que à $x \in E$ associe l'application linéaire f. Par conséquent, Df est différentiable et sa différentielle est nulle :

$$D^2 f = 0.$$

(b) Calculons

$$f((x,y)+(h,k)) - f(x,y) = f(x+h,y+k) - f(x,y) = f(x,y+k) + f(h,y+k) - f(x,y) =$$

$$f(x,y)+f(x,k)+f(h,y)+f(h,k)-f(x,y) = f(x,k)+f(h,y)+f(h,k).$$

L'application qui à (x,y) associe l'application linéaire $Df(x,y)(h,k) = f(x,k)+f(h,y)$ est donc candidate pour être la différentielle de f. Vérifions qu'elle est bien continue et que $f(h,k) = o(||(h,k)||)$. Nous rappelons qu'une application bilinéaire $f(x,y)$ est continue s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2; ||f(x,y)|| \leq M||x||||y||.$$

On a

$$||Df(x,y)(h,k)|| = ||f(x,k)+f(h,y)|| \leq ||f(x,k)|| + ||f(h,y)|| \leq$$

$$M||x||.||k|| + M||h||.||y|| \leq M(||x||+||y||)\max(||k||,||h||) \leq M(||x||+||y||)||(h,k)||.$$

Par conséquent, $Df(x,y)$ est continue et a une norme inférieure à $M(||x||+||y||)$. De plus

$$||f(h,k)|| \leq M||h||.||k|| \leq ||(h,k)||.\varepsilon(h,k)$$

où ε tend vers zero quand (h,k) tend vers zero car

$$\varepsilon(h,k) = \frac{||h||.||k||}{\sup(||h||,||k||)}$$

ce qui fini de montrer que f est différentiable et que sa différentielle est définie par

$$Df(x,y).(h,k) = f(x,k) + f(h,y).$$

En remarquant que Df est linéaire par rapport à (x,y), d'après la première question, on déduit que sa différentielle est

$$D^2 f(x,y)[(h,k),(u,v)] = f(u,k) + f(h,v).$$

(c)

$$f(A+h) - f(A) = (A+h)^2 - A^2 = Ah + hA + h^2$$

avec $Ah+hA$ linéaire en h (et en A) et $||h^2|| \leq ||h||^2 = o(||h||)$. Par conséquent f est différentiable et sa différentielle est $Df(A).h = Ah + hA$. Comme $Df(A)$ est lináire par rapport à A, sa différentielle en A est l'application bilinéaire

$$D^2 f(A)[H,K] = KH + HK.$$

Correction de l'exercice 5650 ▲

Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$, calculons la jacobienne de f :

$$Df(x,y) = (2x + y + \frac{3}{4}x^2, x + 2y).$$

Les points critiques de f vérifient $Df(x,y) = 0$ et par conséquent vérifient les équations $2x + y + \frac{3}{4}x^2 = 0$ et $x + 2y = 0$. Par conséquent f admet deux points critiques $(0,0)$ et $(-2,1)$. Pour savoir si ces points critiques sont des extrémums de f, il faut étudier la hessienne de f :

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2}x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres. Au point $(0,0)$,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)$ et ses deux valeurs propres sont strictement positive. La fonction f admet donc un minimum local au point $(0,0)$. Ce minimum n'est pas globale car $f(0,0) = 0$ et f prend des valeurs négatives pour $y = 0$ et x qui tend vers $-\infty$.

Au point $(-2,1)$,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 3$. On peut alors soit calculer les valeurs propres soit remarquer que le determinant de la hessienne est égal au produit des deux valeurs propres (ici -3) et celles-ci sont donc non nulles et de signe contraire. Par conséquent le point $(-2,1)$ est point selle de f. ce n'est pas un extremum.

Correction de l'exercice 5651 ▲

Le volume d'une boite étant invariant par rotations, on peut toujours supposer que toutes les boites sont centrées à l'origine et on des cotés parallèles aux axes de coordonnées. Par conséquent, la donnée d'un point (x,y,z) sur la sphère définit de manière unique une boite rectangulaire dont l'un des sommets est le point (x,y,z). On prendra x, y et z positifs car une telle boite a toujours un sommet dans le secteur positif de l'espace. Par conséquent, on doit maximiser la fonction volume $g(x,y,z) = 8xyz$ sur la sous-variété S définie par l'équation $f = 0$ avec $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Un point critique de g sur S vérifie

$$Dg(x,y,z) = \lambda Df(x,y,z)$$

et $f(x,y,z) = 0$. On a obtient alors le système d'équations :

$$\begin{array}{c} 8yz = 2x \\ 8xz = 2y \\ 8xy = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{array}{c} 8xyz = 2x^2 \\ 8xyz = 2y^2 \\ 8xyz = 2z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{array}$$

et donc comme x, y et z sont positifs, on a $x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Or g est continue et $S^+ = S \cap \{x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$ est un compact. Comme g est nulle sur le bord de S^+, le maximum de g est ateint en un point critique de g dans l'intérieur de S^+. Le seul point critique de g est donc bien ce maximum recherché. Ici, il n'y a pas eu besoin de calculer la hessienne de g sur S par la formule :

$$H = D^2 g - \lambda D^2 f$$

où λ est le coefficient de lagrange trouvé précédemment.

Correction de l'exercice 5656 ▲

(a) La fonction f étant dérivable, elle est continue. Montrons qu'elle est injective. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $x \neq y$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = 0$ ce qui contredit le fait que f' ne s'annule jamais. Par conséquent $x = y$ et f est injective. Pour montrer que f^{-1} est continue, il faut montrer que l'image réciproque par f^{-1} d'un voisinage d'un point est un voisinage de la réciproque du point. Ou encore, que l'image directe par f d'un voisinage d'un point a est un voisinage de $f(a)$. Soit V un voisinage de a, il contient un intervalle du type $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, l'image de ce connexe par une fonction continue est encore connexe et est donc un intervalle $[c,d]$ (fermé car f est continue et l'intervalle de départ est compact). Si $f(a) \in]c,d[$, on la démonstration est finie. Si $f(a) = c$ ou $f(a) = d$ alors a est un extrémum local de f et donc $f'(a) = 0$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi f est un homéormorphisme. f^{-1} est différentiable car la différentielle de f ne s'annule pas (théorème de deug...).

(b) Le taux d'accroissement

$$T_x(f) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 + x \sin \frac{\pi}{x}$$

tend vers 1 quand x tend vers zero ($\sin \frac{\pi}{x}$ est bornée) et donc f est dérivable au point 0 et $f'(0) = 1 \neq 0$.

(c) Par l'absurde, supposons que f soit inversible au voisinage de 0.Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[$ soit inclus dans ce voisinage. f étant continue (car dérivable), elle est strictement monotone. Or $f'(x) = 1 - \pi \cos \frac{\pi}{x} + 2x \sin \frac{\pi}{x}$. Prenons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2k} < \varepsilon$ et $\frac{1}{1+2k} < \varepsilon$ alors $f'(\frac{1}{2k}) = 1 - \pi < 0$ et $f(\frac{1}{2k+1}) = 1 + \pi > 0$ et donc f n'est pas monotone sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ce qui donne la contradiction recherchée. Le théorème de l'inverse local nous montre de plus que f n'est pas de classe C^1 dans aucun voisinage de 0.

Correction de l'exercice 5657 ▲

(a) L'application $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont. Pour montrer que c'est un difféormorphisme global, il suffit de montrer que c'est un difféo local (théorème de l'inverse local) et qu'elle est bijective. Calculons la matric jacobienne de φ :

$$D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

La jacobienne de φ est $det(D\varphi(r, \theta)) = r(\sin^2 x + \cos^2 x) = r > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. L'application φ est donc bien un difféomorphisme local au voisinage de chacun des point de $]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$. La bijectivité se vérifie en explicitant par exemple la réciproque de φ (si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on pourra considérer les données $x^2 + y^2$ et y/x...).

---

14. **Correction de l'exercice 5658 ▲**

(a) φ a des coordonnées de classe C^1, elle l'est donc aussi. On a

$$Jac(\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}$$

On a $det(Jac(\varphi)(x, y)) = 1 - 1/4\cos(x/2)\cos(y/2) \geq 3/4 > 0$. Par conséquent la jacobienne est inversible et $D\varphi(x, y) \in Isom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = GL(\mathbb{R}^2$.

(b) D'après le théorème de l'inverse local, Il suffit de montrer que φ est injective. Supposons $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$, alors $\sin(y_1/2) - x_1 = \sin(y_2/2) - x_2$ et $\sin(x_1/2) - y_1 = \sin(x_2/2) - y_2$. D'où $\sin(y_1/2) - \sin(y_2/2) = x_1 - x_2$ et $\sin(x_1/2) - \sin(x_2/2) = y_1 - y_2$. Or, $\forall a, b \in \mathbb{R}, |\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ (conséquence des accroissements finis appliqué à $\sin x$). Donc $|x_1 - x_2| \leq |y_1/2 - y_2/2|$ et $|y_1 - y_2| \leq |x_1/2 - x_2/2|$ d'où $|x_1 - x_2| \leq 1/4|x_1 - x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. $\varphi : U \to F$ est injective. L'ensemble $f(U)$ est ouvert car il est réunion d'ouverts (d'après thm inverse local). C'est un difféomorphisme en U et $\varphi(U)$.

(c) Soient $(X_1, y_1), (X_2, Y_2) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$ avec $\varphi(x_1, y_1) = (X_1, Y_1)$ et $\varphi(x_2, y_2) = (X_2, Y_2)$ ou encore $\varphi^{-1}(X_1, Y_1) = (x_1, y_1)$ et $\varphi^{-1}(X_2, Y_2) = (x_2, y_2)$. On a

$$||\varphi^{-1}(X_1, Y_1) - \varphi^{-1}(X_2, Y_2)|| = ||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|| = ||(x_1 - x_2, y_1, y_2)|| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Or $\sin(y_1/2) - x_1 = X_1$, $\sin(y_2/2) - x_2 = X_2$, $\sin(x_1/2) - y_1 = Y_1$ et $\sin(x_2/2) - y_2 = Y_2$. Par conséquent

$$x_1 - x_2 = \sin(y_1/2) - X_1 - \sin(y_2/2) + X_2$$

$$y_1 - y_2 = \sin(x_1/2) - Y_1 - \sin(x_2/2) + Y_2.$$

D'où

$$\begin{aligned}|x_1-x_2|+|y_1-y_2| &\leq |X_2-X_1| + |\sin(y_1/2)-\sin(y_2/2)| + |Y_2-Y_1| + |\sin(x_1/2)-\sin(x_2/2)|\\ &\leq |X_2-X_1| + 1/2|y_1-y_2| + |Y_2-Y_1| + 1/2|x_1-x_2|\end{aligned}$$

d'où

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2| \leq 2(|X_2-X_1|+|Y_2-Y_1|) \leq 2||(X_1,Y_1)-(X_2,Y_2)||.$$

Donc φ^{-1} est lipschitzienne.

(d) Soit (X_n,Y_n) une suite de cauchy dans $\varphi(\mathbb{R}^2)$, $((X_n,Y_n) = \varphi(x_n,y_n)\,;\,(x_n,y_n) = \varphi^{-1}(X_n,Y_n))$. Pour tout $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, p,q \geq n \Rightarrow ||(X_p,Y_p)-(X_q,Y_q)|| < \varepsilon$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}; p,q \geq n \Rightarrow ||(x_p,y_p)-(x_q,y_q)|| < 2\varepsilon$. La suite (x_n,y_n) est alors de cauchy dans $\mathbb{R}^2$, qui est complet. Par conséquent elle converge. Soit (x,y) sa limite. Comme φ est continue et que $\lim_n(x_n,y_n) = (x,y)$ alors $\lim_n \varphi(x_n,y_n) = \varphi(x,y)$. La suite (X_n,Y_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Elle converge. Soit (X,Y) sa limite, alors $(X,Y) = \varphi(x,y)$ car $(X_n,Y_n) \to (X,Y)$ et $\varphi(x_n,y_n) \to \varphi(x,y)$. Donc $(X,Y) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$. $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est alors complet et donc fermé. Comme $\varphi(\mathbb{R}^2$ est un ouvert fermé et non vide (il contient $(0,0) = \varphi(0,0)$) dans le connexe $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

(e) $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2-\pi) = \varphi(\pi/2,\pi) = \varphi(q)$ où $q = (\pi/2,\pi)$. $\varphi : E \to F$ est un C^1-difféormorphisme donc $\varphi^{-1}\circ\varphi = Id$ et donc

$$Id = D(\varphi^{-1}\circ\varphi)(q) = D\varphi^{-1}(\varphi(q))\circ D\varphi(q).$$

Or $D\varphi^{-1}(\varphi(q)) = (D\varphi(q))^{-1}$ et donc $Jac\varphi^{-1}(p) = (Jac\varphi(\pi/2,\pi))^{-1}$. Or

$$Jac\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$Jac\varphi(\pi/2,\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Jac\varphi^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 5659 ▲

Posons $\theta(t) = a + t(b-a)$ et $\Psi(x) = < x, b-a >$ qui est linéaire et continue (donc C^∞).

15. f et φ sont de classe C^1 car composées d'applications de classe C^1. On a

$$D\varphi(t) = \varphi'(t) = (\Psi\circ f\circ\theta)(t)'(t) = D\Psi(f(\theta(t)))\circ Df(\theta(t))\circ D\theta(t) = < Df(a+t(b-a))(b-a), b-a > .$$

Par conséquent :

$$\varphi'(t) \geq \alpha < b-a, b-a > .$$

Or, $\varphi(1)-\varphi(0) = < f(b)-f(a), (b-a) >$ et il existe $t \in]0,1[$ tel que $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(t)$ d'où

$$< f(b)-f(a), b-a > \geq \alpha < b-a, b-a > .$$

Indications pour mq f est fermée : Posons $||x|| = \sqrt{< x,x >}$ alors

$$\alpha||b-a||^2 \leq < f(b)-f(a), b-a > \leq ||f(b)-f(a)||.||b-a||.$$

D'où

$$||b-a|| \leq 1/\alpha||f(b)-f(a)||.$$

Soit F un fermé et y_n une suite de points de $f(F)$ convergeante vers un point limite y_∞. Il faut montrer que $y_\infty \in f(F)$. Soit x_n une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x_n) = y_n$. Il reste à montrer que cette suite admet est de Cauchy, qu'elle converge donc et que sa limite x_∞ vérifie $f(x_\infty) = y_\infty$.

Correction de l'exercice 5670 ▲

Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$ (par exemple $(1,1,1)$). f est C^1 car coordonnées polynomiales.

$$MatD_2f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0y_0 & x_0y_0 \end{pmatrix}$$

$det(MatD_2f(x_0,y_0,z_0)) = -2x_0(y_0^2+z_0^2) \neq 0$ car $x_0y_0z_0 = 1$ donc $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe I intervalle contenant x_0 et $g : I \to \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,g(x)) = 0$ pour tout $x \in I$ et $g(x_0) = (y_0,z_0)$.

Correction de l'exercice 5674 ▲

Posons $f(x,y) = x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$, $f(0,0) = 0$ et $f(1,1) = 0$. $\mathbb{R}$ est un espace de Banach et f est de classe C^1 car polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y - 1$$

Étude au point $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Il existe I contenant 0, J contenant 0 et $g : I \to J$, C^1 tel que $g(0) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in I$. On a

$$x^4 + (g(x))^3 - x^2 - (g(x))^2 + x - g(x) = 0$$

En dérivant on obtient :

$$4x^3 + 3g^2(x)g'(x) - 2x - 2g(x)g'(x) + 1 - g'(x) = 0$$

d'où $g'(0) = 1$. On dérive encore :

$$12x^2 + 6g(x)g'(x)^2 + 3g^2(x)g''(x) - 2 - 2g'(x)^2 - 2g(x)g''(x) - g''(x) = 0$$

d'où

$$g''(0) = -4.$$

Étude au point $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$. Ce n'est plus un difféo, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on prend la dérivée par rapport à la première variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 1$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe I contenant 1, J contenant 1 et $g : I \to J$ de classe C^1 tels que $g(1) = 1$ et $f(g(x), x) = 0, \forall y \in I$. On a

$$g(y)^4 - g^2(y) + g(y) + y^3 - y^2 - y = 0$$

En dérivant

$$4g^3g' - 2gg' + g' + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

d'où $4g'(1) - g'(1) = 0$ et donc $g'(1) = 0$.

$$12g^2(g')^2 + 4g^3g'' - 2gg'' - 2(g')^2 + g'' + 6y - 2 = 0$$

d'où $g''(1) = -4/3$.

Correction de l'exercice 5699 ▲

(a) Soit λ_n et μ_n deux suites de points tels que $\varphi(\lambda_n) = \varphi(\mu_n) = 0$ et convergeant respectivement vers λ et μ, il reste à montrer que φ est nulle sur chaque interval $[\lambda_n, \mu_n]$. Soit c un extremum de φ sur cet interval, on a alors necessairement $\varphi'(c) = 0$ et donc $3c^{2/3} = 0$ et donc $c = 0$ et donc $\varphi(c) = \varphi(0) = 0$. Par conséquent le sup et le min de φ sur $[\lambda_n, \mu_n]$ sont nuls et donc φ est aussi nulle sur cet intervalle. En passant à la limite, on a prouvé que φ est nulle sur $]\lambda, \mu[$.

(b) On vérifie que les solutions proposées vérifient l'équation différentielle (1). La fonction $x^{2/3}$ est lipschitzienne par rapport à x dès que $x \neq 0$. Si φ_2 est une solution maximale sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi_2(0) = 0$, il existe alors nécessairement λ, μ (définis précédement) tels que φ_2 est nulle sur $]\lambda, \mu[$. Par continuité de la solution elle vérifie $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$. Mais alors $\varphi_2' - \varphi = 0$ est donc $\varphi_2 = \varphi + K$ où K est une constante donnée. Du fait que $\varphi_2(\lambda) = \varphi(\lambda) + K = 0 + K = 0$, on a $K = 0$ ce qui termine la démonstration.

Correction de l'exercice 5700 ▲

(a) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t,x) = |x| + |t|$. f est continue et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En effet,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Remarquons que $x' \geq 0$ pour tout t et que pour tout point $(0, x_0$ passe une solution maximale unique (φ, J).

(b) Prenons $x_0 = 1$, lorque $t \geq 0$; l'équation devient

$$x't() = x(t) + t$$

car $|t| = t$ et $x(t) \geq x(0) > 0, x(0) = 1$. Elle admet comme solution sur $[0, +\infty[$ avec $\varphi(0) = 1$

$$\varphi(t) = 2e^t - t - 1.$$

Lorsque $t < 0$, on distingue deux cas : premier cas $x(t) \geq 0$; $x' = -t + x(t)$ et alors $x(t) = ce^t + t + 1$ avec $x(0) = 1$ d'où $c = 0$ et $\varphi(t) = t + 1$. Cela n'est valable que lorsque $\varphi(t) \geq 0$, c'est à dire $t \geq 1$. Donc $\varphi(t) = t + 1$

sur $[-1,1]$. Deuxième cas : $x(t) \leq 0$, ceci a lieu lorsque $t \leq -1$ car φ croissante et $\varphi(-1) = 0$. Nous avons alors $\varphi'(t) = -t - \varphi(t)$. D'où $\varphi(t) = ce^{-t} - t + 1$ or $\varphi(-1) = ce + 2 = 0$ d'où $c = -2e^{-1}$ et $\varphi(t) = -2e^{-t+1} - t + 1$ sur $]-\infty,-1]$. La solution maximale vérifiant $\varphi(0) = 1$ est la suivante :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - t - 1 \text{ sur } [0,+\infty[\\ t+1 \text{ sur } [-1,0] \\ -2e^{-(t+1)} - t + 1 \text{ sur }]-\infty,-1] \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 \text{ sur }]0,+\infty[\\ 1 \text{ sur }]-1,0[\\ 2e^{-(t+1)} - 1 \text{ sur }]-\infty,-1[\end{pmatrix}$$

En étudiant les limites de φ' aux point 0 et -1, on voit que φ' est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi''(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \text{ sur }]0,+\infty[\\ 0 \text{ sur }]-1,0[\\ -2e^{-(t+1)} \text{ sur }]-\infty,-1[\end{pmatrix}$$

φ n'est donc pas deux fois dérivable en 0 et -1.

Correction de l'exercice 5701 ▲

$f(t,x) = \frac{4t^3x}{t^4+x^2}$ (si $(t,x) \neq (0,0)$) est de classe C^∞ en tant que quotient, somme et produit de fonctions C^∞.

(a) $|f(t,x)| = |2t|.|\frac{2t^2x=}{(t^2)^2+x^2}| \leq 2|t| \to_{(t,x)\to 0} 0 = f(0,0)$. f est donc continue en $(0,0)$. f n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $(0,0)$ car sinon il existerait $k,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $t \in]-\alpha,\alpha[$, $x \in]-\beta,\beta[$ et

$$|f(t,x) - f(t,0)| \leq k|x-0|$$

D'où $\frac{4t^3x}{t^4+x^2} \leq kx \Rightarrow \frac{4t^3}{t^4+x^2} \leq k \to \frac{4}{t} \leq k, \forall t \in]0,\alpha[$ ce qui est absurde. Nous ne pouvons pas appliquer Cauchy-Lipschitz.

(b) (φ, I) solution de (2) avec $0 \notin I$,

$$\psi(t) = t^{-2}\varphi(t) \Rightarrow \psi'(t) = t^{-2}\varphi'(t) - 2t^{-3}\varphi(t)$$

$$\psi'(t) = 4t^{-2}\frac{t^3\varphi(t)}{t^4+\varphi^2(t)} - 2t^{-1}\psi(t)$$

d'où en exprimant tout en fonction de ψ :

$$\frac{\psi'(t)(1+\psi^2(t))}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{2}{t}$$

Or $\frac{1+\psi^2(t)}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}$ d'où

$$\psi'(t)(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}) = \frac{2}{t}$$

En intégrant par rapport à t on obtient :

$$ln|\frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)}| = ln(t^2) + c$$

d'où

$$\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)} = ct^2.$$

$\psi(t)$ vérifie est donc une racine de l'équation

$$ct^2\psi^2(t) + \psi(t) - ct^2 = 0$$

et donc

$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2}$$

d'où $\varphi = \frac{-1\pm\sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}$.

Correction de l'exercice 5702 ▲

(a) Posons $y_1 = x$, $y_2 = x' = y_1'$, $y_3 = x'' = y_2'$. L'équation devient $y_3' - y_1 y_3 = 0$ et donc en posant $f(t, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 y_3 \end{pmatrix}$ l'équation s'écrit

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = f(t, y_1, y_2, y_3).$$

(b) f étant de classe C^∞, elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (y_1, y_2, y_3) et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure.

(c) La dérivée de la fonction donnée est nulle. Par conséquent, elle est constante et donc, l'exponentielle étant strictement positive, le signe de φ'' est constant. Si cette constante est strictement positive, φ est convexe, si elle est strictement négative, φ est concave. Si elle est nulle $\varphi'' = 0$ et donc $\varphi(t) = at + b$ qui est bien une solution de l'équation différentielle et vérifie $\varphi''(t_0) = 0$. L'unicité montre que toutes les solutions qui vérifient $\varphi''(t_0) = 0$ sont bien de la forme $at + b$.

Correction de l'exercice 5717 ▲

(a) Montrons que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a,b] \subset]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Donc $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
- Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} (a - \frac{1}{n}) \leq x \leq \lim_{n \to +\infty} (b + \frac{1}{n}),$$

c'est-à-dire $x \in [a,b]$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\subset [a,b]$ et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.

(b) Montrons que $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset]a,b[$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset]a,b[$.
- Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Ainsi $x \in]a,b[$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset]a,b[$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Correction de l'exercice 5718 ▲

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrons que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq A \\ A & \text{si} \quad f(x) > A \end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}(]-\infty, -A[), \\ E_2 &:= \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leq A\} = f^{-1}([-A, A]), \\ E_3 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}(]A, +\infty[). \end{aligned}$$

Comme $]-\infty, -A[$, $[-A, A]$, $]A, +\infty[$ appartiennent à la tribu borélienne et f est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, les ensembles E_1, E_2, et E_3 appartiennent à Σ. Alors $f_A = f \cdot \mathbf{1}_{E_2} - A \cdot \mathbf{1}_{E_1} + A \cdot \mathbf{1}_{E_3}$ est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

Correction de l'exercice 5719 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \sharp E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien E, $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, donc f est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_f(t)\right) dt,$$

où $S_f(t) = \{n \in \Sigma, f(n) > t\}$. Pour tout $y \in [0, +\infty[$, posons $A_y := \{n \in \mathbb{N}, f(n) = y\}$. Alors

$$S_f(t) = \cup_{y > t} A_y$$

où l'union est disjointe et où A_y est vide sauf pour un ensemble dénombrable $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de valeurs de y. Par σ-additivité de la mesure μ,

$$\mu\left(S_f(t)\right) = \mu\left(\cup_{y_i > t} A_{y_i}\right) = \sum_{y_i > t} \mu\left(A_{y_i}\right) = \sum_{y_i > t} \mu\left(\{f = y_i\}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,d\mu &= \int_0^\infty \sum_{y_i>t}\mu(\{f=y_i\})\,dt = \sum_{i=0}^\infty \int_{0\le t<y_i}\mu(\{f=y_i\})\,dt\\ &= \sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\mu(\{f=y_i\}) = \sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\sharp\{n\in\mathbb{N}, f(n)=y_i\} = \sum_{n=0}^\infty f(n).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5720 ▲

Soit φ une fonction simple positive :

$$\varphi = \sum_{j\in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i\neq j$, $c_i\neq c_j$ et $E_i\cap E_j=\emptyset$.

(a) On a

$$\int_\Omega \varphi\,d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_\varphi(t)\right)dt,$$

où $S_\varphi(t)=\{x\in\Omega, \varphi(x)>t\}=\cup_{c_j>t}E_j$ et où $\mu\left(S_\varphi(t)\right)=\sum_{c_j>t}\mu\left(E_j\right)$. Ainsi

$$\int_\Omega \varphi\,d\mu = \int_0^\infty \sum_{c_j>t}\mu\left(E_j\right)dt = \sum_{j\in J}\int_0^{c_j}\mu\left(E_j\right)dt = \sum_{j\in J} c_j\mu(E_j).$$

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned}E_{k,n} &:= \{x\in\Omega,\ k2^{-n}\le f(x)<(k+1)2^{-n}\} \quad \text{pour} \quad k=0,\dots,n2^n-1,\\ E_{n,n} &:= \{x\in\Omega,\ f(x)\ge n\} \quad \text{pour} \quad k=n2^n.\end{aligned}$$

Puisque f est mesurable, les ensembles $E_{k,n}$ appartiennent à Σ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, les ensembles $E_{k,n}$, $0\le k\le n2^n-1$ sont deux à deux disjoints et $\cup_k E_{k,n}=\Omega$. Posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^{-n}-1} k2^{-n}\mathbf{1}_{E_{k,n}}.$$

Alors φ_n est une fonction simple positive vérifiant $\varphi_n\le f$. En outre $0\le\varphi_n(x)\le\varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=f(x)$ pour tout $x\in\Omega$.

Correction de l'exercice 5721 ▲

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré et $f\in\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Pour tout $E\in\Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A\cdot f\,d\mu.$$

Montrons que λ définit une mesure sur (Ω,Σ).

$1^{ère}$ *méthode :* On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 5720, toute fonction $f\in\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ s'écrit $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$, où les φ_n sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que λ est une mesure.

2^{de} *méthode :* On a clairement $\lambda(\emptyset)=0$. Il suffit donc de vérifier la σ-additivité de λ. Soit $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\,d\mu\\ &= \int_\Omega\left(\sum_{i=1}^\infty \mathbf{1}_{E_i}\right) f\,d\mu = \int_\Omega\sum_{i=1}^\infty\left(\mathbf{1}_{E_i}f\right)d\mu\\ &= \sum_{i=1}^\infty\int_\Omega(\mathbf{1}_{E_i}f)\,d\mu = \sum_{i=1}^\infty\int_{E_i} f\,d\mu\\ &= \sum_{i=1}^\infty \lambda(E_i).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5722 ▲

Soit $f\ :\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

(i) On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x)\,dx = \int_{|x|<1} |x|^{-p}\,dx = \int_{r=0}^{1}\int_{\sigma\in\mathscr{S}_{n-1}} r^{n-p-1}drd\sigma \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-p-1}\,dr.\end{aligned}$$

Pour $n \leq p$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty.$$

Pour $p < n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{r^{n-p}}{(n-p)}\right]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(ii) Pour $a \in [0,+\infty[$,

$$S_f(a) = \{x\in\mathbb{R}^n, |x|^{-p}\mathbf{1}_{|x|<1} > a\} = \{x\in\mathbb{R}^n, |x|^{-p} > a\}\cap\mathscr{B}(0,1),$$

où $\mathscr{B}(0,1)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a) = \{x\in\mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\}\cap\mathscr{B}(0,1).$$

On en déduit que $S_f(a) = \mathscr{B}(0,1)$ si $a^{-\frac{1}{p}} > 1$, i.e. si $a < 1$ et que $S_f(a)$ est égale à la boule $\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})$ de centre 0 et de rayon $a^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $a \geq 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}\mu\left(S_f(a)\right)\,da = \int_0^1 \mu\left(\mathscr{B}(0,1)\right)\,da + \int_1^{+\infty}\mu\left(\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})\right)\,da \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}}\,da.\end{aligned}$$

Si $p \geq n$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty$ et pour $p < n$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left[\frac{a^{-\frac{n}{p}+1}}{-\frac{n}{p}+1}\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(1+\frac{p}{n-p}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5723 ▲

cf Proposition 5.1. du polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 5724 ▲

Découle directement des définitions.

Correction de l'exercice 5725 ▲

(a) Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Alors $f_k = \sum_{n=1}^k g_n$ est une suite croissante de $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. D'après le théorème de convergence monotone

$$\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)\,d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu.$$

(b) Posons $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Les g_n appartiennent à $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)\,d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu.$$

Or d'une part,

$$\int_\Omega g_n\,d\mu = \int_\Omega x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}\,dx = \frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-y}\,dy = \frac{1}{n^s}\Gamma(s),$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s).$$

D'autre part,
$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx,$$
d'où l'égalité cherchée.

Correction de l'exercice 5726 ▲

Oui, le théorème de convergence monotone ne dit pas que l'intégrale de f est finie. On a bien
$$+\infty = \int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} n.$$

Correction de l'exercice 5727 ▲

Non, le théorème de convergence monotone ne s'applique pas à une suite décroissante de fonctions positives.

Correction de l'exercice 5728 ▲

Non, la suite de fonctions n'est pas même monotone.

Correction de l'exercice 5729 ▲

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$
i.e. f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty}\inf \int_\Omega f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty}\inf -\int_0^n \frac{1}{n}\, d\mu = -1.$$
D'autre part $\int_\Omega f\, d\mu = 0$. Le lemme de Fatou ne s'applique pas car les fonctions f_n ne sont pas à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Correction de l'exercice 5730 ▲

(a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1 + \frac{x}{n})^n$ est une suite croissante et que $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{x^k}{k!},$$
où $\quad a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$

Les assertions suivantes sont vraies :

i) $a_{n+1,k} \geq a_{n,k}$. En effet, $\frac{n+1-l}{n+1} \geq \frac{n-l}{n}$ pour $l \in \mathbb{N}$ car $n^2 + n - l \cdot n \geq n^2 + n - l \cdot n - l$,

ii) $a_{n,k} < 1$ (évident) ;

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$.

Comme $a_{n+1,n+1} > 0$, $\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k} \frac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k} \frac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\left\{\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$
et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

(b) Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b > 1$,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} d\lambda(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} d\lambda(x) \\ &= \textstyle\int_0^\infty e^{(1-b)x} d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5731 ▲

On a
$$\mu\left(f=+\infty\right)=\mu\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{f\geq n\}\right).$$
Puisque les ensembles $A_n:=\{f\geq n\}$ vérifient $A_1\supset A_2\supset A_3\ldots$ et $\mu(A_i)<+\infty$ $(i=1,2,\ldots)$, par continuité de la mesure, on a :
$$\mu\left(f=+\infty\right)=\lim_{n\to+\infty}\mu\left(f\geq n\right).$$
Or, comme f est à valeurs positives, les fonctions f_n définies par $f_n=n\mathbf{1}_{\{f\geq n\}}$ vérifient $f_n\leq f$. Ainsi
$$\int_\Omega f_n\,d\mu=\int_\Omega n\mathbf{1}_{\{f\geq n\}}\,d\mu=n\mu\left(f\geq n\right)\ \leq\ \int_\Omega f\,d\mu<+\infty.$$
On en déduit que
$$\mu\left(f\geq n\right)\ \leq\ \frac{1}{n}\int_\Omega f\,d\mu\to 0,$$
donc
$$\mu\left(f=+\infty\right)=0.$$

Correction de l'exercice 5732 ▲

Puisque $\mu(\Omega)<+\infty$, la fonction constante égale à C est intégrable, d'intégrale $C\mu(\Omega)$. Une application directe du théorème de convergence dominée donne
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu=\int_\Omega f\,d\mu.$$

Correction de l'exercice 5733 ▲

Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Comme $\cos(\pi x)<1$ si $x\notin\mathbb{Z}$, $\cos^n(\pi x)\to 0$ lorsque $n\to\infty$ presque partout (pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Notons $f_n(x)=f(x)\cos^n(\pi x)$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $|f_n(x)|\leq|f(x)|$ et comme $|f|\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,
$$\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R}f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R}f_n(x)d\lambda(x)=\int_\mathbb{R}\lim_{n\to\infty}f_n(x)d\lambda(x)=0.$$

Correction de l'exercice 5734 ▲

(a) Par définition, $f\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ si et seulement si f_+ et f_- sont intégrables. On note que $|f|=f_++f_-$. Donc $f\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)\Rightarrow|f|\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Réciproquement, on a $0\leq f_\pm\leq|f|$, donc $|f|\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)\Rightarrow f\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. D'autre part :
$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\ =\ \left|\int_\Omega f_+\,d\mu-\int_\Omega f_-\,d\mu\right|\ \leq\ \int_\Omega f_+\,d\mu+\int_\Omega f_-\,d\mu\ =\ \int_\Omega|f|\,d\mu.$$

(b) Par monotonie de l'intégrale, on a
$$\int_\Omega|f|\,d\mu\ \leq\ \int_\Omega|g|\,d\mu<+\infty.$$
D'après la question (a), il en découle que f est intégrable.

(c) Définissons $z=\int_\Omega f\,d\mu$. Comme z est un nombre complexe, il s'écrit $z=|z|e^{i\theta}$. Soit u la partie réelle de $e^{-i\theta}f$. On a $u\leq|e^{-i\theta}f|=|f|$. Donc
$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\ =\ e^{-i\theta}\int_\Omega f\,d\mu\ =\ \int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu\ =\ \int_\Omega u\,d\mu\ \leq\ \int_\Omega|f|\,d\mu,$$
où la troisième égalité découle du fait que le nombre $\int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu$ est réel donc est l'intégrale de la partie réelle de $e^{-i\theta}f$ c'est-à-dire de u.

Correction de l'exercice 5735 ▲

On cherche une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour μ-presque tout $x\in\Omega$, étant donné un $\varepsilon>0$, il existe un $k\in\mathbb{N}$ (dépendant à priori de x) vérifiant $j\geq k\Rightarrow|f_{n_j}(x)-f(x)|<\varepsilon$. Il suffit de montrer que pour μ-presque tout x, il existe un $k\in\mathbb{N}$ tel que $j\geq k\Rightarrow|f_{n_j}(x)-f(x)|<\frac{1}{2^j}\leq\frac{1}{2^k}$. Cela revient à montrer que le complémentaire de l'ensemble
$$A:=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j\geq k}\left\{|f_{n_j}-f|<\frac{1}{2^j}\right\}$$

est de mesure nulle. Or

$$A^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j\geq k} \left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\}.$$

Posons $B_k := \bigcup_{j\geq k} \left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\}$. On a $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots$ avec B_1 de mesure fini ; donc par continuité de la mesure, il vient :

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k).$$

Par σ-additivité, on a :

$$\mu(B_k) \leq \sum_{j\geq k} \mu\left(\left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\} \right).$$

On définit alors la sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Puisque f_n converge vers f en mesure, il existe un indice n_1 tel que pour $n \geq n_1$,

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{2} \right\} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Il existe un indice $n_2 > n_1$ tel que pour $n \geq n_2$,

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{2^2} \right\} \right) \leq \frac{1}{2^2},$$

et ainsi de suite : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $n_k > n_{k-1}$, tel que pour $n \geq n_k$

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pour cette sous-suite on a alors :

$$\mu(B_k) \leq \sum_{j\geq k} \mu\left(\left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\} \right) \leq \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

On a bien

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = 0.$$

Correction de l'exercice 5736 ▲

La fonction de Dirichlet restreint à l'intervalle $[a,b]$, $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\Big|_{[a,b]}(x)$, est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 0. Mais elle n'est pas intégrable au sens de Riemann : $\underline{S}(f,\tau) = 0$ et $\overline{S}(f,\tau) = b-a$ pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a,b]$.

Correction de l'exercice 5737 ▲

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

En effet, comme $\ln y \leq y-1$ pour $y > 0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leq y^{-\frac{1}{n}} - 1$, c'est-à-dire $\left(1 - \frac{\ln y}{n}\right)^n \leq y^{-1}$. Ainsi, en posant $x = \ln y$, il vient $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)},$$

où $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.

Posons $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbf{1}_{[0,n]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^m dx = m!$, on obtient le résultat.

(b) Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathbf{1}_{[0,n]}$. Comme la suite $\{f_n(x)\}$ est croissante et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Correction de l'exercice 5738 ▲

Cf le théorème 24.2 dans le polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 5739 ▲

(a) Notons $g(x,y) = e^{-ixy} f(x)$. Alors,

i.) pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est mesurable ;

ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (pour tout les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est finie) la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est continue pour tout $y \in \mathbb{R}$;

iii.) $|g(x,y)| = |e^{-ixy}f(x)| \leq |f(x)|$ et $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.

On doit montrer que pour tout suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y, on a $\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) = \hat{f}(y)$. Posons $g_n(x) = g(x,y_n)$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) \ := \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx =: \hat{f}(y).$$

Ainsi $\hat{f}$ est continue.

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixy}f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_{L_1}$ et donc

$$\sup|\hat{f}| \leq \|f\|_{L_1}.$$

(c) Soit $g(x,y) = e^{-ixy}f(x)$. Alors, on a

i.) pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est intégrable ;

ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est dérivable pour tout $y \in \mathbb{R}$;

iii.) $|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}| = |-ixe^{-ixy}f(x)| \leq |xf(x)|$ avec $x \mapsto xf(x)$ intégrable.

Ainsi, d'après l'exercice 5738 (le théorème de dérivation sous le signe $\int$), on a

$$\frac{d}{dy}\hat{f} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}(-ixf(x))dx = \widehat{-iyf(y)}.$$

Correction de l'exercice 5740 ▲

On a

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dy$$
$$= -\int_{-1}^{1}\frac{2}{(1+y^2)}dy = -2\arctan y\Big|_{-1}^{1} = -\pi.$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{2}{(x^2+1)}dx = 2\arctan x\Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Fubini car la fonction f n'appartient pas à $\mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$. En effet, soit $S_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}$. On a

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]}|f|d\mu \geq \int_{S_\varepsilon}|f|d\mu = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta = -4\log\varepsilon \to \infty$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, et donc $f \notin \mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$.

Correction de l'exercice 5741 ▲

Le théorème de Tonelli donne :

$$\int_{[0,1]\times(0,+\infty)}|e^{-y}\sin 2xy|\,dxdy \leq \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1 < +\infty,$$

ce qui prouve que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$.
Le théorème de Fubini donne alors la valeur I de l'intégrale de cette fonction :

$$I = \int_0^1 dx\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin 2xy\,dy \overset{\text{(IPP)}}{=} \int_0^1 (2x)(1+4x^2)^{-1}\,dx = \frac{\log 5}{4}$$
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy\int_0^1 \sin 2xy\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,\frac{\sin^2 y}{y}\,dy.$$

Correction de l'exercice 5742 ▲

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. L'identité $f*g(x) = g*f(x)$ s'obtient par changement de variable. En ce qui converne l'inégalité $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p$, on distingue les cas en fonction de la valeur de p.

(a) Pour $p=+\infty$, c'est clair.

(b) Supposons que $p=1$ et posons $F(x,y)=f(x-y)\,g(y)$. Pour presque tout $y\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx=|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx=|g(y)|\cdot\|f\|_1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}dy\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx=\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

D'après le théorème de Tonelli, $F\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dy<+\infty\qquad\text{pour presque tout }\ x\in\mathbb{R}^n,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dy\leq\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Ainsi,

$$\|f*g\|_1=\int_{\mathbb{R}^n}dx|f*g(x)|=\int_{\mathbb{R}^n}dx\left|\int_{\mathbb{R}^n}F(x,y)\,dy\right|\leq\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

(c) Supposons que $1<p<+\infty$. Utilisons le cas précédent, en faisant jouer ici à g^p le rôle alors joué par g. Alors pour presque tout $x\in\mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $y\mapsto|f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, i.e. la fonction $y\mapsto|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit p' tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. La fonction $y\mapsto|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ car $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translation. D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x-y)|\,|g(y)|=|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|\cdot|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,|g(y)|\leq\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,|g(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

ainsi

$$|(f*g)(x)|^p\leq(|f|*|g|^p)(x)\cdot\|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

D'après le cas précédent, on voit que

$$f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)\quad\text{et}\quad\|f*g\|_p^p\leq\|f\|_1\|g\|_p^p\cdot\|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

c'est-à-dire

$$\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\cdot\|g\|_p.$$

Correction de l'exercice 5743 ▲

Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x)=e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x)=e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. On a

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\,g(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\left(\frac{a|x-y|^2+b|y|^2}{2}\right)}\,dy$$

Or

$$\begin{aligned}
a|x-y|^2+b|y|^2&=\sum_{i=1}^n ax_i^2+(a+b)y_i^2-2ax_iy_i\\
&=\sum_{i=1}^n ax_i^2+(a+b)\left(y_i-\frac{a}{a+b}x_i\right)^2-(a+b)\left(\frac{ax_i}{a+b}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^n\left(a-\frac{a^2}{a+b}\right)x_i^2+(a+b)\left(y_i-\frac{a}{a+b}x_i\right)^2\\
&=\frac{ab}{a+b}|x|^2+(a+b)\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f*g(x)=e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{(a+b)}{2}|y-\frac{a}{a+b}x|^2}\,dy=e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{(a+b)}{2}|z|^2}\,dz$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. En utilisant $\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$, on obtient alors :

$$f*g(x)=\left(\frac{2\pi}{a+b}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}.$$

Correction de l'exercice 5744 ▲

(a) Pour tout $t>0$, on pose :

$$f_t(x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

i. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\,dx_i.\end{aligned}$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx=1.$$

ii. Soit $\varepsilon>0$. Puisque f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, il existe un $R>0$ tel que

$$\int_{\mathscr{B}(0,R)^c} f_1(x)\,dx<\varepsilon.$$

On remarque que $f_t(x)=t^{-\frac{n}{2}}f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(x)\,dx &= \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} t^{-\frac{n}{2}}f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)dx=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,t^{\frac{n}{2}}\,dz\\ &= \int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,dz\le\varepsilon,\end{aligned}$$

dès que $t<\frac{\delta^2}{R^2}$.

(b) Soit g une fonction continue bornée. Alors il existe $M>0$ tel que $|g|<M$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_t(x-y)\,g(y)|\,dy\le M\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y)\,dy=M<+\infty,$$

ainsi $y\mapsto f_t(x-y)\,g(y)$ est intégrable et f_t*g est bien définie. Puisque $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx=1$, on a

$$\begin{aligned}|f_t*g(x)-g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x-y)\,dy-\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x)\,dy\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque g est continue en $x\in\mathbb{R}^n$, il existe $\delta>0$ tel que $|y|<\delta\Rightarrow|g(x-y)-g(x)|<\varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}|f_t*g(x)-g(x)| &\le \int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy\\ &\quad+\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy\\ &\le \varepsilon\int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,dy+2M\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy\\ &\le \varepsilon+2M\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy.\end{aligned}$$

D'après la question 1.(b), il existe $t_0>0$ tel que pour $t<t_0$, $\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy\le\frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi pour $t<t_0$,

$$|f_t*g(x)-g(x)|<2\varepsilon,$$

i.e.

$$\lim_{t\to0} f_t*g(x)=g(x).$$

Correction de l'exercice 5745 ▲

Soient $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

(a) On a $\|\hat{g}\|_\infty\le\|g\|_1$, ce qui implique que $f\hat{g}$ est intégrable. De même $\hat{f}g$ est intégrable. De plus $F(x,y)=f(x)g(y)e^{-2\pi i(x,y)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx\,f(x)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i(x,y)}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy\,g(y)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x,y)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)g(y)\,dx.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(y)\,e^{-2\pi i(x,y)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy\,e^{-2\pi i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,g(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y-z)} e^{-2\pi i(x,z)} f(y-z)\,g(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)} f(u)\,du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)}\,g(z)\,dz \\
&= \hat{f}(x)\,\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5746 ▲

Supposons tout d'abord $n=1$. Soit la gaussienne définie pour $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-\frac{ax^2}{2}}$, où $a>0$. Posons

$$h(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx}\,dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\,dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée, h est dérivable et

$$\begin{aligned}
h'(t) &= -2\pi i\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\,dx=\left[2\pi i\frac{1}{a}e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}+(2\pi i)^2t\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\,dx \\
&= -(2\pi)^2\frac{1}{a}t\cdot h(t).
\end{aligned}$$

De plus,

$$h(0)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.$$

La solution de l'équation différentielle $h'(t)=-(2\pi)^2\frac{1}{a}t\cdot h(t)$ avec condition initiale $h(0)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ est

$$h(t)=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{t^2}{2}}.$$

Pour $n>1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(t,x)}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{a|x|^2}{2}}e^{-2\pi i(t,x)}\,dx \\
&= \prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax_i^2}{2}}e^{-2\pi it_ix_i}\,dx_i=\prod_{i=1}^n h(t_i)=\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{|t|^2}{2}}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5747 ▲

- Si K est le support de f, $f*g(x)=\int_K f(t)g(x-t)\,dt$ est bien défini. De plus, $|f*g(x)-f*g(y)|\leq\int_K|f(t)||g(x-t)-g(y-t)|\,dt\leq C\|f\|_{L^1}|x-y|^\alpha$, d'où le résultat. Si g est dérivable, alors $f*g$ aussi et $(f*g)'=f*(g')$. Donc si $g\in C^{k,\alpha}$, $f*g\in C^k$ et sa dérivée k-ième étant $f*(g^{(k)})$, elle est höldérienne par le même argument.
- Même argument ; les produits de convolution sont bien définis et bornés car $f\in L^1$ et les dérivées de g sont dans L^∞.

Correction de l'exercice 5748 ▲

(a) Soit $a,b\geq 0$ et soit $p,q\in(1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La fonction $\theta\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définit par $\theta(a)=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab$ est dérivable et :

$$\theta'(a)=a^{p-1}-b.$$

Cette dérivée s'annule lorsque $a=b^{\frac{1}{p-1}}$, est négative pour $a<b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a>b^{\frac{1}{p-1}}$. On a

$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}})=\frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}b^q-b^{1+\frac{1}{p-1}}=0.$$

Ainsi $\theta(a)\geq 0$, i.e.

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

(b) Soit $f\in L^p(\mu)$ et $g\in L^q(\mu)$. D'après la question précédente, pour tout $\lambda>0$ et pour μ-presque tout x :

$$|fg|(x)=|\lambda f(x)\cdot\frac{g(x)}{\lambda}|\leq\frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p+\frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

Ainsi

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \le \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$

Posons

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$

La fonction Φ est dérivable et :

$$\Phi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\|f\|_p^p - \lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$

Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1 := \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda \le \lambda_1$ et positive pour $\lambda \ge \lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1) &= \frac{1}{p}\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{-\frac{q}{p+q}}\|g\|_q^q\\ &= \frac{1}{p}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \frac{1}{q}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} = \|f\|_p\,\|g\|_q.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \le \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\,d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \le \|g\|_\infty \|f\|_1$.

(c) Soient $p, p' \in [1,+\infty)$. On suppose $p < p'$. Soit $p < r < p'$. On a

$$|f|^r = |f|^r\mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^r\mathbf{1}_{|f|<1} \ \le\ |f|^{p'}\mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^p\mathbf{1}_{|f|<1}.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega |f|^r\,d\mu \ \le\ \int_\Omega |f|^{p'}\,d\mu + \int_\Omega |f|^p\,d\mu \ < +\infty,$$

donc f appartient à $L^r(\mu)$.

(d) Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_\Omega |f|^p\,d\mu \ \le\ \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1\,d\mu \ =\ \|f\|_\infty^p\mu(\Omega) \ <\ +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à l'intersection $\bigcap_{p\ge 1} L^p(\mu)$. De plus, pour tout p, on a :

$$\|f\|_p \ \le\ \|f\|_\infty\,\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p \ \le\ \|f\|_\infty.$$

D'autre part, pour tout $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, on a

$$\int_\Omega |f|^p\,d\mu \ \ge\ \int_{|f|>(\|f\|_\infty-\varepsilon)} |f|^p\,d\mu \ \ge\ (\|f\|_\infty-\varepsilon)^p\,\mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty-\varepsilon)\Big).$$

Ainsi pour tout p, il vient

$$\|f\|_p \ \ge\ (\|f\|_\infty-\varepsilon)\,\mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty-\varepsilon)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $\lim_{p\to+\infty}\mu\,(|f| > (\|f\|_\infty-\varepsilon))^{\frac{1}{p}} = 1$, il en découle que

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p \ \ge\ \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p \ \ge\ \|f\|_\infty,$$

donc finalement $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(e) Posons $f_1 := f^r$ et $g_1 := g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\mu)$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\mu)$. Notons que l'identité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Hölder on a donc

$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1\,d\mu \le \left(\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}}d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_\Omega g_1^{\frac{q}{r}}d\mu\right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_\Omega g^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}}.$$

D'où, finalement,

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

Correction de l'exercice 5749 ▲

(a) *Cas de $L^\infty(\mu)$.*

i. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k,m,n \geq 1$, soient les ensembles

$$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}\ ; \quad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\},$$

et $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$. Par définition de la norme infinie, les ensembles A_k et $B_{n,m}$ sont de mesure nulle. Par σ-sous-additivité de μ, on a

$$\mu(E) \leq \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

ii. Sur $\Omega \setminus E$, on a :

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

i.e. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $\Omega \setminus E$. En particulier, pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc est convergeante car $\mathbb{R}$ est complet. Notons f la limite ponctuelle de f_n sur $\Omega \setminus E$. Montrons que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le complémentaire de E. On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε tel que pour $n,m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Alors pour $n > N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Il est découle que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus E$.

iii. Étendons la fonction f à Ω en posant $f = 0$ sur E. Il reste à montrer que la fonction f appartient à $L^\infty(\mu)$. Pour $n > N_\varepsilon$, et $x \in \Omega \setminus E$, on a

$$|f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon < +\infty$. Ainsi $L^\infty(\mu)$ est complet.

(b) *Cas de $L^p(\mu)$.*

i. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Il existe n_1 tel que pour $n,m \geq n_1$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-1}$. On prend ensuite $n_2 > n_1$ tel que pour $n,m \geq n_2$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-2}$, et ainsi de suite, pour tout k, il existe un $n_k > n_{k-1}$ tel que $n,m \geq n_k \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < 2^{-k}$.

ii. Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

où g est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\|g_k\|_p = \|\sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|\ \|_p.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1.$$

D'après le lemme de Fatou, on en déduit que $\|g\|_p \leq 1$.

iii. Comme $\int_\Omega |g|^p\, d\mu < +\infty$, nécessairement $|g| < +\infty$ μ-pp, i.e. pour presque tout $x \in \Omega$ la série

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

est absolument convergente. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. On a :

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

et $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k} \quad \mu - \text{pp}.$

iv. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\mu)$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour $n,m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Pour $m > N_\varepsilon$ on a par le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu = \int_\Omega |\lim_{k\to+\infty} f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty}\inf \int_\Omega |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p.$$

Ainsi $f - f_m \in L^p(\mu)$ et $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. De plus, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f\|_p = \|(f - f_m) + f_m\|_p \leq \|(f - f_m)\|_p + \|f_m\|_p < +\infty,$$

c'est-à-dire $f \in L^p(\mu)$. En conclusion $L^p(\mu)$ est complet.

Correction de l'exercice 5750 ▲

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. La fonction $\varphi(t) = |f(x) + \tan(x)|^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x) + \tan(x) + hg(x)|^p - |f(x) + \tan(x)|^p}{h} = p|f(x) + \tan(x)|^{p-2}(f(x) + \tan(x))g(x),$$

lorsque $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens, c'est-à-dire pour presque tout x. De plus, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\frac{|f(x) + \tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t} = \varphi'(t_0) = p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-2}(f(x) + t_0 g(x))g(x),$$

pour un certain t_0 compris entre 0 et t. Ainsi pour $|t| \leq 1$,

$$\begin{array}{ll} \left|\frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}\right| & = p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-1}|g(x)| \\ & \leq p\,(|f(x)| + |g(x)|)^p \\ & \leq 2^{p-1}\, p\,(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{array}$$

où la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire et de la majoration $|g(x)| \leq (|f(x)| + |g(x)|)$, et où la deuxième inégalité provient de la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ pour $p > 1$ impliquant en particulier : $\left(\frac{u+v}{2}\right)^p \leq \frac{u^p}{2} + \frac{v^p}{2}$. Il en découle que $t \mapsto \frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}$ est uniformément bornée par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors de dériver sous le signe somme et

$$\frac{dN}{dt}_{t=0} = p\int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x)\, d\mu.$$

Correction de l'exercice 5751 ▲

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, notons $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f\ : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

(a) Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x)\,dx \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ainsi $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout p et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a par exemple :

$$\begin{array}{lll} \|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx & = & \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)\,dx \\ & \leq & \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1\,dx \\ & \leq & \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty. \end{array}$$

Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués $r = \frac{p}{q} > 1$ et $r' = \frac{p}{p-q}$:

$$\begin{array}{lll} \|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx & = & \left(\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\ & = & \|f\|_p^q\ \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}}, \end{array}$$

ce qui implique :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$

En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

(b) Montrons que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte. La fonction f_α appartient à $L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$ si et seulement $\alpha \leq 0$, et à $L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$ avec $p < +\infty$ si et seulement si

$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$

Soit $1 \leq q < p$, alors $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$. En particulier, $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$.

Correction de l'exercice 5752 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

(a) Montrons que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Comme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$

il existe un rang N tel que pour $n > N$, $|u_n|^q < 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞ et

$$\|u\|_\infty \leq \max\{u_0, \ldots, u_N, 1\}.$$

De plus, pour $n > N$, on a $|u_n|^p \leq |u_n|^q$ et

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \|u\|_q^q < +\infty,$$

ce qui implique que $\|u\|_p < +\infty$. En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

(b) La suite $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ appartient à ℓ^∞ pour tout $\alpha \geq 0$ et à ℓ^p avec $1 \leq p < +\infty$ si et seulement si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particulier la suite constante égale à 1 appartient à ℓ^∞ mais n'appartient à aucun ℓ^p pour $p < +\infty$. Soit $1 < q < p < +\infty$. Pour tout α tel que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la suite $u^{(\alpha)}$ appartient à $\ell^p \setminus \ell^q$. C'est le cas en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$. Ainsi l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte lorsque $q < p$.

Correction de l'exercice 5753 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) – La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $2\alpha p > n$.

– La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p\beta < n$.

– Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. La fonction

$$f(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$

vérifient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$. La fonction

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifient $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) – Soit $1 \leq q < p < +\infty$ et f_n une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$. Comme $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p,q}$, f_n est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc elle converge vers une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. De même, $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_{p,q}$, donc f_n converge vers une fonction $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_q$. De plus, il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers f presque-partout et il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers g presque-partout. Ainsi $f = g$ μ-p.p. et f_n converge vers $f = g$ dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.

– Soit r tel que $q < r < p$. Montrons que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. Puisque $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$, les réels $p' = \frac{p}{\alpha r}$ et $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$ sont conjugués. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x) \cdot |f|^{(1-\alpha)r}(x)\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)rq'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\
&\leq \|f\|_p^{\alpha r} \|f\|_q^{(1-\alpha)r},
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{(1-\alpha)}$. On peut également écrire $r=\beta q+(1-\beta)p$ avec $\beta\in]0,1[$ et appliquer Hölder avec les réels conjugués $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{1-\beta}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}|f|^{\beta q}(x)\cdot|f|^{(1-\beta)p}(x)\,dx\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^q(x)\,dx\right)^{\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p(x)\,dx\right)^{(1-\beta)},\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^{\frac{q\beta}{r}}\|f\|_p^{\frac{p(1-\beta)}{r}}$$

qui est l'inégalité cherchée car $\alpha=\frac{p\beta}{r}$ vérifie bien $\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{q}$.

– Si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ d'après l'inégalité précédente. En conclusion, $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ donc un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

(c) Soit $f\in L^p([0,+\infty[)\cap L^q([0,+\infty[)$ et h la fonction définie par $h(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}f(r)$. On notera p' le conjugué de p et q' le conjugué de q. Montrons que h appartient à $L^1([0,+\infty[)$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr &= \int_0^R\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr+\int_R^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr\\ \leq \left(\int_0^R r^{-\frac{p'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^R|f(r)|^p\,dr\right)^{\frac{1}{p}} &+ \left(\int_R^{+\infty}r^{-\frac{q'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_R^{+\infty}|f(r)|^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \left(\frac{1}{1-\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{1}{p'}}R^{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_p+\left(\frac{1}{\frac{q'}{2}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}R^{\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_q.\end{aligned}$$

En optimisant par rapport à R, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr \quad\leq\quad C_{p,q}\|f\|_p^{1-\gamma}\|f\|_q^{\gamma},$$

où, en posant $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ et $\beta=\frac{1}{q}-\frac{1}{2}$, on a $\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, et $C_{p,q}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha^\gamma\beta^{1-\gamma}}\left(1-\frac{p'}{2}\right)^{-\frac{1-\gamma}{p'}}\left(\frac{q'}{2}-1\right)^{-\frac{\gamma}{q'}}$.

Correction de l'exercice 5754 ▲

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

(a) Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[}f_n(x)g(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{2n}g(x)\,dx\to 0$$

quand $n\to+\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. D'autre part, f_n converge presque partout vers 0. Supposons que f_n converge fortement vers une fonction f dans $L^2([0,+\infty[)$. Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge presque-partout vers f, ce qui implique que $f=0$ est la seule limite possible. Or :

$$\|f_n\|_2=1$$

pour tout n, donc $\|f_n\|_2$ ne tend pas vers $\|f\|_2=0$ ce qui contredit le fait que f_n converge vers f dans $L^2([0,+\infty[)$.

(b) Pour $p>2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[}|f_n(x)|^p\,dx=\int_n^{2n}n^{-\frac{p}{2}}\,dx=n^{1-\frac{p}{2}}\to 0,$$

quand $n\to+\infty$ donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Correction de l'exercice 5755 ▲

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x)=\sqrt{n}\mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

(a) Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[}f_n(x)g(x)\,dx=\sqrt{n}\int_n^{n+\frac{1}{n}}g(x)\,dx\to 0$$

quand $n\to+\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. Comme f_n converge presque partout vers 0 on conclut comme précédemment que f_n ne converge pas fortement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ car

$$\|f_n\|_2=1.$$

(b) Pour $p<2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}}\,dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0,$$

donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Correction de l'exercice 5756 ▲

cf E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.118, American Mathematical Society (2001). (Pour la question 6, on peut utiliser la continuité du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Correction de l'exercice 5757 ▲

A l'aide des coordonnées sphériques, on a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-2\pi i(x,k)}\,dx \\
&= \\
&= \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} h(r)e^{-2\pi i r|k|\cos\theta} r^2 \sin\theta\,d\theta dr d\varphi \\
&= \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} h(r)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\pi i r|k|}e^{-2\pi i r|k|\cos\theta}\right) r^2\,d\theta dr \\
&= \\
&= \frac{1}{|k|}\int_0^{\infty} h(r) r\frac{1}{i}\left[e^{+2\pi i r|k|} - e^{-2\pi i r|k|}\right] dr \\
&= \\
&= \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi|k|r)\,dr.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5758 ▲

(a) i. cf cours.

ii. clair.

iii. Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ un suite quelconque d'ensembles m_*-mesurables. On pose $B_1=\emptyset$, $B_2=A_1$ et $B_j=\cup_{i=1}^{j-1}A_i$, pour $j\geq 2$. Soit Q un sous-ensemble de Ω. Montrons par récurrence que l'assertion (P_k) suivante est vérifiée pour tout $k\geq 1$:

$$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c \cap A_j).$$

– Pour $k=1$, (P_1) dit simplement que $m_*(Q)=m_*(Q\cap A_1^c)+m_*(Q\cap A_1)$. Ceci est une conséquence de la m_*-mesurabilité de A_1 et de fait que

$$m_*(Q) \leq m_*(Q\cap A_1^c) + m_*(Q\cap A_1)$$

(on applique la σ-sous-additivité de m_* à $C_1=Q\cap A_1^c$, $C_2=Q\cap A_1$ et $C_i=\emptyset$ pour $i\geq 3$.)

– Montrons que $(P_k)\Rightarrow(P_{k+1})$:
Puisque A_{k+1} est m_*-mesurable, on a :

$$m_*(Q\cap B_{k+1}^c) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1}^c) + m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1}).$$

Or $B_{k+1}^c\cap A_{k+1}^c = (B_{k+1}\cup A_{k+1})^c = B_{k+2}^c$. Ainsi :

$$m_*(Q\cap B_{k+1}^c) = m_*(Q\cap B_{k+2}^c) + m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1}). \tag{37}$$

Supposons que l'assertion (P_k) soit vérifiée, alors

$$m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j),$$

et d'après (37)

$$\begin{aligned}
m_*(Q) &= m_*(Q\cap B_{k+2}^c) + m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j) \\
&= m_*(Q\cap B_{k+2}^c) + \sum_{j=1}^{k+1} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j),
\end{aligned}$$

qui n'est autre que (P_{k+1}).

– En conclusion, comme (P_1) est vrai et $(P_k)\Rightarrow(P_{k+1})$, il en découle que l'assertion (P_k) est vraie pour tout $k\geq 1$.

iv. Comme $B_{k+1} \subset A$, on a $Q \cap B_{k+1}^c \supset Q \cap A^c$ et, par monotonie de m_*,

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) \geq m_*(Q \cap A^c).$$

La condition (P_k) entraîne alors que pour tout k :

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

Donc, en faisant tendre k vers $+\infty$:

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

v. On a : $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(Q \cap B_j^c \cap A_j)$ et par σ-sous-additivité de m_* :

$$\begin{aligned} m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) &= m_*(Q \cap A^c) + m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(Q \cap B_j^c \cap A_j\right) \\ &\leq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &\leq m_*(Q). \end{aligned}$$

On en conclut que $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ est m_*-mesurable.

(b) i. cf cours.

ii. Soit $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments m_*-mesurables, deux à deux disjoints. Choisissons $Q = A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, alors $Q \cap A^c = \emptyset$ et $Q \cap B_j^c \cap A_j = A_j$ pour tout j. D'après la question 1.d),

$$m_*(Q) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

D'après la σ-sous-additivité de m_*, il vient :

$$m_*(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

(c) Soit E un ensemble m_*-mesurable tel que $m_*(E) = 0$ et B un sous-ensemble de E. Comme $Q \cap B^c \subset Q$, on a par monotonie de m_* l'inégalité $m_*(Q \cap B^c) \leq m_*(Q)$. Comme $Q \cap B \subset E$, on a aussi $m_*(Q \cap B) = 0$. On en déduit que

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap B^c) + m_*(Q \cap B).$$

Ainsi B est m_*-mesurable et m est complète.

Correction de l'exercice 5759 ▲

Il est clair que $m_*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, alors $m_*(A) \leq m_*(B)$, il faut donc uniquement démontrer que m_* est σ-sous-additive.

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$, fixons $\varepsilon > 0$ et notons $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Par définition de l'infimum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite $\{(a_i^n, b_i^n)\}$ telle que $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i^n, b_i^n[$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \leq m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Comme $A \subset \bigcup_{i,n}]a_i^n, b_i^n[$, on a

$$m_*(A) \leq \sum_{n,i} (b_i^n - a_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n).$$

On a donc la σ-sous-additivité $m_*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n)$ puisque ε est arbitraire.

Correction de l'exercice 5760 ▲

(a) Il est clair que $m_*(\emptyset)=0$ et que m_* est monotone.
Soit maintenant $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{P}(\Omega)$. Si parmi les A_i il existe au moins un ensemble A_j non vide, on a

$$m_*(\bigcup_i A_i)=1=m_*(A_j)\leq\sum_i m_*(A_i).$$

Si tous les A_i sont vides, alors $\bigcup_i A_i=\emptyset$, et donc

$$m_*(\bigcup_i A_i)=0=\sum_i m_*(A_i).$$

Ainsi m_* est σ-sous-aditive et par consequent m_* est une mesure extérieure.

(b) Les seuls ensembles mesurables sont $\emptyset$ et Ω, puisque si $A\in\mathscr{P}(\Omega)$ est tel que $A\neq\emptyset$ et $A\neq\Omega$, alors, pour tout $Q\in\mathscr{P}(\Omega)$ non vide et non inclus dans A, on a $A\cap Q\neq\emptyset$ et $A^c\cap Q\neq\emptyset$, et donc

$$m_*(A\cap Q)+m_*(A^c\cap Q)=1+1=2\neq m_*(Q)=\left\{\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right..$$

(c) Il est clair que l'ensemble des parties m_*-mesurables de Ω, $\mathscr{M}_{m_*}=\{\emptyset,\Omega\}$, est une σ-algèbre.
Il est facile de voir aussi que

$$\mu=m_*|_{\mathscr{M}_{m_*}},\ \mu(\emptyset)=0,\ \ \mu(\Omega)=1,$$

est une mesure sur $(\Omega,\mathscr{M}_{m_*})$.

Correction de **l'exercice 5761 ▲**

(a) Soit $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$. On a :

$$I^2=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

L'application $\Phi\ :\mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\geq0\}$ définie par :

$$\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\geq0\}}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

car l'ensemble $\{(x,0),x\geq0\}$ est négligeable. On en déduit que :

$$I^2=\int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi}e^{-r^2}r\,drd\theta=2\pi\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}=\pi.$$

Ainsi $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

(b) *Calcul de l'aire de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{S}_{n-1}=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{A}_{n-1}$ son aire. D'après la question précédente, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,dx_1\ldots dx_n=\pi^{\frac{n}{2}}.$$

D'autre part, puisque l'aire de la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ vaut $r^{n-1}\mathscr{A}_{n-1}$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,dx_1\ldots dx_n=\mathscr{A}_{n-1}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{n-1}\,dr.$$

En posant le changement de variable $x=r^2$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,dx_1\ldots dx_n=\frac{1}{2}\mathscr{A}_{n-1}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\frac{n}{2}-1}\,dx,$$

d'où :

$$\mathscr{A}_{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(c) *Calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}_n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\sum_{i=1}^n x_i^2\leq1\}$ la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{V}_n$ son volume. On a :

$$\mathscr{V}_n=\int_0^1 r^{n-1}\mathscr{A}_{n-1}\,dr=\mathscr{A}_{n-1}\left[\frac{r^n}{n}\right]_0^1=\frac{\mathscr{A}_{n-1}}{n}.$$

On en déduit que :

$$\mathscr{V}_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ce qui se réduit à :

$$\mathscr{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

en utilisant l'identité : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

(d) *Application :* L'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathscr{A}_1 R = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} R = 2\pi R,$$

qui est bien le périmètre du cercle de rayon R dans le plan.
Sachant $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, l'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\mathscr{A}_2 R^2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} R^2 = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R^2 = 4\pi R^2$$

qui est bien l'aire de la sphère S^2.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}$ vaut

$$\mathscr{V}_1 R = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} R = 2R,$$

qui est bien la longueur du segment $[-R,R]$.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathscr{V}_2 R^2 = \frac{2\pi}{2\Gamma(1)} R^2 = \pi R^2,$$

qui est bien l'aire du disque de rayon R.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\mathscr{V}_3 R^3 = \frac{\mathscr{A}_2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Correction de l'exercice 5762 ▲

(a) On a

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_n &= \int_{\mathscr{B}_n} dx_1 \dots dx_n = \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1 - x_1^2} dx_2 \dots dx_n \\ &= \mathscr{V}_{n-1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^{n-1} dx_1 \end{aligned}$$

Posons $x_1 = \cos\theta$, pour $\theta \in [0,\pi]$. Alors $\sqrt{1-x_1^2} = |\sin\theta| = \sin\theta$ et $dx_1 = -\sin\theta\, d\theta$. On a donc

$$\mathscr{V}_n = -\mathscr{V}_{n-1} \int_{\pi}^{0} (\sin\theta)^n d\theta = \mathscr{V}_{n-1} \int_{0}^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta = I_n \cdot \mathscr{V}_{n-1}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-1} \sin\theta\, d\theta = \\ &= \left[-\cos\theta(\sin\theta)^{n-1}\right]_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-2} (\cos\theta)^2\, d\theta = \\ &= (n-1)\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-2}(1-(\sin\theta)^2)\, d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Donc $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

(c) On a $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$. Donc $I_2 = \frac{\pi}{2}$, $I_3 = \frac{4}{3}$, $I_4 = \frac{3\pi}{8}$, $I_5 = \frac{16}{15}$, $I_6 = \frac{15\pi}{48}$, $I_7 = \frac{32}{35}$.
Comme $\mathscr{V}_1 = 2$ on trouve :

$$\mathscr{V}_2 = \pi,\ \mathscr{V}_3 = \frac{4\pi}{3},\ \mathscr{V}_4 = \frac{\pi^2}{2},\ \mathscr{V}_5 = \frac{8\pi^2}{15},\ \mathscr{V}_6 = \frac{\pi^3}{6},\ \mathscr{V}_7 = \frac{16}{105}\pi^3.$$

(d) On a $\mathscr{V}_n = \int_0^1 \int_{\mathscr{S}_{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \frac{1}{n}\mathscr{A}_{n-1}$, d'où $\mathscr{A}_{n-1} = n\mathscr{V}_n$. Donc on a

$$\mathscr{A}_1 = 2\pi,\ \mathscr{A}_2 = 4\pi,\ \mathscr{A}_3 = 2\pi^2,\ \mathscr{A}_4 = \frac{8}{3}\pi^2,\ \mathscr{A}_5 = \pi^3,\ \mathscr{A}_6 = \frac{16}{15}\pi^3.$$

Correction de l'exercice 5763 ▲

Voir le lemme 2.17 p.61 dans *Analysis* de E. Lieb et M. Loss, American Mathematical Society (2001).

Correction de l'exercice 5764 ▲

(a) Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que
- Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
- $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- I n'est pas dénombrable.

Supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Grâce à (a), pour chaque $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. On choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. On a $n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ donc $i = j$ par (b). Ainsi l'application $i \mapsto n(i)$ est injective. Par suite I est dénombrable ce qui contredit (c).

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$ où $\mathscr{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Soit la famille

$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$

où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ n'est pas dénombrable, donc (c) est vérifié. L'ensemble O_a est la boule ouverte de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en f_a. En particulier (a) est vérifié. Remarquons que lorsque $a \neq b$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe $f \in O_a \cap O_b$ avec $a \neq b$. Alors

$$\|f_a - f_b\|_\infty \leq \|f_a - f\|_\infty + \|f - f_b\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ce qui n'est pas possible. Donc (b) est vérifié. On en conclut que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Correction de l'exercice 5765 ▲

cf M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, graduate studies in mathematics, vol. 76, AMS, 2001, pages 50–51.

- Les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ sont introduits pour montrer que les ensembles $\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$ et $\{x \in \Omega, g(x) > 2\}$ sont de μ-mesure nulle (voir plus bas). En conséquence, la fonction $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ peut être choisie telle que $\frac{1}{2} \leq g \leq 2$. (On rappelle que $L^2(\Omega, \alpha)$ désigne l'ensemble des fonctions de carré-intégrables définies modulo les ensembles de mesure nulle.) Cela implique que la fonction h définie dans la question 3 est positive comme quotient de deux fonctions positives.
- Pour montrer que $\mu\left(\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}\right) = 0$, on peut utiliser par exemple la continuité de la mesure : on a $S_{11} \subset S_{12} \subset S_{13} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l} = \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$, ainsi
$$\mu\left(\left\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\right\}\right) = \mu\left(\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l}\right) = \lim_{l\to+\infty} \mu\left(S_{1l}\right) = 0.$$
De même, $S_{21} \subset S_{22} \subset S_{23} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{2l} = \{x \in \Omega, g > 2\}$, d'où $\mu\left(\{x \in \Omega, g > 2\}\right) = 0$.
- Pour montrer que l'on a l'égalité (11) du théorème pour toute fonction positive mesurable, on utilise le fait que les fonctions essentiellement bornées appartiennent à $L^2(\Omega, \alpha)$ (pour une mesure finie on a en effet $L^\infty(\Omega, \alpha) \subset L^2(\Omega, \alpha)$), donc l'égalité
$$\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu = \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.$$
de la question 2 est en particulier vérifiée pour toute fonction mesurable positive bornée. Soit maintenant une fonction f mesurable positive (non nécessairement bornée). Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $f_n = f\mathbf{1}_{\{f\leq n\}}$ donne :
$$\begin{aligned} \int_\Omega f(2g-1)\, d\nu &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2g-1)\, d\nu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(2g-1)\, d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(2-g)\, d\mu \\ &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2-g)\, d\mu \\ &= \int_\Omega f(2-g)\, d\mu. \end{aligned}$$
On en déduit que l'égalité (1) du théorème est vérifiée pour toute fonction F de la forme $F = f(2g-1)$, où $f \in \mathscr{M}^+$. Puisque $(2g-1) > 0$, l'ensemble des fonctions F de cette forme est également $\mathscr{M}^+$.

Correction de l'exercice 5766 ▲

(a) On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds$, montrons que

$$B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1}dr$$

En utilisant le changement de variable $1-r^2 \to s$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1}dr &= -\tfrac{1}{2}\int_1^0 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m-2}{2}}ds\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m}{2}-1}ds = \tfrac{1}{2}B\left(1+\tfrac{d}{2},\tfrac{m}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) Par le changement de variables $t \to t^2$ et $u \to u^2$ on a

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u}u^{b-1}\,du\right)\\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2a-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2b-1}\,du\right)\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'intégration en polaires on a

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)}t^{2a-1}u^{2b-1}\,dt\,du\\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2a-1}r^{2b-1}r\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi\right).\end{aligned}$$

Or, par le changement de variable $r^2 \to r$,

$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(a+b)-1}\,dr = \int_0^\infty e^{-r}r^{a+b-1}\,dr = \Gamma(a+b);$$

et par le changement de variable $u = \cos^2\varphi$,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = B(a,b).$$

Les trois dernières identités entraînent

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^\alpha}dx &= \int_0^{+\infty}\mu\left(\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha}>t\right)dt = \int_0^1 \mathrm{Vol}\left(\mathscr{B}\left(0,\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)dt\\ &= \mathscr{V}_n\int_0^1\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{n}{2}}dt = \mathscr{V}_n\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2\alpha}}\,dt\\ &= \alpha\mathscr{V}_n\int_0^1(1-s)^{\frac{n}{2}}s^{\alpha-\frac{n}{2}-1}ds = \alpha\mathscr{V}_nB\left(\alpha-\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5767 ▲

(a) Posons $\Omega = \mathbb{R}^n\setminus\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1}\geq 0\}$. Comme $0<\theta_{n-1}<2\pi$, l'image de Ω' par S est incluse dans Ω. Réciproquement, soit x un élément de Ω. Posons $r=|x|$, alors pour tout $i\in\{1,\dots,n-2\}$, on peut définir par récurrence $\theta_i\in(0,\pi)$ grâce à son cosinus :

$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{r\sin\theta_1\dots\sin\theta_{i-1}}.$$

Quant à θ_{n-1}, il est déterminé par son sinus et son cosinus. Comme $x_n\neq 0$ ou $x_{n-1}<0$, nécessairement $\theta_{n-1}\neq 0(\text{modulo } 2\pi)$.
L'application S est continûment différentiable, car chacune de ses composantes l'est. La matrice jacobienne a ses vecteurs colonnes orthogonaux, et de norme respectivement 1, r, $r\sin\theta_1$, ..., $r\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-2}$. Son déterminant vaut alors $r^{n-1}\left(\sin\theta_1\right)^{n-2}\dots\sin\theta_{n-2}$. Comme ce déterminant ne s'annule jamais, S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.

(b) C'est la formule du changement de variable.

(c) On a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{V}_4 & = & \int_{r=0}^{1}\int_{\theta_1=0}^{\pi}\int_{\theta_2=0}^{\pi}\int_{\theta_3=0}^{2\pi} r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2\, dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3\\
& = & 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left(\int_0^\pi \sin^2\theta_1 d\theta_1\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta_2 d\theta_2\right)\\
& = & \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta_1}{2} d\theta_1\right)[-\cos\theta_2]_0^\pi\\
& = & \frac{\pi^2}{2}.\\
\mathscr{A}_3 & = & \int_{\theta_1=0}^{\pi}\int_{\theta_2=0}^{\pi}\int_{\theta_3=0}^{2\pi}\sin^2\theta_1\sin\theta_2\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3\\
& = & 2\pi^2.
\end{array}$$

Correction de l'exercice 5768 ▲

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f\ :\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=g(|x|)$.

(a) Posons

$$I=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{g(|y|)}{|x-y|}\,dy,$$

et $r=|x|$, $s=|y|$. Alors $|x-y|=\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}$ où θ est l'angle entre l'axe (Ox) et l'axe (Oy). On considére les coordonnées sphériques de centre O et d'axe (Ox) suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
y_1 & = & s\cos\theta\\
y_2 & = & s\sin\theta\cos\varphi\\
y_3 & = & s\sin\theta\sin\varphi
\end{array}$$

On a

$$I=\int_{s=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{g(s)}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}}s^2\sin\theta\, ds d\theta d\varphi.$$

On note que

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}}=\frac{d}{d\theta}\frac{1}{rs}\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
I & = & 2\pi\int_{s=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{rs}\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\pi} g(s)s^2\, ds\\
& = & 2\pi\int_{s=0}^{+\infty}\frac{1}{rs}\left(\sqrt{(r+s)^2}-\sqrt{(r-s)^2}\right)g(s)s^2\, ds.
\end{array}$$

Lorsque $s\le r$, on a

$$\sqrt{(r+s)^2}-\sqrt{(r-s)^2}=(r+s)-(r-s)=2s,$$

et lorsque $s>r$, il vient

$$\sqrt{(r+s)^2}-\sqrt{(r-s)^2}=(r+s)-(s-r)=2r.$$

On en déduit alors :

$$I=\frac{4\pi}{r}\int_0^r g(s)s^2\, ds+4\pi\int_r^{+\infty}g(s)s\, ds.$$

(b) Lorsque g est à support dans $[0,R]$, le potentiel newtonien créé par la distribution de masse $f(y)=g(|y|)$ en un point $x\in\mathbb{R}^3$ tel que $|x|>R$, est identique au potentiel créé par une masse totale égale concentrée à l'origine.

Correction de l'exercice 5769 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}^d$, $d=1,2$ et $r=|x|$. On considère $f\ :\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x)=h(r)=r^2(1+r^2)^{-2}.$$

(a) La fonction h atteint son maximum en $r=1$ et $h(1)=\frac{1}{4}$. Pour un réel positif $t\le\frac{1}{4}$ donné, on cherche à résoudre $t=h(r)=r^2(1+r^2)^{-2}$. On obtient deux solutions

$$\begin{array}{rcl}
r_+ & = & \left(\frac{1-2t}{2t}+\frac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}}\\
r_- & = & \left(\frac{1-2t}{2t}-\frac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{array}$$

Ainsi $\mu(f>t)=\mathscr{V}_d\left(r_+^d-r_-^d\right)$. De plus, par définition, f^* vérifie $\mu(f^*>t)=\mu(f>t)$ et $\mu(f^*>t)=\mathscr{V}_d\, r^d$ où r et t sont liés par $t=f^*(r)$. Pour $d=1$, on a donc $r=r_+-r_-$ et t est donné par :

$$\begin{array}{rcl}
r^2 & = & r_+^2+r_-^2-2r_+r_-=\frac{1-2t}{t}-2\sqrt{\frac{(1-2t)^2}{4t^2}-\frac{1-4t}{4t^2}}\\
& = & \frac{1-4t}{t}.
\end{array}$$

Il en découle que $t=f^*(r)=(4+r^2)^{-1}$.

(b) Pour $d=2$, on a

$$r^2 = r_+^2 - r_-^2 = \frac{\sqrt{1-4t}}{t},$$

ce qui implique que

$$t = f^*(r) = r^{-4}\left(\sqrt{4+r^4}-2\right).$$

(c) Calculons $\|f\|_2^2$ pour $d=1$. On a

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_2^2 & = & \|f^*\|_2^2 \\ & = & 2\int_0^{+\infty}(4+r^2)^{-2}\,dr \\ & = & \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-2}\,ds \\ & = & \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = \frac{\pi}{16}, \end{array}$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 5766 (question 3.) sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = 2\mathscr{V}_1 B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 4\frac{\Gamma(3/2)^2}{\Gamma(3)} = 4\frac{(1/2\Gamma(1/2))^2}{2!} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $d=2$, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)^2\,dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} h(r)^2\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} r^5(1+r^2)^{-4}\,dr = \frac{\pi}{3},$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 5766 sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx = 4\mathscr{V}_6 B\left(4-\frac{6}{2},\frac{6}{2}+1\right) = 4\mathscr{V}_6 B(1,4),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\mathscr{S}^5}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr\,d\sigma = \mathscr{A}_5\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr \quad = \quad 4\frac{\mathscr{V}_6}{\mathscr{A}_5}B(1,4) = \frac{4}{6}\frac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5)}, = \frac{2}{3}\frac{3!}{4!} = \frac{1}{6}$$

Correction de l'exercice 5770 ▲

Soit $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a\in\mathbb{R}$. Par translation, le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f est donné par

$$f^*(x) = e^{\frac{a^2}{4}}e^{-x^2}.$$

Correction de l'exercice 5771 ▲

Soit $1\le p<+\infty$.

(a) Si f est continue à support compact dans la boule $\mathscr{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h|\le 1$, alors

$$|f(x-h)-f(x)|^p \quad\le\quad (|f(x-h)|+|f(x)|)^p \le \left(2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{\mathscr{B}(0,M+1)}\right)^p = \mathbf{1}_{B(0,M+1)}2^p\|f\|_\infty^p.$$

où $\mathscr{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

(b) Pour f continue, on a $\lim_{h\to0}|f(x-h)-f(x)|=0$. Puisque la fonction $g(x)=2^p\|f\|_\infty^p\mathbf{1}_{B(0,M+1)}(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale, et il vient :

$$\lim_{h\to0}\|\tau_h f - f\|_p^p = \lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{h\to0}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx = 0.$$

(c) Soit f une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<+\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f-f_\varepsilon\|_p\le\frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \|\tau_h f - f\|_p & = & \|\tau_h(f-f_\varepsilon)-(f-f_\varepsilon)+\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ & \le & \|\tau_h(f-f_\varepsilon)\|_p + \|f-f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ & = & 2\|f-f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ & = & \frac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p. \end{array}$$

Puisque f_ε est continue à support compact, d'après la question précédente, il existe $\delta>0$ tel que pour $|h|<\delta$, $\|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour $|h|<\delta$, on a $\|\tau_h f - f\|_p<\varepsilon$. En d'autre termes $\lim_{h\to0}\|\tau_h f - f\|_p = 0$.

(d) Pour $p=\infty$, les fonctions continues à support compact ne sont pas denses dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui fait que la démonstration précédente ne peut pas s'appliquer dans ce cas. De plus, on vérifie que, pour $f=\mathbf{1}_{B(0,1)}$ et $h\neq 0$, on a

$$\|\tau_h f - f\|_\infty = 1.$$

Alors que pour $h=0$, on a $\|\tau_h f-f\|_\infty=0$. On peut également vérifier que $\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_\infty=0$ si et seulement si la fonction f possède un représentant uniformément continu.

Correction de l'exercice 5772 ▲

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1\leq p<+\infty$.

(a) En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), on a

$$\begin{aligned}|\varphi_n * f - f|^p(x) &= |\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_n(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_n(y)\,dy|^p\\ &\leq (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)||\varphi_n(y)|\,dy)^p\,.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x)=|\varphi_n|(x)\,dx$, on a

$$\begin{aligned}|\varphi_n * f - f|^p(x) &\leq (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} 1^q\,d\nu(y))^{\frac{p}{q}}\,(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,d\nu(y))^{\frac{p}{p}}\\ &\leq (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n|(y)\,dy)^{\frac{p}{q}}\,(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy)\\ &\leq K^{\frac{p}{q}}\,(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy)\,.\end{aligned}$$

(b) On en déduit que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right)dx$$

D'après le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n * f - f\|_p^p &\leq K^{\frac{p}{q}}\textstyle\int_{y\in\mathbb{R}^n}(\int_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx)\,|\varphi_n|(y)\,dy\\ &\leq K^{\frac{p}{q}}\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\|\tau_y f-f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy.\end{aligned}$$

(c) Soit $\delta>0$, on a

$$\begin{aligned}&\|\varphi_n * f - f\|_p^p\\ \leq\ & K^{\frac{p}{q}}\left(\textstyle\int_{|y|\leq\delta}\|\tau_y f-f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy+\int_{|y|>\delta}\|\tau_y f-f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ \leq\ & K^{\frac{p}{q}}\left(\sup_{|y|\leq\delta}\|\tau_y f-f\|_p^p\textstyle\int_{|y|\leq\delta}|\varphi_n(y)|\,dy+\int_{|y|>\delta}\left(\|\tau_y f\|_p+\|f\|_p\right)^p|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ \leq\ & K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leq\delta}\|\tau_y f-f\|_p^p+\left(2\|f\|_p\right)^p\textstyle\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ \leq\ & K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leq\delta}\|\tau_y f-f\|_p^p+2^p\|f\|_p^p\textstyle\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right).\end{aligned}$$

(d) Soit $\varepsilon>0$. Par continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cf l'exercice précédent), il existe un $\delta>0$ tel que

$$|y|\leq\delta \quad\Rightarrow \|\tau_y f-f\|_p^p<\frac{K^{-\left(\frac{p}{q}+1\right)}}{2}\,\varepsilon.$$

D'après l'hypothèse (iii), il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n>N$, on a

$$\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy<\frac{K^{-\frac{p}{q}}}{2^{p+1}\|f\|_p^p}\,\varepsilon.$$

Ainsi pour tout $n>N$,

$$\|\varphi_n * f-f\|_p^p<\varepsilon,$$

i.e. $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n * f-f\|_p=0$.

Correction de l'exercice 5773 ▲

Voir E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.123, American Mathematical Society (2001).

Correction de l'exercice 5776 ▲

(a) A une partie non vide de $\mathbb{R}$, un *majorant* de A est un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in A \qquad x\leq M.$$

Si A est un partie non vide et majorée, alors par définition $\sup A$ est le plus petit des majorants. On a les propriétés suivantes :

i. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;
ii. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
iii. $\max(\inf A, \inf B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;
iv. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
v. $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

Prouvons les deux premières égalités,

i. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$: pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$ donc $a+b \leq \sup A + \sup B$, donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$ et comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$ alors $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$. Réciproquement, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tel que cette suite converge vers $\sup A$, de même il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $\sup B$, la suite $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc la borne supérieure de $A+B$ est plus grande que $\sup A + \sup B$, soit $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$. D'où l'égalité.

ii. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$: Remarquons d'abord que si $P \subset Q$ alors $\sup P \leq \sup Q$: en effet $\sup Q$ est un majorant de Q donc de P (par l'inclusion $P \subset Q$), donc le plus petit des majorants, $\sup P$, pour P est plus petit que le majorant particulier $\sup Q$. Appliquons ceci à $A \subset A \cup B$ donc $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et pour $B \subset A \cup B$ on obtient $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. On vient de prouver $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$. Pour l'autre inégalité : soit $M = \max(\sup A, \sup B)$. Pour $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \leq \sup A \leq M$, ou soit $x \in B$ et alors $x \leq \sup B \leq M$; donc quelque soit $x \in A \cup B$, $x \leq M$ donc M est un majorant de $A \cup B$, donc $\sup(A \cup B) \leq M = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) i. $d(0, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, regarder des éléments du type $\frac{\sqrt{2}}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$, c'est la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ou alors regarder la suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}), n \in \mathbb{N}$, qui est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.

iii. On suppose que $\mathscr{D}$ passe par l'origine, alors $d(M, \mathscr{D}) = x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz)^2$.

(c) $d(A,B) = 0$.

(d) $\mathrm{diam}(]0,1[\cap \mathbb{Q}) = 1 =$
$mathrmdiam([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

Correction de l'exercice 5777 ▲

(a) J_x est un ouvert non vide car c'est une union d'ouverts contenant x. De plus J_x est un intervalle car c'est une union d'intervalles contenant tous le point x. Donc J_x est un intervalle ouvert. On peut donc écrire $\mathscr{O} = \cup_{x \in \mathscr{O}} J_x$. Mais cette union n'est pas nécessairement dénombrable.

Tout d'abord si $z \in J_x$ alors $J_x = J_z$. En effet soit I un intervalle inclus dans $\mathscr{O}$ contenant x et z. Si $x' \in J_x$, soit J un intervalle inclus dans $\mathscr{O}$ contenant x et x'. Alors $I \cup J$ est un intervalle (car x est dans les deux intervalles I et J), $I \cup J$ est inclus dans $\mathscr{O}$ et contient x' et z. Donc $x' \in J_z$. Donc $J_x \subset J_z$. Enfin comme $z \in J_x$ on a aussi $x \in J_z$, donc on montrerait de même $J_z \subset J_x$. Donc $J_x = J_z$.

Pour $x, y \in \mathscr{O}$ alors $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. En effet supposons que $J_x \cap J_y \neq \varnothing$ et soit $z \in J_x \cap J_y$. Comme $z \in J_x$ alors $J_x = J_z$, comme $z \in J_y$ alors $J_y = J_z$. Donc $J_x = J_y$.

Pour chaque intervalle ouvert J_x il existe $q \in \mathbb{Q} \cap J_x$, avec bien sûr $J_x = J_q$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable $\mathscr{O} \cap \mathbb{Q}$ l'est aussi. On a ainsi écrit

$$\mathscr{O} = \bigcup_{q \in \mathscr{O} \cap \mathbb{Q}} J_q,$$

ce qui était demandé.

(b) Pour $\mathbb{R}^n$ on peut montrer le résultat suivant : tout ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme l'union dénombrable de boules ouverte. On considére J_x l'union des boules ouvertes de rayon rationnel centrées en x, ensuite on regarde seulement les x appartenant à $\mathscr{O} \cap \mathbb{Q}^n$. Par contrer on autorise deux boules à s'intersecter.

Correction de l'exercice 5778 ▲

(a) Soient $d = p + q\sqrt{2}$ et $d' = p' + q'\sqrt{2}$ deux éléments de D. Alors $d + d' = (p+p') + (q+q')\sqrt{2}$ est un élément de D et $dd' = (pp' + 2qq') + (pq' + p'q)\sqrt{2}$ aussi.

(b) On a $u < 1$ donc u^k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc pour $\varepsilon = b - a$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq n$ on a $u^k < \varepsilon = b - a$. En particulier $u^n < b - a$. Si on cherchait un réel alors $r = \frac{a}{u^n} + 1$ conviendrait, mais on cherche un entier, posons $m = E(\frac{a}{u^n}) + 1$. Alors $m - 1 \leq \frac{a}{u^n} < m$. L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. L'inégalité de gauche s'écrit aussi $mu^n - u^n \leq a$ soit $mu^n \leq a + u^n < a + b - a = b$ donc $a < mu^n < b$.

Déduisons de cela que D est dense dans $\mathbb{R}$: pour tout intervalle $[a,b]$, $a < b$ il existe m, n des entiers tels que $mu^n \in [a,b]$. Or mu^n est dans D car $u \in D$ donc par multiplication $u^n \in D$.

Correction de l'exercice 5779 ▲

(a) Cette exercice justifie la terminologie "boule fermée". Il s'agit de montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ensemble ouvert. Il est vivement conseillé de faire un dessin. Soit $C = E \setminus B'(a,r)$. Soit $x \in C$, on cherche une boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ contenue dans C. Comme $x \in C$, $x \notin B'(a,r)$ donc $d(a,x) > r$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < d(a,x) - r$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset C$: pour $y \in B(x,\varepsilon)$, l'inégalité triangulaire $d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x)$ donc $d(a,y) \geq d(a,x) - d(y,x) \geq d(a,x) - \varepsilon > r$. Comme $d(a,y) > r$ alors $y \notin B'(a,r)$ donc $y \in C$. Comme la preuve est valable quelque soit $y \in B(x,\varepsilon)$, donc $B(x,\varepsilon) \subset C$. Et donc C est un ouvert.

(b) Pour $a = (\frac{1}{2}, 0)$ et $r = \frac{1}{2}$ on a $B'(a,r) = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$, $B(a,r) =]0,1[\times \{0\}$ et $\overline{B(a,r)} = [0,1] \times \{0\}$.

Correction de l'exercice 5780 ▲

(a) On note $B = B(a,r)$, $B' = B'(a,r)$, $\bar{B} = \overline{B(a,r)}$. Il faut montrer $B' = \bar{B}$. B' est une boule fermée, donc un fermé contenant B, alors que $\bar{B}$ est le plus petit fermé contenant B, donc $\bar{B} \subset B'$.
Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B'$, il faut montrer $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \bar{B}$, supposons donc que $x \notin B$, alors $\|x - a\| = r$. Soit $B(x,\varepsilon)$ un boule centrée en x. x est adhérent à B si $B(x,\varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point
$$y = x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - a}{\|x - a\|}.$$
Faire un dessin et placer y sur ce dessin. D'une part $y \in B(x,\varepsilon)$ car $\|y - x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a,r)$ car $\|y - a\| = \|x - a - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x - a\|(1 - \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$. Donc $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, ce qui prouve que $B' \cap \bar{B}$.
Donc $B' = \bar{B}$.

(b) Pour le sens $\Leftarrow$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$ alors $\|x - b\| = \|x - a + a - b\| \leq \|x - a\| + \|a - b\| \leq r + R - r \leq R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.
Pour le sens $\Rightarrow$. Soit
$$x = a + r\frac{a - b}{\|a - b\|},$$
alors $\|x - a\| = r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$, donc $\|x - b\| \leq R$ or $\|x - b\| = \|a - b\| + r$ (c'est le même calcul que pour la question précédente). Donc $\|a - b\| + r \leq R$, soit $0 \leq \|a - b\| \leq R - r$ et en particulier $r \leq R$.

Correction de l'exercice 5781 ▲

(a)
   i. Si $||(x,y)|| = 0$ alors $\max(|x + y|, |x - 2y|) = 0$ donc $x + y = 0$ et $x - 2y = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$. Réciproquement $\|(0,0)\| = 0$.
   ii. $||\lambda.(x,y)|| = ||(\lambda x, \lambda y)|| = \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - 2\lambda y|) = |\lambda| \max(|x + y|, |x - 2y|) = |\lambda|.||(x,y)||$.
   iii. $\|(x,y) + (x',y')\| = \|(x + x', y + y')\| = \max(|x + x' + y + y'|, |x + x' - 2y - 2y'|) \leq \max(|x + y| + |x' + y'|, |x - 2y| + |x' - 2y'|) \leq \max(|x + y|, |x - 2y|) + \max(|x' + y'|, |x' - 2y'|) \leq ||(x,y)|| + ||(x',y')||$.

La boule unité fermée centrée à l'origine est la région du plan comprise entre les droites d'équations $x + y = +1$, $x + y = -1$, $x - 2y = +1$, $x - 2y = -1$.

(b) Sens $\Leftarrow$: Si $x \in B_q$ alors $q(x) \leq 1$ donc $p(x) \leq 1$ donc $x \in B_p$. Sens $\Rightarrow$: Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_q$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_p$ donc $p(\frac{x}{q(x)}) \leq 1$ soir $p(x) \leq q(x)$. Ceci étant aussi valable pour $x = 0$.
$B_q \subset 2B_p$ est équivalent à $p(x) \leq 2q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (attention au sens !). Et $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ est équivalent à $\frac{1}{2}q(x) \leq p(x)$. Si les deux inclusions sont vraies alors $\frac{1}{2}p \leq q \leq 2p$ et en particulier les normes p et q sont équivalentes.
Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ On a
$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

Correction de l'exercice 5782 ▲

(a) Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, pour chaque $p \geq 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$. (Il convient de garder la tête froide : on regarde des suites de suites !) Il faut montrer que Y est fermé dans X. Soit donc (x^p) une suite de Y qui converge vers $x \in X$. Il faut donc montrer qu'en fait $x \in Y$, c'est-à-dire que $x = (x(0), x(1), \ldots)$ est une suite tendant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ comme $x^p \to x$ alors il existe P tel que si $p \geq P$ on ait $d(x^p, x) < \varepsilon$. Par la définition de d on a pour $p \geq P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^p(n) - x(n)| < \varepsilon$. Fixons $p = P$, alors $x^P \in Y$ donc x^P est une suite tendant vers 0, donc il existe N tel que si $n \geq N$ alors $|x^P(n)| < \varepsilon$. Réunissons tout cela, pour $n \geq N$:
$$|x(n)| = |x(n) - x^P(n) + x^P(n)| \leq |x(n) - x^P(n)| + |x^P(n)| \leq 2\varepsilon.$$
Donc la suite x tend vers 0, donc $x \in Y$ et Y est fermé.

(b) Notons Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Pour $y = (y(0), y(1), y(2), \dots) \in Y$, définissons la suite $y^0 = (y(0), 0, 0, \dots)$, $y^1 = (y(0), y(1), 0, 0, \dots)$,... $y^p = (y(0), \dots, y(p-1), y(p), 0, 0, 0, \dots)$. La suite (y^p) est bien une suite d'éléments de Z. De plus $d(y^p, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y^p(n) - y(n)| = \sup_{n>p} |y(n)|$ or la suite $y(n)$ tend vers 0 donc $d(y^p, y)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

On montre facilement (par l'absurde) que l'élément $x = (1, 1, 1, \dots) \in X$ n'est limite d'aucune suite d'éléments de Z, (ni d'ailleurs de Y).

Correction de l'exercice 5783 ▲

Par l'inégalité triangulaire $|f(x) + f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$ on obtient $\|f\| \leq N(f)$. Pour une inégalité dans l'autre sens décomposons le travail :

- $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f\|$: en effet par l'inégalité triangulaire $|f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x) + f(x)|$.
- $\|f\|_\infty \leq \|f\|$: en effet f est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in [0,1]$ ce point du maximum. Si $x_0 \in]0,1[$ alors $f'(x_0) = 0$ donc $\|f\|_\infty = |f(x_0)| = |f(x_0) + f'(x_0)| \leq \|f\|$. Si $x_0 = 1$ alors f et f' ont même signe sur un intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ donc sur cet intervalle $|f(x)| \leq |f(x) + f'(x)|$ et donc $\|f\|_\infty = |f(1)| \leq \|f\|$. (Enfin $f(0) = 0$ donc si $x_0 = 0$ alors f est nulle et l'inégalité est triviale.)
- Il reste à rassembler les expressions :

$$N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f\| + \|f\|_\infty \leq 3\|f\|.$$

(La première inégalité vient du premier point et la deuxième du second.)

Les normes $\|f\|$ et $N(f)$ sont équivalentes :

$$\frac{1}{3} N(f) \leq \|f\| \leq N(f).$$

Correction de l'exercice 5785 ▲

(a) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ Par contre il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout f. Pour montrer ceci par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout f de $C([0,1], \mathbb{R})$. Regardons les fonctions f_k définies par $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0, \frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leq C.1$ ce qui est contradicoire pour k assez grand. Cela prouve que les normes ne sont pas équivalentes.

(b) Comme les métriques sont définies par des normes et que les normes ne sont pas équivalentes alors les métriques ne définissent pas la même topologie.

Correction de l'exercice 5786 ▲

(a) On montre facilement

$$N_1 \leq N_2 \leq 2N_1 \leq 2N_4 \leq 2N_3.$$

(b) Par contre il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leq CN_4$ ou $N_2 \leq CN_4$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $N_3 \leq CN_4$ on regarde f_k définie par $f_k(x) = x^k$, après calcul on obtient $N_3(f_k) = k+1$ et $N_4(f_k) = 2$, pour k suffisament grand on obtient une contradiction. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes on va prouver qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leq CN_1$. On prend g_k, définie par $g_k(x) = 1 + \sin(2\pi kx)$. Alors $N_1(g_k) = 2$ et $N_3(g_k) = 4k$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 5787 ▲

(a) i. Par exemple une suite constante $x_n = a$ pour tout n.

ii. Par exemple $x_n = \frac{1}{n}$ et $a = 0$.

iii. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable on peut trouver une suite x_n telle que $A = \{x_1, x_2, \dots\} = \mathbb{Q}$. On prend $a = \sqrt{2}$ alors $a \in \bar{A} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) C'est juste les définitions : un point d'accumulation de A est toujours une valeur d'adhérence de A.

Correction de l'exercice 5788 ▲

(a) (Correction pour $n = 1$, pour $n > 1$ remplacer les intervalles par des boules.) Comme 0 est isolé soit $I =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ un voisinage de 0 tel que $I \cap G = \{0\}$. Soit $g \in G$ et considérons $I_g = g + I =]g - \varepsilon, g + \varepsilon[$. Supposons, par l'absurde, que $I_g \cap G$ ne soit pas réduit à g. Alors il existe $g' \in I_g \cap G$, $g' \neq g$. Mais $g - \varepsilon < g' < g + \varepsilon$ et donc $g - g' \in I$ comme G est un groupe on a $g - g' \in G$ et on a $g - g' \neq 0$. On a donc trouvé un élément $g - g' \in G \cap I$ qui n'est pas 0. Ce qui est une contradiction.

Pour montrer que G est discret (c'est-à-dire G est dénombrable et ses points sont isolés) on remarque que la distance entre deux éléments de G est au moins ε donc pour $J_g =]g-\frac{\varepsilon}{2}, g+\frac{\varepsilon}{2}[$ on a $g \neq g'$ implique $J_g \cap J_{g'} = \varnothing$. Pour chaque $g \in G$ on choisit $q(g) \in \mathbb{Q} \cap J_g$, ce qui donne une application : $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $\Phi(g) = q(g)$, et Φ est injective, donc G est dénombrable.

Montrons que G est fermé : soit (g_n) une suite de G qui converge vers $g \in \mathbb{R}$. Pour N assez grand et pour tout $n \geq N$ on a $|g_n - g| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n \geq N$ on a $|g_n - g_N| \leq |g_n - g| + |g - g_N| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc comme $g_N \in J_{g_N}$ alors $g_n \in J_{g_N}$ également, or J_{g_N} ne contient qu'un seul élément de G donc $g_n = g_N$ pour tout $n \geq N$. La suite est donc stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang) donc la limite g vaut g_N et en particulier $g \in G$.

(b) Supposons $G \neq \{0\}$. Soit $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. Comme 0 est isolé alors $a > 0$. Comme G est fermé alors $a \in G$. Soit $g \in G$. Soit $k = E(\frac{g}{a})$ alors $k \leq \frac{g}{a} < k+1$. Donc $0 \leq g - ka < a$. Or $g - ka$ est dans G et dans $\mathbb{R}_+$, comme il est plus petit que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ alors nécessairement $g - ka = 0$, soit $g = ka \in a\mathbb{Z}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on cherche $g \in G \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Comme 0 est un point d'accumulation de G il existe $h \in G$ tel que $0 < h < \varepsilon$ pour $k = E(\frac{x}{h})$, on a $kh \leq x < kh + h$, donc $g = kh \in G \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

Pour un groupe G quelconque soit 0 est isolé, soit 0 est un point d'accumulation. Si en plus G est fermé alors soit $G = a\mathbb{Z}$ ou $G = \{0\}$, soit $\bar{G} = \mathbb{R}$ donc $G = \mathbb{R}$. Les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R}, +)$ sont donc 0, $\mathbb{R}$ et les $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

(d) Soit $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Si G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ alors, par les questions précédentes, il existe $a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. En particulier $1 \in G$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = ka$ de même $\alpha \in G$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = k'a$. Par division $\alpha = \frac{k'}{k}$. Ce qui contredit $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Donc $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définissons $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ (S^1 est le cercle de $\mathbb{C}$ des nombre complexes de module 1). Alors Φ est continue et surjective. Comme Φ est continue alors pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ on $\Phi(\bar{A}) \subset \overline{\Phi(A)}$. Appliqué à l'ensemble $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, on a $\bar{G} = \mathbb{R}$ donc $\Phi(\bar{G}) = S^1$ car Φ est surjective ; d'autre part $\Phi(G) = \{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Donc $S^1 = \Phi(\bar{G}) \subset \overline{\Phi(G)} = \overline{\{e^{2i\pi k\alpha}\}}$. L'adhérence de $\{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est donc le cercle S^1 tout entier.

Correction de l'exercice 5789 ▲

(a) définit une topologie.

(b) ne définit pas une topologie, car $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\}$ n'est pas dans la collection.

(c) ne définit pas une topologie, car $\{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$ n'est pas dans la collection.

Correction de l'exercice 5790 ▲

Il faut donc démontrer que la collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ contenant $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et tous les ensembles finis vérifie les propriétés d'une collection d'ensembles fermés :

- toute intérsection d'ensembles fermés est fermé ;
- toute réunion finie d'ensembles fermés est fermé ;
- $\emptyset$ et tout l'espace sont des fermés.

Les trois propriétés sont évidemment vérifiées dans ce cas.

La topologie ainsi définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas séparée. En effet deux ouverts non-vides Ω et Ω' sont sous la forme $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ et $\Omega' = \mathbb{R} \setminus F'$, où F, F' sont ou bien finis ou bien vides. Alors $\Omega \cap \Omega' = \mathbb{R} \setminus (F \cup F')$ n'est pas vide, car sinon ceci impliquerait que $\mathbb{R} = F \cup F'$ est finie ou vide, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 5791 ▲

(a) Supposons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{T}$, et soit $\mathscr{O}$ un ouvert arbitraire dans $\mathscr{T}$ et x un point de $\mathscr{O}$. L'ouvert $\mathscr{O}$ s'écrit comme $\mathscr{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathscr{B}$ pour tout $i \in I$. En particulier il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in B_{i_0}$.

(b) Réciproquement, si $\mathscr{O}$ est un ouvert arbitraire, pour tout point $x \in \mathscr{O}$ il existe un $B_x \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathscr{O}$. Par conséquent $\mathscr{O} = \bigcup_{x \in \mathscr{O}} B_x$.

(c) Il suffit de montrer la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_n$ et soit x un point arbitraire de $\mathscr{O}$. D'après le cours, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$. *Remarque.* Une autre mannière de formuler ceci est de dire que l'ensemble des boules ouvertes euclidiennes forme une base de la topologie $\mathscr{T}_n$.

Puisque l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit que $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ contient un vecteur $q \in \mathbb{Q}^n$. En particulier $\mathrm{dist}(x,q) < \frac{r}{2}$, d'où $B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r) \subset \mathscr{O}$.

L'intervalle $]\mathrm{dist}(x,q), \frac{r}{2}[$ est non-vide, donc il contient un nombre rationnel R. Ainsi $x \in B(q,R) \subset B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset \mathscr{O}$.

(d) Puisque $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}_n$, ce qu'il reste à démontrer est à nouveau la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathscr{O}$ un ouvert et $x \in \mathscr{O}$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$.

D'après le cours

$$\mathrm{dist}(y,x) = \|y-x\|_2 \leq \sqrt{n}\|y-x\|_\infty .$$

Il s'ensuit que

$$B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) = \left\{y \,;\, \|y-x\|_\infty < \frac{r}{\sqrt{n}}\right\} \subset B(x,r) \subset \mathscr{O} . \tag{38}$$

Or $B_\infty\left(x,\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ n'est rien d'autre que le cube de centre de symétrie x et de longueur des arêtes $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. En particulier $B_\infty\left(x,\frac{r}{\sqrt{n}}\right)\in\mathscr{B}'$.

On conclut que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{T}_n$.

(e) Soit $]0,1[\in\mathscr{T}_1$. Il n'existe pas d'intervalle de la forme $]-\infty,a[$, $a\in\mathbb{R}$, ou $]b,+\infty[$, $b\in\mathbb{R}$, contenu dans $]0,1[$. Donc $\mathscr{B}''$ n'est pas une base pour $\mathscr{T}_1$.

(f) Supposons que $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$. En particulier $\mathscr{B}'\subset\mathscr{T}$.

Pour tout $a=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, où $m\in\mathbb{Z}^*$, $n\in|||^*$, p.g.c.d. $(m,n)=1$, on choisit M_a,N_a deux points sur la droite δ_a tels que $O\in]M_a,N_a[$ et $\mathrm{dist}(O,M_a)=\mathrm{dist}(O,N_a)=\frac{1}{n}$. Pour $a=0$ on choisit $M_0=(1,0)$, $N_0=(-1,0)$. Soit

$$\mathscr{C}=\bigcup_{a\in\mathbb{Q}}]M_a,N_a[.$$

Par hypothèse $\mathscr{C}\in\mathscr{B}'\subset\mathscr{T}$. En particulier, puisque O est un point de $\mathscr{C}$, il existe $r>0$ tel que $Y\cap B(O,r)\subset\mathscr{C}$. Pour tout $a\in\mathbb{Q}$ on a donc $\delta_a\cap B(O,r)\subset]M_a,N_a[$, d'où $r<\mathrm{dist}(O,M_a)=\frac{1}{n}$. Comme ceci est vérifié pour tout $n\in|||^*$, il s'ensuit que $r\leq 0$, ce qui contredit le choix de r.

On a obtenu une contradiction. Donc on ne peut pas avoir $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$.

Correction de l'exercice 5792 ▲

(a) On vérifie facilement les trois propriétés de métrique.

(b) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$. On a que $f(0)=0$ et $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ pour $x,y\in\mathbb{R}_+$ est équivalente à

$$\frac{1}{x+y+1}\geq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}-1\Leftrightarrow\frac{1}{x+y+1}+1\geq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\Leftrightarrow 1+x+y\leq(1+x)(1+y).$$

La dernière égalité est évidemment vérifiée pour $x\geq 0$, $y\geq 0$.

(c) D'après le cours, la métrique dist et la métrique $\mathrm{dist}_2=\min(\mathrm{dist},1)$ sont topologiquement équivalentes. Ainsi il suffit de montrer que dist_1 et dist_2 sont topologiquement équivalentes.

Puisque $1+\mathrm{dist}\geq 1$, on a que $\mathrm{dist}_1\leq\mathrm{dist}$. Aussi $\mathrm{dist}_1\leq 1$, d'où $\mathrm{dist}_1\leq\mathrm{dist}_2$.

La fonction f étant croissante, pour tout x,y on a que $\mathrm{dist}_1(x,y)=f(\mathrm{dist}(x,y))\geq f(\mathrm{dist}_2(x,y))$. D'autre part, $\mathrm{dist}_2(x,y)\leq 1$ implique $f(\mathrm{dist}_2(x,y))=\frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{1+\mathrm{dist}_2(x,y)}\geq\frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2}$.

On a obtenu que pour tout x,y,

$$\frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2}\leq\mathrm{dist}_1(x,y)\leq\mathrm{dist}_2(x,y).$$

Ainsi, les métriques dist_1 et dist_2 sont équivalentes.

Correction de l'exercice 5793 ▲

(a) Comme $d(x,y)=1$, si $x\neq y$, on a donc que $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$. De plus, comme la relation $x\neq y$ est symétrique, on $d(x,y)=d(y,x),\forall x,y\in E$. Soient $x,y,z\in E$, supposons $x=z$; ou bien $y=x$ ou bien y est distinct de x. Dans le premier cas, $d(x,z)=d(x,y)=d(y,z)=0$ et $d(x,z)=\sup(d(x,y),d(y,z))$. Dans le second cas, $d(x,y)=1$, d'où

$$0=d(x,x)=d(x,z)<\sup(d(x,y),d(x,y))=1.$$

Supposons $x\neq z$; ou y est distinct de x et de z, ou alors on a l'une des possibilités : $y=x$ ou $y=z$. Si les trois éléments sont deux à deux distincts, l'inégalité est trivialement vérifiée ($1=1$!). Sinon, $d(x,y)=1$ ou $d(y,z)=1$, d'où

$$1=d(x,z)\leq\sup(d(x,y),d(y,z)).$$

(b) On suppose que $d(x,y)\neq d(y,z)$. Supposons alors que $d(x,z)<\sup(d(x,y),d(y,z))$ et pour fixer les idées que $d(x,y)=\sup(d(x,y),d(y,z))$. Alors $d(y,z)<d(x,y)$ et $d(x,z)<d(x,y)$, d'où on déduit que $\sup(d(x,z),d(z,y))<d(x,y)$. Par ailleurs, $d(x,y)\leq\sup(d(x,z),d(z,y))$. Les deux dernières inégalités sont contradictoires.

(c) Soit $B_d(a,r)$ une boule ouverte ; montrons qu'elle est fermée. Soit $y\in E\setminus B_d(a,r)$; montrons qu'il existe une boule ouverte $B_d(y,\eta)$, contenue dans $E\setminus B_d(a,r)$. Si on choisit $\eta=r/2$ ou plus généralement $\eta<r$, on obtient que, pour tout $z\in B_d(y,\eta)$,

$$d(a,z)\leq\sup(d(a,y),d(y,z))\leq\sup(d(a,y),\eta)).$$

Comme $d(a,y)\geq r$ et $d(y,z)<\eta<r$, on a , (d'après la deuxième question), $d(a,z)=d(a,y)\geq r$. On en déduit que $B_d(y,\eta)\subset E\setminus B_d(a,r)$ et par suite la boule ouverte $B_d(a,r)$ est aussi fermée.

La preuve du fait que la boule fermée $B'_d(a,r)$ est aussi ouverte est analogue.

(d) Soient $B_d(a,r)$ et $B_d(b,s)$ deux boules ouvertes ayant une intersection non vide et soit $z_0 \in B_d(a,r) \cap B_d(b,s)$. supposons que $r \leq s$ et montrons qu'alors $B_d(a,r) \subset B_d(b,s)$. On regarde la distance à b de tout $z \in B_d(a,r)$:

$$d(b,z) \leq \sup(d(b,z_0), d(z_0,z)) < \sup(s, d(z_0,z))$$

puisque z_0 est dans $B_d(b,s)$. Par ailleurs, on a : $d(z_0,z) \leq \sup(d(z_0,a), d(a,z)) < r$. On obtient une majoration de $d(b,z)$: $d(b,z) < \sup(r,s) = s$, d'où une inclusion de $B_d(a,r)$ dans $B_d(b,s)$.
Conséquence : deux boules ouvertes de même rayon r qui se rencontrent sont confondues.

(e) Soient $A = B_d(a,r)$ et $B = B_d(b,r)$ deux boules ouvertes de rayon r contenues dans une boule fermée $C = B'_d(c,r)$ de même rayon. Montrons que :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \qquad r \leq d(a,b) \leq r.$$

L'inégalié ultramétrique montre que $d(x,y) \leq \sup(d(x,c), d(c,y))$ et ce sup est inférieure à r puisque chacune des boules A et B est incluse dans C. Donc $d(x,y) \leq r$.
Par ailleurs, introduisons dans l'estimation de $d(x,y)$ le centre des boules respectives auxquelles ils appartiennent : $d(x,y) \leq \sup(d(x,a), d(a,y))$. Si $d(x,a) = d(a,y)$, on aurait $d(a,y) < r$ et y serait dans A, ce qui est impossible, A et B étant disjoints d'après la quatrième question. Donc $d(a,y) \neq d(x,a)$, et en fait $d(a,y) > d(x,a)$ et

$$d(x,y) = d(a,y).$$

On voit donc que dans le calcul de la distance $d(x,y)$ on peut remplacer x ou y par le centre de la boule ouverte à laquelle il appartient. Par suite

$$d(x,y) = d(a,b) \geq r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Et finalement

$$r \leq d(x,y) \leq r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

d'où $d(A,B) = r$.

Correction de l'exercice 5794 ▲

(a) Soit $x = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{a'}{b'}$. On écrit $a = p^\alpha a_1$, $b = p^\beta b_1$,... Alors l'équation $ab' = a'b$ devient $p^{\alpha+\beta'} a_1 b'_1 = p^{\alpha'+\beta} a'_1 b_1$. Donc $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ ou encore $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$. Donc $\nu(\pm\frac{a}{b}) = \nu(\frac{a'}{b'})$.

(b) Soit $x = p^\alpha x_1$, $y = p^\beta y_1$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et les numérateurs et dénominateurs de $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$ non divisibles par p. Alors $xy = p^{\alpha+\beta} x_1 y_1$. Donc $\nu(xy) = \alpha + \beta = \nu(x) + \nu(y)$.

(c) Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, $x = p^\alpha x_1$, $y = p^\beta y_1$. Supposons par exemple $\alpha \leq \beta$, alors $x + y = p^\alpha(x_1 + p^{\beta-\alpha} y_1)$, avec $x_1 + p^{\beta-\alpha} y_1 \in \mathbb{Z}$. Donc $\nu(x+y) \geq \alpha = \min(\nu(x), \nu(y))$.
Soit maintenant $x = \frac{a}{b}, y = \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\begin{aligned}
\nu(x+y) &= \nu(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}) \\
&= \nu(\frac{ab' + a'b}{bb'}) \\
&= \nu(ab' + a'b) - \nu(bb') \\
&\geq \min(\nu(ab'), \nu(a'b)) - \nu(bb') \qquad \text{(grâce à l'inégalité sur les entiers)}, \\
&\geq \min(\nu(a) + \nu(b'), \nu(a') + \nu(b)) - \nu(b) - \nu(b') \\
&\geq \min(\nu(a) + \nu(b') - \nu(b) - \nu(b'), \nu(a') + \nu(b) - \nu(b) - \nu(b')) \\
&\geq \min(\nu(a) - \nu(b), \nu(a') - \nu(b')) \\
&\geq \min(\nu(x), \nu(y)).
\end{aligned}$$

(d) Il est clair que $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et que $d(x,y) = d(y,x)$. Pour un triplet (x,y,z) on a

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= p^{-\nu(x-z)} \\
&= p^{-\nu(x-y+y-z)} \\
&\leq p^{-\min(\nu(x-y), \nu(y-z))} \\
&\leq \max(p^{-\nu(x-y)}, p^{-\nu(y-z)}) \\
&\leq \max(d(x,y), d(y,z)).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5795 ▲

(a) i. Si $x \in \mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la boule $B(x, \frac{1}{n})$ rencontre nécessairement A (respectivement $E \setminus A$). Soit donc (axiome du choix) x_n (respectivement y_n) dans $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ (respectivement y_n dans $B(x, \frac{1}{n}) \cap (E \setminus A)$). Alors les suites x_n et y_n répondent clairement à la question : On a une suite (x_n) d'éléments de A et une suite (y_n) d'éléments du complémentaire $E \setminus A$ de A dans E, qui convergent l'une et l'autre vers x.

ii. On voit, qu'en posant pour $n \geq 1$, d'une part $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ et d'autre part, $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$, on obtient, respectivement comme plus haut, une suite de points dans A et une autre dans $E \setminus A$ qui convergent vers le même point $\frac{1}{2} \in A$ qui, adhérent à A comme à son complémentaire dans E est donc dans la frontière de A dans E. Par contre, si $x \in A$ est différent de $+\frac{1}{2}$, on voit que la boule (dans E) de centre x et de rayon $\frac{1}{2} - x > 0$ ne rencontre pas le complémentaire de A et qu'en conséquence $[0, \frac{1}{2}[$ est l'intérieur de A *dans* E.

A contrario une boule de centre 0 et de rayon strictement positif rencontre toujours le complémentaire de A *dans* $\mathbb{R}$ ce qui permet aisément de voir que la frontière de A *dans* $\mathbb{R}$ est $\{0, \frac{1}{2}\}$.

(b) Soient E et F deux espaces métriques respectivement au moyen des distances d et d'.

i. Pour abréger les notations posons : $\delta = \sup(d, d')$. C'est sur $E \times F$, la distance donnée par la formule :

$$\delta\big((x,x'),(y,y')\big) = \sup\big(d(x,y), d'(x',y')\big)$$

Une boule pour δ n'est donc rien d'autre que le produit cartésien d'une boule pour d avec une boule pour d'. Or ces produits cartésiens forment précisément une base d'ouverts qui définie la topologie produit qui est donc aussi la topologie associée à la métrique δ.

ii. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $(x,x') \in A \times B \setminus \mathrm{Fr}(A \times B)$ dans l'intérieur de $A \times B$ dans $E \times F$. Cet intérieur est un ouvert pour la topologie produit. La définition de cette topologie produit d'être engendrée par la base des produits cartésiens d'ouverts de E avec des ouverts de F a comme conséquence l'existence d'un ouvert U_x de E qui contient x et d'un autre $U_{x'}$ de F qui contient x' tels que $U_x \times U_{x'}$ soient entièrement contenus dans cet intérieur de $A \times B$ et donc à fortiori dans $A \times B$ lui même. Mais celà n'est possible que si U_x et $U_{x'}$ sont respectivement entièrement inclus dans A et B ce qui implique que x et x' sont respectivement intérieurs dans A et B. Réciproquement si x est intérieur à A et x' intérieurs à B et que U_x et $U_{x'}$ soient alors des ouverts pour lesquels $x \in U_x \subset A$ et $x' \in U_{x'} \subset B$, on voit que $U_x \times U_{x'} \subset A \times B$ est un ouvert pour la topologie qui contient (x,x') qui est donc intérieur à $A \times B$. $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ de A dans E avec l'intérieur $B \setminus \mathrm{Fr}(B)$ de B dans F.

(c) E et F sont toujours comme dans la deuxième question çi dessus.

i. Si (ξ_n, ξ'_n) est une suite de points dans le complémentaire $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ dans $E \times F$, désignons par N_1 (respectivement N_2) l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $\xi_n \notin A$ (respectivement $\xi'_n \notin B$.) L'hypothèse montre que : $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2$. $\mathbb{N}$ étant un ensemble infini, il faut bien qu'au moins l'une des deux parties N_1 ou N_2 le soit aussi. Si par exemple N_1 est infini, on peut ranger ses éléments en ordre croissant

$$n_0 < n_1 < n_2 < ..... < n_k < n_{k+1} < ...$$

mais alors, par définition, la suite extraite ξ_{n_k} a tous ses termes dans $E \setminus A$. Mutatis mutandis lorsque N_2 est infini, ce qui est assuré dès lors que N_1 ne le serait pas.

ii. Commençons par montrer, par exemple, que : $\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B} \subset \mathrm{Fr}(A \times B)$. En effet si $(x,x') \in \mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}$, il existe une suite b_n dans B qui converge vers $x' \in \bar{B}$. De la même manière, on trouve une suite a_n d'éléments de A qui converge vers $x \in \mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A}$. Mais aussi, comme on l'a vu plus haut, une suite d'éléments c_n dans le complémentaire $E \setminus A$ de A dans E qui converge aussi vers x. Mais alors (a_n, b_n) est une suite de points de $A \times B$ qui converge vers (x,x') et (c_n, b_n) est une suite de points du complémentaire de $A \times B$ qui converge aussi vers (x,x') qui se trouve donc à la fois dans l'adhérence de $A \times B$ et de son complémentaire cqfd. En renversant les rôles de A et B, on voit comment montrer que : $\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B) \subset \mathrm{Fr}(A \times B)$. Ne reste donc plus qu'à montrer l'inclusion : $\mathrm{Fr}(A \times B) \subset \big(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\big)$. Or, $(x,x') \in \mathrm{Fr}(A \times B)$, est la limite d'une suite de points (ξ_n, ξ'_n) dans le complémentaire $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ dans $E \times F$, comme aussi la limite d'une suite de points (η_n, η'_n) de $A \times B$, deuxième observation qui montre immédiatement que $x \in \bar{A}$ et $x' \in \bar{B}$. Enfin on a vu en a) immédiatement plus haut, qu'on pouvait extraire ξ_{n_k} dans $E \setminus A$ de la suite x_n ou $\xi'_{n'_k}$ dans $E \setminus B$ de la suite x'_n qui assure que x est dans l'adhérence de $E \setminus A$ ou que x' est dans celle de $F \setminus B$ ce qui assure que $x \in \mathrm{Fr}(A)$ ou $x' \in \mathrm{Fr}(B)$, et démontre la dernière inclusion recherchée.

(d) i. L'hypothèse $(x,x') \notin A \times B$ et $x \in A$ implique que $x' \notin B$, si bien que $E \times \{x'\}$ est entièrement contenu dans le complémentaire de $A \times B$. Evidemment $y \notin A$ implique que $\{y\} \times F$ est aussi entièrement contenu dans ce même complémentaire de $A \times B$.

Mais alors la partie $E \times \{x'\} \cup \{y\} \times F$ est connexe pour la raison que $E \times \{x'\}$ et $\{y\} \times F$ respectivement homéomorphes à E et F sont connexes et que leur intersection qui est le point (y,x') est non vide. Cette partie répond donc à la question.

ii. Prenons $(x,x') \notin A \times B$ et $(y,y') \notin A \times B$. exactement comme ci-dessus et qui sont dans la même composante connexe de $(E \times F) \setminus (A \times B)$. Soit maintenant $(z,z') \in (E \times F) \setminus (A \times B)$; si $z \notin A$, le raisonnement du a) se répète pour voir que (z,z') est raccordé à (x,x') par une partie connexe. Mais si $z \in A$, le a) montre que (z,z') est raccordé à (y,y') par une partie connexe, et donc aussi à (x,x') qui a donc $(E \times F) \setminus (A \times B)$ tout entier comme composante connexe.

Correction de l'exercice 5796 ▲

(a) i. Si A est compact et $B = \{b\}$ avec $b \notin A$. Soit $a \in A$ alors $a \neq b$ donc il existe un voisinage ouvert de a, U_a et un voisinage ouvert de b, V_a tels que $U_a \cap V_a = \varnothing$. Bien évidemment $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Comme A est compact on peut extraire un ensemble fini $\mathscr{A} \subset A$ tel que $A \subset \bigcup_{a \in \mathscr{A}} U_a =: U^b$. Notons alors $V^b := \bigcap_{a \in \mathscr{A}} V_a$. U^b est ouvert comme union d'ouverts et V^b est ouvert comme intersection *finie* d'ouverts. De plus $U^b \cap V^b = \varnothing$.

ii. Maintenant B est compact. Pour chaque $b \in B$ le point précédent nous fournit U^b et V^b disjoints qui sont des voisinages ouverts respectifs de A et b. On a $B \subset \bigcup_{b \in B} V^b$. On extrait un ensemble fini $\mathscr{B}$ de telle sorte que $B \subset \bigcup_{b \in \mathscr{B}} V^b =: V'$. V' est un voisinage ouvert de B. Et si $U' := \bigcap_{b \in \mathscr{B}} U^b$ alors U' est un ouvert contenant A, et $U' \cap V' = \varnothing$.

(b) Supposons que ce ne soit pas vrai alors

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \qquad (d(x,K) < r) \text{ et } x \notin U.$$

En prenant $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons une suite (x_n) tel que $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ et $x_n \notin U$. Comme $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ alors il existe $y_n \in K$ tel que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. Nous avons une suite (y_n) dans K compact donc on peut en extraire une sous-suite $y_{\phi(n)}$ qui converge ; notons ℓ sa limite, alors $\ell \in K$ car K est compact.
Regardons la suite extraite $(x_{\phi(n)})$, montrons quelle converge également vers ℓ :

$$d(x_{\phi(n)},\ell) \leq d(x_{\phi(n)},y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)},\ell)$$

Les deux termes à droite de l'inégalité tendent vers 0, donc $(x_{\phi(n)})$ tend vers ℓ. Soit $F = X \setminus U$ alors F est une fermé (car U est ouvert) et $(x_{\phi(n)}) \in F$ donc la limite ℓ est dans F également. Donc $\ell \notin U$ et comme $K \subset U$ alors $\ell \notin K$. Nous avons montrer deux choses contradictoires $\ell \in K$ et $\ell \notin K$ ce qui prouve le résultat demandé.

Correction de l'exercice 5797 ▲

Nous allons utiliser le fait qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et soit ℓ sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit (v_n) une suite d'éléments de K. Si (v_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente. Sinon (v_n) prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente(w_n) extraite de (v_n). Soit w_0 le premier des $(v_0,v_1,v_2,\dots)$ qui appartient à $\{u_0,u_1,\dots\}$. Soit w_1 le premier des $(v_1,v_2,\dots)$ qui appartient à $\{u_1,u_2,\dots\}$... Soit w_n le premier des $(v_n,v_{n+1},\dots)$ qui appartient à $\{u_n,u_{n+1},\dots\}$. Alors (w_n) est une suite-extraite de (v_n) et par construction (w_n) converge vers la limite de (u_n), donc vers $\ell \in K$.

Correction de l'exercice 5798 ▲

(a) Notons $\ell = \mathrm{dist}(K,F)$. Alors il existe (x_n) suite d'éléments de K et (y_n) suite d'éléments de F telles que $\|x_n - y_n\| \to \ell$. Comme K est compact alors on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans K. Notons $a \in K$ cette limite Alors la suite extraite $(y_{\phi(n)})$ est bornée car

$$\|y_{\phi(n)}\| \leq \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$

La suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge est donc bornée, et la suite $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$ qui converge dans $\mathbb{R}$ (vers ℓ) est bornée également. Donc la suite $(y_{\phi(n)})$ est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(y_{\phi\circ\psi(n)})$. De plus comme F est fermé alors cette suite converge vers $b \in F$. La suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ extraite de $(x_{\phi(n)})$ converge vers $a \in K$. Et comme nous avons extrait deux suites (x_n) et (y_n) on a toujours $\|x_{\phi\circ\psi(n)} - y_{\phi\circ\psi(n)}\| \to \ell$. A la limite nous obtenons $\|a - b\| = \ell$ avec $a \in K$ et $b \in F$.

(b) Remarque : si K était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } y \geq 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ nous avons $d(K,F) = 0$ mais $K \cap F = \varnothing$.

Correction de l'exercice 5799 ▲

Comme E est compact et $E \subset \bigcup_{y \in E} V_y$ il existe un ensemble fini $\mathscr{Y} \subset E$ tel que $E \subset \bigcup_{y \in \mathscr{Y}} V_y$. Sur chaque voisinage V_y, f est bornée par une constante M_y. Notons $M = \max_{y \in \mathscr{Y}} M_y$. Alors f est bornée sur E par M. En effet pour un élément quelconque $x \in E$, il existe $y \in \mathscr{Y}$ tel que $y \subset V_y$ donc $f(x)$ est bornée par M_y donc par M.

Correction de l'exercice 5800 ▲

(a) Soit $x = \lim x_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; montrons que x est dans F_N. On a $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Donc pour tout $n \geq N$ alors $x_n \in F_N$. Comme F_N est fermé, alors la limite x est aussi dans F_N. Ceci étant vrai quelque soit N, alors $x \in \bigcap_N F_N$.

Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$, alors $\bigcap_n F_n = \varnothing$.

(b) i. Pour chaque n on prend $x_n \in K_n$, alors pour tout n, $x_n \in K_0$ qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si x est la limite de cette sous-suite alors $x \in K$. Donc K est non vide.

ii. Par l'absurde supposons que c'est faux, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$

De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $x \in K$. Or $x_n \in X \setminus \Omega$ qui est fermé donc $x \in X \setminus \Omega$. Comme $K \subset \Omega$ alors $x \notin K$ ce qui est contradictoire.

Correction de l'exercice 5801 ▲

Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

(a) Pour tout $y \in [0,1]$ f est continue en (x,y) donc il existe un $U(y)$ voisinage de x et $[a(y), b(y)]$ voisinage de y tel que pour $(x', y') \in U(y) \times [a(y), b(y)]$ on ait $|f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon$.

(b) Comme $[0,1] \subset \bigcup_{y \in [0,1]} [a(y), b(y)]$ et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ il existe un ensemble fini $\mathscr{Y}$ tel que $[0,1] \subset \bigcup_{y \in \mathscr{Y}} [a(y), b(y)]$. De plus quitte à réduire les intervalles ont peut supposer qu'il sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :

$$[0,1] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots [t_k, 1].$$

(c) Notons $U = \bigcap_{y \in \mathscr{Y}} U(y)$, c'est un voisinage de x car l'intersection est finie. Pour $x' \in U$ nous avons

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x')| &= \left| \int_0^1 f(x,y)dy - \int_0^1 f(x',y)dy \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leq \int_0^{t_1} |f(x,y) - f(x',y)|dy + \int_{t_1}^{t_2} \cdots + \int_{t_k}^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leq \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \cdots + \varepsilon(1 - t_k) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc g est continue.

Correction de l'exercice 5802 ▲

(a) Pour montrer que $A + B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A + B$ qui converge, converge vers un élément de $A + B$. Soit (x_n) un suite de $A + B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ est convergente vers $x - a$. Notons $b = x - a$ comme B est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a + b$ donc $x \in A + B$.

(b) Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$, soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ et } x \geq 0\}$. Alors $F + G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$ qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).

Correction de l'exercice 5803 ▲

(a) Supposons f propre et soit F un fermé. Montrons que $f(F)$ est un fermé. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Notons K l'union de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et de $\{y\}$. Alors K est compact. Comme $y_n \in f(F)$, il existe $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = y_n$. En fait $x_n \in f^{-1}(K)$ qui est compact car f est propre. Donc de (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$, on note x la limite de cette sous-suite. Comme $x_{\phi(n)} \in F$ et que F est fermé alors $x \in F$. Comme f est continue alors $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tend vers $f(x)$, or $y_{\phi(n)}$ tend aussi vers y. Par unicité de la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(F)$ et $f(F)$ est fermé.

(b) Dire $\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$

i. Supposons f propre, soit $M > 0$. Alors $B(0,M)$ est un compact (nous sommes dans $\mathbb{R}^n$) donc $f^{-1}(B(0,M))$ est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.

ii. Réciproquement, soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue et que K est fermé alors $f^{-1}(K)$ est un fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. Comme K est compact alors il existe $M>0$ tel que $K\subset B(0,M)$, par hypothèse il existe $m>0$ tel que si $x\notin B(0,m)$ alors $f(x)\notin B(0,M)$, ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si $f(x)\in B(0,M)$ alors $x\in B(0,m)$", donc $f^{-1}(B(0,M))\subset B(0,m)$. Or $K\subset B(0,M)$ donc $f^{-1}(K)\subset f^{-1}(B(0,M))\subset B(0,m)$. Donc $f^{-1}(K)$ est borné donc compact.

Correction de l'exercice 5804 ▲

(a) Soit f_n la fonction affine suivante $f_n(t)=0$ pour $t\in[0,\frac{1}{n+1}]$ et pour $t\in[\frac{1}{n},1]$. Sur $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si B dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons $d_\infty(f_n,0)=\sup|f_n(t)|=1$ donc $f_n\in B$. Par contre si $p\neq q$ alors $d(f_p,f_q)=1$ donc la suite (f_n) et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si B était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.

(b) Notons $x^n=(0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ la suite de l^∞ (le 1 est à la n-ième place). Alors x^n est dans la boule unité fermée B centrée en 0. De plus si $p\neq q$, alors $d_\infty(x^p,x^q)=1$. Donc toute sous-suite extraite de (x_n) n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc B n'est pas compact.

Correction de l'exercice 5806 ▲

(a) Si f a deux points fixes $x\neq y$, alors $d(x,y)=d(f(x),f(y))<d(x,y)$. Ce qui est absurde. Donc f a au plus un point fixe.

(b) f est continue et X compact donc $X_1=f(X)$ est compact, par récurrence si X_{n-1} est compact alors $X_n=f(X_{n-1})$ est compact. De plus $f:X\to X$, donc $f(X)\subset X$ soit $X_1\subset X$, puis $f(X_1)\subset f(X)$ soit $X_2\subset X_1$, etc. Par récurrence $X_n\subset X_{n-1}\subset\dots\subset X_1\subset X$. Comme chaque X_n est non vide alors Y n'est pas vide (voir l'exercice 5799).

(c) Montrons d'abord que $f(Y)\subset Y$. Si $y\in Y$, alors pour tout $n\geq 0$ on a $y\in X_n$ donc $f(y)\in f(X_n)=X_{n+1}$ pour tout $n\geq 0$. Donc pour tout $n>0$, $f(y)\in X_n$, or $f(y)\in X_0=X$. Donc $f(y)\in Y$.

Réciproquement montrons $Y\subset f(Y)$. Soit $y\in Y$, pour chaque $n\geq 0$, $y\in X_{n+1}=f(X_n)$. Donc il existe $x_n\in X_n$ tel que $y=f(x_n)$. Nous avons construit (x_n) une suite d'élément de X compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Notons x la limite, par l'exercice 5799, $x\in Y$. Alors $y=f(x_{\phi(n)})$ pour tout n et f est continue donc à la limite $y=f(x)$. Donc $y\in f(Y)$.

Soit $y\neq y'\in Y$ tel que $d(y,y')=\operatorname{diam}Y>0$. Comme $Y=f(Y)$ alors il existe $x,x'\in Y$ tel que $y=f(x)$ et $y'=f(x')$. Or $d(y,y')=d(f(x),f(x'))<d(x,x')$. On a trouvé deux élements de Y tel $d(x,x')$ est strictement plus grand que le diamètre de Y ce qui est absurde. Donc $y=y'$ et le diamètre est zéro.

(d) Comme le diamètre est zéro alors Y est composé d'un seul point $\{p\}$ et comme $f(Y)=Y$ alors $f(p)=p$. Donc p a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de Y pour tout point $x_0\in X$ la suite $x_n=f^n(x_0)$ converge vers p.

Correction de l'exercice 5807 ▲

(a) Comme $E\times E$ est compact alors de la suite (a_n,b_n) on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)},b_{\phi(n)})$ qui converge vers (a_∞,b_∞). Soit $\varepsilon>0$ il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que si $k\geq n$ alors $d(a_{\phi(k)},a_\infty)<\frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b_{\phi(k)},b_\infty)<\frac{\varepsilon}{2}$. Donc en particulier $d(a_{\phi(n+1)},a_{\phi(n)})\leq d(a_{\phi(n+1)},a_\infty)+d(a_\infty,a_{\phi(n)})<\varepsilon$. La propriété pour f s'écrit ici $d(a_k,b_{k'})\leq d(a_{k+1},b_{k'+1})\geq$. Donc $d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)},a_0)\leq d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1},a_1)\leq\dots\leq d(a_{\phi(n+1)-1},a_{\phi(n)-1})\leq d(a_{\phi(n+1)},a_{\phi(n)})<\varepsilon$. Donc pour $k=\phi(n+1)-\phi(n)$, sachant que $a_0=a$ alors $d(a_k,a)<\varepsilon$. Même chose avec (b_n).

(b) i. Soit $a\in E$ et $\varepsilon>0$ alors il existe $k\geq 1$ tel que $a_k=f^k(a)\in f(E)$ avec $d(a,a_k)<\varepsilon$. Donc $f(E)$ est dense dans E.

ii. Soit $u_n=d(a_n,b_n)$. Alors par la propriété pour f, (u_n) est une suite croissante de $\mathbb{R}$. Comme E est compact alors son diamètre est borné, donc (u_n) est majorée. La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge vers u.

Maintenant $u_n-u_0\geq 0$ et

$$0\leq u_n-u_0=d(a_n,b_n)-d(a,b)\leq d(a_n,a)+d(a,b)+d(b,b_n)-d(a,b)=d(a_n,a)+d(b_n,b).$$

Donc u_n tend vers u_0. Comme (u_n) est croissante alors $u_n=u_0$ pour tout n. En particulier $u_1=u_0$ donc $d(a_1,b_1)=d(a_0,b_0)$ soit $d(f(a),f(b))=d(a,b)$. Donc f est une isométrie.

iii. f est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitziènne !). E est compact donc $f(E)$ est compact donc fermé or $f(E)$ est dense donc $f(E)=E$. Donc f est surjective

---

Correction de l'exercice 5808 ▲

Dire que $i:(X,|.|)\to(X,d)$ est continue c'est exactement dire que tout ensemble U ouvert pour d est ouvert pour $|.|$ (car $i^{-1}(U)=U$).

(a) Soit K un compact pour $|.|$. Soit U_i, $i \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ et tels que U_i soient des ouverts pour d. Alors les U_i sont aussi des ouverts pour la topologie définie par $|.|$. Comme K est compact pour $|.|$ alors on peut extraire un ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. Donc K est aussi compact pour d.
Si F est un fermé pour $|.|$ alors $F \subset [0,1]$ est compact pour $|.|$ Donc compact pour d, donc fermé pour d.

(b) Si U est un ouvert pour d alors U est un ouvert pour $|.|$. Car i est continue. Réciproquement si U est un ouvert pour $|.|$ alors $F = X \setminus U$ est un fermé pour $|.|$ donc F est un fermé pour d par la question précédente, donc $U = X \setminus F$ est un ouvert pour d. Conclusion les ouverts pour $|.|$ et d sont les mêmes donc $|.|$ et d définissent la même topologie.

Correction de l'exercice 5809 ▲

(a) Sens direct. Si f est continue alors $\{x \mid f(x) < \lambda\} = f^{-1}(]-\infty,\lambda[)$ est un ouvert comme image réciproque par une application continue de l'intervalle ouvert $]-\infty,\lambda[$. De même avec $]\lambda,+\infty[$.
Réciproque. Tout d'abord, tout intervalle ouvert $]a,b[$, $(a<b)$ peut s'écrire
$$]a,b[=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[.$$
Donc
$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]-\infty,b[)\cap f^{-1}(]a,+\infty[)$$
est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O peut s'écrire comme l'union dénombrables d'intervalles ouverts :
$$O = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[.$$
Donc
$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(]a_i,b_i[)$$
est une union d'ouvert donc un ouvert de X .

(b) Nous le faisons d'abord pour un intervalle ouvert $]a,b[$.
$$]a,b[= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}].$$
Donc
$$f^{-1}(]a,b[) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([a+\frac{1}{j},b-\frac{1}{j}]),$$
est une union dénombrable de fermés. Maintenant comme pour la première question, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit $O = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$, avec I dénombrable. Donc on peut écrire
$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([a_i+\frac{1}{j},b_i-\frac{1}{j}]),$$
qui est une union dénombrable de fermés (mais c'est un ouvert !).

Correction de l'exercice 5810 ▲

(a) Soit F l'application définie par $F(f) = \int_0^1 |f|$. Alors
$$|F(f)-F(g)| = |\int_0^1 |f|-|g|| \leq \int_0^1 |f-g| = d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g).$$
Donc pour les deux distances d_1 et d_∞, F est lipschitzienne de rapport 1.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ alors en posant $\eta = \varepsilon$ on obtient la continuité : si $d(x,y) < \varepsilon$ alors
$$|\ell(x)-\ell(y)| \leq \varepsilon.$$
Donc ℓ est continue, et $c_0 = \ell{-}1(\{0\})$ est un fermé , car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ℓ.

Correction de l'exercice 5811 ▲

Soit $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Alors soit $C = X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Soit $x \in C$ comme $f(x) \neq g(x)$ et que Y est séparé, il existe un voisinage ouvert V_1 de $f(x)$ et V_2 de $g(x)$ tel que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Notons $U = f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2)$. Alors U est un ouvert de X contenant x. Maintenant pour $x' \in U$, alors $f(x') \in V_1$, $g(x') \in V_2$ donc $f(x') \neq g(x')$, donc $x' \in C$. Bilan U est inclus dans C. Donc C est ouvert.
Application : si A est dense dans X alors $\bar{A} = X$, mais comme A est fermé $A = \bar{A}$. Donc $A = X$, c'est-à-dire f et g sont égales partout.

Correction de l'exercice 5812 ▲

(a) Soit P un polynôme, et F un fermé de $\mathbb{R}$. Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $P(F)$, et $y \in \mathbb{R}$ sa limite. Il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = P(x_n)$. Comme (y_n) est bornée (car convergente) alors (x_n) aussi est bornée, en effet un polynôme n'a une limite infini qu'en $\pm\infty$. Comme (x_n) est une suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ de limite x. Comme F est fermé, $x \in F$. Comme P est continue (c'est un polynôme) alors $y_{\phi(n)} = P(x_{\phi(n)}) \to P(x)$, mais $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y. Par unicité de la limite $y = P(x) \in P(F)$. Donc $P(F)$ est fermé.

(b) Soit $X = Y = \mathbb{R}$ et $H = (xy = 1)$ est un fermé de $X \times Y$, mais si $\pi(x,y) = x$ alors $\pi(H) = \mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé de $X = \mathbb{R}$.

(c) A vérifier...

Correction de l'exercice 5813 ▲

(a) $\Rightarrow$. Soit f continue et $y \in f(\bar{A})$. Il existe $x \in \bar{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit $x_n \in A$ tel que (x_n) converge vers x. Alors $y_n = f(x_n) \in A$. Comme f est continue alors (y_n) converge vers $f(x) = y$. Donc y est adhérent à $f(A)$. Conclusion $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$. Soit $f : X \to Y$ et soit F un fermé de Y. Notons $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(A) \subset F$ donc l'équation $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ devient $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ car F est fermé. Donc $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Donc $\bar{A} \subset A$, d'où $\bar{A} = A$. Donc A est fermé. Bilan l'image réciproque de tout fermé F est un fermé, donc f est continue.

Application : si A est dense, alors $\bar{A} = X$, et sous les hypothèses précédentes alors $f(A)$ est dense dans l'image de X par f : en effet $\overline{f(A)}$ contient $f(\bar{A}) = f(X)$

(b) $\Rightarrow$. Soit f fermé et soit $A \subset X$. Alors $A \subset \bar{A}$ donc $f(A) \subset f(\bar{A})$, donc comme $\bar{A}$ est un fermé et f est fermée alors $f(\bar{A})$ est un fermé contenant $f(A)$. Mais comme $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ alors $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

$\Leftarrow$. La relation pour un fermé F donne $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$. Donc $\overline{f(F)} = f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. Donc f est fermée.

Même type de raisonnement avec f ouverte.

Correction de l'exercice 5816 ▲

(a) Supposons que f ne tende pas vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \geq n$ tel que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Sans perte de généralité nous supposons $f(x_n) > \varepsilon$. Appliquons l'uniforme continuité : soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, Il existe η tel que pour $|x_n - y| \leq \eta$ on ait $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon'$. Donc pour un tel y, $f(y) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Donc f est strictement positive sur $[x_n - \eta, x_n + \eta]$. Notons alors (p_n) définie par $p_{2n} = x_n - \eta$, $p_{2n+1} = x_n + \eta$. Soit $I(x) = \int_0^x f$. Alors $I(p_{2n+1}) - I(p_{2n}) = \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(t)dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\eta = \varepsilon\eta$. Donc la suite $(I(p_n))$ n'est pas de une suite de Cauchy, donc ne converge pas, donc la fonction $x \mapsto I(x)$ ne converge pas non plus, et donc $\int_0^\infty f(t)dt$ diverge.

(b) Par le changement de variable $u = t^2$ puis une intégration par partie, on montre que l'intégrale $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ converge, mais comme $f(x) = \sin(x^2)$ ne tend pas vers 0 alors f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5817 ▲

Pour $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on définit $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

(a) Sens $\Leftarrow$. Soit $M > 0$ tel que $\|B(x)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\|$. Montrons que B en continue au point $x = (x_1, x_2)$ fixé. Soit $y = (y_1, y_2)$ alors

$$B(x+y) - B(x) = B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) = B(x_1, y_2) + B(x_2, y_1) + B(y_1, y_2).$$

Donc

$$\|B(x+y) - B(x)\| \leq M\|x_1\|\|y_2\| + M\|x_2\|\|y_1\| + M\|y_1\|\|y_2\|.$$

Pour $\|y_1\| \leq \frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}$ on a $M\|x_1\|\|y_2\| \leq \varepsilon$ (si $x_1 = 0$ il n'y a rien à choisir ici). Pour $\|y_2\| \leq \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}$ on a $M\|x_2\|\|y_1\| \leq \varepsilon$ (si $x_2 = 0$ il n'y a rien à choisir ici). Enfin pour $\|y_1\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ et $\|y_2\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ on a $M\|y_1\|\|y_2\| \leq \varepsilon$. Donc en prenant $\eta = \min(\frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}, \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}})$, on obtient que pour $\|y\| = \max(\|y_1\|, \|y_2\|) \leq \eta$ on a $\|B(x+y) - B(x)\| \leq 3\varepsilon$. Ce qui prouve la continuité. Donc B est continue sur $E_1 \times E_2$.

(b) Sens $\Rightarrow$. Si B est continue partout, en particulier elle est continue en 0. Je choisis $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leq \eta$ alors $\|B(x)\| \leq 1$. Donc pour $\|x_1\| \leq \eta$ et $\|x_2\| \leq \eta$ on a $\|B(x_1, x_2)\| \leq 1$. Soit maintenant $y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$, $(y_1 \neq 0, y_2 \neq 0)$ on a $(\eta \frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta \frac{y_2}{\|y_2\|})$ de norme $\leq \eta$ donc $B(\eta \frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta \frac{y_2}{\|y_2\|}) \leq 1$ et par bilinéarité cela fournit : $B(y_1, y_2) \leq \frac{1}{\eta^2}\|y_1\|\|y_2\|$, et ce pour tout (y_1, y_2). La constante cherchée étant $\frac{1}{\eta^2}$.

Correction de l'exercice 5818 ▲

Comme L est linéaire il suffit de montrer que L est continue en 0. Supposons que cela ne soit pas vrai, alors il faut nier la continuité de L en 0 qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in E \qquad (\|x\| < \eta \Rightarrow \|L(x)\| < \varepsilon).$$

La négation s'écrit alors :

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall \eta > 0 \qquad \exists x \in E \qquad (\|x\| < \eta \text{ et } \|L(x)\| \geq \varepsilon).$$

Soit donc un tel $\varepsilon > 0$ de la négation, pour η de la forme $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient y_n tel que $\|y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|L(y_n)\| \geq \varepsilon$. On pose $x_n = \sqrt{n}y_n$, alors $\|x_n\| = \sqrt{n}\|y_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (x_n) est une suite de E qui tend vers 0. Par contre $\|L(x_n)\| = \sqrt{n}\|L(y_n)\| \geq \varepsilon\sqrt{n}$, donc la suite $(L(x_n))$ n'est pas bornée. Par contraposition nous avons obtenu le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 5819 ▲

(a) Si f est linéaire et bornée sur la boule unité alors elle est continue (voir le cours ou refaire la démonstration).

(b) Il reste à montrer que f est linéaire : on a déjà $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout x, y reste donc à prouver $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
   - Pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, c'est une récurrence, $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$. Puis $f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$ etc. Donc $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. De plus $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$. Ensuite on a $f(-nx) = -nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Bilan : pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
   - Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, soit $\lambda = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.
   $$f(\frac{p}{q}x) = pf(\frac{1}{q}x) = \frac{p}{q}qf(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}f(q\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}f(x).$$
   Nous avons utilisé intensivement le premier point.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors il existe une suite (λ_n) d'élément de $\mathbb{Q}$ qui converge vers λ. Fixons $x \in E$.
   $$f(\lambda x) - \lambda f(x) = f(\lambda x) - f(\lambda_n x) + f(\lambda_n x) - \lambda f(x) = f((\lambda - \lambda_n)x) + (\lambda_n - \lambda)f(x).$$
   Nous avons utilisé le second point. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Pour n assez grand on a $\|(\lambda - \lambda_n)x\| < \varepsilon$. Donc $\|\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x\| \in B(0,1)$ or f est bornée sur la boule unité donc il existe $M > 0$ tel que $f(\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x) \leq M$ (quelque soit n). Donc $f(\lambda - \lambda_n)x) \leq M\varepsilon$ (ε est rationnel donc on peut le "sortir"). De même pour n assez grand on a $(\lambda_n - \lambda)f(x) < \varepsilon$. Maintenant
   $$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\| \leq \|f((\lambda - \lambda_n)x)\| + \|(\lambda_n - \lambda)f(x)\| < M\varepsilon + \varepsilon.$$
   Donc pour x, λ fixés, $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|$ est aussi petit que l'on veut, donc est nul ! D'où $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5820 ▲

(a) Pour tout x, $\|S(x)\| = \|x\|$ donc $\|S\| = 1$.

(b) $\|T(f)\|_\infty = \|f \times g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Donc pour $f \neq 0$, $\frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \|g\|_\infty$. De plus en g, on obtient $\frac{\|T(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \frac{\|g^2\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \|g\|_\infty$. Donc $\|T\| = \|g\|_\infty$.

(c) On a $|u(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$ donc $\|u\| \leq \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g ne change pas de signe sur $[0,1]$ alors pour f la fonction constant égale à 1, on obtient $|u(f)| = \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$ donc $\|u\| = \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g change de signe alors il ne le fait qu'une fois et en $\frac{1}{2}$. Soit h_n la fonction définie par $h_n(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, $h_n(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et h_n est affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et continue sur $[0,1]$. Cette fonction est construite de telle sorte que si g est positive puis négative alors $h_n \times g$ est une fonction continue qui converge uniformément vers $|g|$: $\|h_n g - |g|\|_\infty \to 0$. Donc $|u(h_n)| = \int_0^1 h_n \times g$ et par la convergence uniforme alors $|u(h_n)|$ converge vers $\int_0^1 |g|$. Donc $\|u\| = \int_0^1 |g|$.

(d) $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leq \|a_n\|_2 \|x_n\|_2$ (c'est Cauchy-Schwartz) donc $\|u\| \leq \|a_n\|_2$. Pour la suite $x = a$ on a égalité d'où $\|u\| = \|a_n\|_2$.

(e) $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leq \sum |a_n x_n| \leq \|a\|_\infty \sum |x_n| = \|a\|_\infty \|x_n\|_1$, donc $\|u\| \leq \|a\|_\infty$. Soit p fixé, soit $i(p)$ un indice tel que $|a_{i(p)}| = \max_{j=1,\ldots,p} |a_j|$. On construit une suite x^p de la manière suivante : $x^p = (0, 0, \ldots, 0, a_{i(p)}, 0, 0, 0 \ldots)$ (des zéros partout sauf $a_{i(p)}$ à la place $i(p)$). Alors $\|x^p\|_1 = |a_{i(p)}|$ et $|u(x^p)| = a_{i(p)}^2$. Donc $\frac{|u(x^p)|}{\|x^p\|_1} = |a_{i(p)}|$. Lorsque p tend vers $+\infty$, $|a_{i(p)}| \to \|a\|_\infty$. Donc $\|u\| = \|a\|_\infty$.

(f) $|u(x)| = |\lim x_n| \leq \|x\|_\infty$, donc $\|u\| \leq 1$. Pour $x = (1,1,1,\ldots)$ on obtient l'égalité $\|u\| = 1$.

Correction de l'exercice 5821 ▲

(a) Il suffit de l'écrire...

(b) Calculons la norme de U : $\|U(P)\| = \sup_k |\frac{1}{k} a_k\| \leq \sup_k |a_k| \leq \|P\|$. Donc pour tout P, $\frac{\|U(P)\|}{\|P\|} \leq 1$. Et pour $P(x) = x$ on a égalité donc $\|U\| = 1$.

(c) Pour V, prenons $P_k(x) = x^k$, alors $\|P_k\| = 1$, mais $\|V(P_k)\| = k$. Donc V n'est pas bornée sur la boule unité donc V n'est pas continue.

Correction de l'exercice 5822 ▲

(a) A injective : Si $A(x_1,x_2,\dots) = A(y_1,y_2,\dots)$ alors $(x_1,x_2/2,\dots,x_n/n,\dots) = (y_1,y_2/2,\dots,y_n/n,\dots)$ donc $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,..., $x_n = y_n$,... Donc A est injective.
A continue : $\|A(x)\|_\infty = \sup_n \frac{x_n}{n} \leq \sup_n x_n \leq \|x\|_\infty$. Donc $\|A\| \leq 1$ donc A est continue.
Norme de A : Pour $x = (1,0,0,\dots)$. On a $\|x\|_\infty = 1$ et $\|A(x)\|_\infty = 1$ Donc la norme de A est exactement 1.
A n'est pas surjective : posons $y = (1,1,1,\dots) \in l^\infty$. Soit x une suite telle que $A(x) = y$ alors $x = (1,2,3,4,\dots)$. Mais $\|x\|_\infty = +\infty$ donc $x \notin l^\infty$. En conséquence $A : l^\infty \to l^\infty$ n'est pas surjective.

(b) L'inverse à gauche de A est B définie par

$$B(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots) = (x_1,2x_2,\dots,nx_n,\dots)$$

de sorte que pour $x \in l^\infty$ on ait $B \circ A(x) = x$. Posons la suite $x^p = (0,0,\dots,0,1,0,0\dots) \in l^\infty$ (des zéros partout et le 1 à la p-ième place). Alors $\|x^p\|_\infty = 1$ et $\|B(x^p)\|_\infty = p$. Donc $\frac{\|B(x^p)\|_\infty}{\|x^p\|_\infty} = k$, donc la norme de B n'est pas finie et B n'est pas continue.

Correction de l'exercice 5823 ▲

(a) Si $L(a) = 0$ alors $a \in H$ donc $\mathrm{dist}(a,H) = 0$ donc la relation est vraie. Supposons que $L(a) \neq 0$. Alors on a $X = H + \mathbb{R}.a$. En effet pour $x \in X$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L(x) = \lambda L(a)$. Donc $L(x - \lambda a) = 0$. Posons $h = x - \lambda a$, alors $h \in H$ et $x = h + \lambda a$ est la décomposition suivant $H + \mathbb{R}.a$.
Si L est continue alors $\|L\|$ est finie.

$$\begin{aligned}
\|L\| &= \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \\
&= \sup_{h\in H,\lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0} \frac{\|L(h+\lambda a)\|}{\|h+\lambda a\|} \\
&= |L(a)| \sup_{h\in H,\lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0} \frac{|\lambda|}{\|h+\lambda a\|} \\
&= |L(a)| \sup_{h\in H} \frac{1}{\|h+a\|} \\
&= |L(a)| \frac{1}{\inf_{h\in H}\|h+a\|} \\
&= |L(a)| \frac{1}{\mathrm{dist}(a,H)}
\end{aligned}$$

Ce qui était l'égalité demandée.

(b) Si H est fermé alors $\mathrm{dist}(a,H) > 0$ si $a \notin H$ (voir les exercices sur les compacts), par l'égalité démontrée ci-dessus on a $\|L\|$ finie donc L est continue.

(c) Soit $X = \mathbb{R}[x]$. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^k$. Alors $\mathrm{Ker}\, V = \{0\}$ est fermé mais V n'est pas continue (voir l'exercice 5821).

Correction de l'exercice 5824 ▲

Notons $L : X \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $L(f) = f(0)$. Prenons f_n définie par $f_n(t) = 2n(1 - nt)$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$. Alors $\|f_n\| = 1$ alors que $L(f_n) = 2n$. Donc le rapport $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|} = 2n$ n'est pas borné, donc L n'est pas continue. Si $H = \{f \mid f(0) = 0\}$ alors $H = \mathrm{Ker}\, L = L^{-1}(0)$. Comme L n'est pas continue alors H n'est pas fermé (voir l'exercice 5823).

Correction de l'exercice 5825 ▲

N est bien une norme. Et on a pour tout x, $(1+x^2)|f(x)| \leq N(f)$.

$$|L(f)| = |\int_{\mathbb{R}} f| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{N(f)}{1+x^2} dx \leq N(f) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = N(f)[\mathrm{Arctan}\, x]_{-\infty}^{+\infty} = N(f)\pi.$$

Donc pour tout f on a

$$\frac{\int f}{N(f)} \leq \pi.$$

De plus pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on obtient l'égalité. Donc la norme $\|L\|$ de l'application L est π.

Correction de l'exercice 5857 ▲

I

(a) Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales. Supposons $\mathscr{P}$ de dimension finie n. Notons f_k la fonction $x \mapsto x^k$. Alors la famille $\{f_0, \cdots, f_n\}$ qui compte $n+1$ éléments est liée, donc il existe $a_0, \cdots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n = 0$. Il en résulte que le polynôme non nul à coefficients réels $a_0 + a_1 X + \cdots a_n X^n$ a une infinité de racines, ce qui est absurde.

(b) Posons $M = \sup(\bar{X})$. On doit vérifier que, *i)* pour tout $x \in X, x \leq M$ et *ii)* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in X$ tel que $M - \varepsilon \leq x$. Comme $X \subset \bar{X}$ et, pour tout $x \in \bar{X}, x \leq M$ la propriété *i)* est vérifiée par M. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in \bar{X}$ tel que $M - \dfrac{\varepsilon}{2} < x$. Comme $x \in \bar{X}$, il existe aussi $y \in X$ tel que $|x-y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $M - \varepsilon < y$ et M satisfait à *ii)*.

Remarque : on note également que $\sup(X) \in \bar{X}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un élément $x_n \in X$ tel que $x_n \geq \sup(x) - \dfrac{1}{n}$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée d'éléments de X converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sup(X)$ qui appartient donc à $\bar{X}$. On peut bien sûr en déduire la propriété *ii)* de M.

II

(a) Il est clair $\mathscr{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in (x^2+1)^1$ et $x, y \in [0,1]$, avec $x < y$. Par le théoréme des accroissements finis, il existe $c_x \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c_x)(y-x)$. Or f' est continue, donc bornée sur $[0,1]$. Soit $M = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. On a l'inégalité $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$ qui montre que $f \in \mathscr{L}$. Il en résulte que $\mathscr{L}$ contient $\mathscr{P}$ donc est de dimension infinie.

(b)
  i. Il suffit de vérifier que si $N_1(f) = 0$ et $N_2(g) = 0$, alors $f = g = 0$, les autres propriétés étant claires. Or si $N_1(f) = 0$, alors f est constante et $f(0) = 0$, donc $f = 0$. Il en va de même pour N_2.

  ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Posons $X_n = \{\dfrac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}, x \neq 0\}$. Comme $f_n(0) = 0$, on voit que $N_1(f_n) = \sup(X_n)$. Or $|f_n'(0)| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}$, appartient à $\bar{X}_n$ donc, en appliquant I 2) on constate que $|f_n'(0)| \leq \sup(\bar{X}_n) = \sup(X_n)$. Enfin $f_n'(0) = 2\pi n$ donc $N_2(f_n) \geq 2\pi n$. Il n'exite donc pas $K > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_2(f_n) < K\|f_n\|_\infty$ soit N_2 et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

  Remarques : a) on peut obtenir ce résultat (et le préciser) en remarquant que la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(2\pi n x)}{x}$ définie sur $]0,1]$ se prolonge en une fonction continue en 0 en posant $f_n(0) = 2\pi n$. Puis noter (en fait c'est un cas particulier de I 2)) que $\sup_{]0,1]} |f_n| = \sup_{[0,1]} |f_n|$ et montrer (par une étude classique de fonction) que cette dernière quantité est $2\pi n$.

  b) Ce qui fait l'intérêt pour ce problème des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est qu'elles sont bornées par 1 mais que leur pente en l'origine peut-être rendue arbitrairement grande avec n. On peut donc obtenir le même résultat avec la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $k_n(x) = nx$ si $x \leq \dfrac{1}{n}$ et 1 sinon, pour laquelle un calcul direct donne $N_1(k_n) = n$ et $\|k_n\|_\infty = 1$.

  iii. Comme, pour tout $f \in \mathscr{L}$, $N_1(f) \geq N_2(f)$, on déduit de ce qui précéde que N_1 n'est pas équivalente ni à $\| \|_\infty$. Posons $g_n(x) = x^n$, pour $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, $N_2(g_n) = 1$. De plus $g_n'(1) = n$, donc, par un raisonnement identique à celui qui précéde, $N_1(g_n) \geq n$ ce qui montre que N_1 n'est pas équivalente à N_2.

  Remarque : ce qui fait l'intérêt pour ce problème des fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est qu'elles sont bornées par 1 mais que leur pente en 1 peut-être rendue arbitrairement grande avec n. On peut donc obtenir le même résultat avec la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $l_n(x) = 0$ si $x \leq 1 - \dfrac{1}{n}$ et $nx - (n-1)$ sinon.

  iv. On pose $g_n(x) = x$ si $x \leq \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ sinon. Il est clair que $g_n \in \mathscr{L}$, $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ et $N_2(g_n) = 1$. Il n'existe donc pas de constante $K' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \geq K' N_2(g_n)$ donc N_2 n'est pas équivalente à $\| \|_\infty$. Enfin $N_2(g_n) = N_1(g_n)$, ce qui établit le même résultat pour N_1.

v. Il est clair que pour tout $f \in \mathscr{L}$, que $\lambda(f) \geq N_1(f)$. Soit $x \in]0,1]$. De l'identité $f(x) = f(0) + x\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ on déduit que $|f(x)| \leq |f(0)| + |\dfrac{f(x)-f(0)}{x}|$ (car $|x| \leq 1$) soit $|f(x)\| \leq N_1(f)$. L'application $x \mapsto f(x)$ étant continue sur $[0,1]$ (ou en appliquant I 2)) on en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$ on a également $|f(x)\| \leq N_1(f)$. En d'autre termes $\|f|_\infty \leq N_1(f)$ et $\lambda(f) \leq 2N_1(f)$. Les normes λ et N_1 sont donc équivalentes.

(c) On pose, pour tout $f \in (x^2+1)^{1:}$ $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

i. On constate aisément que si $\nu_1(f) = 0$, alors f est constante et, comme de plus $f(0) = 0$, elle est nulle. Les autre propriétés sont immédiates, donc ν et ν_1 sont des normes sur $(x^2+1)^1$.

ii. Soit $f \in (x^2+1)^{1,}$ notons $X = \{\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}; (x,y) \in [0,1]^2, x \neq y\}$. Pour montrer que $\nu_1(f) = N_1(f)$, il suffit de vérifier que $\sup(X) = \|f'\|_\infty$. Soient $x,y \in [0,1], x \neq y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre x et y tel que $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = f'(c) \leq \|f'\|_\infty$, donc $\sup(X) \leq \|f'\|_\infty$. Comme f' est continue, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f'(x_0) = \|f'\|_\infty$. Alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ appartient à $\bar{X}$, donc, en appliquant I 2), $\|f'\|_\infty \leq \sup(\bar{X}) = \sup(X)$.

Remarque : on peut formuler ce raisonnement de la manière suivante : soit $Y = \{f'(x); x \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, $X \subset Y$. On a ensuite, par définition de la dérivée, $Y \subset \bar{X}$. Donc $\sup(X) \leq \sup(Y) \leq \sup(\bar{X})$, puis on applique I 2).

iii. Les normes ν et ν_1 sont équivalentes. En effet, il est clair que $\nu_1(f) \leq \nu(f)$ pour tout $f \in (x^2+1)^{1\cdot}$ Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Si $t_0 = 0$ alors $\nu_1(f) \leq \nu(f)$. Sinon, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,t_0[$ tel que $f(t_0) = f(0) + f'(c)t_0$ ce dont on déduit que $\|f\|_\infty \leq \nu_1(f)$, puis que $\nu(f) \leq 2\nu_1(f)$.

(d) i. Soit $x \in [0,1]$. La suite de nombres réel $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle est convergente. On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (f_n) étant de Cauchy, il existe N tel que, si $m,n \geq N$ alors $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Soient $x \in [0,1]$ et $m,n \geq N$. On a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ et, ceci étant vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, on en déduit, par passage à la limite suivant m, que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi f est la limite, pour la convergence uniforme, d'une suite de fonctions continues donc est continue.

ii. Par définition de ν, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour ν est de Cauchy pour $\|\ \|_\infty$, donc (uniformément) convergente par la question qui précéde. De même $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\ \|_\infty$, donc converge uniformèment vers une fonction continue g. Il en résulte que f est dérivable et a pour dérivée la fonction continue g. Enfin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour ν donc $((x^2+1)^{1,\nu})$ est complet.
Soit maintenant $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $((x^2+1)^{1,\nu_1})$. Comme ν_1 est équivalente à ν, elle est de Cauchy pour ν donc convergente. Il existe donc $h \in (x^2+1)^1$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(h - g_n) = 0$. Mais puisque ν_1 est équivalente à ν, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_1(h - g_n) = 0$ donc $((x^2+1)^{1,\nu_1})$ est complet.

iii. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L}, \lambda)$. Comme $\lambda(f_n) \geq \|f_n\|_\infty$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy dans $((x^2+1)^{0,\|\ \|_\infty)\cdot}$ Comme $((x^2+1)^{0,\|\ \|_\infty)}$ est complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue qu'on notera f.

iv. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe N tel que, pour $m,n \geq N$ on ait, pour tout x,y et $z \in [0,1]$, avec $x \neq y$:

$$|f_n(z) - f_m(z)| + \left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))}{x-y}\right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit :

$$|f_n(z) - f(z)| + \left|\frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))}{x-y}\right| < \varepsilon,$$

donc

$$\sup_{z\in[0,1]} |f_n(z) - f(z)| + \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \left|\frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))}{x-y}\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme λ. Par ailleurs, on déduit de la seconde inégalité que, pour tout $x,y \in [0,1]$, avec $x \neq y$: $|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)| < \varepsilon|x-y|$, donc que pour n assez grand $f - f_n$ appartient à $\mathscr{L}$. Or $\mathscr{L}$ est un espace vectoriel et $f_n \in \mathscr{L}$ donc f appartient à $\mathscr{L}$.

v. Toute suite de Cauchy de $\mathscr{L}$ admet une limite dans $\mathscr{L}$ qui est donc complet.

Correction de l'exercice 5858 ▲

(a) Soit (u_n) une suite de Cauchy pour d. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad d(u_p,u_q) = |u_p^3 - u_q^3| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite (u_n^3) est une suite de Cauchy pour la distance usuelle $|.|$. Comme $(\mathbb{R},|.|)$ est complet alors (u_n^3) converge pour la valeur absolue, notons v la limite, nous avons $|u_n^3-v|$ qui tend vers 0. Donc pour $u=v^{\frac{1}{3}}$ nous avons $d(u_n,u)=|u_n^3-u^3|=|u_n^3-v|$ qui tend vers 0, donc u_n converge vers u pour la distance d. Donc $\mathbb{R}$ est complet pour d.

(b) Montrons que d ne définit pas une distance complète. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=-n$, $n\in\mathbb{N}$. Alors $d(u_p,u_q)=|e^{-p}-e^{-q}|$. Donc pour $\varepsilon>0$ fixé, soit N tel que $e^{-N}<\frac{\varepsilon}{2}$, alors pour $p,q\geq N$ on a $d(u_p,u_q)=|e^{-p}-e^{-q}|\leq e^{-p}+e^{-q}\leq 2e^{-N}\leq\varepsilon$. Donc (u_n) est de Cauchy. Supposons que (u_n) converge, notons $u\in\mathbb{R}$ sa limite. Alors $d(u_n,u)=|e^{-n}-e^{u}|$ tend vers 0 d'une part et vers e^u d'autre part. Donc $e^u=0$ ce qui est absurde pour $u\in\mathbb{R}$.

(c) La fonction $\ln(1+u)$ est continue et ne s'annule qu'en $u=0$. Donc pour $\ln(1+u)$ suffisamment petit nous avons u suffisamment petit et donc (par la relation $\ln(1+u)=u+o(u)$) nous avons

$$\frac{1}{2}u\leq\ln(1+u)\leq 2u.$$

Donc pour (u_n) une suite de Cauchy pour d, la première inégalité prouve que (u_n) est une suite de Cauchy pour $|.|$. Donc elle converge pour $|.|$ La deuxième inégalité montre que (u_n) converge pour d. Donc d définit une distance complète.

Correction de l'exercice 5859 ▲

f est injective afin que d soit bien une distance. On pose $F=f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^2$.

(a) $\Rightarrow$ Supposons que la distance d soit complète. Soit (y_n) une suite de F qui converge vers $y\in\mathbb{R}^2$. Il faut montrer que $y\in F$. Il existe $x_n\in\mathbb{R}$, tel que $y_n=f(x_n)$. Comme (y_n) est une suite convergente, c'est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$, or $d(x_p,x_q)=\|f(x_p)-f(x_q)\|=\|y_p-y_q\|$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy pour d. Comme d est complète alors (x_n) converge x, comme $x_n\to x$ (pour d) alors $f(x_n)\to f(x)$ (pour $\|.\|$). (Remarquons que par définition de d, l'application $f:(\mathbb{R},d)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\|.\|)$ est continue.) Donc (y_n) converge vers $f(x)$ et par unicité de la limite $f(x)=y$. Donc $y\in f(\mathbb{R})=F$. Donc F est fermé.

(b) $\Leftarrow$ On suppose que F est fermé. Soit (u_n) une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R},d)$. Notons $y_n=f(x_n)$. Comme $d(u_p,u_q)=\|f(u_p)-f(u_q)\|=\|y_p-y_q\|$. Donc (y_n) est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R}^2,\|.\|)$. Comme cet espace est complet alors (y_n) converge vers y. Comme $y_n\in F$ et F est fermé alors $y\in F$, donc il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=f(x)$. Il reste à montrer que (x_n) tend vers x. En effet $d(x_n,x)=\|f(x_n)-f(x)\|=\|y_n-y\|$ tend vers 0. Donc (x_n) tend vers x pour d. Donc d est complète.

Correction de l'exercice 5860 ▲

(a) i. Montrons que (X,d_ω) est complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy pour cet distance. Alors pour chaque $t\in[a,b]$, $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R},|.|)$. Comme $\mathbb{R}$ est complet alors cette suite converge, notons $f(t)$ sa limite.

Il faut montrer deux choses : premièrement que (f_n) converge vers f pour la distance considérée, deuxièmement que f est bien dans l'espace X.

ii. Comme (f_n) est une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon>0$. Il existe $n\geq 0$ tel que pour tout $p\geq 0$: $d_\omega(f_n,f_{n+p})<\varepsilon$. Donc

$$\sup_{t\in[a,b]}|\omega(t)(f_n(t)-f_{n+p}(t))|<\varepsilon.$$

On fait tendre p vers $+\infty$ et on obtient : $\sup_{t\in[a,b]}|\omega(t)(f_n(t)-f(t))|<\varepsilon$. Donc (f_n) converge vers f pour la distance d_ω.

iii. ω est une fonction non nulle sur le compact $[a,b]$, donc il existe $\alpha>0$ tel que $\omega(t)>\alpha$ pour tout $t\in[a,b]$. On en déduit que

$$\|f_n-f\|_\infty\leq\frac{1}{\alpha}d_\omega(f_n,f).$$

Comme $d_\omega(f_n,f)$ tend vers 0 alors f_n converge vers f pour la norme infini. Donc f est continue.

Conclusion : (X,d_ω) est complet.

(b) On définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t)=1$ pour $t\in[0,\frac{1}{2}]$, $f_n(t)=(1-n(t-\frac{1}{2}))$ pour $t\in[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]$ et $f(t)=0$ si $t\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$. Alors (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$. Par contre (f_n) ne converge pas dans X. Donc X n'est pas complet. En effet (f_n) converge vers la fonction f où f est définie par $f(t)=1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $f(t)=0$ sur $]\frac{1}{2},1]$. Mais cette fonction n'est pas dans l'espace X car f n'est pas continue.

Correction de l'exercice 5861 ▲

(a) On reprend l'exemple de l'exercice 5860. Et on définit g_n sur $[0,1]$ par $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Alors g_n est $\mathscr{C}^1$, et converge (donc en particulier (g_n) est de Cauchy). Elle converge vers g qui n'est pas une fonction $\mathscr{C}^1$. Donc ce n'est pas un espace complet.

(b) Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme N. Pour chaque $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge. Notons $f(t)$ sa limite. De même $(f_n'(t))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge vers $g(t)$. Nous allons montrer que f est dans X et que f_n converge vers f pour N et que $f' = g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que Pour tout $p \geq 0$,

$$N(f_n - f_{n+p}) < \varepsilon.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, f_{n+p} converge (simplement) vers f. On obtient que $\|f_n - f\|_\infty$ et que $\|f_n' - g\|_\infty$ tendent vers 0. Donc f_n converge uniformément vers f. Comme les f_n sont continues alors f est continue. De même f_n' converge uniformément vers g donc g est continue. De plus cela implique que $g = f'$.(Rappel : si (f_n) est une suite de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f, et tel que (f_n') converge uniformément vers g, alors f est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est $f' = g$.) Nous avons donc montrer que $N(f_n - f)$ tend vers 0 et que f est dans X. Donc (X,N) est complet.

Correction de l'exercice 5862 ▲

(a) Notons x^p la suite

$$x^p = (1,1,\ldots,1,1,0,0,0,\ldots).$$

(des 0 à partir de la $p+1$-ième place et de 1 avant. Si Y est l'espace de toute les suite, notons

$$x^\infty = (1,1,1,1,\ldots).$$

La suite x^∞ n'est pas dans X. Par contre $x^p \to x^\infty$ pour la distance ρ. En effet

$$\rho(x^p, x) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{p+1}} \to 0.$$

La suite (x^p) est de Cauchy, mais ne converge pas dans X, donc X n'est pas complet.

(b) i. Soit Y l'espace de toutes les suites. Alors X est dense dans dans Y (pour la topologie définie par ρ), car toute suite $y = (y_1, y_2, \ldots)$ de Y s'approche par une suite de suite (x^p) obtenue en tronquant la suite y : $x^1 = (y(1),0,0,\ldots)$, $x^2 = (y(1),y(2),0,0,\ldots)$,... En effet

$$\rho(x^p, y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^p}$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

ii. Soit $(x^n)_n$ une suite de Cauchy de Y. Montrons que pour k fixé alors $(x_k^n)_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon > 0$, alors il existe N tel que pour $p,q \geq N$ on ait $\rho(x^p, x^q) \leq \varepsilon$.

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^p - x_k^q|}{1+|x_k^p - x_k^q|} \leq \rho(x^p, x^q) \leq \varepsilon.$$

Posons la fonction $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, f est inversible pour $\alpha \geq 0$, d'inverse $f^{-1}(\beta) = \frac{\beta}{1-\beta}$. Une étude de f et de son inverse montre que si $f(\alpha) \leq \varepsilon' \leq 1$ alors $\alpha \leq 2\varepsilon'$. Comme k est fixé, posons $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2^k}$ et $\alpha = |x_k^p - x_k^q|$ on a montrer : $f(\alpha) \leq \varepsilon'$. Donc $\alpha \leq 2\varepsilon'$. Récapitulons :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad |x_k^p - x_k^q| < 2\varepsilon',$$

donc la suite $(x_k^n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge, nous notons x_k^∞ sa limite.

iii. Nous avons construit une suite $x^\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \ldots)$. Comme (x^n) est de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad \rho(x^p, x^q) < \varepsilon,$$

Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre q vers $+\infty$ on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \rho(x^p, x^\infty) < \varepsilon,$$

donc (x^n) converge vers x^∞ pour la distance ρ.

iv. Bien évidemment $x^\infty \in Y$ donc (x^n) converge vers $x^\infty \in Y$ pour ρ. Donc (Y,ρ) est un espace complet.

(c) $(X, \|.\|_\infty)$ n'est pas un espace complet. Par exemple regardez la suite $x^p = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, 0, 0, \ldots)$ alors (x^p) est une suite de Cauchy, qui ne converge pas dans X, mais dans Y sa limite est $x^\infty = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.
Notons Z l'espace des suites qui tendent vers 0. L'adhérence de X pour la topologie définie par $\|.\|_\infty$ est Z. Et $(Z, \|.\|_\infty)$ est complet.

Correction de l'exercice 5863 ▲

(a) Soit (x_n) une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall q \geq n_0 \qquad \|x_{n_0} - x_q\| < 1.$$

Puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $n_1 > n_0$ tel que

$$\forall q \geq n_1 \qquad \|x_{n_1} - x_q\| < \frac{1}{2}.$$

Puis par récurrence pour $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, on pose $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\forall q \geq n_k \qquad \|x_{n_k} - x_q\| < \frac{1}{2^k}.$$

Donc en particulier à chaque étape on a

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Posons $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ Alors $\|u_k\| \leq \frac{1}{2^k}$ donc

$$\sum_{k\geq 0} \|u_k\| \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Donc la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est normalement convergente. Si cette série converge notons $T = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme, C'est-à-dire la limite de $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$. Mais alors $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$ converge vers T. Donc la suite extraite $(x_{n_k})_k$ converge (vers $T + x_{n_0}$). Conséquence : si toute série normalement convergente est convergente, alors on peut extraire de toute suite de Cauchy une sous-suite convergente donc E est complet.

(b) Soit $p \leq q$.

$$\|S_q - S_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$$

Or la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est normalement convergente donc le reste $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$ tend vers 0 quand $p \to +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq N$ on a $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$, donc pour tout $p, q \geq N$ on a aussi $\|S_q - S_p\| \leq \varepsilon$. Donc la suite (S_n) est de Cauchy. Si E est complet alors (S_n) converge, notons S sa limite. Donc $\|S_n - S\|$ tend vers 0. Dons la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est convergente (de somme S).

Correction de l'exercice 5864 ▲

(a) (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que A_n converge vers A dans $\mathscr{L}(E,F)$. Soit $M \subset E$ une partie bornée, notons M sa borne (c'est-à-dire pour tout $x \in M$, $\|x\| \leq B$). Alors

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|A_n - A\| \leq \frac{\varepsilon}{B} \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leq \frac{\varepsilon \|x\|}{B} \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui exactement la confergence uniforme de A_n vers A sur M.

(b) (2) $\Rightarrow$ (1). Par définition de la norme d'un opérateur nous avons $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x) - A(x)\|$. Prenons comme partie bornée la sphère unité : $M = S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in S(0,1) \in \|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|A_n - A\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $\|A_n - A\|$ tend vers 0.

Correction de l'exercice 5865 ▲

C'est du cours, mais il est important de savoir rédiger ceci correctement. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}(E,F)$.

(a) Trouvons d'abord le candidat à la limite. Par définition d'une suite de Cauchy, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad \|f_p - f_q\| < \varepsilon.$$

Fixons $x \in E$, alors
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$
Quitte à poser $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\|x\|}$ (x est fixé !, si $x = 0$ c'est trivial) alors on a montrer :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon'.$$

Donc la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet alors cette suite converge, notons $f(x)$ sa limite.

(b) Nous avons construit une fonction $f : E \longrightarrow F$. Montrons que f est dans l'espace $\mathscr{L}(E,F)$, c'est-à-dire que f est linéaire. Comme pour tout n, f_n est linéaire alors, pour tout $x,y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y).$$

À la limite ($n \to +\infty$) nous avons
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$
donc f est dans $\mathscr{L}(E,F)$.

(c) Il reste à montrer que (f_n) converge bien vers f (ce qui à priori n'est pas évident). Revenons à la définition d'une suite de Cauchy (écrit d'une façon un peu différente) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \forall k \geq 0 \quad \|f_p - f_{p+k}\| < \varepsilon.$$

Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre k vers $+\infty$ alors $f_p - f_{p+k}$ tend vers $f_p - f$. Donc en passant à la limite nous avons :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \|f_p - f\| < \varepsilon.$$
Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|$ sur $\mathscr{L}(E,F)$.

Remarque : dans certains exercices il peut être utile de d'abord montrer le troisième point avant le deuxième.

Correction de l'exercice 5867 ▲

(a) Commençons par l'unicité, si x,y sont deux points fixes alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc la relation pour f s'écrit

$$d(x,y) \leq \alpha_n d(x,y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge alors (α_n) tend vers 0, donc il existe n_0 assez grand avec $\alpha_{n_0} < 1$, la relation devient

$$d(x,y) \leq \alpha_{n_0} d(x,y) < d(x,y),$$

ce qui est contradictoire.

(b) Soit $x_0 \in X$, notons $x_n = f^n(x_0)$. Alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha_n d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On va montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \geq 0 \qquad d(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon.$$

Pour n,p fixés, évaluons $d(x_{n+p}, x_n)$.

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k \end{aligned}$$

De plus la série $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge donc la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ est de Cauchy et donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$ on a

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k = S_{n+p-1} - S_{n-1} \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$ on $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_1, x_0)\varepsilon$. Quitte à poser $\varepsilon' = d(x_1, x_0)\varepsilon$, ceci prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme l'espace est complet alors cette suite converge, notons x sa limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons
$$x_{n+1} = f(x_n).$$
À la limite, la suite (x_{n+1}) tend vers x, et comme f est continue (elle est α_1-lipschitziènne : $d(f(x), f(y)) \leq \alpha_1 d(x,y)$) alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite nous obtenons
$$x = f(x).$$
Donc f possède un point fixe, qui est unique et est obtenu en partant d'un point quelconque $x_0 \in X$ comme limite de $(f^n(x_0))_n$.

(c) Il reste à estimer la vitesse de convergence, nous avons vu
$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k,$$
On fait tendre p vers $+\infty$ dans cette inégalité alors
$$d(x, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k.$$
Ce qui était l'estimation recherchée.

Correction de l'exercice 5868 ▲

Notons $g = f^n$. Alors g est une application strictement contractante dans X complet donc g possède un unique point fixe que nous notons x. Montrons l'unicité d'un point fixe pour f. Soit $y \in X$ tel que $f(y) = y$ alors $g(y) = f^n(y) = y$. Donc y est aussi un point fixe pour g, donc $y = x$.
Il reste à montrer que f possède effectivement bien un tel point fixe. Nous avons
$$\begin{aligned}
& f^n(x) = x \\
\Rightarrow \quad & f(f^n(x)) = f(x) \\
\Rightarrow \quad & f^n(f(x)) = f(x) \\
\Rightarrow \quad & g(f(x)) = f(x)
\end{aligned}$$
Nous venons de prouver que $f(x)$ est un point fixe de g. Comme g possède un unique point fixe x alors $f(x) = x$! ! Donc x est bien un point fixe pour f.

Correction de l'exercice 5869 ▲

(a) $(T \circ Tf)(x) = 1 + \int_0^x Tf(t-t^2)dt = 1 + \int_0^x (1 + \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)du)dt = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. De plus $(T \circ Tf)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(u-u^2)du$. En remarquant que pour $t \in [0,1]$, $t - t^2 \leq \frac{1}{4}$, on montre que $|T \circ Tf(x) - T \circ Tg(x)| \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ et que $|(T \circ Tf)'(x) - (T \circ Tg)'(x)| \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ Donc $N(T \circ Tf - T \circ Tg) \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \leq \frac{1}{2}N(f-g)$. Donc $T \circ T$ est une contraction et X est complet donc $T \circ T$ admet un unique point fixe, par l'exercice 5868, T admet un unique point fixe.

(b) Remarquons que $Tf = f$ est équivalent à $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$. Donc l'existence et l'unicité du point fixe pour T donne l'existence et l'unicité de la solution au problème posé.

Correction de l'exercice 5870 ▲

(a) ! !

(b)
$$\begin{aligned}
\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty &= \|\int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty \\
&\leq \int_a^b \|k(s,t)\|_\infty \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty dt \\
&\leq \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty \times \lambda \\
&< \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty.
\end{aligned}$$
Donc A est contractante et l'espace ambiant $\mathscr{C}([a,b])$ est complet, par le théorème du point fixe, A admet un unique point fixe, x. De plus, pour tout fonction $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, la suite $(A^n x_0)$ converge vers x, mais ici la norme est la norme uniforme donc $\|A^n x_0 - x\|_\infty$ tend vers 0. Donc $(A^n x_0)$ converge uniformément vers x.

(c)

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|_\infty &= \|A_1x_1 - A_2x_2\|_\infty \quad \text{car } A_ix_i = x_1,\\
&= \|\int_a^b k_1(s,t)x_1(t)dt + y_1(s) + \int_a^b k_2(s,t)x_2(t)\,dt + y_2(s)\|_\infty\\
&\leq \|\int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty\\
&\leq \lambda\|x_1 - x_2\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

ce qui exprime la dépendance continue de la solution par rapport à la fonction y.

Correction de l'exercice 5872 ▲

(a) Par l'absurde supposons que X n'a aucun point isolé. Comme $\{x\}$ est un fermé alors $\omega_x = X \setminus \{x\}$ est un ouvert (de X). De plus comme le point x n'est pas isolé alors ω_x est dense dans X.
Maintenant on peut appliquer le théorème de Baire à X qui est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$. Donc une intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est encore dense. Mais ici nous obtenons une contradiction car les ω_x sont des ouverts denses, X est dénombrable mais

$$\bigcap_{x\in X} \omega_x = \varnothing.$$

Et l'ensemble vide n'est pas dense dans X ! !

(b) Pour l'ensemble de Cantor aucun point n'est isolé, donc par la question précédente l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.

Correction de l'exercice 5873 ▲

(a) Par l'absurde supposons que sur aucun ouvert f n'est majorée. $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$

De plus O_λ est dense, en effet pour $x \in X$ et pour V_x un voisinage ouvert de x, alors par hypothèse f n'est pas majorée sur V_x donc en particulier il existe $y \in V_x$ tel que $f(y) > \lambda$ donc $y \in V_x \cap O_\lambda$. Ceci prouve que O_λ est dense dans X (V_x étant aussi petit que l'on veut).
Maintenant pour $n = 0,1,2,\ldots$, les O_n sont un ensemble dénombrable d'ouverts denses. Comme X est complet il vérifie le théorème de Baire donc l'intersection des O_n est encore un ensemble dense. Mais il est facile de voir par la définition des O_n que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing.$$

Ce qui donne la contradiction cherchée.

(b) On note $\phi : B \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Il n'est pas difficile de montrer que ϕ est semi-continue inférieurement : en effet soit $F_\lambda := \{x \in X \mid \phi(x) \leq \lambda\}$. Soit λ fixé et soit (x_k) une suite d'éléments de F_λ. Pour n fixé et pour tout k on a $f_n(x_k) \leq k$, donc par continuité de f_n, on a $f_n(x) \leq k$, ceci étant vrai pour tout n on a $x \in F_\lambda$. Donc F_λ est un fermé donc $O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$ est un ouvert. Donc ϕ est semi-continue inférieurement.
Par la première question il existe un ouvert non vide O et une constante $M > 0$ tel que ϕ soit majorée par M sur O. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in O \quad |f_n(x)| \leq M.$$

Par translation on peut supposer que l'origine o est inclus dans O. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\bar{B}(o,\varepsilon) \subset O$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o,\varepsilon) \quad |f_n(x)| \leq M$$

ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o,1) \quad |f_n(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\| \leq \frac{M}{\varepsilon}.$$

Correction de l'exercice 5875 ▲

(a) C'est du cours.

(b) Si $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ est continue alors elle induit une application restreinte $f_{|A} : A \longrightarrow \{0,1\}$ continue. Donc f est constante sur A. Soit $b \in B$ et soit (a_n) une suite d'éléments de A qui tendent vers b (c'est possible car $B \subset \bar{A}$), alors $f(a_n)$ est constante, par exemple égal à 1, car A est connexe. Mais f est continue sur B, donc $f(b) = \lim f(a_n) = 1$. On montre ainsi que f est constante sur B. Donc B est connexe. (Au passage on a montrer que $\bar{A}$ était connexe.)

(c) Soit $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue, où $A = \bigcup A_n$. A_0 est connexe donc f est constante sur A_0 et vaut v_0, de même A_1 est connexe donc f est constante sur A_1 et vaut v_1. Mais pour $a \in A_0 \cap A_1 \neq \varnothing$, on a $f(a) = v_0$ car $a \in A_0$ et $f(a) = v_1$ car $a \in A_1$. Donc $v_0 = v_1$. Donc f est constante sur $A_0 \cup A_1$. Par récurrence f est constante sur A.

Correction de l'exercice 5876 ▲

(a) Dans $\mathbb{R}^2$ il y a deux composantes connexes : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x > y\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x < y\}$.

(b) Dans $\mathbb{C}^2$ il n'y en a qu'une seule : $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,; z \neq w\}$

Correction de l'exercice 5877 ▲

Notons la frontière $\mathrm{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Nous avons la partition $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A \cup (X \setminus \bar{A})$. Si $B \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$ alors $B \subset \mathring{A} \cup (X \setminus \bar{A})$.
De plus, par hypothèses, $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$ or $\mathring{A} = A \setminus \mathrm{Fr}A$ donc $B \cap \mathring{A} \neq \varnothing$. Comme $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$ on a $B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A) = \varnothing$.
Par hypothèse $B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ donc $B \cap (X \setminus \bar{A}) = (B \cap (X \setminus A)) \setminus (B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A)) \neq \varnothing$.
Nous avons montrer que B est inclus dans l'union de deux ouverts disjoints $\mathring{A}$ et $X \setminus \bar{A}$, d'intersection non vide avec B, donc B n'est pas connexe. Par contraposition, si B est connexe alors B ne rencontre pas la frontière de A.

Correction de l'exercice 5878 ▲

(a) T est compact car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
Soit $g : T \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Par connexité du segment $[-1,1]$, g est constante sur $\{0\} \times [-1,1]$ (et vaut v) ; g est aussi constante sur $[-1,1] \times \{0\}$ et vaut v'. Mais alors $v = g(0,0) = v'$ donc g est constante sur T. Donc T est connexe.
Pour $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue. T est compact donc $f(T)$ est compact. T est connexe donc $f(T)$ est connexe. Donc $f(T)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ c'est donc un segment compact.

(b) Ce sont les quatre points cardinaux $N = (0,1)$, $S = (0,-1)$, $E = (1,0)$, $W = (-1,0)$.

(c) Par l'absurde, supposons que T soit homéomorphe à une partie I de $\mathbb{R}$, alors il existe un homéomorphisme $f : T \longrightarrow I$. Par le premier point I est un segment compact $I = [a,b]$. $T \setminus \{N\}$ est connexe donc sont image par f, $f(T \setminus \{N\})$ est connexe, mais c'est aussi le segment I privé d'un point. I privé d'un point étant connexe, le point retiré est nécessairement une extrémité. Donc $f(N) = a$ ou $f(N) = b$. Supposons par exemple $f(N) = a$. On refait le même raisonnement avec S, qui s'envoie aussi sur une extrémité, comme f est bijective cela ne peut être a, donc $f(S) = b$. Maintenant $f(E)$ est aussi une extrémité donc $f(E) \in \{a,b\}$. Mais alors f n'est plus injective car on a $f(E) = f(N)$ ou $f(E) = f(S)$. Contradiction.

Correction de l'exercice 5879 ▲

(a)
  i. $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\phi(t) = e^{it}$ est une surjection continue.
  ii. $\mathbb{S}^1$ est un compact connexe donc, par l'absurde, si $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue alors $\psi(\mathbb{S}^1)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment compact I. Soit $y \in \mathring{I}$, comme I est l'image de $\mathbb{S}^1$ alors il existe un unique $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(x) = y$. L'application f induit alors une bijection continue $f : \mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \longrightarrow I \setminus \{y\}$. Mais $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ est connexe alors que son image par f, qui est $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas (car $y \in \mathring{I}$). L'image d'un connexe par une application continue doit être un connexe, donc nous avons une contradiction.

(b) Si $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe $f(\mathbb{R}^2) = I$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment (non réduit à un point !). Prenons y un élément de $\mathring{I}$, soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = y$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ est connexe, $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas, et f est une bijection continue entre ces deux ensembles, d'où une contradiction.

Correction de l'exercice 5880 ▲

L'ensemble B est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : B \to \{0,1\}$ est constante. Soit alors $f : B \to \{0,1\}$ une fonction continue et montrons qu'elle est constante. Remarquons que la restriction de f à tout ensemble B_a est constante (B_a est connexe).
On définit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Nous allons montrer que g est localement constante (on ne sait pas si g est continue).

- Soit $a \notin \mathbb{Q}$ alors on a $(a,0) \in B$, f est une fonction continue et $\{f(a,0)\}$ est un ouvert de $\{0,1\}$, donc $f^{-1}(\{f(a,0)\})$ est un ouvert de B. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $(x,y) \in (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[) \times B$ alors $f(x,y) = f(a,0)$. Alors pour $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ on a $g(x) = g(a)$: si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x,0) = f(a,0) = g(a)$; et si $x \in \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x, \frac{\varepsilon}{2}) = f(a,0) = g(a)$. Donc g est localement constante au voisinage des point irrationnels.
- Si $a \in \mathbb{Q}$ et soit $b \in]0,1]$ alors f est continue en (a,b) donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap\mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,b) = f(a,b) = g(a)$. Si maintenant $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, on prend une suite (x_n) de rationnels qui tendent vers x. Comme f est continue alors $g(a) = g(x_n) = f(x_n,b)$ tend vers $f(x,b) = g(x)$. Donc $g(a) = g(x)$. Nous avons montrer que g est localement constante au voisinage des point rationnels.
- Bilan : g est localement constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ est connexe, alors g est constante sur $\mathbb{R}$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 5881 ▲

(a) A est connexe car connexe par arcs.

(b) Si $z \in g(A)$ alors il existe $(x,y) \in A$ tel que $g(x,y) = z$. Donc $z = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ par le théorème des accroissements finis il existe $t \in]x,y[\subset I$ tel que $z = f'(t)$ donc $z \in f'(I)$. Donc $g(A) \subset f'(I)$.
Si maintenant $z \in f'(I)$, il existe $y \in I$ tel que $z = f'(y)$, mais par définition de la dérivée $f'(y)$ est la limite de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ quand x tend vers y (et on peut même dire que c'est la limite à gauche, i.e. $x < y$). Donc $f'(y)$ est limite de points de $g(x,y)$ avec $x < y$, donc de points de A. Conclusion $z = f'(y)$ est dans $\overline{g(A)}$, et donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

(c) A est connexe, g est continue sur A donc $g(A)$ est un connexe de $\mathbb{R}$. Par l'exercice 5875 comme on a
$$g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$$
avec $g(A)$ connexe alors $f'(I)$ est connexe. Comme $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ c'est un intervalle.

Correction de l'exercice 5882 ▲

Soit $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$; soit $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Il existe i_1 tel que $x \in A_{i_1}$ on a aussi $a \in A_{i_1}$ donc il existe une chemin γ_1 qui relie x à a. De même il existe i_2 tel que $x \in A_{i_2}$ et on a également $a \in A_{i_2}$ donc il existe une chemin γ_2 qui relie a à y. Le chemin $\gamma_2 \circ \gamma_1$ relie x à y. Ceci étant valable quelque soient x et y, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction de l'exercice 5883 ▲

(a) Si $(x_1, \sin\frac{1}{x_1})$ et $(x_2, \sin\frac{1}{x_2})$ sont deux points de A alors le graphe au dessus de $[x_1,x_2]$ définie un chemin reliant ces deux points. Plus précisément le chemin est l'application $\gamma : [x_1,x_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sin\frac{1}{t})$. Donc A est connexe par arcs donc connexe.

(b) $\bar{A} = A \cup (\{0\}\times[-1,1])$. On peut utiliser l'exercice 5875 pour montrer que $\bar{A}$ est connexe. Ici nous allons le montrer directement. Supposons, par l'absurde, que $\bar{A} \subset U \cup V$ avec U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ disjoints, d'intersection non vide avec A. Comme $\{0\}\times[-1,1]$ est connexe il est entièrement inclus dans un des ouverts, supposons qu'il soit inclus dans U. Comme A est connexe alors il est inclus dans un des ouverts, donc il est inclus dans V (car s'il était inclus dans U, tout $\bar{A}$ serait contenu dans U). Trouvons une contradiction en prouvant qu'en fait $U \cap A \neq \varnothing$. En effet U est un ouvert et $(0,0) \in U$, soit $B((0,0),\varepsilon)$ une boule contenue dans U. Pour n suffisamment grand on a $x_n = \frac{1}{2\pi n} < \varepsilon$ avec $\sin\frac{1}{x_n} = \sin 2\pi n = 0$ donc $(x_n, \sin\frac{1}{x_n}) = (x_n, 0)$ est un élément de A et de U. Comme V contient A alors $U \cap V \neq \varnothing$. Ce qui fournit la contradiction.

(c) Montrons que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. Soit $O = (0,0)$ et $P = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ deux points de $\bar{A}$, par l'absurde supposons qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow \bar{A}$ tel que $\gamma(0) = O$ et $\gamma(1) = P$. On décompose en coordonnées $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. $\gamma_1^{-1}(\{0\})$ est un fermé car γ_1 est continue et de plus il est non vide car $\gamma_1(0) = 0$. Soit $t_0 = \sup \gamma_1^{-1}(\{0\})$, comme l'ensemble est fermé alors $\gamma_1(t_0) = 0$ et de plus $t_0 < 1$ car $\gamma_1(1) = \frac{1}{2\pi}$.
On regarde ce qui se passe au temps t_0, c'est l'instant ou notre chemin "quitte" l'ensemble $\{0\}\times[-1,1]$. Notons $y_0 = \gamma_2(t_0)$. Comme γ_2 est continue en y_0 et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $\eta > 0$ tel que $(|t - t_0| < \eta \Rightarrow |\gamma_2(t) - y_0| < \frac{1}{2})$. Choisissons $t_1 \in]t_0, t_0+\eta[$. Alors $t_1 > t_0$ donc $\gamma_1(t_1) > 0$. Donc le point $\gamma(t_1) = (\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1))$ est dans A (et plus seulement dans $\bar{A}$).
Supposons par exemple $y_0 \leq 0$, alors quand x parcourt $]\gamma_1(t_0), \gamma_1(t_1)[$, $\sin\frac{1}{x}$ atteint la valeur 1 une infinité de fois. Donc il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que $\gamma_2(t_2) = 1$. Donc $\gamma(t_2) = (\gamma_1(t_2), 1)$. Mais comme $|t_2 - t_0| < \eta$ alors $|\gamma_2(t_2) - y_0| = |1 - y_0| > \frac{1}{2}$. Ce qui contredit la continuité de γ_2. Nous avons obtenu une contradiction donc $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Correction de l'exercice 5886 ▲

Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ alors par linéarité de l'intégrale et grâce à la relation de l'énoncé :

$$\int_a^b f(t) \cdot P(t)\, dt = 0.$$

La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$ donc par le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
|\int_a^b f(t)^2 dt| &= \left| \int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b f(t) \cdot P(t) dt \right| \\
&= \left| \int_a^b f(t) \cdot (f(t) - P(t)) dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f(t)| \cdot \|f - P\|_\infty dt \\
&\leq \varepsilon \int_a^b |f|
\end{aligned}$$

.

Mais $C = \int_a^b |f|$ est une constante (indépendante de ε et P). Donc on vient de montrer que $|\int_a^b f(t)^2 dt| \leq \varepsilon C$ avec pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\int_a^b f^2 = 0$, or f^2 est une fonction continue et positive, son intégrale est nulle donc f est la fonction nulle.

Correction de l'exercice 5888 ▲

Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$ alors Φ est continue car les f_i sont continues. Φ est injective : en effet si $x \neq y$ alors comme $\{f_i\}$ sépare les points on a $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, par contraposition Φ est injective. Notons $F = \Phi(E)$ l'image directe de E. Alors $\Phi : E \to F$ est continue et bijective. Comme E est compact alors Φ est un homéomorphisme. Donc E est homéomorphe à F qui est une partie de $\mathbb{R}^n$.

Rappel : Si $\Phi : E \to F$ est continue et bijective et E est un espace compact alors Φ est un homéomorphisme.
La preuve est simple : soit K un ensemble fermé de E, comme E est compact alors K l'est aussi. Comme Φ est continue alors $\Phi(K)$ est un compact de F donc un fermé. Mais en écrivant ceci à l'aide de l'application Φ^{-1} nous venons de montrer que pour tout fermé K de E, l'image réciproque de K par Φ^{-1} (qui est $(\Phi^{-1})^{-1}(K) = \Phi(K)$) est un fermé. Donc Φ^{-1} est continue. Donc Φ est un homéomorphisme.

Correction de l'exercice 5889 ▲

On cherche à vérifier les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

- Tout d'abord $X \times Y$ est compact, car c'est un produit d'espaces compacts.
- Ensuite $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$: en effet pour $f, g \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f + g \in \mathscr{A}, \quad \lambda \cdot f \in \mathscr{A} \quad \text{ et } f \times g \in \mathscr{A}.$$

- $\mathscr{A}$ sépare les points : soient $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Supposons que $x_1 \neq x_2$, soit $u \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ tel que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (clairement une telle fonction existe !), soit v la fonction sur Y constante égale à 1. Alors f définie par $f(x,y) = u(x) \cdot v(y)$ est dans $\mathscr{A}$ et $f(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = f(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$ alors nécessairement $y_1 \neq y_2$ et on fait un raisonnement similaire.
- Pour tout $(x,y) \in X \times Y$ il existe une fonction $f \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) \neq 0$: prendre la fonction f constante égale à 1 qui est bien dans $\mathscr{A}$.

Par le théorème de Stone-Weierstrass $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Correction de l'exercice 5890 ▲

(a) Pour $f \in \mathscr{F}$, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_0, t \in [a,b]$ il existe $c \in]t_0, t[$ tel que $|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|$. Donc $|f(t) - f(t_0)| \leq k|t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ alors

$$\forall t \in [a,b] \qquad |t - t_0| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| \leq k|t - t_0| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de $\mathscr{F}$ en t_0. Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a,b]$ alors $\mathscr{F}$ est équicontinue.

(b) i. Notons $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leq L\|x - x_0\|$. Donc en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ comme ci-dessus on prouve l'équicontinuité de $\mathscr{H}$ en x_0, puis partout.

ii. Notons $\mathscr{H}(x) = \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors par hypothèse, $\mathscr{H}(0) \subset \bar{B}(0,\sqrt{2})$. Donc $\bar{\mathscr{H}}(0)$ est un fermé de $\bar{B}(0,\sqrt{2})$ qui est compact (nous somme dans $\mathbb{R}^n$), donc $\bar{\mathscr{H}}(0)$ est aussi compact, d'où $\mathscr{H}(0)$ relativement compact. Maintenant nous avons $\|f_n(x) - f_n(0)\| \le L\|x-0\|$. Donc $\|f_n(x)\| \le L\|x\| + \sqrt{2}$. Donc pour x fixé, $f_n(x) \in \bar{B}(0, L\|x\| + \sqrt{2})$ ce qui implique que $\mathscr{H}(x)$ est relativement compact.

iii. Comme $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact on ne peut pas appliquer directement le théorème d'Ascoli. Soit $B_R = \bar{B}(0,R)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathscr{H}_R = \{f_{n|B_R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ la restriction de $\mathscr{H}$ à B_R. Alors par le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}_R$ est relativement compact. Donc de la suite $(f_{n|B_R})_n$ on peut extraire une sous-suite convergente (sur B_R).

iv. Pour $R=1$ nous extrayons de $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{\phi_1(n)})_n$ qui converge sur B_1. Pour $R=2$, nous extrayons de $(f_{\phi_1(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_2(n)})_n$ qui converge sur B_2. Puis par récurrence pour $R=N$, nous extrayons de $(f_{\phi_{N-1}(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_N(n)})_n$ qui converge sur B_N. Alors la suite $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge sur $\mathbb{R}^n$. C'est le procédé diagonal de Cantor. En effet soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $N \ge \|x\|$. Alors $x \in B_N$ donc $(f_{\phi_N(n)}(x))_n$ converge vers $f(x)$, mais $(f_{\phi_n(n)})_{n\ge N}$ est extraite de $(f_{\phi_N(n)})_n$ donc $(f_{\phi_n(n)}(x))_n$ converge également vers $f(x)$. Nous venons de montrer que $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge simplement vers f sur tout $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 5891 ▲

(a) i. Soit (x_n) une suite convergeant vers a, alors

$$|f_n(x_n) - b| \le |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

ii. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour $n \ge N_1$ on ait $|f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

iii. (f_n) est équicontinue en a, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $(|x-a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2})$.

iv. Comme $x_n \to a$ alors il existe N_2 tel que pour $n \ge N_2$ on ait $|x_n - a| < \eta$.

v. Donc pour $n \ge \max(N_1,N_2)$ on a $|f_n(x_n) - b| \le |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $(f_n(x_n))$ converge vers b.

(b) Soit des fonctions réelles définies par $f_n(x) = (1+x)^n$. Prenons $x_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n \to a = 0$. Par contre $f_n(a) = f_n(0) = 1$ pour tout n. Mais $f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})^n$ converge vers e. L'équicontinuité est donc bien nécessaire.

Correction de l'exercice 5892 ▲

Notons G l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. Soit (x_n) une suite d'éléments de G qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer $x \in G$, c'est-à-dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de F. Écrivons pour $p,q,n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \le \|f_p(x) - f_p(x_n)\| + \|f_p(x_n) - f_q(x_n)\| + \|f_q(x_n) - f_q(x)\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) est équicontinue en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in E \quad \|x-y\| < \eta \quad \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $x_n \to x$ il existe $N \ge 0$ tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc

$$\forall p,q \ge N \quad \|f_p(x_N) - f_p(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \|f_q(x_N) - f_q(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin N étant fixé, $x_N \in G$, la suite $(f_n(x_N))_n$ est une suite de Cauchy, donc il existe $N' \ge N$ tel que pour $p,q \ge N'$ on a,

$$\|f_p(x_N) - f_q(x_N)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le bilan de toute ces inégalités est donc

$$\forall p,q \ge N' \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, donc $x \in G$ et G est fermé.

Correction de l'exercice 5893 ▲

(a) i. Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A$, alors $\mathscr{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathscr{H}\}$ est bornée, notons M une borne. Écrivons l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad \forall y \in E \quad (\|x-y\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1).$$

Or si $|f(x) - f(y)| < 1$ alors $|f(y)| < |f(x)| + 1 \le M+1$. On a donc montré

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad \forall y \in E \quad (y \in B(x,\eta) \Rightarrow |f(y)| < M+1).$$

Donc $B(x,\eta) \subset A$. Donc A est ouvert.

ii. Montrons que A est fermé. Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. On reprend $\varepsilon = 1$ et on obtient un η par équicontinuité. Comme $x_n \to x$ alors il existe N tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc pour tout f dans $\mathscr{H}$, $|f(x) - f(x_N)| < 1$; donc $|f(x)| < |f(x_N)| + 1$. Or $x_N \in A$, il existe M tel $|f(x_N)|$ soit bornée par M pour tout f dans $\mathscr{H}$. Donc pour tout $f \in \mathscr{H}$, $|f(x)| < M + 1$. Donc $x \in A$. Donc A est fermé.

(b) $x_0 \in A$ donc A est non vide, comme A est ouvert et fermé et E est connexe alors $A = E$. donc pour tout $x \in E$, $\mathscr{H}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{\mathscr{H}(x)}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Par le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}$ étant équicontinue et E étant compact alors $\bar{\mathscr{H}}$ est compact.

Correction de l'exercice 5894 ▲

(a) i. Pour $t \geq 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2} \\
&= \sin 2n\pi\sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}} \\
&= \sin 2n\pi(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{4n^2\pi^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\
&= \sin(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) \\
&= \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Donc quand $n \to +\infty$ alors $f_n(t) \to 0$. Donc (f_n) converge simplement vers 0.

ii. Pour $n \geq 1$,

$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{t + 4n^2\pi^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4\pi^2}} \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Pour $t \geq 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\varepsilon$, alors par l'inégalité des accroissement finis

$$\forall n \geq 1 \quad |t - t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(t')| \leq \frac{1}{4\pi}|t - t'| < \varepsilon.$$

Donc (f_n) est une famille équicontinue.

(b) Notons $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathscr{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après la convergence simple, $\overline{\mathscr{H}(t)} = \mathscr{H}(t) \cup \{0\}$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|.\|_\infty$) vers $f = 0$. En effet pour n impair prenons $t_n = 5n^2\pi^2$, alors $f_n(t_n) = \sin\sqrt{9n^2\pi^2} = \sin 3n\pi = \pm 1$. Pour n pair on prend $t_n = 5(n+1)^2\pi^2 - 4n^2\pi^2$ alors $f_n(t_n) = \pm 1$. Donc pour tout n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Supposons que $\mathscr{H}$ soit relativement compact alors de la suite (f_n) on peut extraire une sous-suite qui converge, nécessairement la limite est $f = 0$, mais comme pour tout n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$, nous obtenons une contradiction.

Bien sûr le théorème d'Ascoli n'est pas mis en défaut, car toutes les hypothèses sont vérifiées sauf $E = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact.

Correction de l'exercice 5895 ▲

(a) k est continue sur le compact $[a,b] \times [a,b]$ donc est uniformément continue. Écrivons cette continuité uniforme dans le cas particulier où les secondes coordonnées sont égales :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y, t \in [a,b] \qquad |x - y| < \eta \Rightarrow |k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon'.$$

(b) Comme (f_n) est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq M$. Fixons $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, par l'uniforme continuité de k, on obtient un $\eta > 0$ avec pour $|x - y| < \eta$, $|k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$.

Donc pour $|x - y| < \eta$,

$$\begin{aligned}
|Kf_n(x) - Kf_n(y)| &\leq \int_a^b |k(x,t) - k(y,t)| \|f_n\|_\infty dt \\
&\leq M\int_a^b |k(x,t) - k(y,t)| dt \\
&\leq M\int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)} dt \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui est l'équicontinuité de (Kf_n) en x. Comme ceci est valable quelque soit $x \in [a,b]$ alors (Kf_n) est équicontinue.

(c) Notons $\mathscr{H} = (Kf_n)_n$. Alors pour x donné $\mathscr{H}(x)$ est borné car $|\int_a^b k(x,t)f_n(t)dt| \leq M\int_a^b |k(x,t)|dt$ est bornée indépendamment de $n \in \mathbb{N}$. Donc $\overline{\mathscr{H}(x)}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc un compact.
Nous avons toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'Ascoli, donc $\mathscr{H} = (Kf_n)_n$ est relativement compact. Donc de la suite (Kf_n) on peut extraire une sous-suite convergente. (Attention la limite de cette sous-suite est dans $\overline{\mathscr{H}} \subset X$ et pas nécessairement dans $\mathscr{H}$.)

Correction de l'exercice 5896 ▲

En utilisant les relations de Cauchy, on trouve aisément

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

Ces conditions sont vérifiées par la fonction log. Sa dérivée est $1/z$.

Correction de l'exercice 5897 ▲

La fonction f est méromorphe comme composée de fonctions méromorphes. Son unique pôle est -1. Le contour étant entièrement inclus dans le domaine Ω, on a

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f,-1) = 2i\pi\,[\exp((a-1)\log z]_{z=-1} = 2i\pi e^{i(a-1)\pi} = -2i\pi e^{ia\pi}$$

Notons γ le petit cercle (orienté négativement), Γ le grand cercle (orienté positivement) dans C, et remarquons que sur le segment $[\varepsilon,R]+0i$, l'argument de z doit être pris nul, tandis qu'il faut le prendre égal à 2π sur le segment opposé $[R,\varepsilon]-0i$. On obtient

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_R^\varepsilon \frac{x^{a-1}e^{i2\pi(a-1)}}{1+x}\,dx + \int_\gamma f(z)\,dz$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$ et $R \to 0$, $\int_\gamma f \to 0$ et $\int_\Gamma f \to 0$ d'après les lemmes de Jordan, car $|zf(z)| \to 0$ quand $|z| \to 0$ ou $+\infty$. Finalement

$$\int_C f(z)\,dz \to (1-e^{i2\pi a})I$$

et donc

$$I = \frac{-2i\pi e^{ia\pi}}{1-e^{i2\pi a}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Correction de l'exercice 5898 ▲

Il suffit de vérifier que f est dérivable au sens complexe. Pour tout $z \neq 0$:

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w\to z}\frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{z}}{w-z} = \lim_{w\to z}\frac{1}{w-z}\left(\frac{z-w}{wz}\right) = -\frac{1}{z^2}\,.$$

La fonction f est bien holomorphe sur $(x^2+1)\setminus\{0\}$ avec $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Correction de l'exercice 5899 ▲

Considérons le produit fg. En utilisant la définition même de la dérivée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)\right) &= f(z+h)\frac{g(z+h)-g(z)}{h} + g(z)\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\ &\longrightarrow f(z)g'(z)+g(z)f'(z) \quad \text{lorsque } h \to 0\,.\end{aligned}$$

Autre manière :

$$\begin{aligned}f(z+h)g(z+h) &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))(g(z)+g'(z)h+h\varepsilon(h))\\ &= f(z)g(z)+(f(z)g'(z)+f'(z)g(z))h+h\varepsilon(h)\,.\end{aligned}$$

D'où $(fg)'(z) = f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$.

Correction de l'exercice 5900 ▲

De la même façon que pour la correction de l'exercice 5899 on a

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)}{g(z+h)} &= \frac{f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h)}{g(z)\left(1+\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)}\\ &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))\frac{1}{g(z)}\left(1-\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)\\ &= \frac{f(z)}{g(z)}+\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}h+h\varepsilon(h)\end{aligned}$$

si $g(z) \neq 0$.

Correction de l'exercice 5901 ▲

On utilise de nouveau la définition de la dérivée, d'abord pour f en z puis pour g au point $f(z)$:

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + h\varepsilon(h).$$

Notons $w_h = f'(z)h + h\varepsilon(h)$. Alors (et comme dans les exercices précédents on utilise « epsilon » pour n'importe quelle fonction tendant vers zéro lorsque sa variable tend vers zéro) :

$$g(f(z+h)) = g(f(z)+w_h) = g(f(z)) + g'(f(z))w_h + w_h\varepsilon(w_h).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{h}\big(g(f(z+h)) - g(f(z))\big) = \big(g'(f(z)) + \varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, on a $w_h \to 0$, donc $\varepsilon(w_h) \to 0$ et par ailleurs $\frac{w_h}{h} \to f'(z)$. Au final

$$(g \circ f)'(z) = \lim_{h\to 0}\big(g'(f(z)) + \varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h} = g'(f(z))f'(z).$$

Correction de l'exercice 5902 ▲

La formule de Leibniz se montre par récurrence. Le cas $n = 1$, c'est-à-dire $(fg)' = fg' + f'g$, a été démontré dans l'exercice 5899. Supposons alors que cette formule soit vraie au rang $n \geq 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz}\left((fg)^{(n)}\right)(z) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{f^{(j+1)}(z)g^{(n-j)}(z) + f^{(j)}(z)g^{(n-j+1)}(z)\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z).\end{aligned}$$

La conclusion vient du fait : $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ qui est simple à vérifier.

Correction de l'exercice 5903 ▲

Prenons $r < \min(R_1, R_2)$. Alors, il existe $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ tels que $|a_n|r^n \leq C\lambda^n$ et $|b_n|r^n \leq C\lambda^n$ (vérifiez-le !). D'où

$$\sum_{j=0}^{n}|a_j|r^j|b_{n-j}|r^{n-j} \leq (n+1)C^2\lambda^n\,,$$

ce qui permet d'affirmer, pour tout z avec $|z| = r$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}|a_jz^j||b_{n-j}z^{n-j}|\Big) < \infty\,.$$

Par le théorème du cours sur les séries doubles (voir le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, Annexe 8.2), ceci signifie que la série double

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_jz^jb_kz^k)$$

est absolument convergente. On peut donc d'après ce théorème affirmer :

$$f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}(a_jz^j)(b_{n-j}z^{n-j})\Big)\,.$$

Or, la série de droite est $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ avec $c_n = \sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$. Au passage on obtient que le rayon de convergence de cette série est au moins égal à r. Comme $r < \min(R_1, R_2)$ est arbitraire, le rayon de convergence est en fait au moins égal à $\min(R_1, R_2)$ (il peut être plus grand comme on le voit par exemple avec $f(z) = \frac{1}{1-z}$ et $g(z) = 1 - z$, ou encore avec $f(z) = \frac{2-z}{(1-z)(3-z)}$ et $g(z) = \frac{1-z}{(2-z)(3-z)}$).

Correction de l'exercice 5904 ▲

Il suffit d'utiliser la formule de Leibniz de l'exercice 5902 et le fait que le coefficient a_n du développement de f à l'origine est $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Correction de l'exercice 5905 ▲

La fonction $f(z)=\bar{z}$ n'est nulle part dérivable au sens complexe (et donc nulle part holomorphe) : car

$$\frac{1}{h}(f(z+h)-f(z))=\frac{\bar{h}}{h}$$

et la limite de cette expression n'existe pas lorsque $h \to 0$. *Remarque.* Plus généralement, une application $\mathbb{R}$–linéaire de (x^2+1) dans (x^2+1) est de la forme

$$w \mapsto \alpha w+\beta\overline{w} \tag{39}$$

(ce n'est qu'une écriture complexe des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ; une telle application est holomorphe si et seulement si $\beta=0$. C'est exactement la différence entre différentiabilité (donc réelle) et holomorphie (dérivabilité au sens complexe). En effet, les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z)=0$ où $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. C'est une réécriture complexe des équations de Cauchy-Riemann. Si vous avez une fonction f différentiable, alors sa différentielle $Df(z)$ est une application linéaire de la forme (39). Un calcul simple montre que dans ce cas

$$\beta=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \quad et \quad \alpha=\frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

avec $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. De nouveau, f est complexe différentiable en z si et seulement si $\beta=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)=0$. Dans ce cas $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z)$. Revenons à l'exercice. Si vous êtes d'accord avec ma remarque, alors nous sommes aussi d'accord sur le fait que :

$$z \mapsto x=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

n'est pas holomorphe. Ce raisonnement s'applique aussi à $z \mapsto y$. Nous reviendrons à ce genre d'applications dans l'exercice 5907.

Correction de l'exercice 5906 ▲

Pour éviter des raisonnements topologiques, supposons dans un premier temps que Ω soit un disque, par exemple le disque unité $\Omega=D=D(0,1)$, et montrons que f est constante et égale à $f(0)$. Si $z\in D$, alors le segment $[0,z]\subset D$ (et c'est pour cette raison que l'on a pris $\Omega=D$). On peut écrire

$$f(z)-f(0)=\int_0^z f'(z)\,dz=0.$$

Seulement, ici il faut expliquer le sens de cette intégrale (non connue pour l'instant). Soit $\gamma:[0,1]\to[0,z]$, $\gamma(t)=tz$, une paramérisation du segment $[0,z]$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^z f'(w)\,dw &= \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt=\int_0^1 f'(tz)z\,dt\\ &=\int_0^1 \mathrm{Re}\left(f'(tz)z\right)dt+i\int_0^1 \mathrm{Im}\left(f'(tz)z\right)dt=0.\end{aligned}$$

Pour le cas d'un ouvert connexe Ω quelconque le précédent raisonnement montre qu'au voisinage de tout point $z_0\in\Omega$ la fonction f est constante. C'est donc une propriété ouverte. Autrement dit, si $z_0\in\Omega$ est un point quelconque, l'ensemble

$$\mathscr{E}=\{z\in\Omega;\ f(z)=f(z_0)\}$$

est un ouvert. Pour conclure il faut établir que $\mathscr{E}$ est aussi un fermé de Ω (topologie induite ! !). Or ceci est évident puisque $\mathscr{E}=f^{-1}(\{f(z_0)\})$ et f est continue. Notons que $\mathscr{E}\neq\emptyset$ puisque $z_0\in\mathscr{E}$. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés du connexe Ω étant l'ensemble vide et Ω, on a $\Omega=\mathscr{E}$. La fonction f est constante sur Ω. Si Ω n'est pas connexe, f peut prendre différentes valeurs sur les différentes composantes connexes de Ω.

Correction de l'exercice 5907 ▲

Soit $f(z)=u(z)+iv(z)$ pour $z\in U$. Si f ne prend que des valeurs réelles, alors $v\equiv 0$. On tire des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0.$$

La dérivée de f est alors identiquement nulle sur l'ouvert connexe Ω ce qui implique que f est constante (voir l'exercice 5906).

Correction de l'exercice 5908 ▲

(a) La formule de Taylor avec reste intégral est

$$g(b)=g(a)+g'(a)(b-a)+\ldots+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\,dt$$

puis on remplace avec $a=0$ et $b=1$.

(b) Si $f' = f$ et si f est n–fois dérivable au sens complexe, alors $\lim_{h\to 0}(f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z))/h = \lim_{h\to 0}(f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z))/h = f^{(n)}(z)$. Par récurrence on en déduit, d'une part, que f est infiniment dérivable et, d'autre part, que $f^{(n)}(z) = f(z)$ pour tout $n \geq 0$. En particulier, $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \geq 0$. En utilisant la formule de Taylor de la question précédente on a donc

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leq |z|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} |f^{(n+1)}(uz)|\, du$$
$$\leq |z|^{n+1} \sup_{|w|\leq |z|} |f^{(n+1)}(w)| \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, du \leq \sup_{|w|\leq|z|} |f(w)| \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'où $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

(c) Fixons $z \in \mathbb{C}$ et notons $a_k = \frac{z^k}{k!}$. Alors :

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |z| \frac{1}{k+1} \to 0$$

lorsque $k \to \infty$. On en déduit que le rayon de convergence de cette série est ∞ (d'Alembert) et que F est holomorphe sur (x^2+1). De plus :

$$F'(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{kz^{k-1}}{k!} = F(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par le théorème sur les séries doubles (en fait l'exercice 5903)

$$F(z)F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = F(z+w).$$

Correction de l'exercice 5909 ▲

Non $\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n| = +\infty$ mais il n'y a pas de raison pour que $\liminf_{n\to\infty} |a_n z^n| = +\infty$. Prenez par exemple la série : $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$, de rayon de convergence $R = 1$, mais $(|a_n z^n|)$ n'a pas de limite (la valeur est 0 pour n impair et $|z|^n$ pour n pair, qui tend vers l'infini lorsque $|z| > 1$).

Correction de l'exercice 5910 ▲

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad |z| < 1.$$
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

etc.

Correction de l'exercice 5911 ▲

Discutons d'abord le rayon de convergence. D'ailleurs, ce qui suit s'applique également aux exercices suivants. Donc, d'après le théorème d'analycité des fonctions holomoephes (voir le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol : théorème 10 du chapitre 6), si f est holomorphe dans $U \subset (x^2+1)$, si $z_0 \in U$ et si $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, alors la série de Taylor de f en z_0 converge et sa somme vaut f dans ce disque $D(z_0, r)$. Ici $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Cette fonction est holomorphe dans $U = (x^2+1)^{\setminus}\{1\}$. Par conséquent, si $z_0 \in U$, alors la série de Taylor de f en z_0 vaut f dans le disque $D(z_0, R_1)$ si $R_1 = |z_0 - 1|$. Le calcul de la série est classique :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-z_0+z_0-1} = \frac{1}{z_0-1} \frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)} = \frac{1}{z_0-1} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)^k$$

pour $|z - z_0| < |z_0 - 1| = R_1$.

Correction de l'exercice 5912 ▲

La fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe dans $U = (x^2+1)^{\setminus}\{1, 2\}$. Par ce que l'on vient de dire à l'exercice précédent, le rayon de convergence demandé est $R = \min\{|z_0 - 1|, |z_0 - 2|\}$, où $z_0 \in U$ est un point quelconque fixé. On a $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ et :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-z_0+z_0-2} = \frac{1}{z_0-2} \frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)} = \frac{1}{z_0-2} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)^k$$

pour $|z-z_0| < |z_0-2| = R_2$. La série demandée est alors la différence entre celle-ci et celle de l'exercice précédent. Notons aussi que le rayon de convergence est exactement le minimum des rayons R_1 et R_2.

Correction de l'exercice 5914 ▲

Le rayon de convergence est $R=1$. Soit $0<t<1$ et étudions $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^{2^k}$. Il s'agit d'une série de termes positifs. D'où

$$f(t) \geq \sum_{k=0}^{N-1} t^{2^k} \quad \text{pour tout} \quad N \in |||.$$

Il en résulte $\liminf_{t\to 1} f(t) \geq N$ or N est arbitraire, donc $\lim_{t\to 1} f(t)=\infty$. Soit maintenant w un nombre complexe du cercle unité vérifiant $w^{2^N}=1$ pour un $N \in |||$. Dans ce cas $w^{2^k}=1$ pour tout $k \geq N$. Si de nouveau $0<t<1$, alors

$$f(tw) = \sum_{k=0}^{N-1} (tw)^{2^k} + \sum_{k\geq N} t^{2^k}.$$

Lorsque $t \to 1$, alors la première somme tend vers un nombre complexe (fini, en fait de module au plus N) et la deuxième vers ∞. Les nombres complexes w ayant la propriété $w^{2^N}=1$ pour un certain $N \in |||$ sont denses dans le cercle unité $\{|z|=1\}$. Ceci, et le principe de prolongement analytique, interdit l'existence de la fonction g holomorphe sur U comme décrit dans l'exercice. Si $z_0 \in D(0,1)$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est $R=1-|z_0|$.

Correction de l'exercice 5917 ▲

Il s'agit de formules bien connues lorsque les arguments z,w sont réels. La vérification à partir des définitions des fonctions trigonométriques données dans l'énoncé de l'exercice est laissée au lecteur. Voici comment obtenir la formule :

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \qquad \textit{pour} \quad z,w \in (x^2+1)\,. \tag{40}$$

Fixons $w \in \mathbb{R}$. Soit $f_w(z) = \cos(z+w) - \big(\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\big)$. La formule (40) étant vraie pour $z,w \in \mathbb{R}$, $f_w(z)=0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Il résulte du principe des zéros isolés que f_w est identiquement nulle. Autrement dit, on vient d'établir la formule (40) pour $(z,w) \in (x^2+1)^{\times}\mathbb{R}$. Il suffit maintenant de refaire le même argument en fixant d'abord $z \in (x^2+1)$ arbitrairement et en observant que la fonction holomorphe

$$g_z(w) = \cos(z+w) - (\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w))$$

est nulle pour tout $w \in \mathbb{R}$. De nouveau $g_z \equiv 0$ par le principe des zéros isolés, d'où la formule (40) pour tout $z,w \in (x^2+1)$.

Correction de l'exercice 5918 ▲

$$\begin{aligned}
\sin(a)ch(b) + i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b) &= \frac{1}{4i}\left\{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{b}+e^{-b}) - (e^{ia}+e^{-ia})(e^{b}-e^{-b})\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ia-b} - e^{-ia+b}\right) = \sin(a+ib).
\end{aligned}$$

Si $a,b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
|\sin(a+ib)|^2 &= (\sin(a)\,\mathrm{ch}(b))^2 + (\cos(a)\,\mathrm{sh}(b))^2 \\
&= \sin^2(a)(1+\mathrm{sh}^2(b)) + (1-\sin^2(a))\,\mathrm{sh}^2(b) \\
&= \sin^2(a) + \mathrm{sh}^2(b).
\end{aligned}$$

Cette somme de carrés de nombres réels ne peut être nulle que si $\sin(a)=0$ et $\mathrm{sh}(b)=0$, c'est-à-dire $a \in \pi\mathbb{Z}$ et $b=0$. Donc $\sin(z)=0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5923 ▲

On a les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. D'où :

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

par le théorème de Schwarz. On procède de la même façon pour v pour en déduire qu'une fonction holomorphe est harmonique.

Correction de l'exercice 5924 ▲

Cet exercice et les suivants concernent des changements de variables. Rappelons que, si $\Phi : U \to V$ est un difféomorphisme entre ouverts U,V de $\mathbb{R}^n$ et si on note $y=\Phi(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n) \in U$ et $y=(y_1,\dots,y_n) \in V$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$$

pour tout $i,j \in \{1,...,n\}$. On a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

On peut réécrire ceci en :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = (Jac(f))^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver les $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ il suffit d'inverser cette matrice M. Le reste est clair.

Correction de l'exercice 5925 ▲

On a $w = g(z)$ avec $g(z) = a(z) + ib(z)$ une fonction holomorphe et avec $z = x + iy$. Utilisons de nouveau le changement de coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial a(z)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b(z)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial b}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial a(z)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b(z)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial b}.$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann on en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} &= \left(\frac{\partial a(z)}{\partial x} + i\frac{\partial a(z)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{\partial b(z)}{\partial x} + i\frac{\partial b(z)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial b} \\
&= \left(\frac{\partial a(z)}{\partial x} - i\frac{\partial b(z)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{\partial b(z)}{\partial x} + i\frac{\partial a(z)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial b} \\
&= \left(\frac{\partial a(z)}{\partial x} - i\frac{\partial b(z)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5927 ▲

Soit Q le carré dont le bord est $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_4$ où

$$\gamma_1(t) = A + 2it, \quad \gamma_2(t) = B - 2t, \quad \gamma_3(t) = C - 2it, \quad et \quad \gamma_4(t) = D + 2t, \quad t \in [0,1].$$

Notons aussi $\gamma_{j,x} = \mathrm{Re}(\gamma_j)$ et $\gamma_{j,y} = \mathrm{Im}(\gamma_j)$, $j = 1,...,4$. Alors :

$$\int_\gamma dx = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} dx = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma'_{j,x}(t)\,dt = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x\,dx &= \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} x\,dx = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t)\gamma'_{j,x}(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (1-2t)(-2)dt + \int_0^1 (-1+2t)2dt = 0.
\end{aligned}$$

Passons à la correction de la question 3. Alors

$$\int_\gamma dz = \int_\gamma z\,dz = 0$$

puisque dans les deux cas on intègre une fonction holomorphe ($f(z) \equiv 1$ et $f(z) = z$) dans le carré Q. On a :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x\,dz &= \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t)d\gamma_j(t) = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t)\gamma'_j(t)\,dt \\
&= \int_0^1 2idt + \int_0^1 (1-2t)(-2)dt + \int_0^1 (-1)(-2i)dt + \int_0^1 (-1+2t)2dt \\
&= 2i + 2i = 4i.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la question 4., on y intègre la fonction $f_n(z) = z^n$ le long du chemin fermé γ. Mais attention, cette fonction admet une primitive seulement si $n \neq -1$. D'où

$$\int_\gamma z^n dz = 0 \quad \text{pour } n \neq -1.$$

Dans le cas restant $n=-1$ on trouve :

$$\int_\gamma f_{-1}(z)dz = 2i\pi.$$

D'ailleurs, et là on rejoint l'exercice 5929, on a :

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_C f_n(z)\,dz$$

où $C=\{|z|=1\}$. Ce cercle se paramétrise par $\sigma(\theta)=e^{2i\pi\theta}$. D'où :

$$\int_C f_n(z)\,dz = \int_0^1 e^{2i\pi n\theta} 2i\pi e^{2i\pi\theta}\,d\theta = 2i\pi\int_0^1 e^{2i\pi(n+1)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } n=-1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

De manière analogue on a

$$\int_C \bar{z}^n\,dz = \int_0^1 e^{-2i\pi n\theta} 2i\pi e^{2i\pi\theta}\,d\theta = 2i\pi\int_0^1 e^{2i\pi(1-n)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 5928 ▲

Pour toute fonction $f=u+iv$ à valeurs dans (x^2+1), on a :

$$\int_\gamma \overline{f(z)}dz = \int_0^1 (u-iv)(\gamma_1'+i\gamma_2')dt = \overline{\int_0^1 (u+iv)(\gamma_1'-i\gamma_2')dt} = \overline{\int_\gamma f(z)\overline{dz}}.$$

Voir la correction de l'exercice 5927.

Correction de l'exercice 5929 ▲

Voir la correction de l'exercice 5927.

Correction de l'exercice 5930 ▲

Dans le cas où C n'encercle pas l'origine la fonction $z\mapsto z^n$ est holomorphe au voisinage du disque bordé par C et ceci pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Par conséquent, $\int_C z^n dz = 0$. Sinon on retrouve les valeurs obtenues précédemment. On rappelle également que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}dz$$

est l'indice $\operatorname{Ind}(C,0)$ de la courbe C par rapport à l'origine. Cet indice est 1 lorsque C encercle l'origine et 0 sinon.

Correction de l'exercice 5931 ▲

On a

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$
$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = 2i\pi\operatorname{Ind}(C,a).$$

Or, $\operatorname{Ind}(C,a)=0$ si $r<a$ et $\operatorname{Ind}(C,a)=1$ si $r>a$. Le même raisonnement s'applique à $\int_C \frac{1}{z-b}dz$, d'où le résultat annoncé.

Correction de l'exercice 5932 ▲

Comme

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z^{k-n}$$

on a

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{2k-n-1}.$$

Or $\int_C z^j\,dz \neq 0$ si et seulement si $j=-1$. Le seul terme de la somme précédente qui donne une contribution non nulle à l'intégrale est lorsque k vérifie $2k-n-1=-1$. Notons que ceci est possible seulement si n est un nombre pair ! D'où :

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Sinon, si $n=2k$ est pair, on a :

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2k} \frac{dz}{z} = 2i\pi\binom{2k}{k}.$$

Comme $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n t\,dt = \frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{it}+e^{-it})^n \frac{ie^{it}dt}{ie^{it}} = \frac{-i}{2^n}\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$

D'où $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt dt = 0$ si n est impair et

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2k} t\,dt = \frac{\pi}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k}.$$

Par périodicité du cosinus ceci donne :

$$I_k = \int_0^{\pi/2}\cos^{2k} t\,dt = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k} = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}.$$

Correction de l'exercice 5937 ▲

On pose $f(z) = e^{xz}$. Alors $f^{(n)}(0) = x^n$, donc

$$x^n = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{e^{xz}}{z^{n+1}}\,dz$$

d'où la formule demandée par multiplication par $x^n/(n!)^2$.
Sur C, on a $|z| = 1$, et donc la série $\sum x^n/(n!z^n)$ est uniformément convergente par rapport à z (et sa limite est bien sûr égale à $e^{x/z}$). Donc on peut inverser les signes $\sum$ et $\int$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_C \frac{e^{xz}}{z}\left(\frac{x^n}{n!z^n}\right)dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}e^{xz}e^{\frac{x}{z}}\,dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{x(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\,ie^{i\theta}\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta})\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5938 ▲

On pose $\theta = 2\varphi$, et on obtient

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{a\,d\theta}{2a^2+1-\cos\theta} = \int_C f(z)\,dz$$

où c est le cercle trigonométrique, $z = e^{i\theta}$ et

$$f(z) = \frac{2ia}{z^2-2(2a^2+1)z+1} = \frac{2ia}{P(z)}$$

qui a deux pôles simples (racines du dénominateur P), dont une seule est intérieure au cercle, soit

$$\alpha = 2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}$$

Donc

$$I = 2\pi i\mathrm{Res}(f,\alpha) = 2\pi i\frac{2ia}{P'(\alpha)} = \frac{-4\pi a}{2\alpha-2(2a^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Correction de l'exercice 5939 ▲

Le polynôme $P(z) = z^4+z^2+1$ a pour racines les racines carrées de j et j^2, soit $\pm j^2$ et $\pm j$. Seuls j et $-j^2$ ont une partie imaginaire positive, donc

$$I = 2i\pi(\mathrm{Res}(1/P,j)+\mathrm{Res}(1/P,-j^2)) = 2i\pi\left(\frac{1}{P'(j)}+\frac{1}{P'(-j^2)}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Puis on a

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx = (I-K)/2$$

On a par la même méthode

$$K = 2i\pi\left(\frac{e^{2ij}}{P'(j)}+\frac{e^{2i(-j^2)}}{P'(-j^2)}\right)$$

Or

$$e^{2ij} = \exp\left(2i\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right) = e^{-\sqrt{3}-i}$$

et de même $e^{2i(-j^2)} = e^{-\sqrt{3}+i}$. Finalement

$$J = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[1-e^{-\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin 1+\cos 1\right)\right].$$

Correction de l'exercice 5940 ▲

On a, sachant que $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$:

$$W_n = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{1}{2^{2n+2}}\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{iz}$$

où C est le cercle trigonométrique et $z = e^{i\theta}$. En posant

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$$

on a immédiatement

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\mathrm{Res}(f,0)$$

car 0 est le seul pôle de f. Le résidu est en fait le coefficient en $1/z$ dans le développement de f, c'est-à-dire le coefficient constant dans $(z+1/z)^{2n}$, soit par la formule du binôme, C_{2n}^n. Donc

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Correction de l'exercice 5941 ▲

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+2\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n \cos nx\right].$$

Correction de l'exercice 5942 ▲

On utilise

$$\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

Ici on doit avoir $\cos x\cosh y = a$ et $\sin x\sinh y = 0$. La dernière équation implique $x = 0$ ou π, ou $y = 0$. La solution $y = 0$ ne convient pas, car aucun réel n'a pour cosinus $a > 1$. Donc il faut $x = 0$, et $\cosh y = a$ ou bien $x = \pi$ et $\cosh y = -a$. Cette dernière équation est sans solutions ($\cosh y \geq 1$ pour tout y). Les solutions sont donc $z = \pm i\arg\cosh a$. Leur sinus est $\sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = i\sinh y$ ici, soit $\pm i\sqrt{a^2-1}$ (car $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$).
On a donc, en posant $f(z) = 1/[(1+z^2)(2-\cos z)]$ (fonction paire) :

$$I_a = i\pi\mathrm{Res}(f,i) + i\pi\mathrm{Res}(f, i\arg\cosh a)$$

car i et $i\arg\cosh a$ sont les deux seuls pôles de f de partie imaginaire > 0. Puis

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,i) &= \left(\frac{1}{2z(a-\cos z)}\right)_{z=i} = \frac{1}{2i(a-\cosh 1)}\\ \mathrm{Res}(f,i\arg\cosh a) &= \left(\frac{1}{(1+z^2)\sin z}\right)_{z=i\arg\cosh a} = \frac{1}{i(1-\arg\cosh^2 a)\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

Donc

$$I_a = \frac{\pi}{(1-\arg\cosh^2 a)\sqrt{a^2-1}} + \frac{\pi}{2(a-\cosh 1)}.$$

Correction de l'exercice 5943 ▲

Sur le côté $[R, R+i\pi]$, la fonction $f(z) = e^{az}/\cosh z$ est majorée en module par

$$\frac{e^{aR}}{|\cosh(R+iy)|} = \frac{e^{aR}}{\cosh^2 R - \sin^2 y} < \frac{e^{aR}}{\cosh^2 R - 1} \longrightarrow 0 \text{ quand } R \to \infty$$

De même sur l'autre côté. L'intégrale sur le côté $[R+i\pi, -R+i\pi]$ vaut $e^{ia\pi}\int_{-R}^R f(x)\,dx$.
La fonction f n'a qu'un pôle dans le rectangle, qui est $i\pi/2$. Donc à la limite

$$(1+e^{ia\pi})I = 2i\pi\mathrm{Res}(f, i\pi/2) = 2i\pi\frac{e^{ia\pi}}{i} = 2\pi e^{ia\pi}$$

et le résultat en divisant.

Correction de l'exercice 5944 ▲

On intègre $f(z)=e^{2iaz-z^2}$ sur le rectangle. Il n'y a aucun pôle, donc l'intégrale sur le rectangle est nulle ; l'intégrale sur le côté $[R,R+ia]$ tend vers zéro. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{2iax-x^2}\,dx &= \int_{[0,ia]} f(z)\,dz+\int_{[ia,ia+\infty]} f(z)\,dz\\ &= \int_0^a e^{-2ay+y^2}\,i dy+\int_0^{+\infty} e^{(ia-x)(ia+x)}\,dx\\ &= i\int_0^a e^{y^2-2ay}\,dy+e^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

d'où le résultat en ne conservant que la partie réelle.

Correction de l'exercice 5945 ▲

– Le bord du quart de disque est formé de trois parties : le segment $[0,a]$, le quart de cercle, et le segment $[ia,0]$. L'intégrale sur le quart de cercle tend vers zéro quand $a\to\infty$ (lemme de Jordan), et en posant $z=iy$, on voit que

$$\int_{[ia,0]} zR(z^4)\,dz=\int_0^a yR(y^4)\,dy$$

donc l'intégrale sur le contour tend vers $2I$. Donc I est égal à $i\pi$ fois la somme des résidus de $zR(z^4)$ dans le quart de plan $\{\operatorname{Re} z>0,\operatorname{Im} z>0\}$.

– Les pôles sont $e^{i\pi/8}$ et $e^{i3\pi/8}$. On trouve $I=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

– On intègre de même sur le contour formé du bord de $\{0<\arg z<\frac{2\pi}{p},0<|z|<a\}$. On obtient

$$\left(1-e^{i2\pi\frac{n+1}{p}}\right)I=2\pi i\sum_{\substack{\text{pôles } z_k\\ 0<\arg z_k<\frac{2\pi}{p}}}\operatorname{Res}\left(z^nR(z^p),z_k\right)$$

La formule n'est intéressante que si le membre de gauche est non nul, c'est-à-dire si $n+1$ n'est pas un multiple de p.

– Dans ce cas, il faut donc $p\geq 2$. On est forcé de prendre une puissance paire, car on a supposé R sans racines réelles : ici $R(x)=1/(1+x^2)$, et $n=1$. Il y a deux pôles dans l'angle concerné, soit $e^{i\pi/2p}$ et $e^{i3\pi/2p}$. Le calcul est semblable au cas *(b)*, et donne

$$I_p=\frac{\pi}{2p\sin\dfrac{\pi}{p}}.$$

Correction de l'exercice 5946 ▲

Soit $f(z)=\operatorname{Log}(z)$. Alors

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{1}{z}=\frac{1}{z_0-(z_0-z)}=\frac{1}{z_0}\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0}}\\ &= \frac{1}{z_0}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z_0^k}(z_0-z)^k \qquad \text{pour} \quad |z-z_0|<|z_0|.\end{aligned}$$

Notons que $\{z\in(x^2+1)\,;\,|z-z_0|<|z_0|\}=D(z_0,|z_0|)$ est optimal car on ne peut prolonger $\operatorname{Log}(z)$ en 0. Le développement est :

$$f(z)=\operatorname{Log}(z_0)-\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{kz_0^k}(z-z_0)^k.$$

En ce qui concerne la deuxième question, la réponse est NON. D'après le cours f coincide avec sa série de Taylor *si* $D(z_0,R)\subset\Omega$. Or, si $\operatorname{Re}(z_0)<0$, ce n'est pas le cas et $D(z_0,|z_0|)\cap]-\infty,0[\neq\emptyset$. Le Log et la série de Taylor ne coincident pas dans $D(z_0,|z_0|)\cap\Omega$ puisque le Log ne peut être prolongé de manière continu dans aucun point de $]-\infty,0[$. Remarquons qu'ici $D(z_0,|z_0|)\cap\Omega$ n'est pas connexe ce qui est cruciale dans l'exercice 5949.

Correction de l'exercice 5947 ▲

On a $\sin(z)=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=0$ si et seulement si $e^{2i\pi z}=1$ ce qui est le cas si et seulement si $z\in\pi\mathbb{Z}$. Soit $z_0\in U=(x^2+1)\setminus\pi\mathbb{Z}$. Alors, le rayon de convergence de la séries de Taylor de f est

$$R=\operatorname{dist}(z_0,\pi\mathbb{Z})=\min_{n\in\mathbb{Z}}|z_0-\pi n|.$$

Correction de l'exercice 5948 ▲

Si $f(z)g(z)=0$ pour tout $z\in(x^2+1)$, alors au moins une des fonctions f,g a un zéro non isolé.

Correction de l'exercice 5949 ▲

Commençons donc par le contre-exemple en prenant $U = \Omega$, c'est à dire $U = (x^2+1)^{\setminus}]-\infty,0]$, et $f = \mathrm{Log}$. Il suffit alors de choisir $z_1 = -1+i$ et $z_2 = -1-i$ et d'appliquer l'exercice 5946. Supposons maintenant U convexe, notons $D_i = D(z_i,R_i)$, $i = 1,2$, et supposons que $V = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Les conséquences immédiates de la convexité de U sont : (a) $U \cap D_1$ et $U \cap D_2$ sont connexes (et même convexes). (b) $[z_1,z_2] \subset U$ et donc $V \cap U$ est un ouvert non vide. Considérons g_1. Si $r > 0$ est suffisamment petit pour que $D(z_1,r) \subset U$, alors $f = g_1$ dans $D(z_1,r)$. Par le principe du prolongement analytique (ou celui des zéros isolés) on a $f = g_1$ dans le connexe $U \cap D_1$. C'est donc aussi vrai dans $V \cap U \subset D_1 \cap U$. Le même raisonnement s'applique à g_2 et donc $g_1 = g_2$ dans $V \cap U$. Encore une fois le principe du prolongement analytique assure donc que $g_1 = g_2$ dans V (qui est connexe).

Correction de l'exercice 5950 ▲

(a) Soit $\phi(t,z) = \frac{z-1}{1+t(z-1)}$ et notons $D = \{|z-1| < 1\}$. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $z \in D$ on a

$$\phi(t,z) = (z-1)\sum_{k\geq 0}(-1)^k t^k (z-1)^k.$$

Or $|(-1)^k t^k (z-1)^k| \leq |z-1|^k$. Si $0 < r < 1$, alors la série précédente converge normalement dans $D(1,r)$ ce qui permet d'avoir (cf. le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, chapitre 15, théorème 29)

$$\int_0^1 \phi(t,z)dt = \sum_{k\geq 0}(-1)^k (z-1)^{k+1}\int_0^1 t^k dt = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Cette série est la série de Taylor de $\mathrm{Log}(z)$ en 1 qui coincide avec $\mathrm{Log}(z)$ dans le disque D. Par conséquent, $z \mapsto \int_0^1 \phi(t,z)dt$ et $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ coincident dans D. On conclut par prolongement analytique et en remarquant que $z \mapsto \int_0^1 \phi(t,z)dt$ est une fonction holomorphe dans Ω (cf. le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, chapitre 14, théorème 26). En ce qui concerne le reste R_N voici le calcul :

$$\begin{aligned} R_N(z) &= \int_0^1 \sum_{k\geq N}(-1)^k (z-1)^{k+1} t^k dt \\ &= (-1)^N \int_0^1 (z-1)^{N+1} t^N \sum_{k\geq 0}(-1)^k (z-1)^k t^k dt \\ &= (-1)^N (z-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{1+t(z-1)}dt. \end{aligned}$$

(b) Si $\mathrm{Re}(z) \geq \delta$, alors

$$|1+t(z-1)| \geq |\mathrm{Re}(1+t(z-1))| = |1+t\,\mathrm{Re}(z-1)| \geq \delta.$$

Par conséquent,

$$|R_N(z)| \leq |z-1|^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N\,dt}{|1+t(z-1)|} \leq \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}.$$

D'où la convergence uniforme.

(c) Voir ci-dessus.

(d) On a $z = 1+e^{i\phi} = (e^{i\frac{\phi}{2}}+e^{-i\frac{\phi}{2}})e^{i\frac{\phi}{2}} = 2\cos\frac{\phi}{2}e^{i\frac{\phi}{2}}$. D'où $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\phi}{2}$ et $r = |z| = 2|\cos\frac{\phi}{2}| = 2\cos\frac{\phi}{2}$. Comme :

$$\begin{aligned} \log(2\cos\frac{\phi}{2}) + i\frac{\phi}{2} &= \mathrm{Log}(z) = \sum_{k\geq 1}(-)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k} = \\ &= \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(k\phi) + i\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin(k\phi) \end{aligned}$$

il suffit d'identifier les parties réelles et imaginaires pour en déduire les égalités demandées. La convergence uniforme résulte de la question 3 puisque

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(1+e^{i\phi}) = 1+\cos\phi \geq 1+\cos(\pi-\varepsilon) = \delta > 0.$$

Correction de l'exercice 5951 ▲

(a) C'est le principe du maximum.

(b) La fonction $g(z) = f(z)f(-z)$ est nulle sur le cercle de rayon 1.

Correction de l'exercice 5952 ▲

Soit $z = e^{i\theta}$. Alors $|4z+3| = |e^{i\theta}(4+3e^{-i\theta})| = |\overline{4+3e^{i\theta}}| = |4+3z|$. Par le principe du maximum

$$|\Phi(z)| < 1 = \sup_\theta |\Phi(e^{i\theta})| \quad \text{pour tout} \quad z \in D.$$

Correction de l'exercice 5953 ▲

Supposons qu'il existe $z \in (x^2+1)$ avec $F(z) \neq 0$ et notons $\alpha = |F(z)| > 0$. Si $n > 1$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$, alors le principe du maximum affirme que

$$|F(z)| < \frac{1}{n} < \alpha \quad \text{pour tout} \ |z| < n.$$

Contradiction.

Correction de l'exercice 5955 ▲

Soit $g(z) = e^{f(z)}$. On a $|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(f(z))}$. Par conséquent g est une fonction entière bornée. Elle est donc constante par d'Alembert-Liouville.

Correction de l'exercice 5956 ▲

La formule de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$ est

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}}\, d\xi$$

où $C_R = \{|\xi| = R\}$. Pour les estimations suivantes, prenons $R > \min(2|z|, 1)$. Comme $|\xi - z| \geq |\xi| - |z| = R - |z| \geq R/2$,

$$\frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z)^{n+2}|} \leq M\frac{(1+R)^n}{(R/2)^{n+2}} \leq M\frac{(2R)^n}{(R/2)^{n+2}} = 2^{2n+2}M\frac{1}{R^2}.$$

Ensemble avec la formule de Cauchy on a donc

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} 2^{2n+2}M\frac{1}{R^2}|d\xi| = 2^{2n+2}M\frac{1}{R}$$

pour n'importe quel $R > 2|z|$. On vient de montrer que $f^{n+1}(z) = 0$ pour tout $z \in (x^2+1)$. Utilisons maintenant $g(z) = \frac{f(z)-P(z)}{z^{n+1}}$ où P est le polynôme de Taylor de f à l'origine à l'ordre n. On remarque d'abord que l'origine est zéro d'ordre $n+1$ de $f(z) - P(z)$ ce qui explique que g se prolonge holomorphiquement à l'origine. C'est donc une fonction entière pour laquelle on a

$$|g(z)| \leq \frac{C|z|^n}{|z|^{n+1}} = C\frac{1}{|z|}$$

pour un certain $C > 0$ et pour z de module suffisamment grand. De nouveau, g est une fonction entière bornée, elle est donc constante (notre estimation donne même $g \equiv 0$ et donc $f = P$).

Correction de l'exercice 5957 ▲

Soit $z = Re^{i\theta}$. Alors $|e^z| = e^{R\mathrm{Re}(e^{i\theta})} = e^{R\cos(\theta)}$. Pour $f(z) = z + e^z$, on a, pour θ tel que $\cos(\theta) \leq 0$, $|f(z)| \geq R - e^{R\cos(\theta)} \geq R - 1$. Si par contre $\cos(\theta) > 0$ alors $|f(z)| \geq e^{R\cos\theta} - R$. Dans les deux cas

$$|f(Re^{i\theta})| \to \infty \quad \text{pour} \ R \to \infty.$$

Nos calculs n'impliquent pas $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$! Comme en fait e^z n'est PAS un polynôme, on peut même affirmer que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ est FAUX.

Correction de l'exercice 5958 ▲

(a) Le résidu est $a_{-1} = 1$.

(b) $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$ pour $|z| < 1$. C'est une série entière car f est holomorphe dans le disque unité et $\mathrm{Res}(f,0) = 0$.

(c) $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k-1} = \frac{1}{z} - z + z^3.....$et $\mathrm{Res}(f,0) = 0$

Correction de l'exercice 5959 ▲

Comme $e^w = \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!}$,

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n.$$

Par conséquent, $\text{Res}(f,0) = 1$. Sinon, si $z_0 \neq 0$, alors $\text{Res}(f,z_0) = 0$ par holomorphie de f dans $(x^2+1)\setminus\{0\}$.

Correction de l'exercice 5960 ▲

(a) Comme $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots = z(1+o(z))$,

$$f(-z) = \frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z}(1+o(z))^{-1} = \frac{1}{z}(1+o(z)) = \frac{1}{z} + o(1).$$

Par conséquent f possède un pôle simple à l'origine (ce qui est évident puisque $\sin(z)$ possède un zéro simple à l'origine) et $\text{Res}(f,0) = 1$. On l'obtient aussi par la formule de l'exercice 5966 et le fait que l'origine est un pôle simple :

$$\text{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1.$$

La partie singulière de la série de Laurent est $\frac{1}{z}$ et le terme constant est 0.

(b) On a $\sin(z) - \text{sh}(z) = (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) - (z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) = -\frac{z^3}{3} + O(z^7)$. D'où

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z) - \text{sh}(z)} = -\frac{3}{z^3}(1+O(z^4)) = -\frac{3}{z^3} + O(z).$$

(c) On obtient de manière analogue que

$$f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\,\text{sh}(z)} = \frac{1}{z^3} + O(z).$$

Correction de l'exercice 5961 ▲

Observons tout d'abord que :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}.$$

On a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \quad \text{pour } |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \quad \text{pour } |z| > 1.$$

De la même manière

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \quad \text{si } |z| < 2 \text{ et } \frac{1}{z-2} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \quad \text{si } |z| > 2.$$

On en déduit les expressions des séries de Laurent en 0 dans les trois couronnes centrées à l'origine. En $z = 1$ et $z = 2$, f a des pôles simples. D'où

$$\text{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = -1 \quad \text{et} \quad \text{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = 1.$$

Déterminons encore la série de Laurent f en 1 :

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1}(-1)\sum_{n\geq 0}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

pour $|z-1| < 1$.

Correction de l'exercice 5962 ▲

Soit $\gamma : I \to (x^2+1)$ un lacet quelconque. Posons

$$H(t,u) = u\gamma(t) \quad \text{pour} \quad t \in I \quad \text{et} \quad u \in [0,1].$$

C'est clairement une homotopie de lacets (voir la définition du cours !) telle que $H(t,1) = \gamma(t)$ et $H(t,0) = 0$ pour tout $t \in I$.

Correction de l'exercice 5963 ▲

Soit γ un lacet dans (x^2+1). Alors $\sup_{t\in I}|\gamma(t)| = R/2 < \infty$. Si $|z| > R$, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ est holomorphe dans le disque $D(0,R)$. Par conséquent,

$$\text{Ind}(\gamma,z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = 0.$$

Remarquons que ceci implique que $\text{Ind}(\gamma,z) = 0$ pour tout z dans la composante connexe non bornée de $(x^2+1)\setminus\gamma$.

Correction de l'exercice 5964 ▲

(a) Le calcul de l'indice de c_N est évident. L'affirmation sur l'existence de g continue telle que $\gamma = e^g$ et $g(1)-g(0) = 2\pi i N$ est le contenu du polycopié de J.-F. Burnol 2005/2006, chapitre 30. Le reste est laissé au lecteur.

Correction de l'exercice 5966 ▲

Si f a un pôle d'ordre N en z_0, on a, avec $a_{-N} \neq 0$,

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \ldots$$

D'où

$$(z-z_0)^N f(z) = a_{-N} + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{N-1} + a_0 (z-z_0)^N + \ldots.$$

ce qui donne

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} \left[(z-z_0)^N f(z)\right] = (N-1)!\, a_{-1} + o(z-z_0).$$

La formule en résulte en faisant tendre z vers z_0. Le cas $N=1$ est important pour la pratique. Notons que, si f a un pôle simple en z_0, cette fonction s'écrit $f = h/g$ au voisinage de z_0 où h, g sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0 telles que h ne s'annule pas en z_0 et g a un zéro simple en z_0, i.e. $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Comme

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = h(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)}$$

on a aussi la formule utile

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{41}$$

Correction de l'exercice 5968 ▲

La fonction $f(z) = 1/(z-a)(z-b)(z-c)$ est holomorphe dans le disque $D(0,a)$. Par conséquent l'intégrale est nulle si $r < a$. Par le théorème des résidus,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz = \mathrm{Res}(f,a) \quad , \quad \mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,b) \quad \textit{ou}$$
$$\mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,b) + \mathrm{Res}(f,c)$$

si $a < r < b$, $b < r < c$ ou $c < r$. Le calcul de ces résidus se fait par la formule de l'exercice 5966 puisque tous les pôles sont simples :

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(a-b)(a-c)} \quad , \quad \mathrm{Res}(f,b) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$$
$$\textit{et} \quad \mathrm{Res}(f,c) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

On en déduit façilement la valeur de l'intégrale dans les trois cas. En ce qui concerne le calcul de cette intégrale via la décomposition en éléments simples remarquons juste que

$$\int_C \frac{1}{z-d} dz$$

vaut $2i\pi$ si d est à l'intérieur de C et 0 si d est à l'extérieur.

Correction de l'exercice 5970 ▲

On a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} - \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \\ &= 2i\pi\Big(\mathrm{Res}(f,z_1) + \mathrm{Res}(f,z_2)\Big) = 2i\pi\left(\frac{f(z_1)}{z_1-z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2-z_1}\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{z_2 \to z_1} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2i\pi f'(z_1).$$

Correction de l'exercice 5971 ▲

Analogue à l'exercice 5968

Correction de l'exercice 5973 ▲

Comme $\tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ cette fonction est une fonction méromorphe de (x^2+1) ayant que des pôles simples en $1/2 \bmod 1$. En effet, $\cos(w) = 0$ si et seulement si $w = \pi/2 \bmod \pi$ et $\cos'(\pi/2 + k\pi) \neq 0$. Notons $z_k = 1/2 + k$, $k \in \mathbb{Z}$. La formule (41) s'applique et donne

$$\operatorname{Res}(\tan(\pi z), z_k) = \frac{\sin(\pi z_k)}{-\pi \sin(\pi z_k)} = -\frac{1}{\pi}.$$

Par conséquent :

$$\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\, dz = 2i\pi 2N\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4iN.$$

Correction de l'exercice 5974 ▲

Si $A = R\cos(\Phi)$ et $B = R\sin(\Phi)$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin(\theta) + C\cos(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + R\sin(\theta + \Phi)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + R\sin(\alpha)}.$$

Pour trouver la valeur de cette dernière intégrale posons $z = e^{i\alpha}$. Alors $d\alpha = -i\frac{dz}{z}$ et

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + R\sin(\alpha)} = \int_{|z|=1} \frac{-idz}{z(A + R\frac{z-\bar{z}}{2i})} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{Rz^2 + 2iAz - R}.$$

Le dénominateur de cette dernière expression s'annule en

$$z^{\pm} = \frac{-2iA \pm \sqrt{-4A^2 + 4R^2}}{2R} = -i\left(\frac{A}{R} \mp \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}\right)$$

Un calcul élémentaire montre que seulement la racine $z^+ = -i\left(\frac{A}{R} - \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}\right)$ est dans le disque unité ouvert pourvu que $A > 0$ (le cas $A < 0$ est similaire). Il s'ensuit par le théorème du résidu que

$$\frac{1}{2\pi} I = i\frac{2}{R}\frac{1}{z^+ - z^-} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - R^2}}.$$

Correction de l'exercice 5977 ▲

Si $z = e^{i\theta}$, alors $\sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ et $dz = ie^{i\theta}d\theta$. D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{z - \bar{z}}{2ia + z - \bar{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2iaz - 1}\frac{dz}{z}.$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème des résidus.

Correction de l'exercice 5981 ▲

Rappelons la formule de Cauchy pour f holomorphe sur $\overline{\Omega}$ (donc sans singularités) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Il s'agit ici d'obtenir une version généralisée pour des fonctions f ayant des singularités $z_1, \ldots, z_N \in \Omega$. Fixons $z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ et considérons $G(w) = \frac{f(w)}{w-z}$. Cette fonction a un pôle simple en $w = z$ et :

$$\operatorname{Res}(G, z) = \lim_{w \to z}(w - z)G(w) = f(z).$$

Les autres singularités de G dans Ω sont $z_1, \ldots, z_N$. Par définition, le résidu de G en z_j est le « coefficient a_{-1} » de la série de Laurent de G en z_j. Or

$$G(w) = \frac{1}{w - z} f(w) = \sum_{k \geq 0} b_k (w - z_j)^k \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l (w - z_j)^l$$

puisque $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ est holomorphe au voisinage de z_j (et bien sûr on peut calculer les b_k, mais ce n'est pas utile). On remarque que pour calculer a_{-1} interviennent seulement les indices (k, l) qui vérifient $k + l = -1$. Comme $k \geq 0$ on a $l = -1 - k < 0$. D'où :

$$\operatorname{Res}(G, z_j) = \operatorname{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w - z}, z_j\right).$$

On peut maintenant utiliser l'exercice 5980 ou alors conclure directement : si $R_0 = 2\max\{|z|,|z_j|\}$, alors pour tout $R > R_0$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=R}\frac{g_j(w)}{w-z}dw = \sum_{\xi\in\{z,z_j\}}\operatorname{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w-z},\xi\right).$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{|w|=R}\frac{g_j(w)}{w-z}dw$ ne dépend pas de $R > R_0$. Or, il existe $C > 0$ tel que

$$\left|\frac{g_j(w)}{w-z}\right| \leq \frac{C}{|w|^2} \quad , \quad |w| > R_0\,,$$

ce qui entraîne

$$\left|\int_{|w|=R_0}\frac{g_j(w)}{w-z}dw\right| \leq \lim_{|w|=R}\int_{|w|=R_0}\frac{C}{|w|^2}|dw| = 0.$$

D'où

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=R_0}\frac{g_j(w)}{w-z}dw = \operatorname{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w-z},z_j\right)+g_j(z).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des résidus à G pour conclure :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega}G(w)\,dw = f(z)-g_1(z)-\ldots-g_N(z).$$

Correction de l'exercice 5982 ▲

Dans le calcul des intégrales on est souvent confronté à des passages à la limite (du genre $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz$ ou $\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\,dz$ dans le cas ou 0 est une singularité que l'on contourne, C_R un morceaux de cercle comme dans les exercices ici). Cet exercice et le suivant donnent des outils très pratiques pour ce genre de calculs.
Si f a z_0 comme pôle simple, sa série de Laurent en z_0 est de la forme

$$f(z) = a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots. = \sum_{k\geq -1}a_k(z-z_0)^k.$$

Par convergence normale de cette série

$$\begin{aligned}\int_{C_r(\alpha,\beta)}f(z)\,dz &= \sum_{k\geq -1}a_k\int_{C_r(\alpha,\beta)}(z-z_0)^k\,dz = \sum_{k\geq -1}a_k\int_\alpha^\beta(re^{i\theta})^k ire^{i\theta}\,d\theta\\ &= ia_{-1}(\beta-\alpha)+r\sum_{k\geq 0}\left(r^k a_k\frac{e^{i(k+1)\beta}-e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)}\right).\end{aligned}$$

On en déduit l'enoncé de l'exercice en observant que $\left|\frac{e^{i(k+1)\beta}-e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)}\right| \leq \frac{2}{k+1}$ et en faisant tendre $r\to 0$.

Correction de l'exercice 5983 ▲

Pour $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que $|f(z)| \leq \varepsilon$ pour tout $|z| \geq R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Si C_R est le demi-cercle supérieur orienté alors

$$\begin{aligned}&|\int_{C_R}f(z)e^{iz}\,dz| = |\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i(Re^{i\theta})}iRe^{i\theta}\,d\theta| \leq \varepsilon\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}R\,d\theta\\ &= 2\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}Re^{-R\sin\theta}\,d\theta \leq 2\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}Re^{-R\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4\varepsilon(1-e^{-R\frac{\pi}{4}}) \leq 8\varepsilon.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5984 ▲

Utiliser les exercices 5982 et 5983.

Correction de l'exercice 5985 ▲

Par holomorphie de $z \mapsto e^{-z^2}$,

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx+\int_{C_R}e^{-z^2}\,dz+\int_{Re^{i\pi/4}}^0 e^{-z^2}\,dz = 0.$$

Notons $I_{1,R}$ la première intégrale ci-dessus, $I_{2,R}$ la deuxième et $I_{3,R}$ la troisième. Alors,

$$\lim_{R\to\infty}I_{1,R} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi u^2}\sqrt{\pi}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Comme $e^{-z^2}=e^{-\left(e^{i\pi/4}t\right)^2}=e^{-it^2}=\cos(t^2)-i\sin(t^2)$ pour $z=e^{i\pi/4}t$ on a

$$\begin{aligned} I_{3,R} &= -\int_0^R \left(\cos(t^2)-i\sin(t^2)\right)e^{i\pi/4}dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_0^R \cos(t^2)+\sin(t^2)dt+i\int_0^R \cos(t^2)-\sin(t^2)dt\right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de déterminer $\lim_{R\to\infty} I_{2,R}$ pour en déduire les intégrales de Fresnel. Si on pose $z=Re^{i\theta}$, alors

$$\int_{C_R} e^{-z^2}dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta$$

ce qui implique

$$|I_{2,R}|\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2\theta)}d\theta=\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos(\alpha)}d\alpha.$$

Du changement de variables $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ et du fait que $\sin\beta\geq\frac{\beta}{2}$ pour $\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ on déduit que :

$$|I_{2,R}|\leq-\frac{R}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2\sin(\beta)}d\beta\leq\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{\beta}{2}}d\beta=-\frac{R}{2}e^{-R^2\frac{\beta}{2}}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\leq\frac{2}{R}\to 0$$

lorsque $R\to\infty$. Conclusion $\int_0^\infty\cos(x^2)dx=\int_0^\infty\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Correction de **l'exercice 5994 ▲**

(a) Soit $C_R=\{Re^{i\theta}\,;\,0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{n}\}$. La fonction
$$f(z)=\frac{1}{1+z^n}$$
a un seul pôle $z_0=e^{i\pi/n}$ dans le secteur. C'est un pôle simple et le résidu est
$$\mathrm{Res}\left(f,e^{i\frac{\pi}{n}}\right)=\frac{1}{nz_0^{n-1}}=-\frac{z_0}{n}=-\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}.$$
D'où
$$-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}=\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}+\int_{Re^{i\pi/n}}^0\frac{dz}{1+z^n}$$
pour tout $R>1$. Puisque $n>1$, on a :
$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}\right|\leq\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R^n-1}\int_{C_R}|dz|\right)=0.$$
D'autre part,
$$\int_{Re^{2i\pi/n}}^0\frac{dz}{1+z^n}=-\int_0^R\frac{1}{1+x^n}e^{2i\pi/n}dx=-e^{2i\pi/n}\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}.$$
Il en résulte que
$$\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}=\frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}-\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}}{1-e^{2i\pi/n}}\longrightarrow\frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}}{1-e^{2i\pi/n}}=\frac{2i\pi}{n}\frac{1}{2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$
lorsque $R\to\infty$.

(b) La fonction $z^a=\exp\left(a(\log r+i\alpha)\right)$ n'est pas définie au voisinage de l'origine. C'est la raison pourquoi on est amené de considérer le petit morceau de cercle $\gamma_\varepsilon=\{\varepsilon e^{i\theta}\,;\,\frac{2\pi}{a}\geq\theta\geq 0\}$. On va de nouveau noter $C_R=\{Re^{i\theta}\,;\,0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{n}\}$ et
$$\Omega=\left\{z=re^{i\alpha}\,;\,0<r<\infty\ ,\ 0\leq\alpha\leq\frac{2\pi}{a}\right\}.$$
Pour $z=re^{i\alpha}\in\Omega$ on a
$$\begin{aligned} & z^a=-1 \\ \iff\ & a(\log r+i\alpha)=i\pi\ (\mathrm{mod}\,2i\pi) \\ \iff\ & r=1\quad\text{et}\quad\alpha=\frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$
Par conséquent, $f(z)=\frac{1}{1+z^a}$ a une seule singularité $z_0=e^{i\frac{\pi}{a}}$ dans Ω. Comme $f(z)=\frac{1}{h(z)}$ avec $h(z_0)=1+z_0^a=0$ et
$$h'(z_0)=\left(\exp(a\log z)\right)'_{|z=z_0}=\frac{a}{z_0}z_0^a\neq 0$$
le point z_0 est un pôle simple et on a
$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{h'(z_0)}=-\frac{z_0}{a}=-\frac{1}{a}e^{i\frac{\pi}{a}}.$$

Il suffit alors de procéder comme dans la question 1. pour établir

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)} \quad \text{pour} \quad a>1\,.$$

(c) Soit $x \in (0,\infty)$ et $a = u+iv$ avec $u>1$. Alors

$$|x^a| = |x^{iv}||x^u| = |\exp(i(v\log x))|x^u = x^u.$$

Par conséquent on a, pour tout $x>1$,

$$\left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leq \frac{1}{x^u-1}$$

ce qui implique la convergence de l'intégrale $J(a)$. Montrons que l'application $a \mapsto J(a)$ est holomorphe dans $\Omega = \{\mathrm{Re}\, a > 1\}$. Pour ce faire on utilise des critères d'holomorphie des intégrales avec paramètres (voir le chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol). Considérons d'abord $J_1(a) = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^a}$. On a (1) $(a,x) \mapsto g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ est continue. (2) $\forall x \in [0,2]$: $a \mapsto g(a,x)$ est holomorphe dans Ω. Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (théorème 26 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol) $a \mapsto J_1(a)$ est holomorphe dans Ω. Pour $J_2(a) = \int_2^\infty \frac{dx}{1+x^a}$ il faut en plus de (1) et (2) majorer $g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ par une fonction intégrable k (dépendant que de la variable x). Pour ce faire il faut travailler dans un domaine plus petit

$$\Omega_T = \{\mathrm{Re}\, a > T\} \subset \Omega \quad , \quad T>1\,.$$

Dans ce cas

$$|g(a,x)| = \left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leq \frac{1}{x^T-1} \quad \forall x \geq 2 \text{ et } a \in \Omega_T\,.$$

Comme $T>1$, $k(x) = \frac{1}{x^T-1}$ est intégrable : $\int_2^\infty k(x)\,dx < \infty$. Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (ici le théorème 27 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol), $a \in \Omega_T \mapsto J_2(a)$ est holomorphe. Ceci étant vrai pour tout $T>1$, J_2 est holomorphe dans Ω. En conclusion,

$$a \mapsto J(a) = J_1(a) + J_2(a)$$

est holomorphe sur Ω. L'affirmation $J(a) = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}$, $a \in \Omega$, est une conséquence du principe des zéros isolés et du fait que nous avons déja établi cette relation pour tout réel $a>1$.

(d) Évident.

(e) On peut procéder comme dans la question 3. Notons que

$$|h(p,t)| = \left|\frac{e^{pt}}{1+e^t}\right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(p)t}}{1+e^t}.$$

Par conséquent, $|h(p,t)| \sim e^{(\mathrm{Re}(p)-1)t}$ pour $t \to \infty$ et $|h(p,t)| \sim e^{\mathrm{Re}(p)t}$ pour $t \to -\infty$. L'intégrale $K(p)$ est donc convergente. Pour établir l'holomorphie de cette fonction il faut travailler u©ì

$$U_\varepsilon = \{0 < \mathrm{Re}(p) < 1-\varepsilon\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0 \text{ petit}\,.$$

(f) Nous avons vu dans la question précédente que la fonction $h(p,t) = \frac{e^{pt}}{1+e^t}$ décroit exponentiellement pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ lorsque $t \to \pm\infty$. On en déduit "facilement" (faire les détails !) que

$$\lim_{R\to\infty} \int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = 0$$

Par le théorème des résidus il en résulte que :

$$2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt + \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz\right].$$

Or $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = -e^{2i\pi p}\int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$. D'où :

$$2i\pi\left(-e^{i\pi p}\right) = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \left(1-e^{2i\pi p}\right)K(p).$$

Finalement on a

$$K(p) = \pi\frac{2i}{e^{i\pi p}-e^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Correction de l'exercice 6007 ▲

$|Q(z)| = |z^{50}(z^{61}+3)| = |z^{61}+3| \geq 2$ pour $|z|=1$. D'où

$$|P(z)-Q(z)| = 1 < |Q(z)| \quad \text{dans} \quad \{|z|=1\}.$$

Par le théorème de Rouché, P, Q ont le même nombre de zéros dans $D(0,1)$. Le reste en découle en observant que $P' = Q'$ et $P(0) \neq 0$.

Correction de l'exercice 6008 ▲

L'application $\Phi(z) = \frac{3z+5}{z+2}$ est une homographie. L'image d'un cercle est alors de nouveau un cercle ou une droite. De plus on remarque que (1) $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel $x \neq -2$. (2) $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$ pour tout $z \in (x^2+1)\setminus\{-2\}$. Comme $\Phi(-1) = 2$ et $\Phi(1) = \frac{8}{3}$, l'image du cercle unité est un cercle symétrique par rapport à l'axe réel (cf. (2)) avec centre $\left(\frac{8}{3}+2\right)\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ et de rayon $\frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$. Le cercle de rayon 2 centré à l'origine contient -2. C'est l'unique point dont l'image est $\Phi(-2) = \infty$. L'image de ce cercle est alors une droite et c'est

$$\Phi(2) + i\mathbb{R} = \frac{11}{4} + i\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 6010 ▲

On a $\Phi_\alpha(0) = \alpha$ et $\Phi_\alpha(\alpha) = 0$. Remarquons que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ fixe l'origine. Par l'exercice 6009, l'automorphisme $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ de $D(0,1)$ est une rotation $z \mapsto e^{i\alpha} z$. Un calcul explicite montre que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha = \mathrm{Id}$, c'est à dire $\Phi_\alpha^{-1} = \Phi_\alpha$. Soit Ψ un automorphisme du disque unité $D(0,1)$ tel que $\Psi(z_1) = z_2$. Alors

$$\Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = \Phi_{z_2}(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = 0$$

et donc $A = \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}$ est un automorphisme du disque unité fixant l'origine. On en déduit de nouveau que A est une rotation : $A(z) = e^{i\alpha} z$. Par conséquent,

$$\Psi = \Phi_{z_2} \circ A \circ \Phi_{z_1}^{-1}. \tag{42}$$

On vient de déterminer la forme générale d'un automorphisme Ψ du disque unité vérifiant $\Psi(z_1) = z_2$. Remarquons qu'il est unique "à une rotation près" ; Ψ est déterminé par (42) où A est une rotation quelconque.

Correction de l'exercice 6013 ▲

(a) VA remplace la ligne i par sa somme avec la ligne j multipliée par λ.
AV remplace la colonne j par sa somme avec la colonne i multipliée par λ.

(b) $V_{ij}(\lambda)V_{kj}) = I + \lambda E_{ij} + \lambda' E_{kj}$

(c) Il suffit de montrer que $(I + l_i e_i^T)(I - l_i e_i^T) = I$.

(d) $L(l_i) = V_{i+1,i}(l_{i+1,i}) \cdots V_{n,i}(l_{n,i})$

(e) $L^{-1} = L(-l_{n-1})L(-l_{n-2}) \cdots L(-l_1) \neq I - l_1 e_1^T - \cdots - l_{n-1} e_{n-1}^T$

(f) (a) algorithme en utilisant l'expression de L^{-1}
Pour $i = 1$ à $n-1$
    calcul de $L(-l_i)b$
        Pour $j = i+1$ à n
            $b_j \leftarrow b_j - l_{ji} b_i$
(b) algorithme en résolvant le système triangulaire
$x_1 = b_1$
Pour $i = 2$ à n
    $x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j$
conclusion : le nombre de calculs et l'espace mémoire utilisés sont les mêmes.

Correction de l'exercice 6014 ▲

Pour démontrer l'égalité il suffit de multiplier le membre de droite par $5A + UBV)$ et montrer que l'on obtient l'identité.
Domaine de validité :$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ inversible, $U \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $V \in \mathcal{M}_{q\times n}$, $I + BVA^{-1}U$ inversible.

(a) On obtient la formule de Shermann-Morrisson :

$$(A + \beta uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\beta}{1 + \beta v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$$

qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.

(b)

$$B\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (A + uv^T)x + yu = 0 \\ v^T x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -yA^{-1}u \\ v^T x = -yv^T A^{-1} u = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $x = 0, y = 0$ et donc B est inversible.

(c) En appliquant la formule générale on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}uv^TA^{-1} & A^{-1}u \\ v^TA^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(d) En appliquant la même formule on obtient

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} + P^{-1}Q\Delta^{-1}RP^{-1} & -P^{-1}Q\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}RP^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $\Delta = S - RP^{-1}Q$.

(e) Calcul récursif de l'inverse : on dispose de A_{n-1}^{-1} de taille $(n-1)\times(n-1)$ et on veut calculer l'inverse de

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{pmatrix} \text{ avec } u,v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$

en utilisant la formule précédente on obtient

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\delta}A_{n-1}^{-1}vu^TA_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1}\frac{v}{\delta} \\ -u^TA_{n-1}^{-1}/\delta & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$$

avec $\delta = s - u^TA_{n-1}^{-1}v$.
et on en déduit facilement l'algorithme.

Correction de l'exercice 6015 ▲

(a) $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$ rayon spectral de la matrice A^*A. D'un autre coté on a :

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^*A) \left\{ \begin{array}{l} \geq \rho(A^*A) \\ \leq n\rho(A^*A) \end{array} \right.$$

où tr est la trace de la matrice et λ_i ses valeurs propres.

(b)

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F = \left(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leq (mn\max_{i,j}|a_{ij}|^2)^{1/2} = \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$$

Soit x tel que : si $\max|a_{ij}| = |a_{i_0j_0}|$ alors on pose $x = e_{j_0}$, $\|x\|_2 = 1$. Alors
$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|^2 \geq \max|a_{ij}|^2 \Rightarrow \sup\|Ax\|_2^2 \geq \max|a_{ij}|^2$

(c) On rappelle que $\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}|$ pour un certain i_0. Alors

$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leq m \times \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leq m\max\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\right)^2 = m\|A\|_\infty$
Choisissons maintenant $x = (x_i)$ avec $x_i =$signe(a_{i_0i}). Alors

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0j}x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \|A\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2 \geq \|A\|_\infty^2 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$$

ce qui implique $\|A\|_2 \geq \|A\|_\infty/\sqrt{n}$

(d) Même démonstration que précédemment ou alors constater que $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

(e) $\|E\|_F^2 = \sum_{i,j} u_i^2v_j^2 \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n u_i^2v_j^2 = \|u\|_2^2\|v\|_2^2$

$$\|E\|_\infty = \max_i\left(\sum_{j=1}^n |u_iv_j|\right) = \max_i\left(|u_i|\sum_{j=1}^n|v_j|\right) = \|v\|_1\|u\|_\infty$$

$\|Ex\|_2^2 = \sum_{i=1}^m\left(u_i\sum_{j=1}^n v_jx_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 \times (x,x)^2 = \|u\|_2^2(x,v)^2$

$$\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \frac{(x,v)}{\|x\|_2}\|u\|_2 \Rightarrow \sup_x\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \|v\|_2\|u\|_2$$

Correction de l'exercice 6016 ▲

$\rho(A) < 1 \Rightarrow 1$ n'est pas valeur propre de $A \Rightarrow 0$ n'est pas valeur propre de $I-A \Rightarrow I-A$ inversible

$$(I-A)C_k = (I-A)(I+A+\cdots+A^k) = I - A^{k+1}$$

$C_k = (I-A)^{-1}(I-A^{k+1}) \Rightarrow (I-A)^{-1} - C_k = (I-A)^{-1}A^{k+1}$ et conc

$$\|(I-A)^{-1} - C_k\| \leq \|(I-A)^{-1}\|\|A^{k+1}\| \leq \|(I-A)^{-1}\|\|A\|^{k+1}$$

Comme $\|A\| < 1$ pour au moins une norme subordonnée on obtient finalement

$$\lim_{k\to\infty} \|(I-A)^{-1} - C_k\| = 0$$

Correction de l'exercice 6017 ▲

$AB = I - X \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (I-X)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = B(I-X)^{-1} = B(I+X+X^2+\cdots)$

$$\|A^{-1} - B\| \leq \|BX\|\|I+X+\cdots\| \leq \|BX\|(1+\|X\|+\|X\|^2+\cdots) \leq \frac{\|BX\|}{1-\|X\|}.$$

pour $\|X\| < 1$

Correction de l'exercice 6019 ▲

4.On calcule

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres

$$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 = \mu_1^2, \lambda_2 = 2 = \mu_2^2$$

On calcule ensuite les vecteurs propres associés à ces valeurs propres

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et la matrice V est la matrice dont les colonnes sont

$$v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T, \quad v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$$

les colonnes de U sont alors données par

$$u_1 = Av_1/\mu_1 = 1/(\sqrt{7}\sqrt{5})(3,5,-1)^T, \quad u_2 = Av_2/\mu_2 = 1/(\sqrt{2}\sqrt{5})(-1,0,-3)^T$$

quant à u_3 il est choisi orthogonal à u_1 et u_2 et de norme 1.

Correction de l'exercice 6020 ▲

(a) $\Sigma^\dagger\Sigma e_i = e_i, i = 1,\cdots,r$ c'est l'application identité

(b) $AA^\dagger = U\Sigma V^* V\Sigma^\dagger U = U\Sigma\Sigma^\dagger U^* = I$

On a donc obtenu une généralisation de l'inverse.

(c) $U^*\sum_{i=1}^m \varepsilon_i u_i^*$ avec$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\}$ base canonique de $\mathbb{R}^m$. Comme $\Sigma^\dagger\varepsilon_i = 0$ pour $r+1 \leq i \leq m$ on a

$$\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} e_i u_i^* \Rightarrow A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1}(Ve_i)u_i^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^*$$

(d) On a

$$AA^\dagger = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i v_i^* \sum_{j=1}^r \mu_j^{-1} v_j u_j^* = \sum_{j=1}^r \mu_j \mu_j^{-1} u_j u_j^*$$

Comme Im(A) =span$\{u_1,\cdots,u_r\}$ le résultat suit.

(e) soit $y \in \mathrm{Im}A^* \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^r x_i v_i$. Alors

$$A^*A = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 v_i v_i^* \Rightarrow A^*Ay = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x_i v_i$$

et finalement

$$(\sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} v_i v_i^*)(A^*Ay) = \sum_{i=1}^r x_i v_i$$

Correction de l'exercice 6021 ▲

(a) $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max|\sigma_j| = \sigma_1$

(b) $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A) = \text{tr}(U^*A^*AU) = \|AU\|_F^2 = \text{tr}(A^*U^*UA) = \|UA\|_F^2$ et donc

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

(c) $A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*) = V(\Sigma^*\Sigma)V^*$ et donc A^*A est semblable à $\Sigma^*\Sigma$, les deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_r^2$ plus $n-r$ valeurs propres nulles si $n > r$.

(d) $|\det A| = |\det(U\Sigma V^*)| = |\det U|\det|\Sigma||\det V^*| = |\det \Sigma| = \prod_{i=1}^r \sigma_i$

(e) Une matrice hermitienne étant diagonalisable a une base orthonormale de vecteurs propres

$$A = Q\Lambda Q^* = Q|\Lambda|\text{sign}(\Lambda)Q^*$$

or $U = \text{sign}(\Lambda)Q^*$ est une matrice unitaire : $U^*U = Q\text{sign}(\Lambda)\text{sign}(\Lambda)Q^* = QQ^* = I$. Donc $Q|\Lambda|U$ est une décomposition en valeurs singulières de A, les valeurs singulières étant $|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|$.

Correction de l'exercice 6022 ▲

(a) $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_1^2(A)$ la plus grande valeur singulière de A
$\|A^{-1}\|_2^2 = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1} = \frac{1}{\mu_n(A)^2}$ avec $\mu_n(A)$ la plus petite valeur singulière de A. Donc

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mu_n(A)/\mu_1(A)$$

(b) Si A est normale alors $\|A\|_2 = \rho(A)$ rayon spectral. Donc

$$A^{-1} = UD^{-1}U^* \Rightarrow (A^{-1})^*A^{-1} = U(D^{-1})^*D^{-1}U^* \Rightarrow \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = 1/\min_i|\lambda_i(A)|^2$$

$$\text{cond}_2(A) = \max|\lambda_i(A)|/\min|\lambda_i(A)|$$

(c) $\text{cond}_2(QA) = \|QA\|_2\|A^{-1}Q^*\|_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \text{cond}_2(A)$.

Correction de l'exercice 6024 ▲

$B = A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$ matrice inversible si $\|A^{-1}\delta A\| < 1$
$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A-B)B^{-1} \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|A-B\|\|B^{-1}\| \Rightarrow$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\|\|A-B\| = \|A^{-1}\|\|\delta A\| = \text{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Correction de l'exercice 6025 ▲

(a) A la k-ème étape de l'élimination de Gauss, l'élément a_{ij}^{k+1} est donné par

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{kj}^k a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \quad k+1 \leq i,j \leq n$$

et on remarque immédiatement par récurrence que toutes les matrices $\tilde{A}_k$ sont symétriques. On a
$(\tilde{A}_{k+1}v', v') = \sum_{i=k+1}^n v_i(\sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(k)}v_j) - \frac{1}{a_{kk}^k}(\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i)^2$
$(\tilde{A}_k v, v) = \sum_{i=k+1}^n v_i(\sum_{j=k+1}^n a_{ij}^k v_j) + \sum_{i=k+1}^n (a_{ik}^k + a_{ki}^k)v_i v_k + a_{kk}^k v_k^2$
Par symétrie $a_{ik}^k = a_{ki}^k$ et donc
$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1}v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k}[(\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i)^2 + 2v_k\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i a_{kk}^k + (a_{kk}^k)^2 v_k^2] =$

$$(\tilde{A}_{k+1}v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k}[a_k k^k v_k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i]^2$$

(b) Faisons un raisonnement par récurrence
- $\tilde{A}_1$ est symétrique définie positive ;
- Par hypothèse supposons que $\tilde{A}_k$ est définie positive ;
- Supposons par absurde que $\tilde{A}_{k+1}$ ne soit pas définie positive : alors $\exists v' \neq 0 : \quad (\tilde{A}_{k+1}v', v') \leq 0$. On définit le vecteur $v \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ par :
  - $v_i = v_i', \quad k+1 \leq i \leq n$
  - v_k est solution de $a_{kk}^k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i = 0$

  Alors $(\tilde{A}_k v, v) = 0$ et $v \neq 0$; donc $\tilde{A}_k$ n'est pas définie positive, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

(c) Première inégalité : en utilisant la relation d'élimination on obtient : $a_{ii}^{k+1} = a_{ii}^{k} - \frac{|a_{ki}^{k}|^2}{a_{kk}^{2}}$

– une matrice définie positive a tous ses éléments diagonaux strictement positifs, donc $a_{ii}^{k+1} > 0$

– $|a_{ki}^{k}|^2 / |a_{kk}^{k}|^2 \geq 0, \quad k+1 \leq i \leq n$

donc $a_{ii}^{k+1} \leq a_{ii}^{k}, k+1 \geq i$

Deuxième inégalité : supposons qu'il existe un élément $a_{ij}^{k}, i < J$ tel que $\left|a_{ij}^{k}\right| \geq \max_{k \leq l \leq n} a_{ll}^{k}$. On considère le vecteur $v \neq 0$ défini par

$$v_i = 1, v_j = -\mathrm{sign}(a_{ij}^{k}), v_l = 0 \quad l \neq i, j$$

Alors

$$(\tilde{A}_k v, v) = (a_{ii}^{k} - \left|a_{ij}^{k}\right|) - (\left|a_{ij}^{k}\right| - a_{jj}^{k}) \leq 0$$

ce qui est impossible. Donc

$$\max_{1 \leq i, j \leq n} \left|a_{ij}^{k}\right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left|a_{ii}^{k}\right|$$

Correction de l'exercice 6027 ▲

Montrons par récurrence que $A_n = U$ est une matrice bande.

$A_1 = A, \quad A_{k+1} = L_k A_k = L_k L_{k-1} \cdots L_1 A, \quad k = 1, \cdots, n-1.$

Supposons que A_k est une matrice bande i.e., $a_{ij}^{k} = 0$ pour $|i-j| \geq p$ et montrons que A_{k+1} est une matrice bande.

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \frac{a_{ik}^{k} a_{kj}^{k}}{a_{kk}^{k}}$$

Soit $|i-j| \geq p \Leftrightarrow |(i-k)-(j-k)| \geq p$. On considère deux cas :

– $k+1 \leq i \leq n$ et $k \leq j \leq n$. Alors $i-k \geq p$ ou $j-k \geq p \Rightarrow a_{ik}^{k} a_{kj}^{k} = 0 \Rightarrow a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} = 0$

– $i \leq k$ ou $j \leq k-1$ alors $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} = 0$

donc A_{k+1} est une matrice bande et U est une matrice bande. On a $A = LU$ et la matrice triangulaire inférieure L a pour éléments $l_{ij} = a_{ij}^{j} / a_{jj}^{j}, \quad j \leq i \leq n$. Toutes les matrices A_j étant des matrices bandes on a $a_{ij}^{j} = 0$ pour $i - j \geq p \Rightarrow l_{ij} = 0$ pour $i - j \geq p$.

Correction de l'exercice 6028 ▲

Soit LU la factorisation LU de A. On va intercaler dans cette factorisation la matrice réelle $\Lambda = \mathrm{diag}(\sqrt{|u_{ii}|})$.

$A = (L\Lambda)(\Lambda^{-1}U) = BC$. La symétrie de A entraine $BC = C^T B^T$. On a

$C(B^T)^{-1}$ matrice triangulaire supérieure, $B^{-1}C^T$ matrice triangulaire inférieure et $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T$ et donc

$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C = \mathrm{diag}(\mathrm{sign}(u_{ii}) = S \Rightarrow C(B^T)^{-1}S^{-1} = I = S^{-1}B^{-1}C^T \Leftrightarrow C^T = BS = \tilde{B}$. Donc A peut être mise sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ avec } \tilde{B} = BS$$

i.e. la i-ème colonne de $\tilde{B}$ est égale à la i-ème colonne de B affectée du signe de u_{ii}

Application numérique :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 6031 ▲

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$$

A^T étant à diagonale strictement dominante on a :

$$|\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i|, \quad |u_i| + \sum_{j \neq i} |b_{ji}| < |b_{ii}|$$

Il suffit de montrer que

– la première colonne de L vérifie $|l_{11}| > \sum_{i \neq 1} |l_{i1}|$

– B_2 est telle que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = B_2 = B_1 - \frac{1}{\alpha} v u^T$$

vérifie $|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ji}|$ avec $C_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i u_j$ et itérer.

– première colonne de L : $l_{i1} = v_i / \alpha \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} |l_{i1}| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|v_i|}{\alpha} < 1$

– $\sum_{i\neq j}|c_{ij}| = \sum_{i\neq j}\left|b_{ij}-\frac{1}{\alpha}v_iw_j\right| \leq \sum_{i\neq j}|b_{ij}| + \frac{1}{|\alpha|}|w_j|\sum_{i\neq j}|v_i|$

$$\leq |b_{jj}| - |u_j| + \frac{1}{|\alpha|}|u_j|(|\alpha|-|v_j|) \leq \left|b_{jj}-\frac{1}{\alpha}u_jv_j\right| = |c_{jj}|$$

donc B_2^T est de diagonale strictement dominante. La démonstration se finit par récurrence.

Correction de l'exercice 6032 ▲

(a) Soit P l'opérateur de projection dans le sous-espace U de dimension 1 généré par v. Alors $Q = I - P$ est l'opérateur de projection sur l'hyperplan $U^\perp$ orthogonal à U. On a déjà vu que $Pw = vv^Tw \quad \forall w$, et donc $Qw = w - vv^Tw$. On obtient
$P(H(v)w) = P(w_(2v^Tw)v) = (v^Tw)v - 2v^Twvv^Tv = -(v^Tw)v = -Pw$
$Q(H(v)w) = H(v)w - P(H(v)w) = w - 2vv^Tw + v^Twv = w - v^Twv = Qw.$
La matrice $H(v)$ représente donc une symétrie par rapport à l'hyperplan $U^\perp$. On conclut que les vecteurs de $U^\perp$ sont invariants par $H(v)$.
$V(v)w = w \quad \forall w \in U^\perp, \quad \dim U^\perp = n-1 \Rightarrow \lambda = 1$ est valeur propre de $H(v)$ avec multiplicité $n-1$.
$H(v)v = -v \mp \lambda = -1$ est valeur propre de multiplicité 1. Donc

$$\det H(v) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(H(v)) = -1$$

(b) On sait qu'il exite des matrices de Householder $H_1, H_1, \dots, H_{n-1}$ telles que $H_{n-1}\cdots H_1A = A_n$ matrice triangulaire supérieure. Comme A est orthogonale on conclut que A_n est orthogonale. Mais une matrice triangulaire supérieure orthogonale est forcément diagonale $\Rightarrow A_n =$diag(± 1). On peut s'arranger pour que $(A_n)_{ii} > 0 \quad i = 1, \dots, n-1$. Donc soit $A_n = I$ soit $A_n =$diag$(1,1,\dots,1,-1) = H(e_n)$ et finalement la matrice orthogonale A s'écrit

$$A = H_1\cdots H_{n-1}H(e_n)$$

Correction de l'exercice 6033 ▲

(a) Pour $k = 1,\cdots,n \quad a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik}q_i$ avec $r_{ik} = q_i^Ta_k$ par orthonormalité des q_i.

(b) Découle immédiatement de la question précédente.

(c) Algorithme de Gram-Schmidt :
Pour $k = 1,\cdots,n$ faire
  $r_{ik} = q_i^Ta_k \quad$ pour $i = 1,\cdots,k-1$
  $z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}q_i$
  $r_{kk} = (z_k^Tz_k)^{1/2}$
  $q_k = z_k/r_{kk}$

(d) i.

$$\sum_{i=k}^{n} q_ir_i^T = [q_k\cdots q_n]\begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = q_k\cdots q_n]\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & \cdots & \cdots & r_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{k+1,k+1} & \cdots & r_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(k)}e_k = z = [q_k\cdots q_n]\begin{pmatrix} r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{kk}q_k \Rightarrow r_{kk} = \|z\|_2, q_k = z/r_{kk}$$

ii.

$$q_k^TA^{(k)} = [q_k^Tz, q_k^TB] = [1,0,\cdots,0]\begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = r_k^T$$

et donc

$$[r_{k,k+1},\cdots,r_{kn}] = q_k^TB$$

iii.

$$[0,\cdots,0,A^{(k+1)}] = \sum_{i=k+1}^{n} q_ir_i^T = [0,\cdots,0,A^{(k)}] - q_kr_k^T = [0,\cdots,0,A^{(k)} - q_k(r_{kk},\cdots,r_{kn})]$$

$$[0,\cdots,0,z-q_kr_{kk}, B-q_k(r_{k,k+1},\cdots,r_{kn})] \Rightarrow A^{(k+1)} = B - q_k(r_{k,k+1},\cdots,r_{kn})$$

iv. Données : $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\text{rank}(A) = n$

On calcule la factorisation $A = Q_1R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ orthonormale, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire supérieure. Le calcul de Q_1 se fait sur place.

Pour $k = 1,\cdots,n$

$r_{kk} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}^2\right)^{1/2}$

pour $i = 1,\cdots,m$

$a_{ik} \leftarrow a_{ik}/r_{kk}$

pour $j = k+1,\cdots,n$

$r_{kj} \leftarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ik}a_{ij}$

pour $i = 1,\cdots,m$

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik}r_{kj}$

v. complexité : mn^2 flops.

Correction de l'exercice 6034 ▲

(a) $G_{p,q}(c,s) = I + (c-1)e_pe_p^T + se_qe_p^T - se_qe_q^T + (c-1)e_pe_q^T$ avec e_i les vecteurs de la base canonique.

(b) On montre que $e_i^T G^T Ge_j = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 1,\cdots,n$ et donc $G^T G = I$ ce qui permet de conclure que G est inversible d'inverse G^T et donc orthogonale.

(c) $e_i^T GA = e_i^T A = a_i^T$ pour $i \neq p,q$

$e_p^T GA = ca_p^T - sa_q^T$, $e_q^T GA = sa_p^T + ca_q^T$, et donc G change seulement les lignes p et q

(d) On pose $\alpha = a_{pj}$ et $\beta = a_{qj}$. On a donc à résoudre dans le premier cas le système

$$\left\{\begin{array}{l} c\alpha - s\beta = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = \pm\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ s = \pm\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{array}\right.$$

ce qui nous donne deux matrices G. Pour le deuxième cas et en procédant de la même façon on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} c = \pm\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ s = \mp\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 6037 ▲

Méthode de Givens rapide

(a) MM^T =diag$(d_1,\cdots,d_m) = \Delta^2$ avec Δ =diag$(\sqrt{d_1},\cdots,\sqrt{d_m})$

$\Delta^{-1}MM^T\Delta^{-1} = (\Delta^{-1}M)(\Delta^{-1}M)^T = I \Rightarrow \Delta^{-1}M$ est une matrice orthogonale

$A = M^{-1}S = (M^{-1}Delta\Delta^{-1}S = (\Delta^{-1}M)^{-1}(\Delta^{-1}S) = (\Delta^{-1}M)^T(\Delta^{-1}S) = (M^T\Delta^{-1})(\Delta^{-1}S)$

Comme $\Delta^{-1}S$ est triangulaire supérieure ona $A = QR$ avec $Q = M^T\Delta^{-1}, R = \Delta^{-1}S$

(b) i.

$$M_1x = \begin{pmatrix} \beta_1x_1 + x_2 \\ x_1 + \alpha_1x_2 \end{pmatrix}, \quad M_1DM_1^T = \begin{pmatrix} d_2 + \beta_1^2 d_1 & d_1\beta_1 + d_2\alpha_1 \\ d_1\beta_1 + d_2\alpha_1 & d_1 + \alpha_1^2 d_2 \end{pmatrix}$$

Alors

– $x_1 + \alpha_1x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -x_1/x_2$

– $d_1\beta_1 + d_2(-x_1/x_2) = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = -\alpha_1d_2/d_1 = x_1d_2/(x_2d_1)$

Pour le choix précédent on veut déterminer γ_1 tel que

$x_2(1+\gamma_1) = \beta_1x_1 + x_2 = x_2(\beta_1x_1/x_2 + 1) \Rightarrow \gamma_1 = (d_2/d_1)(x_1/x_2)^2$ c'est-à-dire

$$\gamma_1 = -\alpha_1\beta_1$$

pour cette valeur on a

$d_2 + \beta_1^2 d_1 = d_2(1+\alpha_1^2 d_2/d_1) = d_2(1+\gamma_1)$ $d_1 + \alpha_1^2 d_2 = d_1(1+\alpha_1^2 d_2/d_1) = d_2(1+\gamma_1)$

ii. le même type de calcul nous donne

$$\beta_2 = -x_2/x_1, \quad \alpha_2 = -(d_1/d_2)\beta_2, \quad \gamma_2 = -\alpha_2\beta_2 = (d_1/d_2)(x_2/x_1)^2$$

iii. on remarque que $\gamma_1\gamma_2 = 1$ et donc soit $\gamma_1 \leq 1$, soit $\gamma_2 \leq 1$

(c)

$$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec les α_i, β_i définis comme précédemment.

(d) *algorithme*

$d_i = 1$ pour $i = 1, \cdots, m$

Pour $p = 1, \cdots, \min\{n, m-1\}$

Pour $q = p+1, \cdots, m$

si $a_{qp} \neq 0$ alors

$\alpha = -a_{pp}/a_{qp}, \quad \beta = -\alpha d_q/d_p, \quad \gamma = -\alpha\beta$

si $\gamma \leq 1$ alors

$$\begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix}$$

échanger d_p et d_q

$d_p \leftarrow (1+\gamma d_p)$

$d_q \leftarrow (1+\gamma d_q)$

sinon

échanger α et β

$\alpha = 1/\alpha$, $\beta = 1/\beta$, $\gamma = 1/\gamma$

$$\begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix}$$

$d_p \leftarrow (1+\gamma d_p)$

$d_q \leftarrow (1+\gamma d_q)$

le coût de cet algorithme est de $n^2(m-n/3)$ flops.

(e) i. on a $MA = R = \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec S_1 triangulaire supérieure et $MM^T = D$ =diag$(d_1, \cdots, d_n)$. Donc la matrice $D^{-1/2}M$ est une matrice orthogonale

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|D^{-1/2}MAx - D^{-1/2}Mb\|_2^2 = \left\| D^{-1/2}\left[\begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - Mb\right]\right\|_2^2 =$$

$$= \left\| D^{-1/2}\left[\begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right]\right\|_2^2 = \left\| D^{-1/2}\begin{pmatrix} S_1x - c \\ d \end{pmatrix}\right\|_2^2$$

La solution est obtenue en résolvant le système triangulaire supérieure $S_1x = c$ de taille $n \times n$.

ii. – mise à jour de b pour le calcul de Mb en même temps que la mise à jour de A

pour $p = 1, \cdots, \min\{n, m-1\}$

pour $q = p+1, \cdots, m$ faire

$$\begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix}$$

– résolution du système triangulaire sup. $S_1x = c$

$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$

Pour $i = n-1, \cdots, 1$ faire

$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)$

(f) Application numérique :

$$M = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 \\ 40 & 10 & -20 \\ 15 & -30 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(14/9, 175/48, 75/32)$$

$$M[A,b] = \begin{pmatrix} 14/3 & 32/3 & 50/3 \\ 0 & 15/4 & 15/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{ls} = (-1, 2)^T$$

(g) on a

$$MD^{-2}M^T = \tilde{D} \Leftrightarrow (\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})^T = I$$

donc $(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})$ est une matrice orthogonale et on obtient

$$\|D(Ax-b)\|_2 = \|\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1}D(Ax-b)\|_2 = \|\tilde{D}^{-1/2}(MAx - Mb)\|_2 =$$

$$= \left| \tilde{D}^{-1/2}\begin{pmatrix} Sx - c \\ e \end{pmatrix}\right|_2$$

Donc le min est atteint pour $Sx = c$ avec $Mb = (C, e)^T$

La modification dans l'algorithme précédent consiste à initialiser la matrice diagonale D avec D^{-2} (au lieu de l'identité).

Correction de l'exercice 6039 ▲

(a) Pour le membre de gauche on obtient

$$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,AM^{-1}Mx)+(M^{-1}Ax,Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$

Pour le membre de droite on obtient $y=Bx=x-M^{-1}Ax \Rightarrow x-y=M^{-1}Ax$ et donc

$$(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=(M^{-1}Ax,(M+M^*-A)M^{-1}Ax)=$$

$$(M^{-1}Ax,Ax)+(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$

Mais

$$(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)=(x,(M^{-1}A)^*M^*M^{-1}Ax)=(x,AM^{-1}Ax)$$

ce qui fini la démonstration.

(b) $y=Bx=\lambda x \Rightarrow x-y=(1-\lambda)x$. En utilisant l'égalité précédente
$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,Ax)-(\lambda x,A(\lambda x))=(1-|\lambda|^2)(x,Ax)$
$(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=((1-\lambda)x,(M+M^*-A)((1-\lambda)x))=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x)$
et donc

$$(1-|\lambda|^2)(x,Ax)=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x)$$

λ ne peut pas être $=1$ car sinon $y=Bx=x \Leftrightarrow x-M^{-1}Ax=x \Leftrightarrow M^{-1}Ax=0 \Leftrightarrow x=0$. Donc $\lambda\neq 1$, $M+M^*-A$ définie positive, $|1-\lambda|^2>0$, A définie positive impliquent que $1-|\lambda|^2>0 \Leftrightarrow |\lambda|<1$. Donc $\rho(B)<1$ et la méthode itérative converge.

(c) Démonstration par absurde. Supposons que ce n'est pas vrai : $\exists x_0\neq 0 \quad \alpha_0=(x_0,Ax_0)\leq 0$. Alors la suite $x_n=Bx_{n-1}=B^nx_0$ tend vers 0 et $\lim\alpha_n=\lim(x_n,Ax_n)=0$
On utilise maintenant la relation de la question 1 avec $x=x_{n-1}$ et $y=Bx_{n-1}=x_n$ et on obtient

$$\alpha_{n-1}-\alpha_n=(x_{n-1}-x_n,(M+M^*-A)(x_{n-1}-x_n)>0$$

si $x_{n-1}-x_n\neq 0$ (ce qui est vrai car sinon $x_{n-1}=x_n=Bx_{n-1}$ et B a une valeur propre $=1$)
Donc $(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$ est une suite strictement décroissante convergeant vers 0 avec $\alpha_0<0$. Ceci est impossible et donc A est définie positive

(d) Soit $A=D-E-F$ la décomposition usuelle de A. Comme A est hermitienne, $D=D^*$ et $F=E^*$. Pour la méthode de relaxation on a $M=D/w-E$ et donc

$$M^*+M-A=D/w-F+D/w-E-D+E+F=\frac{2-w}{w}D$$

qui est hermitienne. Pour $0<w<2$, M^*+M-A est définie positive, alors des deux questions précédentes on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 6040 ▲

(a) On a $x_{2k+1}=(I-E)^{-1}E^*x_{2k}+(I-E)^{-1}b$ et donc

$$x_{2k+2}=(I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}E^*x_{2k}+(I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}b+(I-E^*)^{-1}b$$

Mais $E(I-E)^{-1}=(I-E)^{-1}E$ et alors

$$x_{2k+2}=(I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}EE^*x_{2k}+(I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}(E+I-E)b=M^{-1}Nx_{2k}+M^{-1}b$$

avec

$$M=(I-E)(I-E^*),\quad N=EE^*,\quad M-N=I-E-E^*=A$$

(b) $M^*+N=I-E-E^*+2EE^*$ et donc
$v^*(M^*+N)v=\|v\|_2^2-v^*Ev-v^*E^*v+2v^*EE^*v=\|E^*v\|_2^2+(\|v\|_2^2+\|E^*v\|_2^2-2\mathrm{Re}(v,E^*v))$ On a l'inégalité

$$-2\|v\|\|E^*v\|\leq -2|(v,E^*v)|\leq -2|\mathrm{Re}(v,E^*v)|$$

et donc

$$(\|v\|_2-\|E^*v\|_2)^2\leq\|v\|_2^2+\|E^*v\|_2^2-2\mathrm{Re}(v,E^*v)\Rightarrow$$

$v^*(M^*+N)v\geq\|E^*v\|_2^2+(\|v\|-\|E^*v\|_2)^2$ implique que

$$v^*(M^*+N)b=0\Leftrightarrow\|E^*v\|_2=0 \text{ et } \|v\|_2=\|E^*v\|_2\Leftrightarrow\|v\|_2=0$$

Donc M^*+N est définie positive et en appliquant un résultat d'un exercice précédent on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 6041 ▲

(a) C'est facile à voir que si (x_k) converge vers x^* et (y_k) converge vers y^*, alors x^* et y^* sont solution des systèmes $(I-BA)x^* = Bb+a$ et $(I-AB)y^* = Aa+b$. On a :

$$\begin{cases} x_{k+1} = B(Ax_{k-1}+b)+a = BAx_{k-1}+Bb+a \\ y_{k+1} = A(By_{k-1}+a)+b = ABy_{k-1}+Aa+b \end{cases}$$

et donc (x_k) converge ssi $\rho(BA) < 1$ et (y_k) converge ssi $\rho(AB) < 1$.

(b) $z_{k+1} = Cz_k + c$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

(c) Soit λ valeur propre non nulle de C et $z = (x,y)^T$ vecteur propre associé

$$Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \Rightarrow ABy = \lambda Ax = \lambda^2 y \Rightarrow$$

λ^2 est valeur propre de AB.
Soit maintenant α valeur propre de $AB \Leftrightarrow \exists u \neq 0 : \quad ABu = \alpha u$. On pose $\beta^2 = \alpha$ et $x = Bu$, $y = \beta u$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc $\rho^2(C) = \rho(AB)$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $\quad d = \begin{pmatrix} a \\ Aa+b \end{pmatrix}$. La démonstration de $\rho(D) = \rho(AB)$ se fait comme dans la question précédente.

(e) i. $e^k = M^k e^0 \Rightarrow \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \|M^k\| \leq \varepsilon$. Il suffit donc d'avoir $\|M^k\|^{1/k} \leq \varepsilon^{1/k} \Rightarrow \log(\|M^k\|^{1/k}) \leq \frac{1}{k}\log\varepsilon$ c'est- à dire $k \geq \frac{\log\varepsilon}{\log(\|M^k\|^{1/k})}$ Mais comme $\rho(M) \leq \|M^k\|^{1/k}$ on obtient finalement

$$k \geq -\log\varepsilon / R(M)$$

ii. nous avons $\rho^2(C) = \rho(AB) \Rightarrow \rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$ et $\rho(D) = \rho(AB)$. Donc $\rho(D) < \rho(C) \Rightarrow R(D) > R(C)$. Donc on atteint la même réduction d'erreur avec un plus petit nombre d'itérations de la méthode 2)

Correction de l'exercice 6042 ▲

(a)

(b) Itération de Gauss-Seidel : $(D-E)X_{n+1} = FX_n + b$ avec

$$D-E = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $e_n = X_n - X^*, \quad ,X_{n+1} = (D-E)^{-1}FX_n + (D-E)^{-1}b, \quad X^* = (D-E)^{-1}FX^* + (D-E)^{-1}b \Rightarrow e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$
On obtient alors $(D-E)e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$ et si on écrit composante à composante on obtient
$3e^1_{n+1} = -e^2_n \Rightarrow |e^1_{n+1}| \leq \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$
$e^1_{n+1} + 2e^2_{n+1} = -e^3_n \Rightarrow |e^2_{n+1}| \leq \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$
$2e^2_{n+1} + 3e^3_{n+1} = -e^4_n \Rightarrow |e^3_{n+1}| \leq \frac{2}{3}\frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$
$e_{n+1}32 + 4e^4_{n+1} = -3e^5_n \Rightarrow |e^4_{n+1}| \leq \frac{1}{4}\frac{7}{9}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{16}\|e_n\|_\infty$
$e^4_{n+1} + e^5_{n+1} = 0 \Rightarrow |e^5_{n+1}| \leq \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$
et donc

$$\|e_n\|_\infty \leq \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

(d)

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et donc $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$.
On en déduit donc la convergence de (X_n) vers X^*.
