Notes par L.Bontinck, ces notes peuvent être (et sont sûrement) par endroits incorrectes ou erronées.

Statistiques -- TD1

Exercice 1 -- Durée d'attente à un feu rouge

1.

$E(T_i) = \frac{\theta}{2}$

$Var(T_i) = \frac{\theta^2}{12}$

2.

$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$, biais ? Variance ?

$\hat{\theta}_1 = 2\overline{T}$ est sans biais et convergente selon θ.

$$E(\overline{T}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$Var(\overline{T}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i) = \frac{1}{n^2}nVar(T_1) = \frac{\theta^2}{12n} = Var(\overline{T})$$

$E(\hat{\theta}_1) = 2E(\overline{T}) = \theta$

$Var(\hat{\theta}_1) = 4Var(\overline{T}) = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3.

On cherche à montrer que le maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \underset{i}{sup} T_i$

<u>Première méthode :</u>

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(t_1, ..., t_n|\theta) = p(t_1, ..., t_n|\theta)\\
&P(T_1 = t_1 \cup ... \cup T_1 = t_n||theta)\\
&= \Pi_{i=1}^n P(T_i = t_i|\theta)\\
&= \Pi_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\\
&= \frac{1}{\theta^n}
\end{aligned}
$$

Mais $\forall i \in [[1, n]], \theta \geqslant i$ donc on prend bien $Y_n = \underset{i}{sup}(T_i)$

Deuxième méthode :

$$
\begin{aligned}
P(T_1 < 1) &= \int_{-\infty}^{y} f_{T_1}(t)dt\\
&= \int_0^y \frac{1}{\theta}dt\\
&= \begin{cases} \frac{y}{\theta} \text{ si } y \in [0, \theta] \\ 1 \text{ si } y > \theta \\ 0 \text{ si } y < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

donc $F_{Y_n}(y) = (\frac{y}{\theta})^n$

$P_{Y_n}(y) = n(\frac{y^n}{\theta^n})^1$

$$
E(Y_n) = \int_0^y yP_{Y_n}(y)dy
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y_n) &= \int_0^\theta n\frac{y^n}{\theta^n}dy\\
&= \frac{n}{\theta^n}[\frac{y^{n+1}}{n+1}]_0^\theta\\
&= \frac{n}{n+1}\theta
\end{aligned}
$$

Le prof a effacé cette partie avant que je puisse la noter
Mes plus sincères excuses.

$E(\hat{\theta_2}) = \frac{n+1}{n}E(\frac{1}{n}) = 0$

$Var(\hat{\theta_2}) = (\frac{n+1}{n})^2 Var(Y_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

4. Quel estimateur choisir ?

$\hat{\theta_2}$ converge en $\frac{1}{n^2}$ et $\hat{\theta}$ converge en $\frac{1}{n}$

donc on choisit $\hat{\theta_2}$, qui sera un meilleur estimateur car il convergera plus vite.

Exercice 2

1.

$U = X^\lambda \implies X = U^{\frac{1}{\lambda}} = g(u)$

C'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

$\Pi(U) = f(g(u), \lambda, \theta)|\frac{dx}{dy}|$

$|\frac{dx}{dy}| = |\frac{1}{\lambda}u^{\frac{1}{\lambda-1}}| = \frac{1}{\lambda}u^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

donc $\Pi(u) = \frac{\lambda}{\theta}(u^{\frac{1}{\lambda}})^{(\text{inintelligible})} = \frac{\lambda}{\theta}e^{\frac{u}{\theta}}$

(inintelligible)

$E(u) = E(X^\lambda) = \theta$

$Var(u) = Var(X^\lambda) = \theta_1^2$

2.

$(X_1, ..., X_n)$ même loi que X.

MV $\hat{\theta_n} = ?$ Biais ? Convergence ? Efficacité ? Erreur quadratique moyenne ?

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(X_1, ..., X_n) &= P(\cap X_i|\theta) \\
&= \Pi_{i=1}^n P(X_i|\theta) \\
&= \Pi_{i=1}^n \frac{\lambda}{\theta} X_i^{\lambda-1} e^{-\frac{X_i^\lambda}{\theta}} \\
&= \text{effacé, mes excuses, mais c'était trop long de toute façon} \\
&= \frac{n}{\theta}\text{quelque chose}
\end{aligned}$$

$E(\hat{\theta_n}) = \frac{1}{n}E(U) = \theta$

$Var(\hat{\theta_n}) = \frac{1}{\theta^2}nVar(U) = \frac{\theta^2}{n}$