Notes par L.Bontinck, ces notes peuvent être (et sont sûrement) par endroits incorrectes ou erronées.

Statistiques -- TD1

Exercice 1 -- Durée d'attente à un feu rouge

1.

$$E(T_i) = \frac{\theta}{2}$$

$$Var(T_i) = rac{ heta^2}{12}$$

2.

$$\overline{T} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$$
, biais ? Variance ?

 $\hat{ heta_1}=2\overline{T}$ est sans biais et convergente selon heta.

$$E(\overline{T}) = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T_i) = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n rac{ heta}{2} = rac{ heta}{2}$$
 $Var(\overline{T}) = Var(rac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i) = rac{1}{n^2} n Var(T_1) = rac{ heta^2}{12n} = Var(\overline{T})$

$$E(\hat{\theta_1}) = 2E(\overline{T}) = \theta$$

$$Var(\hat{ heta_1}) = 4Var(\overline{T}) = rac{ heta^2}{3n} \xrightarrow[n o \infty]{} 0$$

3.

On cherche à montrer que le maximum de vraisemblance de heta est $Y_n = \displaystyle \sup_i T_i$

Première méthode:

$$egin{aligned} \mathscr{L}(t_1,...,t_n| heta) &= p(t_1,...,t_n| heta) \ P(T_1 = t_1 \cup ... \cup T_1 = t_n||theta) \ &= \Pi_{i=1}^n P(T_i = t_i| heta) \ &= \Pi_{i=1}^n rac{1}{ heta} \ &= rac{1}{ heta^n} \end{aligned}$$

Mais $orall i \in [[1,n]]$, $heta \geqslant i$ donc on prend bien $Y_n = \displaystyle \sup_i (T_i)$

Deuxième méthode :

$$egin{aligned} P(T_1 < 1) &= \int_{-\infty}^y f_{T_1}(t) dt \ &= \int_0^y rac{1}{ heta} dt \ &= egin{cases} rac{y}{ heta} & ext{si } y \in [0, heta] \ 1 & ext{si } y > heta \ 0 & ext{si } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc
$$F_{Y_n}(y) = (\frac{y}{\theta})^n$$

$$P_{Y_n}(y) = n(rac{y^n}{ heta^n})^1$$

$$egin{align} E(Y_n) &= \int_0^y y P_{Y_n}(y) dy \ E(Y_n) &= \int_0^ heta n rac{y^n}{ heta^n} dy \ &= rac{n}{ heta^n} [rac{y^{n+1}}{n+1}]_0^ heta \ &= rac{n}{n+1} heta \end{aligned}$$

Le prof a effacé cette partie avant que je puisse la noter Mes plus sincères excuses.

$$egin{aligned} E(\hat{ heta_2}) &= rac{n+1}{n} E(rac{1}{n}) = 0 \ Var(\hat{ heta_2}) &= (rac{n+1}{n})^2 Var(Y_n) = rac{ heta^2}{n(n+2)} rac{ heta}{n o \infty} 0 \end{aligned}$$

4. Quel estimateur choisir?

 $\hat{\theta_2}$ converge en $\frac{1}{n^2}$ et $\hat{\theta}$ converge en $\frac{1}{n}$

donc on choisit $\hat{ heta_2}$, qui sera un meilleur estimateur car il convergera plus vite.

Exercice 2

1.

$$U=X^\lambda \implies X=U^{rac{1}{\lambda}}=g(u)$$

C'est une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ .

$$\Pi(U) = f(g(u), \lambda, \theta) |\frac{dx}{dy}|$$

$$|rac{dx}{dy}|=|rac{1}{\lambda}u^{rac{1}{\lambda-1}}|=rac{1}{\lambda}u^{rac{1-\lambda}{\lambda}}$$

donc
$$\Pi(u)=rac{\lambda}{ heta}(u^{rac{1}{\lambda}})^{ ext{(inintelligible)}}=rac{\lambda}{ heta}e^{rac{u}{ heta}}$$

(inintelligible)

$$E(u) = E(X^{\lambda}) = \theta$$

$$Var(u) = Var(X^{\lambda}) = \theta_1^2$$

2.

 $(X_1,...,X_n)$ même loi que X .

MV $\hat{ heta_n}=$? Biais ? Convergence ? Efficacité ? Erreur quadratique moyenne ?

$$\begin{split} \mathscr{L}(X_1,...,X_n) &= P(\cap X_i | \theta) \\ &= \Pi_{i=1}^n P(X_i | \theta) \\ &= \Pi_{i=1}^n \frac{\lambda}{\theta} X_i^{\lambda-1} e^{-\frac{X_i^{\lambda}}{\theta}} \\ &= \text{effacé, mes excuses, mais c'était trop long de toute façon} \\ &= \frac{n}{\theta} \text{quelque chose} \end{split}$$

$$E(\hat{\theta_n}) = \frac{1}{n}E(U) = \theta$$

$$Var(\hat{\theta_n}) = \frac{1}{\theta^2} nVar(U) = \frac{\theta^2}{n}$$