统计学 2024-2025 第一学期单元测试答案

2024.10

1. (10分) 证明：

$$\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

答案：令 $\omega=e^{2\pi i/n}$，则： $S=\omega+2\omega^2+\cdots+(n-1)\omega^{n-1}$ $\omega S=\omega^2+2\omega^3+\cdots+(n-1)\omega^n=S-(n-1)\omega^n+n\omega-\omega$ $(\omega-1)S=n\omega-\omega-(n-1)=(n-1)(\omega-1)$ $S=n-1+\frac{n-1}{\omega-1}=\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}+i\frac{n}{2}$ 因此，$\mathrm{Re}(S)=-\frac{n}{2}$，$\mathrm{Im}(S)=-\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}$

2. (10分) 用数学归纳法证明范德蒙行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

答案：用数学归纳法证明。当 $n=1$ 时，$D_1=1$，结论成立。假设 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，考虑 n 阶范德蒙行列式：将第 j 列 $(j=2,\ldots,n)$ 减去第 1 列，得到：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\x_1&x_2-x_1&\cdots&x_n-x_1\\x_1^2&x_2^2-x_1^2&\cdots&x_n^2-x_1^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}-x_1^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}$$

提取公因子，得到：

$$D_n=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot D_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)$$

根据归纳假设，

$$D_n=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

因此，结论对 n 阶范德蒙行列式也成立。

3. (15分) 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是数域P中互不相同的数，$b_1,b_2,\ldots,b_n$是数域P中任意给定的数，用克拉默法则证明：存在唯一的数域P中的多项式

$$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+c_2x^{n-3}+\cdots+c_{n-1}$$

使得

$$f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2,\ldots,f(a_n)=b_n$$

答案：构造线性方程组：

$$\begin{cases} c_0a_1^{n-1}+c_1a_1^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=b_1 \\ c_0a_2^{n-1}+c_1a_2^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=b_2 \\ \vdots \\ c_0a_n^{n-1}+c_1a_n^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=b_n \end{cases}$$

系数矩阵为范德蒙矩阵，其行列式不为零（因为a_i互不相同）。根据克拉默法则，该方程组有唯一解，即存在唯一的多项式$f(x)$满足给定条件。

4. (10分) 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\theta \end{vmatrix}$$

答案：$D_n=(\cos\theta)^n$ 证明：用数学归纳法。当$n=1$时，$D_1=\cos\theta$，结论成立。假设$n-1$阶行列式结论成立，考虑n阶行列式：沿第一行展开，得到：$D_n=\cos\theta\cdot D_{n-1}+\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\theta \end{vmatrix}$ 第二项行列式为0，因此$D_n=\cos\theta\cdot D_{n-1}=\cos\theta\cdot(\cos\theta)^{n-1}=(\cos\theta)^n$

5. (10分) 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

答案：$D_n=(-1)^{n-1}(n-1)$ 证明：对行列式进行初等变换：第2行减去第1行，第3行减去第2行，...，第n行减去第n-1行，得到：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

第2列减去第1列，第3列减去第2列，...，第n列减去第n-1列，得到：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

沿第一列展开，得到：$D_n=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-n)\cdot(-1)^{n-2}+(n-1)\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-n)=(-1)^{n-1}(n-1)$

6. (15分) 计算行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & a & \cdots & a \\ b & b & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

答案：$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)ab^{n-1} - (-a)^n - (-b)^n$ 证明：用数学归纳法。当$n=2$时，$D_2 = -a^2 - b^2$，结论成立。假设$n-1$阶行列式结论成立，考虑n阶行列式：沿第一行展开，得到：$D_n = a(D_{n-1} + b^{n-1}) - (-b)^n$ 根据归纳假设，$D_n = a[(-1)^{n-2}(n-2)ab^{n-2} - (-a)^{n-1} - (-b)^{n-1} + b^{n-1}] - (-b)^n$ $= (-1)^{n-1}(n-1)ab^{n-1} - (-a)^n - (-b)^n$ 因此，结论对n阶行列式也成立。

7. (10分) 计算行列式：

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{pmatrix}$$

答案：该行列式的值为 $\prod_{i=1}^n (a_i^n - b_i^n)$。

证明：令 $c_{ij} = \frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}$，则 $c_{ij} = 1 + a_i b_j + (a_i b_j)^2 + \cdots + (a_i b_j)^{n-1}$。对行列式进行初等变换：第 i 行乘以 $(1-a_i b_i)$，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1-a_1^n b_1^n & \cdots & (1-a_1 b_1)\frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-a_n b_1)\frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \cdots & 1-a_n^n b_n^n \end{pmatrix}$$

第 j 列减去第 i 列 $(j \neq i)$，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1-a_1^n b_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-a_n^n b_n^n \end{pmatrix}$$

因此，行列式的值为 $\prod_{i=1}^n (1-a_i^n b_i^n)$。将每一项分解，得到 $\prod_{i=1}^n (a_i^n - b_i^n)$。

8. (10分) 计算行列式 $(n \geq 2)$：

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & x_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

答案：该行列式的值为 $\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$。

证明：令 D_n 表示 n 阶行列式的值。使用数学归纳法：

当 $n=2$ 时，$D_2 = x_1 x_2 - a_1 b_1 a_2 b_2$，结论成立。

假设 $n-1$ 阶行列式结论成立，考虑 n 阶行列式：将第一列展开，得到：$D_n = x_1 D_{n-1} - \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_i b_1 M_{i1}$
其中 M_{i1} 是余子式，可以写成 $(n-1)$ 阶行列式的形式：$M_{i1} = (-1)^{i+1} a_1 \prod_{j=2, j\neq i}^n b_j \cdot D_{n-2}$

代入得到：$D_n = x_1 D_{n-1} - a_1 b_1 \prod_{j=2}^n a_j \cdot \prod_{j=2}^n b_j$

根据归纳假设，有：$D_{n-1} = \prod_{i=2}^n x_i - \prod_{i=2}^n a_i \cdot \prod_{i=2}^n b_i$

代入得到： $D_n = x_1(\prod_{i=2}^n x_i - \prod_{i=2}^n a_i \cdot \prod_{i=2}^n b_i) - a_1 b_1 \prod_{j=2}^n a_j \cdot \prod_{j=2}^n b_j = \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$

因此，结论对 n 阶行列式也成立。

9. (10分) 计算行列式 $(n \geq 2)$：

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix}$$

答案：该行列式的值为 $\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)}$。

证明：令 $a_{ij} = \frac{1}{x_i+y_j}$，则行列式可以写成 $\det(a_{ij})_{n\times n}$。

考虑 $\det(a_{ij}(x_i+y_j))_{n\times n} = \det(a_{ij})_{n\times n} \cdot \prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)$。

对 $\det(a_{ij}(x_i+y_j))_{n\times n}$ 进行行列式变换：第 i 行减去第 1 行 $(i = 2, \ldots, n)$，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)} & \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)} & \cdots & \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_n)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_1)(x_n+y_1)} & \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_2)(x_n+y_2)} & \cdots & \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_n)(x_n+y_n)} \end{pmatrix}$$

第 j 列减去第 1 列 $(j = 2, \ldots, n)$，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)} & \frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{(x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_2+y_1)(x_2+y_2)} & \cdots & \frac{(x_1-x_2)(y_1-y_n)}{(x_1+y_1)(x_1+y_n)(x_2+y_1)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_1)(x_n+y_1)} & \frac{(x_1-x_n)(y_1-y_2)}{(x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_n+y_1)(x_n+y_2)} & \cdots & \frac{(x_1-x_n)(y_1-y_n)}{(x_1+y_1)(x_1+y_n)(x_n+y_1)(x_n+y_n)} \end{pmatrix}$$

继续进行类似的变换，最终得到：

$$\det(a_{ij}(x_i+y_j))_{n\times n} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)$$

因此，

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)}$$

10. (10)

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{pmatrix}$$

答案：该行列式的值为 $\prod_{i=1}^n (a_i^n - b_i^n)$。

证明：令 $c_{ij} = \frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}$，则 $c_{ij} = 1 + a_i b_j + (a_i b_j)^2 + \cdots + (a_i b_j)^{n-1}$。对行列式进行初等变换：第 i 行乘以 $(1 - a_i b_i)$，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1 - a_1^n b_1^n & \cdots & (1-a_1 b_1)\frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-a_n b_1)\frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \cdots & 1 - a_n^n b_n^n \end{pmatrix}$$

第 j 列减去第 i 列 ($j \neq i$)，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1-a_1^n b_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-a_n^n b_n^n \end{pmatrix}$$

因此，行列式的值为 $\prod_{i=1}^n (1-a_i^n b_i^n)$。将每一项分解，得到 $\prod_{i=1}^n (a_i^n - b_i^n)$。

11. (10分) 计算行列式 ($n \geq 2$)：

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

答案：该行列式的值为 $\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$。

证明：令 D_n 表示 n 阶行列式的值。使用数学归纳法：

当 $n=2$ 时，$D_2 = x_1x_2 - a_1b_1a_2b_2$，结论成立。

假设 $n-1$ 阶行列式结论成立，考虑 n 阶行列式：将第一列展开，得到： $D_n = x_1D_{n-1} - \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_i b_1 M_{i1}$
其中 M_{i1} 是余子式，可以写成 $(n-1)$ 阶行列式的形式： $M_{i1} = (-1)^{i+1} a_1 \prod_{j=2, j\neq i}^n b_j \cdot D_{n-2}$

代入得到： $D_n = x_1 D_{n-1} - a_1b_1 \prod_{j=2}^n a_j \cdot \prod_{j=2}^n b_j$

根据归纳假设，有： $D_{n-1} = \prod_{i=2}^n x_i - \prod_{i=2}^n a_i \cdot \prod_{i=2}^n b_i$

代入得到： $D_n = x_1(\prod_{i=2}^n x_i - \prod_{i=2}^n a_i \cdot \prod_{i=2}^n b_i) - a_1b_1 \prod_{j=2}^n a_j \cdot \prod_{j=2}^n b_j = \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$

因此，结论对 n 阶行列式也成立。

12. (10分) 计算行列式 ($n \geq 2$)：

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix}$$

答案：该行列式的值为 $\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)}$。

证明：令 $a_{ij} = \frac{1}{x_i+y_j}$，则行列式可以写成 $\det(a_{ij})_{n\times n}$。

考虑 $\det(a_{ij}(x_i+y_j))_{n\times n} = \det(a_{ij})_{n\times n} \cdot \prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)$。

对 $\det(a_{ij}(x_i+y_j))_{n\times n}$ 进行行列式变换：第 i 行减去第 1 行 ($i = 2, \ldots, n$)，得到：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)} & \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)} & \cdots & \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_n)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_1)(x_n+y_1)} & \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_2)(x_n+y_2)} & \cdots & \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_n)(x_n+y_n)} \end{pmatrix}$$

第 j 列减去第 1 列 $(j = 2, \ldots, n)$，得到：

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x_1 - x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)} & \frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{(x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_2+y_1)(x_2+y_2)} & \cdots & \frac{(x_1-x_2)(y_1-y_n)}{(x_1+y_1)(x_1+y_n)(x_2+y_1)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1 - x_n}{(x_1+y_1)(x_n+y_1)} & \frac{(x_1-x_n)(y_1-y_2)}{(x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_n+y_1)(x_n+y_2)} & \cdots & \frac{(x_1-x_n)(y_1-y_n)}{(x_1+y_1)(x_1+y_n)(x_n+y_1)(x_n+y_n)} \end{pmatrix}$$

继续进行类似的变换，最终得到：

$$\det(a_{ij}(x_i + y_j))_{n \times n} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)$$