18.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$u = u + \frac{1}{6}x = 0 \quad = -\frac{1}{6}s$

$v = 0$

$w = w - \frac{2}{3}x = 0 \quad + \frac{2}{3}s$

$x = s$

25.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{5} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

one solution $a^2-16 \neq 0$

many $a = 4$

해가 없다. $a = -4$

26
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2-a^2 & a-2 \end{bmatrix}$$

one solution $a^2 \neq 2$

many 존재하지 않는다.

no $a = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

39

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{a_1 + b_1 + c_1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right)$$ trivial solution

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 3 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 7 \\ a_3 & b_3 & -c_3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{V_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{V_2} x_2 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{V_n} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow V_1, V_2 \cdots V_n, b \in R^n$

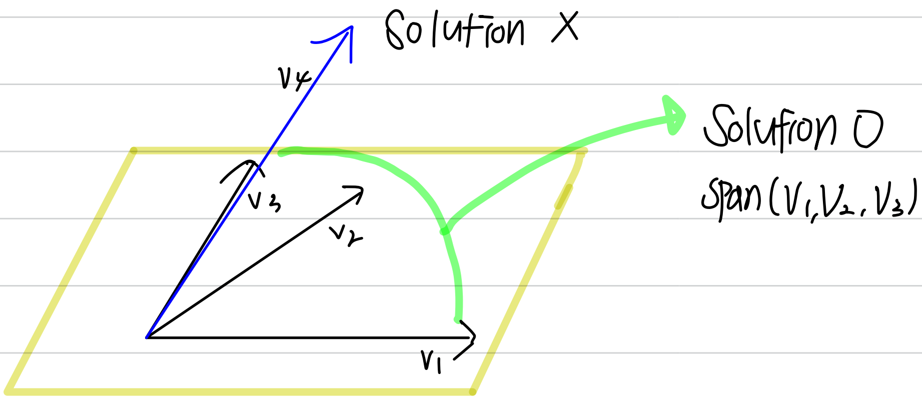
$K_1V_1 + K_2V_2 + K_3V_3 = V$ (V_1, V_2, V_3의 linear combination)

ex) $2x + y + z = 3$

$x - y + z = 2$

$5x + y + 3z = 8$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$



if $b \in span(v_1, v_2, v_3)$

: Solution exist

$V_1, V_2 \cdots, V_m \in R^m$

$Span\{\underbrace{V_1, V_2 \cdots V_n}_{\text{linearly independent}}\} = R^n$

$\rightsquigarrow$ basis of R^n

* Vector m개 / R^n

$m < n$: span이 R^n이 될수없다.

$m > n$: Vector들이 independent 하지않다.

R^n의 basis는 n개이다.

- 선형독립
- 선형종속

· *Linear Combination*

$c_1, \cdots c_r \in \mathbb{R}$ r개의 벡터가 있는데 어느한개가 나머지의 선형결합이라면 r개의 벡터모도 서로가 서로의 선형결합이 된다.

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_n =$ ~ 자체로의 벡터 / $v_1, \cdots v_r$의 선형결합

$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

1) v_3는 v_1과 v_2의 선형결합인가? = v_3는 $c_1 v_1 + c_2 v_2$가 되는 c_1, c_2가 존재하는가?

Yes, $v_3 = 2v_1 + 3v_2$

2) v_1은 v_2와 v_3의 선형결합인가?

$2v_1 = v_3 - 3v_2$

$v_1 = \frac{1}{2} v_3 - \frac{3}{2} v_2$

3) v_2는 v_1과 v_3의 선형결합인가?

$3v_2 = -2v_1 + v_3$

$v_2 = -\frac{2}{3} v_1 + \frac{1}{3} v_3$

벡터의 그룹 → 선형결합 → 나머지 자동생성

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$

→ $v_3 = 2v_1 + 3v_2$

∴ v_3가 v_1과 v_2의 선형결합

→ $v_3 \in \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ v_1과 v_2의 선형결합이 될 수있는 모든 벡터의 집합

→ $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ (c_1, c_2는 모든 수)

• Span vs linear combination

Linear Combination

비교대상 (V_3)에 의해 특정 C_1, C_2가 결정된다.

Span

모든 C_1, C_2

•

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

i) V_3가 V_1과 V_2의 linear combination 이 되는가

No

$\therefore$ $V_2 = \square V_1 + \square V_3$ / $V_1 = \Delta V_1 + \Delta V_2$ 도 존재하지 않는다.

→ r개의 벡터가 있을 때, 어느 하나가 나머지 벡터들에 대해 선형결합이 아니면

서로가 서로의 선형결합이 될 수 없다

• Linear Independent

$V_1, \cdots V_r$ 이 선형독립

$C_1V_1 + \cdots C_rV_r = 0$ (선형결합 = Zero Vector라고 둔다)

→ $C_1 = C_2 \cdots = C_r = 0$ (계수들이 모두 0이 된다) → linearly independent

if $V_1, V_2 \cdots V_i = 0 \cdots V_r$

$V_1 \sim V_r$ 중에 zero vector가 있다고 가정하자

→ $V_1 \sim V_r$은 선형독립인가?

$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + \underset{k}{C_4}V_5 \cdots C_rV_r = 0$

if V_5 = zero vector

↓

$C_1 \sim C_r$이 모두 0이 아닌 경우 발생가능

→ zero vector가 섞이면 독립성이 깨진다.

선형종속의 정의

V_1, V_2, V_3

assume V_3가 V_1, V_2의 선형결합 이라면
자동적으로 V_2가 V_1, V_3의 선형결합
V_1가 V_2, V_3 〃

→ 서로가 서로의 선형결합 ⇒ 서로가 서로에게 종속되어 있다.

⇕

$V_1\ V_2\ V_3$는 선형종속

정리

$V_1, V_2 \cdots V_r$ 벡터가 있다.

① $V_1, V_2 \cdots V_r$ 이 선형독립일 경우

$$C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots C_rV_r = 0 \longrightarrow C_1 = C_2 = \cdots C_r = 0$$

② $V_1, V_2 \cdots V_r$이 선형종속일 경우

$$C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots C_rV_r = 0 \rightarrow \text{어떤 } C_i\text{가 존재해서 } C_i \neq 0$$

- Basis (기저)

$V_1, \cdots V_r$이 basis of R^n의 의미

- $V_1 \sim V_r$ 가 선형독립
- $\text{span}\{V_1 \cdots V_n\} = \mathbb{R}^n$

＊ 벡터가 n개보다 많아진다면 $(r>n)$

⇒ 선형종속

＊ 벡터가 n개보다 작으면 $(r<n)$

⇒ span이 $\mathbb{R}^n$을 구성할 수 없다.

∴ $\mathbb{R}^n$ 벡터공간에서의 기저의 개수는 무조건 n개

prove

$v_1, \cdots v_r \in \mathbb{R}^n$

if $r > n$ [선형종속]

$$c_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n\left\{\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & 0 \end{array}\right]}_{r+1}\right.$$

variable r개
$\begin{cases} \text{leading 최대 } n\text{개} \\ \text{free: } r-n\text{개} \end{cases}$

$\Rightarrow$ many solution.