1 Suites Récurrentes et fonctions

1. (a)
   (b) On utilisera la syntaxe *range*. On partira avec des listes $X1$ et $Y1$ vides. On utilisera la commande append.
   (c) On utilisera la syntaxe *range*. On partira avec des listes $X2$ et $Y2$ contenant 20 zéros.
   (d) On utilisera la syntaxe *np.linspace*. Méthode la plus rapide.
2. (a) Utilisation de la méthode $1(b)$ obligée.
   (b) Utilisation de la commande np.vectorize.
3. (a) Étude à la main de la fonction. Recherche des points fixes avec Python. Représenter sur un même schéma, la courbe représentative de la fonction, la première bissectrice et quelques termes de la suite.
   (b) $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 3.95 u_n(1-u_n) \end{cases}$
   La suite (u_n) est-elle bien définie ? La suite (u_n) converge-t-elle ?
4. (a) $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$
   (u_n) converge-t-elle ?
   (b) $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = -2 \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{5}(u_{n+1} + 4u_n + 2^n) \end{cases}$
   (u_n) converge-t-elle ?
   (c) $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \end{cases}$
   (u_n) converge-t-elle ? Si oui vers quelle valeur.
   (d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \end{cases}$
   Quelle est la limite possible pour (u_n) ?
   (e) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, (n+3)u_{n+3} = (n+2)u_{n+2} + u_n \end{cases}$
   (u_n) converge-t-elle ? Si oui vers quelle valeur.
   (f) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, 2u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \end{cases}$
   Quelle est la limite possible pour (u_n) ?

5. (a) $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} 0 < b_0 \leq a_0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \end{cases}$

   Que peut-on dire à propos de la convergence de ces deux suites ?

   On testera deux cas : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_0 = 148 \\ b_0 = 30.1 \end{cases}$

   (b) Soit $f : (x, y) \longmapsto (y, 111 - \dfrac{1130}{y} + \dfrac{3000}{xy})$

   $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_0 = (108, 115) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   Que peut-on dire à propos de la convergence de cette suite ?

6. Soit $\begin{cases} u_1 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n(u_n + \dfrac{1}{n}) \end{cases}$

   (a) Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?

   (b) Montrer que : $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{N}^* / u_p \leq 1 - \dfrac{1}{p}$.

   (c) Montrer que : $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{N}^* / u_p \geq 1$.

   (d) En déduire qu'il existe une valeur critique a de u_1 qui sépare les cas et donner une valeur approchée de a.

2 Séries

1. (a) Donner une valeur approchée de la somme des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^4(n)}$.

   (b) Trouver le premier entier naturel n tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 10$.

   (c) Trouver le premier entier naturel n tel que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} > 3$ (puis $3, 5$).

2. $\prod(1+a^n)$ converge si et seulement si $-1 \leq a < 1$. Représenter : $f(a) = \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+a^n)$.

3. On a : $\dfrac{1}{3} = 0,(3)$; $\dfrac{1}{9} = 0,(1)$ et $\dfrac{1}{7} = 0,(142857)$.

   Trouver un entier naturel strictement inférieur à 100 tel que $\dfrac{1}{n}$ ait le cylcle le plus long.

3 À propos d'entiers

1. (a) Les entiers $n(n^6 - 1)$ sont-ils divisibles par 7 ?

   On testera tous les entiers entre 1 et 100000.

(b) Les entiers $5n^3+n$ sont-ils divisibles par 6 ?
On testera tous les entiers entre 1 et 100000.

2. On donne u_0 appartenant à $\mathbf{N}^*$. On définit les trois suites suivantes :

   (a) On pose : $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 1 \text{ si } u_n = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} \text{ si } u_n \text{ est un multiple de } 3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \text{ sinon} \end{cases}$

   (b) On pose : $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 1 \text{ si } u_n = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} \text{ si } u_n \text{ est un multiple de } 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \text{ si } u_n \equiv 1[3] \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ sinon} \end{cases}$

   (c) On pose : $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 1 \text{ si } u_n = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \text{ sinon} \end{cases}$

   (d) On suppose dorénavant que u_0 parcourt $[\![1, 10000]\!]$. Vérifier que ces suites suivantes sont stationnaires.

   (e) Pour quel choix de u_0, l'arrivée à 1 de la suite (u_n) est le plus long ? Préciser le nombre de termes utilisés.

3. (a) Soit $n = 1234$. Quel est le quotient, noté q, de la division euclidienne de n par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division euclidienne par 10 à partir de q ? Écrire une fonction *calcul_base*10 d'argument n, renvoyant une liste L contenant les restes des divisions euclidiennes successives.

   (b) Écrire une fonction *somchiffre* donnant la somme des chiffres d'un entier.

   (c) Quelle est la somme des chiffres de $100!$?

   (d) Quelle est la somme des chiffres de 2^{1000} ?

   (e) Écrire une fonction *somcube* donnant la somme des chiffres au cube d'un entier.

   (f) Écrire une fonction *listechiffre* donnant tous les nombres entiers strictement inférieurs à 1000 qui sont égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.

   (g) Écrire une fonction *fact* donnant le factoriel d'un nombre. Écrire une fonction *fact_ rec* donnant le factoriel d'un nombre en utilisant un programme récursif.

   (h) Écrire une fonction *sommefacto* donnant la somme des factoriels des chiffres d'un entier.

   (i) Écrire une fonction *listesommefacto* donnant tous les nombres entiers strictement inférieurs à 1000 qui sont égaux à la somme des factorielles de leurs chiffres. Que consate-t-on ?

4. (a) Définir une fonction écrivant un entier donné en base p. Définir aussi sa fonction réciproque.

   (b) Trouver les entiers avant 1000 qui soient palindromes en base 2 et en base 10.

   (c) Définir une fonction rendant l'écriture binaire d'un entier palindromique en intercalant uniquement des 1 : ($[1,0,0] \to [1,0,0,1], [1,0,1,1] \to [1,1,0,1,1]$)

   (d) Définir une fonction donnant la somme de deux entiers écrits en base 2.

   (e) Définir une fonction donnant le produit de deux entiers écrits en base 2.

5. Définir une fonction donnant :
   (a) le caractère premier d'un entier. Tester : $17, 21, 1$.
   (b) la liste et le nombre des diviseurs d'un entier (autres que lui-même).
   (c) la somme des diviseurs d'un entier(autres que lui-même). Tester : 21.
   (d) Applications :
      i. Donner les n premiers nombres premiers. Application $n = 40$.
      ii. Trouver le quarantième nombre premier.
      iii. Calculer la somme des n premiers nombres premiers. Application $n = 40$.
      iv. Les entiers parfaits. Ce sont les entiers égaux à la somme de tous leurs diviseurs autres qu'eux mêmes. Trouver ceux qui sont inférieurs ou égaux à 500.
6. Trouver les solutions entières et leur nombre de $x+y+z = n$. Puis de de $x+2y+5z = n$. On prendra : $n = 10, 100$ et 1000.
7. (a) Trouver les solutions entières de $x^2 - 2y^2 = 1$.
   (b) Trouver les points à coordonnées entières comprises entre 2 et 100 puis 2 et 1000 de l'hyperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
8. (a) Soit p appartenant à $\mathbf{N}^*$. Résoudre dans $\mathbf{N}^3$: $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = p(\text{périmètre du triangle}) \end{cases}$.
   On fera en sorte que : $0 < a \leq b \leq c$. Application : vérifier que si $p = 120$ on a 3 solutions.
   (b) Pour quel $p < 200$ a-t-on le plus de solutions ?
   (c) Pour $p = 120$, représenter les trois triangles correspondants.
9. Donner un tirage aléatoire de cinq nombres compris entre 1 et 49 (loto). Il ne faut donc pas de répétitions.
10. (a) Écrire une fonction "2-parmi" qui renvoie toutes les parties de cardinal 2 d'une liste L. Application : $L = [2, 3, 8, 12]$ puis $L = [2, 2, 3, 8, 8, 12]$.
    (b) Calculer : $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$ et $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$. Application : $n = 50$.
11. (a) Donner la liste A des $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ compris entre 0 et 100 .
    (b) Si L_1 et L_2 sont deux listes croissantes d'entiers, donner L la liste croissante des entiers pouvant s'écrire comme somme d'un élément de chaque (ex : $L_1 = L_2 = A$).
12. Trouver les 4 fractions d'entiers à deux chiffres simplifiables littéralement.
    Exemple : $\dfrac{49}{98} = \dfrac{4}{8}$(on ne comptera pas $\dfrac{98}{49}$, ni les évidences comme $\dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5}$)
13. (a) Créer une fonction qui à un ensemble fini d'entiers naturels associe la liste de booléens valant " true " si i est dans l'ensemble et "false " sinon. Exemple : $[1, 3, 4]$ donne [F,T,F,T,T]. Tester aussi avec $[1, 6, 4]$. Quelle est l'application réciproque ?
    (b) On décide de créer un nouveau codage par $f(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{x_k}$.
    Créer ce codage. Tester avec $[1, 4, 1, 0, 1]$ et $[4, 2, 1, 0]$.
    Créer le codage réciproque. Tester avec 13? 23? Que penser de ce codage ?

(c) Créer alors une fonction donnant la réunion de deux ensembles. On ont utilisera la fonction définie à la question (a). Exemple : $\{1,3,4\}\bigcup\{0,5,10\}$ et $\{0,2,4,6,8,10\}\bigcup\{0,3,6,9\}$?

(d) Créer alors une fonction donnant l'intersection de deux ensembles. Reprendre les mêmes exemples.

14. (a) Écrire une fonction *recherche_ elt1* qui admet comme argument une liste et un élément x. Cette fonction retourne $True$ si x est dans la liste et $False$ sinon. Tester avec $[1,1,2,7,3,3]$ et $x=2$ puis $x=5$.

    (b) Écrire une fonction *recherche_ elt2* qui admet comme argument une liste et un élément x. Cette fonction retourne $True$ si x est dans la liste et $False$ sinon. Elle doit aussi retourner le premier indice de l'élément recherché s'il est présent dans la liste. Tester avec $[1,1,2,7,3,3]$ et $x=2$ puis $x=5$.

    (c) Écrire une fonction *recherche_ dicho* qui admet comme argument une liste triée et un élément x. Cette fonction retourne $True$ si x est dans la liste et $False$ sinon. Elle doit aussi retourner l'indice de l'élément recherché s'il est présent dans la liste. On utilisera la méthode dichotomique.
    Tester avec $[1,3,11,18,32]$ et $x=5$ puis $x=18$.

    (d) Écrire une fonction *recherche_ min* qui admet comme argument une liste. Cette fonction retourne le minimum de la liste. On comparera à la commande Python.

    (e) Écrire une fonction *moy* qui admet comme argument une liste. Cette fonction retourne la moyenne de cette liste. On comparera à la commande Python.

    (f) Écrire une fonction *var* qui admet comme argument une liste. Cette fonction retourne la variance de cette liste. On comparera à la commande Python.

    (g) Écrire une fonction *ecarttype* qui admet comme argument une liste. Cette fonction retourne l'écart type de cette liste.

15. (a) Écrire une fonction *recherche_ mot1* qui admet comme argument une chaîne de carractères et un mot. Cette fonction retourne $True$ si le mot est présent dans la chaîne de carractères et $False$ sinon. Elle indique aussi l'indice de la première lettre du mot s'il est présent dans la chaîne.
    Tester avec : L='mots chaîne de caractères' et mot='caractères'.

    (b) Écrire une fonction *recherche_ mot2* qui admet comme argument une chaîne de carractères et un mot. Cette fonction retourne le nombre d'occurence où le mot est présent dans la chaîne de carractères aisni que la liste des indices de la première lettre des occurences du mot dans la chaîne.

4 Tris

OBJECTIF : trier une liste par ordre croissant.
Commencer par rappeler les commandes directes avec Python.

1. Numérotation : on crée tout d'abord une liste B telle que $B[i]$ soit le rang des $A[i]$. On utilisera donc une liste auxiliaire.
2. Insertion : on regarde chaque terme en le permutant si besoin est avec le(s) précédent(s). C'est un tri sur place, on n'utilise pas de liste auxiliaire.
3. Fusion : on fait fusionner 2 listes triées. On divise alors la liste initiale par dichotomie.

(a) Écrire une fonction non récursive *fusion* qui admet comme argument deux listes M et N triées et retourne la fusion triée des deux listes.

(b) Écrire une fonction récursive *fusion_recur* de la fonction précédente.

(c) Écrire une fonction récursive *tri_fusion* permettant de trier une liste L par ordre croissant. On pourra partager la liste intiale en-deux sous listes M et N.

4. Tri rapide : on utilise un pivot.

   (a) Écrire une fonction non récursive *pivot* qui admet comme argument une liste L et deux indices a et b permettant de définir une sous-liste de L avec des indices compris entre a et b. En pratique, on prendra $a = 0$ et $b = len(L) - 1$. Le dernier élément est appelé le pivot. Cette fonction réordonne les éléments de la sous-liste en plaçant tous les éléments inférieurs ou égaux au pivot à gauche de celui-ci et les éléments strictement supérieurs à droite du pivot. Cette fonction retourne la position du pivot dans la liste.

   (b) Écrire une fonction récursive *tri_rapide* permettant de trier une liste L par ordre croissant en utilisant la fonction *pivot*.

5 Jeux

1. Jeu du mouchoir : N personnes (numérotées de 0 à $(n-1)$) sont assises en cercle et le mouchoir est au numéro 0. La personne ayant le mouchoir le donne à son suivant qui quitte le jeu en le donnant au suivant. La dernière personne à recevoir la mouchoir a gagné...
   Ecrire deux fonctions donnant le numéro du gagnant (une directe, l'autre récursive).
2. Dominos : une liste de couples (dominos) étant donnée, définir une fonction booléenne donnant True si on peut les mettre bout à bout (on peut changer l'ordre des dominos !) :

   (a) Sans les retourner.

   (b) En les retournant éventuellement.

   Donner ensuite la chaine ainsi construite .
3. Une liste étant donnée : $[u_0, u_1, ..., u_n]$, on construit une seconde liste par : $\forall i \in [\![0, n-1]\!], v_i = u_{i+1} - u_i$.
   Écrire une fonction prenant en argument une liste et donnant le nombre de fois que l'on doit appliquer cette fonction " différences " pour obtenir une liste nulle.
4. Retrouver le numéro d'une maison dans une rue sachant que la somme des numéros antérieurs est égale à la somme de ceux postérieurs (et donner le dernier numéro de la rue). Exemple : $n = 6$ et $N = 8$.

6 Intégrales et aires

1. (a) i. Rectangle à droite : $\int_a^b f \simeq R_n$ avec $R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{(b-a)}{n})$. Erreur en : $O(\frac{1}{n})$.

ii. Rectangle à gauche : $\int_a^b f \simeq S_n$ avec $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{(b-a)}{n})$. Erreur en : $O(\frac{1}{n})$.

iii. Trapèzes : $\int_a^b f \simeq T_n$ avec :
$T_n = \frac{b-a}{2n}(\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{(b-a)}{n}) + f(a+(k+1)\frac{(b-a)}{n})) = \frac{b-a}{2n}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{(b-a)}{n}))$. Erreur en : $O(\frac{1}{n^2})$.

Sur le même schéma, représenter : R_{10} et la fonction f.
Exemple : $\int_0^1 \sin(t^2)dt$. Comparer : $R_{100}, S_{100}, T_{100}$.

(b) Simpson :
$\int_a^b f \simeq \frac{b-a}{6n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{(b-a)}{n}))+4\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+\frac{1}{2})\frac{(b-a)}{n}))$.
Erreur en : $O(\frac{1}{n^3})$.

(c) Application : $\int_0^1 \sin(t^2)dt, \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx, \int_0^1 e^{-t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2. Écrire une fonction qui permet de savoir si un point donné est dans un ensemble.
   (a) Une ellipse : $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2/(x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 \leq 100\}$.
   (b) L'astroide : $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2/0 \leq x \leq \cos^3(t)$ et $0 \leq y \leq \sin^3(t)$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.
   (c) Le domaine : $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2/1 < xy < 2$ et $x < y < 2x\}$.
3. Écrire une fonction qui permet de calculer l'aire des surfaces suivantes.
   On pourra utiliser un découpage en n^2 rectangles.
   (a) Un disque de rayon 1.
   (b) Une ellipse : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   On rappelle que l'aire théorique d'une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vaut πab. On pensera donc à vérifier.
   (c) Une cardioide : $\begin{cases} x(t) = \cos(t)(1+\cos(t)) \\ y(t) = \sin(t)(1+\cos(t)) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$
   On commencera par montrer que la partie de la courbe à ordonnées positives de la cardioide vue en classe (chapitre 13) a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$.

7 Courbes paramétrés

1. (a) En utilisant des listes, tracer :
   i. l'astroide.
   ii. la cardioide.

(b) En utilisant le gradient, tracer la courbe Γ dont l'équation cartésienne est : $13x^2 + 7y^2 - 8xy + 14x - 2y = 0$.

2. Calculer la longueur (on pourra regrouper dans notre fonction les questions 1 et 2) de :

   (a) l'astroide.

   (b) la cardioide.

   On comparera les résultats obtenus avec ceux obtenus par la méthode de Simpson.

3. Déterminer les points doubles de Γ_1 paramétrée par :

   (a) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t-1}{t^2-4} \\ y(t) = \dfrac{t^2-3}{t+2} \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x(t) = t^4 - t^3 + t \\ y(t) = t^3 + 2t^2 \end{cases}$

8 Résolution d'équations

1. Résoudre les équations suivantes avec une dichotomie :
   Exemples : $2\sin(x) - 1 = 0$ sur $[0, \pi]$ et $x + \ln(x) = 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Méthode de Newton.
   On rappelle le théorème :
   On va construire par récurrence une suite (x_n). On pose $x_0 = a$.

   (a) Calculer l'équation de la tangente de la fonction f en x_0 et chercher l'intersection notée x_1 de cette tangente avec l'axe des abscisses. Exprimer x_1 en fonction de $x_0, f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

   (b) Déterminer la relation entre x_{n+1} et $x_n, f(x_n)$ et $f'(x_n)$.

   (c) Écrire une fonction qui admet comme arguments la fonction f, f', a et ϵ. Cette fonction retourne l'abscisse x à ϵ près tel que $f(x) = 0$.

   (d) Exemple : $x + \ln(x) = 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

9 Résolution d'équations différentielles

On utilise la méthode d'Euler.

1. Résoudre sur $[-10, 10]$: $\begin{cases} y' = ycos(x) - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. Résoudre sur $]0, 2[$: $\begin{cases} (2x - x^2)y' + (x-1)y = 2x - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

10 Géométrie

1. Soit $Z = \dfrac{z^2 + i}{z - i}$. Déterminer le lieu des points M d'affixe z lorsque Z est réel puis imaginaire pur.

2. Pour tout x appartenant à $\mathbf{R}\backslash\{1\}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.
   (a) Déterminer l'image du cercle trigo par la fonction f.
   (b) Déterminer l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la fonction f.
3. Soit $w(x) = |x - \lfloor x + 0.5 \rfloor|$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w(2^k x)}{2^k}$.
   À l'aide d'un graphique, montrer que f est continue mais non dérivable sur $[0, 4]$.
4. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$ avec x appartenant à $[0, 17]$. Calculer la somme des longueurs des intervalles sur lesquels $f(x) > 1$. Application : $n = 5$ et $n = 10$. Sur un graphique, on fera apparaître en couleur la contrainte demandée.

11 Matrices

Utiliser numpy.linalg .

1. Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^{50} et $det(A)$.
   (b) Trouver les valeurs propres de A. Contrôler avec (a).
   (c) Révisions de certaines commandes
      i. Créer une matrice de taille 2×3 constituée uniquement de 0.
      ii. Créer une matrice de taille 3×2 constituée uniquement de 1.
      iii. Créer la matrice identité d'ordre 4.
      iv. Comment obtenir la taille d'une matrice ? Son nombre de lignes ? Son nombre de colonnes ?
      v. On note $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer : $A \times E, 3A$ et $A + E$.
      vi. Créer une fonction "test" d'argument une matrice et qui renvoie la valeur n si M est une matrice carrée d'ordre n et zéro dans tous les autres cas.
      vii. Calculer la trace d'une matrice si elle est carrée. Vérifier une relation du cours avec la question (b).
2. On donne le graphe suivant : voir tableau. Construire la matrice M telle que $M_{i,j}$ soit la distance entre i et j sachant que l'on convient que si les points ne sont pas reliés alors cette distance vaut -1.
   (a) Écrire une fonction "voisins" renvoyant la liste des voisins du sommet i.
   (b) Écrire une fonction "aretes" renvoyant la liste le nombre de voisins du sommet i.
   (c) Écrire une fonction longueur renvoyant la longueur d'un trajet (d'une liste de points).

12 Dérangements

1. Écrire une fonction donnant la liste des permutations possibles de $1, 2, ..., n$.

13 Statistiques

1. Droite de régression linéaire.
   On donne un nuage de points M_i de coordonnées (x_i, y_i) avec i appartenant à $[\![1, n]\!]$. On suppose les x_i deux à deux distincts. On cherche une droite Δ d'équation $y = ax + b$ telle que : $\sum_{k=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ soit minimale. On a alors : $a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = E(Y) - aE(X)$. Applications.
   (a) $(0,1); (1,-2); (2,1); (3,0.5); (4,-1); (5,-3)$ et $(6,0)$.
   (b) $n = 100, x_i = \dfrac{2i}{n}$ et $y_i = \sqrt{x_i}$
2. Mesurer différentes aires à l'aide d'une distribution statistique : ellipse, cardioide.
3. Simulations
   (a) On lance trois dés non pipés, X désigne leur produit. Donner la loi de X. Préciser, si elles existent, l'espérance et la variance de X.
   (b) On lance une pièce non équilibrée et X est le numéro du second pile de la première séquence pile, pile. Évaluer la loi de X ainsi que son espérance quand :
      i. $p = 2q$. p est la probabilité d'apparition du pile et $q = 1 - p$.
      ii. $p = q$
   (c) Une ligne de métro, sur laquelle un train entièrement automatisé va et vient, compte 4 stations uniformément réparties (le train met une minute pour aller de l'une à l'autre , arrêts compris). Un voyageur fatigué monte à la station 0 et s'endort. On suppose que le temps écoulé (en minute) avant qu'il ne se réveille suit une loi géométrique de paramètre p. Donner la loi de X représentant le numéro de la station oè il se réveille.
   (d) Un pion se déplace sur un axe : il part de l'origine (notée O) et a une probabilité p de se déplacer de $+1$(un pas en avant) et une probabilité $q(1-p)$ de se déplacer de -1(un pas en arrière).
      i. Donner la loi de X?
      ii. Donner la loi de T, représentant le nombre de pas avant de revenir à O ?
      iii. Même question s'il a aussi une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ de rester sur place.
   (e) Un pion se déplace dans le plan avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de suivre $(0,1), (1,0), (0,-1)$ et $(-1,0)$. Écrire une fonction donnant le lieu du pion et une autre dessinant sa trajectoire.
      La fonction T représentant le nombre de pas avant de revenir à $(0,0)$ est-elle bien dé finie ?
   (f) On lance successivement et au hasard n boules dans N cases et on appelle T_n le nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.
      i. Évaluer $p(T_n = 1)$. et $p(T_n = 2)$ quand $n = 50$ et $N = 10$.
      ii. Retrouver que la valeur de $E(T_n)$ vérifie : $E(T_n) = N(1 - (1 - \dfrac{1}{N})^n)$.