Intégration -- TD1-- Fonction mesurables, mesures et tribus

Exercice 1

a)

On a $(f_1 - f_2)(x) = 0$, soit

$$\begin{aligned} H &= \{x \in E \mid f_1(x) - f_2(x) = 0\} \\ &= h^{-1}(\{0\}) \text{ avec } h = f_1 - f_2 \end{aligned}$$

$f : (E, A) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$\forall X \in \mathscr{B}, f^{-1}(x) \in A \iff$ f est mesurable (définition)

or h est mesurable (combinaison linéaire de deux fonctions)

$$\begin{aligned} \{0\} &= [0, 0] \\ &= (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)^C \end{aligned}$$

donc $\{0\}$ est le complémentaire d'une tribu borélienne, donc appartient à la tribu.

donc $\{0\} \in \mathscr{B}$ ce qui par définition veut dire que $H = h^{-1}(\{0\}) \in A$

b)

$H_1 = h^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $H_2 = h^{-1}(]0, +\infty[)$

$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sont des éléments de tribus de Borel (intervalles de $\mathbb{R}$)

c)

Trivial à déduire des deux autres questions : on passe.

Exercice 2

- Soit $B \in A_2$, $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \underbrace{=}_{f\ mesurable} \mu(B' \in A_1) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ donc μ_f est bien définie et à valeurs positives.

- $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) \underbrace{=}_{\mu\ mesure} 0$

- $\mu_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f(B_n)$
  $\mu_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \underbrace{=}_{B_n \text{ 2 à 2 disjoints}} \mu(f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)) \underbrace{=}_{f^{-1}(B_n) \text{ 2 à 2 disjoints}} \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) =$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(B_n))$ Par σ-additivité, $\mu_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(B_n) =$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f(B_n)$

μ_f est bien définie, et vérifie $\mu_f(\emptyset) = 0$ et la σ-additivité, **c'est donc bien une mesure** !

Exercice 3

p est une mesure dite "de probabilité", soit $p(\mathbb{R}) = 1$

1)

Soit $t_1 < t_2$, $F(t_1) = p(]-\infty, t_1]) \leqslant p(]-\infty, t_2]) = F(t_2)$ car $p \nearrow$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $t_n \longrightarrow t^+$

$$\begin{aligned} lim\ F(t_n) &= lim\ p(]-\infty, t_n]) \\ &= p(lim\ ]-\infty, t_n]) \\ &= p(]-\infty, t]) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

donc F est continue à droite.

2)

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} p(]-\infty, t]) = p(\emptyset) = 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} p(]-\infty, t]) = p(\mathbb{R}) = 1$$

Exercice 4

1)

$$\lambda\ \sigma\text{-finie} \iff \exists (E_n) \in (\mathscr{B}(\mathbb{R}))^{n\in\mathbb{N}} \text{ tel quel} \begin{cases} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda(E_n) < +\infty \end{cases}$$

On peut prendre $(E_n) = ([n, n+1] \cup [-n-1, -n])_{n\in\mathbb{N}}$, car

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} En = \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda(E_n) = 2$

Ainsi, λ **est σ-finie.**

2)

Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact, ce qui veut dire que pour toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Il existe $n_0 \in \mathbb{R}$ tel que $K \subset [-n_0, n_0]$, or $\lambda([-n_0, n_0]) = 2n_0 < +\infty$

3)

On peut trouver un contre-exemple :

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n + \frac{1}{n^2}[$