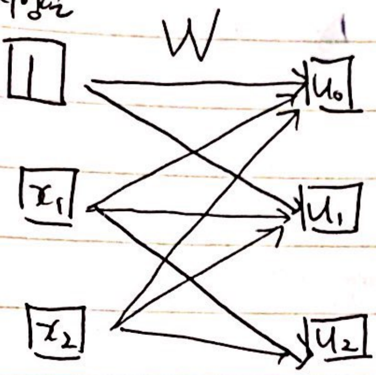
09. 로지스틱 회귀 모델 (다중클래스 분류)

- 모델의 기본개념

0과 1사이의 확률값을 출력하는 분류기를 여러개로 만들어 사용한다
이 방법은 여러개의 분류기를 병렬로 사용하여 확률값이 가장 큰 분류기의 클래스를 모델 전체의 예측값으로 간주한다.

- 가중치행렬



$$u_0 = w_{00} + w_{01}x_1 + w_{02}x_2$$

$$u_1 = w_{10} + w_{11}x_1 + w_{12}x_2$$

$$u_2 = w_{20} + w_{21}x_1 + w_{22}x_2$$

$$u = Wx$$

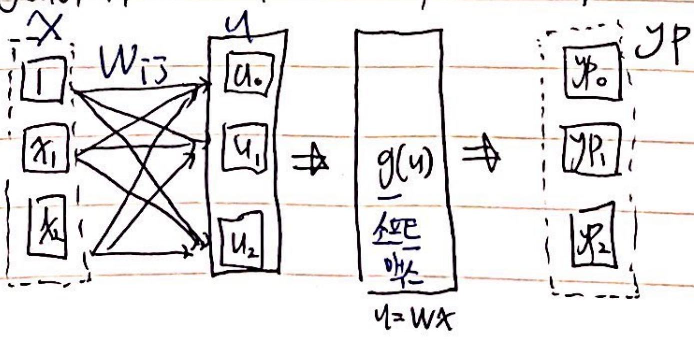
$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 소프트맥스 함수

- 입력은 n차원 벡터, 출력은 n차원 벡터값 함수
- 각 출력 요소는 0부터 1까지의 값을 가짐
- 모든 출력값을 더하면 1이 된다.

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{\exp(u_0)}{g(u_0, u_1, u_2)} \\ y_1 = \dfrac{\exp(u_1)}{g(u_0, u_1, u_2)} \\ y_2 = \dfrac{\exp(u_2)}{g(u_0, u_1, u_2)} \end{cases}$$

$$g(u_0, u_1, u_2) = \exp(u_0) + \exp(u_1) + \exp(u_2)$$



- 손실함수

$yt = (yt_0, yt_1, yt_2)$
$yp = (yp_0, yp_1, yp_2)$

로그가능도 함수를 이용해 정의한다.

$$\sum_{i=0}^{2} (yt_i \log(yp_i))$$

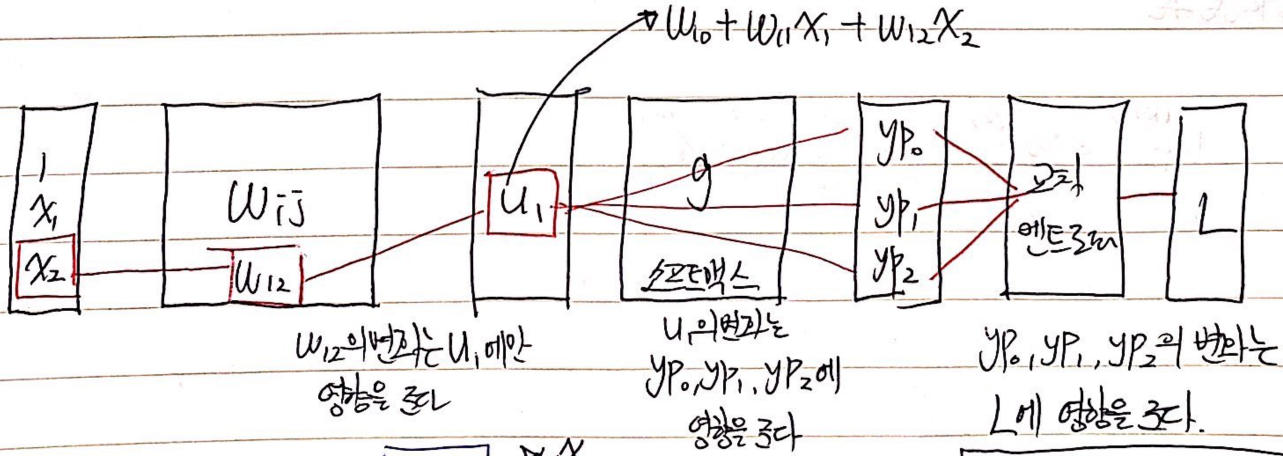
정답값을 2로 가정하면 $yt = (0, 0, 1)$

$$L(w) = \underbrace{-\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}}_{\text{데이터의 평균을 구하기 위함.}} \underbrace{\sum_{i=0}^{2} (yt_i^{(m)} \log(yp_i^{(m)}))}_{\text{교차엔트로피}}$$

- 손실함수의 미분계산

$yt^{(m)} \rightarrow yt = (yt_0, yt_1, yt_2)$
$yp^{(m)} \rightarrow yp = (yp_0, yp_1, yp_2)$

$$\text{교차엔트로피} = -\sum_{i=0}^{2} (yt_i \log(yp_i))$$



① $$\frac{\partial L}{\partial w_{12}} = \frac{\partial L}{\partial u_1} \cdot \boxed{\frac{\partial u_1}{\partial w_{12}}} \rightarrow x_2$$

$u = w_{10} + w_{11}x_1 + w_{12}x_2$

$$= \boxed{\frac{\partial L}{\partial u_1}} \cdot x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial yp_0}}_{\text{로그함수 미분을 이용} \rightarrow -\frac{yt_0}{yp_0}} \cdot \overbrace{\frac{\partial yp_0}{\partial u_1}}^{\text{소프트맥스함수 미분 } -yp_1 \cdot yp_0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial yp_1}}_{-\frac{yt_1}{yp_1}} \cdot \underbrace{\frac{\partial yp_1}{\partial u_1}}_{yp_1(1-yp_1)} + \overbrace{\frac{\partial L}{\partial yp_2}}^{\text{소프트맥스함수 미분 } -\frac{yt_2}{yp_2}} \cdot \underbrace{\frac{\partial yp_2}{\partial u_1}}_{-yp_1 \cdot yp_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -\frac{yt_0}{yp_0}\cdot(-yp_1\cdot yp_0) - \frac{yt_1}{yp_1}\cdot yp_1(1-yp_1) - \frac{yt_2}{yp_2}\cdot(-yp_1\cdot yp_2)$$

$$= yt_0\cdot yp_1 - yt_1(1-yp_1) + yt_2\cdot yp_2$$

$$= -yt_1 + yp_1\underbrace{(yt_0+yt_1+yt_2)}_{\text{항상 1이다.}}$$

$$= yp_1 - yt_1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial L}{\partial u_i} = yp_i - yt_i \quad (i=0,1,2)$$

무기적으로 식을 수정하기 위해 $yp - yt = yd$ 라 정의

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = yd_i \quad (i=0,1,2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{12}} = x_2\frac{\partial L}{\partial u_1} = x_2\cdot yd_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = x_j\cdot yd_i$$

- 경사하강법 적용

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \frac{\alpha}{M}\sum_{m=0}^{M-1} yd_i^{(m)}\cdot x_j^{(m)}$$