Intégration -- TD02 -- Intégrales de fonctions mesurables positives

BONTINCK Laérian

Attention, la notation $\mathbb{A}_i$ est incorrecte. Je ne l'utilise que pour noter l'habituel 1_i que je ne peux pas double-tracer.

Exercice 1

$$\forall a > 0, x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant \mathbb{A}_{\{f>a\}}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{a}\int_E f d\mu \geqslant \frac{1}{a}\int_E a\ \mathbb{A}_{\{f>a\}} = \int_E \mathbb{A}_{\{f>a\}} = \mu(\{f > a\})$$

Exercice 2

1.

On cherche à montrer que

- μ_f est définie
- $\mu_f(\emptyset) = 0$
- pour (A_i) 2-à-2 dénombrables, on a $\mu_f(\bigcup A_i) = \sum \mu_f(A_i)$ (σ-additivité)

Premièrement, μ_f est définie car $f\mathbb{A}_A$ est mesurable $\forall A \in \mathscr{A}$.

Deuxièmement,

$$\mu_f(\emptyset) = \int_E f\mathbb{A}_\emptyset d\mu = 0$$

Enfin, prenons $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 2-à-2 disjoints,

$$\mu_f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \int_E f\mathbb{A}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} d\mu = \int_E \sum_{i\in\mathbb{N}} f\mathbb{A}_{A_i} d\mu$$

$$\underbrace{=}_{3.2.5} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_E f\mathbb{A}_{A_i} d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_f(A_i)$$

C'est la définition de la σ-additivité.

μ est donc bien une mesure!

2.

Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\int_A fd\mu = \int_{\bigcup A_n} fd\mu = \int_E f\mathbb{A}_{\bigcup A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f\mathbb{A}_{A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} fd\mu$$

Exercice 3 (cf. exercice 3.1.3)

Soit $g = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{A}_{A_i}$ une fonction étagée positive.

$$\int_{\mathbb{R}} gd\delta_0 = \int_{\mathbb{R}} \sum_{iI} \alpha_i \mathbb{A}_{A_i} \ d\delta_0 = \sum_{i\in I} \alpha_i \delta_0(A_i)$$

Or,

$$\delta_0(A_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \in A_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \mathbb{A}_{A_i}(0)$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} gd\delta_0 = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{A}_{A_i}(0) = g(0)$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction étagées positives telles que $f_n \xrightarrow[CVS]{} f \nearrow$,

$$\int_E fd\delta_0 = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\delta_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) \underbrace{=}_{CVS} f(0)$$

Exercice 4

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^\infty$ 2-à-2 d'intersection de mesure nulle, soir $A = \bigcup A_n$,

$$\int_A fd\mu = \int_E f\mathbb{A}_A d\mu = \int_E f \overbrace{\mathbb{A}_{\bigcup A_n}}^{\lim_{n\to+\infty} f_n} d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu$$

or, on a

$$\int_E f_n d\mu = \int_E f\mathbb{A}_{\bigcup_{i=0}^n A_i} d\mu = \int_{\bigcup_{i=0}^n A_i} fd\mu$$

On écrit la relation de Chasles (ce qu'on peut faire car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^\infty$ 2-à-2 d'intersection de mesure nulle):

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{i=0}^n \int_{A_i} fd\mu$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_A fd\mu &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^n \int_{A_i} fd\mu \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{A_n} fd\mu\end{aligned}$$

Exercice 5

1.

On peut trouver une fonction contre-exemple f telle que $\forall x, f(x) = 1 < +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} fd\mu = 1 \times \mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

Donc f est non-intégrable. **FAUX.**

2.

Si $\mu(A) > 0$ avec $A = f^{-1}(\{+\infty\})$

$$\int_A fd\mu = \int_E f(A)d\mu = +\infty\mu(A) = +\infty$$

donc

$$\int_E f d\mu \geqslant \int_A f d\mu = +\infty$$

donc f est non-intégrable. **VRAI.**