第八章 NP与计算的难解性

苏 明

内容

- 多项式时间归约
- 使用“零件”归约：SAT
- 有效证书和NP的定义
- NP完全问题
- 排序、划分、图着色、数值问题
- 难问题的部分分类

NP与计算的难解性

- 贪心算法　　区间调度：O(n log n).
- 分治策略　　FFT　　O(n log n).
- 动态规划　　编辑距离　　$O(n^2)$

最开始我们把**多项式时间**作为效率的工作概念

面对一些困难的问题，我们即不知道这些问题存在多项式时间算法，也不能证明问题不存在多项式时间算法

这里将会对“困难”问题提出一个清晰的概念：在计算上实际上是难的，虽然我们不能证明它---NP完全

8.1 多项式时间归约

- 哪些问题在实际中存在可行解?
- 可行性定义: [Cobham 1964, Edmonds 1965, Rabin 1966] 存在多项式时间的算法.

Yes	Probably no
Shortest path	Longest path
Matching	3D-matching
Min cut	Max cut
2-SAT	3-SAT
Planar 4-color	Planar 3-color
Bipartite vertex cover	Vertex cover
Primality testing	Factoring

多项式时间归约

对问题按照相对难度做一个分类

- 比较
- 如何形式的表达“问题X至少像问题Y一样的难”？
- 在计算模型中假设X可以在多项式时间内求解。假设有一个能解问题X实例的**黑盒子**，如果写下X实例的输入，那么可以一步返回正确答案。

多项式时间归约

- 如果对于问题Y:
- 能够用多项式个标准的计算步骤;
- 加上多项式次调用解问题X的黑盒子来解问题Y

那么记作$Y \le_P X$;

读作“Y多项式时间可归约到X”;或“X至少像Y一样的难(相对于多项式时间)”

多项式时间归约

- 定理8.1 假设$Y \le_p X$，如果X能在多项式时间内求解，则Y也能在多项式时间内求解。

- 定理8.2 假设$Y \le_p X$，如果Y不能在多项式时间内解决，则X不能在多项式时间内解决。

多项式时间归约

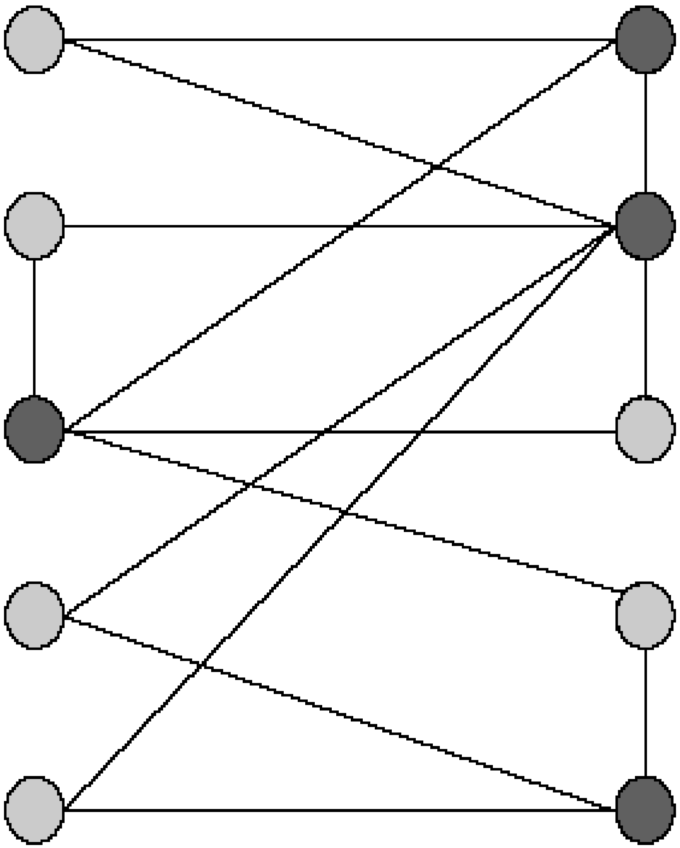
- 归约的基本策略
  - 简单等价归约.
  - 从特殊情形归约.
  - 使用零件归约.

多项式时间归约

独立集

- 在图G=(V,E)中，如果顶点集合S $\subseteq$ V 中的任意两点之间没有边，则称S是**独立**的。
- **独立集问题**：
- 给定图G和数k,问G包含大小至少为k的独立集吗？

多项式时间归约



存在大小至少为6的独立集吗？

Yes

存在大小至少为7的独立集吗？

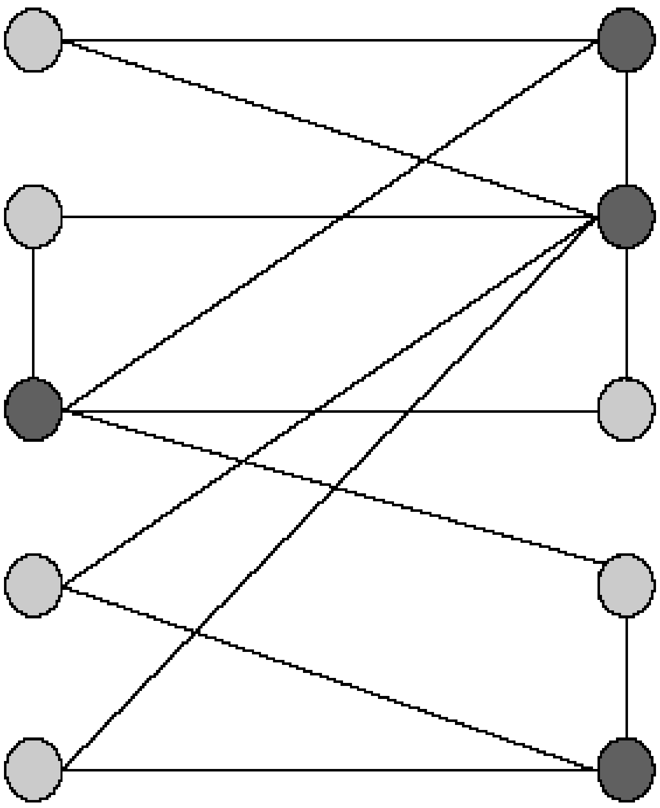
No

多项式时间归约

现在考虑另外一个基本图论问题：顶点覆盖

- 给定图G=(V,E),如果每一条边e ∈ E至少有一个端点在S中，则称S是一个**顶点覆盖**。
- 顶点覆盖问题：
- 给定图G和数k,问G是否包含大小至多为k的顶点覆盖？

多项式时间归约



存在大小至多为4的顶点覆盖吗？

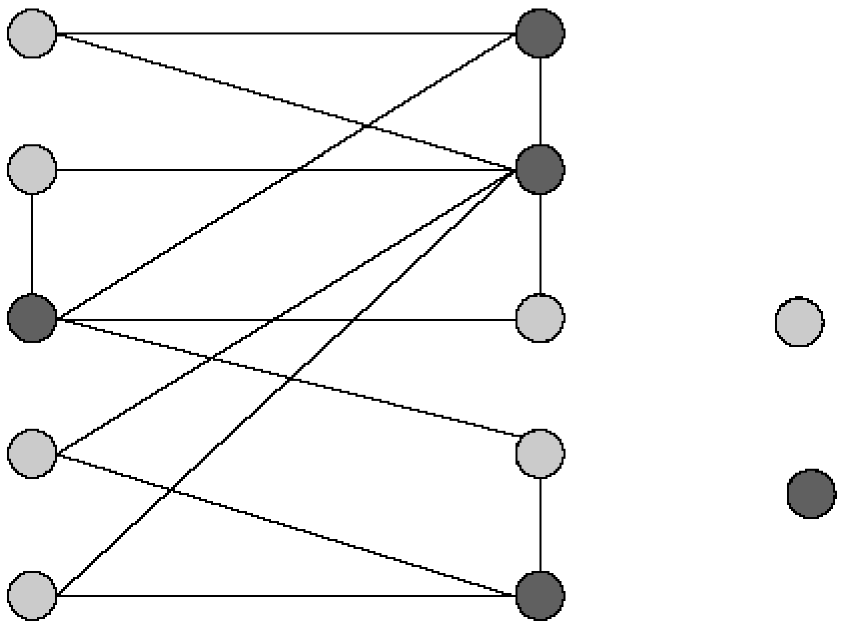
Yes

存在大小至多为3的顶点覆盖吗？

No

多项式时间归约

- 看起来顶点覆盖问题，独立集问题可能存在一定联系



独立集

顶点覆盖

多项式时间归约

- 引理8.3 设G=(V,E)是一个图， $S \subseteq V$，那么S是一个独立集当且仅当它的补V-S是一个顶点覆盖。
- 证明： $\Rightarrow$

首先，设S是一个独立集。考虑任一条边e=(u,v). 因为S是独立集，u和v必有一个在V-S中，于是每一条边至少有一个端点在V-S中。所以V-S是一个顶点覆盖。

多项式时间归约

- $\Leftarrow$
- 设V-S是一个顶点覆盖。考虑S中的任意两个顶点u和v, 如果他们之间有一条边e, 那么e的两个端点都不在V-S中，与假设V-S是一个顶点覆盖矛盾。因此，S中的任意两个顶点之间都没有边，S是一个独立集。

多项式时间归约

- 命题.
- VERTEX-COVER $\equiv_P$ INDEPENDENT-SET
- 下面将介绍从特殊情形归约到一般情形的方法

多项式时间归约

- 集合覆盖：试图用一组较小的集合覆盖一个任意的对象集合
- 应用实例
  - m 个可供利用的软件；
  - 集合U由整个系统必须具备的n个性能组成；
  - 第i个软件包含性能集合$S_i \subseteq U$.
  - 目标：用尽可能少数的软件包含所需具备的n个性能。

多项式时间归约

- 集合覆盖问题
- 给定n个元素的集合U, U的子集S_1, S_2, . . . , S_m 以及数k, 是否存在数目至多为k的子集合，其并集等于U

例子

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
$k = 2$

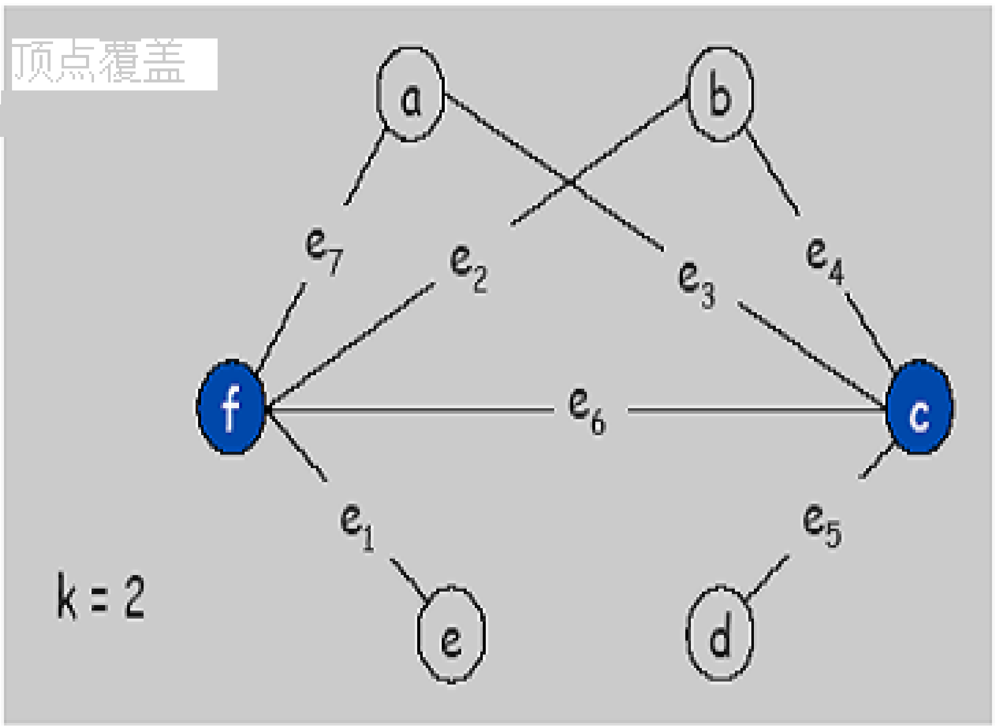
$S_1 = \{3, 7\}$	$S_4 = \{2, 4\}$
$S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$	$S_5 = \{5\}$
$S_3 = \{1\}$	$S_6 = \{1, 2, 6, 7\}$

多项式时间归约

直觉上告诉我们，集合覆盖比顶点覆盖更具一般性

- 定理8.6 顶点覆盖$\le_P$ 集合覆盖
- 证明：*我们构造集合覆盖的一个实例*，U=E. 在顶点覆盖中，每次取一个顶点覆盖所有与它关联的边。于是，对每一个顶点$i \in V$, $S_i = \{e \in E : e$ 连接到$i\}$; $k = k$

多项式时间归约



集合覆盖

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$k = 2$

$S_a = \{3, 7\}$ $S_b = \{2, 4\}$

$S_c = \{3, 4, 5, 6\}$ $S_d = \{5\}$

$S_e = \{1\}$ $S_f = \{1, 2, 6, 7\}$

多项式时间归约

- 对于这个构造的实例，U能被至多k个子集合覆盖，当且仅当G有大小至多为k的顶点覆盖。
- 如果$S_{i_1},\ldots,S_{i_l}$是*l*<=*k*个覆盖U的集合，那么G中的每一条边都关联到顶点 $i_1,\ldots,i_l$ 中的一个，$\{i_1,\ldots,i_l\}$是G中大小为*l*的顶点覆盖。反过来亦然。

多项式时间归约

- 注意到集合覆盖是顶点覆盖的自然推广
- 类似的，独立集的自然推广是关于集合的包装问题
- **集合包装**问题：希望把大量集合包装在一起，限制他们中的任意两个都不重叠。
- 例子：设想有n个不能共享的资源集合U,m个软件进程，第i个进程运行需要的资源集为S_i,需要从这些进程中寻找一组进程，使得他们能够同时运行，而且所需资源没有重叠**冲突**。

多项式时间归约

- 问题描述：
- 给定n个元素的集合U, U的子集 $S_1,\ldots S_m$

  以及数k, 问在这些子集中至少有k个两两不相交吗？

定理8.7 独立集≤ $_P$集合包装

使用“零件”归约

- 给定n个布尔变量$x_1,\ldots,x_n$ 的集合X,每个布尔变量可以取值0,1
- 项(Literal):一个布尔变量或者其逆 x_i or $\overline{x_i}$
- 子句(Clause): 项的析取 $C_j = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
- 合取范式(Conjunctive normal form): 一个命题公式Φ 由子句的合取范式构成。

$$\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$$

使用“零件”归约

- 如果赋值v满足每一个子句$C_1,\ldots,C_k$, 也就是合取式 $\phi = c_1 \wedge \cdots \wedge c_k$ 值为1，称v是关于$C_1,\ldots,C_k$的一个满足的赋值，又称这组子句是可**满足**的。

例子：$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$
是否可满足？

Yes: x_1 = 1(true), x_2 = 1(true), x_3 = 0(false).

使用“零件”归约

- 可满足性问题：(SAT)
- 给定变量集合 $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ 上的一组子句 $C_1,\ldots,C_k$, 或者是对于 $\phi=c_1\wedge\cdots\wedge c_k$ (CNF)，问存在满足的真值赋值吗？

3-SAT:三元可满足性：

要求每一个子句的长为3

使用“零件”归约

- 可满足性和三元可满足性是基本的组合搜索问题，以非常梗概的方式包含一个难计算问题的基本要素，必须作出n个独立的决定满足一组约束。

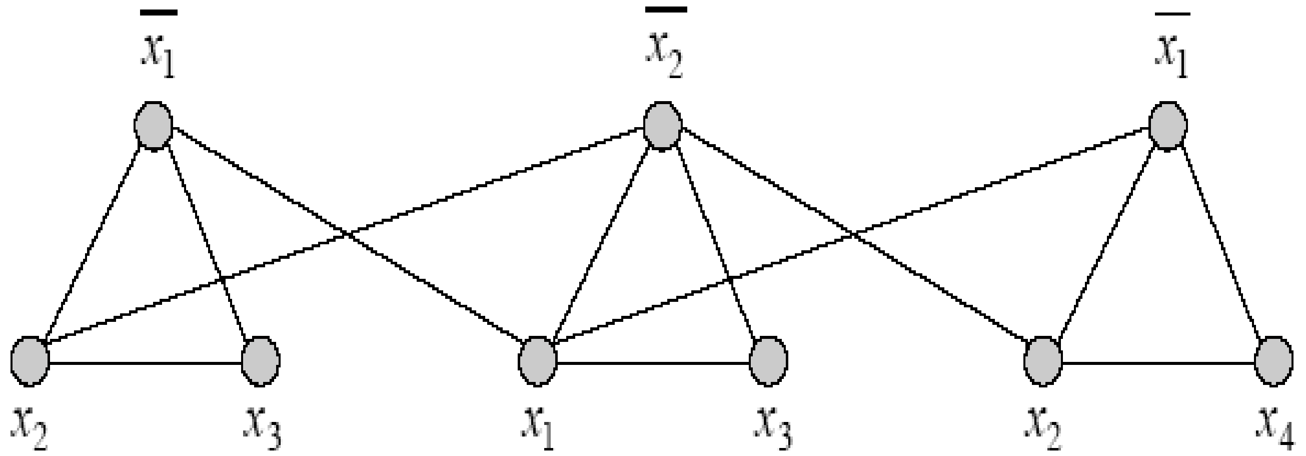
- 定理8.8 3-SAT $\le_P$ 独立集.

使用“零件”归约

- 证明：给定3-SAT的一个实例Φ，我们构造独立集 (G, k)的一个实例，使得存在一个大小为k的独立集当且仅当Φ 是可满足的.
- 构造:
  - G 包含3个顶点对应到一个子句，每一个顶点代表一个项.
  - 连接一个三角形(对应到一个子句)的三个顶点(项).
  - 把每一个项与它的否定项连接起来.

使用“零件”归约

G



$k = 3$

$$\Phi = \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4\right)$$

使用“零件”归约

- 规约的传递性

- 定理8.9 如果$X \le_P Y$ 且 $Y \le_P Z$, 则$X \le_P Z$.

  证明：把两个算法组合起来

使用“零件”归约

- 简单等价归约：独立集 $\equiv_P$ 顶点覆盖.
- 从特殊情形归约：顶点覆盖 $\leq_P$ 集合覆盖.
- 使用“零件”归约：3-SAT $\leq_P$ 独立集

于是对于这几个问题的难度我们有了一个比较关系：

3-SAT $\leq_P$ 独立集 $\leq_P$ 顶点覆盖 $\leq_P$ 集合覆盖.

归约—问题描述

- 判别问题. 是否存在一个集合大小不超过k的顶点覆盖？
- 寻找问题. 寻找最小的顶点覆盖
- 自归约性质. 寻找问题 $\le_P$ 判别问题
  - 可以应用到本章中的所有(NP完全)问题.
  - 我们可以重点集中讨论判别问题.

8.3 有效证书和NP的定义

- 一个计算问题的输入被编码成有穷的二进制串s,串s的长度记为|s|.把判定问题X等同于由对它的答案为“Yes”的串组成的集合
- 判定问题的算法A接受输入串s并返回值“yes”或“no”,返回的值记为A(s),如果对所有的串s,A(s)=yes *当且仅当*s∈X,则称A解问题X.

NP的定义

- 如果存在多项式p(.)使得对每一个输入串s, 算法A对s的计算在至多O(p(|s|))步内终止，则称A有多项式运行时间。

- 根据这一概念，就形成了问题类：**存在多项式时间解法的问题的集合P**

NP的定义

- PRIMES: X = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, …. }
- 判定素性问题：
- [Agrawal-Kayal-Saxena, 2002] AKS算法
  - Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, and Nitin Saxena on August 6, 2002： *PRIMES is in P*.
  - The authors received the 2006 Gödel Prize and the 2006 Fulkerson Prize for this work.
- $p(|s|) = |s|^{6+\varepsilon}$

NP的定义

- 一些经典的P类问题

Problem	Description	Algorithm	Yes	No
MULTIPLE	Is x a multiple of y?	Grade school division	51, 17	51, 16
RELPRIME	Are x and y relatively prime?	Euclid (300 BCE)	34, 39	34, 51
PRIMES	Is x prime?	AKS (2002)	53	51
EDIT-DISTANCE	Is the edit distance between x and y less than 5?	Dynamic programming	niether neither	acgggt ttttta
LSOLVE	Is there a vector x that satisfies Ax = b?	Gauss-Edmonds elimination	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

NP的定义

- 直觉上告诉我们，求解问题是困难的，但是**验证**一个问题的解相对要容易

- 问题X的“验证算法”具有不同于求解问题的算法结构，为了验证一个解，需要输入串s以及另外的“**证书**”串t,这个证书t包含s是X的“yes”实例的证据。

NP的定义

- 如果：
- B是有两个输入变量s,t的多项式时间算法
- 存在多项式p使得对每一个输入串s, $s \in X$ 当且仅当存在串t使得$|t| \le p(|s|)$ 且 B(s,t)=yes.
- 则称B是问题X的有效验证程序。

t是证书

NP的定义

- 根据验证算法的性质，可以定义新的问题类别
- NP(Nondeterministic polynomial time)是所有存在有效验证程序的问题的集合

NP的定义

定理8.10 P$\subseteq$NP

- 证明：考虑问题X $\in$P,意味着存在一个解X的多项式时间算法A。

  如下设计B,对于输入(s,t),验证程序直接返回值A(s).

  可以看到，如果串s $\in$X,对于每一个长度不超过p(|s|)的t, 满足B(s,t)=yes…

  可见B是有效验证程序。

NP的定义

例子：对于三元可满足性问题

- 证书t?
- 对所有变量的真值赋值
- 验证程序B?
- 计算ϕ在这个赋值下的值

NP的定义

$$\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee x_2 \vee x_4\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right)$$

实例 s

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$$

证书 t

SAT, 3SAT $\in$ NP

NP的定义

例子：对于独立集问题

- 证书t?
- 至少有k个顶点的集合
- 验证程序B?
- 核实这些顶点中的任何两两之间没有边连接

NP的定义

例子：对于集合覆盖问题

- 证书t?
- 给定的一组集合中的k个集合
- 验证程序B?
- 核实这k个集合的并等于基础集U

NP的定义

例子：Composite,给定一个整数 s, s 是合数吗?

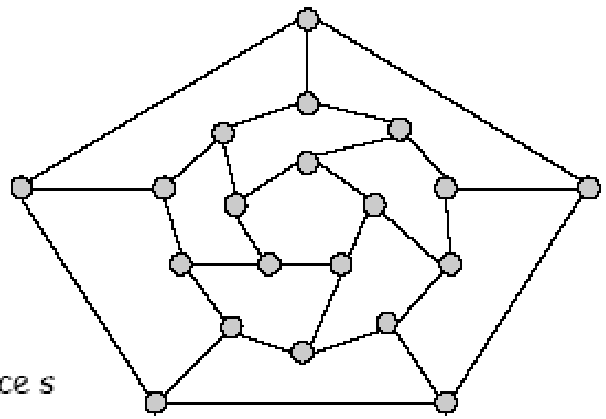
- 证书:
- s的一个非平凡因子。注意到这样一个证书存在当且仅当s是一个合数，此外|t| ≤ |s|.
- 验证程序:

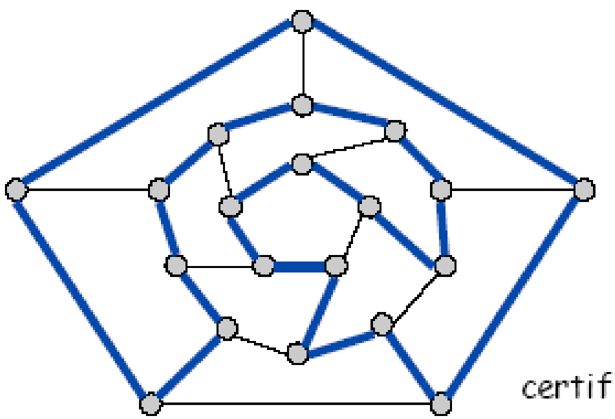
```
boolean C(s, t) {
   if (t ≤ 1 or t ≥ s)
      return false
   else if (s is a multiple of t)
      return true
   else
      return false
}
```

COMPOSITES ∈ NP

NP的定义

- **哈密尔顿回路**. 给定无向图 G = (V, E), 是否存在一个简单回路C访问到每一个结点?
- 证书： n个结点的一个有序排列
- 验证程序. 检查排列中包含每一个结点；排列中相邻结点有边相连。
- HAM-CYCLE $\in$ NP.





NP的定义

- P = NP? [Cook 1971, Edmonds, Levin, Yablonski, Gödel]
  - 判定问题和验证问题一样难吗?
  - $1 million prize.
- If yes: Efficient algorithms for 3-COLOR, TSP, FACTOR, SAT, …
- If no: No efficient algorithms possible for 3-COLOR, TSP, SAT, …
- P = NP? 大家的意见一致倾向于不相等.

8.4 NP完全问题

- P=NP这个问题没有太多进展，转向另外一个问题，那些是NP中**最难**的问题？
- 自然的，要求NP中的每一个问题都能够归约到X
- NP完全问题X

i. $X \in NP$

ii. 对于**所有的**$Y \in NP$, $Y \leq_p X$.

NP完全问题

- 定理8.12. 设X是一个NP完全问题，那么X是在多项式时间内可解的当且仅当P = NP.
- Pf. $\Leftarrow$ 如果 P = NP，那么自然的X在多项式时间内可解因为 X 属于 NP.

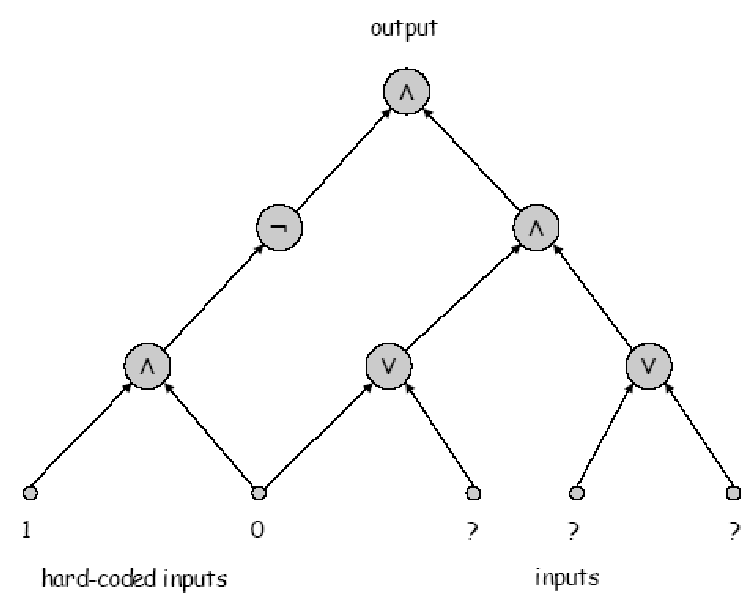
  Pf. $\Rightarrow$ 设X在多项式时间内可解.

  - 设Y 是 NP中的任意一个问题，因为 $Y \le_p X$, 所以 Y 在多项式时间内可解， 这就推出 NP $\subseteq$ P.
  - 显然我们知道 P $\subseteq$ NP， 这样P = NP. ▪

NP完全问题

- 是否存在一个天然的NP完全问题？
- 电路可满足性(CIRCUIT-SAT). 给定一个由AND, OR, NOT电路门组成的电路，需要确定是否存在对输入的赋值使得输出值为1?

yes: 1 0 1



NP完全问题(电路可满足性)

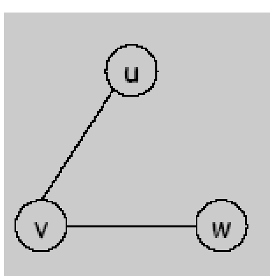
定理8.13([Cook 1971, Levin 1973]) 电路可满足性是**NP**完全的

- Pf. Any algorithm that takes a fixed number of bits n as input and produces a yes/no answer can be represented by such a circuit. Moreover, if algorithm takes poly-time, then circuit is of poly-size.
  - Consider some problem X in NP. It has a poly-time certifier C(s, t). To determine whether s is in X, need to know if there exists a certificate t of length p(|s|) such that C(s, t) = `yes`.
  - View C(s, t) as an algorithm on |s| + p(|s|) bits (input s, certificate t) and convert it into a poly-size circuit K.
    - first |s| bits are hard-coded with s
    - remaining p(|s|) bits represent bits of t
  - Circuit K is satisfiable iff C(s, t) = `yes`.

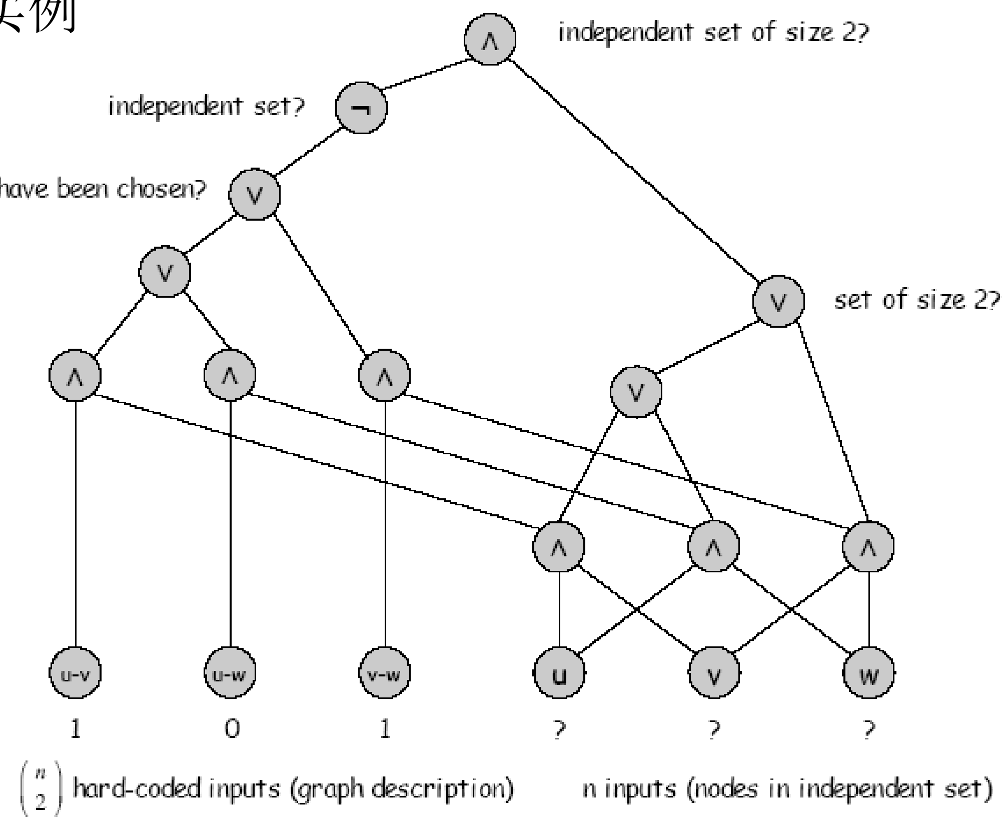
NP完全问题(电路可满足性)

例子：给定一个图G,它包含两个顶点的独立集吗？

构造一个等价的电路可满足实例



G = (V, E), n = 3



NP完全问题

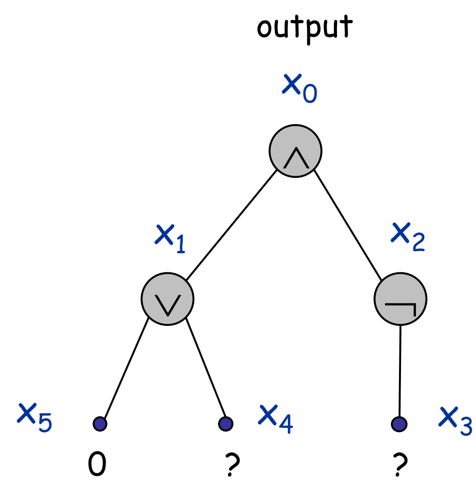
如何发现更多的NP完全问题?

- 定理8.14 如果Y是一个NP完全问题，X属于NP且$Y \le_P X$,则X是NP完全的。
- 证明：设Z是NP中的任意一个问题，由Y的NP完全性，有$Z \le_P Y$. 于是，根据传递性，$Z \le_P X$, 根据定义知道X是NP完全的。

3-SAT: NP-Complete

Theorem. 3-SAT is NP-complete.

- Pf. Suffices to show that CIRCUIT-SAT $\leq_P$ 3-SAT since 3-SAT is in NP.
  - Let K be any circuit.
  - Create a 3-SAT variable x_i for each circuit element i.
  - Make circuit compute correct values at each node:
    - $x_2 = \neg\, x_3 \;\Rightarrow$ add 2 clauses: $x_2 \vee x_3 \,,\; \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
    - $x_1 = x_4 \vee x_5 \;\Rightarrow$ add 3 clauses: $x_1 \vee \overline{x_4} \,,\; x_1 \vee \overline{x_5} \,,\; \overline{x_1} \vee x_4 \vee x_5$
    - $x_0 = x_1 \wedge x_2 \;\Rightarrow$ add 3 clauses: $\overline{x_0} \vee x_1 \,,\; \overline{x_0} \vee x_2 \,,\; x_0 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
  - Hard-coded input values and output value.
    - $x_5 = 0 \;\Rightarrow$ add 1 clause: $\overline{x_5}$
    - $x_0 = 1 \;\Rightarrow$ add 1 clause: x_0
  - Final step: turn clauses of length < 3 into clauses of length exactly 3.



3-SAT:NP-Complete

Theorem. 3-SAT is NP-complete.

Pf-Continued:

$z_i=0$ for i=1,2 equivalent to

$$(\overline{z}_i \vee z_3 \vee z_4) \wedge (\overline{z}_i \vee \overline{z}_3 \vee z_4) \wedge (\overline{z}_i \vee z_3 \vee \overline{z}_4) \wedge (\overline{z}_i \vee \overline{z}_3 \vee \overline{z}_4)$$

$$t \to t \vee z_1 \vee z_2$$

$$t \vee t' \to t \vee t' \vee z_2$$

NP-Complete Problems

3-SAT$\leq_p$独立集$\leq_p$顶点覆盖$\leq_p$集合覆盖

因此他们都是NP完全问题

NP-Complete Problems

证明NP完全性的通用思路

1. 证明$X \in NP$
2. 选择一个已知的NP完全问题Y
3. 考虑问题Y的**任意**一个实例S_Y, 说明如何在多项式时间内构造X的一个实例S_X：

   S_X和S_Y有相同的答案。

TSP 问题

Travelling Salesman Problem

- 一位巡回售货员必须访问n个城市，分别记为$v_1, v_2, \ldots, v_n$.售货员从居住城市v_1出发，访问所有其他城市，然后回到v_1. 他的目标是使得整个旅行路线的距离尽可能小。

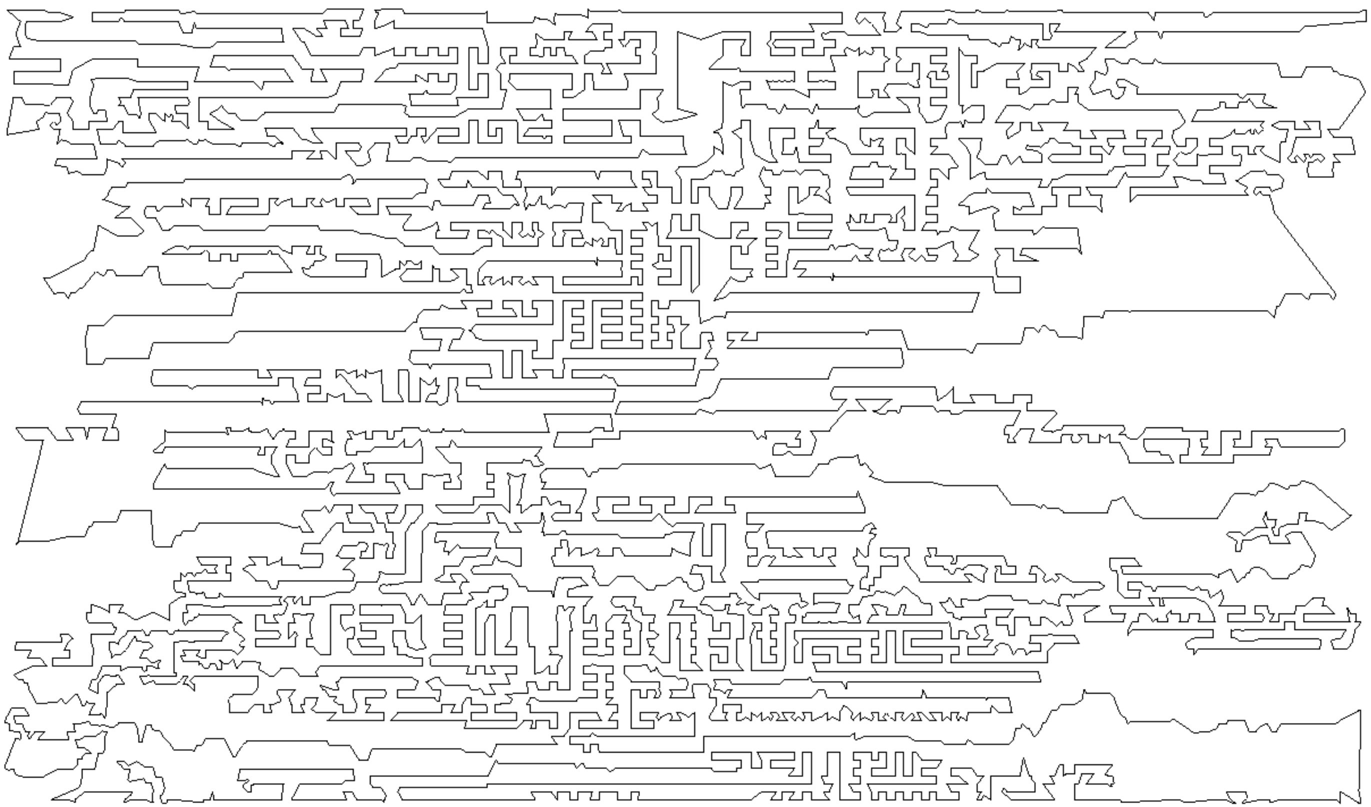
判定问题

- 给定n个城市之间距离的集合以及界限D,问有长度不超过D的路线吗？

TSP 问题

转孔问题

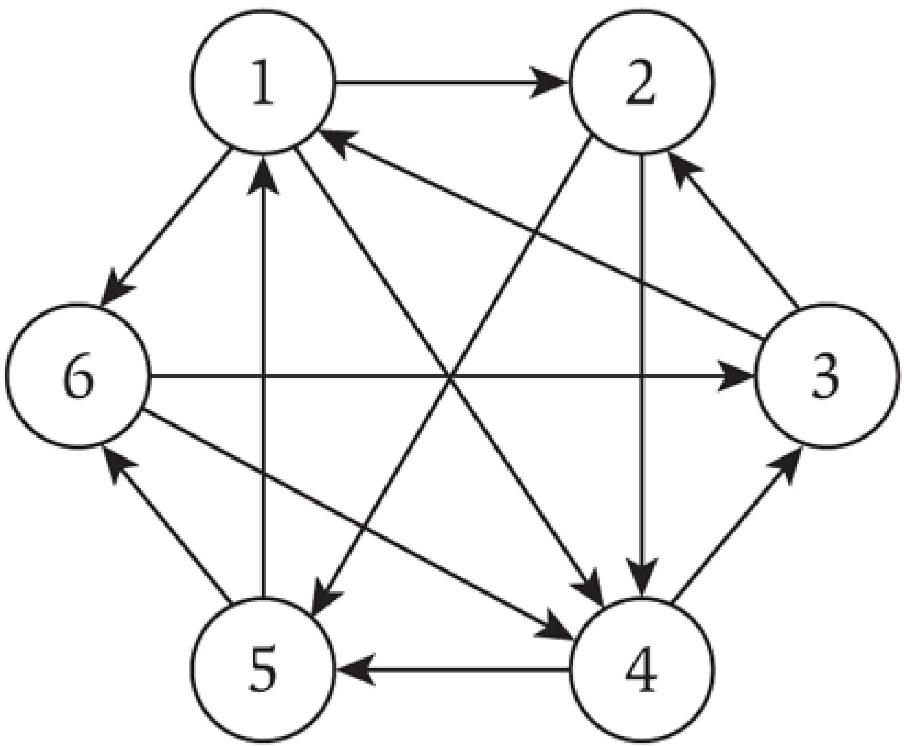
TSP 问题



转孔问题-Optimal TSP

哈密尔顿圈问题

给定一个有向图G, 它有一条哈密尔顿圈吗？



哈密尔顿圈问题 VS TSP

HAM-CYCLE $\leq_P$ TSP.

Pf.

- Given instance G = (V, E) of HAM-CYCLE, create n cities with distance function

$$d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } (u, v) \in E \\ 2 & \text{if } (u, v) \notin E \end{cases}$$

- TSP instance has tour of length ≤ n iff G is Hamiltonian. ▪

哈密尔顿圈-NP完全

定理8.17 哈密尔顿圈是NP完全的

证明：给定一个有向图G=(V,E), 证书是一个哈密尔顿圈上所有顶点的顺序表。我们能够在多项式时间内确定哈密尔顿圈。

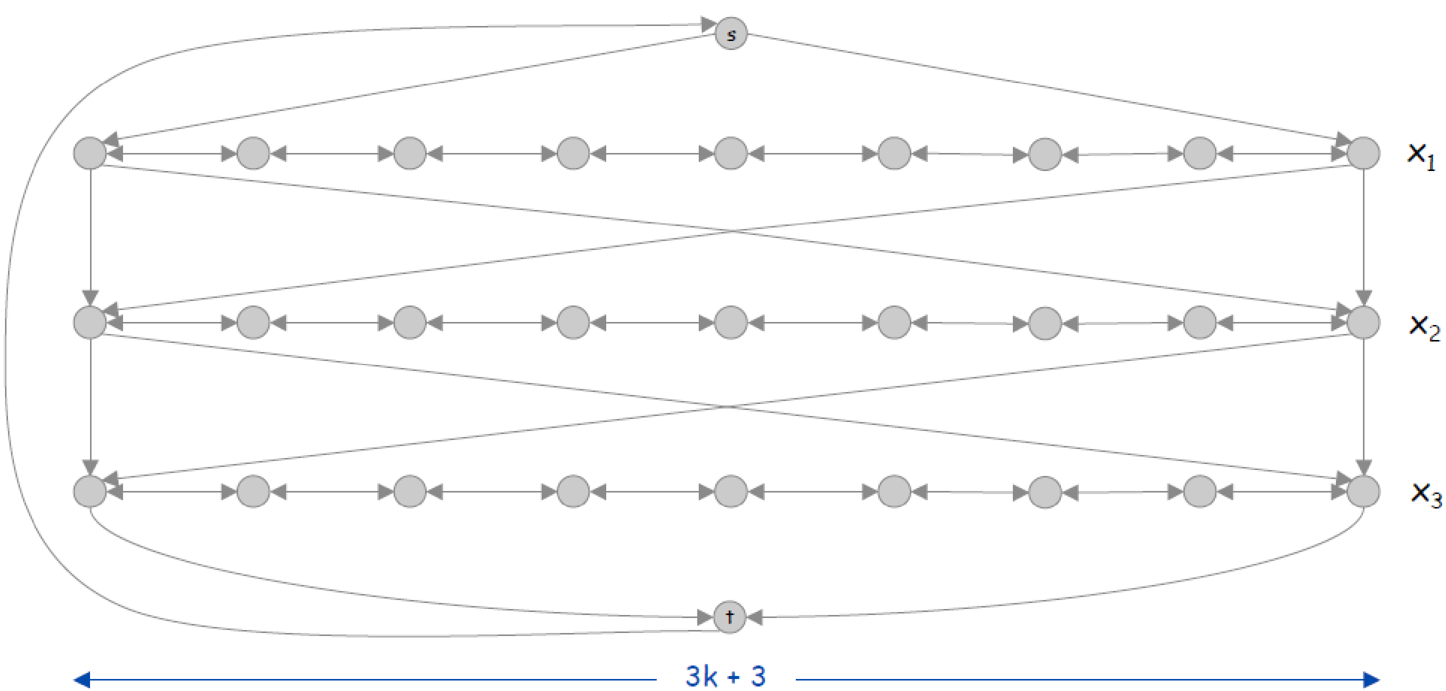
因此哈密尔顿圈$\in$ NP.

下面我们将证明3SAT $\leq_P$哈密尔顿圈.

哈密尔顿圈-NP完全

Construction. Given 3-SAT instance Φ with n variables x_i and k clauses.

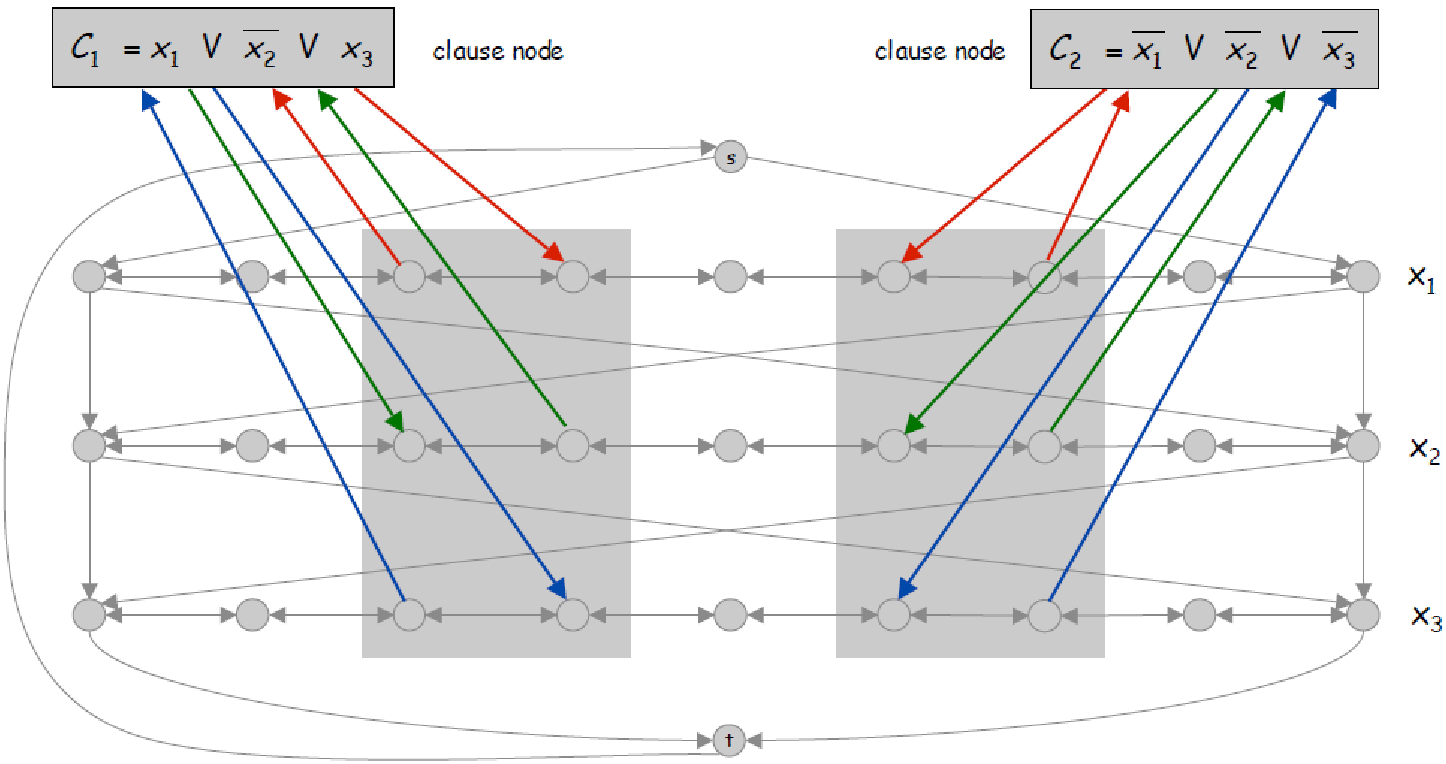
- Construct G to have 2^n Hamiltonian cycles.
- Intuition: traverse path i from left to right ⇔ set variable $x_i = 1$.



哈密尔顿圈-NP完全

Construction. Given 3-SAT instance Φ with n variables x_i and k clauses.

- For each clause: add a node and 6 edges.



哈密尔顿圈-NP完全

- Claim. Φ is satisfiable iff G has a Hamiltonian cycle.
- Pf. $\Rightarrow$
  - Suppose 3-SAT instance has satisfying assignment x^*.
  - Then, define Hamiltonian cycle in G as follows:
    - if $x^*_i = 1$, traverse row i from left to right
    - if $x^*_i = 0$, traverse row i from right to left
    - for each clause C_j , there will be at least one row i in which we are going in "correct" direction to splice node C_j into tour

哈密尔顿圈-NP完全

Claim. Φ is satisfiable iff G has a Hamiltonian cycle.

- Pf. $\Leftarrow$
  - Suppose G has a Hamiltonian cycle Γ.
  - If Γ enters clause node C_j, it must depart on mate edge.
    - thus, nodes immediately before and after C_j are connected by an edge e in G
    - removing C_j from cycle, and replacing it with edge e yields Hamiltonian cycle on G - { C_j }
  - Continuing in this way, we are left with Hamiltonian cycle Γ' in
    G - { C_1 , C_2 , . . . , C_k }.
  - Set x^*_i = 1 iff Γ' traverses row i left to right.
  - Since Γ visits each clause node C_j, at least one of the paths is traversed in "correct" direction, and each clause is satisfied. ▪

哈密尔顿路径问题

- G=(V,E), 如果G中的路径P恰好包括每一个顶点一次，则称它是一条哈密尔顿路径。
- 与哈密尔顿圈不同，不需要回到起点。
- 哈密尔顿路径问题：

  给定有向图G, 它有一条哈密尔顿路径吗？

类似的，我们可以证明：

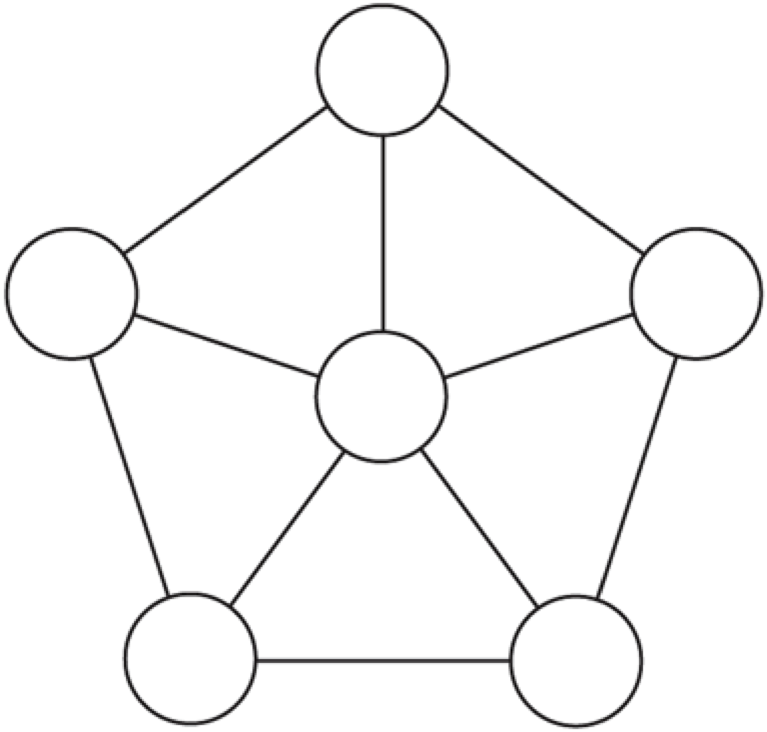
哈密尔顿路径问题是NP完全的。

图着色

任意给定图G和界限k, 问G有k-着色吗？

- k=2
- 一个图是2着色的当且仅当它是二部图。
- O(m+n)

三着色



- 判别: 3-着色是NP完全的

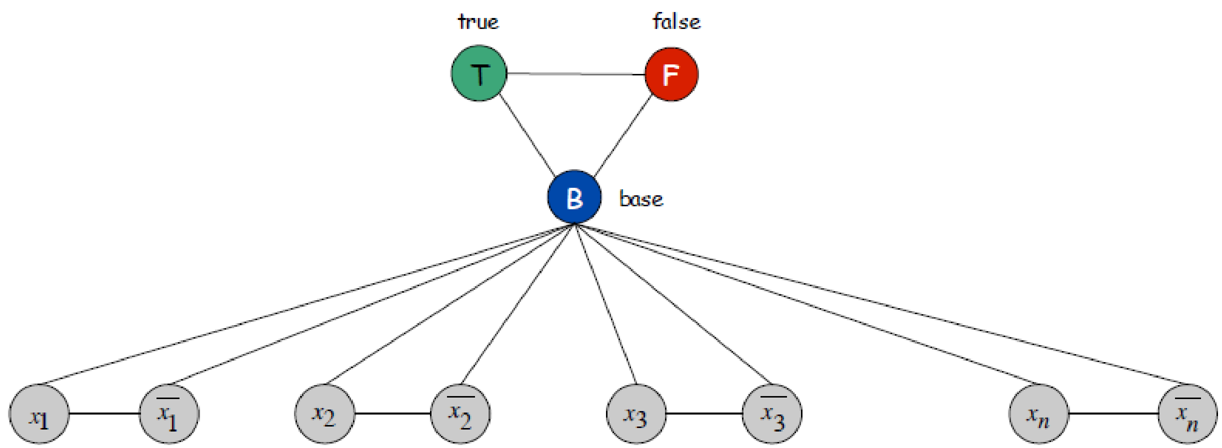
三着色

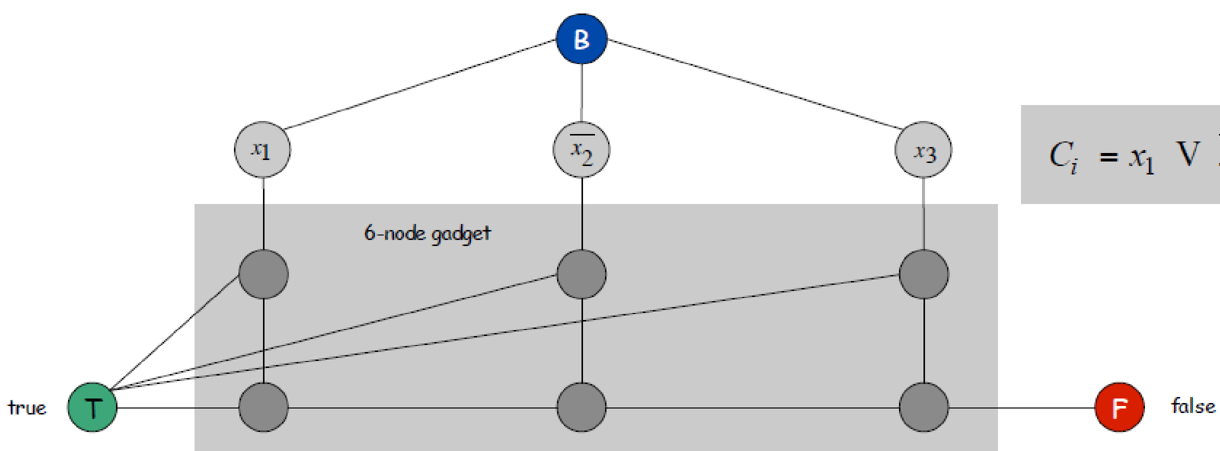
3-SAT $\leq_P$ 3-COLOR.

Pf. Given 3-SAT instance Φ, we construct an instance of 3-COLOR that is 3-colorable iff Φ is satisfiable.

- Construction.
  i. For each literal, create a node.
  ii. Create 3 new nodes T, F, B; connect them in a triangle, and connect each literal to B.
  iii. Connect each literal to its negation.
  iv. For each clause, add gadget of 6 nodes and 13 edges.

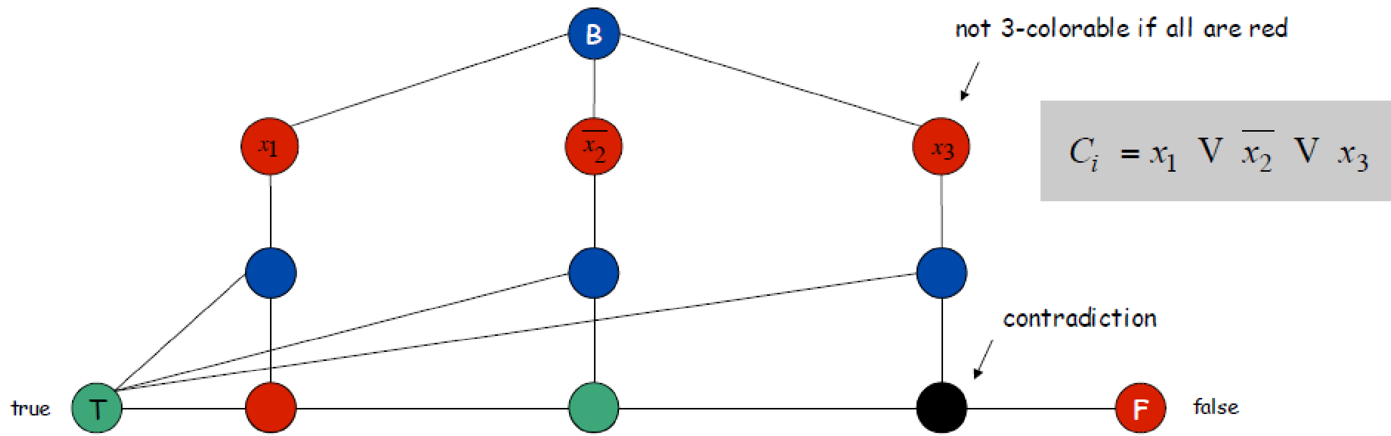
三着色



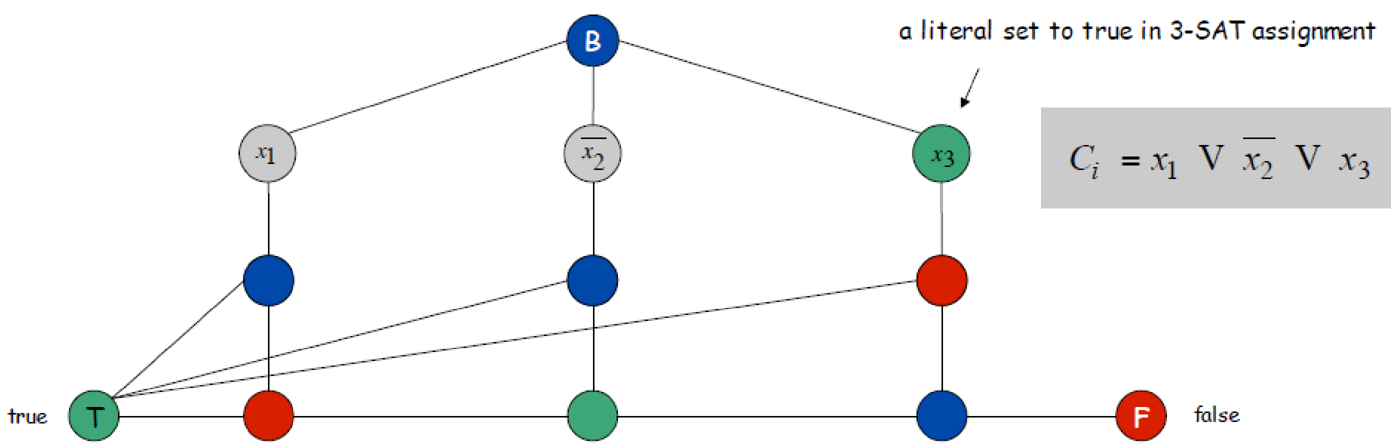


$C_i = x_1 \lor \overline{x_2} \lor x_3$

三着色



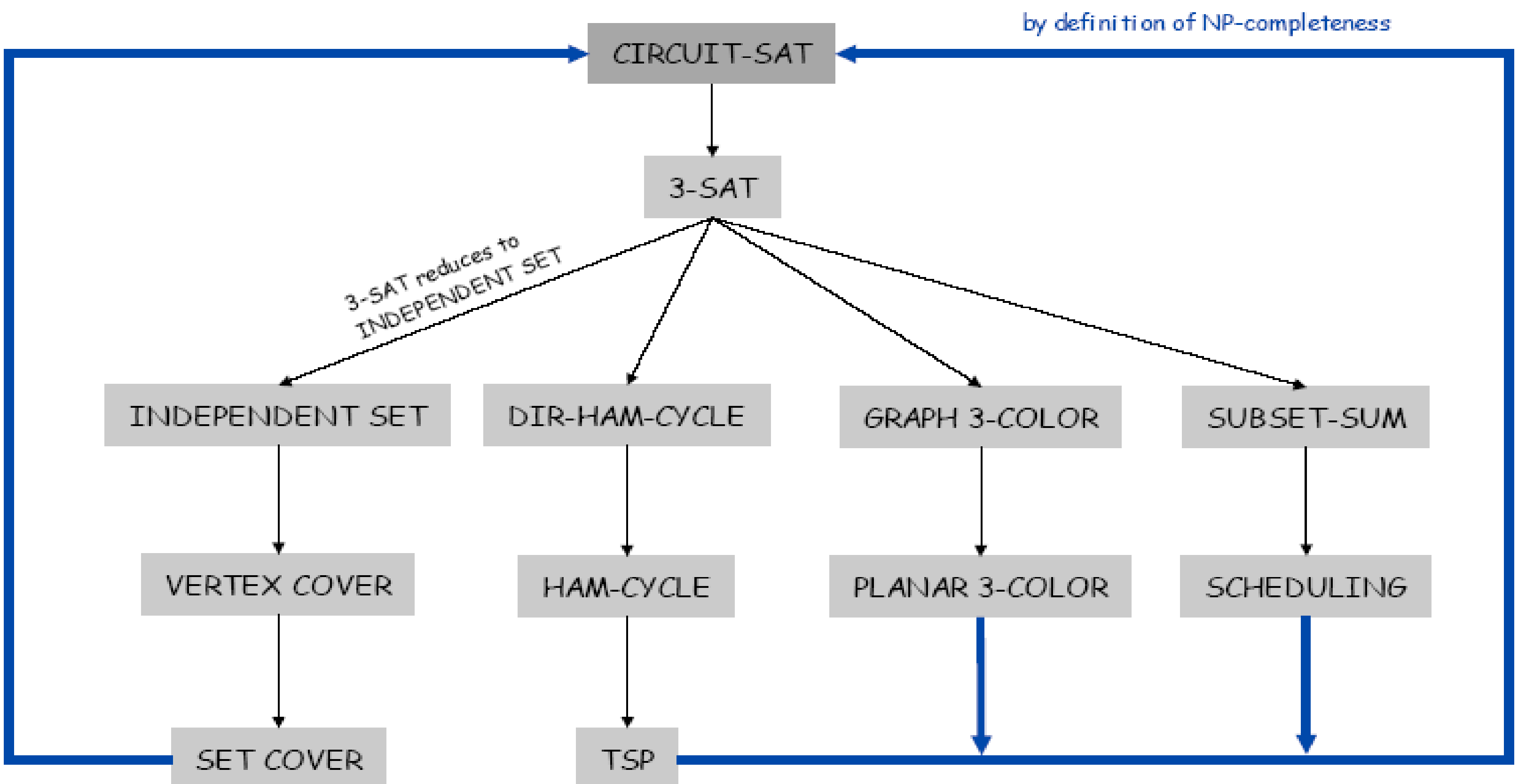
not 3-colorable if all are red
B
x_1
$\overline{x_2}$
x_3
$C_i = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
contradiction
true
T
F
false



a literal set to true in 3-SAT assignment
B
x_1
$\overline{x_2}$
x_3
$C_i = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
true
T
F
false

NP完全问题

- 根据前面的多项式归约性质，我们可以得到更多的NP完全问题



NP完全问题

- 难问题的部分分类

1. 包装问题：独立集，集合包装
2. 覆盖问题：顶点覆盖，集合覆盖
3. 划分问题：三维匹配，图着色
4. **排序问题**：哈密尔顿圈，哈密尔顿回路，巡回售货员问题
5. 数值问题：子集和，带开放时间和截止时间的调度问题
6. 约束满足问题：SAT,3SAT

- 一般的经验是，NP问题要么是P,要么是NP完全问题