ASECNA

AERODYNAMIQUE

MOUSTAPHA Amadou Roufaï, moustapharouf@yahoo.fr

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION

Aérodynamique

branche de la mécanique des fluides appliquée au cas particulier de l’air.

Aérodynamique incompressible

vitesses relativement faibles par rapport à la vitesse du son.

Aérodynamique compressible

Vitesses élevées où les effets de la compression de l’air deviennent significatifs.

II. ÉCOULEMENT FLUIDE

II.1 Concepts Fondamentaux de l'Écoulement des Fluides

Ecoulement permanent

vitesse **(V)** et la pression **(P)** en un point donné restent constantes dans le temps. Les trajectoires des particules de fluide restent constantes.

Fluide Parfait

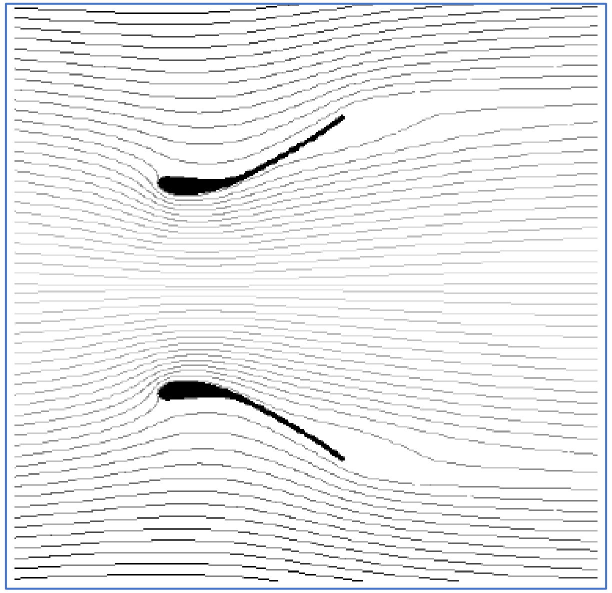
Le fluide parfait, encore appelé fluide idéal, est un fluide pour lequel la viscosité dynamique η et la conductivité thermique λ sont strictement nulles.

II. ÉCOULEMENT FLUIDE

Veine fluide

Également appelée tube de courant ou filament fluide,

décrit une région d'un écoulement de fluide où les particules de fluide se déplacent de manière relativement cohérente et suivent des trajectoires parallèles sans se mélanger significativement avec les particules environnantes.

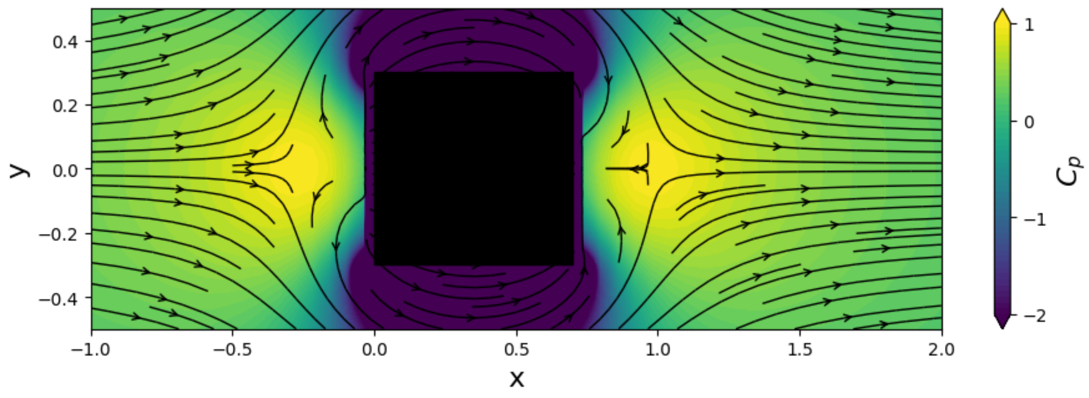


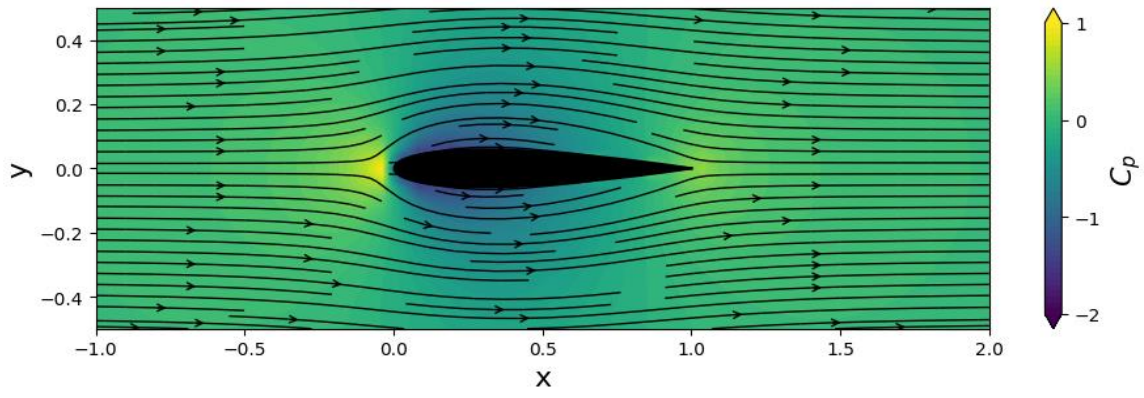
Une veine fluide peut être illustrée par une multitude de petits canaux juxtaposés dont les directions ne se rencontrent pas. Dans une telle veine, si nous faisons une coupe perpendiculaire à la vitesse, en tout point de la section obtenue, on aura conservation de la pression : P = constante.

II. ÉCOULEMENT FLUIDE

Corps fuselé

Un corps fuselé est un corps dont la forme oppose moins de résistance à l'écoulement d'un fluide, il engendre moins de perturbation de la vitesse et de la pression du fluide.





II. ÉCOULEMENT FLUIDE

II.2 PRESSION DE L'ECOULEMENT

Pression statique P ou P_S

C'est la pression (force élastique) du fluide au repos, mesurée par un baromètre (atmosphère) ou un manomètre (gaz dans un espace clos).

Si l'appareil enregistreur est au repos, l'indication est indépendante de l'orifice de prise de pression.

Si l'appareil est lié au corps en mouvement (cas d'un aéronef), la connaissance de la pression du fluide au repos dans lequel on se déplace est plus délicate, car dépendante de l'orientation de la prise de pression ; les manomètres et les baromètres sont inutilisables. Cependant il est possible (nécessaire) d'accéder en vol à la pression statique.

II. ÉCOULEMENT FLUIDE

II.2 PRESSION DE L’ECOULEMENT

Pression cinétique ou dynamique Q, Pd

Elle traduit l’effet de la vitesse.

$$Q = \frac{1}{2}\,\rho V^2$$

ρ étant la masse volumique du gaz et V la vitesse d’écoulement. On vérifie aisément que cette grandeur est homogène à la pression. **Q est appelée pression dynamique.**

II. ÉCOULEMENT FLUIDE

II.2 PRESSION DE L’ECOULEMENT

Pression d’arrêt, d’impact ou génératrice Pi

Associée à l'effet de décélération du fluide lorsque celui-ci est soudainement stoppé ou dévié par un obstacle, comme une paroi solide ou une aile d'avion.

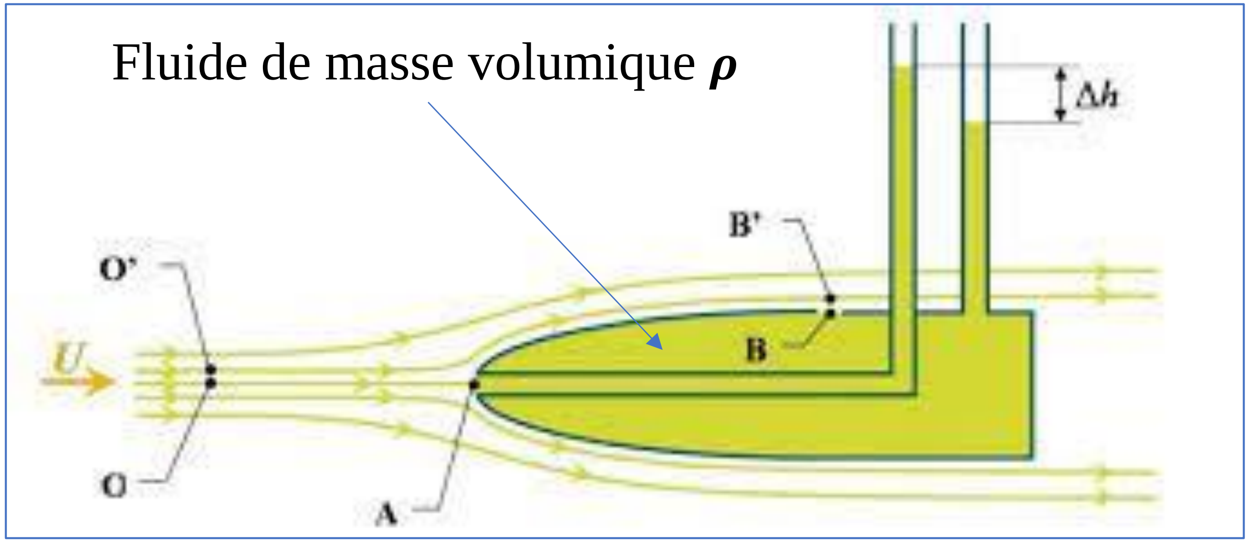
$P_s + Q = P_i$ (le long d'une ligne de courant d'un fluide idéalisé)

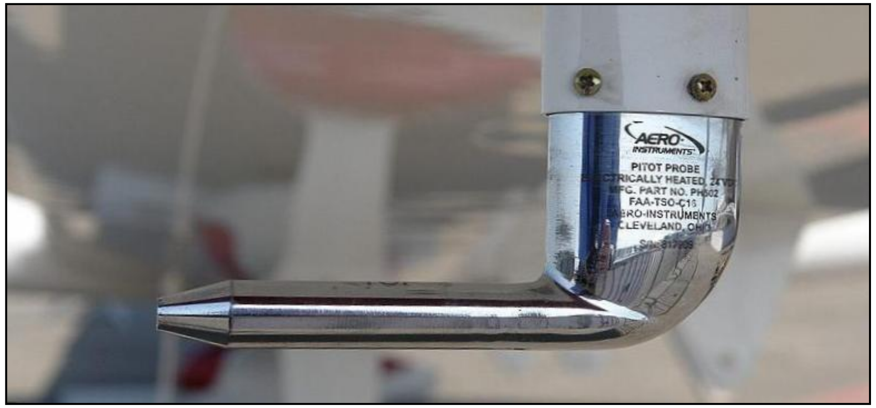
Où $P_s, Q\ et\ P_i$ sont les pressions statique, dynamique et d’impact.

II. ÉCOULEMENT FLUIDE

II.2 PRESSION DE L'ECOULEMENT

Mesure des pressions en vol





Principe du tube Pitot

- Prise de pression d'impact (P_i) au point A
- Prise de pression statique (P_s) au point B
- La pression dynamique se déduit par la différence

$$Q = P_i - P_s = \rho g \Delta h$$

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

1. Equations de Navier-Stokes

Ensemble fondamental d'équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement des fluides, qu'ils soient liquides ou gazeux.

Formulées par le mathématicien et physicien français Claude-Louis Navier et le mathématicien britannique George Gabriel Stokes au 19e siècle.

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

1. Equations de Navier-Stokes

Equations de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \qquad (3)$$

Dans le cas de fluide permanent ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) et incompressible ($\nabla.(\rho) = 0$) l'équation continuité est réduite à $\nabla.\left(\vec{V}\right) = 0$ et l'intégration en s'appuyant sur le théorème de Gausse donne $SV = Cst$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\vec{V}\right) + \nabla \mathrm{P} - \mu \nabla^2 \vec{\mathrm{V}} - \rho \vec{g} = \vec{0} \qquad (4)$$

Equation de conservation d'énergie

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla.\left(\rho E \vec{V}\right) + \nabla.(\mathrm{P}.\overrightarrow{\mathrm{V}}) - \nabla(k \nabla T) = 0 \qquad (5)$$

t est le temp, ρ la densité, , P la pression, , V la vitesse

E énergie totale par unité de volume, , T la température et k la conductivité thermique du fluide.

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

1. Equations de Navier-Stokes (Incluses dans la liste de sept problèmes du millénaire)

Dans la pratique, en aérodynamique, les versions simplifiées de ces équations sous certaines conditions sont utilisées, ce sont les équations **d'Euler et de Bernoulli.**

Nous allons principalement utiliser l'équation (4) de conservation de quantité de mouvement

$$\boxed{\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\vec{V}\right) + \nabla P - \mu \nabla^2 \vec{V} - \rho \vec{g} = \vec{0}}$$

2. Equation d'EULER

Lorsque la viscosité et les écoulements verticaux sont négligées (cas de vol à basse vitesse), l'équation (4) peux s'écrire (et la densité supposée constante dans le temps) :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\vec{V}\right) + \nabla.P = \vec{0} \quad \text{qui donne} \quad \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\nabla.\rho \vec{V}\right)\vec{V} + \left(\rho \vec{V}.\nabla\right)\vec{V} + \nabla P = 0$$

(En effet le $(\nabla\cdot(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B})$)

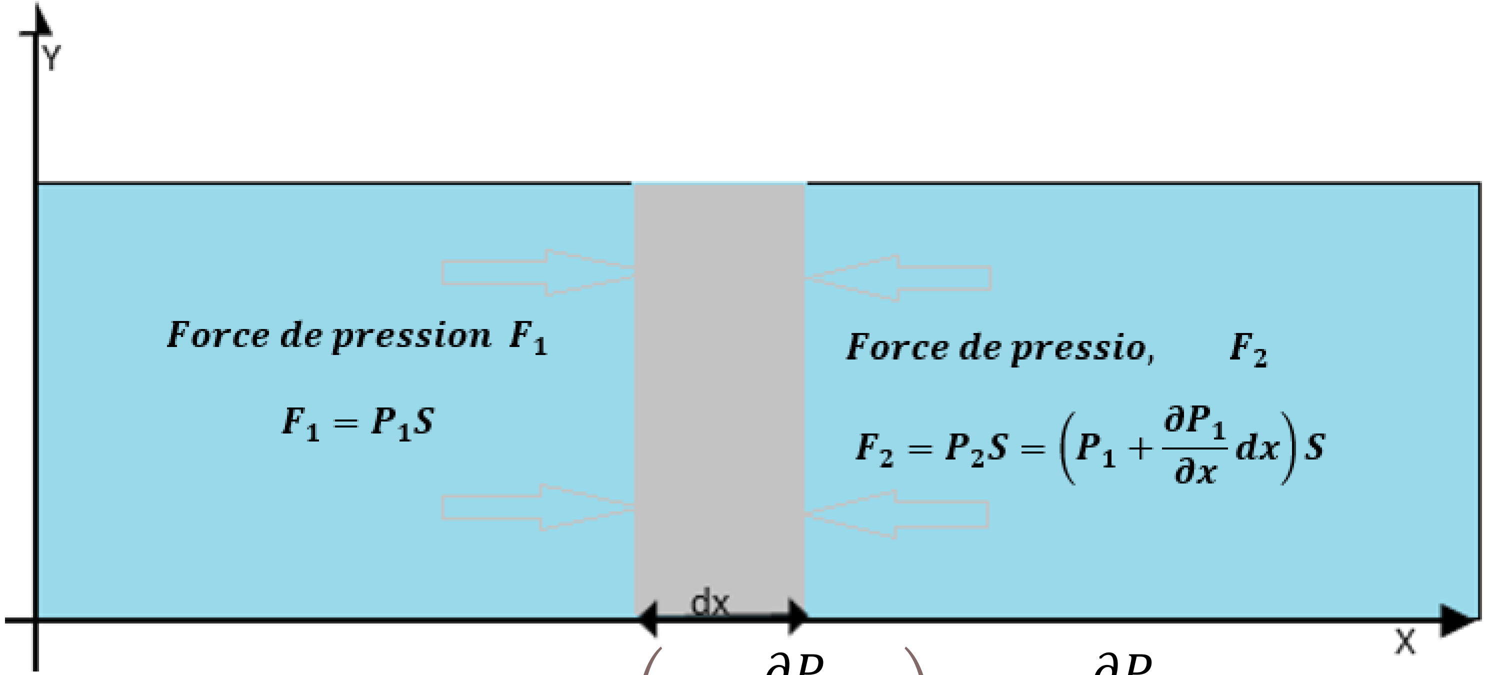
puis en appliquant l'équation de continuité $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0}$

on obtient l'équation d'Euler $$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}\right) + \nabla P = \vec{0} \qquad (6)$$

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

3. Equation d'EULER en 2D

Considérons l'écoulement dans une seule direction (axe des x)



$$F = P_1 S - P_2 S = PS - \left(P + \frac{\partial P}{\partial X} dX\right) S = -\frac{\partial P}{\partial X} dX.S$$

D'autre part $F = m\gamma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial X}dX\right)}{dt} = m\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X}V\right) = \rho S dX\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X}V\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial X} + \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X}V\right) = 0 \quad \text{(Equation d'Euler)} \qquad (7)$$

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

3. Equation de Bernoulli généralisée

Hypothèse 1 : Ecoulement de fluide permanent, c'est-à-dire la vitesse et la pression ne varient pas avec le temps $\left(\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \frac{\partial P}{\partial t} = 0\right)$. En particulier, ce qui nous intéresse ici, c'est la variation de la vitesse qui s'applique à (7) pour donner $\frac{\partial P}{\partial X} + \rho\left(\frac{\partial V}{\partial X} V\right) = 0$; qui est l'équation de Bernoulli généralisée.

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad \text{Equation de Bernoulli généralisée} \qquad (8)$$

4. Equation de Bernoulli restreinte

Hypothèse 2 : : Ecoulement **permanent et fluide incompressible** (l'air à v < 300 km/h)

Dans ce cas la masse volumique de l'air est constante, nous pouvons ainsi intégrer l'équation de Bernoulli généralisée :

$$\int VdV + \frac{dP}{\rho} = Cst$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{P}{\rho} = Cst$$

$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_i = Cst$ Equation de Bernoulli restreinte (9)

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

5. Equation de l'écoulement isentropique

Quelques rappels

La loi des gaz parfaits formulée par Gay-Lussac à partir des lois de Boyle-Mariotte, de Charles et d'Avogadro est donnée par l'équation 10 ci-dessous.

$$PV = nRT \qquad (10)$$

P, V et n sont respectivement la pression, le volume et le nombre de mol du gaz. R est la constante universelle de gaz parfait et T la température absolue du gaz.

Nous avons

$$R = 8.31446261815324\, J.mol^{-1}.K^{-1}$$

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

5. Equation de l'écoulement isentropique

Quelques rappels

Dans le contexte de l'aéronautique le gaz considéré est l'air, l'équation de gaz parfait s'écrit

$$P = \rho r T \qquad (11)$$

Avec $r = \frac{R}{M}$, où M est la masse molaire du gaz. Pour l'air nous avons $r \approx 287 JK^{-1}Kg^{-1}$.

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L’ECOULEMENT

5. Equation de l’écoulement isentropique

Evolution isentropique par unité de masse

L'enthalpie (H) est une fonction thermodynamique qui combine l'énergie interne (U) d'un système avec le produit de sa pression (P)) et de son volume (V). Mathématiquement, l'enthalpie est définie comme :

$$H = U + PV \tag{12}$$

L'entropie (S) peut être définie de différentes manières, mais une définition courante est en termes de la variation de chaleur (dQ) réversible (T) ajoutée à un système :

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{13}$$

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

5. Equation de l'écoulement isentropique

Evolution isentropique par unité de masse

Un écoulement isentropique est un écoulement dans lequel $dS = 0$.
on peut tirer l'équation :

$$PV^{\gamma} = Constante \tag{14}$$

De manière similaire, nous avons $\frac{P}{\rho^{\gamma}} = Constante$ et $\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{P} = Constante$ Ces sont les lois de Laplace pour les écoulements isentropique.

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

5. Equation de l'écoulement isentropique

Evolution isentropique par unité de masse

Finalement l'intégration de l'équation de Bernoulli généralisée $VdV + \frac{dP}{\rho} = 0$ donne

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} = Cst$$ (15_1) Equation de Saint-Venant première forme

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_i$$ (15_2) Equation de Saint-Venant deuxième forme

$$\frac{1}{2}V^2 + C_pT = C_pT_i$$ (15_3) Equation de Saint-Venant troisième forme

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

6. Célérité du son : C

La théorie des écoulements conduit à la formule : $C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$

Laplace par dérivation donne $dP = k\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$

d'où $C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{P}{\rho^\gamma}\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{P}{\rho} = \gamma RT$

$$C = \sqrt{\gamma RT} \qquad (17)$$

II.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ECOULEMENT

6. Célérité du son : C

Nombre de Mach.

Posons **M** la vitesse d'un aéronef avec comme unité la célérité du son.

$M = \frac{V}{C}$.

M est appelé nombre de mach

L'équation de Saint Venant 2ème forme s'écrit :

$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_i$ soit $\frac{1}{2}V^2 + \frac{C^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_i$

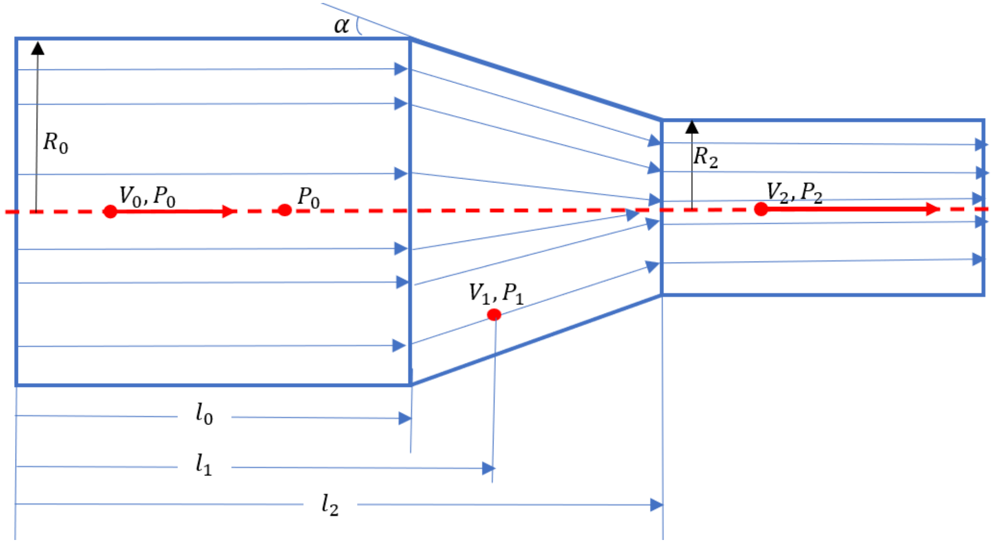
$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2} + \frac{1}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_i / (\gamma \mathrm{RT})$$

$$1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 = \frac{T_i}{T} \qquad (18)$$

APPLICATION

Exercice 01 : On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (schéma ci-contre).

1) Calculer la pression P_2.
2) Calculer la vitesse V_1 et la pression P_1

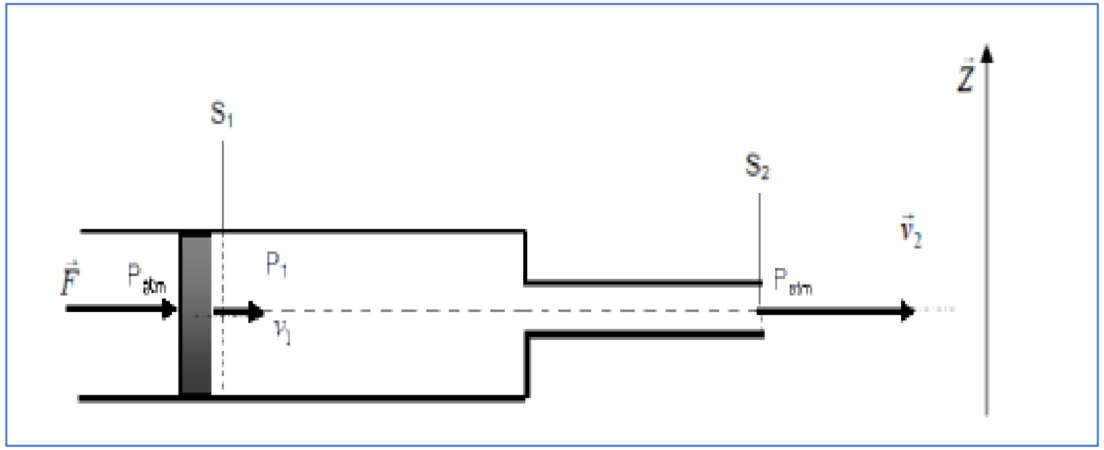


On donne : R1 = 50mm et α = 15° , P0=1008 Hpa; ρ0 = 1,225 Kg/m3 et V0=82m/s, $l_1 = 0{,}75 l_2$

Nous sommes dans le cas d'écoulement permanent et de fluide incompressible

Exercice 02 :

La figure ci-contre représente un piston qui se déplace sans frottement dans un cylindre de section S1; et de diamètre d1= 4cm rempli d'un fluide parfait de masse volumique ρ=1000 kg/m3.



Le piston est poussé par une force F d'intensité 62,84n à une vitesse v1 constante. Le fluide peut s'échapper vers l'extérieur par un cylindre de section S2 et de diamètre d2 = 1cm à une vitesseV2 et une pression P2=Patm=1bar

APPLICATION

Suite Exercice 02

1) Ecrire l'équation de continuité et déterminer l'expression de la vitesse V1; en fonction de V2

2) En appliquant l'équation de Bernoulli, déterminer l'expression de la vitesse d'écoulement V2 en fonction de P1, Patm et rho (On suppose que les cylindres sont dans une position horizontale (Z1= Z2).

3) Déduire le débit volumique Qv