2

ÉQUATIONS

L'étude des lois physiques et la modélisation de certains phénomènes réels nous a souvent amené à décrire ces situations par des équations littérales, où plusieurs symboles représentant des quantités mesurables jouent un rôle. Une fois l'équation de la situation connue, il arrive souvent que l'on a à déduire la valeur d'une quantité inconnue (appelée la variable) connaissant celle des autres. Pour cela, l'étape consiste à isoler l'inconnue en l'écrivant sous forme d'équation en fonction des autres quantités (ou symboles). Cette étape est appelée la résolution de l'équation et l'inconnue, est le symbole qui apparaît dans l'équation et dont la valeur est à déterminer.

La résolution des équations a été pour plusieurs mathématiciens un sujet intéressant et primordial. En effet, pour se distinguer ou pour tester l'intelligence et la rapidité des autres, certains savants se lançaient des défis qui consistaient à trouver la solution à un problème réel décrit par une équation, en un temps limité. Mais au fait qu'est-ce qu'une équation?

Les égalités comme $8-2=6$; $36=4\times 9$ *ont un point en commun. La valeur du premier membre doit être égale à celle du deuxième. Ce type d'égalité est appelé identité. Toutefois, des égalités contenant des variables dans un membre ou dans les deux membres ne sont valables que si l'on connaît la valeur de ces variables. Par exemple, l'égalité* $4x=24$ *n'est valable que si* x *vaut* 6. *De telles égalités sont appelées équations.*

Résoudre une équation revient à chercher les valeurs de ses variables que l'on appelle racines ou zéros de l'équation. La résolution d'équations est basée sur les règles d'égalités suivantes. Ces règles nous permettent de transformer l'équation donnée en une équation équivalente dans le but d'isoler l'inconnue. Soient a, b *et* c, *trois nombres réels, alors:*

1. $\boxed{a+b=c+b}$, *on ne change pas l'égalité* $a=c$, *si on ajoute une même quantité de chaque côté de cette égalité.*
2. $\boxed{a-b=c-b}$, *on ne change pas l'égalité* $a=c$, *si on soustrait une même quantité de chaque côté de cette égalité.*
3. $\boxed{a\cdot b=c\cdot b}$, *on ne change pas l'égalité* $a=c$, *si on multiplie par une même quantité de chaque côté de cette égalité.*
4. $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{b}}$ si $b\neq 0$, *on ne change pas l'égalité* $a=c$, *si on divise par une même quantité de chaque côté de cette égalité.*

2-1 Équations du premier degré

Le degré d'une équation du type polynomial (pas d'inconnue au dénominateur), correspond à l'exposant le plus élevé qui affecte l'inconnue dans l'équation. Une équation du premier degré est une équation linéaire à une inconnue, de la forme: $ax+b=0$; $ax+b=c$; $ax+b=cx$ *ou* $ax+b=cx+d$, *où* a, b, c *et* d *sont des nombres réels et* x, *la variable. Pour résoudre une équation, on isole la variable dans un membre et les constantes dans l'autre membre.*

Exemple 2-1 Résolvez les équations suivantes:

a) $x-5=3$ b) $3x+6=3$

Solution

a) Pour isoler x, on ajouter le nombre 5 aux deux membres de l'équation: $x-5+5=3+5 \Rightarrow x=8$

b) On ajoute le nombre -6 aux deux membres de l'équation: $3x+6-6=3-6 \Rightarrow 3x=-3$

ensuite on les multiplie par le nombre $\frac{1}{3}$, d'où $\frac{1}{3}(3x)=\frac{1}{3}(-3) \Rightarrow x=-1$

Remarque *Pour isoler la variable ou les termes contenant la variable dans un membre, on déplace les termes constants dans l'autre membre de l'équation en changeant leur signe. Ainsi pour l'exemple suivant on a:* $x-2=3 \Rightarrow x=3+2=5$

Exemple 2-2 Résolvez les équations suivantes:

a) $3x+4=-x+2$ b) $x-(3x-2)=3-2x+2(3x-5)$

c) $x(x+1)-3x=(x-4)(x+1)$

Solution

a) $3x+4=-x+2 \Rightarrow 3x+x=2-4$, alors: $4x=-2$ d'où $x=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

b) Il faut supprimer les parenthèses, simplifier et résoudre.

$x-3x+2=3-2x+6x-10 \Rightarrow -2x+2=-7+4x \Leftrightarrow -2x-4x=-7-2$

alors : $-6x=-9$ d'où $x=\frac{-9}{-6}=\frac{3}{2}$

Remarque *La vérification nous permet d'être sûr de la solution obtenue. Pour l'exemple* 2-2 a) *on a:*

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)+4=-\left(-\frac{1}{2}\right)+2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}+\frac{8}{2}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

Règles de proportion

Lorsqu'on a à résoudre des équations comportant des fractions, on utilise les règles de proportions qui s'énoncent comme suit: $\boxed{\frac{a}{b}=c \Leftrightarrow a=bc}$ *et* $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc}$

Exemple 2-3 Résolvez les équations suivantes:

a) $\frac{x}{3}=5$ b) $\frac{-x}{2}=\frac{-9}{4}$ c) $\frac{5}{8}=\frac{x}{-16}$

Solution

a) $\frac{x}{3}=5 \Leftrightarrow x=3\cdot 5=15$ b) $\frac{-x}{2}=\frac{-9}{4} \Leftrightarrow -4x=-18$ d'où $x=\frac{-18}{-4}=\frac{9}{2}$

c) $\frac{5}{8}=\frac{x}{-16} \Leftrightarrow -80=8x$ d'où $x=\frac{-80}{8}=-10$

Exemple 2-4 Résolvez les équations suivantes:

a) $\frac{x}{2}=-3x+1$ b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=x-1$ c) $\frac{x+1}{x-3}=\frac{x+3}{x+2}$

Solution

a) $\frac{x}{2}=-3x+1 \Leftrightarrow x=2(-3x+1) \Rightarrow x=-6x+2$ d'où $7x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$

b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=x-1 \Leftrightarrow \frac{6x+4x-3x}{12}=\frac{7x}{12}=x-1 \Rightarrow 7x=12x-12$

d'où $-5x=-12 \Rightarrow x=\frac{12}{5}$

c) $\frac{x+1}{x-3}=\frac{x+3}{x+2} \Leftrightarrow (x+1)(x+2)=(x-3)(x+3) \Rightarrow x^2+2x+x+2=x^2-9$

$\Rightarrow x^2+3x-x^2=-9-2$ d'où $3x=-11 \Rightarrow x=-\frac{11}{3}$

Équations littérales

Une équation littérale est une formule utilisée pour décrire un phénomène ou une situation réelle. Bien souvent, on connaît toutes les contraintes du problème sauf une, que l'on appelle «l'inconnue». Il s'agit de déterminer sa valeur. Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre ce type de problème, car chaque formule est typique et différente des autres. Toutefois, on procède de façon méthodique en commençant par isoler le (ou les) termes qui contiennent l'inconnue, ensuite on isole l'inconnue désirée.

Exemple 2-5 Isolez la variable indiquée dans les formules suivantes:

a) I; $Q = It$ b) Q_1; $F = \dfrac{kQ_1Q_2}{r^2}$ c) v_0 ; $x = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$

d) a ; $v_f^2 - v_i^2 = 2ad$ e) v_f ; $x = \dfrac{1}{2}(v_f + v_i)t$ f) P_2 ; $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$

Solution

a) $I = \dfrac{Q}{t}$ b) $Fr^2 = kQ_1Q_2 \Rightarrow Q_1 = \dfrac{Fr^2}{kQ_2}$ c) $v_0t = x - \dfrac{1}{2}gt^2 - x_0 \Rightarrow v_0 = \dfrac{x - \frac{1}{2}gt^2 - x_0}{t}$

d) $a = \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2d}$ e) $\dfrac{2x}{t} = v_f + v_i \Rightarrow v_f = \dfrac{2x}{t} - v_i$ f) $P_1V_1T_2 = P_2V_2T_1 \Rightarrow P_2 = \dfrac{P_1V_1T_2}{V_2T_1}$

Exercices 2-1

1. *Résolvez les équations suivantes:*

a) $4x - 6 = 4$ *b)* $4\omega - 2 = \omega + 3$

c) $8 - (3 + 4R) = -2 - (2R + 1)$ *d)* $4E - 3(2E + 1) = -3 - 2(2E + 3)$

e) $(I + 3)(3I - 2) = 3I^2 - 2(I + 1)$ *f)* $4P - 2P + 3 = 7P + 3(-2P + 1)$

2. *Résolvez les équations suivantes:*

a) $3x - 6 = 3$ *b)* $-x + 1 = -3$ *c)* $3x + 2 = x$

d) $2x + 4 = x + 1$ *e)* $6x + 4 = -2x$ *f)* $5(x - 2) = 4 + 2(x - 7)$

g) $6(x - 1) = 2x - (3 - 9x)$ *h)* $x(x + 1) + 3 = (x - 4)(x + 1)$ *i)* $(2x - 2)(3x + 2) = 3x(x + 1) + x(3x + 2)$

3. *Résolvez les équations suivantes:*

a) $\dfrac{4x}{3} = \dfrac{5}{4}$ *b)* $\dfrac{s-1}{2} = \dfrac{s}{8}$ *c)* $\dfrac{3x-1}{2-x} = -3$

d) $\omega - \dfrac{3\omega}{4} = 3\omega - 1 + \dfrac{2\omega + 1}{5}$ *e)* $\dfrac{4t}{3} - 3 = \dfrac{t}{5}$ *f)* $\dfrac{e-2}{4-3e} = \dfrac{2e+1}{-6e+1}$

g) $\dfrac{2}{x} = -7$ *h)* $\dfrac{4x}{3} = \dfrac{8}{2}$ *i)* $-\dfrac{2x}{3} = 5x - 8$

4. *Trouvez l'inconnue.*

a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{7} = -x + 2$ *b)* $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x-2}{x+2}$ *c)* $\dfrac{2x-3}{3x-4} = \dfrac{4x+5}{6x}$

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} = 4$ *e)* $-\dfrac{2x}{5} + \dfrac{3x}{6} = \dfrac{x}{30}$ *f)* $\dfrac{12x^2 + 8x - 1}{3x - 1} = 4x + 3$

5. *Isolez la variable indiquée dans la formule correspondante.*

a) f; $X_c = \dfrac{1}{2\pi \text{ f C}}$ b) R; $r = \dfrac{v - Ri}{i}$ c) L; $X_L = 2\pi fL$

d) i_2; $n_1 i_1 = n_2 i_2$ e) i; $\dfrac{E^2}{R} = Ri^2$ f) C; $\dfrac{1}{\omega C} = 2\pi fL$

6. *Isolez la variable indiquée dans la formule correspondante.*

a) S_1; $n = \dfrac{S_2}{S_1 - S_2}$ b) R_3; $\mathrm{R_t} = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)^{-1}$ c) R_2; $C_t\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = R_t(C_1 + C_2)$

d) n; $\dfrac{I}{v} = \dfrac{1}{\left(R + \dfrac{r}{n}\right)}$ e) C_1; $2\pi\,\mathrm{fL} = \dfrac{1}{2\pi\left(\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)}$ f) t; $\dfrac{r}{t+s} = \dfrac{\frac{r}{2}}{t-s}$

7. *Isolez la variable indiquée dans la formule correspondante.*

a) r ; $\dfrac{E}{R+r} = \dfrac{1}{E}$ b) d ; $F = \dfrac{Gm_1 m_2}{d^2}$ c) v_1 ; $v_2^2 = v_1^2 - 2ad$

d) f_c ; $C = \dfrac{1}{2\pi R f_c}$ e) h ; $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ f) r ; $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

8. *Isolez la variable indiquée dans la formule correspondante.*

a) t_2 ; $\dfrac{k + t_1}{R_1} = \dfrac{k + t_2}{R_2}$ b) α ; $R_2 = R_1(1 + \alpha(t_2 - t_1))$ c) R_2 ; $\dfrac{1}{R_t} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

d) R_s ; $\dfrac{I_s}{E} = \dfrac{1}{(R_s + R_c)}$ e) t ; $n = \dfrac{\frac{W}{t}}{EI}$ f) b ; $a^2 = b^3 - c^4$

9. *Isolez la variable indiquée dans la formule correspondante.*

a) i ; $Y = \dfrac{a + bi}{(a - bi)}$ b) r ; $\dfrac{1}{V} = \dfrac{1}{I(R + \frac{r}{n})}$ c) Z_2 ; $Z = \dfrac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$

d) X ; $\dfrac{V}{X + R} = \dfrac{e}{X}$ e) y ; $x = 1 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{2}{\frac{1}{y}}$ f) d ; $\dfrac{L}{2} = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{R+r}{2}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2 + d^2}$

2-2 *Équations du second degré*

Soient a, b *et* c, *trois nombres réels tels que* $a \neq 0$, *alors une équation du second degré à une inconnue (appelée aussi équation quadratique) est une équation de la forme:* $ax^2+bx+c=0$

Il existe plusieurs méthodes nous permettant de résoudre une équation quadratique. Toutefois, dans ce manuel, nous étudierons les méthodes de résolution par factorisation et par la formule quadratique, seulement.

Résolution par factorisation

Pour résoudre une équation quadratique par factorisation, on décompose en un produit de deux facteurs le trinôme du second degré, ax^2+bx+c *; ensuite, on résout en utilisant la règle suivante: , si* $(A)(B)=0$, *alors :* $A=0$ *ou* $B=0$, *où* A *et* B, *sont les* 2 *facteurs du trinôme.*

Exemple 2-6 Résolvez les équations suivantes:

a) $x^2-7x+12=0$ b) $x^2+6x=0$ c) $x^2-9=0$

d) $6x^2+7x-3=0$ e) $x^2-2x+1=0$

Solution

a) On décompose le trinôme $x^2-7x+12 \Rightarrow a=1;\ b=-7;\ c=12$, alors: $ac=12=-3\times-4$ *et* $b=-3-4=-7$

$x^2-7x+12=x^2-3x-4x+12=x(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x-4)$, d'où

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0 \quad \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$, et $x-4=0 \Rightarrow x=4$. La solution est: $\{3;4\}$

b) En mettant en évidence le facteur commun x, l'équation devient: $x^2+6x=x(x+6)=0 \Rightarrow x=0$ *et* $x=6$.
Les racines de l'équation sont: $x_1=0$ *et* $x_2=6$

c) Le trinôme x^2-9 est une différence de 2 carrés $\Rightarrow x^2-9=(x-3)(x+3)=0$
D'où : $x-3=0 \Rightarrow x=3$, et $x+3=0 \Rightarrow x=-3$. Les zéros de l'équation sont: $x_1=3$ *et* $x_2=-3$

d) On décompose le trinôme $6x^2+7x-3 \Rightarrow a=6;\ b=7;\ c=-3$, alors: $ac=-18=-2\times 9$ *et* $b=-2+9=7$

$6x^2+7x-3=x^2-2x+9x-3=2x(3x-1)+3(3x-1)=(3x-1)(2x+3)=0$

$\Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$, et $2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$. Les racines sont: $x_1=\frac{1}{3}$ *et* $x_2=-\frac{3}{2}$

e) Le trinôme x^2-2x+1 est un carré parfait $\Rightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$. D'où $x_1=x_2=1$, on dit que l'on a une racine double.

Résolution par formule quadratique

Par sa simplicité et par sa rapidité à trouver les racines, cette méthode est la plus utilisée pour résoudre l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$. *Les racines sont obtenues par la formule suivante:*

$$\boxed{\{x_1;x_2\}=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$$

où $\Delta=b^2-4ac$ *est le discriminant et* a, b *et* c *sont les coefficients du trinôme.*

Remarque *si* $\Delta>0$, *on a deux racines réelles distinctes:* x_1 *et* x_2.
si $\Delta=0$, *on a une racine réelle double:* $x_1=x_2$, *et dans ce cas, le trinôme est un carré parfait.*
si $\Delta<0$, *on n'a pas de racine réelle.*

Preuve

Il s'agit de trouver les racines x_1 *et* x_2 *telles que:* $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=0$

Pour cela, on met en évidence le coefficient a: $ax^2+bx+c=\ a\left(x^2+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}\right).$

Mais $x^2+\dfrac{bx}{a}$ *est le début du carré* $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=x^2+\dfrac{bx}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. *Alors,*

$$a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\qquad =a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\ =0$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\ =0$$

Posons $\Delta=b^2-4ac$

$$\Rightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\quad =a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)\ =0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\quad =a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

D'où $\quad x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>Exemple 2-7</u> Résolvez les équations suivantes:

a) $x^2-2x-3=0$ b) $x^2+4x+4=0$ c) $x^2-16=0$

d) $2x^2+2x+3=0$ e) $2x^2+x=0$

<u>Solution</u>

a) Les coefficients sont a = 1, b = -2 et c = -3 $\Rightarrow \Delta=(-2)^2-4(1)(-3)=16$

$\Delta>0 \Rightarrow$ 2 racines réelles distinctes: $x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2(1)}=3$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2(1)}=-1$

b) Les coefficients sont a = 1, b = 4 et c = 4 $\Rightarrow \Delta=(4)^2-4(1)(4)=0$

$\Delta=0 \Rightarrow$ une racine réelle double: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2(1)}=-2$

c) a = 1, b = 0 et c = -16 $\Rightarrow \Delta=(0)^2-4(1)(-16)=64$, $\Delta>0 \Rightarrow$ 2 racines réelles distinctes:

$x_1=\dfrac{-(0)+\sqrt{64}}{2(1)}=4$ et $x_2=\dfrac{-(0)-\sqrt{64}}{2(1)}=-4$

d) a = 2, b = 2 et c = 3 $\Rightarrow \Delta=(2)^2-4(2)(3)=-24$, $\Delta<0 \Rightarrow$ Pas de racine réelle: $\{\varnothing\}$

e) a = 2, b = 1 et c = 0 $\Rightarrow \Delta=(1)^2-4(1)(0)=1$, $\Delta>0 \Rightarrow$ 2 racines réelles distinctes:

$x_1=\dfrac{-(1)+\sqrt{1}}{2(2)}=0$ et $x_2=\dfrac{-(1)-\sqrt{1}}{2(2)}=-\dfrac{1}{2}$

Exercices 2-2

1. *Décomposez en produits de facteurs et résolvez les équations suivantes:*

   a) $16x^2-9=0$ b) $a^2-8a+16=0$ c) $\omega^2-3\omega=0$ d) $4e^2-28e+49=0$
   e) $6L^2+5L-6=0$ f) $2x^2-3x-14=0$ g) $3R^2-19R-40=0$ h) $-8t^2+14t-3=0$

2. *À l'aide de la formule quadratique, résolvez les équations suivantes:*

   a) $6x^2+x-1=0$ b) $3c^2+11c-14=0$ c) $3z^2-5z-2=0$ d) $2t^2+t-21=0$
   e) $3y^2-13y+4=0$ f) $3\omega^2-7\omega+2=0$ g) $3a^2-5a=0$ h) $2b^2-18=0$

3. *Utilisez la méthode de votre choix pour résoudre les équations suivantes:*

   a) $8e^2-10e-3=0$ b) $9x^2+24x+16=0$ c) $i^2+23i+120=0$ d) $5x^2+2x+7=0$
   e) $R^2-5R-24=0$ f) $4x^2-28x+49=0$ g) $6E^2-E-3=0$ h) $3J^2-5J-3=0$

4. *Utilisez la méthode de factorisation pour résoudre les équations suivantes:*

   a) $x^2-4=0$ b) $x^2-2x+1=0$ c) $x^2-8x+15=0$
   d) $12x^2-8x=0$ e) $6x^2+x-7=0$ f) $4x^2-12x+9=0$
   g) $2x^2-5x+3=0$ h) $(2x-1)^2-(x+2)^2=0$ i) $(x+7)^2-5x-35=0$

5. *Utilisez la formule quadratique pour résoudre les équations suivantes:*

   a) $6x^2-11x+3=0$ b) $7x^2+6x-1=0$ c) $x^2-2x-8=0$
   d) $2x^2+3x-4=0$ e) $6x^2-7x+2=0$ f) $x^2+7x-1=0$
   g) $4x^2-3x=0$ h) $x^2+3(x-4)-16=0$ i) $(x-2)^2-x+2=0$

2-3 Systèmes d'équations à deux inconnues

Dans plusieurs situations physiques, une variable est reliée à une autre en obéissant à plusieurs contraintes en même temps. Par exemple, dans un circuit électrique, plusieurs contraintes existent simultanément. Une composante (résistance, inductance, condensateur, transistor...) peut être commune à plus d'une branche du circuit, et le courant qui traverse cette branche peut être le courant résultant de plusieurs courants circulant simultanément dans différentes parties du circuit. Pour représenter mathématiquement cette situation, il est nécessaire d'établir autant d'équations qu'il y a de contraintes. La solution est la valeur des variables qui satisferont toutes les équations simultanément.

Supposons que deux courants I_1 et I_2 circulent dans une branche d'un circuit électrique et qu'à un moment donné on ait l'équation: $I_1 - 3I_2 = 1$. Seule cette équation ne nous permet pas de déterminer la valeur spécifique des courants I_1 et I_2. Il nous faut donc, une autre équation. Supposons qu'à un autre moment, on établit une seconde équation: $I_1 - 2I_2 = 9$. Alors, les deux équations ainsi établies sont dites «simultanées» et l'ensemble de ces équations est appelé «système d'équations».
Résoudre un système d'équations revient à déterminer une valeur particulière pour chacune des inconnues du système. Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Dans cette section, on étudiera les méthodes d'addition, de soustraction, de comparaison et de substitution. Le but de ces méthodes est de supprimer une équation en prenant soin d'éliminer une inconnue. On obtient ainsi, une équation à une inconnue que l'on résout , ensuite on substitue la valeur obtenue dans l'une des équations du système afin de déterminer la valeur de la deuxième inconnue.

<u>Exemple 2-8</u> En utilisant la méthode de soustraction, résolvez le système: $\begin{cases} I_1 - 3I_2 = 1 \\ I_1 - 2I_2 = 9 \end{cases}$

<u>Solution</u>

En effectuant la soustraction des deux équations on élimine une équation:

$$\begin{array}{l} I_1 - 3I_2 = 1 \\ \underline{-(I_1 - 2I_2 = 9)} \\ 0I_1 - I_2 = -8 \qquad \Rightarrow I_2 = 8 \end{array}$$

La valeur de I_2 étant déterminée, on remplace cette valeur dans la première équation (on aurait pu prendre la deuxième équation) du système pour trouver la valeur de I_1 : $I_1 - 3(8) = 1 \quad \Rightarrow I_1 = 25$

On obtient ainsi, l'ensemble solution qui est un couple: $(I_1\,; I_2) = (25\,; 8)$

Vérification: On remplace les valeurs de I_1 et I_2 dans la deuxième équation: $25 - 2(8) = 9 \quad \Rightarrow 9 = 9$.

<u>Exemple 2-9</u> En utilisant la méthode d'addition, résolvez le système: $\begin{cases} I_1 - 3I_2 = 1 & (1) \\ I_1 - 2I_2 = 9 & (2) \end{cases}$

<u>Solution</u>

Supposons que l'on veut éliminer I_2 . Pour cela, il faut que les coefficients de I_2 dans les deux équations du système soient deux nombres opposés. On arrive à cela en multipliant l'équation (1) par 2 et l'équation (2) par -3 . On obtient le système équivalent:

$$\begin{array}{l} 2(I_1 - 3I_2 = 1) \\ -3(I_1 - 2I_2 = 9) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2I_1 - 6I_2 = 2 \\ -3I_1 + 6I_2 = -27 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2I_1 - 6I_2 = 2 \\ \underline{-3I_1 + 6I_2 = -27} \\ -I_1 - 0I_2 = -25 \qquad \Rightarrow I_1 = 25 \end{array}$$

On substitue la valeur de I_1 dans l'équation (1) pour trouver la valeur de I_2 : $25 - 3I_2 = 1 \quad \Rightarrow I_1 = 8$

L'ensemble solution est: $(I_1\,; I_2) = (25\,; 8)$

<u>xemple 2-10</u> En utilisant la méthode de comparaison, résolvez le système: $\begin{cases} 3x+y=1 & (1) \\ -2x+y=4 & (2) \end{cases}$

<u>Solution</u>

La méthode de comparaison consiste à isoler l'une des deux inconnues (x ou y) dans chacune des deux équations et de les comparer. Supposons que l'on isole y:

$\begin{cases} 3x+y=1 & (1) \\ -2x+y=4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-3x+1 \\ y=2x+4 \end{matrix} \Rightarrow -3x+1=2x+4$ D'ou: $x=-\frac{3}{5}$, alors: $y=-3\left(-\frac{3}{5}\right)+1=\frac{14}{5}$

L'ensemble solution est: $(x\,;y)=\left(-\frac{3}{5};\frac{14}{5}\right)$

<u>Exemple 2-11</u> En utilisant la méthode de substitution, résolvez le système: $\begin{cases} -x+\ y=2 & (1) \\ -x+2y=4 & (2) \end{cases}$

<u>Solution</u>

La méthode de substitution consiste à isoler l'une des deux inconnues (x ou y) dans l'une des deux équations et de la substituer dans l'autre équation. Supposons que l'on isole x dans l'équation (1):
$-x+y=2 \quad \Rightarrow x=y-2$ substituons cette valeur dans l 'équation (2): $-(y-2)+2y=4 \quad \Rightarrow y=2$
Alors: $x=2-2=0$. L'ensemble solution est: $(x\,;y)=(0\,;2)$

<u>Exemple 2-12</u> Utilisez une méthode appropriée pour résoudre les systèmes suivants:

a) $\begin{cases} 2y+\ x=6 \\ 4y+3x=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=-3y+15 \\ y-3=2x \end{cases}$

<u>Solution</u>

a) Avec la méthode d'addition, on multiplie l'équation (1) par -3 pour éliminer x (ou par -2 si l'on désire éliminer y). Optons pour x:

$$\begin{matrix} -3(2y+\ x=6) \\ 4y+3x=11 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -6y-3x=-18 \\ \underline{4y+3x=\ 11} \end{matrix}$$

$-2y-0x=-7 \quad \Rightarrow y=\frac{7}{2}$. On substitue la valeur de y dans l'équation (1) pour trouver la valeur de x: $2\left(\frac{7}{2}\right)+x=6 \quad \Rightarrow x=-1$. L'ensemble solution est: $(x\,;y)=\left(-1;\frac{7}{2}\right)$

b) Puisque la variable x est isolée dans la première équation, on la substitue dans la deuxième équation:

$y-3=2(-3y+15) \quad \Rightarrow y=\frac{33}{7}$. Remplaçons cette valeur dans la première équation:

$x=-3\left(\frac{33}{7}\right)+15 \quad \Rightarrow x=\frac{6}{7}$. L'ensemble solution est: $(x\,;y)=\left(\frac{6}{7};\frac{33}{7}\right)$.

Vérifions dans la deuxième équation: $\frac{33}{7}-3=2\times\frac{6}{7} \quad \Rightarrow \frac{14}{7}=\frac{14}{7}$

<u>Exemple 2-13</u> Résolvez les systèmes d'équations suivants:

a) $\begin{matrix} y=2x+5 \\ y=2x+1 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x+y=2 \\ 3x+3y=6 \end{matrix}$

<u>Solution</u>

a) Avec la méthode de comparaison, on obtient: $2x+5=2x+1 \quad \Rightarrow 0=4$!... Impossible.
Ce système n'a pas de solution. Les deux équations sont incompatibles!

b) Avec la méthode d'addition, en multipliant l'équation (1) par -3 on élimine x et y simultanément:

$$\begin{matrix} -3(x+\ y=2) \\ 3x+3y=6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3x-3y=-6 \\ \underline{3x+3y=\ 6} \end{matrix}$$

$0x+0y=0$!... Indéterminé.

Ce système possède une infinité de solutions. Les deux équations sont dépendantes!

Remarques
- *Quelque soit la méthode utilisée, l'ensemble solution est toujours le même.*
- *Il important d'écrire la solution dans le bon ordre: x en premier; y en second.*
- *Un système dont les équations sont incompatibles est un système impossible: il ne possède aucune solution.*
- *Un système dont les équations sont dépendantes est un système indéterminé: il possède une infinité de solutions, mais aucune n'est particulière.*

Exercices 2-3

1. *Utilisez la méthode d'addition ou de soustraction pour résoudre les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ -x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=9 \\ 3x+2y=17 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-2y+2=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 5x-2y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=2x-6 \\ -2x-y=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-y=10 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2v=i+4 \\ 3v-4i-1=0 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3c=\omega \\ 2\omega+6c+2=0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2y=x+1 \\ 6y=x+4 \end{cases}$

2. *Utilisez la méthode de substitution ou de comparaison pour résoudre les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=12 \\ x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y=6-x \\ 3x+4y-11=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y-15=0 \\ y+2x-7=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y=8 \\ \dfrac{x}{2}-y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y-2x=3 \\ -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{4}y=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=0 \\ \dfrac{x}{4}-y=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2V+I=10 \\ 3x-2I=1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$ k) $\begin{cases} I_1+2I_2=-1 \\ -2I_1+3I_2=-12 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \dfrac{e}{2}+\dfrac{R}{3}=2 \\ -\dfrac{e}{5}+\dfrac{R}{4}=\dfrac{7}{20} \end{cases}$

3. *Résolvez les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} 3V-2I=5 \\ 6V-4I=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5I_1+2I_2=1 \\ 10I_1+4I_2=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 6x=4y+12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{5}{2}x+y=2 \\ 5x+2y=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0{,}5x-0{,}9y=0{,}8 \\ 2x=3{,}6y+2{,}7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x}{7}-\dfrac{y}{9}-2=0 \\ 126-9x=-7y \end{cases}$

?-4 Méthode de Cramer (déterminants)

Par sa rapidité et sa simplicité à déterminer les solutions, la méthode de Cramer, utilisant les déterminants, est une approche systématique souvent employée pour résoudre des systèmes d'équations. Dans cette section, nous utiliserons cette méthode pour les systèmes à deux et à trois équations simultanées.

Systèmes à deux inconnues

Soit à résoudre le système d'équation: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 *et* c_2 *sont des nombres réels. Les nombres* a_1 *et* a_2 *sont les coefficients de* x, *et* b_1 *et* b_2, *ceux de* y. *On peut éliminer* x *en multipliant l'équation* (1) *par* $-a_2$, *l'équation* (2) *par* a_1, *et en additionnant les équations équivalentes obtenues. Alors:*

$$\begin{array}{lcl} -a_2(a_1x + b_1y = c_1) & \Rightarrow & -a_2a_1x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ a_1(a_2x + b_2y = c_2) & & \underline{a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2} \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Pour trouver la variable x, *on substitue* y *dans l'une des équations du système:* $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

En Posant: $D = a_1b_2 - a_2b_1$, $D_x = c_1b_2 - c_2b_1$ *et* $D_y = a_1c_2 - a_2c_1$, *on déduit les relations suivantes:*

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}} \quad et \quad \boxed{y = \frac{D_y}{D}}$$

Les expressions: D, D_x *et* D_y *sont appelées «déterminants». Ainsi, le déterminant* D_x *ne contient aucun coefficient de* x. *De même,* D_y *ne contient aucun coefficient de* y. *Toutefois, le déterminant D contient les coefficients de* x *et de* y, *et il est le dénominateur commun à* x *et à* y.

Schématiquement, on représente les déterminants par un tableau où chaque colonne correspond aux coefficients de x: $a_1, a_2 \ldots$, *aux coefficients de* y: $b_1, b_2 \ldots$, *et (ou) aux constantes (constituant les membres droits des équations du système):* $c_1, c_2 \ldots$

Pour calculer un déterminant d'un système à deux équations, on effectue le produit des éléments de la diagonale principale auquel on soustrait le produit des éléments de la diagonale secondaire.

$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{array} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad D_x = \begin{array}{c} \begin{matrix} c & y \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{array} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad D_y = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & c \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Exemple 2-14 Calculez les déterminants D, D_x et D_y du système d'équations: $\begin{cases} x-3y=1 \\ x-2y=9 \end{cases}$

Solution

$$D=\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{array}=1(-2)-1(-3)=1$$

$$D_x=\begin{array}{c} \begin{matrix} c & y \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} \end{array}=1(-2)-9(-3)=25 \qquad D_y=\begin{array}{c} \begin{matrix} x & c \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \end{array}=1(9)-1(1)=8$$

Exemple 2-15 Résolvez le système d'équations: $\begin{cases} 3y=-x+15 \\ y-3=2x \end{cases}$

Solution

$$\begin{cases} 3y=-x+15 \\ y-3=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=15 \\ -2x+\ y=3 \end{cases}$$

Calculons les déterminants: $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1(1)-(-2)(3)=7$

$$D_x=\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=15(1)-3(3)=6 \qquad \Rightarrow x=\frac{D_x}{D}=\frac{6}{7}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=1(3)-(-2)(15)=33 \qquad \Rightarrow y=\frac{D_y}{D}=\frac{33}{7}$$

L'ensemble solution est: $(x\,;y)=\left(\frac{6}{7};\frac{33}{7}\right)$

Exemple 2-16 Résolvez les systèmes d'équations suivants:

a) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+\ y=2 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$

Solution

a) Calculons les déterminants: $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2(-1)-2(-1)=0$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=5(-1)-1(-1)=-4 \qquad \Rightarrow x=\frac{D_x}{D}=\frac{-4}{0} \text{ Impossible !}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2(1)-2(5)=-8 \Rightarrow y=\frac{D_y}{D}=\frac{-8}{0} \text{ Impossible !}$$

Ce système n'a pas de solution.

b) Calculons les déterminants: $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=1(3)-3(1)=0$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=2(3)-6(1)=0 \qquad \Rightarrow x=\frac{D_x}{D}=\frac{0}{0} \text{ Indéterminé !}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=1(6)-3(2)=0 \qquad \Rightarrow y=\frac{D_y}{D}=\frac{0}{0} \text{ Indéterminé !}$$

Ce système possède une infinité de solutions, mais aucune n'est particulière.

Remarque *Lorsque le déterminant D est nul, le système d'équations est soit impossible, soit indéterminé. Si en plus, les déterminants D_x et (ou) D_y sont nuls, alors le système est automatiquement indéterminé.*

Systèmes à trois inconnues

Soit le système d'équations: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

Le déterminant D est représenté par le tableau: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Pour calculer ce déterminant, on rajoute les deux premières colonnes à droite de la représentation ci-dessus et on effectue la somme des produits des éléments des trois diagonales principales à laquelle on soustrait la somme des produits des éléments des trois diagonales secondaires:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array} \\ D = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \end{array}$$

Pour les déterminants D_x ou D_y ou D_z, représentés par les tableaux ci-dessous, on substitue la colonne des x ou la colonne des y ou la colonne des z, par la colonne des constantes d_1 , d_2 et d_3. Le calcul de ces déterminants est identique à celui de D. Alors:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccccc} c & y & z & & \end{array} \\ D_x = & \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{vmatrix} = (d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3) - (d_3b_2c_1 + b_3c_2d_1 + c_3d_2b_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccccc} x & c & z & & \end{array} \\ D_y = & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix} = (a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3) - (a_3d_2c_1 + d_3c_2a_1 + c_3a_2d_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccccc} x & y & c & & \end{array} \\ D_z = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3) - (a_3b_2d_1 + b_3d_2a_1 + d_3a_2b_1) \end{array}$$

L'ensemble solution est constitué de: $\boxed{x = \frac{D_x}{D}}$, $\boxed{y = \frac{D_y}{D}}$ *et* $\boxed{z = \frac{D_z}{D}}$

Exemple 2-17 Résolvez le système d'équations: $\begin{cases} 2x-3y+2z=6 \\ x+8y+3z=-31 \\ 3x-2y+z=-5 \end{cases}$

Solution

Calculons les déterminants:

$$D=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = ((2)(8)(1)+(-3)(3)(3)+(2)(1)(-2))-((3)(8)(2)+(-2)(3)(2)+(1)(1)(-3))=-48$$

$$D_x=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 & 6 & -3 \\ -31 & 8 & 3 & -31 & 8 \\ -5 & -2 & 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = ((6)(8)(1)+(-3)(3)(-5)+(2)(-31)(-2))-((-5)(8)(2)+(-2)(3)(6)+(1)(-31)(-3))=240$$

$$D_y=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & c & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -31 & 3 & 1 & -31 \\ 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} \end{array} = ((2)(-31)(1)+(6)(3)(3)+(2)(1)(-5))-((3)(-31)(2)+(-5)(3)(2)+(1)(1)(6))=192$$

$$D_z=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & -31 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -5 & 3 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = ((2)(8)(-5)+(-3)(-31)(3)+(6)(1)(-2))-((3)(8)(6)+(-2)(-31)(2)+(-5)(1)(-3))=-96$$

Alors: $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{240}{-48}=-5$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{192}{-48}=-4$ et $z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{-96}{-48}=2$

L'ensemble solution est: $(x\,;y\,;z)=(-5\,;-4\,;2)$

Exercices 2-4

1. *Calculez les déterminants D, D_x et D_y des systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x-2y=-1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 9m-2n=-4 \\ 3m+4n=1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 4a-6y=9 \\ 2a-3y=9 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 5x=12-3y \\ 3y=-5x+12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2r+5i=44 \\ 4=3i-2r \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} a-2b=5 \\ 3a+5b=4 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} 2x=-3y+1 \\ 3x=y+7 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} 6e-2i=1 \\ 3e=1+2i \end{cases}$

2. *Résolvez les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 6m-2n=1 \\ 3m-2n=1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ 4x+10y=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-y=-8 \\ -4x-2y=32 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 3x-5y=5 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 5a-b=-29 \\ 2a+3b=2 \end{cases}$

3. *Calculez les déterminants D, D_x , D_y et D_z du système d'équations:*

a) $\begin{cases} x+\ y+\ z=6 \\ 2x-\ y-\ z=-3 \\ x-2y+3z=-6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} I_1-I_2+\ I_3=0 \\ I_1\ \ +3I_3=-2 \\ 2I_2+\ 2I_3=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a+\ b+c=3 \\ 2a+3b-c=1 \\ -a-\ b+c=5 \end{cases}$

4. *Résolvez les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} x+\ 6y+\ 3z=4 \\ 2x+\ y+\ 2z=3 \\ 3x-2y+\ z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+\ y+\ z=9 \\ x+\ y-\ z=2 \\ 3x+6y-12z=-9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-\ z=5 \\ 2x-4y+\ z=0 \\ 3x+2y+2z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+\ y+\ z=0 \\ x-\ y+\ z=4 \\ 4x-2y+\ z=-5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2I_1+I_2+\ I_3=17 \\ 5I_1-I_2+2I_3=21 \\ 3I_1+3I_2-2I_3=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+\ y+\ z=-2 \\ 2x+3y-2z=2 \\ 2x-\ y-4z=-4 \end{cases}$

5. *Résolvez les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} 3x+6y-2z=5 \\ 2x+\ y+\ z=1 \\ x+\ y-2z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2I_1-3I_2+6I_3=-2 \\ 5I_1+I_2+3I_3=0 \\ -3I_1-5I_2+2I_3=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} e_1-e_2\ \ =2 \\ e_1\ \ +e_3=4 \\ e_2+e_3=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} R+\ E+I=13 \\ 2R+3E-I=15 \\ -R-\ E+I=-3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6I_1+3I_2+2I_3=36 \\ I_1+2I_2-\ I_3=2 \\ -2I_1-3I_2+\ I_3=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2e_1-e_2+\ e_3=2 \\ e_1-2e_2+\ e_3=3 \\ e_1+\ e_2+2e_3=1 \end{cases}$

6. *Résolvez les systèmes d'équations suivants:*

a) $\begin{cases} 2e_1+\ e_2-e_3=6 \\ -e_1+4e_2-e_3=-3 \\ -e_1+3e_2+2e_3=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y-\ z=4 \\ x-4y+2z=-15 \\ 2x-\ y-\ z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-\ z=2 \\ 2x-y+\ z=0 \\ 3x\ \ +2z=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-\ 3y+\ 6z=-2 \\ 2x-6y+12z=8 \\ 2x-24y+\ 4z=36 \end{cases}$

Autoévaluation –2

1. *Résolvez les équations suivantes:*

a) $2x+3=-5x+1$ b) $-3(\omega+2)-5-(-\omega+1)=2\omega-(-3\omega+4)-2$ c) $\frac{3x}{5}-\frac{2x+1}{3}=-2$

d) $3x-(-2x+1)-4x-2=-(-x+2)-4(-4x+3)$ e) $\frac{r}{2}+\frac{r}{3}-\frac{(5r+1)}{4r}=\frac{5}{6}r-2$

2. *Isolez b dans les formules suivantes:*

a) $bx=a\cdot\sqrt{b^2-y^2}$ b) $m=4(1+z(\frac{1}{2}+(b+\frac{z+1}{2})))$ c) $k=4+\frac{b-2}{b+3}$

3. *Résolvez les équations suivantes:*

a) $3S^2+S+2=0$ b) $3a^2-8a-2=0$ c) $L^2-4L+3=0$ d) $-6x^2-11x+10=0$ e) $3b^2+6b=0$

4. *Résolvez les systèmes d'équations suivants(utilisez la méthode de Cramer):*

a) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} R+E+I=6 \\ R+E-I=2 \\ R-E-I=0 \end{cases}$