UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

# Tarea 3

MOISES EMANUEL MARTINEZ NOYOLA

ING. MECATRONICA

DINAMICA DE ROBOTS

**Modelo dinámico del comportamiento del manipulador mediante la formulación Newton Euler**

La dinámica del robot relaciona el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo. El modelo dinámico establece relaciones matemáticas entre las coordenadas articulares (o las coordenadas del extremo del robot), sus derivadas (velocidad y aceleración), las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones (o en el extremo) y los parámetros del robot (masas de los eslabones, inercias, etc.).

## Dinámica inversa

El método de Newton-Euler permite obtener un conjunto de ecuaciones recursivas hacia delante de velocidad y aceleración lineal y angular las cuales están referidas a cada sistema de referencia articular. Las velocidades y aceleraciones de cada elemento se propagan hacia adelante desde el sistema de referencia de la base hasta el efector final. Las ecuaciones recursivas hacia atrás calculan los pares y fuerzas necesarios para cada articulación desde la mano (incluyendo en ella efectos de fuerzas externas), hasta el sistema de referencia de la base.

### 1. Sistemas de coordenadas en movimiento.

La formulación de N-E se basa en los sistemas de coordenadas en movimiento.

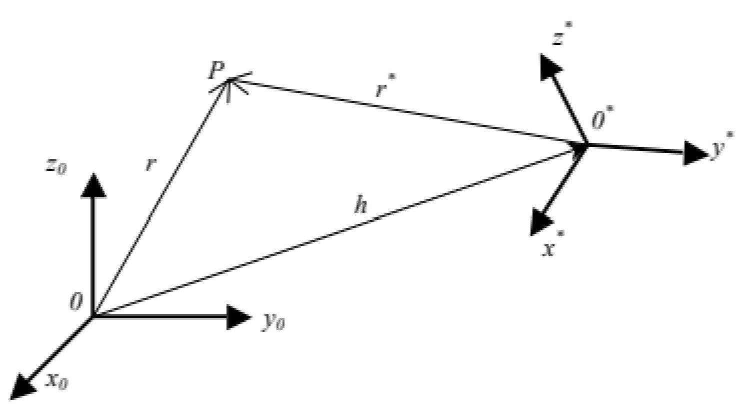


**Figura 3.1.** Sistemas de coordenadas en movimiento

Con respecto a la figura 3.1 se tiene que el sistema de coordenadas 0* se desplaza y gira en el espacio respecto del sistema de referencia de la base 0, el vector que describe el origen del sistema en movimiento es h y el punto P se describe respecto del sistema 0* a través del vector r*, de acuerdo a esto, la descripción del punto P respecto del sistema de la base es:

r=r^*+h

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = v^* + v_h$$

Donde v* es la velocidad del punto P respecto del origen del sistema 0* en movimiento y $v_h$ es la velocidad del origen del sistema 0* respecto de la base.

Si el punto P se desplaza y gira respecto del sistema 0* la ecuación debe escribirse como:

$$v = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = \left(\frac{d^*r^*}{dt} + wxr^*\right) + \frac{dh}{dt}$$

Donde $\frac{(d^*)(r^*)}{dt}$ es la velocidad lineal del punto P respecto del origen 0* y * w× r es la velocidad angular del punto P respecto del origen 0*.

De manera similar la aceleración general del sistema de puede describir como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r^*}{dt^2} + \frac{d^2h}{dt^2} = a^* + a_h$$

$$a = \frac{d^{*2}r^*}{dt^2} + 2wx\frac{d^*r^*}{dt} + wx(wxr) + \frac{dw}{dt}xr^* + \frac{d^2h}{dt^2}$$

## 2. Cinemática de los eslabones del robot.

A partir de las ecuaciones de la sección anterior se desarrolla a continuación el planteamiento general para la cinemática de los eslabones del robot.

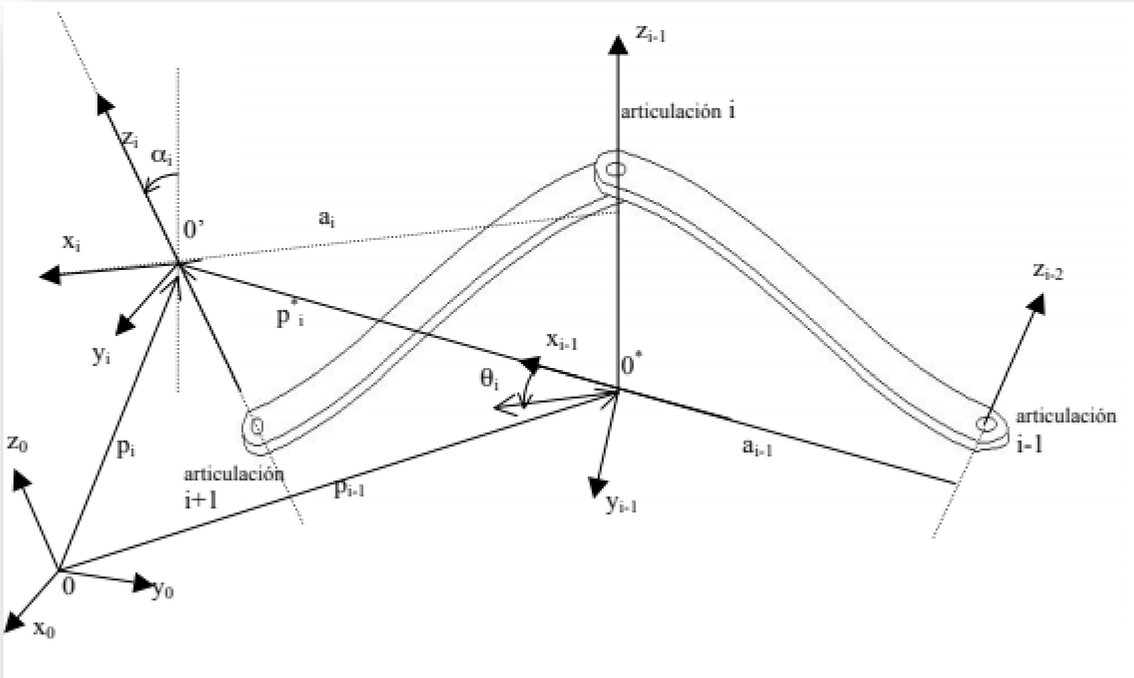


**Figura 3.2**. Relaciones vectoriales entre los sistemas de referencia 0,0* y 0'

De acuerdo a la figura 3.2 las ecuaciones cinemáticas para los eslabones de un robot, se pueden escribir como:

Debe notarse que la velocidad angular del sistema de referencia wi es igual a la suma de la velocidad angular absoluta del sistema i-1 más la velocidad angular relativa * wi del eslabón referida a su propio sistema de coordenadas.

La aceleración lineal del sistema de coordenadas de la articulación i es:

$$v_i = \frac{d^{*2}p_1^*}{dt^2} + w_{i-1}xp^* + 2w_{i-1}x\frac{d^*p^*}{dt} + w_{1-i}x(w_{i-1}xp_i^*) + v_{i-1}$$

$$W_i = w_{i-1} + w_i$$

La aceleración angular del sistema de referencia i (xi, yi, zi) respecto del sistema (xi-1, yi-1, zi-1) se consigue de manera similar a la ecuación.

$$W_i = \frac{d^*w_i}{dt} + w_{i-1}xw_i$$

por lo que la ecuación queda como:

$$w_i = w_{i-1} + \frac{d^* w^*}{dt} + w_{i-1} x w_i$$

En general para un robot los sistemas de coordenadas (xi-1, yi-1, zi-1) y (xi, yi, zi) están unidos a los eslabones i-1 e i. La velocidad del eslabón i respecto del sistema de coordenadas i-1 es qi &. Si el eslabón es prismático, la velocidad será una velocidad de traslación relativa respecto del sistema (xi-1, yi-1, zi-1) y si es rotacional le corresponderá una velocidad rotacional relativa del eslabón i respecto del sistema (xi-1, yi-1, zi-1), por lo tanto:

$$w_i = \{ \begin{matrix} z_{i-1} q_i \\ 0 \end{matrix}$$

donde qi & es la magnitud de la velocidad angular del eslabón i con respecto al sistema de coordenadas (xi-1, yi-1, zi-1). De manera similar:

$$\frac{d^* w^*}{dt} \{ \begin{matrix} z_{i-1} q_i \\ 0 \end{matrix}$$

Debe notarse que el vector i−1 z es igual a (0, 0, 1)

Las velocidades y aceleraciones de los sistemas de coordenadas ligados a cada eslabón son absolutas y se calculan como:

$$w_i = \begin{cases} w_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i & \text{si el eslabón i es rotacional} \\ w_{i-1} & \text{si el eslabón i es traslacional} \end{cases} \qquad (3.13)$$

$$\dot{w}_i = \begin{cases} \dot{w}_{i-1} + z_{i-1} \ddot{q}_i + w_{i-1} \times \left( z_{i-1} \dot{q}_i \right) & \text{si el eslabón i es rotacional} \\ \dot{w}_{i-1} & \text{si el eslabón i es traslacional} \end{cases} \qquad (3.14)$$

Las velocidades lineales de los sistemas de referencia de cada eslabón se calculan como:

$$\frac{d^* p_i}{dt} = \begin{cases} w_i \times p_i^* & \text{si el eslabón i es rotacional} \\ \\ z_{i-1}\dot{q}_i & \text{si el eslabón i es traslacional} \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\frac{d^{*2} p_i^*}{dt^2} = \begin{cases} \dfrac{d^* w_i^*}{dt} \times p_i^* + w_i^* \times \left(w_i^* \times p_i^*\right) & \text{si el eslabón i es rotacional} \\ \\ z_{i-1}\ddot{q}_i & \text{si el eslabón i es traslacional} \end{cases} \tag{3.16}$$

por lo que la velocidad lineal absoluta del sistema de coordenadas ligado a cada eslabón se calcula como:

$$v_i = \begin{cases} w_i \times p_i^* + v_{i-1} & \text{si el eslabón i es rotacional} \\ \\ z_{i-1}\dot{q}_i + w_i \times p_i^* + v_{i-1} & \text{si el eslabón i es traslacional} \end{cases} \tag{3.17}$$

La aceleración se calcula como:

$$\dot{v}_i = \begin{cases} \dot{w}_i \times p_i^* + w_i \times \left(w_i \times p_i^*\right) + \dot{v}_{i-1} & \text{si el eslabón i es rotacional} \\ \\ z_{i-1}\ddot{q}_i + \dot{w}_i \times p_i^* + 2w_i \times \left(z_{i-1}\dot{q}_i\right) + w_i \times \left(w_i \times p_i^*\right) + \dot{v}_{i-1} & \text{si el eslabón i es traslacional} \end{cases} \tag{3.18}$$

## 3. Ecuaciones de movimiento recursivas

A partir de las ecuaciones cinemáticas del apartado anterior y aplicando el principio de D’Alembert del equilibrio estático para todos los instantes de tiempo, se obtienen las ecuaciones recursivas de Newton-Euler.

Si se utiliza la nomenclatura de la figura 3.2 sobre un eslabón cualquiera del robot, tal y como se muestra en la figura 3.3

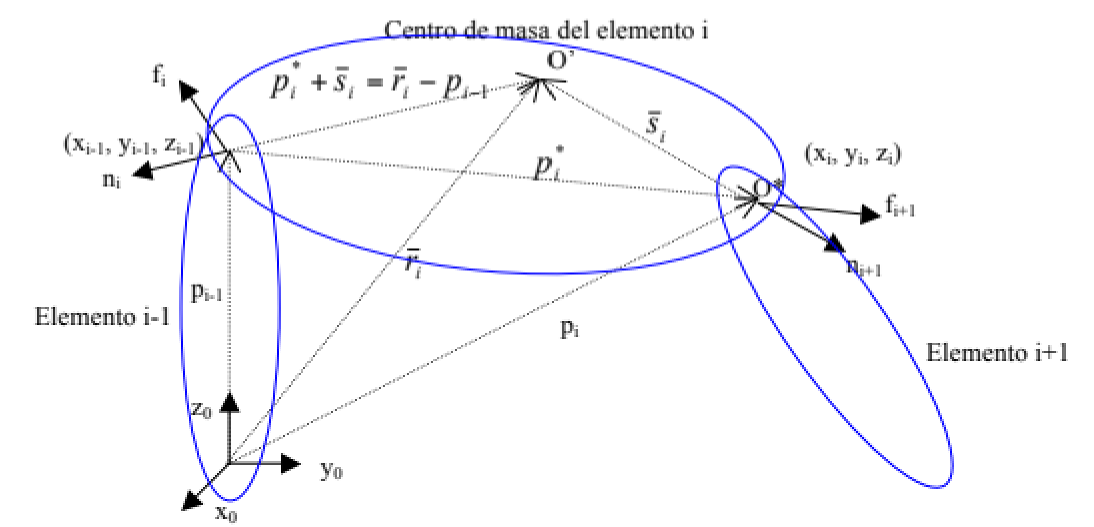


**Figura 3.3**.Fuerzas y momentos sobre el elemento i

Si se omiten los efectos del rozamiento viscoso en las articulaciones, y se aplica el principio de D’Alembert, se obtiene para cada eslabón:

$$F_i = \frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = m_i \bar{a}_i$$

$$N_i = \frac{d(I_i w_i)}{dt} = I_i \dot{w}_i + w_i \times (I_i w_i)$$

Realizando el balance de pares y fuerzas en la figura 3.3:

$$
\begin{aligned}
F_i &= f_i - f_{i+1} \\
N_i &= n_i - n_{i+1} + (p_{i-1} - \bar{r}_i) \times f_i - (p_i - \bar{r}_i) \times f_{i+1} \\
&= n_i - n_{i+1} + (p_{i-1} - \bar{r}_i) \times F_i - p_i^* \times f_{i+1}
\end{aligned}
$$

Que utilizando la relación geométrica:

$$\bar{r}_i - p_{i-1} = p_i^* + \bar{s}_i$$

Se obtienen las ecuaciones recursivas:

$$
\begin{aligned}
f_i &= F_i + f_{i+1} = m_i \bar{a}_i + f_{i+1} \\
n_i &= n_{i+1} + p_i^* \times f_{i+1} + (p_i^* + \bar{s}_i) \times F_i + N_i
\end{aligned}
$$