Übung 1 – Mathematische Grundlagen

Komplexe Zahl

1. Berechnen Sie alle Nullstellen von $f(z) = z^2 + 4z + 5 = 0$:
2. Geben Sie die Exponentialform der komplexe Zahlen $x = 2 + 2j$ und $y = 4 + 3j$ so wie algebraische Form und Exponentialform von (x + y) und (x · y) an! (Ergebnisse mit Nachkommastellen und Winkel in Radiant !).
3. Geben Sie die Exponentialform der komplexe Zahlen $x = 3 + 4j$ und $y = 1 + j$ so wie algebraische Form und Exponentialform von (x + y) und (x · y) an! (Ergebnisse mit Nachkommastellen und Winkel in Radiant!).
4. Geben Sie die Exponentialform der komplexe Zahlen $x = -12 + 5j$ und die algebraische Form und Eulersche Form von $y = 6 \cdot e^{0{,}89606 \cdot j}$ sowie die Polarkoordinatenform von $z = x/y$ an! (Winkel in Radiant!).

Matrix & Eigenwerte

5. Berechnen Sie folgende Aufgaben per Hand und mit Hilfe der Excel:

geg.

mat_A: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; mat_B: $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; mat_C: $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

ges: 1. (A + B)C = A C + B C; 2. (A B) C = A (B C) ; 3. $(A\,B)^T = B^T A^T$; 4. Determinanten der A,B ;

6. Berechnen Sie die inversen Matrizen per Hand und mit Hilfe der Excel:

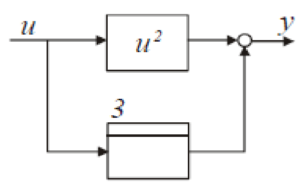
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

7. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen:

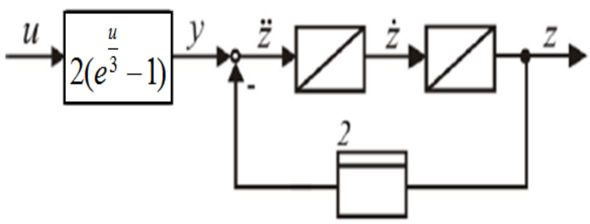
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix};$$

Linearisierung

8. Linearisieren Sie das System, das durch das Blockschaltbild gegeben ist, um den für den Arbeitspunkt für $u_s = 4$.



9. Linearisieren Sie das in dem Strukturbild enthaltene nichtlineare Glied um den Arbeitspunkt der sich für $u_s = 0$.



10. Linearisieren Sie die Gleichung, um den Arbeitspunkt für $h_s = 4$.

$$q(t) = a\sqrt{2gh(t)}, \quad a, g = konst.$$

Laplace - Transformation

11. Bestimmen Sie unter Verwendung der *Transformationstabelle* die *Laplace-Transformierte* der Originalfunktion:

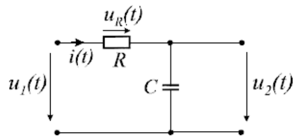
    a) $f(t) = 3t - 5\,t^2 + 3\cos(t)$ b) $f(t) = (t+2)\times\sigma(t)$ c) $f(t) = e^{-3t}\sin(t)$

12. Bestimmen Sie die inversen Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^4 - 4s^3 + 4s^2}$$

13. Bei der Modellbildung für das elektrische System wurde die Differentialgleichung

$$\dot u_2(t) + \frac{1}{RC}u_2(t) = \frac{1}{RC}u_1(t)$$



ermittelt.

Lösen Sie die Differentialgleichung mithilfe der Laplace-Transformation für den Anfangswert $u_2(0)=0$ und das sprungförmige Eingangssignal $u_1(t) = 5\sigma(t)$.

14. Ein System sei gegeben durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung:

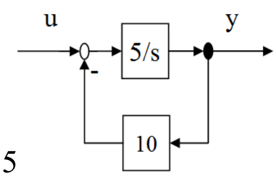
$$\dddot y(t) - 2\ddot y(t) - 3\dot y(t) = 2u(t)$$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels Laplace-Transformation. Nehmen Sie dabei die Anfangszustände y(0) =0, y´(0)=0, y´´(0) = -2 an. Das Eingangssignal sei impulsförmig: $u(t) = 3\delta(t)$.

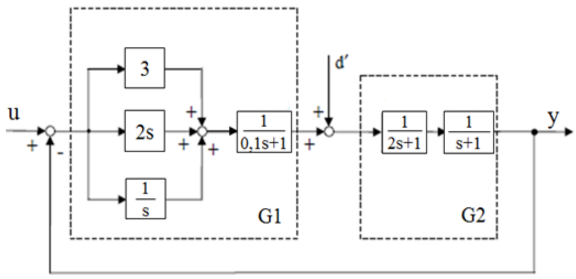
Übertragungsfunktion

15. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion G(s) des Systems.

16. Gegeben sei folgendes Strukturbild:
    Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und G(s)



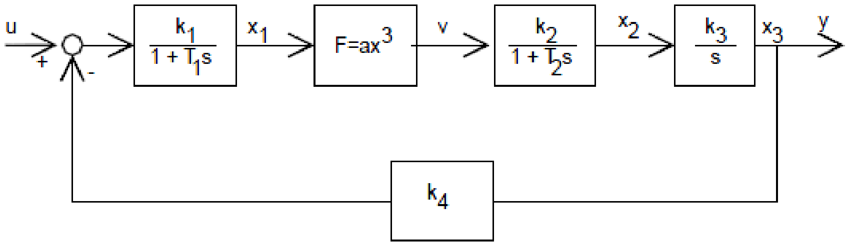
Aufgabe 15



Aufgabe 16

Zustandsdifferentialgleichungen

17. Aufstellen der Zustandsgleichungen aus dem Strukturbild:



Für die Hilfsgröße v gilt $v(t) = a\,x_1^3(t)$.

18. Eine 2nd Differentialgleichung $\ddot{q}(t)+b\cdot\dot{q}(t)+a\cdot q(t)=u(t)$, Die Größe $q(t)$ wird gemessen.
    1) Aufstellen der Zustandsdifferentialgleichung,
    2) Eigenwerte und die Übertragungsfunktion

19. a) Wenden Sie auf das folgende System die Ihnen aus der Vorlesung bekannten beiden Formeln zur direkten Berechnung von $X(s)$ und $Y(s)$ an und ermitteln Sie die Lösung $y(t)$ durch Laplace-Rücktransformation (impulsförmig Eingangsignal: $F(t) = \sigma(t)$, $x(0) = 0$).

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix}}_{\dot{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}}_{x}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}F \qquad y=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}+\underbrace{D}_{=0}u$$

    b) Berechnen Sie weiterhin die Übertragungsfunktion $G(s)$ direkt mit der entsprechenden Formel aus der Zustandsdarstellung heraus.

20. Lösen Sie das gegebene Zustandsraumsystem mithilfe der Laplace-Transformation. Es seien die Anfangswerte $x_1(0) = -6$ und, $x_2(0) = -7$. Das Eingangssignal sei impulsförmig: $u(t) = 2\delta(t)$.

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 4u$$
$$y = x_2$$

21. Gegeben:

$$y^{(6)}(t)+150y^{(5)}(t)+2\cdot10^4y^{(4)}(t)+10^6\dddot{y}(t)+2\cdot10^7\ddot{y}(t)+2\cdot10^8\dot{y}(t)+10^9y(t)$$
$$=3\cdot10^6\ddot{u}(t)+5\cdot10^7\dot{u}(t)+3\cdot10^8u(t)$$

Das System muss 6 Zustandsvariable aufweisen.

Gesucht: $\dot{x} = A\,x + B\,u$ a) Nach Regelungsnormalform

$y = C\,x + Du$ b) Nach Beobachtungsnormalform

Musterlösungen Übung 1 – Mathematische Grundlagen

Komplexe Zahl

1. Berechnen Sie alle Nullstellen von $f(z) = z^2 + 4z + 5 = 0$:

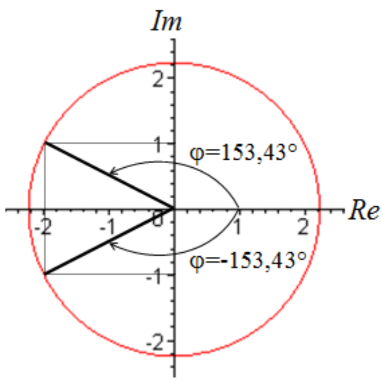
$$f(z) \Rightarrow (z+2)^2 = -1 \Rightarrow z = -2 \pm \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow z = -2 \pm j \Rightarrow |z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\pm 1}{-2}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{+1}{-2}\right) + \pi \\ \arctan\left(\frac{-1}{-2}\right) - \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} -0{,}46364761 + \pi = 2{,}677945 \ rad = 153{,}43° \\ 0{,}46364761 - \pi = -2{,}677945 \ rad = -153{,}43° \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{5}\left(\cos(\pm 2{,}677945) + j \cdot \sin(\pm 2{,}677945)\right) = \sqrt{5} e^{\pm 2{,}677945 j}$$



Keine reelle Nullstelle
2 konjugiert kom. Nullstellen

2. Geben Sie die Exponentialform der komplexe Zahlen $x = 2 + 2j$ und $y = 4 + 3j$ so wie algebraische Form und Exponentialform von ($z = x + y$) und ($z = x \cdot y$) an! (Ergebnisse mit Nachkommastellen und Winkel in Radiant!)

$x = 2 + 2j \rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, $\varphi = \arctan(1) = \pi/4$, $x = \rho\, e^{\varphi j} = \sqrt{8}\ e^{\pi/4\, j}$

$y = 4 + 3j \rightarrow \rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $\varphi = \arctan(3/4) = 0{,}6435$, $y = 5\, e^{\varphi j} = 5\, e^{0{,}6435 j}$

$z = x + y = 6 + 5j$, $\rightarrow \rho = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7{,}8102$, $\varphi = \arctan(5/6) = 0{,}6947$, $z = 7{,}8102\, e^{0{,}6947 j}$

$z = x \cdot y = (2 + 2j) \cdot (4 + 3j) = 2{\cdot}4 + 2{\cdot}3j + 2j{\cdot}4 + 2j{\cdot}3j = 8 - 6 + (6+8)j = 2 + 14j$,

$\rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + 14^2} = 14{,}1421$, $\varphi = \arctan(14/2) = 1{,}429$, $z = 14{,}1421\, e^{1{,}429 j}$

3. Geben Sie die Exponentialform der komplexe Zahlen $x = 3 + 4j$ und $y = 1 + j$ so wie algebraische Form und Exponentialform von ($z = x + y$) und ($z = x \cdot y$) an! (Ergebnisse mit Nachkommastellen und Winkel in Radiant !).

$x = 3 + 4j \rightarrow \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\varphi = \arctan(4/3) = 0{,}9273$, $x = \rho\, e^{\varphi j} = 5\, e^{0{,}9273 j}$

$y = 1 + j \rightarrow \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan(1/1) = \pi/4$, $y = \sqrt{2}\, e^{\pi/4\, j}$

$z = x + y = 4 + 5j$, $\rightarrow \rho = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6{,}4031$, $\varphi = \arctan(5/4) = 0{,}8961$, $z = 6{,}4031\, e^{0{,}8961 j}$

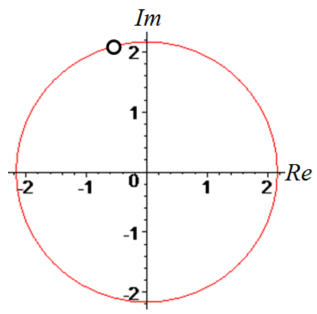
$z = x \cdot y = (3 + 4j) \cdot (1 + j) = 3{\cdot}1 + 3{\cdot}j + 4j{\cdot}1 + 4j\, j = 3 - 4 + (3+4)j = -1 + 7j$,

$\rightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 7{,}071$, $\varphi = \arctan(7/(-1)) + \pi = 1{,}7127$, $z = 7{,}072\, e^{1{,}7127 j}$

4. Geben Sie die Exponentialform der komplexe Zahlen $x = -12 + 5j$ und die algebraische Form und Eulersche Form von $y = 6 \cdot e^{0{,}89606\,j}$ sowie die Polarkoordinatenform von $z = x / y$ an! (Winkel in Radiant!).

$x = -12 + 5j \rightarrow \rho = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13,$

$\varphi = \arctan(5/(-12)) + \pi = -0{,}3948 + \pi = 2{,}7468$



$x = 13\, e^{\varphi j} = 13\, e^{2{,}7468\,j}$

$y = 6 \cdot e^{0{,}89606 \cdot j} = \rho\, e^{\varphi j} \rightarrow \rho = 6,\ \varphi = 0{,}89606 \ \rightarrow\ 6\,(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$

$z = x / y = (13\, e^{2{,}7468\,j}) / (6 \cdot e^{0{,}89606\,j}) = 2{,}167\, e^{(2{,}7468 - 0{,}89606)\,j}$

$= 2{,}167\, e^{1{,}851 j} = 2{,}167\,(\cos(1{,}851) + j\sin(1{,}851))$

$= -0{,}5986 + 2{,}0823\, j$

Matrix & Eigenwerte

5. Berechnen Sie folgende Aufgaben per Hand und mit Hilf der Excel:

geg.

A= (mat_A)

1	0	-1
0	2	3
4	1	1

; B= (mat_B)

-1	1	1
2	-2	1
0	3	0

; C= (mat_C)

3	1
0	2
1	5

ges: 1. (A + B)C = A C + B C; 2. (A B) C = A (B C) ; 3. $(A\,B)^T = B^T A^T$; 4. Determinanten der A,B ;

5.4

Det(A) = 1 x 2 x 1 + 0 x 3 x 4 + 0 x 1 x (-1) – (4 x 2 x (-1) + 1 x 3 x 1 + 0 x 0 x 1) = 7

Det(B) = (-1) x (-2) x 0 + 1 x 1 x 0 + 2 x 3 x 1 – (0 x (-2) x 1 + 3 x 1 x (-1) + 2 x 1 x 0) = 9

6. Berechnen Sie die inversen Matrizen per Hand und mit Hilf der Excel:

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 4 \cdot 3} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5 \cdot 2 - (-2) \cdot (-4)} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2{,}5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \quad \det(C) = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot (-7) + 4 \cdot (-8) \cdot (-3)}{-[(-7) \cdot 5 \cdot (-3) + (-8) \cdot 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 9]} = -72; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -1\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{8} \\ 1\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

7. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $\det(A - sI) = \det\begin{vmatrix} 2-s & 3 \\ 4 & 5-s \end{vmatrix} = 0$; (2 - s)(5 - s) - 4x3 = s^2 - 7s - 2= 0;

$(s - 3{,}5)^2 = (-3{,}5)^2 + 2 = 14{,}25$; $s - 3{,}5 = \pm\sqrt{14{,}25}$; $s = 3{,}5 \pm \sqrt{14{,}25}$; $s_1 = -0{,}2749$, $s_2 = 7{,}2749$

$B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$; $\det(B - sI) = \det\begin{vmatrix} -5-s & 3 \\ -4 & -6-s \end{vmatrix} = 0$; (-5 - s)(-6 - s) - (-4) x 3 = s^2 + 11s + 42= 0;

$(s + 5{,}5)^2 = 5{,}5^2 - 42 = -11{,}75$; $s + 5{,}5 = \pm\sqrt{-11{,}75}$; $s = -5{,}5 \pm \sqrt{11{,}75}j$; $s_{1,2} = -5{,}5 \pm 3{,}4278j$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$; $\det(C - sI) = \det\begin{vmatrix} 5-s & 4 \\ -2 & 2-s \end{vmatrix} = 0$; (5 - s)(2 - s) - (-2) x 4 = s^2 - 7s + 18= 0;

$(s - 3{,}5)^2 = (-3{,}5)^2 - 18 = -5{,}75$; $s - 3{,}5 = \pm\sqrt{-5{,}75}$; $s = 3{,}5 \pm \sqrt{5{,}75}\,j$; $s_{1,2} = +3{,}5 \pm 2{,}3979j$

Linearisierung

8. System: $y = u^2 + 3u$; y im Arbeitspunkt: $y_s = u_s^2 + 3u_s = 4^2 + 3 \times 4 = 28$

Linearisieren: $\Delta y = \left.\dfrac{d(u^2+3u)}{du}\right|_{u=4} \cdot \Delta u = (2u+3)\big|_{u=4} \cdot \Delta u$; also: $\Delta y = 11\ \Delta u$

9. nichtlineare Glied: $2(e^{\frac{u}{3}} - 1)$; $u_s = 0 \rightarrow y_s = 0$; $\Rightarrow \Delta u = u, \Delta y = y$;

$$\left.\frac{d\left(2(e^{\frac{u}{3}}-1)\right)}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{2}{3}e^{\frac{u}{3}}\right|_{u=0} = \frac{2}{3};$$

also: $y = \dfrac{2}{3}u$

10. nichtlineare Glied: $q(t) = a\sqrt{2gh(t)}, \quad a, g = konst.$;

$$\Delta q(t) = \left.\frac{d(a\sqrt{2gh(t)})}{dh}\right|_{h=4} \Delta t \ ; \quad \Delta q(t) = \left.\frac{a}{2\sqrt{2gh(t)}}2g\right|_{h=4} \cdot \Delta h(t) = \left.\frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{2h(t)}}\right|_{h=4} \cdot \Delta h(t) = \frac{a\sqrt{g}}{2\sqrt{2}}\Delta h(t)$$

Laplace - Transformation

11. a)

$$\mathscr{L}\{3t - 5t^2 + 3 \cdot \cos t\} = 3 \cdot \mathscr{L}\{t\} - 5 \cdot \mathscr{L}\{t^2\} + 3 \cdot \mathscr{L}\{\cos t\} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{s^2} - 5 \cdot \frac{2}{s^3} + 3 \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{3}{s^2} - \frac{10}{s^3} + \frac{3s}{s^2+1} =$$

$$= \frac{3s(s^2+1) - 10(s^2+1) + 3s^4}{s^3(s^2+1)} = \frac{3s^4 + 3s^3 - 10s^2 + 3s - 10}{s^3(s^2+1)}$$

b) σ(t) ist eine Sprungfunktion

$$\mathscr{L}\{(t+2) \cdot \sigma(t)\} = \mathscr{L}\{t \cdot \sigma(t) + 2 \cdot \sigma(t)\} =$$

$$= \mathscr{L}\{t \cdot 1\} + 2 \cdot \mathscr{L}\{(1)\} = \mathscr{L}\{t\} + 2 \cdot \mathscr{L}\{(1)\} =$$

$$= \frac{1}{s^2} + 2 \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} = \frac{1+2s}{s^2} = \frac{2s+1}{s^2}$$

c) Dämpfungssatz: $\mathrm{L}\{ e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$;

$$F(s) = \mathscr{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-3t} \cdot \sin t\} = F(s+3) = \frac{1}{(s+3)^2+1} = \frac{1}{s^2+6s+10}$$

12. Diese Übung zeigt, wie man mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* und einer geeigneten *Transformationstabelle* die Originalfunktion einer vorgegebenen *gebrochenrationalen* Bildfunktion ermittelt.

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^4 - 4s^3 + 4s^2} = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s^2 - 4s + 4)} = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s-2)^2}$$

Partialbruchzerlegung dieser echt gebrochenrationalen Funktion

Nennernullstellen: $s^2(s-2)^2 = 0 \Rightarrow s_{1/2} = 0, \quad s_{3/4} = 2$

Ansatz für die Partialzerlegung: $\frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2} = \frac{As(s-2)^2 + B(s-2)^2 + Cs^2(s-2) + Ds^2}{s^2(s-2)^2}$

Berechnung der Konstanten A, *B, C* und D:

$$s^3 + 2s^2 - 4s + 4 = As(s-2)^2 + B(s-2)^2 + Cs^2(s-2) + Ds^2$$

Wir setzen für *s* der Reihe nach die Werte 0 und 2 (die Nullstellen) und zusätzlich noch die Werte 1 und -1 ein:

$\boxed{s = 0}$ $\quad 4 = 4B \Rightarrow B = 1$

$\boxed{s = 2}$ $\quad 12 = 4D \Rightarrow D = 3$

$\boxed{s = 1}$ $\quad 3 = A + B - C + D \Rightarrow 3 = A + 1 - C + 3 \Rightarrow$

$(*)$ $\quad -1 = A - C$ oder $A - C = -1$

$\boxed{s = -1}$ $\quad 9 = -9A + 9B - 3C + D \Rightarrow 9 = -9A + 9 - 3C + 3 \Rightarrow$

$(**)$ $\quad -3 = -9A - 3C$ oder $3A + C = 1$

Die Konstanten *A* und C berechnen wir aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} (*) & A - C = -1 & \\ (**) & 3A + C = 1 & \Big\} + \\ \hline & 4A \quad = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ (*) & \Rightarrow 0 - C \quad = -1 & \Rightarrow C = 1 \end{array}$$

Damit besitzen die vier Konstanten die folgenden Werte: $A = 0, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 3$

Die *Partialbruchzerlegung* der Bildfunktion F (s) lautet damit:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^4 - 4s^3 + 4s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}$$

Gliedweise Rucktransformation nach der LPT-tabelle führt dann zu der folgenden Losung (Originalfunktion):

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}\right\} =$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 3 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$= t + e^{2t} + 3t \cdot e^{2t} = t + (1 + 3t) \cdot e^{2t}$$

13. **Schritt 1:** Laplace-transformieren

$$sU_2(s) - \underbrace{u_2(t=0)}_{=0} + \frac{1}{RC}U_2(s) = \frac{1}{RC}U_1(S)$$

Schritt 2: Nach $U_2(s)$ (Ausgangssignal) auflösen:

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)U_2(s) = \frac{1}{RC}U_1(S) \quad \Rightarrow \quad U_2(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \cdot U_1(S)$$

Schritt 3: sprungförmige Eingangsgröße einsetzen ($u_1(t) = 5\sigma(t)$ ○—● $U_1(s) = 5/s$):

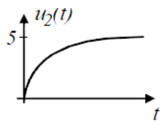
$$U_2(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \cdot \frac{5}{s} \quad \Rightarrow \quad U_2(s) = 5 \cdot \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)}$$

Schritt 4: Rücktransformieren:

$$u_2(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

(Zeitbereichslösung der Differentialgleichung)

Grafisch:



14. **Schritt 1:** Laplace-transformieren

$$\dddot{y}(t) - 2\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) = 2u(t) \quad ○\!\!-\!\!●$$

$$s^3Y(s) - s^2\underbrace{y(0)}_{=0} - s\underbrace{\dot{y}(0)}_{=0} - \underbrace{\ddot{y}(0)}_{=-2} - 2\left(s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{\dot{y}(0)}_{=0}\right) - 3\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}\right) = 2U(s)$$

Schritt 2: Nach $Y(s)$ (Ausgang) auflösen:

$$s^3Y(s) - 2s^2Y(s) - 3sY(s) = 2U(s) - 2 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 - 3s} \cdot (2U(s) - 2)$$

Schritt 3: impulsförmige Eingangsgröße einsetzen ($u(t) = 3\delta(t)$ ○—● $U(s) = 3$):

$$Y(s) = \frac{4}{s^3 - 2s^2 - 3s} = \frac{4}{s(s-3)(s+1)}$$

Nennernullstellen: $s_1 = 0$, $s_2 = 3$, $s_3 = -1$

Schritt 4: Partialbruchzerlegung

$$\frac{4}{s(s-3)(s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s-3} + \frac{r_3}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4 &= r_1(s-3)(s+1) + r_2 s(s+1) + r_3 s(s-3) \\ 4 &= r_1(s^2 - 2s - 3) + r_2(s^2 + s) + r_3(s^2 - 3s) \\ 4 &= (r_1 + r_2 + r_3)s^2 + (-2r_1 + r_2 - 3r_3)s - 3r_1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$s_1 = 0, \quad 4 = -3r_1, \qquad\qquad r_1 = -4/3$

$s_2 = 3, \quad 0 = -2r_1 + r_2 - 3r_3 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 1/3$

$s_3 = -1 \quad 0 = r_1 + r_2 + r_3 \qquad\qquad r_3 = 1$

Also: $$Y(s) = \frac{-\frac{4}{3}}{s} + \frac{\frac{1}{3}}{s-3} + \frac{1}{s+1}$$

Schritt 5: Rücktransformieren:

$$y(t) = -\frac{4}{3}\sigma(t) + \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t}$$

Übertragungsfunktion

15. Übertragungsfunktion $G(s)$

$G_1(s) = 5/s \qquad G_2(s) = 10$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)} = \frac{5/s}{1+(5/s)\cdot 10} = \frac{5}{s+50}$$

16. Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G_1(s) = \left(3+2s+\frac{1}{s}\right)\cdot\frac{1}{0.1\cdot s+1} = \frac{2s^2+3s+1}{s\cdot(0.1\cdot s+1)} = \frac{(2s+1)\cdot(s+1)}{s\cdot(0.1\cdot s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(2s+1)\cdot(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)} = \frac{1}{s(0.1s+1)+1} = \frac{10}{s^2+10s+10}$$

Zustandsdifferentialgleichungen

17. das zugehörige Blockschaltbild:

$x_3(s) = \frac{k_3}{s}x_2(s) \Rightarrow \quad s\,X_3(s)=k_3\,X_2(s) \qquad \Rightarrow$ Zustandsdgl. 3: $\dot{x}_3 = k_3 x_2$

$x_2(s) = \frac{k_2}{1+T_2 s}v(s) \Rightarrow \quad T_2\,s\,X_2(s) + X_2(s) = k_2\,V(s) \qquad \Rightarrow$ Zustandsdgl. 2: $\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2}x_2 + \frac{k_2}{T_2}ax_1^3$

$$x_1(s) = \frac{k_1}{1+T_1 s}(U(s) - k_4 x_3(s)) \Rightarrow T_1 s x_1(s) + x_1(s) = k_1(U(s) - k_4 x_3(s))$$

$\Rightarrow$ Zustandsdgl. 1: $\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 - \frac{k_1 k_4}{T_1}x_3 + \frac{k_1}{T_1}u$

Ausgangsgleichung:
$y = x_3$

18. 1) Zustandsdifferentialgleichung:

Zustandsgrößen: $$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$$

Zustandsgrößen: $$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{D}_{=0} u$$

2) Eigenwerte: $$\det(s\,I - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ a & s+b \end{vmatrix} = s(s+b) - a\cdot(-1) = s^2 + bs + a = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

Übertragungsfunktion: $(s\,I-A)^{-1}=\dfrac{adj(s\,I-A)}{\det(s\,I-A)}$

$$adj(s\,I-A)=\begin{bmatrix} s & -1 \\ a & s+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+b & 1 \\ -a & s \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+bs+a}\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -a & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+bs+a}$$

19. a) Berechnung von $X(s)$ und $Y(s)$:

Formeln:
$$X(s)=(sI-A)^{-1}B\cdot U(s)+(sI-A)^{-1}x(0)$$
$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}B\cdot U(s)+D\cdot U(s)$$

Inverse:
$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{\det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{bmatrix}\right)}\operatorname{adj}\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{s^2+2s+10}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}$$

Lösung im Frequenz-bereich:
$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1+\boldsymbol{0}=\frac{1}{s^2+2s+10}\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1+\boldsymbol{0}=\frac{1}{s^2+2s+10}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{s^2+2s+10}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

Laplace-Rücktransformation: $y(t)=\dfrac{1}{3}e^{-\delta t}\sin(\omega t)=\dfrac{1}{3}e^{-t}\sin(3t)$

b) Übertragungsfunktion:

$$G(s)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{s^2+2s+10}$$

20. Laplace-Transformieren und Auflösen:

$$sX_1(s)-x_1(0)=-3X_1(s)+U(s)$$
$$sX_2(s)-x_2(0)=-2X_1(s)-3X_2(s)+4U(s)$$

$$X_1(s)=\frac{X_1(0)+U(s)}{s+3} \qquad X_1(s)=\frac{-4}{s+3}$$

$$X_2(s)=\frac{-2X_1(s)+x_2(0)+4U(s)}{s+3} \qquad X_2(s)=\frac{-2X_1(s)+1}{s+3}$$

Einsetzen: $Y(s)=\dfrac{8}{(s+3)^2}+\dfrac{1}{s+3}$

Rücktransformieren: $y(t)=8te^{-3t}+e^{-3t}=(8t+1)e^{-3t}$

21. Koeffizienten:

$a_n=a_6=1 \qquad a_{n-1}=a_5=150$

$a_4=2\cdot 10^4 \qquad a_3=10^6 \qquad a_2=2\cdot 10^7 \qquad a_1=2\cdot 10^8 \qquad a_0=10^9$

$b_{n-1}=b_5=0 \qquad b_4=b_3=0 \qquad b_2=3\cdot 10^6 \qquad b_1=5\cdot 10^7 \qquad b_0=3\cdot 10^8$

a) Regelungsnormalform:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -10^9 & -2\cdot10^8 & -2\cdot10^7 & -10^6 & -2\cdot10^4 & -150\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\cdot10^8 & 5\cdot10^7 & 3\cdot10^6 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

b) Beobachtungsnormalform:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\\vdots\\b_{n-2}\\b_{n-1}\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^9\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\cdot10^8\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\cdot10^7\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10^6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\cdot10^4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -150\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}3\cdot10^8\\5\cdot10^7\\3\cdot10^6\\0\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$