



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA**  
**DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA**

# Tarea 4

MOISES EMANUEL MARTINEZ NOYOLA

**ING. MECATRONICA**  
DINAMICA DE ROBOTS

## Modelo dinámico del comportamiento del manipulador mediante la formulación Euler-Lagrange

En la formulación de Newton-Euler, las ecuaciones de movimiento fueron derivadas a partir de la Segunda Ley de Newton, la cual relaciona fuerza y momento, así como torque y momento angular. Las ecuaciones resultantes incluyen fuerzas de restricción, las cuales deben ser eliminadas para poder obtener ecuaciones dinámicas de forma cerrada. En la formulación de Newton-Euler, las ecuaciones no son expresadas en términos de variables independientes, y no incluyen explícitamente torques de junta de entrada, pues se necesitan operaciones aritméticas para derivar las ecuaciones dinámicas de forma cerrada. Esto representa un complejo procedimiento que requiere cierta intuición física.

### Ecuaciones Euler-Lagrange

Primero definimos un conjunto de coordenadas generalizadas  $q_k$  de manera que las coordenadas cartesianas de las diferentes partículas se escriben:

$$x_i = x_i(q_k, t)$$

A partir de las relaciones entre coordenadas hallamos la relación entre velocidades derivando:

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

La velocidad es una función de las coordenadas generalizadas, de las velocidades generalizadas y del tiempo. De la expresión anterior se deduce que:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

Por otro lado, si hallamos la derivada total respecto al tiempo de la derivada parcial:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \sum_p \frac{\partial}{\partial q_p} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

Por las propiedades de las derivadas parciales se puede invertir el orden de cada derivada cruzada:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_p \frac{\partial x_i}{\partial q_p} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{dx_i}{dt} \right)$$

Es decir, resulta la identidad:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

### Deducción de las ecuaciones

Partimos de la definición:

$$P_k = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

Aplicamos la derivada de un producto:

$$P_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

Sustituimos aquí las dos identidades obtenidas anteriormente:

$$P_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_i m_i \dot{x}_i \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \right)$$

Si introducimos aquí la energía cinética K (que en mecánica analítica se escribe casi exclusivamente como T, pero por ser consistentes con la notación de otras páginas de este curso):

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

la identidad anterior equivale a:

$$P_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k}$$

Llevando esto al principio de D'Alembert nos queda una primera versión de las ecuaciones de Lagrange:

$$\sum_k \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0$$

donde las  $Q_k$  no incluyen las fuerzas de reacción vincular. A esta ecuación hay que añadir las  $r$  ecuaciones de vínculo:

$$\sum_k B_{jk} \dot{q}_k + B_{j0} = 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

que permiten relacionar los desplazamientos virtuales:

$$\sum_k B_{jk} \delta q_k = 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

### Coordenadas independientes

Cuando todos los vínculos son holónimos, es posible (en teoría; en la práctica pueden resultar ecuaciones irresolubles) elegir un sistema mínimo de tantas coordenadas como grados de libertad de forma que todos los vínculos se satisfagan automáticamente.

En ese caso, todos los desplazamientos virtuales son independientes y cada coeficiente se debe anular por separado, resultando las ecuaciones de Lagrange (o de Euler-Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k$$

### Coordenadas polares

Las ecuaciones de Lagrange proporcionan un método para calcular las componentes de la aceleración en diferentes sistemas de coordenadas sin tener que complicarse con vectores de la base y sus derivadas.

Consideremos una partícula que se mueve en el plano OXY, estando su posición expresada en coordenadas polares de manera que:

$$\begin{cases} x = \rho C \\ y = \rho S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} C - \rho \dot{\theta} S \\ \dot{y} = \dot{\rho} S + \rho \dot{\theta} C \end{cases} \quad (S = \sin(\theta), C = \cos(\theta))$$

Esto da la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$$

Aplicamos ahora la ecuación de Lagrange a la coordenada radial:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}} \right) = m\ddot{\rho} \quad \frac{\partial K}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^2$$

lo que nos da:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = Q_\rho$$

Por tratarse la coordenada de una distancia la fuerza generalizada es simplemente la fuerza en dicha dirección, es decir:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho \quad \rightarrow \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$$

Operamos igualmente para la coordenada angular:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta}) \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

y obtenemos:

$$m(2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta}) = Q_\theta$$

Por tratarse de un ángulo, la fuerza generalizada representa el momento de las fuerzas que actúan sobre la partícula y es igual al producto de la fuerza acimutal por el brazo del par, que en este caso es la distancia al origen:

$$m \left( 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} \right) = \rho F_{\theta} \quad \Rightarrow \quad a_{\theta} = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$$

### Fuerzas de reacción vincular

Si no todos los vínculos son holónimos o si deseamos hallar las fuerzas de reacción generalizadas debemos usar un número de coordenadas generalizadas superior al de grados de libertad.

A cada vínculo le corresponde una fuerza de reacción generalizada que podemos reintroducir en el sistema como una fuerza aplicada mediante los multiplicadores de Lagrange:

$$\sum_k B_{jk} dq_k + B_{j0} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_k^n = \lambda B_k$$

Al incluir cada una de estas fuerzas deja de aplicarse el vínculo correspondiente, aumentando en uno el número de diferenciales independientes y por tanto el número de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k + \sum_j \lambda_j B_{jk}$$