插值法：

- 拉格朗日插值：

两点一次： $L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$ 三点二次： $L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$

插值余项：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

当 $n=1$ 时，$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\xi\in[x_0,x_1]$

当 $n=2$ 时，抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\xi\in[x_0,x_2]$$

- 牛顿法插值： $N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

插值余项：

$$f[x,x_0,\ldots,x_n]\omega_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

差商与导数 $f\left[x_0,x_1,\cdots,x_j\right]=\frac{f^{(j)}(\zeta)}{j!}$

- Hermite 插值：先求牛顿+再满足导数

两点三次：

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	m_0	m_1

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_0]$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1]$	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1]$

$f\left[x_0,x_0\right]=f'\left(x_0\right)$ $\qquad f\left[x_0,x_0,\cdots,x_0\right]=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

插值余项 证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2,\quad \xi\in(x_k,x_{k+1}),$$

三点三次

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	y_0	y_1	y_2
$f'(x)$		m_1	

$$H_3(x)=y_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+k(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

15

函数逼近

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,y)\\ (\varphi_1,y)\\ \vdots\\ (\varphi_m,y)\end{bmatrix}$$

$$(f,g)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)f(x_i)g(x_i) & \text{离散型}\\ \int_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx & \text{连续型}\end{cases}$$

最小平方误差为

$$\delta^2=(\varphi^*-y,\varphi^*-y)=\sum_{i=0}^{N}\omega(x_i)\left[\varphi^*(x_i)-y_i\right]^2$$

数值积分

代数精度：对 m 次成立，m+1 次不成立//具有 4 个求积节点的插值型求积公式，至少有 3 次代数精度

余项：

插值型求积公式的余项为： $R[f]=I-I_n=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$

式中 ξ 与变量 x 有关， $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

牛顿-柯特斯公式：等距节点插值，插值系数固定

梯形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

$$R[f]=\int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)dx \quad \text{令 } x=a+th,\ h=b-a$$

$$=-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi),\quad \xi\in[a,b],\ h=\frac{b-a}{1}$$

辛普森公式：$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$ 代数精度 = 3 $R[f]=-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b),\ h=\frac{b-a}{2}$

辛普森 3/8：

1/8	3/8	3/8	1/8

$$R[f]=-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

复化求积公式：梯形 $\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]=T_n \quad =-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi),\ \xi\in(a,b)$

复化 Simpson: $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)] \quad =S_n \qquad R[f]=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$

已知截断误差，求不同算法所需节点

龙贝格算法：要会算过程

- T_1
- T_2 S_1
- T_4 S_2 C_1
- T_8 S_4 C_2 R_1
- T_{16} S_8 C_4 R_2
- T_{32} S_{16} C_8 R_4
- ....

$$S_n=\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}$$

$$C_n=\frac{4^2 S_{2n}-S_n}{4^2-1}$$

$$R_n=\frac{4^3 C_{2n}-C_n}{4^3-1}$$

高斯积分：通过确定积分点，提高精度。N+1 个积分点 2n+1 个代数精度

高斯积分的求解过程：高斯积分插值余项 要知道求积分的过程

$$R[f]=\int_a^b[f(x)-H(x)]dx$$

$$=\int_a^b\frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\omega^2(x)dx$$

$$=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b\omega^2(x)dx,$$

线性方程组的解法

高斯消去法：如果 A 为 n 阶非奇异矩阵，则可通过高斯消去法（及交换两行的初等变换）将方程组 AX=b 化为三角形方程组，要保证矩阵 A 得顺序主子式都不等于 0

Doolittle 分解：LU 分解（L 单位下三角，U 一般上三角）Ax=b;LUx=b,----LY=b/ Ux=Y

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & \cdots & \\ l_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \cdots & \vdots \\ & & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

向量范数 1-范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ∞-范数：$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

2-范数：$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ p-范数：$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

矩阵的范数：

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ **（行范数）**

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ **（列范数）**

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$ **（谱范数 /2-范数）**

常用矩阵范数：

Frobenius 范数 $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ — 向量$\|\cdot\|_2$的直接推广

对方阵 $A\in R^{n\times n}$ 以及 $\vec{x}\in R^n$ 有 $\|A\vec{x}\|_2\le\|A\|_F\cdot\|\vec{x}\|_2$

误差放大因子：

B 有误差 $\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$ 相对误差放大因子

A 有误差：$\frac{\|\delta x\|}{\|\vec{x}\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}=\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$

常用条件数

$cond\,(A)_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)/\lambda_{\min}(A^TA)}$

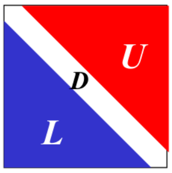
特别的，若 A 对称：

则 $cond\,(A)_2=\frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$

解线性方程组的迭代法：

雅可比矩阵迭代：

$$\vec{x}^{(k+1)}=-D^{-1}(L+U)\vec{x}^{(k)}+D^{-1}\vec{b}$$

$A=$ 

高斯-赛德尔：

$$\vec{x}^{(k+1)}=\underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}\vec{x}^{(k)}+\underbrace{(D+L)^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

迭代的判断条件：ρ（B）＜1 求 B 矩阵的特征值

合适迭代一定收敛：严格对角矩阵两种方法均收敛 让对角矩阵上的数，主对角元素的绝对值大于该行其余元素的绝对值之和

从松弛法的角度看迭代：

$0<\omega<1$	低松弛法
$\omega=1$	Gauss - Seidel 法
$\omega>1$	超松弛法

定理 设 A 可逆，且 $a_{ii}\ne0$，松弛法从任意 $\vec{x}^{(0)}$ 出发对某个 ω 收敛 $\Leftrightarrow\rho(H_\omega)<1$。

非线性方程与方程组的数值解法

二分法：给定精度求二分步数：$\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon\quad\Rightarrow\quad k>\frac{[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]}{\ln 2}$

迭代法的局部收敛性：

定理 设 x^* 为方程 $x=\varphi(x)$ 的根，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻近连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$ 则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。

P 阶收敛：

定理 设 x^* 为 $x=\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi\in C^p(R(x^*))$，$p\ge2$；$\varphi'(x^*)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，且 $\varphi^{(p)}(x^*)\ne0$，则 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 $R(x^*)$ 内 p 阶收敛。

牛顿法的迭代原理：$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

改进牛顿：牛顿下山法 $x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 当λ =1 代入效果不好时，λ将减半计算。

重根加速收敛：已知重根个数：$\bar{\varphi}(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$ ‘求重根的方法’

常微分方程数值解

显性欧拉法：这里的 f(x,y)就是 y’的表达式

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n) \quad (n = 0, \ldots, N-1)$$

隐性欧拉法：

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (n = 0, \ldots, N-1)$$

改进欧拉法：先用显示求 y(n+1)预测，然后代入改进的梯形公式：

Step 1: 先用显式欧拉公式作预测，算出 $\bar{y}_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)$

Step 2: 再将 $\bar{y}_{n+1}$ **代入隐式梯形公式的右边作校正，得到**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$$

局部截断误差和方法的阶

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$
$$= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)$$

二阶泰勒展开法：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + O(h^3)$$

求解局部误差的方法：y(xn+1)要在 xn 处用泰勒展开，准确展开，查分解用差分公式展开。

四阶经典龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

收敛性与稳定性：