

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи

Степаньянц Константин Викторович

**Однопетлевое эффективное действие
для произвольных квантовополевых моделей**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
Халилов Владислав Рустенович

Москва 1996

Оглавление

1	Введение	3
2	Диаграммная техника в методе фонового поля.	8
2.1	Метод фонового поля.	8
2.2	Снятие вырождения дифференциальных операторов.	10
2.3	Метод Швингера-ДеВитта и его обобщения.	14
2.4	Обобщенный метод т'Хоофта-Вельтмана вычисления однопетлевых расходимостей	1
2.5	Вычисление расходящейся части размерно регуляризованных интегралов.	22
3	Эффективное действие для минимального оператора.	25
3.1	Случай плоского пространства.	25
3.2	Случай искривленного пространства	28
3.3	Минимальный оператор с симметризованным кинетическим членом. . .	32
3.4	Частные случаи.	33
3.4.1	Оператор второго порядка.	33
3.4.2	Оператор четвертого порядка.	34
3.4.3	Операторы 6-го и 8-го порядков при $S = 0$	36
4	Эффективное действие для неминимального оператора.	38
4.1	Случай плоского пространства.	38
4.2	Случай искривленного пространства.	40
4.3	Частные случаи	53
4.3.1	Минимальный оператор	53
4.3.2	Векторное поле	54
4.3.3	Гравитация в произвольной неминимальной калибровке	56
5	Тензорный пакет для системы аналитических вычислений REDUCE	59
5.1	Постановка задачи	59
5.2	Алгоритмы.	60
5.3	Интерфейс	62
5.4	Интегрирование по углам	65
5.5	Пример применения тензорного пакета	67
A	Заключение	76

Глава 1

Введение

Прогресс в квантовой теории калибровочных полей, гравитации и теории струн зависит существенным образом от развития ковариантных алгоритмов вычисления эффективного действия. На сегодняшний день построены и активно используются несколько подходов тесно связанных друг с другом. Многие из них основаны на методе фонового поля, позволяющем избежать нековариантных вычислений в случае искривленного пространства. Данный метод сводит вычисление однопетлевого эффективного действия к нахождению детерминанта определенного эллиптического оператора, причем расходящаяся часть оказывается пропорциональной коэффициенту a_2 спектрального разложения [1] – [6]. Его явная форма для различных дифференциальных операторов может быть получена в рамках ряда методов. Наиболее известным из них является метод собственного времени, предложенный Швингером [7] и обобщенный на случай искривленного пространства ДеВиттом [8]. Несомненным достоинством метода является его ковариантность и достаточно тривиальная реформулировка в геометрических терминах [4] – [6]. Однако с его помощью оказалось возможным рассмотреть только простейший минимальный оператор второго порядка

$$D_1 \, i^j = \nabla^\mu \nabla_\mu \delta_i^j + S^\mu \, i^j \nabla_\mu + W_i^j. \quad (1.1)$$

В то же время эффективное действие есть сумма вкладов одночастично неприводимых диаграмм, в которых пропагаторы являются функционалами от фоновой метрики. Способ их вычисления при помощи метода Швингера-ДеВитта был предложен в работе [9], где также были получены явные выражения для однопетлевого эффективного действия в теориях с операторами

$$\begin{aligned} D_2 \, i^j &= (\nabla^\mu \nabla_\mu)^2 \delta_i^j + S^{\mu\nu\alpha} \, i^j \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha + W^{\mu\nu} \, i^j \nabla_\mu \nabla_\nu + N^\mu \, i^j \nabla_\mu + M_i^j; \\ D_3 \, \alpha^\beta &= \nabla^\mu \nabla_\mu \delta_\alpha^\beta - \lambda \nabla_\alpha \nabla^\beta + P_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Дальнейшее развитие метода фонового поля было связано с обобщениями подхода на неримановые многообразия [10] – [16] и теории с фермионными полями [17], [18], а также разного рода усовершенствованиями техники вычислений коэффициентов спектрального разложения [13] – [20]. В последнее время метод, изложенный в [9], был обобщен для вычисления нелокальных вкладов в эффективное действие на римановом многообразии [21] – [23].

С другой стороны, диаграммный метод, обобщенный на технику фонового поля в работах [24] – [31], также может успешно применяться для конкретных вычислений. В частности, таким образом было получено выражение для эффективного действия в двухпетлевом приближении [32], [33].

Данная диссертация посвящена проблеме исследования однопетлевого эффективного действия в полевых моделях с произвольным дифференциальным оператором без каких-либо ограничений на его форму и порядок.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений, заключения и списка используемой литературы.

В главе 1 рассмотрены основные идеи и методы, используемые для нахождения однопетлевого эффективного действия, а также вводятся необходимые понятия и обозначения.

В параграфе 1 показано каким образом эффективное действие связано с дифференциальным оператором и даются определения минимального и неминимального оператора.

Параграф 2 содержит описание основных методов, позволяющих свести вычисления в реальных теориях к нахождению следа логарифма некоторого оператора. Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев дифференциальный оператор вырожден, т.е. для него нельзя указать вид пропагатора. Поэтому здесь описываются способы снятия вырождения, вызванного калибровочными симметриями или присутствием фермионных полей. В первом случае это достигается фиксацией калибровки и введением духовых полей Фаддеева-Попова. Явно показано, что на массовой оболочке эффективное действие не зависит от вида калибровочного условия. Во втором случае рассматривается метод, позволяющий заменить вырожденный дифференциальный оператор в теориях с фермионами на некоторый невырожденный, а также учесть свойства антикоммутативности.

Рассмотрение наиболее известных методов вычисления явного вида расходящейся части однопетлевого эффективного действия вынесено в параграф 3. Здесь описан метод собственного времени ДеВитта-Швингера и его обобщение на случай неминимальных операторов и операторов высших порядков, сделанное Барвинским и Вилковским. Указаны достоинства и недостатки данных методов.

Параграф 4 посвящен изложению обобщенной диаграммной техники т'Хоофта-Вельтмана [24] для вычисления расходящейся части однопетлевого эффективного действия. Здесь построен ряд теории возмущений, найдены пропагаторы квантового поля, вершины его взаимодействия с классическим фоном и числовые коэффициенты перед диаграммами для случаев минимального и неминимального операторов. Для случая плоского пространства указаны все расходящиеся диаграммы и вычислены их индексы расходимости.

Наконец, в параграфе 5 описан способ нахождения расходящейся части размерно регуляризованных интегралов, получающихся при вычислениях фейнмановских диаграмм. Здесь же вводится определение операции интегрирования по углам.

Вторая глава посвящена рассмотрению теорий с минимальным дифференциальным оператором произвольного порядка l . Основным ее результатом является получение формул для расходящейся части однопетлевого эффективного действия в четырехмерном римановом пространстве для двух различных форм записи минимального оператора.

В параграфе 1 минимальный оператор рассматривается на фоне плоского пространства времени. Здесь производится вычисление всех расходящихся диаграмм для данного случая, а также иллюстрируется применение техники вычисления расходящейся части размерно регуляризованных интегралов в конкретных случаях.

В параграфе 2 сформулированы основные идеи обобщения полученных результатов на случай искривленного пространства времени. Сначала на основе анализа размерности указана наиболее общая форма слагаемых содержащих тензора кривизны, построенные по метрике ($R^\sigma_{\mu\nu\alpha}$) и связности ($F_{\mu\nu}$). Коэффициенты перед ними определяются при помощи вычисления фейнмановских диаграмм, содержащих внешние линии слабых полей $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ и $\omega_{\mu i}^j$ и соответствующих первому неисчезающему приближению в слабопольном разложении. Метод проиллюстрирован подробным вычислением наиболее простого нетривиального вклада: членов с $W^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ и RW , где через W обозначен коэффициент при производных $(2l - 2)$ -го порядка в дифференциальном операторе. В конце данной части приводится суммарный вклад всех диаграмм, который и является окончательным ответом для расходящейся части однопетлевого эффективного действия минимального оператора в искривленном пространстве.

В параграфе 3 рассматривается другая форма записи минимального оператора - кинетический член в данном случае симметризован по всем индексам, свертываемым с ковариантными производными. Это является более удобным в ряде случаев, прежде всего при сравнении результата с ответом для неминимального оператора. В данном случае однопетлевые контрчлены вычисляются тем же методом, что и в части 2.

Наконец, в параграфе 4 рассмотрен ряд частных случаев: наиболее общие минимальные операторы второго (подпараграф 4.1) и четвертого (подпараграф 4.2) порядков; операторы 6-го и 8-го порядков без производных соответственно 5-го и 7-го порядков (подпараграф 4.3). Показано, что для первых двух частных случаев полученные результаты полностью воспроизводят ранее известные.

В главе 3 изучается модель с неминимальным оператором произвольной формы и произвольного (в том числе и нечетного) порядка L в четырехмерном римановом пространстве. Ее основным результатом является наиболее общее выражение для расходящейся части эффективного действия. Кроме того, произведено рассмотрение ряда частных случаев и показано полное согласие результатов с ранее известными.

В параграфе 1 неминимальный оператор рассматривается на фоне плоского пространства времени. При помощи вычисления соответствующих расходящихся диаграмм здесь найдена расходящаяся часть однопетлевого эффективного действия в пространстве Минковского.

В параграфе 2 производится обобщение результата параграфа 1 на четырехмерное риманово пространство. Как и в случае минимального оператора, производится вычисление однопетлевых диаграмм в первом неисчезающем приближении по слабым полям метрики $h_{\mu\nu}$ и связности ω_μ^{ij} . Однако в отличие от случая, рассмотренного в главе 2 каждый вклад уже не может быть представлен как слабопольный предел от некоторого ковариантного выражения. В данной части производится анализ причин, вызывающих данную ситуацию и устанавливается, что для получения правильного ответа необходимо добавление некоторых вспомогательных диаграмм, дающих вклад как в члены, содержащие метрику, так и в члены, содержащие связность. После этого каждое выражение уже может быть записано ковариантным образом. Полученный алгоритм иллюстрируется расчетом наиболее простого нетривиального вклада в эффективное дей-

ствие, содержащего тензора кривизны $R^\sigma_{\mu\nu\alpha}$ и $F_{\mu\nu}$, а также $W^{\mu\nu\dots\alpha}_i{}^j$ - коэффициент при производных $(L - 2)$ -порядка. Однако указанная сложность отнюдь не является единственной. Дело в том, что в силу имеющихся неоднозначностей вычисление ряда слагаемых, прежде всего квадратичных по тензору кривизны $R^\sigma_{\mu\nu\alpha}$ становится весьма нетривиальным: несмотря на то, что соответствующие диаграммы легко могут быть вычислены в слабопольном приближении, получение ковариантного выражения оказывается неожиданно сложным. Поэтому здесь кратко обрисовывается алгоритм нахождения ковариантного результата. После этого приводится суммарный вклад всех диаграмм, который и является основным результатом данной главы.

В параграфе 3 рассмотрен ряд частных случаев. (Соответствующие результаты были получены с использованием ЭВМ.)

В подпараграфе 3.1 замечено, что минимальный оператор произвольного порядка l (в форме записи с симметризованным кинетическим членом) является частным случаем неминимального оператора при $L = 2l$ и

$$K^{\mu\nu\dots\alpha}_i{}^j = K_0^{\mu\nu\dots\alpha}\delta_i{}^j,$$

где K_0 - полностью симметриченный тензор, построенный из $g_{\mu\nu}$. Здесь проверено, что подстановка данного значения сводит результат для неминимального оператора к результату для минимального оператора с симметризованным кинетическим членом.

В подпараграфе 3.2 рассмотрен наиболее общий вид неминимального оператора второго порядка в случае, если квантовое поле является векторным и отсутствуют первые производные. Найденный в данном случае по общей формуле результат также совпал с ранее известным.

В подпараграфе 3.3 вычисляются однопетлевые контрчлены для эйнштейновской гравитации с космологической постоянной в наиболее общей неминимальной калибровке. В данном случае вторая вариация действия представляет собой достаточно сложный неминимальный оператор. Полученные результаты согласуются с ранее известными вычислениями для ряда частных случаев.

Глава 4 посвящена описанию программного обеспечения, позволяющего обрабатывать многоиндексные выражения и, в частности, производить автоматическое вычисление однопетлевых контрчленов. Программное обеспечение представлено в виде тензорного пакета для системы аналитических вычислений REDUCE и ряда приложений к нему, позволяющих осуществлять интегрирование по углам и автоматически рассчитывать частные случаи ранее найденных общих выражений.

В параграфе 1 рассмотрена проблема автоматизации обработки многоиндексных выражений, необходимая, в частности, при вычислении эффективного действия, и указаны основные трудности, стоящие на пути ее решения, а именно, немые индексы, свойства симметрии и тождества Бианки.

В параграфе 2 приводится описание алгоритмов используемых в программе. Здесь рассмотрено каким образом можно наиболее эффективно выполнять операции с метрическим тензором (которые наиболее часто встречаются при практических вычислениях) как при обычной обработке выражения, так и при перемножении двух величин и каким образом можно привести тензорное выражение к некоторому стандартному виду в случае отсутствия тождеств Бианки, решив тем самым проблемы связанные с упорядочиванием немых индексов и индексов симметрии.

Параграф 3 описывает интерфейс программы, то есть, то, что может выполнять пользователь и то, что ему необходимо для этого набрать. Здесь же полностью рассмотрены все возможности тензорного пакета.

В параграфе 4 рассмотрены дополнительные возможности для получения алгоритмов вычисления однопетлевых расходимостей на основе полученных ранее общих формул. Прежде всего здесь рассмотрен алгоритм выполнения операции интегрирования по углам, который был реализован в виде отдельной небольшой LISP-программы. Здесь же описаны алгоритмы, позволяющие оптимизировать вычисления при наличии большого количества единичных тензоров. В сочетании с файлом, содержащим результат (3.31) для произвольного неминимального оператора, оказывается возможным добиться достаточно быстрого вычисления однопетлевых контрчленов для конкретных моделей.

В параграфе 5 рассмотрен пример применения тензорного пакета для вычисления расходящейся части однопетлевого эффективного действия в аффинно-метрической теории гравитации, взаимодействующей со скалярным полем при наличии космологической постоянной (метрика и связность в данной теории рассматриваются как независимые переменные) На основе полученных результатов сделан вывод о неперенормируемости теории.

В приложениях рассмотрен ряд технических деталей, связанных с выполнением операции интегрирования по углам.

В приложении А рассматривается случай минимального оператора. Здесь указано какие выражения могут быть записаны в более простом виде и каким образом можно упростить их запись. Кроме того, величины, входящие в ответ для минимального оператора вычислены до конца, то есть во всех слагаемых полностью выполнено интегрирование по углам.

В приложении В изучается интегрирование по углам для неминимального оператора. В силу того, что явный вид пропагатора в данном случае неизвестен, уже не является возможным применение сформулированных в приложении А правил. Произведенный в данной части анализ показывает, что теперь уже не возможно построить простой алгоритм упрощения записи получающихся выражений, однако существует ряд тождеств, связывающих их друг с другом. Кроме того, здесь найден ряд величин необходимых при вычислении фейнмановских диаграмм и указаны их основные свойства.

Основные результаты, приведенные в диссертации, опубликованы в работах [67] – [72].

Глава 2

Диаграммная техника в методе фонового поля.

2.1 Метод фонового поля.

Рассмотрим теорию с действием $S[\varphi]$. Производящий функционал для функций Грина имеет вид (здесь мы полагаем $\hbar \neq 1$)

$$Z[J] = \int D\varphi \exp\left(\frac{i}{\hbar}(S[\varphi] + J\varphi)\right). \quad (2.1)$$

Будем вычислять его при помощи метода перевала. Седловая точка $\varphi_0[J]$ определяется из уравнения

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -J. \quad (2.2)$$

Разлагая S в окрестности φ_0 , получаем, что

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(S[\varphi_0] + J\varphi_0)\right) \det^{-1/2} \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_0^2} \exp(\hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots), \quad (2.3)$$

где S_1, S_2, \dots определяются при помощи вычисления соответствующих диаграмм Фейнмана. Производящий функционал связанных функций Грина $W[J]$ таким образом принимает вид

$$W[J] = -i \hbar \ln Z[J] = S[\varphi_0] + J\varphi_0 + \frac{i}{2} \hbar \operatorname{tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_0^2} + O(\hbar^2). \quad (2.4)$$

Определим теперь эффективное действие $\Gamma[\varphi]$ как

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - J\varphi|_{J=J[\varphi]}, \quad (2.5)$$

где $\frac{\delta W}{\delta J} = \varphi$. Подставляя в данное выражение разложение $W[J]$ по степеням постоянной Планка \hbar , получаем петлевое разложение эффективного действия [34]:

$$\varphi = \frac{\delta W}{\delta J} = \frac{\delta S}{\delta \varphi_0} \frac{\delta \varphi_0}{\delta J} + J \frac{\delta \varphi_0}{\delta J} + \varphi_0 + O(\hbar) = \varphi_0 + \varphi_1 + O(\hbar^2), \quad (2.6)$$

(явно выписаны члены нулевого φ_0 и первого φ_1 порядков по постоянной Планка)

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= W[J] - J\varphi|_{J=J[\varphi]} = \\ &= S[\varphi_0] + J\varphi_0 + \frac{i}{2}\hbar \operatorname{tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_0^2} + O(\hbar^2) - J\varphi = \\ &= S[\varphi] - \frac{\delta S}{\delta \varphi_0} \varphi_1 + \frac{i}{2}\hbar \operatorname{tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^2} - J\varphi_1 + O(\hbar^2) = \\ &= S[\varphi] + \frac{i}{2}\hbar \operatorname{tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^2} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первое слагаемое здесь, очевидно, соответствует древесному приближению, а второе является суммарным однопетлевым вкладом в эффективное действие. Если поле φ не является скалярным и, кроме того, комплексное, то однопетлевое эффективное действие запишется как

$$\Gamma^{(1)} = i \hbar \operatorname{tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^{*i} \delta \varphi_j}, \quad (2.8)$$

где при помощи латинских букв мы обозначаем весь набор индексов поля φ .

Величина

$$D_i^j \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^{*i} \delta \varphi_j} \quad (2.9)$$

представляет собой некоторый дифференциальный оператор, зависящий от "фонового" поля φ .

В наиболее общем виде он записывается как

$$\begin{aligned} D_i^j &= K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_L}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} + \\ &+ S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-1}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} + \\ &+ W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-2}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-2}} + \\ &+ N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-3}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-3}} + \\ &+ M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-4}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-4}} + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

При помощи коммутации ковариантных производных всегда можно добиться симметрии полей K, S, W, N, M, \dots по греческим индексам. (Это условие в общем случае не является обязательным, однако оно оказывается чрезвычайно удобным при вычислениях. Поэтому далее мы всегда будем считать, что оно выполнено).

Мы будем называть дифференциальный оператор минимальным, если $L = 2l$ и

$$K^{\mu\nu\dots\alpha}{}_i{}^j = K_0^{\mu\nu\dots\alpha} \delta_i{}^j, \quad (2.11)$$

где K_0 - полностью симметричный тензор, построенный из $g_{\mu\nu}$:

$$K_0^{\mu\nu\alpha\beta\dots} = \frac{1}{(2l-1)!!} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \dots + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \dots + \dots). \quad (2.12)$$

(Здесь суммирование понимается по всевозможным расстановкам индексов). Если какой-либо оператор невозможно привести к данному виду, то его мы будем называть неминимальным.

При помощи коммутации ковариантных производных минимальный оператор можно переписать в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} D_i{}^j &= \delta_i{}^j \square^l + S^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2l-1}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-1}} + \\ &+ W^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2l-2}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-2}} + \\ &+ N^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2l-3}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-3}} + \\ &+ M^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2l-4}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-4}} + \dots, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$, а ∇_μ - ковариантная производная:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^\beta{}_i{}^j &= \partial_\alpha T^\beta{}_i{}^j + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta T^\gamma{}_i{}^j + \omega_{\alpha i}{}^k T^\beta{}_k{}^j - T^\beta{}_i{}^k \omega_{\alpha k}{}^j; \\ \nabla_\mu \Phi_i &= \partial_\mu \Phi_i + \omega_{\mu i}{}^j \Phi_j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ - символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \quad (2.15)$$

а $\omega_{\mu i}{}^j$ - связность, действующая на латинские индексы.

2.2 Снятие вырождения дифференциальных операторов.

Мы будем называть дифференциальный оператор невырожденным, если существует $(Kk)^{-1}$, такой, что

$$(Kk)^{-1}{}_i{}^m (Kk)_m{}^j = \delta_i{}^j;$$

$$(Kk)_i^j \equiv K^{\mu\nu\dots\alpha}{}_i^j k_\mu k_\nu \dots k_\alpha. \quad (2.16)$$

где k_μ - произвольный вектор.

Минимальный оператор всегда невырожден, так как для него $(Kk)_i^j = k^{2l}\delta_i^j$ и следовательно $(Kk)^{-1}{}_j^m = k^{-2l}\delta_j^m$.

Вырожденные операторы возникают в следующих случаях:

1. Если в теории имеются калибровочные симметрии
2. При наличии фермионных полей (или в других случаях, когда максимальное количество производных различно для различных полей)

Построение эффективного действия для теорий с вырожденными операторами весьма затруднительно, в силу отсутствия пропагатора. Поэтому необходимо свести вычисления к случаю невырожденного оператора.

Рассмотрим первый случай. Предположим, что в теории имеется симметрия с генераторами T_a^i . Тогда в силу теоремы Нетер

$$T_a^i \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} = 0. \quad (2.17)$$

Дифференцируя данное уравнение по φ_j , находим, что

$$T_a^i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^i \delta \varphi_j} + \frac{\delta T_a^i}{\delta \varphi_j} \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} = 0. \quad (2.18)$$

Второе слагаемое здесь, очевидно, не имеет производных, действующих на δ -функцию, поэтому, оставляя только член с максимальным количеством таких производных, мы получим, что в импульсном представлении

$$T_a^i K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_L}{}_i^j k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_L} = 0, \quad (2.19)$$

т.е. кинетический член дифференциального оператора имеет нулевую моду. Она удаляется при помощи стандартной процедуры Фаддеева-Попова [35], [36]:

Добавим в действие члены фиксирующие калибровку. Это приводит к тому, что дифференциальный оператор

$$D_i^j = \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_j \delta \varphi^i} \rightarrow D_i^j + \chi_i^a t_{ab} \chi^{bj}, \quad (2.20)$$

где последнее слагаемое (зависящее от φ) должно быть выбрано таким образом, чтобы нарушить все имеющиеся калибровочные симметрии. Кроме того необходимо ввести в лагранжиан духи Фаддеева-Попова, которые также дают вклад в однопетлевые контрчлены. Их лагранжиан, очевидно, имеет вид

$$L_{gh} = \bar{c}^a T_a^i \chi_i^b c_b. \quad (2.21)$$

В силу антикоммутации духовых полей, однопетлевое эффективное действие примет вид

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_j \delta \varphi^i} + \chi_i^a t_{ab} \chi^{bj} \right) - i \text{tr} \ln (T_a^i \chi_i^b) \equiv$$

$$\equiv \frac{i}{2} \text{tr} \ln \tilde{D} - i \text{tr} \ln G. \quad (2.22)$$

На массовой оболочке данное действие не зависит от выбора калибровочного условия, действительно, предположим, что $\chi_i^a = \chi_i^a(\lambda)$. Тогда, дифференцируя (2.22) по λ , находим, что

$$\Gamma^{(1)}(\lambda) = \Gamma^{(1)}(0) + i \text{tr} \int_0^\lambda d\lambda \frac{d\chi_k^c}{d\lambda} \left(t_{cd} \chi^{dj} \tilde{D}^{-1}{}^k{}_j - G^{-1}{}_c{}^d T_d^k \right). \quad (2.23)$$

С использованием тождества Уорда

$$\left(- G^{-1}{}_c{}^a \frac{\delta T_a^i}{\delta \varphi_j} \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} + t_{cd} \chi^{dj} \right) \tilde{D}^{-1}{}^k{}_j = G^{-1}{}_c{}^d T_d^k, \quad (2.24)$$

следующего из (2.18), это приводится к виду

$$\Gamma^{(1)}(\lambda) = \Gamma^{(1)}(0) + i \text{tr} \int_0^\lambda d\lambda G^{-1}{}_c{}^a \frac{\delta T_a^i}{\delta \varphi_j} \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} \tilde{D}^{-1}{}^k{}_j \frac{d\chi_k^c}{d\lambda}. \quad (2.25)$$

Таким образом на массовой оболочке $\delta S / \delta \varphi^i = 0$ эффективное действие действительно не зависит от вида калибровочного условия. Однако явные вычисления в неминимальной калибровке [9], [37] показывают, что эффективное действие (2.22) в общем случае зависит от выбора калибровки вне уравнений движения (например для эйнштейновской теории гравитации). Однако существует возможность определить эффективное действие таким образом, что оно не будет явно зависеть от вида калибровочного условия [38], [39]. Это достигается при помощи добавления в определение однопетлевого эффективного действия некоторых слагаемых, исчезающих на массовой оболочке.

Рассмотрим теперь случай когда порядок производных в дифференциальном операторе различен для различных полей. Как правило, это имеет место для теорий с ферми-полями, так как действие для бозонов имеет второй и выше порядок по производным, а для фермионов только первый. Поскольку мы явно выделяем член с максимальным количеством производных (в данном случае второй и более), то для ферми-полей он просто отсутствует, что приводит к вырожденности соответствующего оператора.

Однако, здесь имеется возможность свести вычисления к случаю невырожденного оператора [18]. Это делается следующим образом: Домножим исходный оператор D на некоторый блочный оператор Ω :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

составленный таким образом, чтобы порядок получившегося оператора $\tilde{D} \equiv D\Omega$ был одинаков для всех полей. (Операторы Ω_n предполагаются невырожденными). Тогда

$$\text{tr} \ln D = \text{tr} \ln \tilde{D} - \sum_n \text{tr} \ln \Omega_n, \quad (2.27)$$

что означает, что нам удалось свести вычисление эффективного действия теории с исходным вырожденным оператором к нахождению следов логарифма некоторых невырожденных операторов.

Однако для теорий с ферми полями имеется еще одна сложность, связанная с тем, что при интегрировании по антикоммутирующим переменным [40]

$$\int D\bar{\psi} D\psi e^{\bar{\psi} A \psi} = \det A, \quad (2.28)$$

т.е. при взятии следа логарифма должен получиться дополнительный множитель -2 или -1 .

Для того, чтобы стало возможным применение стандартной техники вычислений в данном случае вводится понятие суперматрицы [41]. Это блочная матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

в которой элементы A и B грассманово четны, а C и D - нечетны. Перемножение суперматриц осуществляется по стандартным правилам матричного умножения.

Для суперматриц вводятся операции суперследа и супердетерминанта:

$$\begin{aligned} Str M &\equiv tr A - tr B; \\ Sdet M &\equiv \exp(Str \ln M), \end{aligned} \quad (2.30)$$

также удовлетворяющие обычным свойствам. В частности,

$$\begin{aligned} Sdet \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} &= Sdet \begin{pmatrix} A - C B^{-1} D & C B^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Sdet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\det(A - C B^{-1} D)}{\det B}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

После этого легко доказывается, что однопетлевое эффективное действие принимает вид

$$\Gamma^{(1)} = i Str \ln \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^* \delta \varphi} & \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^* \delta \psi} \\ \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi} \delta \varphi} & \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

для комплексных бозонных полей и

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} Str \ln \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^2} & \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi \delta \psi} \\ \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi} \delta \varphi} & \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} Str \ln \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

для вещественных скалярных полей.

Таким образом все последующие формулы остаются в силе при замене матриц на суперматрицы и следов на суперследы.

В качестве простого примера рассмотрим квантовую электродинамику на фоне плоского пространства

$$L = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu)\psi, \quad (2.34)$$

для которой первый дифференциальный оператор в уравнении (2.33) принимает вид

$$\begin{pmatrix} (\delta_\alpha^\beta \partial^2 - \partial_\alpha \partial^\beta)/2 & -e\bar{\psi}\gamma_\alpha \\ e\gamma^\beta \psi & -\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Матрица его кинетического члена записывается в виде

$$\begin{pmatrix} (\delta_\alpha^\beta \partial^2 - \partial_\alpha \partial^\beta)/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

и, очевидно, не имеет обратной.

В данном случае оператор Ω удобно выбирать в виде

$$\Omega = \begin{pmatrix} \delta_\beta^\gamma & 0 \\ 0 & \gamma^\nu(i\partial_\nu + eA_\nu) \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

после чего оператор \tilde{D} для квантовой электродинамики принимает вид

$$\begin{pmatrix} (\delta_\alpha^\gamma \partial^2 - \partial_\alpha \partial^\gamma)/2 & -e\bar{\psi}\gamma_\alpha \gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) \\ e\gamma^\gamma \psi & \partial^2 - 2ieA^\mu \partial_\mu - ie\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu A_\nu - e^2 A^\mu A_\mu \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

и будет иметь вторые производные по всем имеющимся полям. С учетом формулы (2.33) эффективное действие тогда запишется в виде

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Str} \ln \tilde{D} \quad (2.39)$$

и может быть легко вычислено. (также здесь необходима еще фиксация калибровочной симметрии)

2.3 Метод Швингера-ДеВитта и его обобщения.

Итак, в дальнейшем мы всегда можем считать дифференциальный оператор невырожденным. Следующей задачей является непосредственное вычисление $\text{tr} \ln D$, которое может быть выполнено при помощи ряда методов. Наиболее известным из них является метод собственного времени Швингера-ДеВитта [7], [8], позволяющий найти его для простейшего минимального оператора второго порядка

$$D = \square + W, \quad (2.40)$$

где W - произвольная матрица.

Согласно методу Швингера-ДеВитта $\ln D$ представляется в виде

$$\ln D = -i \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(is(D + i0)), \quad (2.41)$$

где параметр S носит название собственного времени Швингера.

Матричный элемент экспоненциального оператора

$$F(x, y|s) \equiv \langle x | \exp(is(D + i0)) | y \rangle, \quad (2.42)$$

очевидно, удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial s} F(x, y|s) + DF(x, y|s) = 0 \quad (2.43)$$

при начальном условии

$$F(x, y|0) = \delta(x - y). \quad (2.44)$$

В случае плоского пространства решение может быть элементарно найдено при помощи преобразования Фурье и имеет вид

$$F(x, y|s) = \frac{i}{(4\pi is)^{d/2}} \exp\left(i \frac{(x - y)^2}{4s} + isW\right), \quad (2.45)$$

где d - размерность пространства.

В случае искривленного пространства времени обобщение данного соотношения имеет вид [7], [8]

$$F(x, y|s) = \frac{i}{(2\pi is)^{d/2}} \sqrt{Dt(x, y)} \times \\ \times \exp\left(i \frac{\sigma(x, y)}{2s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n a_n(x, y), \quad (2.46)$$

где $\sigma(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_\mu \sigma_\nu g^{\mu\nu}; \quad \sigma_\mu \equiv \partial_\mu \sigma; \quad (2.47)$$

$$Dt(x, y) \equiv \left| \det \left(- \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right) \right| \equiv \sqrt{-g(x)} \sqrt{-g(y)} \Delta(x, y) \quad (2.48)$$

- определитель ВанФлека-Море.

Подстановка (2.46) в уравнение (2.43) приводит к следующим рекуррентным соотношениям для коэффициентов a_n :

$$\sigma^\mu \nabla_\mu a_0 = 0 \rightarrow a_0 = 1;$$

$$(n+1) a_{n+1} + \sigma^\mu \nabla_\mu a_{n+1} = \Delta^{-1/2} \square (\Delta^{1/2} a_n) + W a_n, \quad n \geq 0, \quad (2.49)$$

причем $\sigma(x, y)$, $\Delta(x, y)$ и $a_n(x, y)$ явно не зависят от размерности пространства-времени.

Вычисление эффективного действия сводится теперь к нахождению коэффициента $a_2(x, x)$, действительно, подставляя разложение (2.46) в (2.41) имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} &= \frac{i}{2} \text{tr} \ln D = \frac{1}{2} \left(\int d^4x \sqrt{-g} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{2(4\pi is)^{d/2}} \sum_{n=0}^\infty (is)^n a_n(x, x) \right)_\infty = \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g} a_2(x, x) \int_0^\infty \frac{ds}{s^{d/2-1}} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \int d^4x \sqrt{-g} a_2(x, x), \end{aligned} \quad (2.50)$$

где было учтено, что при размерной регуляризации ненулевой вклад дают только логарифмически расходящиеся члены.

Знание $a_2(x, x)$ также дает возможность находить конформные и аксиальные аномалии [42].

Вычисление коэффициента $a_2(x, x)$, а также других величин вида $\nabla_\mu \nabla_\nu \dots \nabla_\alpha a_n(x, y)|_{x=y}$ производится при помощи ковариантного дифференцирования уравнений (2.49). Приведем здесь некоторые часто используемые величины [4], [8], [43] – [45]:

$$\begin{aligned} \sigma|_{y=x} &= 0; & \nabla_\mu \sigma|_{y=x} &= 0; \\ \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma|_{y=x} &= g_{\mu\nu}; & \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha \sigma|_{y=x} &= 0; \\ a_0|_{y=x} &= 1; & \nabla_\mu a_0|_{y=x} &= 0; \\ a_1|_{y=x} &= W + \frac{1}{6}R; & \nabla_\mu a_1|_{y=x} &= \frac{1}{2}\nabla_\mu W + \frac{1}{12}\nabla_\mu R - \frac{1}{6}\nabla^\nu F_{\nu\mu}; \\ a_2|_{y=x} &= \frac{1}{2} \left(W + \frac{1}{6}R \right)^2 + \frac{1}{6} \square \left(W - \frac{1}{5}R \right) + \\ &+ \frac{1}{12} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{180} (R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} - R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Таким образом, применение метода ДеВитта-Швингера дает следующий результат для однопетлевого эффективного действия теории с минимальным оператором второго порядка:

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \int d^4x \left(\frac{1}{2} \left(W + \frac{1}{6}R \right)^2 + \frac{1}{6} \square \left(W - \frac{1}{5}R \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{180} (R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} - R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Несомненным достоинством рассмотренного подхода является его явная ковариантность. в то время как к недостаткам необходимо отнести значительную сложность и

громоздкость вычислений, которая не позволяет исследовать подобным образом более сложные случаи.

Для вычислений в теориях с неминимальными операторами и операторами высших порядков Барвинский и Вылковский [9] предложили технику основанную на том, что эффективное действие является суммой одночастично неприводимых диаграмм, вычисление которых в искривленном пространстве может быть выполнено с помощью метода ДеВитта-Швингера.

В случае минимального оператора диаграммная техника строится следующим образом: В минимальном операторе мы выделяем член с высшими производными и производим разложение логарифма в ряд:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} &= \frac{i}{2} \text{tr} \ln D_i^j = \frac{i}{2} \text{tr} \ln (\square^{2l} + V) = \frac{i}{2} l \text{tr} \ln \square + \\ &+ \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left(1 + V \frac{1}{\square^l} \right) = \frac{i}{2} l \text{tr} \ln \square + \frac{i}{2} \text{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-V \frac{1}{\square^l} \right)^k, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где через V мы обозначили все оставшиеся слагаемые:

$$\begin{aligned} V &= S^{\mu_1 \dots \mu_{L-1}} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} + W^{\mu_1 \dots \mu_{L-2}} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_{L-2}} + \\ &+ N^{\mu_1 \dots \mu_{L-3}} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_{L-3}} + M^{\mu_1 \dots \mu_{L-4}} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_{L-4}} + \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

Первое слагаемое в формуле (2.53) вычисляется при помощи метода ДеВитта-Швингера. В остальных слагаемых операторы $1/\square^l$ переносятся направо в учетом коммутационных соотношений между ковариантными производными:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} l \text{tr} \ln \square + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \text{tr} \tilde{V}_k \frac{1}{\square^{lk}}, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \tilde{V}_1 &= V; & \tilde{V}_2 &= -\frac{1}{2} V^2; \\ \tilde{V}_3 &= \frac{1}{3} V^2 + \frac{1}{2} V[\square^l, V] & \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (2.56)$$

После этого оставшиеся величины вида

$$\nabla_{\mu} \dots \nabla_{\nu} \frac{1}{\square^n} \delta(x, y) \Big|_{y=x}^{\infty} \quad (2.57)$$

могут быть вычислены при помощи метода ДеВитта-Швингера. Для этого используется представления

$$\ln \square = - \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp(is \square);$$

$$\frac{1}{\square^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty ds s^{n-1} \exp(is\square). \quad (2.58)$$

Используя представление (2.46) для $\exp(is\square)$, выполняя дифференцирование и выделяя логарифмически расходящуюся часть, можно найти все требуемые величины. (Выражения для них являются очень громоздкими и поэтому здесь не приводятся).

Подстановка (2.57) в ряд теории возмущений (2.55) позволяет в принципе строить алгоритмы вычисления эффективного действия для произвольных минимальных операторов.

Аналогично может быть рассмотрен случай неминимального оператора четного порядка. Для простоты здесь мы рассмотрим только член с максимальным количеством производных $D = K$. В методе Барвинского и Вилковиского делается предположение о том, что кинетический член может быть включен в однопараметрическое семейство $K(\lambda)$, такое, что $K(0) = \square^l$. Тогда

$$\frac{i}{2} \text{tr} \ln K(\lambda) = \frac{i}{2} \text{tr} \ln K(0) + \frac{i}{2} \text{tr} \int_0^\lambda d\lambda \frac{dK}{d\lambda} K^{-1}. \quad (2.59)$$

$i \text{tr} \ln K(0)/2$ является однопетлевым эффективным действием для минимального оператора, алгоритм вычисления которого уже был описан. Поэтому нам остается только указать путь вычисления второго слагаемого в (2.59). Для этого заметим, что если

$$(Kk)_i{}^m (Kk)^{-1}{}_m{}^j = 1_i{}^j, \quad \text{то} \quad (2.60)$$

$$K_i{}^m (K\nabla)^{-1}{}_m{}^j = \square^l{}_i{}^j + P_i{}^j, \quad (2.61)$$

где через $(K\nabla)^{-1}$ обозначен оператор, получающийся при помощи замены k_μ на ∇_μ в $k^{2l}(Kk)^{-1}$, а P - некоторый дифференциальный оператор $(2l-2)$ -го порядка. Поэтому оказывается возможным построить ряд теории возмущений следующим образом:

$$K^{-1} = (K\nabla)^{-1} \frac{1}{\square^l + P} = (K\nabla)^{-1} \frac{1}{\square^l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-P \frac{1}{\square^l} \right)^n. \quad (2.62)$$

Переноса, как и ранее операторы Лапласа направо, мы вновь сводим вычисление эффективного действия к известным величинам (2.57):

$$\frac{i}{2} \text{tr} \ln K(\lambda) = \frac{i}{2} \text{tr} \ln K(0) + \frac{i}{2} \text{tr} \int_0^\lambda d\lambda \frac{dK}{d\lambda} (K\nabla)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{P}_n \frac{1}{\square^{l(n+1)}}, \quad (2.63)$$

$$\text{где} \quad \tilde{P}_0 = 1; \quad \tilde{P}_{n+1} = P \tilde{P}_n + [\square^l, \tilde{P}_n]. \quad (2.64)$$

Несложно показать, что расходится при этом только конечное число слагаемых ($n \leq 4$), которые сводятся к (2.57). Таким образом, рассмотренный здесь кратко алгоритм в принципе позволяет находить расходящуюся часть однопетлевого эффективного

действия для неминимальных операторов. Однако явные формулы для случая произвольного дифференциального оператора в рамках данного подхода получены не были. Вопрос о том, возможно ли это в принципе, остается открытым. Для рассмотрения общего случая значительно более удобной оказывается техника т'Хоофта-Вельтмана, которая несмотря на нековариантность промежуточных вычислений, достаточно легко позволяет получить требуемый результат.

2.4 Обобщенный метод т'Хоофта-Вельтмана вычисления однопетлевых расходимостей

Вычисление эффективного действия для произвольных минимального и неминимального операторов мы будем производить с использованием фейнмановской диаграммной техники. Чтобы представить $i \operatorname{tr} \ln D_i^j / 2$ в виде суммы однопетлевых диаграммы, выделим в дифференциальном операторе член с наибольшим количеством производных, который далее мы будем называть кинетическим. В случае минимального оператора он записывается в виде $\delta_i^j \square^l$ или $\delta_i^j K_0^{\mu_1 \dots \mu_L} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_L}$ в зависимости от выбранной формы записи, а для неминимального как $K^{\mu_1 \dots \mu_L} \delta_i^j \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_L}$. (Здесь предполагается, что поле K может зависеть только от метрики).

В отличие от метода Барвинского и Вилковиского, в данном случае пропагатор содержит не ковариантные, а обычные производные, а для вычисления диаграмм в искривленном пространстве используется метод слабопольного разложения. Метрический тензор представляется в виде $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, после чего кинетический член можно записать как $(\partial^\mu \partial_\mu)^l \delta_i^j + O(h, \omega)$ для минимального оператора и $K^{\mu_1 \dots \mu_L} \delta_i^j \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_L} + O(h, \omega)$ для неминимального. Тогда в случае минимального оператора выражение для однопетлевого эффективного действия можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} &= \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln D_i^j = \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln (\partial^{2l} + V) = \\ &= \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln \partial^{2l} + \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln \left(1 + \frac{1}{\partial^{2l}} V \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где через V мы обозначили все оставшиеся слагаемые:

$$\begin{aligned} V &= S^{\mu_1 \dots \mu_{L-1}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-1}} + W^{\mu_1 \dots \mu_{L-2}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-2}} + \\ &+ N^{\mu_1 \dots \mu_{L-3}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-3}} + M^{\mu_1 \dots \mu_{L-4}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-4}} + \dots + O(h, \omega). \end{aligned} \quad (2.66)$$

(Члены $O(h, \omega)$ получаются при разложении оператора в ряд по соответствующим полям).

Первое слагаемое в формуле (2.65) является некоторой численной постоянной (бесконечной), которая может быть отброшена. Разлагая логарифм во втором слагаемом в ряд Тейлора, получаем, что

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln \left(1 + \frac{1}{\partial^{2l}} V \right) = \frac{i}{2} \operatorname{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(- \frac{1}{\partial^{2l}} V \right)^k. \quad (2.67)$$

Это может быть графически представлено как сумма однопетлевых диаграмм с k вершинами. Очевидно, что в данном случае пропагатор в импульсном представлении имеет вид δ_i^j/k^{2l} . Мы будем обозначать его, как обычно, направленной линией.

Рассмотрим здесь оператор на фоне плоского пространства, поэтому положим пока $h_{\mu\nu} = 0$, $\omega_{\mu i}^j = 0$. (Обобщения на случай риманова многообразия будут приведены в разделах, посвященных минимальному и неминимальному операторам). Члены с классическими полями в этом случае приводят к возникновению вершин

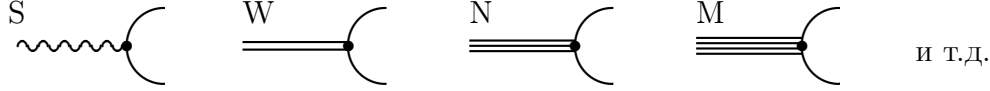


Рис.1: Вершины в случае плоского пространства-времени

выражения для которых в импульсном представлении достаточно очевидны, например, S -вершина записывается в виде

$$S^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{L-1}}k_{\mu_1}k_{\mu_2}\ldots k_{\mu_{L-1}} \equiv (Sk). \quad (2.68)$$

Аналогичные обозначения будем применять и для других величин, например

$$(Sk)^{\alpha\beta} \equiv S^{\mu\nu\ldots\gamma\alpha\beta}k_{\mu}k_{\nu}\ldots k_{\gamma};$$

$$(W(k+p))^{\alpha} \equiv W^{\mu\nu\ldots\beta\alpha}(k+p)_{\mu}(k+p)_{\nu}\ldots(k+p)_{\beta}.$$

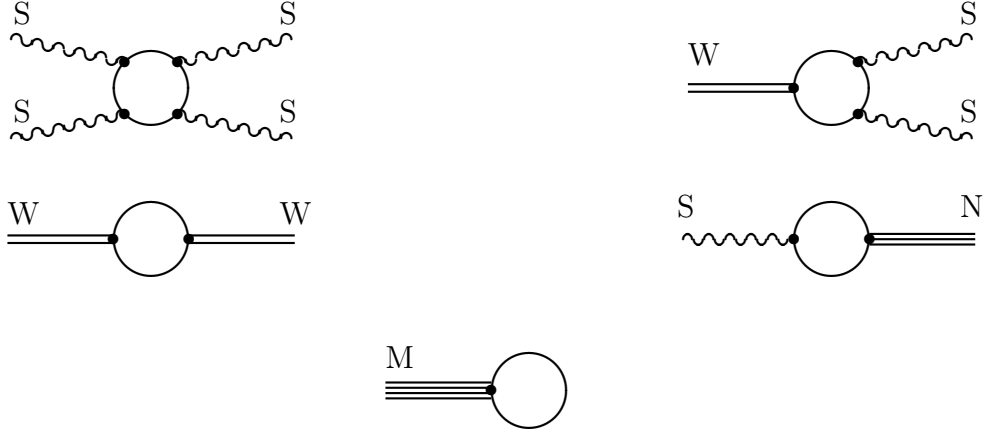
Численные коэффициенты перед диаграммами могут быть легко определены при помощи (2.67).

Несмотря на то, что количество диаграмм в (2.67) бесконечно, в плоском пространстве расходится только конечное число графов. Чтобы убедиться в этом, вычислим индекс расходимости произвольной диаграммы с s S -вершинами, w W -вершинами, n N -вершинами, m M -вершинами и т.д. ($k = s + w + n + m + \ldots$)

Очевидно, что для однопетлевой диаграммы количество вершин равно количеству пропагаторов. Поэтому каждую вершину будем рассматривать вместе с одним из соседних с ней пропагаторов. Как мы ранее видели, каждая S -вершина содержит $2l - 1$ степень петлевого импульса, в то время как пропагатор дает $-2l$ степень. Поэтому каждая вершина с S -внешней линией уменьшает степень импульса на 1. Аналогично, W -вершина уменьшает степень на 2, N -вершина на 3 и т.д. Интегрирование по петлевому импульсу приводит к 4-й степени расходимости для диаграммы без внешних линий, в силу чего индекс расходимости произвольной однопетлевой диаграммы есть

$$I = 4 - s - 2w - 3n - 4m - \ldots \quad (2.69)$$

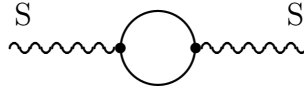
Отсюда немедленно заключаем, что расходящимися являются только следующие диаграммы:



Логарифмически расходящиеся диаграммы.



Линейно расходящиеся диаграммы.



Квадратично расходящаяся диаграмма.

Рис.2: Расходящиеся диаграммы в плоском пространстве

Все сказанное является справедливым и для неминимального оператора за исключением выражения для пропагатора, который в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{K^{\mu_1 \dots \mu_L}{}_i^j \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_L}} \quad (2.70)$$

в координатном представлении или $(Kk)^{-1}_i{}^j$ в импульсном.

2.5 Вычисление расходящейся части размерно регуляризованных интегралов.

Как было уже отмечено во введении, вычисление однопетлевого эффективного действия мы производим при помощи диаграммного метода с использованием размерной регуляризации [46] – [50]. В данном разделе описывается метод, использованный для нахождения расходящейся части размерно регуляризованных интегралов и вводится ряд обозначений.

Рассмотрим интеграл

$$\int d^d k f(k, p_1, p_2 \dots p_n), \quad (2.71)$$

где $d = 4 + \epsilon$ и ϵ мало.

Разложим функцию f в ряд по $1/k$. Тогда

$$\begin{aligned} \int d^d k f(k, p_1 \dots p_n) = \\ = \int d^d k \left(\frac{1}{k^{(S)}} f_S(p_1 \dots p_n) + \frac{1}{k^{(S+1)}} f_{S+1}(p_1 \dots p_n) + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

(В данном выражении у всех величин опущены тензорные индексы).

Запись $1/k^{(S)}$ означает произвольное тензорное выражение составленное из k_μ и преобразующееся при растяжении $k_\mu \rightarrow a k_\mu$ как

$$\frac{1}{k^{(S)}} \rightarrow a^{-S} \frac{1}{k^{(S)}}.$$

В частности при помощи символа $1/k^{(2)}$ могут быть обозначены величины $\frac{1}{k^2}, \frac{k_\mu}{k^3}, \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}, \dots$, где $k = \sqrt{k^2}$.

Если $s > 4$, то

$$\int d^d k \frac{1}{k^{(S)}}$$

является конечным и его расходящаяся часть равна 0. Поэтому все данные члены разложения функции f могут быть отброшены.

При $s \leq 4$ необходимо предварительно произвести интегрирование по углам. Рассмотрим

$$\int d^d k \frac{1}{k^{L+S}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_L}.$$

Очевидно, что данный интеграл равен 0, если $L = 2l + 1$ и

$$C \int d^d k \frac{1}{k^S} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{L-1} \mu_L} + g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} \dots g_{\mu_{L-1} \mu_L} + \dots), \quad (2.73)$$

если $L = 2l$

Сумма здесь понимается по всевозможным расстановкам индексов. Несложно убедиться, что она содержит $(2l - 1)!! = (2l - 1)(2l - 3) \dots 1$ слагаемых. $((-1)!! = 1)$ Константа C определяется при помощи свертки с $g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} \dots g^{\mu_{L-1}\mu_L}$ и оказывается равной

$$C = \frac{1}{2^l(l+1)!}. \quad (2.74)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{1}{k^{2l+S}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2l}} &= \frac{1}{2^l(l+1)!} \int d^d k \frac{1}{k^S} \times \\ &\times (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} \dots g_{\mu_{2l-1}\mu_{2l}} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} \dots g_{\mu_{2l-1}\mu_{2l}} + \dots). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Полагая $k_\mu = k n_\mu$, находим, что

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{1}{k^{2l+S}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2l}} &= \int d^d k \frac{1}{k^S} n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2l}} = \\ &= \frac{1}{2^l(l+1)!} \int d^d k \frac{1}{k^S} (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} \dots g_{\mu_{2l-1}\mu_{2l}} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} \dots g_{\mu_{2l-1}\mu_{2l}} + \dots). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Обозначив,

$$\begin{aligned} < n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2l}} > \equiv \\ \equiv \frac{1}{2^l(l+1)!} (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} \dots g_{\mu_{2l-1}\mu_{2l}} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} \dots g_{\mu_{2l-1}\mu_{2l}} + \dots), \end{aligned} \quad (2.77)$$

для интегрирования по углам получим

$$\int d^d k \frac{1}{k^{2l+S}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2l}} = < n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2l}} > \int d^d k \frac{1}{k^S}. \quad (2.78)$$

Таким образом задача свелась к вычислению расходящейся части

$$\int d^d k \frac{1}{k^S}.$$

Используя стандартную формулу [51]

$$\int d^d k \frac{1}{(k^2 + L)^\alpha} = \pi^{d/2} e^{i\pi/2 - i\pi d/2} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} L^{d/2 - \alpha}, \quad (2.79)$$

находим, что при $L = 0$ отличный от 0 результат получается только при $d/2 - \alpha = 0$, то есть при $s = 2\alpha = 4$. В Этом случае расходящаяся часть интеграла примет вид

$$\left(\int d^d k \frac{1}{k^4} \right)_\infty = \left(\lim_{L \rightarrow 0} \int d^d k \frac{1}{(k^2 + L)^2} \right)_\infty = -\frac{2i\pi^2}{\epsilon}. \quad (2.80)$$

Итак, для вычисления расходящейся части интеграла (2.71) необходимо разложить функцию f в ряд по $1/k$, удержать только логарифмически расходящиеся члены, произвести интегрирование по углам согласно формуле (2.77) и заменить оставшийся

$$\int d^d k \frac{1}{k^4} \quad \text{на} \quad - \frac{2i\pi^2}{d-4}.$$

Окончательно,

$$\left(\int d^d k \frac{1}{k^{2l+4}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2l}} \right)_{\infty} = - \frac{2i\pi^2}{d-4} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2l}} \rangle. \quad (2.81)$$

Несмотря на достаточную очевидность многих соотношений, данный метод практически не применялся ранее при проведении аналогичных вычислений. Многие известные в литературе подходы являются значительно более сложными и громоздкими [24], [27].

Глава 3

Эффективное действие для минимального оператора.

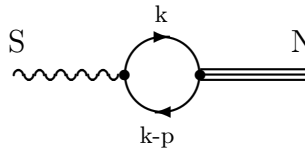
3.1 Случай плоского пространства.

В данном разделе мы найдем явные выражения для всех однопетлевых расходящихся диаграмм, построенных в части 2.4, для случая минимального оператора

$$\begin{aligned}
 D_i^j &= \delta_i^j \square^l + S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-1}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-1}} + \\
 &+ W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-2}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-2}} + \\
 &+ N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-3}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-3}} + \\
 &+ M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-4}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-4}} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

на фоне плоского пространства-времени с использованием техники вычислений, разработанной в части 2.5.

Наиболее просто производится вычисление логарифмически расходящихся диаграмм. Согласно результатам части 2.5 для получения расходящейся части для них необходимо рассмотреть ведущий вклад по петлевому импульсу. В качестве примера подсчитаем расходящуюся часть диаграммы



$$= \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk) (N(k-p))}{k^{2l} (k-p)^{2l}},$$

где

$$\begin{aligned}
 (Sk) &\equiv S^{\mu\nu\dots\alpha} k_\mu k_\nu \dots k_\alpha; \\
 (N(k-p)) &\equiv N^{\mu\nu\dots\alpha} (k-p)_\mu (k-p)_\nu \dots (k-p)_\alpha.
 \end{aligned}$$

(Здесь и далее полагаем, что производные действуют на выходящую линию, импульс которой считается положительным)

Удерживая логарифмически расходящиеся члены, согласно (2.78), получим

$$\frac{i}{2(2\pi)^4} \int d^d k \frac{1}{k^4} \text{tr} \langle \hat{S} \hat{N} \rangle = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \hat{S} \hat{N} \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь при помощи величин со шляпками были обозначены свертки с единичным вектором n_μ :

$$\begin{aligned}\hat{S} &\equiv (Sn) \equiv S^{\mu\nu\dots\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\alpha; \\ \hat{W}^\alpha &\equiv (Wn) \equiv W^{\mu\nu\dots\beta\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\beta.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Аналогичные обозначения будут неоднократно использоваться нами в дальнейшем.

Вычисление оставшихся логарифмических диаграмм ничем не отличается от только что рассмотренного. С учетом числовых коэффициентов перед ними находим, что

$$\text{Diagram: Two horizontal lines (W) connected by a loop} = \frac{1}{32\pi^2(d-4)} \text{tr} < \hat{W}^2 >; \quad (2.4)$$

$$\text{M} \text{---} \bigcirc = - \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \hat{M} >; \quad (2.5)$$

$$\begin{array}{c} \text{W} \\ \parallel \\ \bullet \end{array} \circlearrowleft \begin{array}{l} \bullet \text{---} S \\ \bullet \text{---} S \end{array} = - \frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \hat{W} \hat{S}^2 >; \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{64\pi^2(d-4)} tr < \hat{S}^4 >. \quad (2.7)$$

Перейдем теперь к вычислению линейно расходящихся диаграмм.

$$\begin{array}{c} \text{k} \\ \text{S}(-\text{p}) \quad \bullet \quad \circlearrowleft \quad \bullet \quad \text{W}(\text{p}) \\ \text{k-p} \end{array} = \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk) (W(k-p))}{k^{2l}(k-p)^{2l}}.$$

Для получения членов порядка $1/k^4$ необходимо разложить данное выражение по импульсу p и сохранить линейные по нему слагаемые. Тогда рассматриваемая диаграмма запишется в виде

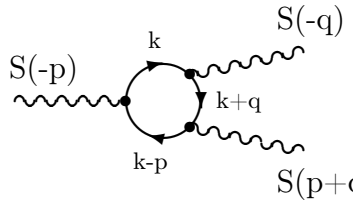
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < 2l \text{ } (pn) \text{ } \hat{S} \hat{W} - (2l-2) p_\mu \hat{W}^\mu \hat{S} > = \\
& = \frac{1}{32\pi^2(d-4)} \text{tr} < (2l-1) p_\mu \hat{S}^\mu \hat{W} - (2l-2) p_\mu \hat{S} \hat{W}^\mu > .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(Здесь также использовано правило (4.20) для работы с операцией интегрирования по углам)

Производя замену $p_\mu \hat{S}$ на $-\partial_\mu \hat{S}$, находим окончательное выражение

$$\frac{1}{32\pi^2(d-4)} \text{tr} < -(2l-1) \partial_\mu \hat{S}^\mu \hat{W} + (2l-2) \partial_\mu \hat{S} \hat{W}^\mu > . \tag{2.9}$$

Вторая линейно расходящаяся диаграмма записывается в виде



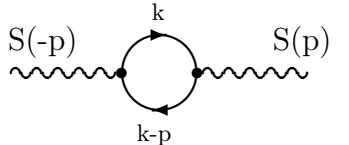
$$= - \frac{i}{6(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk)_{(-p)} (S(k+q))_{(-q)} (S(k-p))_{(p+q)}}{k^{2l} (k-p)^{2l} (k+q)^{2l}} .$$

(Здесь индексы внизу указывают аргумент S)

Полностью аналогичные вычисления приводят к результату

$$\frac{(2l-1)}{96\pi^2(d-4)} \text{tr} < \partial_\mu \hat{S}^\mu \hat{S} \hat{S} - \partial_\mu \hat{S} \hat{S} \hat{S}^\mu > . \tag{2.10}$$

Наконец, квадратично расходящаяся диаграмма



$$= \frac{i}{4(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk)(S(k-p))}{k^{2l} (k-p)^{2l}}$$

вычисляется при помощи разложения подынтегрального выражения по внешнему импульсу p до второго порядка. Результат записывается в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \frac{l^2}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S} \partial^\mu \hat{S} + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \partial_\mu \hat{S}^\mu \partial_\nu \hat{S}^\nu - \\
& - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S}^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{S} > .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Итак, в плоском пространстве согласно (2.2) - (2.11) получаем следующее выражение для расходящейся части однопетлевого эффективного действия:

$$(\Gamma_\infty^{(1)})^{flat} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4 x \sqrt{-g} < \frac{l^2}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S} \partial^\mu \hat{S} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)}\partial_\mu\hat{S}^{\mu\nu}\partial_\nu\hat{S} + \frac{(2l-1)^2l}{4(2l+1)}\partial_\mu\hat{S}^\mu\partial_\nu\hat{S}^\nu + \\
& + (l-1)\partial_\mu\hat{S}\hat{W}^\mu - \frac{(2l-1)}{2}\partial_\mu\hat{S}^\mu\hat{W} + \frac{(2l-1)}{3}\partial_\mu\hat{S}^\mu\hat{S}\hat{S} - \\
& - \frac{(2l-1)}{3}\partial_\mu\hat{S}\hat{S}\hat{S}^\mu + \hat{S}\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{W}^2 + \frac{1}{4}\hat{S}^4 - \hat{W}\hat{S}^2 - \hat{M} >,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{W} & \equiv W^{\mu\nu\dots\alpha}n_\mu n_\nu \dots n_\alpha; \\
\hat{W}^\alpha & \equiv W^{\mu\nu\dots\beta\alpha}n_\mu n_\nu \dots n_\beta; \\
\hat{S}^{\alpha\beta} & \equiv S^{\mu\nu\dots\gamma\alpha\beta}n_\mu n_\nu \dots n_\gamma
\end{aligned} \tag{2.13}$$

и т.д.

3.2 Случай искривленного пространства

Произведем обобщение полученных результатов на случай риманова многообразия. При этом мы немедленно сталкиваемся с тем, что число расходящихся диаграмм в искривленном пространстве бесконечно, так как вершины содержащие $h_{\mu\nu}$ имеют $2l$ степень импульса (а, следовательно, индекс расходимости не понижается с увеличением числа вершин) и, кроме того, число типов вершин также бесконечно.

Однако, если заметить, что окончательное выражение должно быть инвариантно относительно общекоординатных преобразований, то результат может быть найден при помощи вычисления только некоторого конечного числа расходящихся диаграмм. Действительно, мы должны, очевидно, произвести замену обычных производных в (2.12) на ковариантные и добавить слагаемые, содержащие тензор кривизны $R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu}$. Наиболее общая форма дополнительных слагаемых имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} < a_1 R^2 + a_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_3 \hat{W} R + a_4 \hat{W}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \\
& + a_5 \nabla_\mu \hat{S}^\mu R + a_6 \nabla_\mu \hat{S}^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + a_7 \hat{S}^2 R + a_8 R_{\alpha\beta} \hat{S}^\alpha \hat{S}^\beta + a_9 R_{\alpha\beta} \hat{S}^{\alpha\beta} \hat{S} + \\
& + a_{10} R_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{S}^{\mu\alpha} \hat{S}^{\nu\beta} + a_{11} F_{\mu\nu} \nabla^\mu \hat{S}^\nu + a_{12} F_{\mu\nu} \hat{S}^\mu \hat{S}^\nu + a_{13} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} >,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta}; \tag{2.15}$$

$$F_{\mu\nu}{}^j = \partial_\mu \omega_{\nu i}{}^j - \partial_\nu \omega_{\mu i}{}^j + \omega_{\mu i}{}^k \omega_{\nu k}{}^j - \omega_{\nu i}{}^k \omega_{\mu k}{}^j;$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}; \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

(Здесь мы приняли во внимание, что выражение $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2$ является полной производной и может быть опущено).

Коэффициенты $a_1 - a_{13}$ могут быть найдены путем вычисления диаграмм, показанных на рисунке 3, которые соответствуют первому исчезающему приближению в разложении контрчленов по полям $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ и ω_{μ}^j .

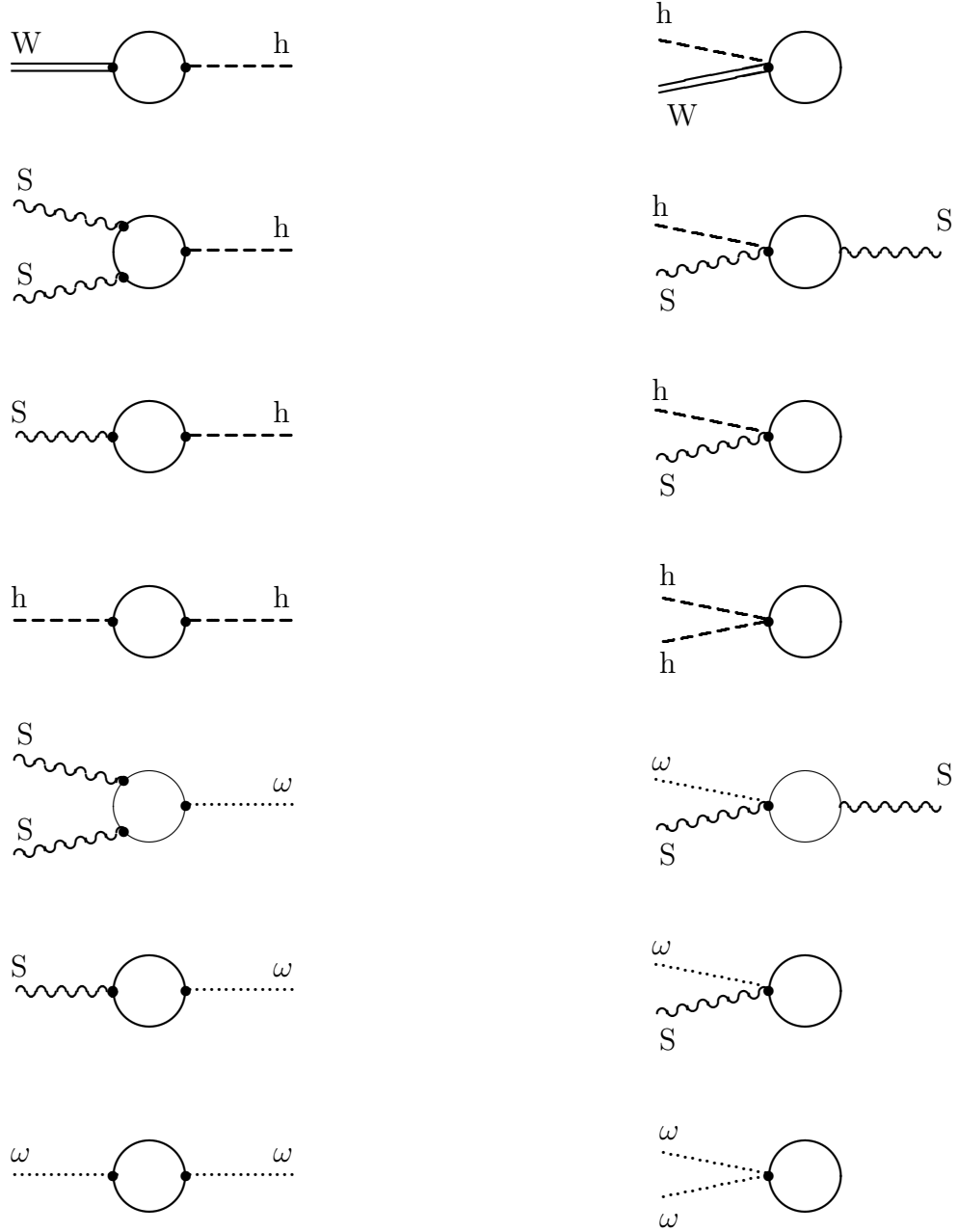
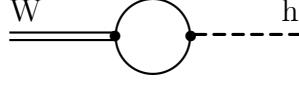


Рис.3: Диаграммы для вычисления эффективного действия

В качестве примера рассмотрим две первые диаграммы, содержащие W -вершины. Вершина, содержащая поле $h_{\mu\nu}$ в диаграмме



согласно (2.66) должна быть найдена при помощи разложения кинетического члена \square^l до первого порядка и имеет вид

$$\sum_{m=0}^{l-1} k^{2m} (k-p)^{2l-2m-2} \left(-h^{\mu\nu} k_\mu (k-p)_\nu + \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha p^\mu (k-p)_\mu \right). \quad (2.16)$$

После этого из (2.67) находим полное выражение для диаграммы в виде

$$\begin{aligned} \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{1}{k^{2l} (k-p)^{2l}} (Wk) \sum_{m=0}^{l-1} k^{2m} (k-p)^{2l-2m-2} \times \\ \times \left(-h^{\mu\nu} k_\mu (k-p)_\nu + \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha p^\mu (k-p)_\mu \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

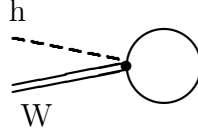
Рассматриваемая диаграмма, очевидно, расходится квадратично (это следует как и непосредственно из (2.17), так и из того, что добавление полей $h_{\mu\nu}$ не меняет индекс расходимости). Поэтому, сохраняя только члены, квадратичные по внешнему импульсу p , получаем расходящуюся часть в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \hat{W} \left(l(l+1) (n^\gamma p_\gamma) \left(h^{\mu\nu} n_\mu p_\nu + \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha (n^\beta p_\beta) \right) - \right. \\ \left. - h^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \left(-\frac{1}{2} l(l+1) p^2 + \frac{2}{3} l(l+1)(l+2) (n^\alpha p_\alpha)^2 \right) - \frac{l}{2} h^\alpha{}_\alpha p^2 \right) >, \end{aligned} \quad (2.18)$$

что при помощи правил сформулированных в приложении 5.5 может быть переписано как

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \frac{l}{6} \hat{W} (-h^\alpha{}_\alpha p^2 + h^{\mu\nu} p_\mu p_\nu) - \\ - \frac{1}{12} (l-1)(2l-3) \hat{W}^{\mu\nu} (-p^2 h_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu h^\alpha{}_\alpha + 2p_\mu p_\alpha h^\alpha{}_\nu) - \\ - \frac{1}{12} (2l-3)(2l-4)(2l-5) \hat{W}^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu >. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Однако (2.19) не может быть представлено как слабопольный предел от некоторого ковариантного выражения. Дело в том, что две диаграммы с W -вершинами не могут рассматриваться по отдельности. Поэтому мы должны еще добавить вклад диаграммы



Выражение для вершины в данной диаграмме легко может быть получено при помощи разложения до первого порядка по полю $h_{\mu\nu}$ ковариантных производных в члене $W^{\mu\nu\dots\alpha} \nabla_\mu \nabla_\nu \dots \nabla_\alpha$, после чего вся диаграмма примет вид

$$\frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \sum_{m=0}^{2l-4} (2l-3-m) W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-2}} \times (k+p)_{\mu_1} \dots (k+p)_{\mu_m} \Gamma_{\mu_{m+1} \mu_{m+2}}^{\alpha (1)} k_\alpha k_{\mu_{m+3}} \dots k_{\mu_{2l-2}}, \quad (2.20)$$

где

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha (1)} = \frac{1}{2} (p_\beta h_\gamma^\alpha + p_\gamma h_\beta^\alpha - p^\alpha h_{\beta\gamma}) \quad (2.21)$$

- символы Кристоффеля в слабопольном пределе.

После несложных преобразований (2.20) может быть записано как

$$\frac{(2l-2)(2l-3)(2l-4)}{192\pi^2(d-4)} \text{tr} < \hat{W}^{\mu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} p_\mu (pn) >. \quad (2.22)$$

Отсюда при помощи правила (4.18) получаем окончательное выражение для расходящейся части в виде

$$\frac{(2l-3)(2l-4)(2l-5)}{192\pi^2(d-4)} \text{tr} < \hat{W}^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu >. \quad (2.23)$$

Сумма (2.19) и (2.23)

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4 x < \frac{l}{6} \hat{W} (-h^\alpha_\alpha p^2 + h^{\mu\nu} p_\mu p_\nu) - \frac{1}{12} (l-1)(2l-3) \hat{W}^{\mu\nu} (-p^2 h_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu h^\alpha_\alpha + 2p_\mu p_\alpha h^\alpha_\nu) >, \quad (2.24)$$

в отличие от каждой из диаграмм в отдельности, может быть представлена как первый не исчезающий член в слабопольном разложении ковариантного выражения

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4 x \sqrt{-g} < \frac{l}{6} \hat{W} R - \frac{1}{6} (l-1)(2l-3) R_{\mu\nu} \hat{W}^{\mu\nu} >, \quad (2.25)$$

которое и является окончательным результатом для рассмотренных графов.

Остальные диаграммы вычисляются аналогично. После достаточно громоздких вычислений была получена следующая формула для расходящейся части однопетлевого эффективного действия минимального оператора (2.1) в искривленном пространстве:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\infty}^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} < (l-1) \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{W}^{\mu} - \\
& - \frac{(2l-1)}{2} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \hat{W} - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \hat{S} + \frac{l^2}{2(2l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S} \nabla^{\mu} \hat{S} + \\
& + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \nabla_{\nu} \hat{S}^{\nu} + \frac{(2l-1)}{3} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \hat{S} \hat{S} - \frac{(2l-1)}{3} \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{S} \hat{S}^{\mu} + \\
& + \hat{S} \hat{N} + \frac{1}{2} \hat{W}^2 + \frac{1}{4} \hat{S}^4 - \hat{W} \hat{S}^2 - \hat{M} - \frac{(2l-3)(l-1)}{6} \hat{W}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{l}{6} \hat{W} R - \frac{(2l-1)l}{12} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} R + \frac{(2l-1)(2l-3)(l-1)}{12} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \\
& - \frac{l}{6} \hat{S}^2 R + \frac{(2l-1)^2(l+2)}{24(2l+1)} R_{\alpha\beta} \hat{S}^{\alpha} \hat{S}^{\beta} + \frac{(2l-1)(l-1)}{6} R_{\alpha\beta} \hat{S}^{\alpha\beta} \hat{S} - \\
& - \frac{(2l-1)(l-1)^2(l+2)}{12(2l+1)} R_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{S}^{\mu\alpha} \hat{S}^{\nu\beta} + l \left(\frac{1}{120} R^2 + \frac{1}{60} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) + \\
& + \frac{l(2l-1)}{6} \nabla_{\mu} \hat{S}_{\nu} F^{\mu\nu} + \frac{(2l-1)^2(l+1)}{4(2l+1)} F_{\mu\nu} \hat{S}^{\mu} \hat{S}^{\nu} + \frac{l}{12} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} > . \tag{2.26}
\end{aligned}$$

3.3 Минимальный оператор с симметризованным кинетическим членом.

В некоторых случаях удобнее использовать несколько иную форму записи дифференциального оператора:

$$\begin{aligned}
D_i^j = & \delta_i^j K_0^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l}} \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l}} + \\
& + S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-1}} \delta_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-1}} + \\
& + W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-2}} \delta_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-2}} + \\
& + N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-3}} \delta_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-3}} + \\
& + M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-4}} \delta_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-4}} + \dots, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

где K_0 - полностью симметричный тензор, построенный из $g_{\mu\nu}$:

$$K_0^{\mu\nu\alpha\beta\dots} = \frac{1}{(2l-1)!!} (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \dots + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \dots + \dots). \tag{2.28}$$

(Здесь суммирование понимается по всевозможным расстановкам индексов).

Аналогичные ранее описанным вычисления в данном случае приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\infty}^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} < \frac{l^2}{2(2l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S} \nabla^{\mu} \hat{S} + \\
& + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \nabla_{\nu} \hat{S}^{\nu} - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \hat{S} + \\
& + (l-1) \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{W}^{\mu} - \frac{(2l-1)}{2} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \hat{W} + \frac{(2l-1)}{3} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \hat{S} \hat{S} - \\
& - \frac{(2l-1)}{3} \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{S} \hat{S}^{\mu} + \hat{S} \hat{N} + \frac{1}{2} \hat{W}^2 + \frac{1}{4} \hat{S}^4 - \hat{W} \hat{S}^2 - \hat{M} - \\
& - \frac{l^2(2l-1)}{6(l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} R + \frac{(2l-1)(2l-3)(l-1)}{6(l+1)} \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{l^2}{3(l+1)} \hat{W} R - \frac{(2l-3)(l-1)}{3(l+1)} \hat{W}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{l^2}{2(2l+1)} \hat{S}^2 R - \\
& - \frac{(2l-1)^2(l-4)}{24(2l+1)} R_{\mu\nu} \hat{S}^{\mu} \hat{S}^{\nu} + \frac{(2l-1)(l-1)(l+2)}{6(2l+1)} R_{\mu\nu} \hat{S}^{\mu\nu} \hat{S} - \\
& - \frac{(2l-1)(l-1)^2(l+2)}{12(2l+1)} R_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{S}^{\mu\alpha} \hat{S}^{\nu\beta} + \frac{l^2(-7l^2+4l+12)}{540} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \\
& + \frac{l^2(3l^2+4l+2)}{1080} R^2 + \frac{l^3}{12} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{(l+1)(2l-1)^2}{4(2l+1)} \hat{S}^{\mu} \hat{S}^{\nu} F_{\mu\nu} + \\
& + \frac{l^2(2l-1)}{3(l+1)} F^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \hat{S}_{\nu} > .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

3.4 Частные случаи.

3.4.1 Оператор второго порядка.

Проверим, что полученный ответ воспроизводит известные ранее результаты, а также получим расходящуюся часть однопетлевого эффективного действия для теорий с операторами шестого и восьмого порядков.

Если $l = 1$, то оператор (2.1) принимает вид

$$D_i^j = \delta_i^j \square + S^{\mu}{}_i{}^j \nabla_{\mu} + W_i^j. \tag{2.30}$$

Несложно проверить, что в этом случае (2.26) приводит к

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < & \frac{1}{6} \nabla_{\mu} \hat{S} \nabla^{\mu} \hat{S} + \frac{1}{12} \nabla_{\mu} S^{\mu} \nabla_{\nu} S^{\nu} - \frac{1}{2} \nabla_{\mu} S^{\mu} W + \\
& + \frac{1}{3} \nabla_{\mu} S^{\mu} \hat{S} \hat{S} - \frac{1}{3} \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{S} S^{\mu} + \frac{1}{2} W^2 + \frac{1}{4} \hat{S}^4 - W \hat{S}^2 + \\
& + \frac{1}{120} R^2 + \frac{1}{60} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{6} W R - \frac{1}{12} \nabla_{\mu} S^{\mu} R - \frac{1}{6} \hat{S}^2 R +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{24}R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu + \frac{1}{6}S^\mu S^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{6}\nabla^\mu S^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} >, \quad (2.31)$$

где учтено, что $\hat{W} = W$, $\hat{S}^\mu = S^\mu$. (В данном случае $\hat{S} = S^\alpha n_\alpha$)
Вспоминая, что согласно (2.77)

$$\begin{aligned} < 1 > = 1; \\ < n_\mu n_\nu > = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}; \\ < n_\mu n_\nu n_\alpha n_\beta > = \frac{1}{24}(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \left(\frac{1}{24}\nabla_\mu S_\nu \nabla^\mu S^\nu + \frac{1}{12}\nabla_\mu S^\mu \nabla_\nu S^\nu + \right. \\ + \frac{1}{12}\nabla_\mu S^\mu S^\nu S_\nu - \frac{1}{12}\nabla_\mu S_\nu S^\nu S^\mu + \frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{48}S_\nu S^\nu S_\mu S^\mu + \\ + \frac{1}{96}S_\mu S_\nu S^\mu S^\nu - \frac{1}{4}W S_\mu S^\mu - \frac{1}{2}\nabla_\mu S^\mu W + \frac{1}{120}R^2 + \frac{1}{60}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{6}WR - \frac{1}{12}\nabla_\mu S^\mu R - \frac{1}{24}S_\mu S^\mu R + \frac{1}{24}R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu + \frac{1}{6}S^\mu S^\nu F_{\mu\nu} + \\ \left. + \frac{1}{6}\nabla^\mu S^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

С учетом правил коммутации ковариантных производных, это может быть записано в более простой форме

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{12}Y_{\mu\nu}Y^{\mu\nu} + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{60}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{180}R^2 \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} Y_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\nabla_\mu S_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\nu S_\mu + \frac{1}{4}S_\mu S_\nu - \frac{1}{4}S_\nu S_\mu + F_{\mu\nu}; \\ X &= W - \frac{1}{2}\nabla_\mu S^\mu - \frac{1}{4}S_\mu S^\mu + \frac{1}{6}R, \end{aligned}$$

что, с точностью до обозначений, полностью совпадает с хорошо известным результатом [24].

3.4.2 Оператор четвертого порядка.

Рассмотрим теперь случай минимального оператора четвертого порядка

$$D_i^j = \delta_i^j \square^2 + S^{\mu\nu\alpha}{}_i{}^j \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha + W^{\mu\nu}{}_i{}^j \nabla_\mu \nabla_\nu + N^\mu{}_i{}^j \nabla_\mu + M_i^j. \quad (2.35)$$

Произведя вычисления аналогичные вышеописанным, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{3}{160} S_\mu \square S^\mu - \frac{1}{80} S_{\alpha\beta\gamma} \square S^{\alpha\beta\gamma} + \right. \\ & + \frac{9}{80} S_\mu \nabla_\alpha \nabla_\beta S^{\mu\alpha\beta} - \frac{3}{80} S^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu S^\nu - \frac{3}{40} S^{\mu\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu S_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{8} N^\mu S_\mu + \\ & + \frac{1}{24} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \frac{1}{48} W^2 - M + \frac{1}{8} W^{\mu\nu} \nabla_\mu S_\nu - \frac{1}{8} W^{\mu\nu} \nabla_\alpha S^{\alpha\mu\nu} - \\ & - \frac{1}{16} W \nabla_\mu S^\mu + \frac{1}{60} R^2 + \frac{1}{30} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{6} W^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{12} W R - \frac{1}{8} \nabla_\mu S^\mu R + \\ & + \frac{1}{4} \nabla_\mu S^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{64} S^\mu S_\mu R - \frac{1}{96} S^{\mu\nu\alpha} S_{\mu\nu\alpha} R - \frac{1}{20} S^{\mu\alpha\gamma} S^{\nu\beta}{}_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{80} S^\mu S^\nu R_{\mu\nu} + \frac{1}{40} S^{\mu\alpha\beta} S^\nu{}_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} + \frac{1}{16} S^{\mu\nu\alpha} S_\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{640} W \times \\ & \times (3 S^\mu S_\mu + 2 S^{\mu\nu\alpha} S_{\mu\nu\alpha}) - \frac{3}{320} W^{\mu\nu} (S_\mu S_\nu + 2 S_\mu{}^{\alpha\beta} S_{\nu\alpha\beta} + S_{\mu\nu\alpha} S^\alpha + \\ & + S^\alpha S_{\mu\nu\alpha}) + \frac{1}{640} ((2 S^{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} + 3 S^\alpha S_\alpha) \nabla_\mu S^\mu + 12 S_\beta{}^{\mu\nu} S_{\gamma\mu\nu} \nabla_\alpha S^{\alpha\beta\gamma} + \\ & + 6 (S^\nu S_{\nu\alpha\beta} + S_{\nu\alpha\beta} S^\nu) \nabla_\mu S^{\mu\alpha\beta} + 6 S_\beta S_\gamma \nabla_\alpha S^{\alpha\beta\gamma}) - \frac{1}{640} (2 S_{\alpha\beta\gamma} S^\mu \times \\ & \times \nabla_\mu S^{\alpha\beta\gamma} + 3 S_\alpha S^\mu \nabla_\mu S^\alpha + 12 S_\beta{}^{\mu\nu} S^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha S_{\gamma\mu\nu} + 6 S_{\nu\alpha\beta} S^{\mu\alpha\beta} \nabla_\mu S^\nu + \\ & + 6 S^\nu S^{\mu\alpha\beta} \nabla_\mu S_{\nu\alpha\beta} + 6 S_\beta S^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha S_\gamma) + \frac{1}{6} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \nabla_\mu S_\nu F^{\mu\nu} + \\ & + \frac{9}{160} F_{\mu\nu} S^\mu S^\nu + \frac{9}{80} F_{\mu\nu} S^{\mu\alpha\beta} S^\nu{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{143360} (18 S^\mu S_\mu S^\nu S_\nu + \\ & + 24 S^\mu S^\mu S^{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} + 9 S^\mu S^\nu S_\mu S_\nu + 12 S^\mu S^{\alpha\beta\gamma} S_\mu S_{\alpha\beta\gamma} + 144 S^\alpha \times \\ & \times S_{\alpha\beta\gamma} S^{\beta\mu\nu} S^\gamma{}_{\mu\nu} + 144 S^\alpha S^{\beta\mu\nu} S_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma{}_{\mu\nu} + 144 S^\alpha S^{\beta\mu\nu} S^\gamma{}_{\mu\nu} S_{\alpha\beta\gamma} + \\ & + 72 S^\alpha S^\beta S^\gamma S_{\alpha\beta\gamma} + 72 S^\alpha S^\beta S_\alpha{}^{\mu\nu} S_{\beta\mu\nu} + 72 S^\alpha S^\beta S_\beta{}^{\mu\nu} S_{\alpha\mu\nu} + \\ & + 36 S^\alpha S_\alpha{}^{\mu\nu} S^\beta S_{\beta\mu\nu} + 36 S^\alpha S^{\beta\mu\nu} S_\beta S_{\alpha\mu\nu} + 8 S^{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} S^{\mu\nu\sigma} S_{\mu\nu\sigma} + \\ & + 4 S^{\alpha\beta\gamma} S^{\mu\nu\sigma} S_{\alpha\beta\gamma} S_{\mu\nu\sigma} + 72 S^{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta}{}^\mu S_\gamma{}^{\nu\sigma} S_{\mu\nu\sigma} + 72 S^{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta}{}^\sigma S_\sigma{}^{\mu\nu} \times \\ & \times S_{\gamma\mu\nu} + 72 S^{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma\mu\nu} S_{\alpha\beta}{}^\sigma S_\sigma{}^{\mu\nu} + 144 S^{\alpha\beta\gamma} S_\alpha{}^{\mu\nu} S_{\beta\mu}{}^\sigma S_{\gamma\nu\sigma}) \Big), \quad (2.36) \end{aligned}$$

где $S^\mu \equiv S^{\mu\nu}{}_\nu$, $W \equiv W^\nu{}_\nu$.

Оно полностью совпадает с результатом, полученным в работах [9], [20].

Особенно простой вид ответ (2.36) принимает при $S^{\mu\nu\alpha} = 0$:

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{24} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \frac{1}{48} W^2 - M + \right. \\ \left. + \frac{1}{60} R^2 + \frac{1}{30} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{6} W^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{12} W R \right). \quad (2.37)$$

(Данный ответ впервые был получен в работах [52] – [54]).

3.4.3 Операторы 6-го и 8-го порядков при $S = 0$

При рассмотрении теорий, регуляризованных высшими производными [55] встречаются минимальные операторы, имеющие большое количество производных, например, операторы шестого и восьмого порядка. Кроме того, конкретные вычисления показывают, что члены с S в данном случае отсутствуют. В данном разделе мы получим алгоритмы вычисления эффективного действия для операторов 6-го и 8-го порядков.

Рассмотрим оператор шестого порядка, в котором отсутствуют пятые производные

$$D_i^j = \square^3 \delta_i^j + W^{\mu\nu\alpha\beta}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} + N^{\mu\nu\alpha}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} + \\ + M^{\mu\nu}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + P^{\mu}{}_i{}^j \nabla_{\mu} + Q_i^j. \quad (2.38)$$

(в противном случае ответ получается излишне громоздким).

В случае $S = 0$ ответ (2.26) для произвольного минимального оператора принимает вид

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} < \frac{1}{2} \hat{W}^2 - \hat{M} + \frac{l}{12} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{l}{6} \hat{W} R - \\ - \frac{(2l-3)(l-1)}{6} \hat{W}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{l}{120} R^2 + \frac{l}{60} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} >. \quad (2.39)$$

Для оператора 6-го порядка $l = 3$, кроме того, в силу (2.77) (см. приложение 5.5)

$$< \hat{M} > = \frac{1}{4} M; \\ < \hat{W}^{\mu\nu} > = \frac{1}{4} W^{\mu\nu}; \\ < \hat{W} > = \frac{1}{8} W; \\ < \hat{W}^2 > = \frac{1}{80} W^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{3}{80} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \frac{3}{640} W^2, \quad (2.40)$$

где, как и в случае оператора 4-го порядка мы не выписываем индексы внутренних свертков, например, $M \equiv M^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$.

Таким образом, окончательный ответ для оператора 6-го порядка при $S = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\infty}^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \operatorname{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{160} W^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{3}{160} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \right. \\ & + \frac{3}{1280} W^2 - \frac{1}{4} M - \frac{1}{4} W^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{16} W R + \frac{1}{40} R^2 + \frac{1}{20} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \\ & \left. + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Полностью аналогично рассматривается оператор 8-го порядка без производных 7-го порядка:

$$\begin{aligned} D_i^j = & \square^4 \delta_i^j + W^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} \nabla_{\delta} + N^{\mu\nu\alpha\beta\gamma}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} + \\ & + M^{\mu\nu\alpha\beta}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} + P^{\mu\nu\alpha}{}_i{}^j \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} + Q_i^{\mu\nu j} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + T_i^{\mu j} \nabla_{\mu} + V_i^j. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В данном случае, используя правила сформулированные в приложении 5.5, в частности (4.21) и (4.22), находим, что

$$\begin{aligned} \langle \hat{M} \rangle &= \frac{1}{8} M; \\ \langle \hat{W}^{\mu\nu} \rangle &= \frac{1}{8} W^{\mu\nu}; \\ \langle \hat{W} \rangle &= \frac{5}{64} W; \\ \langle \hat{W}^2 \rangle &= \frac{1}{7168} (16 W^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} W_{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} + 120 W^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta} + \\ &+ 90 W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + 5 W^2) \end{aligned} \quad (2.43)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\infty}^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \operatorname{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{14336} (16 W^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} W_{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} + \right. \\ & + 120 W^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta} + 90 W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + 5 W^2) - \frac{1}{8} M - \frac{5}{16} W^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \\ & \left. + \frac{5}{96} W R + \frac{1}{30} R^2 + \frac{1}{15} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

В приложении 5.5 показано каким образом можно записать результат для произвольного минимального оператора без использования операции интегрирования по углам, после чего (2.41) и (2.44) могут быть получены простой подстановкой чисел. При этом получается наиболее эффективный алгоритм для компьютерных вычислений, однако итоговые формулы становятся слишком громоздкими и теряют наглядность.

Глава 4

Эффективное действие для неминимального оператора.

4.1 Случай плоского пространства.

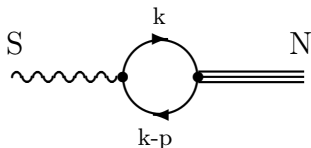
Перейдем теперь к рассмотрению теории с произвольным неминимальным оператором, который, без ограничения общности, может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
 D_i^j = & K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_L}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} + \\
 & + S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-1}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} + \\
 & + W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-2}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-2}} + \\
 & + N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-3}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-3}} + \\
 & + M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-4}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-4}} + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где внешние поля K, S, W, N, M, \dots симметричны по греческим индексам.

Расходящиеся диаграммы для неминимального оператора те же, что и для минимального (см. Рис. 2), однако из-за несколько иной формы пропагатора вычисления отличаются от ранее рассмотренного случая.

Как и ранее, наиболее просто производится вычисление логарифмически расходящихся диаграмм. В качестве примера рассмотрим следующую диаграмму:



$$= \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k (Sk) (Kk)^{-1} (N(k-p)) (K(k-p))^{-1}.$$

Вычисление ее расходящейся части в соответствии с ранее описанным методом приводит к результату

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \hat{S} \hat{N} >, \quad (3.2)$$

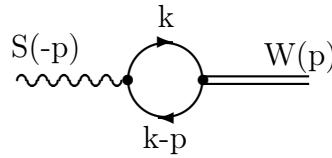
где

$$\begin{aligned} \hat{W} &\equiv (Kn)^{-1} W^{\mu\nu\dots\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\alpha; \\ \hat{K}^\alpha &\equiv (Kn)^{-1} K^{\mu\nu\dots\beta\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\beta; \\ \hat{S}^{\alpha\beta} &\equiv (Kn)^{-1} S^{\mu\nu\dots\gamma\beta\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\gamma; \\ (Kn)^{-1}{}_i{}^m (Kn)_m{}^j &= \delta_i{}^j \end{aligned} \quad (3.3)$$

и т.д. (ср. с (2.13)).

Оставшиеся логарифмически расходящиеся диаграммы рассматриваются полностью аналогично. По форме ответ ничем не отличается от случая минимального оператора (Хотя величины с крышечками здесь обозначают несколько иные объекты)

Перейдем теперь к вычислению линейно расходящихся диаграмм:



$$= \frac{i}{2(2\pi)^4} tr \int d^d k (Sk)(Kk)^{-1}(W(k-p))(K(k-p))^{-1}.$$

Для того, чтобы найти члены порядка $1/k^4$, необходимо разложить данное выражение в ряд по внешнему импульсу p и сохранить только линейные члены. Тогда рассматриваемая диаграмма примет следующий вид:

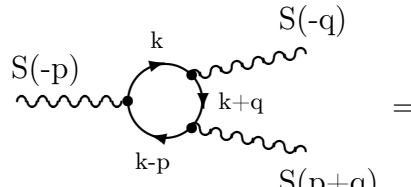
$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < L p_\mu \hat{S} \hat{W} \hat{K}^\mu - (L-2) p_\mu \hat{S} \hat{W}^\mu >. \quad (3.4)$$

(Здесь было использовано одно из сформулированных в приложении 5.5 правил для работы с операцией интегрирования по углам)

Производя замену $p_\mu \hat{S}$ на $-\partial_\mu \hat{S}$, находим окончательное выражение

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < -L \partial_\mu \hat{S} \hat{W} \hat{K}^\mu + (L-2) \partial_\mu \hat{S} \hat{W}^\mu >. \quad (3.5)$$

Вторая линейно расходящаяся диаграмма имеет вид:



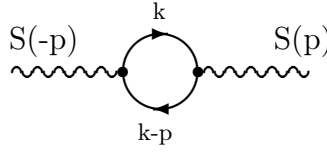
$$= -\frac{i}{6(2\pi)^4} tr \int d^d k \underset{(-p)}{(Sk)} \underset{(-q)}{(Kk)^{-1}} \underset{(-q)}{(S(k+q))} \underset{(p+q)}{(K(k+q))^{-1}} \underset{(p+q)}{(S(k-p))} \underset{(p+q)}{(K(k-p))^{-1}}.$$

Полностью аналогичные вычисления приводят к результату

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \frac{1}{3} \left((L-1) \partial_\mu \hat{S}^\mu \hat{S} \hat{S} - L \partial_\mu \hat{S} \hat{K}^\mu \hat{S} \hat{S} - \right. \quad (3.6)$$

$$\left. - (L-1) \partial_\mu \hat{S} \hat{S} \hat{S}^\mu + L \partial_\mu \hat{S} \hat{S} \hat{S} \hat{K}^\mu \right) > .$$

Оставшаяся квадратично расходящаяся диаграмма



$$= \frac{i}{4(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k (S k) (K k)^{-1} (S(k-p)) (K(k-p))^{-1}$$

вычисляется при помощи разложения в ряд по внешнему импульсу p до второго порядка. Соответствующий результат есть

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \frac{L(L-1)}{2} \partial_\mu \hat{S} \partial_\nu \hat{S}^\nu \hat{K}^\mu - \frac{(L-1)(L-2)}{4} \partial_\mu \hat{S} \partial_\nu \hat{S}^{\mu\nu} -$$

$$- \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{S} \partial_\nu \hat{S} \left(-\frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} + L^2 \hat{K}^\mu \hat{K}^\nu \right) > . \quad (3.7)$$

Таким образом, собирая вместе ответы для различных диаграмм, мы приходим к следующему выражению для расходящейся части однопетлевого эффективного действия произвольного неминимального оператора в плоском пространстве:

$$(\Gamma_\infty^{(1)})^{flat} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4 x < \frac{1}{4} \hat{S}^4 - \hat{W} \hat{S}^2 + \frac{1}{2} \hat{W}^2 + \hat{S} \hat{N} -$$

$$- \hat{M} - L \partial_\mu \hat{S} \hat{W} \hat{K}^\mu + (L-2) \partial_\mu \hat{S} \hat{W}^\mu + \frac{1}{3} \left((L-1) \partial_\mu \hat{S}^\mu \hat{S} \hat{S} - \right.$$

$$- L \partial_\mu \hat{S} \hat{K}^\mu \hat{S} \hat{S} - (L-1) \partial_\mu \hat{S} \hat{S} \hat{S}^\mu + L \partial_\mu \hat{S} \hat{S} \hat{S} \hat{K}^\mu \Big) +$$

$$+ \frac{1}{2} L(L-1) \partial_\mu \hat{S} \partial_\nu \hat{S}^\nu \hat{K}^\mu - \frac{1}{4} (L-1)(L-2) \partial_\mu \hat{S} \partial_\nu \hat{S}^{\mu\nu} -$$

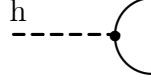
$$- \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{S} \partial_\nu \hat{S} \left(-\frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} + L^2 \hat{K}^\mu \hat{K}^\nu \right) > . \quad (3.8)$$

(Необходимо помнить, что здесь обозначения несколько отличаются от случая минимального оператора, см. (3.3) !)

4.2 Случай искривленного пространства.

Обобщим полученные результаты на случай искривленного пространства. Также как и в случае минимального оператора при вычислениях мы будем применять метод разложения по слабым полям $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ и $\omega_{\mu i}^j$.

Однако теперь здесь имеется ряд существенных отличий. Одно из них состоит в том, что нам неизвестна зависимость $K = K(g_{\mu\nu})$, а, следовательно, и выражение для вершины



которое получается при разложении оператора по слабому полю $h_{\mu\nu}$.

Чтобы обойти данную сложность, будем использовать следующий прием: Предположим, что $K^{\mu\nu\dots\sigma}_i{}^j$ вообще не зависит от $g_{\mu\nu}$, а зависит только от некоторых внешних полей ϕ^b , причем $\partial_\alpha\phi^b$ будем считать слабым полем. Однако будем налагать условие

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha K^{\mu\nu\dots\sigma}_i{}^j &= \frac{\partial K^{\mu\nu\dots\sigma}}{\partial \phi^b} \partial_\alpha \phi^b + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu K^{\beta\nu\dots\sigma} + \dots + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma K^{\mu\nu\dots\beta} + \\ &+ \omega_{\alpha i}{}^k K^{\mu\nu\dots\sigma}_k{}^j - K^{\mu\nu\dots\sigma}_i{}^k \omega_{\alpha k}{}^j = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

которое, очевидно, выполнено если $K^{\mu\nu\dots\sigma}_i{}^j$ зависит только от $g_{\mu\nu}$.

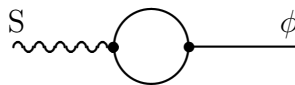
Условие (3.9) может быть выполнено только в том случае, если поле $\omega_{\alpha i}{}^j$ рассматривается как слабое. Это является вполне естественным, если вспомнить, что, как правило, оно строится из символов Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$. Таким образом, слагаемые, содержащие связность необходимо вычислять также при помощи слабополюсного разложения. (В случае минимального оператора это не является обязательным)

Однако, вычисление диаграмм, показанных на Рис.3. приводит в данном случае к результату, который не может быть представлен как первое неисчезающее приближение в разложении по слабому полю $h_{\mu\nu}$ от некоторого ковариантного выражения. Аналогичная сложность возникает и при анализе членов, содержащих $\omega_{\alpha i}{}^j$.

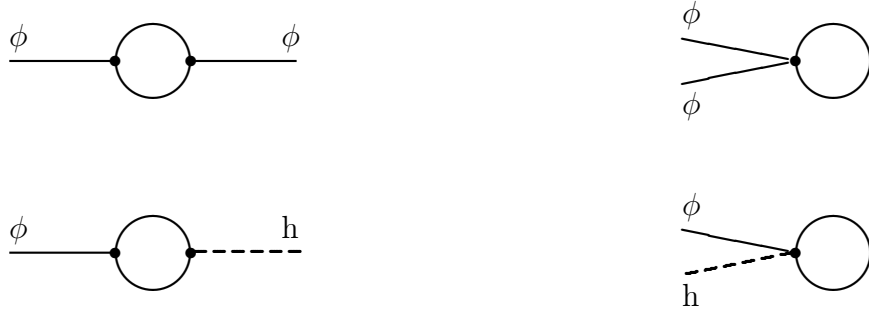
Дело в том, что мы не учли вклад даваемый полями ϕ^b . Для этого рассмотрим следующие расходящиеся диаграммы:



(расходятся квадратично)



(расходимость третьего порядка)



(расходимость четвертого порядка)

Рис. 4: Диаграммы для неминимального оператора, соответствующие разложению по слабому полю $\partial_\alpha \phi^b$ в первом исчезающем приближении

Вычисление данных диаграмм приводит к появлению слагаемых, содержащих $\partial_\alpha K^{\mu\nu\dots\sigma}_i{}^j$, поскольку вершина взаимодействия квантового поля с ϕ^b имеет вид

$$\phi \text{ --- } \text{---} \text{---} = \frac{\partial \hat{K}}{\partial \phi^b} \phi^b$$

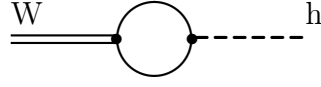
Для того чтобы получить ковариантный результат, необходимо добавить к найденным выражениям некоторые слагаемые, содержащие метрику и связность. Взять их мы можем только из основного результата. После вычитания данных членов уже оказывается возможным представить ответы как первое исчезающее приближение в разложении по слабому полю некоторого ковариантного выражения. Сами члены с ϕ^b вклад в ответ не дают, поскольку их ковариантизированные выражения содержат

$$\nabla_\alpha K^{\mu\nu\dots\sigma}_i{}^j = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, в случае неминимального оператора уже невозможно отдельно производить вычисления членов содержащих тензора кривизны, построенные из метрики $(R^\alpha{}_{\beta\mu\nu})$ и связности $(F_{\mu\nu})$.

Поясним сказанное на примере вычисления диаграмм, приводящих к членам WR и WF .

В предположении, что $K^{\mu\nu\dots\alpha}$ не зависит от метрики немедленно находим, что диаграмма



может быть записана как

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < \frac{1}{3}L(L-1)(L-2) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma n_\sigma + \\ + \frac{1}{2}L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma p_\sigma + \frac{1}{2}L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma n_\sigma p_\alpha >, \end{aligned} \quad (3.11)$$

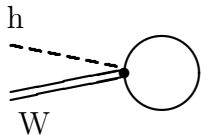
где для коэффициентов в разложении пропагатора были введены следующие обозначения (см. приложение 5.5):

$$\begin{aligned} \Delta^\mu &\equiv -L \hat{K}^\mu; \\ \Delta^{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{2}L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} + L^2 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu)}; \\ \Delta^{\mu\nu\alpha} &\equiv -\frac{1}{6}L(L-1)(L-2) \hat{K}^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}L^2(L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha)} + \frac{1}{2}L^2 \times \\ &\quad \times (L-1) \hat{K}^{(\alpha} \hat{K}^{\mu\nu)} - L^3 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu} \hat{K}^{\alpha)}; \\ \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} &\equiv -\frac{1}{24}L(L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{6}L^2(L-1) \times \\ &\quad \times (L-2) \hat{K}^{(\mu\nu\alpha} \hat{K}^{\beta)} + \frac{1}{6}L^2(L-1)(L-2) \hat{K}^{(\beta} \hat{K}^{\mu\nu\alpha)} + \\ &\quad + \frac{1}{4}L^2(L-1)^2 \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha\beta)} - \frac{1}{2}L^3(L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha} \hat{K}^{\beta)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}L^3(L-1) \hat{K}^{(\alpha} \hat{K}^{\mu\nu} \hat{K}^{\beta)} - \frac{1}{2}L^3(L-1) \hat{K}^{(\alpha} \hat{K}^{\beta} \hat{K}^{\mu\nu)} + \\ &\quad + L^4 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu} \hat{K}^{\alpha} \hat{K}^{\beta)}. \end{aligned}$$

Здесь симметризация производится по всем греческим индексам и

$$A^{(i_1 i_2 \dots i_n)} \equiv \frac{1}{n!} (A^{i_1 i_2 \dots i_n} + A^{i_2 i_1 \dots i_n} + \dots + A^{i_n i_{n-1} \dots i_1}). \quad (3.12)$$

При помощи несложных вычислений также находим, что



$$= \frac{1}{6}(L-2)(L-3)(L-4) \hat{W}^{\mu\alpha\beta} p_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma n_\sigma. \quad (3.13)$$

Используя правила указанные в приложении, последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{3} (p_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + p_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma + p_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma) \hat{W} n_\sigma \left(\frac{1}{6} L(L-1) \times \right. \\
\times (L-2) \hat{K}^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^\alpha + L \hat{K}^\alpha \Delta^{\mu\nu} \Big) + \frac{1}{3} (p_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \\
+ 2p_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma) \hat{W} \left(\frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}_{\mu\nu} + L \hat{K}^\mu \Delta^\nu \right) > . \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Складывая выражения для двух диаграмм, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{2} L(L-1)(L-2) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma n_\sigma + \frac{1}{3} L(L-1) \times \\
\times \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^\alpha n_\sigma (2p_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + p_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma) + \frac{1}{3} L \hat{W} \hat{K}^\alpha \Delta^{\mu\nu} n_\sigma (p_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + 2p_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma) + \\
+ \frac{1}{3} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} (2p_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + p_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma) + \frac{1}{3} L \hat{W} \hat{K}^\mu \Delta^\nu (p_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \\
+ 2p_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma) > . \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Также необходимо произвести учет связности $\omega_{\alpha i}^j$. Ранее было замечено, что связность $\omega_{\alpha i}^j$ в случае неминимального оператора необходимо рассматривать как слабое поле. Поэтому можно вычислить диаграммы, соответствующие первому исчезающему приближению в разложении по $\omega_{\alpha i}^j$, а затем по ковариантности восстановить полный результат.

В данном случае необходимо рассмотреть 2 линейно расходящиеся диаграммы:



Первая из них представляется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < -\frac{1}{2} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \omega_\mu p_\nu - \\
-L \hat{W} \hat{K}^\mu \omega_\mu \Delta^\nu p_\nu > , \quad (3.16)
\end{aligned}$$

а вторая как

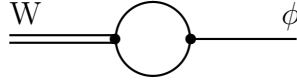
$$\begin{aligned}
-i tr \int d^d k \frac{1}{2} L(L-1) \hat{W}^{\mu\nu} \omega_\mu p_\nu = \\
= -\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \hat{W} p_\nu \omega_\mu \Delta^{\mu\nu} > . \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Суммарный вклад двух диаграмм тогда принимает вид

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < -\frac{1}{2}L(L-1)\hat{W}\hat{K}^{\mu\nu}p_\nu\omega_\mu - \hat{W}p_\nu\omega_\mu\Delta^{\mu\nu} -$$

$$- L \hat{W}\hat{K}^\mu p_\nu\omega_\mu\Delta^\nu > . \quad (3.18)$$

Как уже отмечалось ранее, (3.15) и (3.18) не могут быть записаны в ковариантном виде. Для этого необходимо учесть вклад полей ϕ^b , что достигается вычислением квадратично расходящейся диаграммы



выражение для расходящейся части которой имеет вид

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr \int d^d k (Wk) (Kk)^{-1} \frac{\partial(K(k-p))}{\partial\phi^b} \phi^b (K(k-p))^{-1}. \quad (3.19)$$

После разложения до второго порядка по внешнему импульсу p с сохранением только квадратичных членов получаем

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{2}L(L-1) \hat{W} (Kn)^{-1} \frac{\partial(Kn)^{\mu\nu}}{\partial\phi^b} \phi^b p_\mu p_\nu + L \hat{W} \times$$

$$\times (Kn)^{-1} \frac{\partial(Kn)^\mu}{\partial\phi^b} \phi^b \Delta^\nu p_\mu p_\nu + \hat{W} (Kn)^{-1} \frac{\partial(Kn)}{\partial\phi^b} \phi^b \Delta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu >, \quad (3.20)$$

что может быть записано в виде

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{2}L(L-1) \hat{W} (Kn)^{-1} \partial_\nu \partial_\mu (Kn)^{\mu\nu} +$$

$$+ L \hat{W} (Kn)^{-1} \partial_\nu \partial_\mu (Kn)^\mu \Delta^\nu + \hat{W} (Kn)^{-1} \partial_\nu \partial_\mu (Kn) \Delta^{\mu\nu} > . \quad (3.21)$$

Чтобы сделать данную величину ковариантной, необходимо добавить к ней

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{2}L(L-1)p_\nu \hat{W} \left((L-2) \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \hat{K}^{\mu\nu\alpha} n_\sigma + \right.$$

$$+ \Gamma_{\mu\alpha}^\mu \hat{K}^{\nu\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \hat{K}^{\mu\alpha} + (Kn)^{-1} \omega_\mu (Kn)^{\mu\nu} - \hat{K}^{\mu\nu} \omega_\mu \Big) + L p_\nu \hat{W} \times$$

$$\times \left((L-1) \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \hat{K}^{\mu\alpha} n_\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu \hat{K}^\alpha + (Kn)^{-1} \omega_\mu (Kn)^\mu - \hat{K}^\mu \omega_\mu \right) \Delta^\nu +$$

$$+ p_\nu \hat{W} \left(L \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \hat{K}^\alpha n_\sigma + (Kn)^{-1} \omega_\mu (Kn) - \hat{K} \omega_\mu \right) \Delta^{\mu\nu} > =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{2}L(L-1)p_\nu \hat{W} \left((L-2) \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \hat{K}^{\mu\nu\alpha} n_\sigma + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} \hat{K}^{\nu\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} \hat{K}^{\mu\alpha} - \hat{K}^{\mu\nu} \omega_{\mu} \Big) + L p_{\nu} \hat{W} \Big((L-1) \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} \hat{K}^{\mu\alpha} n_{\sigma} + \\
& + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} \hat{K}^{\alpha} - \hat{K}^{\mu} \omega_{\mu} \Big) \Delta^{\nu} + p_{\nu} \hat{W} \Big(L \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} \hat{K}^{\alpha} n_{\sigma} - \omega_{\mu} \Big) \Delta^{\mu\nu} > .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Часть данного выражения, содержащая $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ должна быть отнята из (3.15), а часть, содержащая связность - из (3.18). После этого последние в сумме примут вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < \frac{1}{3} L \hat{W} \hat{K}^{\alpha} \Delta^{\mu\nu} n_{\sigma} (p_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - p_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}) + \frac{1}{6} L(L-1) \times \\
& \times \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^{\alpha} n_{\sigma} (p_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - p_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}) + \frac{1}{6} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} (p_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - p_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma}) - \\
& - \frac{1}{6} L \hat{W} \hat{K}^{\mu} \Delta^{\nu} (p_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - p_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma}) - \frac{1}{2} L^2 \hat{W} (p_{\mu} \omega_{\nu} - p_{\nu} \omega_{\mu}) \hat{K}^{\mu} \hat{K}^{\nu} >,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

что может быть (в отличие от (3.15) и (3.18) !) представлено как первый исчезающий член в разложении по слабому гравитационному полю от следующего ковариантного выражения:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < -\frac{1}{2} L^2 \hat{W} F_{\mu\nu} \hat{K}^{\mu} \hat{K}^{\nu} + \frac{1}{6} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \\
& + \frac{1}{6} L^2 \hat{W} \hat{K}^{\mu} \hat{K}^{\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{3} L \hat{W} \hat{K}^{\alpha} \Delta^{\mu\nu} n_{\sigma} R^{\sigma}_{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{6} L(L-1) \times \\
& \times \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^{\alpha} n_{\sigma} R^{\sigma}_{\mu\alpha\nu} > .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Оно и является ответом для рассматриваемых диаграмм. Далее мы постараемся записать данное выражение в наиболее компактной форме. Вначале мы учтем, что согласно правилам, сформулированным в приложении (5.5),

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + L^2 \hat{W} \hat{K}^{\mu} \hat{K}^{\nu} R_{\mu\nu} = \\
& = \hat{W} \Delta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (L-2)(L-3) \hat{W}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

и, следовательно, результат можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < -\frac{1}{2} L^2 \hat{W} \hat{K}^{\mu} F_{\mu\nu} \hat{K}^{\nu} + \frac{1}{3} L \hat{W} \hat{K}^{\alpha} \Delta^{\mu\nu} n_{\sigma} R^{\sigma}_{\mu\alpha\nu} + \\
& + \frac{1}{6} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^{\alpha} n_{\sigma} R^{\sigma}_{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{12} (L-2)(L-3) \hat{W}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \\
& + \frac{1}{4} L(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} > .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Для дальнейшего упрощения записи результата оказывается удобным использование следующих простых тождеств:

$$\begin{aligned}
(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)(Kn) &= L n_\rho R^\rho_{\alpha\mu\nu} (Kn)^\alpha + F_{\mu\nu}(Kn) - (Kn)F_{\mu\nu}; \\
(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)(Kn)^\beta &= (L-1) n_\rho R^\rho_{\alpha\mu\nu} (Kn)^{\alpha\beta} + R^\beta_{\alpha\mu\nu} (Kn)^\alpha + \\
&+ F_{\mu\nu}(Kn)^\beta - (Kn)^\beta F_{\mu\nu}; \\
(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)(Kn)^{\beta\gamma} &= (L-2) n_\rho R^\rho_{\alpha\mu\nu} (Kn)^{\alpha\beta\gamma} + R^\beta_{\alpha\mu\nu} (Kn)^{\alpha\gamma} + \\
&+ R^\gamma_{\alpha\mu\nu} (Kn)^{\alpha\beta} + F_{\mu\nu}(Kn)^{\beta\gamma} - (Kn)^{\beta\gamma} F_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

(В данном случае нам будет необходима только первое из них, однако при анализе оставшихся слагаемых также применяются и оставшиеся)

Тогда результат может быть окончательно представлен как

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < -\frac{1}{2}L^2 \hat{W} \hat{F}_{\mu\nu}(Kn)^\mu \hat{K}^\nu + \frac{1}{3}L \hat{W} \hat{K}^\alpha \Delta^{\mu\nu} n_\sigma R^\sigma_{\mu\alpha\nu} + \\
+ \frac{1}{3}L^2(L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \hat{K}^\alpha n_\sigma R^\sigma_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{6}(L-2)(L-3) \hat{W}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} > .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Аналогично производится рассмотрение оставшихся диаграмм. Однако необходимо заметить, что вычисление диаграмм соответствующих членам квадратичным по тензору кривизны (RR), приведенных на Рис.5 является весьма затруднительным.

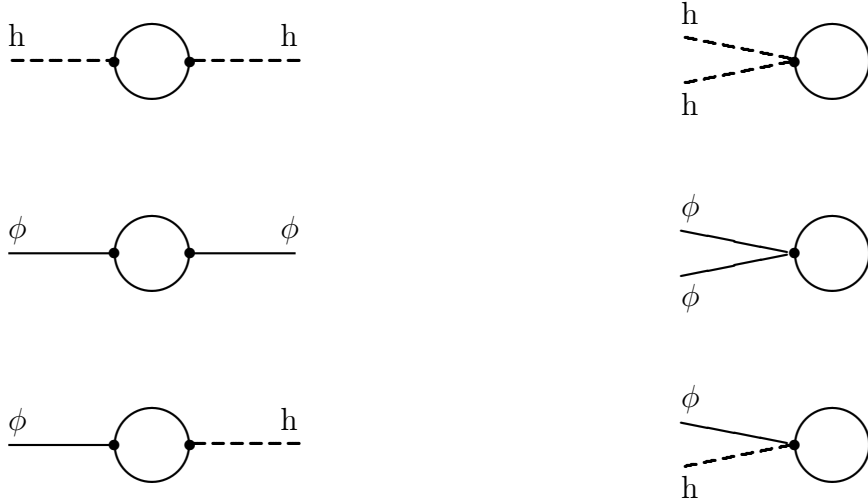


Рис. 5: Диаграммы для вычисления RR вклада в эффективное действие неминимального оператора

Мы не будем в деталях рассматривать вычисление данных диаграмм, мы только укажем на принципиальные трудности и пути их решения. Дело в том, что хотя в пределе

слабого поля весьма несложно выписать выражения для каждой из них по аналогии с рассмотренным ранее примером, при попытке восстановить ковариантное выражение по слабопольному пределу мы сталкиваемся со значительными сложностями: Результат на первый взгляд совершенно не может быть представлен как слабопольный предел от ковариантного выражения. Причиной этого является огромное количество неоднозначностей в записи величин, содержащих только матрицы построенные из $K^{\mu\nu\dots\alpha}_i{}^j$. Тождества сформулированные в приложении 5.5 приводят к тому, что одно и тоже выражение может быть записано множеством различных способов.

Для построения ковариантного результата необходимо произвести ряд вспомогательных действий:

1. Несложно видеть, что выражение для диаграмм



за вычетом выражений, ковариантизирующих только *одну* производную в диаграммах



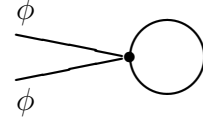
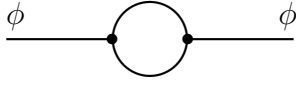
может быть записано в виде произведения ковариантного выражения на производные от $K^{\mu\nu\dots\alpha}_i{}^j$. Его конкретная форма, полученная после достаточно длительных вычислений, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} tr < - \frac{1}{60} L(L-1)(L-2)(L-3) \delta^\gamma (\partial_\mu (Kn)(Kn)^{-1}) \times \\
& \times (Kn)^{\mu\nu\alpha\beta} (Kn)^{-1} n_\rho \partial_\nu R^\rho_{\alpha\beta\gamma} + L(L-1)(L-2) \delta^{\alpha\beta} (\partial_\nu (Kn)(Kn)^{-1}) \times \\
& \times (Kn)^{\mu\nu\gamma} (Kn)^{-1} n_\rho \left(\frac{7}{60} \partial_\alpha R^\rho_{\gamma\beta\mu} - \frac{1}{60} \partial_\mu R^\rho_{\beta\gamma\alpha} \right) + L(L-1) \times \\
& \times \delta^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha (Kn)(Kn)^{-1}) (Kn)^{\mu\nu} (Kn)^{-1} n_\rho \left(\frac{9}{20} \partial_\beta R^\rho_{\nu\gamma\mu} + \frac{3}{20} \partial_\mu R^\rho_{\gamma\beta\nu} \right) + \\
& + \frac{3}{5} L \delta^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu (Kn)(Kn)^{-1}) (Kn)^\gamma (Kn)^{-1} n_\rho \partial_\nu R^\rho_{\alpha\beta\gamma} > . \tag{3.29}
\end{aligned}$$

2. В силу того, что сумма диаграмм в 1. является "наполовину" ковариантной, то и сумма диаграмм



за вычетом выражений ковариантизирующих *обе* производные в диаграммах



также должна являться "наполовину"ковариантной. Еще более сложные вычисления в данном случае приводят к выражению

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} < L^2(L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta^\delta \hat{K}^\gamma n_\sigma n_\rho \times \\
& \times \left(-\frac{11}{240} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\gamma\nu\delta} + \frac{1}{80} \Gamma_{\nu\gamma}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\alpha\beta\delta} \right) + L^2 \hat{K}^\delta \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{K}^\gamma n_\sigma n_\rho \times \\
& \times \left(\frac{3}{10} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\alpha\nu\delta} - \frac{1}{10} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\gamma\nu\delta} \right) + L^2(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^\delta n_\sigma n_\rho \times \\
& \times \left(\frac{3}{20} \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\nu\mu\beta} - \frac{1}{8} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\beta\delta\gamma} + \frac{3}{40} \Gamma_{\mu\delta}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\gamma\beta\nu} - \frac{1}{40} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\nu R^\rho_{\delta\mu\gamma} \right) + \\
& + L^2(L-1)(L-2) \hat{K}^{\mu\nu\alpha} \Delta^{\beta\gamma} \hat{K}^\delta n_\sigma n_\rho \left(\frac{1}{40} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\delta\nu\gamma} + \frac{1}{30} \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \partial_\gamma R^\rho_{\delta\beta\nu} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{90} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{15} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\mu\delta\nu} + \frac{3}{40} \Gamma_{\nu\delta}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\beta\gamma\alpha} \right) + \frac{1}{48} L^2(L-1)^2 \times \\
& \times (L-2) \hat{K}^{\beta\gamma} \Delta^\delta K^{\mu\nu\alpha} n_\sigma n_\rho \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\mu\delta\nu} + L^2(L-1)^2 \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^\gamma \hat{K}^{\alpha\beta} \times \\
& \times n_\sigma n_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \left(\frac{5}{48} \partial_\delta R^\rho_{\alpha\gamma\beta} - \frac{1}{48} \partial_\beta R^\rho_{\gamma\alpha\delta} \right) + \frac{1}{18} L^2(L-1)^2(L-2) \times \\
& \times \hat{K}^{\mu\nu\alpha} \Delta^\beta \hat{K}^{\gamma\delta} n_\sigma n_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\delta\beta\gamma} + L^2 \hat{K}^\mu \Delta^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^\nu n_\rho \left(\frac{1}{8} \Gamma_{\gamma\nu}^\rho \partial_\alpha R_{\beta\mu} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{16} \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \partial_\alpha R^\sigma_{\gamma\beta\mu} - \frac{3}{32} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\sigma R^\rho_{\nu\alpha\mu} + \frac{1}{32} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\alpha R_{\beta\gamma} - \frac{5}{32} \Gamma_{\gamma\nu}^\rho \partial_\mu R_{\alpha\beta} \right) + \\
& + \frac{1}{12} L^2(L-1)^2 \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^\gamma \hat{K}^{\alpha\beta} n_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma R^\rho_{\beta\gamma\alpha} + L^2(L-1)(L-2) \times \\
& \times \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} \Delta^\mu \hat{K}^\nu n_\rho \left(-\frac{1}{64} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\alpha R_{\beta\gamma} - \frac{9}{192} \Gamma_{\gamma\nu}^\rho \partial_\mu R_{\alpha\beta} + \frac{1}{48} \Gamma_{\gamma\nu}^\rho \partial_\alpha R_{\beta\mu} + \right. \\
& \left. + \frac{5}{64} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\sigma R^\rho_{\nu\mu\alpha} + \frac{1}{24} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \partial_\alpha R^\rho_{\nu\mu\sigma} + \frac{1}{96} \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \partial_\alpha R^\sigma_{\gamma\beta\mu} \right) + L^2(L-1) \times \\
& \times \hat{K}^{\alpha\beta} \Delta^{\mu\nu} \hat{K}^\gamma n_\rho \left(\frac{1}{24} \Gamma_{\gamma\nu}^\rho \partial_\alpha R_{\mu\beta} + \frac{1}{24} \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho \partial_\mu R_{\nu\beta} - \frac{1}{48} \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \partial_\alpha R_{\mu\nu} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{12} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma R^\rho_{\nu\gamma\mu} - \frac{1}{96} \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho \partial_\alpha R^\sigma_{\nu\beta\mu} + \frac{1}{32} \Gamma_{\sigma\beta}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\gamma\nu\alpha} + \frac{1}{32} \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho \partial_\mu R^\sigma_{\beta\alpha\nu} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{16} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\mu R^\rho_{\gamma\nu\sigma} - \frac{1}{8} \Gamma_{\gamma\nu}^\rho \partial_\mu R^\rho_{\alpha\beta} \right) + L(L-1)(L-2)(L-3) \times \\
& \times (L-4) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} n_\rho \left(-\frac{17}{1440} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\alpha R_{\beta\gamma} - \frac{7}{1440} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\gamma R^\rho_{\mu\sigma\nu} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L(L-1)(L-2)(L-3)\hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta}\left(-\frac{3}{160}\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}\partial_{\alpha}R_{\beta\nu}-\frac{1}{480}\Gamma_{\rho\beta}^{\sigma}\partial_{\alpha}R^{\rho}{}_{\nu\mu\sigma}+\right. \\
& \left.+\frac{1}{180}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\partial_{\alpha}R_{\rho\beta}+\frac{3}{160}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\partial_{\rho}R_{\alpha\beta}\right)>.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3. Вычитая из (3.30) выражение, ковариантизирующее оставшуюся производную в (3.29), мы получаем результат для слагаемых квадратичных по тензору кривизны приведенный в формуле (3.32) (часть RR).

Итак, собирая результаты вычислений для различных групп диаграмм, в итоге получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\infty}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \operatorname{tr} \int d^4x \sqrt{-g} < Flat + WR + \\
+ SR + SSR + FF + FR + RR >,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

где

$$\begin{aligned}
Flat = & \frac{1}{4} \hat{S}^4 - \hat{W} \hat{S}^2 + \frac{1}{2} \hat{W}^2 + \hat{S} \hat{N} - \hat{M} + (L-2) \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{W}^{\mu} - \\
& - L \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{W} \hat{K}^{\mu} + \frac{1}{3} \left((L-1) \nabla_{\mu} \hat{S}^{\mu} \hat{S} \hat{S} - L \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{K}^{\mu} \hat{S} \hat{S} - \right. \\
& - (L-1) \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{S} \hat{S}^{\mu} + L \nabla_{\mu} \hat{S} \hat{S} \hat{S} \hat{K}^{\mu} \left. \right) - \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \hat{S} \nabla_{\nu} \hat{S} \Delta^{\mu\nu} - \\
& - \frac{1}{4} (L-1)(L-2) \nabla_{\mu} \hat{S} \nabla_{\nu} \hat{S}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} L(L-1) \nabla_{(\mu} \hat{S} \nabla_{\nu)} \hat{S}^{\nu} \hat{K}^{\mu};
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
WR = & -\frac{1}{2} L^2 \hat{W} \hat{F}_{\mu\nu} (Kn)^{\mu} \hat{K}^{\nu} + \frac{1}{3} L \hat{W} \hat{K}^{\alpha} \Delta^{\mu\nu} n_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\alpha\nu} + \\
& + \frac{1}{3} L^2 (L-1) \hat{W} \hat{K}^{\mu\nu} \hat{K}^{\alpha} n_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{6} (L-2)(L-3) \hat{W}^{\mu\nu} R_{\mu\nu};
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
SR = & -\frac{1}{6} L^2 (L-1) \hat{S} \nabla_{\mu} \hat{F}_{\alpha\nu} (Kn)^{\mu\nu} \hat{K}^{\alpha} + \frac{2}{3} L \hat{S} \nabla_{\mu} \hat{F}_{\nu\alpha} (Kn)^{\alpha} \Delta^{\mu\nu} + \\
& - \frac{1}{12} (L-1)(L-2)(L-3) \hat{S}^{\alpha\mu\nu} \nabla_{\alpha} R_{\mu\nu} - \frac{1}{12} L^2 (L-1)(L-2) \hat{S} \times \\
& \times \hat{K}^{\mu\nu\alpha} \hat{K}^{\beta} n_{\sigma} \nabla_{\alpha} R^{\sigma}{}_{\mu\beta\nu} + L(L-1) \hat{S} \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta} n_{\sigma} \left(\frac{5}{12} \nabla_{\alpha} R^{\sigma}{}_{\nu\beta\mu} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{12} \nabla_{\mu} R^{\sigma}{}_{\alpha\nu\beta} \right) - \frac{1}{2} L \hat{S} \hat{K}^{\beta} \Delta^{\mu\nu\alpha} n_{\sigma} \nabla_{\alpha} R^{\sigma}{}_{\mu\beta\nu};
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
SSR = & -\frac{1}{2} L(L-1) \hat{S} \hat{S}^{\mu} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{K}^{\nu} + \frac{1}{2} L^2 \hat{S} \hat{S} \hat{F}_{\mu\nu} (Kn)^{\mu} \hat{K}^{\nu} + \\
& + \frac{1}{12} (L-1)(L-2) \hat{S} \hat{S}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{3} L(L-1) \hat{S} \hat{S}^{\mu} \hat{K}^{\nu} R_{\mu\nu} + \\
& + \frac{1}{6} \hat{S} \hat{S} \Delta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} L(L-1)(L-2) \hat{S} \hat{S}^{\mu\nu} \hat{K}^{\alpha} n_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\alpha\nu} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3}(L-1) \hat{S} \hat{S}^\alpha \Delta^{\mu\nu} n_\sigma R^\sigma{}_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{3}L^2(L-1) \hat{S} \hat{S} \hat{K}^{\mu\nu} \hat{K}^\alpha n_\sigma R^\sigma{}_{\mu\alpha\nu} - \\
& - \frac{1}{3}L \hat{S} \hat{S} \hat{K}^\alpha \Delta^{\mu\nu} n_\sigma R^\sigma{}_{\mu\alpha\nu};
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
FF &= -\frac{1}{24}L^2(L-1)^2 \hat{K}^{\mu\nu} F_{\mu\alpha} \hat{K}^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} + \frac{1}{24}L^2 \hat{K}^\mu F_{\beta\nu} \Delta^{\alpha\beta} \hat{K}^\nu F_{\alpha\mu} - \\
& - \frac{5}{24}L^2 \hat{K}^\mu F_{\beta\mu} \Delta^{\alpha\beta} \hat{K}^\nu F_{\alpha\nu} - \frac{1}{48}L^2(L-1) \hat{K}^\mu F_{\beta\nu} \Delta^\nu \hat{K}^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} - \\
& - \frac{1}{48}L^2(L-1) \hat{K}^\mu F_{\beta\mu} \Delta^\nu \hat{K}^{\alpha\beta} F_{\alpha\nu};
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
FR &= \frac{1}{40}L^2(L-1)(L-2) \Delta^\mu \hat{K}^\nu \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} F_{\mu\alpha} n_\sigma R^\sigma{}_{\gamma\beta\nu} - L^2(L-1) \times \\
& \times (L-2) \Delta^\nu \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^\mu n_\sigma \left(\frac{1}{60}R^\sigma{}_{\beta\gamma\mu} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{12}R^\sigma{}_{\beta\gamma\nu} F_{\alpha\mu} \right) + L^2(L-1)^2 \times \\
& \times \Delta^\alpha \hat{K}^{\beta\gamma} \hat{K}^{\mu\nu} n_\sigma \left(\frac{1}{60}R^\sigma{}_{\beta\mu\gamma} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{20}R^\sigma{}_{\alpha\mu\gamma} F_{\nu\beta} + \frac{1}{15}R^\sigma{}_{\gamma\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{60}R^\sigma{}_{\mu\nu\gamma} F_{\alpha\beta} \right) + L^2(L-1) \Delta^{\alpha\beta} \hat{K}^{\gamma\delta} \hat{K}^\mu n_\sigma \left(\frac{4}{15}R^\sigma{}_{\delta\beta\gamma} F_{\alpha\mu} - \frac{1}{30}R^\sigma{}_{\beta\delta\alpha} \times \right. \\
& \times F_{\gamma\mu} - \frac{1}{15}R^\sigma{}_{\alpha\gamma\mu} F_{\beta\delta} - \frac{1}{30}R^\sigma{}_{\gamma\alpha\mu} F_{\beta\delta} \left. \right) + L^2(L-1) \Delta^{\alpha\beta} \hat{K}^\gamma \hat{K}^{\mu\nu} n_\sigma \times \\
& \times \left(\frac{7}{60}R^\sigma{}_{\alpha\beta\mu} F_{\gamma\nu} - \frac{11}{60}R^\sigma{}_{\beta\mu\gamma} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{5}R^\sigma{}_{\mu\alpha\gamma} F_{\beta\nu} + \frac{1}{60}R^\sigma{}_{\mu\alpha\nu} F_{\gamma\beta} \right) + \\
& + L^2 \Delta^{\mu\alpha\beta} \hat{K}^\gamma \hat{K}^\nu n_\sigma \left(\frac{7}{20}R^\sigma{}_{\alpha\gamma\beta} F_{\nu\mu} + \frac{1}{10}R^\sigma{}_{\alpha\beta\nu} F_{\gamma\mu} \right);
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
RR &= \frac{1}{10}L^2 \hat{K}^\delta \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{K}^\gamma n_\sigma n_\rho R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} R^\rho{}_{\mu\nu\delta} + L^2(L-1)^2(L-2) \hat{K}^{\beta\gamma\delta} \times \\
& \times \Delta^\alpha \hat{K}^{\mu\nu} n_\sigma n_\rho \left(\frac{2}{45}R^\rho{}_{\alpha\delta\nu} R^\sigma{}_{\beta\mu\gamma} - \frac{1}{120}R^\rho{}_{\delta\alpha\nu} R^\sigma{}_{\beta\mu\gamma} \right) + L^2(L-1) \hat{K}^\delta \times \\
& \times \Delta^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^{\mu\nu} n_\sigma n_\rho \left(-\frac{1}{10}R^\rho{}_{\mu\gamma\nu} R^\sigma{}_{\alpha\delta\beta} + \frac{1}{15}R^\rho{}_{\delta\alpha\nu} R^\sigma{}_{\beta\mu\gamma} + \frac{1}{60}R^\rho{}_{\beta\delta\nu} R^\sigma{}_{\gamma\mu\alpha} \right) + \\
& + L^2(L-1)^2 \hat{K}^{\gamma\delta} \Delta^{\alpha\beta} \hat{K}^{\mu\nu} n_\sigma n_\rho \left(-\frac{1}{20}R^\rho{}_{\mu\beta\nu} R^\sigma{}_{\delta\alpha\gamma} + \frac{1}{180}R^\rho{}_{\alpha\nu\beta} R^\sigma{}_{\gamma\delta\mu} - \right. \\
& - \frac{7}{360}R^\rho{}_{\mu\gamma\nu} R^\sigma{}_{\alpha\delta\beta} - \frac{1}{240}R^\rho{}_{\delta\beta\nu} R^\sigma{}_{\gamma\alpha\mu} - \frac{1}{120}R^\rho{}_{\beta\gamma\nu} R^\sigma{}_{\alpha\delta\mu} - \frac{1}{30}R^\rho{}_{\delta\beta\nu} \times \\
& \times R^\sigma{}_{\alpha\gamma\mu} \left. \right) + L^2(L-1)(L-2) \hat{K}^\delta \Delta^{\mu\nu} \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} n_\sigma n_\rho \left(-\frac{1}{30}R^\rho{}_{\gamma\nu\beta} R^\sigma{}_{\alpha\delta\mu} - \right. \\
& - \frac{1}{180}R^\rho{}_{\mu\gamma\nu} R^\sigma{}_{\alpha\beta\delta} + \frac{1}{180}R^\rho{}_{\mu\gamma\delta} R^\sigma{}_{\alpha\beta\nu} \left. \right) + L^2(L-1)^2(L-2) \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^\delta \times \\
& \times \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} n_\sigma n_\rho \left(\frac{1}{45}R^\rho{}_{\mu\gamma\nu} R^\sigma{}_{\alpha\beta\delta} - \frac{1}{80}R^\rho{}_{\beta\nu\gamma} R^\sigma{}_{\mu\alpha\delta} + \frac{1}{90}R^\rho{}_{\beta\nu\gamma} R^\sigma{}_{\delta\alpha\mu} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L^2(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^\delta n_\sigma n_\rho \left(\frac{7}{120} R^\rho_{\beta\gamma\nu} R^\sigma_{\mu\alpha\delta} - \frac{3}{40} R^\rho_{\beta\gamma\delta} R^\sigma_{\mu\alpha\nu} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{120} R^\rho_{\delta\gamma\nu} R^\sigma_{\alpha\beta\mu} \right) + L^2(L-1)(L-2) \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} \Delta^{\mu\nu} \hat{K}^\delta n_\sigma n_\rho \left(-\frac{1}{24} \times \right. \\
& \times R^\rho_{\mu\gamma\nu} R^\sigma_{\alpha\beta\delta} - \frac{1}{180} R^\rho_{\nu\gamma\delta} R^\sigma_{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{360} R^\rho_{\delta\gamma\nu} R^\sigma_{\alpha\beta\mu} \Big) - \frac{1}{120} L^2 \times \\
& \times (L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta^\delta \hat{K}^\gamma n_\sigma n_\rho R^\rho_{\alpha\beta\gamma} R^\sigma_{\mu\nu\delta} - \frac{1}{80} L^2 \times \\
& \times (L-1)^2(L-2)(L-3) \hat{K}^{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{K}^{\mu\nu} n_\sigma n_\rho R^\rho_{\beta\gamma\mu} R^\sigma_{\alpha\delta\nu} + \\
& + L^2 \hat{K}^\mu \Delta^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^\nu n_\rho \left(-\frac{1}{8} R_{\beta\gamma} R^\rho_{\nu\alpha\mu} + \frac{3}{20} R_{\beta\gamma} R^\rho_{\mu\alpha\nu} + \frac{3}{40} R_{\alpha\mu} R^\rho_{\beta\gamma\nu} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{40} R^\sigma_{\beta\gamma\mu} R^\rho_{\nu\alpha\sigma} - \frac{3}{20} R^\sigma_{\alpha\beta\mu} R^\rho_{\gamma\nu\sigma} + \frac{1}{10} R^\sigma_{\alpha\beta\nu} R^\rho_{\gamma\mu\sigma} \right) + L^2(L-1) \times \\
& \times \hat{K}^\gamma \Delta^{\alpha\beta} \hat{K}^{\mu\nu} n_\rho \left(\frac{1}{20} R_{\alpha\nu} R^\rho_{\gamma\beta\mu} + \frac{1}{20} R_{\alpha\gamma} R^\rho_{\mu\beta\nu} + \frac{1}{10} R_{\alpha\beta} R^\rho_{\mu\gamma\nu} + \frac{1}{20} \times \right. \\
& \times R^\sigma_{\alpha\nu\gamma} R^\rho_{\sigma\beta\mu} - \frac{1}{60} R^\sigma_{\mu\alpha\nu} R^\rho_{\beta\sigma\gamma} + \frac{1}{10} R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} R^\rho_{\mu\sigma\nu} - \frac{1}{12} R^\sigma_{\alpha\beta\nu} R^\rho_{\mu\sigma\gamma} \Big) + \\
& + L^2(L-1)^2 \hat{K}^{\alpha\beta} \Delta^\gamma \hat{K}^{\mu\nu} n_\rho \left(\frac{1}{60} R_{\alpha\mu} R^\rho_{\beta\nu\gamma} - \frac{1}{20} R_{\alpha\mu} R^\rho_{\gamma\nu\beta} + \frac{1}{120} \times \right. \\
& \times R_{\alpha\beta} R^\rho_{\mu\nu\gamma} + \frac{3}{40} R_{\alpha\gamma} R^\rho_{\nu\beta\mu} + \frac{1}{20} R^\sigma_{\gamma\mu\alpha} R^\rho_{\nu\sigma\beta} + \frac{1}{120} R^\sigma_{\alpha\mu\gamma} R^\rho_{\beta\nu\sigma} - \\
& - \frac{1}{40} R^\sigma_{\alpha\mu\gamma} R^\rho_{\sigma\nu\beta} + \frac{1}{40} R^\sigma_{\alpha\mu\beta} R^\rho_{\sigma\nu\gamma} - \frac{1}{20} R^\sigma_{\alpha\mu\beta} R^\rho_{\gamma\nu\sigma} - \frac{1}{40} R^\sigma_{\mu\beta\nu} \times \\
& \times R^\rho_{\gamma\sigma\alpha} \Big) + L^2(L-1) \hat{K}^{\alpha\beta} \Delta^{\mu\nu} \hat{K}^\gamma n_\rho \left(\frac{1}{20} R^\sigma_{\mu\nu\beta} R^\rho_{\gamma\sigma\alpha} - \frac{7}{60} R^\sigma_{\beta\mu\alpha} \times \right. \\
& \times R^\rho_{\gamma\nu\sigma} + \frac{1}{20} R^\sigma_{\beta\mu\alpha} R^\rho_{\sigma\nu\gamma} + \frac{1}{10} R^\sigma_{\mu\beta\gamma} R^\rho_{\nu\alpha\sigma} + \frac{1}{60} R^\sigma_{\beta\mu\gamma} R^\rho_{\alpha\nu\sigma} + \\
& + \frac{7}{120} R_{\alpha\beta} R^\rho_{\nu\gamma\mu} + \frac{11}{60} R_{\beta\mu} R^\rho_{\nu\alpha\gamma} \Big) + L^2(L-1)(L-2) \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} \Delta^\mu \hat{K}^\nu n_\rho \times \\
& \times \left(\frac{7}{240} R_{\alpha\beta} R^\rho_{\gamma\mu\nu} + \frac{7}{240} R_{\alpha\nu} R^\rho_{\beta\gamma\mu} - \frac{1}{60} R_{\alpha\mu} R^\rho_{\beta\gamma\nu} - \frac{1}{24} R^\sigma_{\alpha\beta\nu} R^\rho_{\sigma\gamma\mu} + \right. \\
& + \frac{1}{15} R^\sigma_{\alpha\beta\nu} R^\rho_{\mu\gamma\sigma} + \frac{1}{40} R^\sigma_{\alpha\beta\mu} R^\rho_{\sigma\gamma\nu} + \frac{1}{40} R_{\beta\gamma} R^\rho_{\nu\mu\alpha} + \frac{1}{48} R^\sigma_{\beta\gamma\mu} \times \\
& \times R^\rho_{\nu\alpha\sigma} \Big) + L^2(L-1)^2(L-2) \hat{K}^{\alpha\beta\gamma} \hat{K}^{\mu\nu} n_\rho \left(-\frac{7}{240} R_{\alpha\mu} R^\rho_{\beta\gamma\nu} + \frac{1}{240} \times \right. \\
& \times R_{\beta\gamma} R^\rho_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{40} R^\sigma_{\alpha\mu\beta} R^\rho_{\nu\gamma\sigma} \Big) + L(L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} \times \\
& \times \left(\frac{1}{180} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} + \frac{7}{720} R^\sigma_{\alpha\beta\rho} R^\rho_{\mu\nu\sigma} \right), \tag{3.38}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta^\mu &\equiv -L \hat{K}^\mu; \\
\Delta^{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{2}L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} + L^2 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu)}; \\
\Delta^{\mu\nu\alpha} &\equiv -\frac{1}{6}L(L-1)(L-2) \hat{K}^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}L^2(L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha)} + \frac{1}{2}L^2 \times \\
&\quad \times (L-1) \hat{K}^{(\alpha)} \hat{K}^{\mu\nu)} - L^3 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu} \hat{K}^{\alpha)}; \\
\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} &\equiv -\frac{1}{24}L(L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{6}L^2(L-1) \times \\
&\quad \times (L-2) \hat{K}^{(\mu\nu\alpha} \hat{K}^{\beta)} + \frac{1}{6}L^2(L-1)(L-2) \hat{K}^{(\beta} \hat{K}^{\mu\nu\alpha)} + \\
&\quad + \frac{1}{4}L^2(L-1)^2 \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha\beta)} - \frac{1}{2}L^3(L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha} \hat{K}^{\beta)} - \\
&\quad - \frac{1}{2}L^3(L-1) \hat{K}^{\alpha} \hat{K}^{\mu\nu} \hat{K}^{\beta)} - \frac{1}{2}L^3(L-1) \hat{K}^{\alpha} \hat{K}^{\beta} \hat{K}^{\mu\nu)} + \\
&\quad + L^4 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu} \hat{K}^{\alpha} \hat{K}^{\beta)},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

причем симметризация производится по всем греческим индексам и

$$A^{(i_1 i_2 \dots i_n)} \equiv \frac{1}{n!} (A^{i_1 i_2 \dots i_n} + A^{i_2 i_1 \dots i_n} + \dots + A^{i_n i_{n-1} \dots i_1}). \tag{3.40}$$

Несмотря на громоздкость полученных результатов, их обработка может быть быстро и эффективно произведена с использованием вычислительных машин, например, при помощи тензорного пакета для системы REDUCE. Результаты соответствующих вычислений для ряда частных случаев приводятся в следующем параграфе.

В качестве замечания также необходимо отметить, что при получении результата (3.31) отбрасывались полные производные, поэтому при вычислениях в конкретных случаях всегда необходимо выполнять подстановки

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} = 2R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\mu\beta\nu} \rightarrow 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - R^2. \tag{3.41}$$

4.3 Частные случаи

4.3.1 Минимальный оператор

Минимальный оператор порядка $2l$ (в форме записи с симметризованным кинетическим членом) может быть рассмотрен как частный случай неминимального, если $L = 2l$ и $K^{\mu\nu\dots\alpha}{}_i{}^j = K_0^{\mu\nu\dots\alpha} \delta_i^j$. В данном случае

$$\begin{aligned}
(K_0 n) &= 1; & (K_0 n)^{-1} &= 1; \\
(K_0 n)^\mu &= n^\mu; & (K_0 n)^{\mu\nu} &= \frac{1}{(2l-1)} (g^{\mu\nu} + (2l-2)n^\mu n^\nu);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(K_0 n)^{\mu\nu\alpha} &= \frac{1}{(2l-1)} (g^{\mu\nu} n^\alpha + g^{\mu\alpha} n^\nu + g^{\nu\alpha} n^\mu + (2l-4) n^\mu n^\nu n^\alpha); \\
(K_0 n)^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{(2l-1)(2l-3)} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} + \\
&+ (2l-4) (g^{\alpha\beta} n^\mu n^\nu + g^{\mu\nu} n^\alpha n^\beta + g^{\alpha\mu} n^\beta n^\nu + g^{\beta\nu} n^\alpha n^\mu + g^{\alpha\nu} n^\beta n^\mu + \\
&+ g^{\beta\mu} n^\alpha n^\nu) + (2l-4)(2l-6) n^\mu n^\nu n^\alpha n^\beta).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Подставляя данные величины в (3.24) и используя правила интегрирования по углам, указанные в приложении 5.5, после несложных вычислений получаем результат (2.29) для однопетлевого эффективного действия произвольного минимального оператора с симметризованным кинетическим членом. Таким образом, мы установили соответствие между результатами для минимального и неминимального операторов.

4.3.2 Векторное поле

В качестве другого примера рассмотрим оператор

$$D = \square \delta_\alpha^\beta - \lambda \nabla_\alpha \nabla^\beta + P_\alpha^\beta, \tag{3.43}$$

причем $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$.

Запишем его в форме (3.1). Для этого необходимо произвести симметризацию второго слагаемого по α и β . Тогда, учитывая, что в данном случае квантовое поле является векторным, находим, что

$$D = \left(g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta - \frac{\lambda}{2} (g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\nu + g^{\nu\beta} \delta_\alpha^\mu) \right) \nabla_\mu \nabla_\nu + P_\alpha^\beta + \frac{\lambda}{2} R_\alpha^\beta. \tag{3.44}$$

Таким образом отличными от 0 являются только

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta &= g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta - \frac{\lambda}{2} (g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\nu + g^{\nu\beta} \delta_\alpha^\mu); \\
W_\alpha{}^\beta &= P_\alpha^\beta + \frac{\lambda}{2} R_\alpha^\beta
\end{aligned} \tag{3.45}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
(Kn)_\alpha{}^\beta &= \delta_\alpha^\beta - \lambda n_\alpha n^\beta; \\
(Kn)^{-1}{}_\alpha{}^\beta &= \delta_\alpha^\beta + \gamma n_\alpha n^\beta, \quad \text{где} \quad \gamma \equiv \frac{\lambda}{1-\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Подставляя данные величины в (3.31) и учитывая (2.77), получаем результат

$$\begin{aligned}
\Gamma_\infty^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\left(\frac{1}{24} \gamma^2 + \frac{1}{4} \gamma + \frac{1}{2} \right) P_{\mu\nu} P^{\mu\nu} + \right. \\
&+ \frac{1}{48} \gamma^2 P^2 + \left(\frac{1}{12} \gamma^2 + \frac{1}{3} \gamma \right) R_{\mu\nu} P^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{24} \gamma^2 + \frac{1}{12} \gamma + \frac{1}{6} \right) R P +
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{24} \gamma^2 + \frac{1}{12} \gamma - \frac{4}{15} \right) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{48} \gamma^2 + \frac{1}{12} \gamma + \frac{7}{60} \right) R^2, \quad (3.47)$$

полностью совпадающий с выражениями, полученными в работах [9] и [52]. (Здесь $P \equiv P_\alpha{}^\alpha$.)

Для проверки результата (3.31) также было произведено вычисление однопетлевых расходимостей для квадрата оператора (3.43), который записывается как

$$\begin{aligned} D^2_\alpha{}^\beta &= \delta_\alpha{}^\beta \square^2 - \lambda \nabla_\alpha \nabla^\beta \square + 2P_\alpha{}^\beta \square - \lambda \square \nabla_\alpha \nabla^\beta + \lambda^2 \nabla_\alpha \square \nabla^\beta - \\ &- \lambda P_\alpha{}^\mu \nabla_\mu \nabla^\beta - \lambda P_\mu{}^\beta \nabla_\alpha \nabla^\mu + (\square P_\alpha{}^\beta) + 2(\nabla_\mu P_\alpha{}^\beta) \nabla^\mu - \lambda (\nabla_\alpha \nabla_\mu P^{\mu\beta}) - \\ &- \lambda (\nabla_\alpha P_\mu{}^\beta) \nabla^\mu - \lambda (\nabla_\mu P^{\mu\beta}) \nabla^\alpha + P_\alpha{}^\mu P_\mu{}^\beta \end{aligned} \quad (3.48)$$

и является неминимальным оператором четвертого порядка.

При помощи коммутации ковариантных производных он может быть представлен в виде (3.1), причем

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu\gamma\delta}{}_\alpha{}^\beta &= \delta_\alpha{}^\beta \frac{1}{3} (g^{\mu\nu} g^{\gamma\delta} + g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} + g^{\mu\delta} g^{\nu\gamma}) + \frac{1}{12} (-2\lambda + \lambda^2) \times \\ &\times \left(g^{\mu\nu} \delta_\alpha{}^\gamma g^{\beta\delta} + g^{\mu\nu} \delta_\alpha{}^\delta g^{\beta\gamma} + g^{\mu\gamma} \delta_\alpha{}^\nu g^{\beta\delta} + g^{\mu\gamma} \delta_\alpha{}^\delta g^{\beta\nu} + g^{\mu\delta} \delta_\alpha{}^\nu g^{\beta\gamma} + \right. \\ &+ g^{\mu\delta} \delta_\alpha{}^\gamma g^{\beta\nu} + g^{\nu\gamma} \delta_\alpha{}^\mu g^{\beta\delta} + g^{\nu\gamma} \delta_\alpha{}^\delta g^{\beta\mu} + g^{\nu\delta} \delta_\alpha{}^\mu g^{\beta\gamma} + g^{\nu\delta} \delta_\alpha{}^\gamma g^{\beta\mu} + \\ &\left. + g^{\gamma\delta} \delta_\alpha{}^\mu g^{\beta\nu} + g^{\gamma\delta} \delta_\alpha{}^\nu g^{\beta\mu} \right); \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$S^{\mu\nu\gamma}{}_\alpha{}^\beta = 0; \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta &= 2P_\alpha{}^\beta g^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} P_\alpha{}^\mu g^{\nu\beta} - \frac{\lambda}{2} P_\alpha{}^\nu g^{\mu\beta} - \frac{\lambda}{2} P^{\beta\mu} \delta_\alpha{}^\nu - \frac{\lambda}{2} P^{\beta\nu} \delta_\alpha{}^\mu + \\ &+ \frac{1}{6} (\lambda - 2\lambda^2) (R_\alpha{}^\mu g^{\nu\beta} + R_\alpha{}^\nu g^{\mu\beta} + R^{\beta\mu} \delta_\alpha{}^\nu + R^{\beta\nu} \delta_\alpha{}^\mu) + \\ &+ \frac{1}{6} (2\lambda - \lambda^2) (R_\alpha{}^{\mu\beta\nu} + R_\alpha{}^{\nu\beta\mu}) + \frac{1}{2} (2\lambda - \lambda^2) g^{\mu\nu} R_\alpha{}^\beta - \frac{2}{3} R^{\mu\nu} \delta_\alpha{}^\beta; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} M_\alpha{}^\beta &= P_{\alpha\mu} P^{\mu\beta} + \frac{\lambda}{2} P_{\alpha\mu} R^{\mu\beta} + \frac{\lambda}{2} P_{\mu\nu} R^\mu{}_\alpha{}^{\nu\beta} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu\gamma\alpha} R^{\mu\nu\gamma\beta} + \\ &+ \frac{1}{6} (\lambda - 2\lambda^2) R_{\alpha\mu} R^{\mu\beta} + \frac{1}{12} (4\lambda + 7\lambda^2) R_{\mu\alpha\nu}{}^\beta R^{\mu\nu} + \frac{1}{4} (2\lambda - \lambda^2) \times \\ &\times R_{\alpha\mu\nu\gamma} R^{\gamma\mu\nu\beta}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

(В данном случае $(Kn)^{-1}{}_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta + (2\gamma + \gamma^2) n_\alpha n^\beta$.)

Вычислений по формуле (3.31) привели к удвоенному результату (3.47), что и должно быть в силу очевидного соотношения

$$tr \ln D^2 = 2 tr \ln D. \quad (3.53)$$

4.3.3 Гравитация в произвольной неминимальной калибровке

Рассмотрим теорию гравитации с космологической постоянной, описываемую действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R(g) - 2\Lambda). \quad (3.54)$$

Оно инвариантно относительно общекоординатных преобразований, благодаря чему, после разложения поля метрики на квантовую и классическую части как $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и разложения действия до второго порядка, для поля $h_{\mu\nu}$ мы получаем оператор, имеющий нулевую моду

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \xi^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + (g_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}) \nabla_\mu \xi^\alpha + (g_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}) \nabla_\nu \xi^\alpha. \quad (3.55)$$

Она может быть устранена при добавления слагаемых, фиксирующих общекоординатные преобразования:

$$S_{gf} = - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \chi^\mu \chi^\nu, \quad (3.56)$$

$$\text{где} \quad \chi^\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \left(g^{\mu\alpha} \nabla^\beta h_{\alpha\beta} - \frac{1+\beta}{2} g^{\alpha\beta} \nabla^\mu h_{\alpha\beta} \right). \quad (3.57)$$

После этого для второй вариации действия мы имеем:

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta^2 S}{\delta h_{\alpha\beta} \delta h_{\mu\nu}} = \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \square - \frac{\lambda}{2(1+\lambda)} (\delta_\alpha^\mu \nabla_\beta \nabla^\nu + \delta_\beta^\mu \nabla_\alpha \nabla^\nu + \delta_\alpha^\nu \nabla_\beta \nabla^\mu + \\ &+ \delta_\beta^\nu \nabla_\alpha \nabla^\mu) + \frac{\lambda - \beta}{2(1+\lambda)} (g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \nabla^\nu + g_{\alpha\beta} \nabla^\nu \nabla^\mu + g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\beta + g_{\mu\nu} \nabla^\beta \nabla^\alpha) + \\ &+ \left(-1 + \frac{(1+\beta)^2}{2(1+\lambda)} \right) g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \square + P_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.58)$$

где

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta + \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\gamma - g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}) \left(R_\gamma{}^\mu{}_\delta{}^\nu + R_\gamma{}^\nu{}_\delta{}^\mu - g^{\mu\nu} R_{\gamma\delta} - \right. \\ &- g_{\gamma\delta} R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\delta_\gamma^\mu R_\delta{}^\nu + \delta_\gamma^\nu R_\delta{}^\mu + \delta_\delta^\mu R_\gamma{}^\nu + \delta_\delta^\nu R_\gamma{}^\mu) - \delta_\gamma^\mu{}_\delta{}^\nu (R - 2\Lambda) + \\ &\left. + \frac{1}{2} g_{\gamma\delta} g^{\mu\nu} R \right); \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu). \quad (3.60)$$

В данном случае

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = & g^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} - \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} \left(\delta_{\alpha}{}^{\gamma}\delta_{\beta}{}^{\mu}g^{\delta\nu} + \delta_{\alpha}{}^{\gamma}\delta_{\beta}{}^{\nu}g^{\delta\mu} + \delta_{\alpha}{}^{\delta}\delta_{\beta}{}^{\mu}g^{\gamma\nu} + \right. \\
& + \delta_{\alpha}{}^{\delta}\delta_{\beta}{}^{\nu}g^{\gamma\mu} + \delta_{\beta}{}^{\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\mu}g^{\delta\nu} + \delta_{\beta}{}^{\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\nu}g^{\delta\mu} + \delta_{\beta}{}^{\delta}\delta_{\alpha}{}^{\mu}g^{\gamma\nu} + \delta_{\beta}{}^{\delta}\delta_{\alpha}{}^{\nu}g^{\gamma\mu} \left. + \right. \\
& + \frac{\lambda - \beta}{2(1+\lambda)} \left(g^{\gamma\delta}(\delta_{\alpha}{}^{\mu}\delta_{\beta}{}^{\nu} + \delta_{\alpha}{}^{\nu}\delta_{\beta}{}^{\mu}) + g_{\alpha\beta}(g^{\gamma\mu}g^{\delta\nu} + g^{\gamma\nu}g^{\delta\mu}) \right) + g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} \times \\
& \times \left(-1 + \frac{(1+\beta)^2}{2(1+\lambda)} \right); \tag{3.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = & P_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} - \frac{\lambda}{2(1+\lambda)} (R_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}{}^{\delta} + R_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta}{}^{\gamma}) + \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} (\delta_{\alpha}{}^{\gamma}R_{\beta}{}^{\delta} + \\
& + \delta_{\alpha}{}^{\delta}R_{\beta}{}^{\gamma} + \delta_{\beta}{}^{\gamma}R_{\alpha}{}^{\delta} + \delta_{\beta}{}^{\delta}R_{\alpha}{}^{\gamma}); \tag{3.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Kn)^{-1}{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = & \delta_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\delta_{\alpha}{}^{\mu}n_{\beta}n^{\nu} + \delta_{\alpha}{}^{\nu}n_{\beta}n^{\mu} + \delta_{\beta}{}^{\mu}n_{\alpha}n^{\nu} + \delta_{\beta}{}^{\nu}n_{\alpha}n^{\mu}) - \\
& - \gamma (g_{\alpha\beta}n^{\mu}n^{\nu} + g^{\mu\nu}n_{\alpha}n_{\beta}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + 2\gamma(\gamma\lambda - 2\gamma + 2\lambda)n_{\alpha}n_{\beta}n^{\mu}n^{\nu} \\
\text{где} \quad \gamma \equiv & \frac{\beta}{1-\beta} \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Вычисление однопетлевого эффективного действия согласно алгоритму (3.31) привело к следующему результату

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{12} (c_1 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + c_2 R^2 + c_3 R\Lambda + c_4 \Lambda^2), \tag{3.64}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 = & \lambda^2 (2\gamma^4 + 8\gamma^3 + 12\gamma^2 + 8\gamma + 8) + \lambda (-8\gamma^4 - 16\gamma^3 - 4\gamma^2 + 8\gamma + 8) + (8\gamma^4 - 8\gamma^2 + 14); \\
c_2 = & \lambda^2 (\gamma^4 + 4\gamma^3 + 6\gamma^2 + 4\gamma + 4) + \lambda (-4\gamma^4 - 8\gamma^3 - 6\gamma^2 - 4\gamma) + (4\gamma^4 + 4\gamma^2 + 7); \\
c_3 = & \lambda^2 (-12\gamma^4 - 48\gamma^3 - 72\gamma^2 - 48\gamma - 48) + \lambda (48\gamma^4 + 72\gamma^3 - 8\gamma^2 - 40\gamma - 56) + (-48\gamma^4 + 48\gamma^3 + 40\gamma^2 + 8\gamma - 104); \\
c_4 = & \lambda^2 (24\gamma^4 + 96\gamma^3 + 144\gamma^2 + 96\gamma + 96) + \lambda (-96\gamma^4 - 96\gamma^3 + 144\gamma^2 + 192\gamma + 192) + (96\gamma^4 - 192\gamma^3 - 144\gamma^2 + 96\gamma + 240). \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Кроме того, необходимо еще учесть вклад духов Фаддеева-Попова, лагранжиан которых получается с помощью бесконечно малого калибровочного преобразования χ^{μ} и имеет вид

$$L_{gh} = \bar{c}^\alpha (\delta^\alpha_\beta \nabla^\mu \nabla_\mu - \beta \nabla^\alpha \nabla_\beta + R^\alpha_\beta) c^\beta. \quad (3.66)$$

Вклад духовых полей легко вычисляется по формуле (2.34) и равен

$$\begin{aligned} & -2 \times \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{60} (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} (10\gamma^2 + 40\gamma + 14) + \\ & + R^2 (5\gamma^2 + 10\gamma + 17)). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Окончательно, складывая (3.64) и (3.67), получаем результат

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \operatorname{tr} \int d^4x \left(-\frac{58}{5} \Lambda^2 + (R - 4\Lambda)(a_1 R + a_2 \Lambda) \right. \\ \left. + a_3 (10R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 5R^2 - 60\Lambda R + 120\Lambda^2) \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{15} (\lambda(-5\gamma^2 - 10\gamma - 5) + 10\gamma^2 + 5\gamma - 5); \\ a_2 &= \lambda(-2\gamma^3 - 4\gamma^2 - 2\gamma - 2) + 4\gamma^3 - 6\gamma - \frac{87}{15}; \\ a_3 &= \frac{1}{60} (\lambda^2(\gamma^4 + 4\gamma^3 + 6\gamma^2 + 4\gamma + 4) + \lambda(-4\gamma^4 - \\ & - 8\gamma^3 - 2\gamma^2 + 4\gamma + 4) + (4\gamma^4 - 6\gamma^2 - 8\gamma + \frac{21}{5})) \end{aligned} \quad (3.69)$$

(В частном случае $\Lambda = 0$ данное выражение совпадает с результатом, полученным в работе [37].)

Уравнения движения, получаемые из действия (3.54) имеют вид

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda. \quad (3.70)$$

Легко видеть, что на уравнениях движения (3.68) не зависит от параметров λ и γ и имеет вид

$$\Gamma_\infty^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \operatorname{tr} \int d^4x \left(-\frac{58}{5} \Lambda^2 \right), \quad (3.71)$$

что полностью согласуется с рассмотренной ранее общей теорией.

Глава 5

Тензорный пакет для системы аналитических вычислений REDUCE

5.1 Постановка задачи

Применение полученных в данной работе формул затруднено огромным объемом вычислений, особенно для случая неминимального оператора. Использование электронных вычислительных машин позволило бы значительно ускорить развитие данного направления. Однако основные действия приходится выполнять с многоиндексными величинами, для которых программное обеспечение находится только в стадии развития [56].

Использование тензорных величин [57] требуется также во многих других физических задачах, например, в квантовой гравитации [58] суперсимметричных [59], [60] и суперструнных [61], [62] теориях. Соответствующие вычисления содержат огромное количество громоздких операций с многоиндексными величинами, в частности, с гамма-матрицами.

При этом, как правило, тензоры рассматриваются как формальные объекты с некоторыми заданными свойствами. Однако в рамках данного подхода мы сталкиваемся с рядом серьезных проблем: необходимо сравнивать величины, содержащие немые индексы и индексы симметрии [63]. (Необходимо помнить, что индексы суммирования могут быть обозначены любыми буквами). Наиболее естественный способ для преодоления данных затруднений заключается в приведении тензорного выражения к некоторой стандартной форме, которая совпадает для равных тензорных величин. Например, выражения

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu} T_{\beta\sigma\sigma} T_{\gamma\nu\alpha} T_{\beta\gamma\mu}; \\ T_{\alpha\beta\beta} T_{\nu\delta\mu} T_{\alpha\nu\sigma} T_{\mu\sigma\delta} \end{aligned}$$

равны, хотя немые индексы обозначены по-разному. При помощи перестановки сомножителей и переименования индексов они могут быть приведены к единой стандартной форме

$$T_{i_1 i_2 i_2} T_{i_1 i_3 i_4} T_{i_3 i_5 i_6} T_{i_6 i_4 i_5}.$$

Однако, если выражения достаточно громоздкие, то сравнивать их, а тем более производить арифметические операции, становится весьма затруднительно. Поэтому в данном случае возникает необходимость использования компьютеров. Разработка соответствующего программного обеспечения позволила бы решить или же значительно облегчить решение значительного круга физических задач.

Мы разработали тензорный пакет для широко распространенной системы аналитических вычислений REDUCE [64], [65], задачей которого является быстрое и эффективное выполнение операций с многоиндексными величинами. Кроме того создан ряд процедур для работы с формулами (2.26), (2.29), (3.31).

Как и сама система REDUCE, наша программа написана на языке R-LISP [66].

5.2 Алгоритмы.

Одной из наиболее частых операций при работе с тензорными величинами является упрощение выражений, содержащих метрику или δ -символ. Если не производить различия между верхними и нижними индексами, что возможно для значительного круга задач, в том числе и в квантовой гравитации, то правила работы с метрическим тензором примут следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}t_{\beta} &= t_{\alpha}; \\ g_{\alpha\beta}^2 &= d, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где d - размерность пространства.

Обработка любого выражения начинается с нахождения подобных сверток с метрикой и замене их согласно вышеприведенным правилам. Однако часто приходится свертывать 2 тензорных выражения A и B , содержащих большое количество метрических тензоров. Например, при вычислениях однопетлевых расходимостей данная операция не только постоянно встречается, но и представляет наибольшие затруднения при исполнении.

В данном случае не рационально просто перемножить 2 выражения, а затем найти свертки с метрикой, так как промежуточный результат может получиться столь большим, что при вычислениях потребуются неприемлемое количество машинной памяти и времени. Поэтому для данной цели был реализован следующий алгоритм:

Предположим, что $A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}C + D_{\mu\nu}$. Тогда

$$A_{\mu\nu}B_{\mu\nu} = C(g_{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + D_{\mu\nu}B_{\mu\nu}.$$

Сначала находим $g_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$. Если $B_{\mu\nu}$ содержит большое количество метрических тензоров, то $g_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ получится намного компактнее, чем $B_{\mu\nu}$. Поэтому вычислить $C(g_{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + D_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ значительно легче, чем перемножить $A_{\mu\nu}$ and $B_{\mu\nu}$ обычным способом.

Рассмотрение конкретных задач показало, что предложенный алгоритм в значительной степени сокращает количество требуемой памяти и время счета.

Однако наиболее важной проблемой при обработке тензорных выражений является переименование немых индексов так, чтобы равные выражения были бы приведены к

одинаковой стандартной форме. (Изначально немые индексы могут быть обозначены при помощи различных букв).

Реализованный алгоритм включает в себя 2 шага:

1. Предварительная обработка выражения - производится упорядочивание индексов симметрии, сомножителей и слагаемых.

2. Первый шаг в некоторых случаях не приводит к окончательному результату. В таких случаях рассматриваются все возможные способы переименования немых индексов и выделяется наиболее приоритетный вариант.

Рассмотрим оба шага более детально.

Шаг 1:

Расстановка индексов производится согласно их приоритету. Приоритет свободных индексов считается большим, чем немых и определяется буквой, обозначающей индекс. Например, $T_{\beta\alpha}$ будет упорядочено как $T_{\alpha\beta}$ в случае, если $T_{\alpha\beta}$ - симметричный тензор.

Значительно сложнее определить приоритеты для немых индексов. Различается 3 возможных случая: Немой индекс свертывается с

- а. тензором левее рассматриваемого
- б. другим индексом рассматриваемого тензора
- с. тензором правее рассматриваемого. (Обработка выражения производится слева направо)

В случае б. приоритет немой индекса считается наибольшим. Затем идет вариант а., в котором приоритет определяется положением индекса, с которым свертывается рассматриваемый: чем левее последний, тем больше приоритет. И наконец в случае с. приоритеты всех индексов равны.

Рассмотрим теперь как производится предварительная расстановка сомножителей и слагаемых. (Для этого переопределен ряд REDUCE процедур). Приоритет тензора определяют:

- а. его имя
- б. степень (вторая степень имеет больший приоритет чем первая)
- с. количество индексов
- д. количество внутренних сверток
- е. приоритет тензорных индексов.

Немые индексы после первого шага нумеруются стандартными буквами $i1, i2, i3, \dots$. Номер определяет порядком индексов: чем он меньше, тем раньше встретился индекс.

Шаг 2:

Если среди индексов симметрии встречаются индексы суммирования, свертываемые с тензорами правее рассматриваемого, или же 2 сомножителя одинаково приоритета, то равные выражения после первого шага могут не привести к единой форме. В таких случаях рассматриваются все способы расстановки индексов и сомножителей с равным приоритетом и из них производится выборка наиболее "хорошего" варианта. Число переборов как правило оказывается не очень большим.

Если после одной из перестановок выражение (или его часть) изменило знак, то, значит, существует свертка симметричного тензора с антисимметричным, которая должна быть положена равной 0. Реализованный алгоритм позволяет найти все такие свертки. Например, если B - антисимметричная матрица, то $tr B^3 = 0$.

5.3 Интерфейс

Тензорные величины рассматриваются как операторы в системе REDUCE. Например, $T(a,b)$ обозначает T_{ab} . Метрический тензор g_{ab} записывается в виде $@(a,b)$. Он автоматически рассматривается как симметричный.

Индекс, встречающийся 2 раза считается немым, 1 раз - свободным.

Пакет позволяет приписать тензору свойство симметрии или антисимметрии при перестановке любых групп индексов. После введения

$$symmetry < > (< - >);$$

тензор с указанным именем и количеством индексов рассматривается как полностью симметричный. Команда

$$symmetry < > (< - >, < >);$$

описывает свойство симметрии относительно перестановки индексов, определяемых указанными номерами. Например,

$$\begin{aligned} &symmetry\ b(2); \\ &b(n,m); \rightarrow b(m,n) \\ &symmetry\ c(3,1,3); \\ &c(n,k,l); \rightarrow c(l,k,n) \end{aligned}$$

Полностью аналогично описывается свойство антисимметрии - вместо слова "symmetry" необходимо писать "antisymmetry".

Как было отмечено ранее, свертки симметричных тензоров с антисимметричными полагаются равными 0, например,

$$\begin{aligned} &antisymmetry\ a(2); \\ &a(k,l) * t(k,n) * t(l,n); \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Изначальное значение размерности пространства равно 4. Однако существует возможность проводить вычисления в пространствах произвольной целой размерности. Для изменения размерности необходимо выполнить команду

$$spdim < >;$$

где размерность - целое положительное число.

Пространство всегда считается евклидовым, т.е. имеющим сигнатуру $(++...+)$.

Во многих задачах необходимо использовать полностью антисимметричный тензор Леви-Чевитты. (Количество его индексов равно размерности пространства). Тензорный пакет дает возможность производить операции с ним в пространствах произвольной целой размерности. Тензор Леви-Чевитты обозначается при помощи идентификатора "ep например,

$$\begin{aligned} &spdim5; \\ &ep(k, l, n, a, b); \rightarrow ep(a, b, k, l, n) \\ &spdim3; \\ &ep(a, c, b); \rightarrow -ep(a, b, c) \end{aligned}$$

Произведения тензоров Леви-Чевитты выражаются через метрический тензор, например,

$$ep(a, m, n) * ep(b, m, n); \rightarrow 2 * @ (a, b)$$

(Необходимо помнить, что пространство считается евклидовым, в частности нет различия в знаке между ep-тензором с верхними и нижними индексами).

Тензорные выражения складываются и умножаются согласно стандартным правилам системы REDUCE. Как уже упоминалось ранее, повторяющиеся индексы рассматриваются как немые, а встретившиеся 1 раз - как свободные. Более 2 раз в индекс встречаться не должен.

После ввода тензорного выражения оно приводится к стандартной форме, например:

$$t(l, m) * r(k, l); \rightarrow r(k, i1) * t(i1, m)$$

Алгоритм данной операции был ранее рассмотрен. Однако во многих случаях оказывается достаточным выполнение только первого шага, в то время как второй требует достаточно значительного количества времени. Поэтому был определен дополнительный флаг DFC. Он поднимается и опускается при помощи стандартных команд ON/OFF в системе REDUCE. При поднятом флаге DFC производится полное выполнение рассмотренного алгоритма. Если же DFC опущен, то не производится перебор различных вариантов наименования немых индексов. Рассмотрение ряда конкретных задач показало, что в очень многих случаях это вполне достаточно для нахождения результата. В исходном состоянии DFC опущен.

Ранее было отмечено, что для перемножения выражений с большим количеством метрических тензоров удобно использовать специальный алгоритм. Он применяется при введении команды

$$< > \# < >;$$

Например, для перемножения $A_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ необходимо набрать

$$At, n) \# B(m, n);$$

Результат при этом не будет отличаться от

$$A(m, n) * B(m, n);$$

однако за счет использования специального алгоритма он получится быстрее и с меньшими затратами оперативной памяти, если $A_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ содержат значительное количество метрических тензоров.

Во многих случаях существует необходимость осуществлять ковариантное дифференцирование тензорных выражений по произвольным индексам. Для данной операции применяются следующие обозначения:

$$< > (< >, | (< . >))$$

Например, $\nabla_a \nabla_c T_{ab}$ должно быть набрано как

$$T(a, b, | (c, d));$$

Если ввести команду

$$< > \backslash < >;$$

то результатом будет являться производная заданного выражения по указанному индексу, вычисленная согласно правилу Лейбница:

$$(t(a, b) * s(c)) \backslash b; \rightarrow s(c, | (i1)) * t(a, i1) + s(c) * T(a, i1, | (i1))$$

Ковариантные производные метрического тензора, ер-символа и гамма-матриц положены равными 0. Скалярные величины считаются постоянными в тех случаях, если они не описаны как тензора при помощи команды

$$tensor < >;$$

Например,

$$h \backslash k; \rightarrow 0$$

$$tensor h;$$

$$h \backslash k; \rightarrow h(| (k))$$

Часто существует необходимость выполнения трудоемких операций с гамма-матрицами и их антисимметричными произведениями

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} (\Gamma_{\mu_1} \Gamma_{\mu_2} \dots \Gamma_{\mu_n} - \Gamma_{\mu_2} \Gamma_{\mu_1} \dots \Gamma_{\mu_n} + \dots)$$

в пространствах различных размерностей. При этом часто требуется не только уметь вычислять следы, но и работать с ними как с некоторыми многоиндексными структурами. Это весьма удобно делать при помощи тензорного пакета.

Проиллюстрируем обозначения для гамма-матриц и их антисимметричных произведений:

$$\begin{aligned}
&g(a, b) \quad (1)_a^b \\
&g(\mid (m, n), a, b) = (\Gamma_{mn})_a^b \\
&g(\mid (m, n, p), \mid (p, q), a, b) = (\Gamma_{mnp}\Gamma_{pq})_a^b
\end{aligned}$$

В пространствах четной размерности возможно введение аналога γ_5 -матрицы. Она обозначается следующим образом:

$$g(\mid (d+1), a, b)$$

Например:

$$\begin{aligned}
&spdim10; \\
&g(\mid (11), \mid (11), a, b); \rightarrow g(a, b)
\end{aligned}$$

Иногда необходимо уметь разлагать гамма-матрицы по стандартному базису:

$$1, \Gamma_\mu, \Gamma_{\mu_1\mu_2}, \dots, \Gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{(d-1)/2}}$$

в нечетной размерности d и

$$1, \Gamma_{d+1}, \Gamma_\mu, \Gamma_\mu\Gamma_{d+1}, \Gamma_{\mu_1\mu_2}, \Gamma_{\mu_1\mu_2}\Gamma_{d+1}, \dots, \Gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{d/2}}$$

в четной размерности d .

Для выполнения данной операции необходимо набрать

$$resolve(< >, < 2 >);$$

Например:

$$\begin{aligned}
&resolve(g(\mid (m), \mid (n), a, b), a, b); \rightarrow g(a, b) * @ (m, n) + g(\mid (m, n), a, b) \\
&spdim3; \\
&resolve(g(a, b) * g(c, d), a, d); \\
&\rightarrow (g(\mid (i1), a, d) * g(\mid (i1), c, b) + g(a, d) * g(c, b))/2
\end{aligned}$$

5.4 Интегрирование по углам

Вычисления согласно ранее найденным формулам для однопетлевых расходимостей требуют выполнения не только стандартных операций с тензорными величинами, но и операции интегрирования по углам. Для этого были написаны специальные процедуры позволяющие производить данную операцию в процессе общей обработки тензорного выражения. Помимо простого ввода определения (2.77) был написан целый ряд оптимизирующих программ, позволяющих использовать разумный объема памяти и, в частности, уже в настоящее время находить алгоритмы вычисления однопетлевых контрчленов на персональных компьютерах.

Дело в том, что непосредственное вычисление при помощи (2.77) приводит к огромным выражениям, которые не могут быть обработаны с применением современных вычислительных средств. Основная причина заключается в том, что количество метрических тензоров растет экспоненциально с ростом количества индексов в операции интегрирования, в то время как большинство из них дают нулевой вклад в силу наличия сверток симметричных и антисимметричных тензоров. Последние в принципе могут быть найдены при поднятом флаге *DFC*, однако используемый при этом алгоритм требует слишком длительного времени, поскольку имеется большое количество одинаковых тензоров. (Это как раз тот случай, когда используемый алгоритм наименее эффективен!) Кроме того, очевидное тождество $n^\mu n_\mu = 1$ неожиданно оказывается серьезным препятствием при обработке выражений: Стандартный алгоритм осуществляет поиск подстановок уже после того как выполнены все остальные операции. Однако при наличии огромного количества $n^\mu n_\mu$, получающихся при умножениях тензоров, ($T_{\alpha\beta}$ и $n^\mu n_\mu T_{\alpha\beta}$ уже считаются различными величинами) промежуточный результат оказывается неприемлемо большим. В силу данных причин интегрирование по углам производится во время основной обработки выражения. Все произведения единичных векторов n_μ объединяются в каждом слагаемом в один симметричный тензор, свертки которого с антисимметричными индексами у $R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ легко находятся и обнуляются даже при опущенном флаге *DFC*. Здесь же удаляются все квадраты единичного вектора n_μ .

Кроме того, значительно улучшена работа операции умножения тензоров, содержащих большое количество единичных тензоров n_μ . Оптимизация производится аналогично построению операции ускоренного умножения:

1. Как и в ускоренном умножении на первом шаге метрические тензоры переносятся из одного сомножителя в другой, после чего производится упрощение последнего: Если $A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}C + D_{\mu\nu}$, то вычисляется

$$A_{\mu\nu}B_{\mu\nu} = C(g_{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + D_{\mu\nu}B_{\mu\nu}.$$

(скобки выделяют первую обрабатываемую величину).

2. Аналогичным образом переносятся произведения единичных тензоров (Напомним, что они объединяются в симметричный тензор $n_{\mu\nu\dots\alpha} \equiv n_\mu n_\nu \dots n_\alpha$):

Если $A_{\mu\nu} = n_{\mu\nu}C + D_{\mu\nu}$, то дальнейшая обработка ведется по правилу

$$A_{\mu\nu}B_{\mu\nu} = C(n_{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + D_{\mu\nu}B_{\mu\nu}.$$

Основное преимущество заключается в том, что при вычислении $n_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ удаляются квадраты n_β и свертки антисимметричных тензоров с $n_{\mu\nu}$. Поэтому результат выполнения данной операции оказывается значительно компактнее, чем промежуточное произведение $A_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ построенное обычным способом.

Наконец, еще одна оптимизация основана на том, что результатом заключительного интегрирования по угловым переменным являются произведения метрических тензоров, которые должны быть далее свернуты с тензором кривизны или же матрицами внешних полей. Данная операция также выполняется без построения промежуточного выражения.

В результате произведенных оптимизаций (и только благодаря им) оказывается возможным в течение приемлемого времени и, используя относительно небольшое

количество памяти, производить исследование однопетлевых расходимостей даже для случая неминимального оператора в искривленном пространстве.

Приведем здесь время счета и затраты памяти для некоторых наиболее сложных из рассмотренных примеров (Вычисления выполнены с использованием компьютера IBM-486/DX-2/66/8Mb):

1. Вычисление RR для частного случая минимального оператора произвольного порядка l на основе общей формулы (3.31) для произвольного неминимального оператора: Время вычислений - 17 с, затрачивается приблизительно 500 kb памяти.

2. Вычисление однопетлевых контрчленов для неминимального оператора с векторным квантовым полем (3.43): Время - 220 с, используется около 3 Mb памяти. Для квадрата данного оператора требуется также 3 Mb памяти, время вычислений составило 630 с.

3. Для гравитации в λ -калибровке требуется уже 8 Mb оперативной памяти, а время вычислений увеличивается до 170 минут.

4. Для гравитации с космологической постоянной в наиболее общей неминимальной калибровке необходимо 24 Mb оперативной памяти и около 6 часов времени.

5.5 Пример применения тензорного пакета

Тензорный пакет был применен для вычисления расходящейся части однопетлевого эффективного действия для аффинно-метрической теории гравитации, взаимодействующей со скалярным полем при наличии космологической постоянной [67] с использованием метода фонового поля. Лагранжиан теории имеет вид

$$L = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{k^2} R(\Gamma, g) + \Lambda + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi \phi^2 R(\Gamma, g) \right), \quad (4.2)$$

где

$$R(\Gamma, g) = g^{\beta\gamma} R^\alpha_{\beta\alpha\gamma};$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma_{\beta\mu},$$

а $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ - аффинная связность.

(Далее мы будем использовать обозначение $\alpha \equiv (-1/k^2 + \xi\varphi^2)$).

Метрика и аффинная связность в данной теории рассматриваются как независимые поля.

После разложения действия до второго порядка по квантовым полям $\gamma^\sigma_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$, Φ получающихся при разложении соответственно связности, метрики и скалярного поля, исключения $\gamma^\sigma_{\mu\nu}$ на уравнения движения (для данного поля отсутствуют члены со вторыми производными) и добавления члена

$$\alpha \sqrt{-g} C_\mu C^\mu, \quad \text{где} \quad C_\mu = \nabla_\nu h^\nu_\mu - \frac{1}{2} \nabla_\mu h^\alpha_\alpha - \frac{2\xi\varphi}{\alpha} \nabla_\mu \Phi, \quad (4.3)$$

фиксирующего общекординатную инвариантность

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h_{\mu\nu} + \xi^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + (g_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}) \nabla_\mu \xi^\alpha + (g_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}) \nabla_\nu \xi^\alpha; \\ \phi &\rightarrow \Phi + \xi^\alpha \nabla_\alpha (\Phi + \phi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

для $h_{\mu\nu}$ и Φ получаем теорию с минимальным оператором второго порядка вида

$$\Psi^+ \left(K \nabla^\mu \nabla_\mu + \tilde{S}^\mu \nabla_\mu + \tilde{W} \right) \Psi, \quad (4.5)$$

где поле Ψ является столбцом, составленным из полей Φ и $h_{\mu\nu}$:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

а матрица K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \alpha (-g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) / 4 & -\xi\varphi g^{\mu\nu} \\ -\xi\varphi g^{\alpha\beta} & (1 - 8(\xi\varphi)^2/\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

(Выражения для \tilde{S} и \tilde{W} не приводятся в силу большого размера).

При помощи замены переменных $\Psi^+ = \tilde{\Psi}^+ K^{-1}$ данный оператор приводится к стандартному виду

$$\tilde{\Psi}^+ (\nabla^\mu \nabla_\mu + S^\mu \nabla_\mu + W) \Psi, \quad (4.8)$$

где $S^\mu = K^{-1} \tilde{S}^\mu$, $W = K^{-1} \tilde{W}$.

Матрица K^{-1} легко находится и имеет вид

$$\begin{pmatrix} - (1 - 4(\xi\varphi)^2/\alpha) g_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} / \alpha + (g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta} + g_{\gamma\beta} g_{\delta\alpha}) / \alpha & -2 \frac{\xi\varphi}{\alpha} g_{\alpha\beta} \\ -2 \frac{\xi\varphi}{\alpha} g_{\gamma\delta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

После этого вычисление однопетлевых расходимостей производилось при помощи ранее приведенного алгоритма

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{12} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{60} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{180} R^2 \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$Y_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu S_\nu - \frac{1}{2} \nabla_\nu S_\mu + \frac{1}{4} S_\mu S_\nu - \frac{1}{4} S_\nu S_\mu + F_{\mu\nu};$$

$$X = W - \frac{1}{2} \nabla_\mu S^\mu - \frac{1}{4} S_\mu S^\mu + \frac{1}{6} R \quad (4.11)$$

с применением тензорного пакета. Каждое произведение вычислялось отдельно. Для примера укажем, что время вычисления $\text{tr } Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu}$ (выражение для $Y_{\mu\nu ij}{}^{kl}$ состояло из 300 слагаемых) с использованием алгоритма ускоренного умножения составило 90 секунд на компьютере IBM-486/DX-2/66/4Mb.

Однако пока не был учтен вклад дугов Фаддеева-Попова [35], [36], лагранжиан которых легко получается из членов фиксирующих калибровку (4.3) а также вида общекоординатных преобразований (4.4):

$$L_{gh} = \bar{c}^\alpha \left(\delta^\alpha_\beta \nabla^\mu \nabla_\mu - \frac{2\xi\phi}{\alpha} \nabla^\beta \phi \nabla_\alpha - \frac{2\xi\phi}{\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - R^\alpha_\beta \right) c_\beta. \quad (4.12)$$

Соответствующий дифференциальный оператор является минимальным и контрчлены для него легко вычисляются по стандартному алгоритму 4.10.

Для получения окончательное выражения для эффективного действия необходимо вычесть из основного результата удвоенный вклад дугов Фаддеева-Попова, после чего было получено следующее окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} = & \Gamma_{h,\phi}^{(1)} - 2\Gamma_{gh}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{203}{40} R^2 + \Lambda^2 \varphi^4 \times \right. \\ & \times \alpha^{-4} \left(640\xi^5 - \frac{22776}{5} \xi^3 \right) + \Lambda^2 \varphi^2 \alpha^{-3} \left(-640\xi^4 + \frac{11168}{5} \xi^3 - 16\xi^2 \right) + \\ & + \Lambda^2 \alpha^{-2} \left(80\xi^3 + 24\xi^2 + 4\xi + \frac{463}{20} \right) + \Lambda R \varphi^4 \alpha^{-3} \left(\frac{1120}{3} \xi^5 - \frac{41608}{15} \xi^4 \right) + \\ & + \Lambda R \varphi^2 \alpha^{-2} \left(-360\xi^4 + \frac{5744}{5} \xi^3 - \frac{20}{3} \xi^2 \right) + \Lambda R \alpha^{-1} \left(40\xi^3 + 8\xi^2 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{3} \xi + \frac{463}{20} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\alpha \equiv \left(-\frac{1}{k^2} + \xi \varphi^2 \right). \quad (4.14)$$

На основе данного результата делается вывод о неперенормируемости теории.

В случае $\Lambda = 0$ ответ принимает очень простой вид

$$\Gamma_\infty^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \frac{203}{40} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} R^2, \quad (4.15)$$

однако теория по-прежнему остается неперенормируемой.

Интегрирование по углам для минимального оператора

Здесь мы сформулируем ряд правил работы с операцией интегрирования по углам $\langle \rangle$ для диагонального оператора, некоторые из которых были многократно использованы при получении (2.26) и (2.29).

В качестве исходного пункта мы рассмотрим уравнение (2.77):

$$\begin{aligned} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle &= \\ &= \frac{1}{2^m (m+1)!} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{2m-1} \mu_{2m}} + g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} \dots g_{\mu_{2m-1} \mu_{2m}} + \dots), \end{aligned} \quad (4.16)$$

которое может быть интерпретировано следующим образом: Для нахождения результата интегрирования по углам необходимо произвести все возможные спаривания между n_α и умножить результат на константу. Спаривание n_α и n_β дает при этом $g_{\alpha\beta}$.

Количество слагаемых в сумме равно $(2m-1)!!$. Следовательно, если (4.16) свернуть с полностью симметричным тензором $A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2m}} = A_{(2m)}$ (индексы внизу указывают в данном случае ранг тензора), будет получен следующий результат:

$$\langle (A_{(2m)} n) \rangle = \frac{(2m-1)!!}{2^m (m+1)!} A, \quad (4.17)$$

где $A \equiv A^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\mu_1 \dots \mu_m}$.

Аналогично находим, что для тензора $A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2m-1}} \equiv A_{(2m-1)}$ выполняется следующее соотношение:

$$\langle n_\alpha (A_{(2m-1)} n) \rangle = \frac{(2m-1)!!}{2^m (m+1)!} A_\alpha = \frac{2m-1}{2(m+1)} \langle (A_{(2m-1)} n)_\alpha \rangle, \quad (4.18)$$

где $A_\alpha \equiv A^{\mu_1 \dots \mu_{m-1}}_{\mu_1 \dots \mu_{m-1} \alpha}$.

В более общем случае нам потребуется следующее следствие (4.16):

$$\begin{aligned} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle &= \frac{1}{2(m+1)} \left(g_{\mu_1 \mu_2} \langle n_{\mu_3} n_{\mu_4} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle + \right. \\ &\quad \left. g_{\mu_1 \mu_3} \langle n_{\mu_2} n_{\mu_4} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle + \dots + g_{\mu_1 \mu_{2m}} \langle n_{\mu_2} n_{\mu_3} \dots n_{\mu_{2m-1}} \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Производя свертку с двумя полностью симметричными тензорами, находим, что

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha (A_{(2m)} n) (B_{(2p-1)} n) \rangle &= \frac{1}{2(m+p+1)} \times \\ &\times (2m \langle (A_{(2m)} n)_\alpha (B_{(2p-1)} n) \rangle + (2p-1) \langle (A_{(2m)} n) (B_{(2p-1)} n)_\alpha \rangle). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Данное соотношение может быть элементарно обобщено на случай свертки с произвольным количеством симметричных тензоров.

Оказывается, что для минимального оператора можно вообще полностью выполнить интегрирование по углам в явном виде. Несмотря на то, что ответы оказываются чрезвычайно громоздкими, они очень удобны для расчетов в случаях операторов высоких порядков, так как с их использованием количество выполняемых операций резко сокращается.

Рассмотрим сначала

$$< (A_{(2m)}n)(B_{(2p)}n) > = \sum_{k=0}^m A^{\mu_1 \dots \mu_{2k}} B_{\mu_1 \dots \mu_{2k}} T_{mp}^k. \quad (4.21)$$

(предполагая, что $m \leq p$) Здесь через T_{mp}^k обозначены некоторые числовые постоянные, которые необходимо вычислить. Несложно видеть, что

$$T_{mp}^k = \frac{1}{2^{m+p}(m+p+1)!} \times \\ \times C_{2m}^{2k} (2m-2k-1)!! (2p-2k-1)!! \frac{(2p)!}{(2p-2k)!}. \quad (4.22)$$

Здесь $1/2^{m+p}(m+p+1)!$ - нормировочная константа, C_{2m}^{2k} - число способов выбора $2k$ n_α из $(A_{(2m)}n)$, $(2p)!/(2p-2k)!$ - число их возможных спариваний с n_β из $(B_{(2p)}n)$ и, наконец, $(2m-2k-1)!! (2p-2k-1)!!$ - число спариваний n_μ внутри $(A_{(2m)}n)$ и $(B_{(2p)}n)$.

Полностью аналогичные рассуждения приводят к следующему соотношению

$$< (A_{(2m+1)}n)(B_{(2p+1)}n) > = \sum_{k=0}^m A^{\mu_1 \dots \mu_{2k+1}} B_{\mu_1 \dots \mu_{2k+1}} T_{mp}^k, \quad (4.23)$$

где

$$T_{mp}^k = \frac{1}{2^{m+p+1}(m+p+2)!} \times \\ \times C_{2m+1}^{2k+1} (2m-2k-1)!! (2p-2k-1)!! \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} \quad (4.24)$$

и $m \leq p$.

(4.21) и (4.23) могут быть записаны в едином виде как

$$< (A_{(m)}n)(B_{(p)}n) > = \sum_{k=0}^m A^{\mu_1 \dots \mu_k} B_{\mu_1 \dots \mu_k} T_{mp}^k, \quad (4.25)$$

где $m \leq p$ и

$$T_{mp}^k = \frac{1}{2^{(m+p)/2}((m+p)/2+1)!} \times \\ \times C_m^k (m-k-1)!! (p-k-1)!! \frac{p!}{(p-k)!}, \quad (4.26)$$

если $m-k$ и $p-k$ четны и 0 в остальных случаях.

Данное уравнение может быть обобщено на случай большего количества тензоров. Здесь мы рассмотрим случаи, которые встречаются в формулах (2.26) и (2.29). Например, некоторые слагаемые имеют следующий вид:

$$< (A_{(2l-2)}n)(B_{(2l-1)}n)(C_{(2l-1)}n) > = \quad (4.27)$$

$$= \sum_{m_1=0}^{2l-2} \sum_{m_2=0}^{2l-2} \sum_{m_3=0}^{2l-1} A^{\mu_1 \dots \mu_{m_1} \nu_1 \dots \nu_{m_2}} B^{\mu_1 \dots \mu_{m_1} \alpha_1 \dots \alpha_{m_3}} C^{\nu_1 \dots \nu_{m_2} \alpha_1 \dots \alpha_{m_3}} T_l^{m_1 m_2 m_3}.$$

С использованием прежнего метода находим, что

$$T_l^{m_1 m_2 m_3} = \frac{1}{2^{3l-2} (3l-1)!} C_{2l-2}^{m_1} C_{2l-2-m_1}^{m_2} C_{2l-1-M}^{m_3} \times \quad (4.28)$$

$$\times (2l-2-m_1-m_3)!! (2l-2-m_2-m_3)!! (2l-3-m_1-m_2)!! \times$$

$$\times \frac{(2l-1)!}{(2l-1-m_1)!} \frac{(2l-1)!}{(2l-1-m_2)!} \frac{(2l-1-m)!}{(2l-1-m-m_3)!},$$

если m_1+m_2 четно, а m_1+m_3 , m_2+m_3 нечетны ($M \equiv \max(m_1, m_2)$ и $m \equiv \min(m_1, m_2)$), в противном случае $T_l^{m_1 m_2 m_3} = 0$.

Оставшееся слагаемое $\langle (S_{(2l-1)} n)^4 \rangle$ может быть записано как

$$\langle (S_{(2l-1)} n)^4 \rangle = \sum_{k_1=0}^{2l-1} \sum_{k_2=0}^{2l-1-k_1} \sum_{k_3=0}^{2l-1-k_1-k_2} \sum_{k_3=0}^{2l-1-M_1} \sum_{k_3=0}^{2l-1-M_2} \sum_{k_3=0}^{2l-1-M_3}$$

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k_1} \nu_1 \dots \nu_{k_2} \sigma_1 \dots \sigma_{k_3}} S^{\mu_1 \dots \mu_{k_1} \alpha_1 \dots \alpha_{k_4} \beta_1 \dots \beta_{k_5}} S^{\nu_1 \dots \nu_{k_2} \alpha_1 \dots \alpha_{k_4} \gamma_1 \dots \gamma_{k_6}} \times$$

$$\times S^{\sigma_1 \dots \sigma_{k_3} \beta_1 \dots \beta_{k_5} \gamma_1 \dots \gamma_{k_6}} T_l^{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}, \quad (4.29)$$

где

$$T_l^{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} = \frac{1}{4^{2l-1} (4l-1)!} (2l-2-k_1-k_2-k_3)!! \times$$

$$\times (2l-2-k_1-k_4-k_5)!! (2l-2-k_2-k_4-k_6)!! \times$$

$$\times (2l-2-k_3-k_5-k_6)!! C_{2l-1}^{k_1} \frac{(2l-1)!}{(2l-1-k_1)!} C_{2l-1-k_1}^{k_2} \frac{(2l-1)!}{(2l-1-k_2)!} \times$$

$$\times C_{2l-1-k_1-k_2}^{k_3} \frac{(2l-1)!}{(2l-1-k_3)!} C_{2l-1-M_1}^{k_4} \frac{(2l-1-m_1)!}{(2l-1-m_1-k_4)!} \times$$

$$\times C_{2l-1-M_2}^{k_5} \frac{(2l-1-m_2)!}{(2l-1-m_2-k_5)!} C_{2l-1-M_3}^{k_6} \frac{(2l-1-m_3)!}{(2l-1-m_3-k_5)!}, \quad (4.30)$$

если $k_1+k_2+k_3$, $k_1+k_4+k_5$, $k_2+k_4+k_6$, $k_3+k_5+k_6$ одновременно являются нечетными. В остальных случаях

$$T_l^{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \max(k_1, k_2); & m_1 &\equiv \min(k_1, k_2); \\ M_2 &\equiv \max(k_1+k_4, k_3); & m_2 &\equiv \min(k_1+k_4, k_3); \\ M_3 &\equiv \max(k_2+k_4, k_3+k_5); & m_3 &\equiv \min(k_2+k_4, k_3+k_5). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Интегрирование по углам для неминимального оператора.

В приложении 5.5 мы сформулировали ряд правил для работы с операцией интегрирования по углам. Однако в случае неминимального оператора они уже не применимы, поскольку $(Kn)^{-1}_{i^j}$ в общем случае уже не может быть записано в форме

$$T^{\alpha\beta\ldots\gamma} n_\alpha n_\beta \ldots n_\gamma,$$

где $T^{\alpha\beta\ldots\gamma}$ - полностью симметричный тензор.

Таким образом, необходимо сформулировать новые правила работы с данной операцией.

Рассмотрим интеграл

$$\int d^d k f(k) \quad (4.32)$$

и предположим, что все слагаемые в нем имеют более чем логарифмическую степень расходимости и, следовательно, равны 0. (Напомним, что используется размерная регуляризация).

Если произвести замену переменной $k_\mu \rightarrow k_\mu + p_\mu$, то расходящаяся часть при этом измениться не может. Вычислим ее явно, используя разложение в ряд петлевому импульсу и удерживая логарифмически расходящиеся слагаемые.

Пусть $f(k)$ преобразуется при растяжении $k \rightarrow \alpha k$ как

1. $f(k) \rightarrow \alpha^{-3} f(k)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\int d^d k f(k+p) \right)_\infty = \int d^d k \frac{1}{k^4} \delta_\mu f(n) p^\mu = \\ &= \int d^d k \frac{1}{k^4} \langle \delta_\mu f(n) \rangle p^\mu, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $\delta_\mu f(n)$ обозначает линейное по p^μ слагаемое в разложении $f(k+p)$ при $k_\alpha = n_\alpha$:

$$f(k+p) \equiv f(k) + \delta_\mu f(k) p^\mu + \delta_{\mu\nu} f(k) p^\mu p^\nu + \ldots \quad (4.34)$$

Здесь мы предполагаем, что $\delta_{\mu\nu} f(n)$ является полностью симметричным по своим индексам. В силу произвольности p^μ , заключаем, что

$$\langle \delta_\mu f(n) \rangle = 0. \quad (4.35)$$

2. $f(k)g(k) \rightarrow \alpha^{-3} f(k)g(k)$

$$\left(\int d^d k g(k) f(k+p) \right)_\infty = \left(\int d^d k g(k-p) f(k) \right)_\infty \quad (4.36)$$

и мы находим, что

$$\langle g(n) \delta_\mu f(n) \rangle = - \langle \delta_\mu g(n) f(n) \rangle. \quad (4.37)$$

3. $f(k)g(k) \rightarrow \alpha^{-2} f(k)g(k)$

$$\left(\int d^d k \, g(k) f(k+p) \right)_\infty = \left(\int d^d k \, g(k-p) f(k) \right)_\infty = \int d^d k \, \frac{1}{k^4} g(n) \delta_{\mu\nu} f(n) p^\mu p^\nu = \int d^d k \, \frac{1}{k^4} \delta_{\mu\nu} g(n) f(n) p^\mu p^\nu. \quad (4.38)$$

Следовательно,

$$\langle g(n) \delta_{\mu\nu} f(n) \rangle = \langle \delta_{\mu\nu} g(n) f(n) \rangle. \quad (4.39)$$

Другие случаи рассматриваются полностью аналогично.

При применении данных правил оказывается необходимым знать, чему равны коэффициенты разложения пропагатора неминимального оператора, выражения для которых многократно использовались при вычислении практически всех нетривиальных диаграмм. Для них были введены специальные обозначения, позволяющие значительно упростить результаты и облегчить вычисления:

$$\begin{aligned} (K(k+p))^{-1} &= (Kk)^{-1} + \delta^\mu (Kk)^{-1} p_\mu + \delta^{\mu\nu} (Kk)^{-1} p_\mu p_\nu + \\ &\quad + \delta^{\mu\nu\alpha} (Kk)^{-1} p_\mu p_\nu p_\alpha + \delta^{\mu\nu\alpha\beta} (Kk)^{-1} p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta + \dots \equiv \\ &\equiv \left(1 + \frac{1}{k} \Delta^\mu p_\mu + \frac{1}{k^2} \Delta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + \frac{1}{k^3} \Delta^{\mu\nu\alpha} p_\mu p_\nu p_\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^4} \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta + \dots \right) (Kk)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где для удобства записи результатов вычислений мы вынесли за скобки $(Kk)^{-1}$ слева. (Коэффициенты при высших степенях p_μ при расчетах расходящейся части эффективного действия не требуются)

Для получения коэффициентов $\Delta^\mu - \Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$ мы будем использовать следующее тождество:

$$1_i^j = (K(k+p))_i^m (K(k+p))^{-1}_m{}^j. \quad (4.41)$$

Разлагая его в ряд по степеням p_μ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta^\mu &= -L \hat{K}^\mu; \\ \Delta^{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} + L^2 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu)}; \\ \Delta^{\mu\nu\alpha} &\equiv -\frac{1}{6} L(L-1)(L-2) \hat{K}^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} L^2 (L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha)} + \frac{1}{2} L^2 \times \\ &\quad \times (L-1) \hat{K}^{(\alpha} \hat{K}^{\mu\nu)} - L^3 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^{\nu} \hat{K}^{\alpha)}; \\ \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} &\equiv -\frac{1}{24} L(L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{6} L^2 (L-1) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (L-2) \hat{K}^{(\mu\nu\alpha} \hat{K}^{\beta)} + \frac{1}{6} L^2 (L-1)(L-2) \hat{K}^{(\beta} \hat{K}^{\mu\nu\alpha)} + \\
& + \frac{1}{4} L^2 (L-1)^2 \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^{\alpha\beta)} - \frac{1}{2} L^3 (L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \hat{K}^\alpha \hat{K}^{\beta)} - \\
& - \frac{1}{2} L^3 (L-1) \hat{K}^{(\alpha} \hat{K}^{\mu\nu} \hat{K}^{\beta)} - \frac{1}{2} L^3 (L-1) \hat{K}^{(\alpha} \hat{K}^\beta \hat{K}^{\mu\nu)} + \\
& + L^4 \hat{K}^{(\mu} \hat{K}^\nu \hat{K}^\alpha \hat{K}^{\beta)},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

причем симметризация производится по всем греческим индексам и

$$A^{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)} \equiv \frac{1}{n!} (A^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + A^{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_n} + \ldots + A^{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1}). \tag{4.43}$$

(Необходимость симметризации связана с наличием свертки с полностью симметричным тензором $p_\mu \ldots p_\alpha$).

Полученные коэффициенты удовлетворяют следующим тождествам, которые неоднократно использовались при вычислениях однопетлевых диаграмм:

$$\begin{aligned}
& \Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{\mu\nu} + L \hat{K}^{(\mu} \Delta^{\nu)} = 0; \\
& \Delta^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{6} L(L-1)(L-2) \hat{K}^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \Delta^{\alpha)} + L \hat{K}^{(\mu} \Delta^{\nu\alpha)} = 0; \\
& \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{24} L(L-1)(L-2)(L-3) \hat{K}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{6} L(L-1)(L-2) \times \\
& \times \hat{K}^{(\mu\nu\alpha} \Delta^{\beta)} + \frac{1}{2} L(L-1) \hat{K}^{(\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta)} + L \hat{K}^{(\mu} \Delta^{\nu\alpha\beta)} = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

и т.д., а также аналогичным тождествам, когда K и Δ меняются местами.

Приведем теперь наиболее простой пример на применение ранее рассмотренных соотношений. Рассмотрим

$$< (L-3) (Nn)^\alpha (Kn)^{-1} >, \tag{4.45}$$

где $N^{\mu\nu\ldots\alpha}$ - полностью симметричный тензор с $L-3$ индексами. Тогда можно записать $(L-3) (Nn)^\alpha$ в виде $\delta^\alpha(Nn)$. Используя правило (4.37), получаем следующее соотношение:

$$< (L-3) (Nn)^\alpha (Kn)^{-1} > = - < (Nn) \delta^\alpha (Kn)^{-1} >. \tag{4.46}$$

Вспоминая выражение для Δ^α мы немедленно приходим к тождеству

$$< (L-3) \hat{N}^\alpha > = L < \hat{N} \hat{K}^\alpha >. \tag{4.47}$$

Рассмотрение более сложных случаев производится полностью аналогично, хотя далеко не всегда является очевидной связь между различными выражениями получаемая подобным образом.

Приложение А

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации.

- Предложено обобщение метода *т'Хоффа-Вельтмана* вычисления однопетлевых расходимостей на случай произвольных минимальных и неминимальных операторов и развита соответствующая диаграммная техника. Произведено исследование общей структуры контрчленов для операторов произвольного порядка.

- Построены явно ковариантные формулы для расходящейся части однопетлевого эффективного действия для произвольных минимальных и неминимальных операторов в четырехмерном искривленном пространстве, включая произвольные операторы нечетного порядка.

- Показано соответствие полученных формул друг с другом, а также с ранее известными результатами. В частности, рассмотрены случаи минимальных операторов второго и четвертого порядков, теории векторного поля и эйнштейновской гравитации в неминимальных калибровках.

- Впервые вычислены контрчлены для эйнштейновской гравитации с космологической постоянной в произвольной неминимальной калибровке. Установлено отсутствие калибровочной зависимости расходящейся части эффективного действия на уравнениях движения.

- Впервые найдены выражения для однопетлевого эффективного действия в теориях с минимальными операторами 6-го и 8-го порядков не содержащими соответственно членов с производными 5-го и 7-го порядков, а также для неминимального оператора второго порядка для симметричного тензорного поля спина 2.

- Написан тензорный пакет для системы аналитических вычислений *REDUCE*, позволяющий производить обработку многоиндексных выражений при помощи вычислительных машин.

- На основе тензорного пакета написан ряд процедур для компьютерного вычисления однопетлевых расходимостей при помощи найденных общих формул.

- Найдены однопетлевые контрчлены для аффинно-метрической теории гравитации, взаимодействующей со скалярным полем при наличии космологической постоянной. Установлена неперенормируемость теории.

Работа была выполнена на кафедре теоретической физики Московского Государственного Университета им. М.В.Ломоносова.

Я глубоко признателен моему научному руководителю Хамитову В.Р. и доценту Пронину П.И. за постоянное внимание и помощь при выполнении данной работы.

Литература

- [1] Minakshisundaram S. and Pleijel A. *Some Properties of the Eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian Manifolds*// *Canad.J.Math.* – 1949. – 1. – с. 242 – 256.
- [2] Minakshisundaram S. *Eigenfunctions on Riemannian Manifolds*// – *J.Ind.Math.Soc.* – 1953. – 17. – с. 159 – 165.
- [3] Seeley R.T. *Complex powers of an elliptic operator, in Singular Integrals*// *In: Proc. Symp. Pure Math.* – 1967. – Vol. 10. – A.M.S., Providence, с. 288 – 307.
- [4] Gilkey P.B. *The spectral geometry of a riemannian manifold*// – *J. Differ. Geomet.* – 1975. – 10. – с. 601 – 618.
- [5] Gilkey P.B. *The spectral geometry of the higher order laplacian*// – *Duke Mathematical Journal.* – 1980. – 47. – с. 511 – 528.
- [6] Gilkey P.B. *Correction to: The spectral geometry of the higher order laplacian*// *Duke Mathematical Journal.* – 1981. – 48. с. 887.
- [7] Schwinger J.S. *On gauge invariance and vacuum polarization*// – *Phys. Rev.* – 1951. – 82. с. 664 – 679.
- [8] ДеВитт Б.С. *Динамическая теория групп и полей*//, – М.: Наука, 1987. – 287 с.
- [9] Barvinsky A.O. and Vilkovisky G.A. *The generalized Schiwger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*// – *Phys.Rep.* – 1985. – 119. с. 1 – 74.
- [10] Obukhov Yu.M. *Spectral geometry of the Riemann-Cartan space-time*// – *Nucl.Phys. B* – 1983. – 212. с. 237 – 254.
- [11] Barth N.H. *Heat kernel expansion coefficient: I. An extension*// – *J.Phys.A: Math.Gen.* – 1987. – 20. – с. 857 – 874.
- [12] Barth N.H. *Heat kernel expansion coefficient: II. Higher order operators*// – *J.Phys.A: Math.Gen.* – 1987. – 20. – с. 875 – 888.
- [13] Cognola G. and Zerbini S. *Heat kernel expansion in geometric field*// – *Phys.Lett. B* – 1987. – 195. – с. 435 – 438.
- [14] Cognola G. and Zerbini S. *Seely-DeWitt coefficients in a Rieman-Cartan manifold*// – *Phys.Lett. B* – 1988. – 214. – с. 70 – 74.

- [15] Gusynin V.P. Seeley-Gilkey coefficients for fourth-order operators on a riemannian manifold// – Nucl.Phys. B – 1990. – 333. – c. 296 – 316,.
- [16] Gusynin V.P., Gorbar E.V. and Romankov V.V. Heat kernel expansion for nonminimal differential operators and manifold with torsion// – Nucl.Phys. B – 1991. – 362. – c. 449 – 471.
- [17] Lee C. and Rim C. Background fermi fields and Schwinger-DeWitt proper time method// – Nucl.Phys. B – 1985. – 255. – 439 – 464.
- [18] Jack I. and Osborn H. General background calculations with fermion fields// – Nucl.Phys. B – 1985. – 249. – c. 472 – 506.
- [19] Lee H.W., Pac P.Y. and Shin H.K. Higher derivatives operators and DeWitt's WKB anzats// – Phys.Rev D – 1986. – 33. – c. 1012 – 1017.
- [20] Lee H.W., Pac P.Y. and Shin H.K. New algorithm for asymptotic expansions of the heat kernel// – Phys.Rev D – 1987. – 35. – c. 2440 – 2447.
- [21] Barvinsky A.O., Gusev Yu.V., Vilkovisky G.A. and Zhytnikov V.V. Covariant Perturbation Theory (IV), Third Order in Curvature// Report of the University of Manitoba (University of Manitoba, Winnipeg,1993);
- [22] Barvinsky A.O., Gusev Yu.V., Vilkovisky G.A. and Zhytnikov V.V. The basis of nonlocal curvature invariants in quantum gravity theory. Third order// J.Math.Phys. – 1994. – 35. – c. 3525 – 3542.
- [23] Barvinsky A.O., Gusev Yu.V., Vilkovisky G.A. and Zhytnikov V.V. Asymptotic behaviors of the heat kernel in covariant perturbation theory// J.Math.Phys. – 1994. – 35. – c. 3543 – 3559.
- [24] t'Hooft G. and Veltman M. One-loop divergencies in the theory of gravitation// Ann. Inst. Henri Poincaré – 1974. – 20. – c. 69 – 94.
- [25] t'Hooft G. and Veltman M. Regularisation and renormalization of gauge fields// Nucl.Phys. B – 1973. – 44. – c. 189 – 213.
- [26] t'Hooft G. An algorithm for the poles at dimensional four in the dimensional regularization procedure// Nucl.Phys. B – 1973. – 62. – c. 444 – 460.
- [27] Ichinose S. and Omote M. Renormalization using the background-field method// Nucl.Phys. B – 1982. – 203. – c. 221 – 267.
- [28] Ichinose S. Reexamination of the renormalizability problem in $(3 + 1)$ -dimensional Einstein gravity// Phys.Lett. B – 1992. – 284. – c. 234 – 241.
- [29] Ichinose S. BRS symmetry on background-field, Kallosh-theorem and renormalization// Nucl.Phys. B – 1993. – 395. – c. 433 – 453.
- [30] van Nieuwenhuizen P. On the renormalization of quantum gravitation without matter// Ann. of Phys. – 1977. – 104. – c. 197 – 217.
- [31] Jack I. and Osborn H. Background-field calculations in curved spacetime. I. General formalism and application to the scalar field// Nucl.Phys. B – 1984. – 324. – c. 331 – 364.

- [32] Jack I. and Osborn H. Two-loop background-field calculations for arbitrary background fields// Nucl.Phys. B – 1982. – 207. – с. 474 – 504.
- [33] Abbott L.F. The background field method beyond one loop// Nucl.Phys. B – 1981. – 185. – с. 189 – 203.
- [34] Jackiw R. Functional evaluation of the effective potential// Phys.Rev. D – 1974. – 9. – с. 1686 – 1701.
- [35] Faddeev L.D., Popov V.N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field// Phys.Lett. B – 1967. – 25. – с. 29 – 30.
- [36] Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей// М.: Наука, 1988. – 271 с.
- [37] Kallosh R.E., Tarasov O.V. and Tyutin I.V. One-loop finiteness of quantum gravity off mass shell// Nucl.Phys. B – 1978. – 137. – с. 145 – 163.
- [38] Vilkovisky G.A. The unique effective action in quantum field theory// Nucl. Phys. B – 1984. – 234. – с. 125 – 137.
- [39] Fradkin E.S. On the new definition of off-shell effective action// Nucl. Phys. B – 1984. – 234. – с. 509 – 523.
- [40] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования// М.: Наука, – 1986. – 318 с.
- [41] Гутман Д.М., Тютин И.В. Каноническое квантование полей со связями// М.: Наука, – 1986. – 216 с.
- [42] Романов В.Н. и Шварц А.С. Аномалии и эллиптические операторы// ТМФ, т. – 1979. – 41. – с. 190 – 204.
- [43] Cristensen S.M. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background. The covariant point-separation method// Phys.Rev. D – 1976. – 14. – с. 2490 – 2501.
- [44] Cristensen S.M. Regularisation, renormalization, and covariant geodesic point separation// Phys.Rev. D – 1978. – 17. – с. 946 – 963.
- [45] Fradkin E.S. and Vilkovisky G.A. On renormalization of Quantum field theory in curved spacetime// preprint of Institute of Theoretical Physics in Bern, October, – 1987.
- [46] t'Hooft G. and Veltman M. Regularization and renormalization of gauge fields// Nucl. Phys. B – 1972. – 44. – с. 189 – 213.
- [47] Bolliani C.G. and Giambiagi J.J. Dimensional renormalization: the number of dimensions as a regularizing parameter// Nuovo Cim. B – 1972. – 12. – с. 20 – 26.
- [48] Bolliani C.G. and Giambiagi J.J. Lowest order "divergent" graphs in ν - dimensional space// Phys. Lett. B – 1972. – 40. – с. 566 – 568.
- [49] Asmore J. A method of gauge - invariant regularization// Lett. Nuovo. Cim. – 1972. – 4. – с. 289 – 290.

- [50] Cicuti G.M. and Montaldi E. Analytic renormalization via continuous space dimension// *Lett. Nuv. Cim.* – 1972. – 4. – с. 329 – 332.
- [51] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей// М.: Наука, – 1976. – 480 с.
- [52] Fradkin E.S. and Tseytlin A.A. Higher Derivative Quantum Gravity: One-loop Counterterms and Asymptotic Freedom// preprint of P.Lebedev Physical Institute – N170. – Moscow, 1981.
- [53] Fradkin E.S. and Tseytlin A.A. Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity// *Phys.Lett. B* – 1981. – 104. – с. 377 – 381.
- [54] Fradkin E.S. and Tseytlin A.A. Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity// *Nucl.Phys. B.* – 1982. – 201. – с. 469 – 491.
- [55] Slavnov A.A. Invariant regularization of non-linear chiral theories// *Nucl.Phys. B* – 1971. – 31. – с. 301 – 315.
- [56] Илин В.А., Крюков А.П. ATENSOR - REDUCE программ for tensor simplifications// М.В.Ломоносов Moscow State University & V.D.Skobeltzyn Institute of Nuclear Physics, Preprint-94-42/364.
- [57] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля// М.: Наука, – 1973. – 505 с.
- [58] Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. Калибровочная теория гравитации// М., Изд-во МГУ, – 1985. – 142 с.
- [59] Весс Ю., Беггер Д. Суперсимметрия и супергравитация// М.: Мир, – 1986. – 179 с.
- [60] Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию// М.: Мир, – 1989. – 328 с.
- [61] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. т. 1// М.: Мир, – 1990. – 518 с.
- [62] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. т. 2// М.: Мир, – 1990. – 636 с.
- [63] Rodionov A.Ya., Taranov A.Yu. Combinatorial aspects of simplifications of algebraic expressions// In: *Lecture Notes in Comp. Sci.* 378, *Proceedings of EUROLOCAL'87.* – 1989. – с. 192 – 201.
- [64] Hearn A. REDUCE USER'S MANUAL, version 3.3// The Rand publication CP78 (Rev. 7.87), – 1987.
- [65] Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я., Таранов А.Ю. Язык аналитических вычислений REDUCE и его приложения в физике// М.: Изд. МГУ, – 1989. – 176 с.
- [66] Крюков А.П., Родионов А.Я., Таранов А.Ю. Программирование на языке R-LISP// М.: Радио и Связь, – 1990. – 192 с.

- [67] Kalmykov M.Yu., Pronin P.I. and Stepanyantz K.V. *Projective invariance and one-loop effective action in affine-metric gravity interacting with scalar field*// *Class. Quantum Grav.* – 1994. – 11. – c. 2645 – 2652.
- [68] Pronin P.I. and Stepanyantz K.V. *"New Tensor Package for REDUCE System"*// In: *"New Computing Technick in Physics Research. IV. ed.: B.Denby and D.Perred-Gallix,* – World Scientific, Singapore, – 1995. – c. 187 – 192.
- [69] Pronin P.I. and Stepanyantz K.V. *One-loop background calculations in the general field theory*// In: *Gravity, Particles and Space-Time, ed. P.Pronin and G.Sardanasvili,* – World Scientific, Singapore, – 1996. – c. 441 – 470.
- [70] Pronin P.I. and Stepanyantz K.V. *Algorithms for the one-loop divergences calculations*// *Grav. and Cosmology* – 1996. – 2. – c. 38 – 44.
- [71] P.I.Pronin and K.V.Stepanyantz *One-loop background calculations in the general field theory*// *hep-th 9504038*.
- [72] P.I.Pronin and K.V.Stepanyantz *One-loop counteterms for theories with arbitrary nonminmal operator in the curved space*// *hep-th 9505206*.