

Exercice 1.....(6 pts)

On considère, dans \mathbb{C} , le polynôme $p(z)$ suivant :

$$p(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i).$$

1. Démontre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_1 que l'on déterminera.
2. Détermine le polynôme $q(z)$ tel que $p(z) = (z - z_1)q(z)$.
3. Démontre que l'équation $q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_2 que l'on déterminera.
4. Résous, dans \mathbb{C} , l'équation $p(z) = 0$.
5. On note z_3 , la troisième solution de l'équation $p(z) = 0$.

Démontre que les points A , B et C du plan complexe d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 sont alignés.

Exercice 2.....(5 pts)

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$. (v_n) est la suite définie par : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$.

1. Exprime v_{n+1} en fonction de v_n .
2. Dédus-en la nature de la suite (v_n) .
3. Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - a. Exprime S_n en fonction de n .
 - b. Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite (v_n) .

Problème.....(9 pts)

I. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \mapsto g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1. Dresse le tableau de variations de g .

2. Calcule $g(1)$ puis étudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

II. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \mapsto f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.

1. Dresse le tableau de variations de f .

2. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions notées α et β avec $\alpha < \beta$.

3. a. Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

b. Etudie la position relative de (C) et (Δ) .

4. Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

5. Calcule en fonction de α et β , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et l'axe des abscisses.