统计学 2024-2025 第一学期单元测试

2024.10

1. (10分) 证明：
$$\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}$$

2. (10分) 用数学归纳法证明范德蒙行列式：
$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

3. (15分) 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是数域P中互不相同的数，$b_1,b_2,\ldots,b_n$是数域P中任意给定的数，用克拉默法则证明：存在唯一的数域P中的多项式
$$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+c_2x^{n-3}+\cdots+c_{n-1}$$
使得
$$f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2,\ldots,f(a_n)=b_n$$

4. (10分) 计算行列式：
$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\theta\end{vmatrix}$$
其中矩阵为n阶行列式。

5. (10分) 计算行列式：
$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \cdots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \cdots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n}\end{vmatrix}$$

6. (10分) 计算行列式 ($n\ge 2$)：
$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$

7. (10分) 计算行列式 $(n \geq 2)$：

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$$

8. (10分) 计算行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

9. (15分) 计算行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & a & \cdots & a \\ b & b & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$