插值法:

- 拉格朗日插值:

两点一次: $L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$ 三点二次: $L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$

插值余项:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

当 $n=1$ 时, $R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\xi\in[x_0,x_1]$

当 $n=2$ 时,抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\xi\in[x_0,x_2]$$

- 牛顿法插值: $N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

插值余项:

$$f[x,x_0,\ldots,x_n]\omega_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

- Hermite 插值: 先求牛顿+再满足导数

两点三次:

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	m_0	m_1

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_0]$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1]$	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1]$

$f[x_0,x_0]=f'(x_0)$ $\quad f[x_0,x_0,\cdots,x_0]=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

插值余项 证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2,\quad \xi\in(x_k,x_{k+1}),$$

三点三次:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	y_0	y_1	y_2
$f'(x)$		m_1	

$$H_3(x)=y_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+k(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$