1 ROTACIONES Y CUATERNIOS

Los Cuaternios son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias: i, j y k a los números reales.

Definido en forma matricial, un cuaternión q se representa mediante:

$$q = \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix} = \\ = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{i} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{j} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{k} \quad (15)$$

donde $a,b,c,d \in \Re$, los elementos I, i, j y k también son cuaterniones y forman la base BQ del espacio de cuaterniones, siendo q combinación lineal de los elementos de BQ.

El producto se realiza componente a componente, y está dado en su forma completa por:

$$ab = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3)i + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4$$

Es posible escribir el cociente de dos cuaternios como:

$$\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$$

La exponenciación cuaternios está relacionada con funciones trigonométricas:

$$e^q = e^{a+bi+cj+dk} = e^a \left(cos\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{sen\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk) \right)$$

Son útiles para representar rotaciones de un objeto respecto a otro.

$$Q = Rot(k, \theta) = \left(cos\frac{\theta}{2}, ksen\frac{\theta}{2} \right)$$

Rotaciones

Al rotar un vector (x, y) R 2 alrededor del origen por un angulo obtenemos otro vector (x 0 , y0) R 2 cuyas coordenadas son:

$$x' = \cos(\theta)x - \operatorname{sen}(\theta)y, \quad y' = \operatorname{sen}(\theta)x + \cos(\theta)y,$$

lo cual expresamos por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observemos que

$$R(\theta) \cdot R^T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que $R \in SO(2)$.