

Notes par L.Bontinck, ces notes peuvent être (et sont sûrement) par endroits incorrectes ou erronées.

Statistiques -- TD1

Exercice 1 -- Durée d'attente à un feu rouge

1.

$$E(T_i) = \frac{\theta}{2}$$

$$Var(T_i) = \frac{\theta^2}{12}$$

2.

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \text{ biais ? Variance ?}$$

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{T} \text{ est sans biais et convergente selon } \theta.$$

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$Var(\bar{T}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{1}{n^2} n Var(T_1) = \frac{\theta^2}{12n} = Var(\bar{T})$$

$$E(\hat{\theta}_1) = 2E(\bar{T}) = \theta$$

$$Var(\hat{\theta}_1) = 4Var(\bar{T}) = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3.

On cherche à montrer que le maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \sup_i T_i$

Première méthode :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t_1, \dots, t_n | \theta) &= p(t_1, \dots, t_n | \theta) \\
P(T_1 = t_1 \cup \dots \cup T_n = t_n | \theta) \\
&= \prod_{i=1}^n P(T_i = t_i | \theta) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \\
&= \frac{1}{\theta^n}
\end{aligned}$$

Mais $\forall i \in [1, n], \theta \geq t_i$ donc on prend bien $Y_n = \sup_i (T_i)$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
P(T_1 < y) &= \int_{-\infty}^y f_{T_1}(t) dt \\
&= \int_0^y \frac{1}{\theta} dt \\
&= \begin{cases} \frac{y}{\theta} & \text{si } y \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } y > \theta \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $F_{Y_n}(y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$

$$P_{Y_n}(y) = n \left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}$$

$$E(Y_n) = \int_0^\theta y P_{Y_n}(y) dy$$

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \int_0^\theta n \frac{y^n}{\theta^n} dy \\
&= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta \\
&= \frac{n}{n+1} \theta
\end{aligned}$$

Le prof a effacé cette partie avant que je puisse la noter
Mes plus sincères excuses.

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{n+1}{n} E\left(\frac{1}{Y_n}\right) = 0$$

$$Var(\hat{\theta}_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var\left(\frac{1}{Y_n}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4. Quel estimateur choisir ?

$\hat{\theta}_2$ converge en $\frac{1}{n^2}$ et $\hat{\theta}$ converge en $\frac{1}{n}$

donc on choisit $\hat{\theta}_2$, qui sera un meilleur estimateur car il convergera plus vite.

Exercice 2

1.

$$U = X^\lambda \implies X = U^{\frac{1}{\lambda}} = g(u)$$

C'est une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ .

$$\Pi(U) = f(g(u), \lambda, \theta) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \left| \frac{1}{\lambda} u^{\frac{1}{\lambda}-1} \right| = \frac{1}{\lambda} u^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

$$\text{donc } \Pi(u) = \frac{\lambda}{\theta} (u^{\frac{1}{\lambda}})^{(\text{inintelligible})} = \frac{\lambda}{\theta} e^{\frac{u}{\theta}}$$

(inintelligible)

$$E(u) = E(X^\lambda) = \theta$$

$$\text{Var}(u) = \text{Var}(X^\lambda) = \theta_1^2$$

2.

(X_1, \dots, X_n) même loi que X .

MV $\hat{\theta}_n = ?$ Biais ? Convergence ? Efficacité ? Erreur quadratique moyenne ?

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) &= P(\cap X_i | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\theta} X_i^{\lambda-1} e^{-\frac{X_i^\lambda}{\theta}} \\ &= \text{effacé, mes excuses, mais c'était trop long de toute façon} \\ &= \frac{n}{\theta} \text{quelque chose} \end{aligned}$$

$$E(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} E(U) = \theta$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n^2} n \text{Var}(U) = \frac{\theta^2}{n}$$