Übung 2 – MATLAB Control System Toolbox

- 1. Beschreibung linearer, zeitinvarianter Systeme (LTI):
 - Single-Input/Single-Output (SISO) und Multiple-Input/Multiple-Output (MIMO)
 - 1.1. Parametrische Beschreibung
 - Übertragungsfunktion / Transfer Function (TF)

$$G(s) = \frac{num(s)}{den(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{ab_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0}$$

Zählerpolynom *num* mit Ordnung *m* und Nennerpolynom *den* mit Ordnung *n*

Befehl tf(num, den): num und den als Vektoren mit Koeffizienten von s in absteigender Reihenfolge.:

```
>> tf([1 2],[1 0 10])
ans =
    s + 2
    -----
    s^2 + 10
Continuous-time transfer function.
>> help tf
```

• Nullstellen – Polstellen – Darstellung / Zero-Pole-Gain (ZPK)

$$G(s) = k \cdot \frac{(s - z_1) \cdot ... \cdot (s - z_{m-1}) \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot ... \cdot (s - p_{n-1}) \cdot (s - p_n)}$$

k Verstärkungsfaktor (reell)

 z_1, \ldots, z_m Zaehler – Nullstellen (reell / konj. komplex)

 p_1, \ldots, p_n Nenner – Polstellen (reell / konj. komplex)

Befehl zpk(z,p,k): Nullstellenvektor z, Polstellenvektor p und Verstärkungsfaktor k.

```
>> zpk([-6 1 1],[-5 1],3)
ans =
   3 (s+6) (s-1)^2
   -----(s+5) (s-1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> help zpk
```

• Zustandsdarstellung / State – Space (SS)

DGL 1. Ordnung für jedes Speicherelement (Integrator) $\rightarrow n$ DGLs 1. Ordnung statt eine DGL n—ter Ordnung





Zustands – DGL:	x = Zustandsvektor	$(Nx \times 1)$
$\dot{a} = Aa + Da$	u = Eingangsvektor	$(N u \times 1)$
$\dot{x} = Ax + Bu$	y = Ausgangsvektor	$(Ny \times 1)$
Ausgangsgleichung:	A = Zustandsmatrix	$(Nx \times Nx)$
y = Cx + Du	B = Eingangsmatrix	$(Nx \times Nu)$
	C = Ausgangsmatrix	$(Ny \times Nx)$
	D = Durchgangsmatrix	$(Ny \times Nu)$

```
Befehl ss(A,B,C,D)
```

```
>> A=[1\ 2;\ 3\ 4];\ B=[1\ 1;\ 0\ 1];\ >> C=[0\ 1;\ 1\ 2;\ 3\ 1];\ D=[0\ 0;\ 0\ 0;\ 0\ 0];
ans =
  A =
        x1
            x2
              2
          1
    х1
   x2
          3
              4
             u2
        u1
          1
              1
   x1
   x2
          0
              1
  C =
            x2
        x1
   у1
          0
              1
               2
   y2
              1
   у3
          3
             u2
        u1
              0
   у1
          0
   y2
          0
              0
```

Continuous-time state-space model.

>> help ss

у3

1.2. Nichtparametrische Beschreibung

• Frequenzgang – Daten – Modelle / Frequency Response Data (FRD)

Frequenz – Daten aus Messung oder Simulation

Sinus – Anregung: $y(t) = |G(\omega)| \cdot \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

Frequenzgang funktion: $F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

Betrag: Phase: $|F(j\omega)| = \sqrt{Re\{F(j\omega)\}^2 + Im\{F(j\omega)\}^2}$ Phase: $\frac{Im\{F(j\omega)\}}{Re\{F(j\omega)\}}$

```
Befehl frd(ant; freq; eh):
                     = Vektor mit den komplexen Frequenzantworten
             ant
             frea
                     = Vektor mit gespeicherten Frequenzen
             eh
                      = Einheit der Frequenz ('rad/s' oder 'Hz')
             >> freq = [0.01 0.1 1 10 100 1000 10000];
             >> ant = (1-j*freq) ./(1+freq.^2);
             >> sysfrd = frd(ant,freq,'Units','rad/s')
             ant =
              0.9999 - 0.0100i 0.9901 - 0.0990i 0.5000 - 0.5000i 0.0099 - 0.0990i 0.0001 - 0.0100i 0.0000 - 0.0010i 0.0000 - 0.0001i
             sysfrd =
                  Frequency(rad/s)
                                                     Response
                  _____
                                                     ------
                                           9.999e-01 - 9.999e-03i
                           0.0100
                                           9.901e-01 - 9.901e-02i
                           0.1000
                                           5.000e-01 - 5.000e-01i
                           1.0000
                                           9.901e-03 - 9.901e-02i
                          10.0000
                        100.0000
                                           9.999e-05 - 9.999e-03i
                       1000.0000
                                           1.000e-06 - 1.000e-03i
                                           1.000e-08 - 1.000e-04i
                      10000.0000
            Continuous-time frequency response.
            help frd
Umwandeln und Bearbeiten der Systeme
    Vorrangliste:
                             FRD \rightarrow SS \rightarrow ZPK \rightarrow TF
                                           sys = systf + tf(sysss)
    Umwandeln:
                             vorher:
                                            sys = tf(systf + sysss)
                             nachher:
                            Übergabe des Systems an Befehle
    Explizite Umwandlung:
                             tf(sys), ss(sys), zpk(sys) oder frd(sys,freq)
    Umwandlung mit MATLAB – Befehlen:
    zp2tf(z,p,k)
                              tf2zp(num,den)
                                                         tf2ss(num,den)
    ss2tf(A,B,C,D,iu)
                              ss2zp(A,B,C,D,i)
                                                        zp2ss(z,p,k)
    Arithmetische Operatoren:
      Addition und Subtraktion: Parallelschaltung
            y = G_1 \cdot u + G_2 \cdot u
                                                  sys = sys1 + sys2
                                       \leftrightarrow
      Multiplikation: Reihenschaltung
            y = G_1 \cdot v = G_1 \cdot (G_2 \cdot u)
                                                  sys = sys1 * sys2
                                       \leftrightarrow
      Matrix-Inversion:
            \mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{v}
                                                  sys = inv(sys1)
                                       \leftrightarrow
      links- und rechtsseitige Matrix – Division:
            G_1^{-1} G_2 \leftrightarrow sys1 \setminus sys2 G_1 \cdot G_2^{-1} \leftrightarrow sys1 / sys2
```

Ansprechen der Ein- und Ausgänge mit sys(i,j)

Teilsystem: extrahieren: subsys = systf(1,2),

ändern: systf(2,1) = subsys

Ein-/Ausgänge: löschen: systf(:,1) = []

hinzufügen: systf = [systf,sys] (Typ nach Rang),

systf(:,2) = sys(Typ systf)

Horizontal: sys = [sys1, sys2]

Vertikal: sys = [sys1 ; sys2]

Diagonal: sys = append(sys1,sys2)

Parallel und seriell: sys = parallel(sys1,sys2,in1,in2,out1,out2)

sys = series(sys1,sys2,outputs1,inputs2)

Rückkopplung: sys = feedback(sys1,sys2)

3. Analysieren der Systemeigenschaften

- 3.1. Allgemeine Eigenschaften
 - Überprüfung und Abfrage von durch MATLAB bestimmte Systemeigenschaften
 - Nützlich für die Programmierung komplexer Skripts und Funktionen:
 - Auswerteroutinen
 - Komplexe Plots erstellen
 - Systemeigenschaften oder Boolesche Werte (ja/nein) als Rückgabewerte

• Modelltyp: - ausgeben: class(sys)

- prüfen: isa(sys,'classname')

• Zeitdaten: – zeitkontinuierlich: isct(sys)

- zeitdiskret: isdt(sys)

- Verzögerung: hasdelay(sys)

• Strukeur: — Ein- & Ausgänge: isempty(sys)

- Ordnung: isproper(sys)

- SISO - Modell: issiso(sys)

• Größe: size(sys)

3.2. Modell – Dynamik

• Stationäre (Gleich –) Verstärkung: dcgain(sys)

- Frequenz ist s = 0 bzw. z = 1

– Reine Integratoren: Verstärkung ∞

• Natürliche Frequenzen und Dämpfungen: damp(sys)

Pole Kreisfrequenz Dämpfungsgrad $p_i = a + j b \qquad \omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \xi_n = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

• Nullstellen: damp(sys)

• Polstelen: – Eigenwerte der Matrix A: pole(sys)

- Wurzeln des Polynoms c: roots (sys)

• Sortieren: - zeitkontinuierlich: [s, ndx] =esort(p)

- zeitdiskret: [s, ndx] = dsort(p)

• Null – Polstellen – Verteilung: [p, z] = pzmap(p)

Linien gleicher Dämpfung und natürlicher Frequenz: sgrid

3.3. Systemantwort im Zeitbereich

• Befehlsaufruf: [y,t,x] = befehl(sys,par)

Zeitvektor: t = 0: dt: Tf

Ausgang y: SIMO: length(t) \times Ny; MIMO: length(t) \times Ny \times Nu

• Freie Bewegung: [y,t,x] = inital(sys,x0,t)

Eingänge zu Null gesetzt, Anfangswerte des Zustandsvektors xo

• Impulsantwort: [y,t,x] = impulse(sys,t)

• Sprungsantwort: [y,t,x] = step(sys,t)

• Systemantwort: [y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0)

• Testsignal: [u,t] = gensig(typs,tau)

typ: 'sin' = Sinus tau = Periodendauer

'square' = Rechteck

'pulse' = periodic pulse

3.4. Systemantwort im Frequenzbereich

Frequenzgang: Komplexe Antwort auf Sinusanregung im eingeschwungenen Zustand Voraussetzung: System asymptotisch stabil, d.h. Realteile aller Eigenwerte < 0

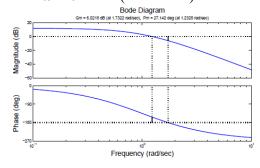
• Frequenzantwort berechnen:

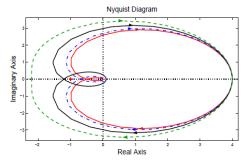
Einzelne Frequenz f: frsp = evalfr(sys,f) Frquenzvektor ω : H = freqresp(sys,W)

• Bode – Diagramm: [mag, phase, W] = bode(sys)

• Nyquist – Diagramm: [re, im, W] = nyquist(sys)

Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises von $\omega = 0$ bis ∞ (Ortskurve).





4. Entwurf und Optimierung von Reglern

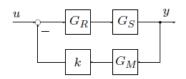
- 4.1 Wurzelortskurvenverfahren
 - Wurzelortskurve: Verhalten der Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit des Rückführverstärkungsfaktors k in der komplexen Null – Polstellen – Ebene.
 - Übertragungsfunktion offener Regelkreis

$$-G_0 = k \cdot G_R \cdot G_S \cdot G_M = k \cdot \frac{n_R \cdot n_S \cdot n_M}{d_R \cdot d_S \cdot d_M}$$

• Pole von G_0 = Wurzeln des Nennerpolynoms von G

$$d_0 + k \cdot n_0 = d_R \cdot d_S \cdot d_M + k \cdot n_R \cdot n_S \cdot n_M = 0$$

Wurzelortskurve:



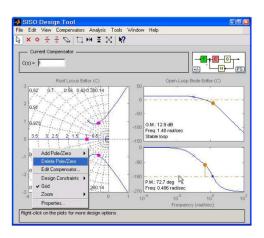
• Verstärkungsfaktoren interaktiv auslesen:

- 4.2 Interaktiver Reglerentwurf mit dem SISO Design Tool
 - SISO Design Tool

Reglerentwurf mit:

- Bode Diagramm
- WOK Verfahren

Start mit:

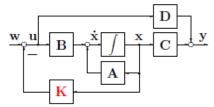


- 4.3 Polplazierung in Verbindung mit Zustandsrückführung
 - Vollständige Zustandsrückführung mit Rückfährmatrix K

Streck:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

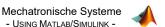
 $y = Cx + Du$



Regelgesetz (w = o): u = -K x

Geschlossener Regelkreis: $\dot{x} = (A - B K) \cdot x$

Prof. X. Wang WS22/23 - 18 -



- Polplazierung: Rückfährmatrix K so berechnen, dass Pole des geschlossenen Regelkreises den Polen eines vorgegebenen Wunschpolynoms entsprechen.
- Zustandsregler Rückfährvektor k/Rückfährmatrix K k = acker(A,b,p)K = place(A,B,p)

- 4.4 Linear – quadratisch optimale Regelung
 - Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums: (Q gewichtet Zustände, R gewichtet Eingänge)

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u} \right) dt$$

Algebraische Matrix – Riccati – Gleichung lösen

$$0 = A^T S + SA - (SB + N) R^{-1} (B^T S + N^T) + Q$$

• Rückführmatrix K:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{S} + \mathbf{N}^T \right)$$

• LQ – optimierte Regler – Rückführmatrix K

- 5. Bewertung der LTI Modelle
 - Zustandsdarstellung (SS)
 - o Grundsätzlich am besten geeignet!
 - Algorithmen oft für SS LTI Modelle implementiert
 - Übertragungsfunktion (TF)
 - Nur für Systeme niedriger Ordnung (< 10)
 - Oft schlecht konditioniert
 - Nullstellen Polstellen Darstellung (ZPK)
 - o Meist besser als TF LTI Modell
 - o Probleme: mehrfache Polstellen/Polstellen bei Null
 - Modelle möglichst als SS LTI Modell beschreiben. Hierbei möglichst eine normierte bzw. austarierte Beschreibung bei verwenden.
 - Konvertierungen zwischen Modelltypen vermeiden.
 - Ergebnisse auf ihre Verlässlichkeit und Realitätsnähe Überprüfen.

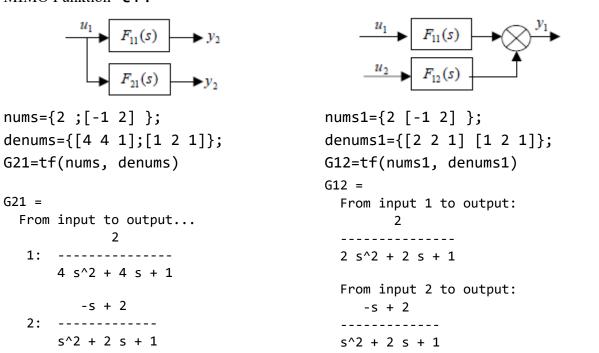
Wichtigste Ingenieuraufgabe!

Übung 2 – MATLAB Control System Toolbox (Anwendungen)

SISO Funktion tf bildet aus dem Zähler und Nenner die Übertragungsfunktion:

SISO Funktion tfdada Gibt den Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion zurück:

MIMO Funktion tf:



Funktion **zpk** bildet die Übertragungsfunktion in der Null-Pol-Form:

Funktion SS bildet ein LTI Modell in der Zustandsform:

Aufgabe

Für eine Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

Bilden Sie ein LTI Objekt in der Form einer Zustandsgleichung.

DGL:
$$y''' = -3y'' - y' - y + 2u$$

Zustandsgröße: $x_1 = y$ $\dot{x}_1 = y' = x_2$,
 $x_2 = y' \rightarrow \dot{x}_2 = y'' = x_3$,
 $x_3 = y''$ $\dot{x}_3 = y''' = -3x_3 - x_2 - x_1 + 2u$,

Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 - 1 - 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot u = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot u$$

Ausgang:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \rightarrow y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

 $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \rightarrow y = \mathbf{C}\mathbf{x}.$

ss1=ss(A,B,C,D)

ss1 = A =

Continuous-time statespace model.

 $A=[0\ 1\ 0;\ 0\ 0\ 1;\ -1\ -1\ -3];$ B=[0;0;2]; $C=[1\ 0\ 0];$ D=0;

Funktion SSdata gibt die Zustandsform eines LTI Modells zurück

Modelltransformationen:

Alle Modellformen können gegenseitig überführt werden. Dazu dienen Funktionen für die Modell- Transformation.

• In die Übertragungsfunktion:

• In die Pol- Nullstelle- Form:

• In das Zustandsmodell:

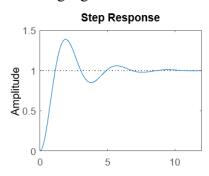
Continuous-time state-space model. Continuous-time state-space model.

y1

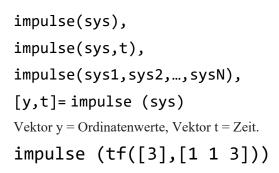
Zeitverhalten der LTI – Systeme:

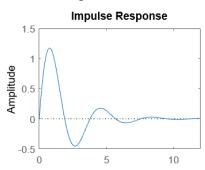
Der Zeitverlauf der Übergangsfunktion wird im MATLAB mit Hilfe der Funktion step berechnet und graphisch dargestellt.

Funktion **step** berechnet und stellt den Zeitverlauf der Übergangsfunktion dar:



Funktion impulse berechnet und stellt den Zeitverlauf der Impulsfunktion dar:

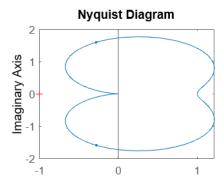




FREQUENZVERHALTEN DER LTI – SYSTEME:

Für Analyse und Synthese in den Frequenzbereich kann man in MATLAB folgende Anweisungen benutzen: nyquist, bode, evalfr, freqresp, margin.

Funktion nyquist Frequenzgangdarstellung und -berechnung:

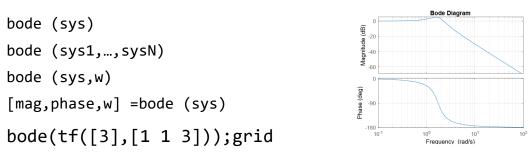


Funktion freqresp Berechnung des Frequenzganges eines LTI Systems:

Prof. X. Wang WS22/23 - 23 -

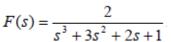
Funktion evalfr Berechnung des Frequenzganges für a komplex Zahl:

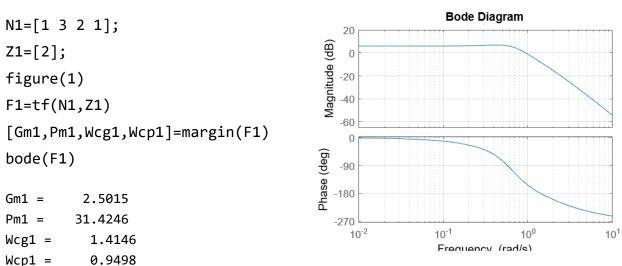
Funktion bode Berechnung der logarithmischen Amplituden- und Phasengänge:



Funktion margin Berechnung der Amplituden- und Phasenrand:

Berechnen Sie den Amplituden und – Phasenrand für



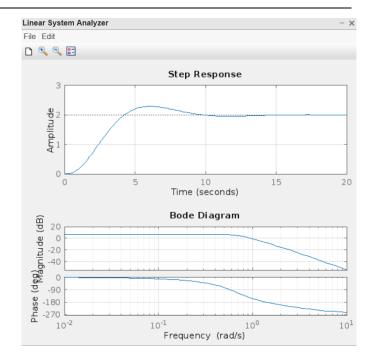


Funktion ltiview Berechnung und stellt den Zeit- oder Frequenzverlauf eines LTI systems dar:

```
ltiview
ltiview (plottype,sys)
ltiview (plottype,sys1,sys2, ...,sysN)

plottype = 'step' / 'impulse' / 'bode' / 'nyquist'
```

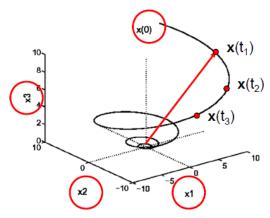
ltiview({'step';'bode'},F1);

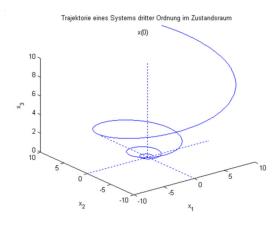


Zustandstrajektorie

```
% Script Trajektorie.m
echo off
clear
close all;
A = [-0.5 \ 0 \ 0; \ 0 \ -0.3 \ 2; \ 0 \ -2 \ -0.3];
B = [1; 1; 1]; C = [1 1 1]; D = 0;
System=ss(A,B,C,D);
x0 = [10, 10, 10];
echo on
% Eigenbewegung eines Systems dritter Ordnung
% dreidimensionale Darstellung im Zustandsraum
%
echo off
figure(1);
T=0:0.01:10;
[Y, T, X]=initial(System, x0, T);
plot3(X(:, 2), X(:, 3), X(:, 1));
hold on
plot3([-10 10], [0 0], [0 0], ':');
plot3([0 0], [-10 10], [0 0], ':');
plot3([0 0], [0 0], [10 0], ':');
xlabel('x_1'); ylabel('x_2');
zlabel('x_3'); grid('off');
title('Trajektorie eines Systems dritter
Ordnung im Zustandsraum');
text(6, 10, 10, 'x(0)')
axis([-10 10 -10 10 0 10]);
```

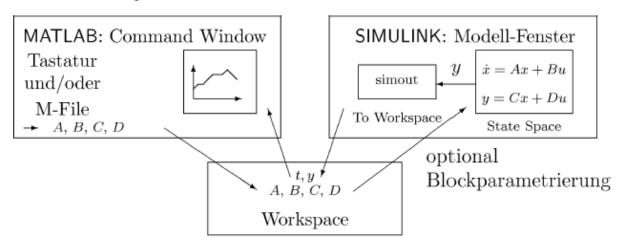
Der durch die Koordinaten von x(t) beschriebene Punkt verändert sich mit der Zeit und beschreibt eine Kurve im Zustandsraum, die als Zustandskurve oder Trajektorie des Systems bezeichnet wird.





Modelltransformationen zwischen MATLAT und Simulink:

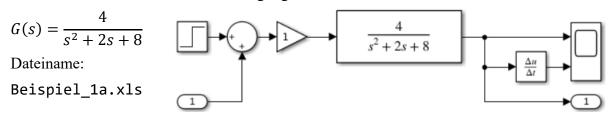
Der Datentransfer aus dem Simulink-Modell in den Workspace erfolgt u. a. über den TO Workspace Block in Array- oder Structure-Format, z. B. wie in Bild für die Matrix simout oder den Outport Block wie in Bild. Damit können die Daten in MATLAB u. a. zur grafischen Darstellung weiterverarbeitet werden. Eine weitere Möglichkeit zur Übergabe der Simulationsdaten in den Workspace kann im Scope-Fenster durch aktivieren der Array- oder Structure - Übergabe erreicht werden.



- >> [A,B,C,D]=linmod('modell') % erzeugt die Matrizen für die lineare % Zustands raum-Darstellung des kompletten Modells
- >> [zaehler,nenner]=ss2tf(A,B,C,D) % berechnet aus den Matrizen A,..D den % Zähler und Nenner für die entsprechende Tf-Funktion
- >> [A,B,C,D] = tf2ss(zaehler,nenner) % berechnet die Matrizen des linearen % Zustandsraums aus den Zähler- und Nenner-Polynomen

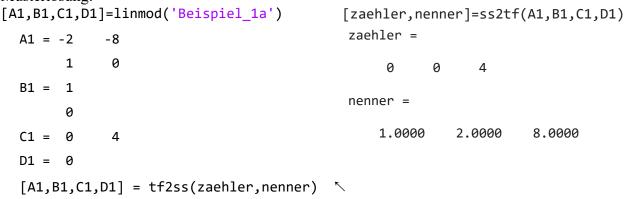
Beispiel:

Für ein simulink-Modell einer Übertragungsfunktion

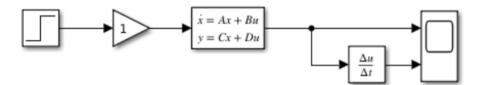


Bilden Sie ein LTI System in der Form einer Zustandsgleichung.

Musterlösung:



A1, B1, C1, D1
Dateiname:
Beispiel_1b.xls



plot(out.ScopeData.time,out.ScopeData.signals(1,1).values,...
 out.ScopeData.time,out.ScopeData.signals(1,2).values) ↓

