UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tadeja Možina

METRIČNA DIMENZIJA GRAFA DELITELJEV NIČA

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. David Dolžan

Ljubljana, 2024

Kazalo

Metrična dimenzija grafa deliteljev niča

Povzetek

V diplomski nalogi preučujemo metrično dimenzijo grafa deliteljev niča kolobarja. Za kolobar R definiramo njegov graf deliteljev niča $\Gamma(R)$ kot enostaven neusmerjen graf, katerega vozlišča so delitelji niča, med dvema različnima vozliščema pa je povezava natanko tedaj, ko se zmnožita v 0. Metrična dimenzija takega grafa je velikost najmanjše urejene podmnožice njegovih vozlišč za katero velja, da imata poljubni vozlišči v grafu različna vektorja razdalj do elementov te množice. Najprej raziščemo kako omejiti metrično dimenzijo grafa. V ta namen definiramo množice dvojčkov grafa, to so podmnožice vozlišč grafa, kjer so vozlišča v isti množici dvojčkov, če imajo enake soseščine. Nato si podrobneje ogledamo metrični dimenziji grafov deliteljev niča kolobarja ostankov po danem modulu in kolobarja matrik nad danim poljem.

Metric dimension of a zero-divisor graph

Abstract

In this thesis, we study the metric dimension of a zero-divisor graph of a ring. For a ring R we define its zero-divisor graph $\Gamma(R)$ as a simple undirected graph whose vertices are zero-divisors and two distinct vertices are adjacent if and only if their product is 0. Metric dimension of such graph is the size of the smallest ordered subset of its vertices for which two distinct vertices in graph have distinct vectors of distances to elements of this subset. Firstly, we study how to limit the metric dimension of a graph, mainly with twin-sets of a graph, subsets of vertices of a graph where vertices are in a same twin-set if they have the same neighbourhoods. Then we closely study the metric dimension of a zero-divisor graph of the ring of integers modulo n and of the ring of matrices over a field.

Math. Subj. Class. (2020): 05C25, 05C99

Ključne besede: metrična dimenzija, graf deliteljev niča, kolobar, rešljiva množica, množica dvojčkov

Keywords: metric dimension, zero-divisor graph, ring, resolving set, twin-set

1 Uvod

Pojem metrične dimenzije grafa je v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja uvedel Peter J. Slater, problem iskanja le te pa sta kot prva raziskovala Frank Harary in Robert Melter [3] [5]. Uporablja se na različnih področjih, kot na primer v farmacevtski kemiji, navigaciji robotov in kombinatorični optimizaciji [8]. Formule za metrično dimenzijo poljubnega grafa ni, v diplomski nalogi pa bomo navedli različne izreke, ki jo bodo v določenih primerih vseeno lahko omejili. Gledali bomo enostavne neusmerjene grafe, predvsem pa grafe deliteljev niča poljubnega kolobarja, posebej pa bomo pogledali metrični dimenziji grafov deliteljev niča kolobarja ostankov po danem modulu in kolobarja matrik nad danim poljem.

V drugem poglavju bomo najprej navedli osnovne definicije povezane z metrično dimenzijo grafa in grafom deliteljev niča, nato pa še pogledali nekaj trditev, ki omejijo metrično dimenzijo grafa. V tretjem poglavju se bomo posvetili metrični dimenziji grafa deliteljev niča kolobarja ostankov po danem modulu, v četrtem poglavju pa metrični dimenziji grafa deliteljev niča kolobarja matrik nad končnim poljem.

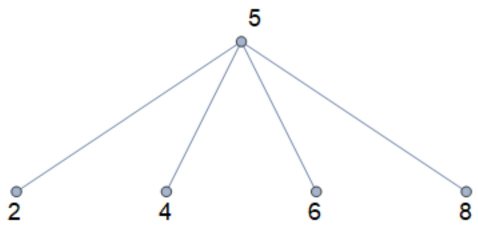
2 Metrična dimenzija

V tem poglavju bomo predstavili osnovne pojme, povezane z metrično dimenzijo grafa deliteljev niča kolobarja. Pri tem bomo sledili [8]. Skozi celotno diplomsko nalogo bodo bili vsi grafi neusmerjeni, kolobarji pa bodo vsebovali enico.

2.1 Osnovne definicije

Definicija 2.1. Naj bo R kolobar in $Z(R)$ njegova množica deliteljev niča. *Graf deliteljev niča kolobarja* R je enostaven neusmerjen graf z množico vozlišč $Z^*(R) = Z(R) \setminus \{0\}$, kjer je med dvema različnima vozliščema $a, b \in Z^*(R)$ povezava natanko tedaj, ko je $ab = 0$ ali $ba = 0$. Označimo ga z $\Gamma(R)$.

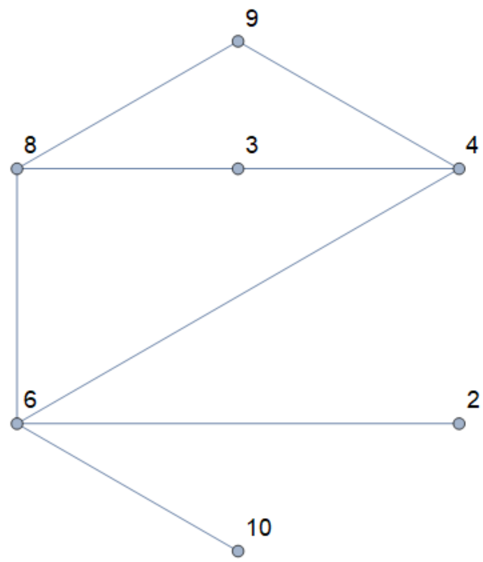
Zgled 2.2. Poglejmo si graf deliteljev niča kolobarja $\mathbb{Z}_{10}$. Množica njegovih vozlišč je $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})) = Z^*(\mathbb{Z}_{10}) = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, množica povezav pa je enaka $E(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})) = \{2-5, 4-5, 6-5, 8-5\}$.



Slika 1: Graf deliteljev niča $\mathbb{Z}_{10}$

$\diamondsuit$

Zgled 2.3. Poglejmo si še graf deliteljev niča kolobarja $\mathbb{Z}_{12}$. Množica njegovih vozlišč je $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})) = Z^*(\mathbb{Z}_{12}) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, povezave pa so prikazane na sliki.



Slika 2: Graf deliteljev niča $\mathbb{Z}_{12}$

$\diamondsuit$

Spomnimo se še definicije razdalje med dvema vozliščema v grafu. Za poljubni različni vozlišči $u, v \in V(\Gamma)$ je *razdalja* med u in v, označena z $d(u, v)$, dolžina najkrajše poti med njima. Če ne obstaja pot med u in v, je $d(u, v) = \infty$, razdalja vozlišča od samega sebe pa je 0. Z uporabo razdalje definiramo predstavitev v glede na W [3].

Definicija 2.4. Naj bo $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ urejena podmnožica množice $V(\Gamma)$ in $v \in V(\Gamma)$. Potem se k-dimenzionalni vektor $r(v|W) = (d(v, w_1), \ldots, d(v, w_k))$ imenuje *predstavitev v glede na W*.

Rečemo, da je *v rešljiv z W*, če velja $r(v|W) \neq r(u|W)$ za vsak $u \in V(\Gamma)$ različen od v, torej $(d(v, w_1), \ldots, d(v, w_k)) \neq (d(u, w_1), \ldots, d(u, w_k))$ za vsak $u \neq v$.

Množici W pravimo *rešljiva množica grafa* Γ, če imata poljubni različni vozlišči v $V(\Gamma)$ različni predstavitvi glede na W. Če je W rešljiva množica z najmanjšo močjo, ji pravimo *baza* Γ.

Definicija 2.5. *Metrična dimenzija grafa* Γ je moč njegove baze. Označimo jo z $dim(\Gamma)$.

Opomba 2.6. Če preverjamo, ali je $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subseteq V(\Gamma)$ rešljiva množica Γ, je dovolj gledati predstavitve elementov iz $V(\Gamma) \setminus W$ glede na W. Namreč če izberemo $w_i \in W$ bo vektor $(d(w_i, w_1), d(w_i, w_2), \ldots d(w_i, w_k))$ na i-tem mestu imel 0. Če bi katerokoli drugo vozlišče u imelo enako predstavitev kot w_i, bi potem moralo veljati, da $d(w_i, w_i) = d(u, w_i)$, kar pa je edino možno, če je $u = w_i$.

Opomba 2.7. Očitno je vsaka nadmnožica rešljive množice grafa Γ tudi sama rešljiva množica. Res, naj bo W_2 nadmnožica rešljive množice W_1 grafa Γ, torej $W_1 \subseteq W_2$. Po opombi 2.6 je dovolj gledati predstavitve elementov izven W_2. Ker so predstavitve teh elementov glede na W_1 različne in W_2 vsebuje W_1, bodo njihove predstavitve glede na W_2 bile enake tistim v W_1 z nekaj dodanimi komponentami, torej še vedno različne.

Zgled 2.8. Poiščimo metrično dimenzijo grafa deliteljev niča kolobarja $\mathbb{Z}_{10}$ iz primera 2.2. Razdalje med dvema poljubnima različnima vozliščema so 1 ali 2. Če za $W = \{w\}$ vzamemo katerokoli enoelementno množico, bosta obstajali vsaj dve vozlišči iz $\{2, 4, 6, 8\}$, ki imata enako razdaljo do w, torej to ni baza. Podoben razmislek naredimo, če je W dvoelementna množica - v $\{2, 4, 6, 8\}$ bosta obstajali dve vozlišči z enako predstavitvijo glede na W. Poglejmo sedaj, če obstaja rešljiva množica moči 3. Vzemimo $W = \{2, 4, 6\}$. Edina dva elementa, ki ju rabimo pogledati sta 5 in 8. Izračunamo $(d(5, 2), d(5, 4), d(5, 6)) = (1, 1, 1) \neq (d(8, 2), d(8, 4), d(8, 6)) = (2, 2, 2)$. Torej je metrična dimenzija $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ enaka 3. $\diamondsuit$

Opomba 2.9. Graf Γ ima lahko več rešljivih množic iste moči. Pri zgledu 2.8 bi za rešljivo množico moči 3 (in torej tudi bazo) tako lahko vzeli tudi $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$ ali $\{4, 6, 8\}$.

2.2 Meje metrične dimenzije grafa

Ponovimo nekaj pojmov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Za končen graf $\Gamma = (V, E)$ je njegov *premer*, označen z $diam(\Gamma)$, največja razdalja med dvema vozliščema v grafu. *Soseščina* vozlišča v je množica $N(v) = \{x \in V(\Gamma) \mid x \sim v\}$, torej množica vozlišč s katerimi ima v povezavo.

Navedimo sedaj prvo trditev, ki postavi meje metrične dimenzije grafa [2, izrek 1].

Trditev 2.10. *Naj bo Γ povezan graf z n vozlišči in premerom $d = diam(\Gamma)$. Potem velja $n - d^{dim(\Gamma)} \leq dim(\Gamma) \leq n - d$.*

Dokaz. Poglejmo si najprej drugo neenakost. Naj bosta u in v vozlišči grafa Γ, pri katerih je razdalja največja možna, torej $d(u, v) = d$. Njuno uv-pot dolžine d zapišemo kot $u = v_0, v_1, \ldots, v_d = v$. Naj bo $W = V(\Gamma) \setminus \{v_1, \ldots, v_d\}$. Potem je $d(u, v_i) = i$ za $i = 1, \ldots, d$. Ker je $u \in W$ in imajo vsa vozlišča grafa izven W paroma različno razdaljo do u in torej različno predstavitev glede na W, je W rešljiva množica Γ.

Za dokaz prve neenakosti izberimo bazo B grafa Γ moči k. Poglejmo vozlišča iz $V(\Gamma) \setminus B$, teh je $n - k$. Njihove predstavitve glede na B so vektorji dolžine k, katerih komponente so števila med 1 in d. Vsakemu vozlišču iz $V(\Gamma) \setminus B$ priredimo tak vektor. Ker je B baza, morajo biti vektorji med sabo različni. Torej je preslikava injektivna in dobimo $n - k \leq d^k$. Neenakost preuredimo in dobimo željen rezultat. $\square$

Navedimo še nekaj novih definicij, s katerimi si bomo pomagali še dodatno izboljšati meje metrične dimenzije grafa.

Definicija 2.11. Za različni vozlišči $u, v \in V(\Gamma)$ pravimo, da sta *dvojčka*, če velja $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$, ko $u \sim v$, ali $N(u) = N(v)$, ko $u \nsim v$.

Množico dvojčkov vozlišča v označimo s *Tw(v)*.

Opazimo, da $V(\Gamma)$ lahko zapišemo kot disjunktno unijo množic dvojčkov, saj vsaka množica dvojčkov $\mathrm{Tw}(v)$ vsebuje vsaj en element, vozlišče v, poleg tega pa je vsako vozlišče v natanko eni taki množici. Glede na to, koliko vozlišč vsebujejo, množice dvojčkov delimo v dve skupini.

Definicija 2.12. Množici dvojčkov $\mathrm{Tw}(v)$ pravimo, da je *prava množica dvojčkov grafa* Γ, če je $|\mathrm{Tw}(v)| \geq 2$. Če je $|\mathrm{Tw}(v)| = 1$, ji rečemo *osamljena množica dvojčkov grafa* Γ.

Število pravih množic dvojčkov grafa Γ označimo z $\alpha(\Gamma)$, število osamljenih množic dvojčkov pa z $\beta(\Gamma)$.

Zgled 2.13. Poglejmo množice dvojčkov iz zgleda 2.3. Te so $\{9, 3\}$, $\{8, 4\}, \{2, 10\}$ in $\{6\}$. Število pravih množic dvojčkov grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$ je torej $\alpha(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})) = 3$, število osamljenih pa $\beta(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})) = 1$. $\diamondsuit$

Navedimo sedaj trditev, ki uporabi množice dvojčkov za omejitev metrične dimenzije grafa [6, izrek 2.1].

Trditev 2.14. *Naj bo Γ povezan graf in $T_1, T_2, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)}$ različne prave množice dvojčkov grafa Γ. Potem velja:*

(i) Vsaka rešljiva množica grafa Γ vsebuje vsa, razen morda enega, vozlišča iz vsakega T_i, za $1 \leq i \leq \alpha(\Gamma)$,

(ii) Obstaja baza B grafa Γ, da B vsebuje največ $|T_i| - 1$ vozlišč iz vsakega T_i, za $1 \leq i \leq \alpha(\Gamma)$,

(iii) $|V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma) - \beta(\Gamma) \leq dim(\Gamma) \leq |V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma)$.

Dokaz. (i) Naj bo W rešljiva množica grafa Γ. Recimo, da trditev ne velja, torej da obstajata vozlišči u, v v isti pravi množici dvojčkov, ki obadva nista v W. Naj bo ta množica dvojčkov T_i. Ker sta u in v v isti množici dvojčkov, imata enake sosede, torej je njuna predstavitev glede na W enaka, kar pa ni možno, saj je W rešljiva množica.

(ii) Naj bo B rešljiva množica Γ in $T_1, T_2, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)}$ njene prave množice dvojčkov ter $T_{\alpha(\Gamma)+1}, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)+\beta(\Gamma)}$ osamljene množice dvojčkov. Brez škode za splošnost naj bo $\alpha(\Gamma) > 0$, torej $|T_1| > 1$. Naj bo W rešljiva množica grafa, ki vsebuje T_1, in naj bo $x \in T_1$. Ker je $x \in W$, je množica W je oblike $W = \{x, w_1, w_2, \ldots\}$. Pokazali bomo, da če je W rešljiva množica grafa Γ, ki vsebuje T_1, lahko množici W odstranimo en element $x \in T_1$, da je ali $P_1 = W \setminus \{x\}$ rešljiva množica ali pa obstaja osamljena množica dvojčkov $\{s\}$, da je $P_2 = (W \cup \{s\}) \setminus \{x\}$ rešljiva množica. Tako skonstruirana rešljiva množica bo imela moč manjšo ali enako W in bo vsebovala vse, razen enega, vozlišča iz prave množice dvojčkov T_1. Postopek potem ponovimo še za ostale prave množice dvojčkov in končna rešljiva množica bo vsebovala največ $|T_i| - 1$ vozlišč iz vsakega T_i, za $1 \leq i \leq \alpha(\Gamma)$.

Definirajmo množico $P_1 = W \setminus \{x\} = \{w_1, w_2, \ldots\}$ in poglejmo, kdaj je rešljiva. Po opombi 2.6 je dovolj preverjati, da so predstavitve elementov izven P_1 glede na P_1 različne. Poglejmo najprej za $u_1, u_2 \notin W$. Recimo, da je $r(u_1|P_1) = r(u_2|P_1)$. Ker je W rešljiva množica, že vemo, da se njuni predstavitvi glede na W razlikujeta, $r(u_1|W) \neq r(u_2|W)$. Iz tega sledi, da imata $u_1$in u_2 različno razdaljo do x-a, torej $d(u_1, x) \neq d(u_2, x)$. Vemo tudi, da ker velja $|T_1| > 1$ in $T_1 \subseteq W$, obstaja $z \in T_1 \cap P_1$, $z \neq x$. Ker je $z \in P_1$, iz $r(u_1|P_1) = r(u_2|P_1)$ sledi, da $d(u_1, z) = d(u_2, z)$. Po drugi strani, pa sta x in z v isti množici dvojčkov, torej so njune razdalje do elementov enake. Dobimo $d(u_1, x) = d(u_1, z) = d(u_2, z) = d(u_2, x)$, kar pa nas pripelje v protislovje. Torej, če za $u_1, u_2 \notin P_1$ velja $r(u_1|P_1) = r(u_2|P_1)$, mora biti eden izmed njiju enak x. Če ne obstaja tak $u_1 \notin P_1$, $u_1 \neq x$, da velja $r(u_1|P_1) = r(x|P_1)$, potem je P_1 rešljiva množica. V nasprotnem primeru pokažimo, da obstaja $s \in V(\Gamma) \setminus T_1$, da je $P_2 = (W \cup \{s\}) \setminus \{x\}$ rešljiva množica.

Recimo sedaj, da obstaja tak $u_1 \notin P_1$, da $r(u_1|P_1) = r(x|P_1)$. Pokažimo, da je tak u_1 en sam. Recimo, da obstaja še en $u_2 \notin P_1$, da $r(u_2|P_1) = r(u_1|P_1) = r(x|P_1)$. Naj bo $z \in T_1 \cap P_1$, $z \neq x$. Podobno kot prej, iz dejstva, da je W rešljiva množica, sledi, da je $d(u_2, x) \neq d(u_1, x)$. Ker pa je $r(u_2|P_1) = r(u_1|P_1)$ in sta z in x v isti množici dvojčkov, dobimo $d(u_1, x) = d(u_1, z) = d(u_2, z) = d(u_2, x)$, s čimer pridemo v protislovje. Torej je tak u_1 en sam. Sedaj razdelimo možnosti glede na to, koliko je $\beta(\Gamma)$.

Naj bo $\beta(\Gamma) = 0$, torej $|T_i| \geq 2$ za vsak $i = 1, \ldots, k$. Poglejmo poljuben $y \in V(\Gamma) \setminus \{x, u_1\}$. Ker so vse množice dvojčkov prave in po točki (i) rešljiva množica W vsebuje vsa, razen mogoče enega, vozlišča in vsakega T_i, obstaja $q \in P_1$, ki je v isti množici dvojčkov kot y. Dobimo enakost $d(u_1, y) = d(u_1, q) = d(x, q) = d(x, y)$. Ker je bil y poljuben, sledi, da sta x in u_1 v isti množici dvojčkov, kar pa nas pripelje v protislovje s tem, da je x edini element množice dvojčkov T_1, ki ni v W.

Naj bo sedaj $\beta(\Gamma) > 0$. Brez škode za splošnost naj bo $|T_j| = 1$ za neki $j \neq 1$. Ker u_1 in x nista v isti množici dvojčkov, obstaja $s \in V(\Gamma) \setminus \{x, u_1\}$, da $d(x, s) \neq d(u_1, s)$. Če je $s \in P_1$, dobimo protislovje s $r(u_1|P_1) = r(x|P_1)$, torej je $s \notin P_1$. Dokažimo sedaj, da je tak s tudi v osamljeni množici dvojčkov. Označimo s T_l množico dvojčkov, v kateri je s, in recimo, da je v njej še eno drugo vozlišče $l \in T_l$. Po točki (i) rešljiva množica W vsebuje vse razen mogoče enega vozlišča, torej je l v P_1. Iz tega in iz $r(u_1|P_1) = r(x|P_1)$ dobimo enakost $d(u_1, s) = d(u_1, l) = d(x, l) = d(x, s)$, kar pa je v protislovju s $d(x, s) \neq d(u_1, s)$. Torej je $T_l = \{s\}$. Poglejmo sedaj $P_2 = P_1 \cup \{s\} = (W \cup \{s\}) \setminus \{x\}$. Očitno je $|P_2| = |W|$. Opazimo, da iz $d(x, s) \neq d(u_1, s)$ sledi, da je $r(x|P_2) \neq r(u_1|P_2)$. Dokažimo še, da je P_2 rešljiva množica. Recimo, da ni, torej, da obstajata $a, b \notin P_2$, ki imata enaki predstavitvi glede na P_2. Ker je $P_1 \subseteq P_2$ sledi, da $a, b \notin P_1$. Podobno kot prej lahko pokažemo, da če velja $r(a|P_2) = r(b|P_2)$, potem mora eden izmed njiju biti x, brez škode za splošnost naj bo to a. Po že prej dokazanem pa če tak b obstaja, da je $r(x|P_2) = r(b|P_2)$, je enolično določen, torej $b = u_1$. Vendar $u_1 = b$ in $x = a$ imata različno predstavitev glede na $s \in P_2$, torej $r(a|P_2) \neq r(b|P_2)$ in dobimo protislovje. Torej je P_2 rešljiva množica.

(iii) Po točki (ii) obstaja baza P, ki ima iz vsake množice dvojčkov T_i, $1 \leq i \leq \alpha(\Gamma)$ največ $|T_i| - 1$ vozlišč. Torej P je baza, ki ima največ $|V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma)$ vozlišč in posledično je $\dim(\Gamma) \leq |V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma)$. Spodnjo mejo dokažimo s pomočjo točke (i). Naj bodo $T_1, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)}$ prave množice dvojčkov ter $T_{\alpha(\Gamma)+1}, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)+\beta(\Gamma)}$ osamljene množice dvojčkov. Po točki (i) vsaka rešljiva množica vsebuje vse, razen morda enega, vozlišča iz $T_1, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)}$. Če upoštevamo, da je osamljenih množic $\beta(\Gamma)$, dobimo $|V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma) - \beta(\Gamma) \leq \dim(\Gamma)$. □

Navedimo še lemo, ki nam pove, kdaj je metrična dimenzija grafa spodnja meja iz točke (iii) trditve 2.14 [8, lema 2.9 (ii)].

Lema 2.15. *Naj bo Γ povezan graf. Če vsako vozlišče iz osamljenih množic dvojčkov grafa Γ ni vsebovano v nobeni bazi grafa Γ, potem je dim$(\Gamma) = |V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma) - \beta(\Gamma)$.*

Dokaz. Naj bo Γ povezan graf, $T_1, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)}$ njegove prave množice dvojčkov in $T_{\alpha(\Gamma)+1}, \ldots, T_{\alpha(\Gamma)+\beta(\Gamma)}$ njegove osamljene množice dvojčkov. Po točki (ii) trditve 2.14 obstaja baza B grafa Γ, ki vsebuje največ $|T_i|-1$ vozlišč iz vsake prave množice dvojčkov T_i. Torej velja $|B \cap T_i| \leq |T_i|-1$ za $1 \leq i \leq \alpha(\Gamma)$. Po predpostavki je $|B \cap T_j| = \emptyset$ za $\alpha(\Gamma)+1 \leq j \leq \alpha(\Gamma)+\beta(\Gamma)$, torej je $\dim(\Gamma) = \sum_{i=1}^{\alpha(\Gamma)} |B \cap T_i| \leq \sum_{i=1}^{\alpha(\Gamma)} (|T_i|-1) = |V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma) - \beta(\Gamma)$. Po točki (iii) trditve pa velja $|V(\Gamma)| - \alpha(\Gamma) - \beta(\Gamma) \leq \dim(\Gamma)$, torej velja enakost. $\square$

3 Kolobar ostankov

V tem razdelku si bomo ogledali metrično dimenzijo grafa deliteljev niča kolobarja ostankov po danem modulu. Pri tem bomo sledili [6, poglavje 3]. Metrično dimenzijo $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ poiščemo s pomočjo praštevilskega razcepa n. Če je n praštevilo, je graf deliteljev niča od $\mathbb{Z}_n$ prazen graf, na tem pa metrična dimenzija ni definirana.

Dokažimo najprej, da je $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ povezan graf [1, izrek 2.3].

Trditev 3.1. *Naj bo R komutativen kolobar. Potem je $\Gamma(R)$ povezan graf in $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.*

Dokaz. Naj bosta $x, y \in V(\Gamma(R))$ različni vozlišči. Če je $xy = 0$, potem je $d(x,y) = 1$. Poglejmo sedaj, če $xy \neq 0$. Delimo primere glede na to, ali sta x^2 in y^2 neničelna.

Če sta $x^2 = y^2 = 0$, potem je xy tudi vozlišče grafa, saj je $x \cdot xy = 0$. Sledi, da je $x \sim xy \sim y$ pot med x in y dolžine 2, torej je $d(x,y) = 2$.

Če je eden izmed x^2 ali y^2 enak 0, drugi pa ne: brez škode za splošnost naj bo $x^2 = 0$ in $y^2 \neq 0$. Potem obstaja $b \in V(\Gamma(R)) \setminus \{x, y\}$, da je $by = 0$. V primeru, ko je tudi $bx = 0$, dobimo pot $x \sim b \sim y$ in v primeru, ko $bx \neq 0$, pa dobimo pot $x \sim bx \sim y$. V obeh primerih je torej $d(x,y) = 2$.

Če sta $x^2 \neq 0$ in $y^2 \neq 0$: potem obstajata $a, b \in V(\Gamma(R)) \setminus \{x, y\}$, da velja $ax = 0$ in $by = 0$. Ločimo primera glede na to, ali sta a in b enaka. Če velja $a = b$, potem je $x \sim a \sim y$ pot med x in y dolžine 2. Če pa velja $a \neq b$ pa imamo dve možnosti. Prva možnost je, če $ab = 0$. Potem je $x \sim a \sim b \sim y$ pot med x in y dolžine 3. Druga možnost je, če $ab \neq 0$. Potem je $x \sim ab \sim y$ pot med x in y dolžine 2.

V vseh primerih dobimo, da je za poljubni dve vozlišči x in y v grafu razdalja med njima manjša ali enaka 3, torej je tudi $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. Poleg tega smo za poljubni dve vozlišči našli pot med njima, torej je $\Gamma(R)$ povezan graf. $\square$

Poglejmo sedaj koliko je metrična dimenzija $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, če je n produkt dveh različnih praštevil. Zato pa najprej navedimo lemo.

Lema 3.2. *Naj bo R komutativen kolobar.*

(a) Če je $\Gamma(R)$ poln dvodelen graf, različen od $K_{1,1}$, je $dim(\Gamma(R)) = |Z^*(R)| - 2$,

(b) Če je $\Gamma(R)$ poln graf, je $dim(\Gamma(R)) = |Z^*(R)| - 1$.

Dokaz. (a) Naj bo $\Gamma(R)$ poln dvodelen graf in U in V disjunktni množici vozlišč, da velja, da je vsako vozlišče v U povezano z vsakim vozliščem v V in obratno. Brez škode za splošnost naj bo $|U| \leq |V|$. Ločimo primera glede na moč množice U.

Če je $|U| = 1$ in $|V| = n \geq 2$, dobimo zvezdast graf $K_{1,n}$. Označimo $U = \{u\}$, vozlišča množice V pa z $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Očitno je U osamljena množica dvojčkov, V pa prava množica dvojčkov, saj imajo vsa vozlišča v V samo enega soseda, vozlišče u. Po točki (iii) trditve 2.14 tako dobimo oceno $|Z^*(R)| - 2 \leq \dim(\Gamma(R)) \leq |Z^*(R)| - 1$. Dokažimo sedaj, da že spodnja meja zadošča. Vzemimo $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$. Predstavitev u glede na W je $r(u|W) = (1, 1, \ldots, 1)$, predstavitev v_n glede na W pa $r(v_n|W) = (2, 2, \ldots, 2)$. Predstavitvi glede na W sta različni, torej je W res rešljiva množica moči $|Z^*(R)| - 2$.

Če je $|U| \geq 2$, sta očitno U in V dve različni pravi množici dvojčkov, osamljenih množic dvojčkov pa ta graf nima. Ponovno uporabimo trditev 2.14 in dobimo oceno $|Z^*(R)| - 2 \leq \dim(\Gamma(R)) \leq |Z^*(R)| - 2$.

(b) Če je $\Gamma(R)$ poln graf z vsaj dvema vozliščema, imamo samo eno pravo množico dvojčkov (vsa vozlišča grafa), osamljenih množic dvojčkov pa ni. Po točki (iii) trditve 2.14 dobimo oceno $|Z^*(R)| - 1 - 0 \leq \dim(\Gamma(R)) \leq |Z^*(R)| - 1$, torej je $\dim(\Gamma(R)) = |Z^*(R)| - 1$.

Poglejmo še primer, ko je $\Gamma(R)$ poln graf s samo enim vozliščem. Rešljiva množica je že prazna množica $\{\}$, saj imata poljubni različni vozlišči različni predstavitvi glede na prazno množico. Očitno je to rešljiva množica z najmanjšo močjo, torej je $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_4)) = 0$. □

Trditev 3.3. *Naj bo n produkt dveh različnih praštevil, $n = p \cdot q$. Potem je dim$(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = p + q - 4$.*

Dokaz. Vemo že, da če sta p in q različni praštevili, lahko $\mathbb{Z}_n$ zapišemo kot $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Vozlišča grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ so torej oblike $\{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_q\}$, kjer sta dve vozlišči (a_1, b_1) in (a_2, b_2) povezani natanko tedaj, ko je $a_1 \cdot a_2 \equiv 0 \ (mod\ p)$ in $b_1 \cdot b_2 \equiv 0 \ (mod\ q)$. Ker pa sta p in q praštevili, je pa to natanko tedaj ko je eden izmed a_i enak 0 za $i = 1, 2$ in eden izmed b_i enak 0 za $i = 1, 2$. Označimo $V_1 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}_p^*\}$ in $V_2 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{Z}_q^*\}$. Vozlišča grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ so torej elementi množice $V_1 \cup V_2$, vsa vozlišča v V_1 pa so povezana z vsemi vozlišči v V_2 in obratno. Torej je $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ poln dvodelen graf $K_{p-1,q-1}$. Uporabimo točko (a) leme 3.2 in dobimo $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = \dim(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = (p-1) + (q-1) - 2 = p + q - 4$. □

Spomnimo se sedaj še definicije karakteristike in navedimo lemo, ki nam bo pomagala dokazati naslednjo trditev [6] [4]. *Karakteristika* kolobarja R je najmanjše naravno število n, da je $n \cdot 1 = 0$. Če tak n ne obstaja, rečemo, da je karakteristika R enaka 0.

Lema 3.4. *Naj bo R končen komutativen kolobar z liho karakteristiko, ki vsebuje neničelne delitelje niča. Naj ima $\Gamma(R)$ natanko k množic dvojčkov. Potem je dim$(\Gamma(R)) = |Z^*(R)| - k$.*

Dokaz. Naj bo $x \in Z^*(R)$. Naj bo $N(x)$ soseščina x-a in $\mathrm{Tw}(x)$ njegova množica dvojčkov. Hitro lahko preverimo, da je sta x in $-x$ v isti množici dvojčkov. Naj bo $y \in N(x)$ poljuben, torej naj zanj velja $x \cdot y = 0$. Računamo $-x \cdot y = -(x \cdot y) = 0$, torej $-x \in \mathrm{Tw}(x)$. Obratno, naj bo $z \in N(x)$. Enakost $-x \cdot z = 0$ z leve množimo z -1 in dobimo $x \in \mathrm{Tw}(-x)$. Torej $\mathrm{Tw}(x) = \mathrm{Tw}(-x)$. Dokažimo sedaj, da $x \neq -x$. Recimo, da to ni res. Potem velja $0 = x + (-x) = x + x = 2x$. Iz definicije karakteristike sledi, da karakteristika deli $2x$. Po predpostavki pa je liha, torej sta si 2 in karakteristika kolobarja R tuji naravni števili. Vemo že, da potem obstajata taki celi števili m in n, da velja $1 = m \cdot 2 + n \cdot kar(R)$. Enačbo množimo z x in dobimo $x = 1 \cdot x = m \cdot 2 \cdot x + n \cdot kar(R) \cdot x = 0$, torej je $x = 0$, kar pa je v protislovju z neničelnostjo x-a. Vse množice dvojčkov so torej prave množice dvojčkov, saj vsebujejo dve različni vozlišči x in $-x$. Uporabimo točko (iii) trditve 2.14 in dobimo $\dim(\Gamma(R)) = |Z^*(R)| - k$. □

Trditev 3.5. *Naj bo p praštevilo.*

(i) Če je $n = p^2$ in $p \geq 2$, potem je $dim(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = p - 2$,

(ii) Če je $n = p^k$ in $k \geq 3$, potem je $dim(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = p^{k-1} - k$.

Dokaz. (i) Poglejmo, kaj so vozlišča grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, kjer je $n = p^2$ in $p > 2$. Dve različni vozlišči $a, b \in \mathbb{Z}_{p^2}$ sta povezani natanko tedaj, ko je njun produkt enak 0 po modulu p^2. Ker pa sta a in b neničelni, je pa to natanko tedaj, ko ima vsak izmed njiju v svojem praštevilskem razcepu natanko en p. Vozlišča grafa so torej večkratniki števila p, torej množica $\{p, 2p, \dots, (p-1)p\}$. Očitno so vsa vozlišča med seboj povezana in dobimo poln graf na $p - 1$ vozliščih. Uporabimo točko (b) leme 3.2 in dobimo $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = p - 1 - 1 = p - 2$.

(ii) Podobno kot pri točki (i) vidimo, da so vozlišča grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})$ spet večkratniki p, torej $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})) = \{p, 2p, 3p, \dots, (p^{k-1} - 1)p\}$. Vsako vozlišče a lahko zapišemo v obliki $a = up^{k_1}$, kjer je k_1 največja možna potenca števila p v množici $\{1, 2, \dots, k-1\}$, u pa obrnljiv element v $\mathbb{Z}_{p^k}$. Zakaj je u obrnljiv element? Neobrnljivi elementi v $\mathbb{Z}_{p^k}$ so natanko večkratniki p, torej če u ne bi bil obrnljiv, bi lahko zapisu števila a dodali še en p, kar pa je v protislovju s tem, da je k_1 največja možna potenca. Podobno kot pri točki (i), sta dve različni vozlišči $a = u_1 p^{k_1}$ in $b = u_2 p^{k_2}$ povezani takrat, ko je $k_1 + k_2 \geq k$, vozlišče a pa je povezano natanko z vsemi vozlišči pri katerih je potenca pri p večja ali enaka $k - k_1$. Množice dvojčkov so torej oblike $V_i = \{up^i \mid u \in \mathbb{Z}_{p^k}^*\}$, kjer $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Sedaj ločimo primera glede na to, ali je p enak 2 ali ne.

Če je $p \neq 2$, potem je karakteristika $\mathbb{Z}_{p^k}$ liha. Uporabimo lemo 3.4 in dobimo $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})) = |Z^*(\mathbb{Z}_{p^k})| - (k-1) = (p^{k-1} - 1) - (k-1) = p^{k-1} - k$.

Naj bo sedaj $p = 2$. Poglejmo množice dvojčkov $V_i = \{u2^i \mid u \in \mathbb{Z}_{2^k}^*\}$, kjer $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Za $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ bodo bile V_i prave množice dvojčkov, saj bodo poleg 2^i vsebovale še -2^i. Res, če bi veljalo $-2^i = 2^i$, bi lahko na obeh straneh prišteli 2^i in dobili $0 = 2 \cdot 2^i = 2^{i+1}$, kar pa nas pripelje v protislovje, saj je karakteristika kolobarja $\mathbb{Z}_{2^k}$ enaka 2^k, kar pa je večje od 2^{i+1} za $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$. Za $i = k-1$ pa preverimo, da je V_{k-1} osamljena množica dvojčkov. Naj bo $u \in \mathbb{Z}_{2^{k-1}}^*$. Očitno so obrnljivi elementi v $\mathbb{Z}_{2^k}$ liha števila, torej je u oblike $u = 2m + 1$ za nek $m \in \mathbb{N}$. Potem je $u \cdot 2^{k-1} = (2m+1) \cdot 2^{k-1} = m \cdot 2^k + 2^{k-1} \equiv 2^{k-1} \ (mod\ 2^k)$. Torej je $u \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}$ za vsak $u \in \mathbb{Z}_{2^k}^*$ in V_{k-1} je osamljena množica dvojčkov. Po točki (i) trditve 2.14 vsaka rešljiva množica, in torej tudi baza, grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^k})$ vsebuje vsa, razen morda enega, vozlišča iz vsake prave množice dvojčkov. Naj bo B poljubna baza. Poglejmo, ali je vozlišče 2^{k-1} tudi v B. Očitno je edino vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči v grafu, torej s predstavitvijo glede na B enako $r(2^{k-1}|B) = (1, \dots, 1)$. Iz tega sledi, da $2^{k-1} \notin B$. Torej je $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_{2^k})) = |Z^*(\mathbb{Z}_{2^k})| - (k-2) - 1 = (2^{k-1} - 1) - (k-1) = 2^{k-1} - k$. □

Ponovimo sedaj definicijo Eulerjeve funkcije $\varphi(n)$ [10]. *Eulerjeva funkcija* $\varphi(n)$ je funkcija naravnega števila n, ki nam pove, koliko je naravnih števil manjših od n, ki so z n tuja. S pomočjo $\varphi(n)$ navedimo izrek, ki nam bo podal metrično dimenzijo grafa deliteljev niča kolobarja ostankov $\mathbb{Z}_n$ še za ostale primere [8].

Izrek 3.6. *Naj bo $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$ praštevilski razcep n. Če je $r \geq 2$ in $\sum_{i=1}^{r} n_i \geq 3$, potem je*

$$dim(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = n - \varphi(n) - \prod_{i=1}^{r}(n_i + 1) + 1,$$

kjer je $\varphi(n)$ Eulerjeva funkcija φ.

Dokaz. Vozlišča grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ so vsa števila, ki niso tuja z n, se pravi $V(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = Z^*(\mathbb{Z}_n) = \{d \in \mathbb{Z}_n \mid 2 \leq d \leq n-1,\ \gcd(d,n) \neq 1\}$. Ker tudi $0 \notin Z^*(\mathbb{Z}_n)$, je torej $|Z^*(\mathbb{Z}_n)| = n - \varphi(n) - 1$. Poglejmo, kaj so njegove množice dvojčkov. Podobno kot prej, bosta dve vozlišči v isti množici dvojčkov, če imata enakega največjega skupnega delitelja z n. Definirajmo množico deliteljev n različnih od 1 in n s $\Phi(n) = \{d \in \mathbb{Z}_n \mid 2 \leq d \leq n-1,\ d|n\}$. Množice dvojčkov bodo potem $\mathrm{Tw}(d) = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid 2 \leq x \leq n-1,\ \gcd(x,n) = d\}$ za vsak $d \in \Phi(n)$. Naj bo $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$ praštevilski razcep n. Deliteljev števila n je $\prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 2$, torej imamo toliko množic dvojčkov. Sedaj ločimo primera glede na to ali 2 deli n ali ne.

Če 2 ne deli n, je $\mathbb{Z}_n$ lihe karakteristike. Sedaj uporabimo lemo 3.4 in dobimo $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = |Z^*(\mathbb{Z}_n)| - (\prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 2) = n - \varphi(n) - \prod_{i=1}^{r}(n_i+1) + 1$.

Če 2 deli n, poglejmo kakšne so množice dvojčkov. Vozlišče $\frac{n}{2}$ je v osamljeni množici dvojčkov, saj je očitno edino število manjše od n za katerega velja, da je njegov največji skupni delitelj z n enak $\frac{n}{2}$. Za ostale množice dvojčkov pokažimo, da so prave. Ker je $\gcd(n-d, n) = d$ za $d \in \Phi(n)$, množica $\mathrm{Tw}(d)$ poleg d vsebuje še $-d \equiv n - d\ (mod\ n)$. Očitno za $d \in \Phi(n) \setminus \{\frac{n}{2}\}$ velja $n - d \neq d$. Torej so $\mathrm{Tw}(d)$ prave množice dvojčkov za $d \in \Phi(n) \setminus \{\frac{n}{2}\}$. Sledi, da je $\alpha(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = \prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 3$ in $\beta(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = 1$. Iz leme 2.15 sledi, da rabimo pogledati samo, če je edini element osamljene množice tudi v bazi. Naj bo W poljubna baza $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ in dokažimo, da $\frac{n}{2} \notin W$. Po točki (i) trditve 2.14 vsaka rešljiva množica, in torej tudi baza, grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ vsebuje vsa, razen morda enega, vozlišča iz vsake prave množice dvojčkov. Množica $\mathrm{Tw}(2)$ je prava množica dvojčkov, torej obstaja $x \in W \cap \mathrm{Tw}(2)$. Njegova soseščina je $N(x) = N(2) = \{\frac{n}{2}\}$, torej je $\frac{n}{2}$ edino vozlišče, ki ima razdaljo do $x \in W$ enako 1. Iz tega sledi, da $\frac{n}{2} \notin W$ in dobimo $\dim(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = |V(\Gamma(\mathbb{Z}_n))| - \alpha(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) - \beta(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) = |Z^*(\mathbb{Z}_n)| - (\prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 3) - 1 = n - \varphi(n) - \prod_{i=1}^{r}(n_i+1) + 1$. □

4 Kolobar matrik nad končnim poljem

Za konec si oglejmo še metrično dimenzijo grafa deliteljev niča kolobarja matrik nad končnim poljem. Pri tem bomo sledili [8, poglavje 5]. Označimo kolobar $n \times n$ matrik nad končnim poljem s q elementi kot $M_n(q)$ ter množico $n \times n$ matrik ranga r nad končnim poljem s q elementi kot $M_n^r(q)$. Z $m_q(n,r)$ označimo moč $M_n^r(q)$ in z $diag(X,0)$ bločno diagonalno $n \times n$ matriko $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, kjer je X neka podana $t \times t$ matrika za $1 \leq t \leq n-1$. Označimo še z E_{ij} matriko, ki ima na (i,j)-tem mestu 1, povsod drugod pa 0.

Poglejmo sedaj, kaj so vozlišča grafa $\Gamma(M_n(q))$. Neničelna matrika $A \in M_n(q)$ je element $Z^*(M_n(q))$ natanko tedaj, ko obstaja $B \in M_n(q) \setminus \{0\}$, da je $A \cdot B = 0$ ali $B \cdot A = 0$, to pa je natanko tedaj, ko A ni obrnljiva, kar pa je ekvivalentno temu, da ni polnega ranga. Torej so vozlišča grafa $\Gamma(M_n(q))$ matrike iz množice $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} M_n^i(q)$.

Če je $n = 1$, dobimo prazen graf, saj polje nima deliteljev niča, na praznem grafu deliteljev niča pa metrična dimenzija ni definirana. Poleg tega mora polje vsebovati vsaj 2 elementa. Zato bomo obravnavali primere, ko sta n in q večja ali enaka 2.

Poglejmo sedaj, koliko je $m_q(n,r)$ [7, lema 59]. Najprej pa navedimo lemo, ki nam bo pomagala pri izračunu [9, poglavje 1.7.2].

Lema 4.1. *Naj bo F_q končno polje s q elementi in F_q^n n-dimenzionalni vektorski prostor nad F_q. Potem je*

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{r-1})}{(q^r-1)(q^r-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^r-q^{r-1})}$$

število r-dimenzionalnih podprostorov v F_q^n.

Dokaz. Naj bo X število r-dimenzionalnih podprostorov v F_q^n in z $N(n,k)$ označimo število urejenih k-teric $(v_1,\ldots,v_k)$ linearno neodvisnih vektorjev iz F_q^n. Poglejmo, kako lahko izberemo tako k-terico vektorjev. Prvi način je, da iz F_q^n najprej vzamemo vektor v_1. Ker je $|F_q^n| = q^n$ in je $\{0\}$ linearno odvisna množica, lahko v_1 izberemo na $q^n - 1$ načinov. Sedaj izberemo v_2, ki ne sme biti linearno odvisen od v_1, torej njegov večkratnik, takih izbir je $q^n - q$. Vektor v_3 ne sme biti linearna kombinacija prvih dveh, torej imamo $q^n - q^2$ izbir. Tako nadaljujemo naprej in zadnjega izberemo v_r, za katerega imamo $q^n - q^{r-1}$ izbir. Dobimo, da je $N(n,k) = (q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{r-1})$. Drugi način je, da najprej izberemo r-dimenzionalen podprostor v F_q^n (število takšnih izbir imamo označeno z X) in potem znotraj njega izberemo r linearno neodvisnih vektorjev. Podobno kot prej, lahko v_1 izberemo na $q^r - 1$ načinov, v_2 na $q^r - q$ načinov, itd. Dobimo, da je $N(n,k) = X\cdot(q^r-1)(q^r-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^r-q^{r-1})$. Po načelu dvojnega preštevanja je torej $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{r-1}) = X\cdot(q^r-1)(q^r-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^r-q^{r-1})$. Izrazimo X in dobimo, da je število r-dimenzionalnih podprostorov v F_q^n enako $\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{r-1})}{(q^r-1)(q^r-q)(q^r-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^r-q^{r-1})}$. □

Trditev 4.2. *Naj bo $1 \leq r \leq n$. Potem je*

$$m_q(n,r) = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{(q^n-q^i)^2}{q^r-q^i}.$$

Dokaz. Označimo polje s q elementi kot F_q. Vemo že, da $n \times n$ matrika nad končnim poljem s q elementi predstavlja preslikavo iz F_q^n v F_q^n. Če ima rang r, je to surjektivna preslikava iz F_q^n v neki r-dimenzionalni podprostor prostora F_q^n. Po lemi 4.1 imamo $\prod\limits_{i=0}^{r-1} \frac{q^n-q^i}{q^r-q^i}$ izbir za tak podprostor. Sedaj, ko izberemo podprostor v katerega slikamo, poglejmo, koliko imamo surjekcij vanj. Naj bo U izbrani podprostor. Matrika surjekcije iz F_q^n v U je $r \times n$ matrika ranga r. Vektorji vrstic so torej linearno neodvisni vektorji dolžine n. Prvi vektor v_1 lahko izberemo na $q^n - 1$ načinov, saj je $|F_q^n| = q^n$ in $\{0\}$ je linearno odvisna množica. Drugi vektor v_2 ne sme biti linearna kombinacija prvega, torej njegov večkratnik. Sledi, da imamo zanj $q^n - q$ izbir. Tako nadaljujemo naprej, dokler zadnjega ne izberemo v_r. Zanj imamo $q^n - q^{r-1}$ izbir. Torej je število surjekcij iz F_q^n v U enako $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{r-1})$. Če sedaj to pomnožimo z številom možnosti izbir za podprostor, dobimo, da je $m_q(n,r) = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{(q^n-q^i)^2}{q^r-q^i}$. □

Lema 4.3. *Graf $\Gamma(M_n(q))$ je povezan graf z $q^{n^2} - m_q(n,n) - 1$ vozlišči in premerom 2.*

Dokaz. Pokazali smo že, da so vozlišča grafa $\Gamma(M_n(q))$ matrike iz množice $\bigcup_{i=1}^{n-1} M_n^i(q)$. Poglejmo, koliko je moč te množice. Vemo že, da je število $n \times n$ matrik nad končnim poljem s q elementi q^{n^2}. Od tega števila odštejemo število slabih matrik, torej tistih polnega ranga in ničelno matriko, in dobimo $|V(\Gamma(M_n(q)))| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} M_n^i(q)\right| = q^{n^2} - m_q(n,n) - 1$.

Poglejmo še, koliko je premer grafa $\Gamma(M_n(q))$. Naj bosta $X, Y \in V(\Gamma(M_n(q)))$. Naj bo s rang matrike X in t rang matrike Y za $1 \le s,t \le n-1$. Vemo že, da potem lahko X in Y zapišemo kot

$$X = P_1 \cdot \mathrm{diag}(I_s, 0) \cdot Q_1 \quad \text{in} \quad Y = P_2 \cdot \mathrm{diag}(I_t, 0) \cdot Q_2,$$

kjer so $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathrm{GL}_n(q)$ neke obrnljive matrike. Definirajmo sedaj matriko $D = Q_1^{-1} \cdot E_{nn} \cdot P_2^{-1}$. Očitno velja, da $D \in V(\Gamma(M_n(q)))$. Tedaj je X v povezavi z D, saj je $X \cdot D = P_1 \cdot \mathrm{diag}(I_s,0) \cdot Q_1 \cdot Q_1^{-1} \cdot E_{nn} \cdot P_2^{-1} = P_1 \cdot \mathrm{diag}(I_s,0) \cdot E_{nn} \cdot P_2^{-1} = P_1 \cdot 0 \cdot P_2^{-1} = 0$. Podobno lahko pokažemo, da je D tudi v povezavi z Y, saj je $D \cdot Y = 0$. Torej smo za poljubni različni vozlišči grafa $\Gamma(M_n(q))$ našli tretje s katerim imata obedve povezavo. Sledi, da je $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(q))) \le 2$. Ker pa se matriki E_{11} in $E_{11} + E_{12}$ očitno ne zmnožita v 0 ter sta obe vozlišči grafa $\Gamma(M_n(q))$, sledi, da je $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(q))) = 2$. □

Lema 4.4. *Naj bo $A \in \Gamma(M_n(q))$. Naj bo $A = P \cdot diag(I_r, 0) \cdot Q$, kjer $P, Q \in GL_n(q)$ in $1 \le r \le n-1$. Potem velja:*

(a) $N(A) = \{Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & Y^T \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \mid X, Y \in M_{(n-r)\times n}(q) \setminus \{0\}\}$,

(b) $Tw(A) = \{P \cdot diag(X,0) \cdot Q \mid X \in GL_r(q)\}$ *in* $|Tw(A)| = m_q(r,r)$,

(c) A je v osamljeni množici dvojčkov natanko tedaj, ko je $A \in M_n^1(2)$.

Dokaz. (a) Očitno je

$$A \cdot Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = P \cdot \mathrm{diag}(I_r, 0) \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = P \cdot \mathrm{diag}(I_r,0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} =$$
$$= P \cdot 0 = 0$$

in podobno je

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0 & Y^T\end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot A &= \begin{bmatrix}0 & Y^T\end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \operatorname{diag}(I_r, 0) \cdot Q = \\ &= \begin{bmatrix}0 & Y^T\end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}(I_r, 0) \cdot Q = \begin{bmatrix}0 & Y^T\end{bmatrix} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Obratno, naj bo $B \in N(A)$ in naj velja $A \cdot B = 0$. Matriko B lahko zapišemo kot $B = Q^{-1} \cdot C \cdot R$, kjer $C \in M_n(q)$ in $R \in \mathrm{GL}_n(q)$. Iz $A \cdot B = 0$ sledi, da je $P \cdot \operatorname{diag}(I_r, 0) \cdot C \cdot R = 0$ in, ker sta P in R obrnljivi, da je $\operatorname{diag}(I_r, 0) \cdot C = 0$. Matriko C zapišimo kot $C = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$. Vstavimo v prejšnjo enakost in dobimo, da $C_{11} = 0$ in $C_{12} = 0$. Torej je B oblike $B = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix}0\\ X\end{bmatrix}$, kjer je $X \in M_{(n-r)\times n}(q) \setminus \{0\}$. Podobno naredimo, če je $B \cdot A = 0$ in dobimo, da je B oblike $B = \begin{bmatrix}0 & Y^T\end{bmatrix} \cdot P^{-1}$, kjer je $Y \in M_{(n-r)\times n}(q) \setminus \{0\}$.

(b) Naj bo matrika $B \in \mathrm{Tw}(A)$ in jo zapišimo kot

$$B = P \cdot \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix} \cdot Q,$$

kjer so $B_{11} \in M_r(q)$, $B_{12} \in M_{r\times(n-r)}(q)$, $B_{21} \in M_{(n-r)\times r}(q)$ in $B_{22} \in M_{n-r}(q)$. Pokažimo, da so matrike B_{12}, B_{21}, B_{22} ničelne. Označimo $C = Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, I_{n-r}) \cdot P^{-1}$. Ker je $N(A) = N(B)$ in je $A \cdot C = P \cdot \operatorname{diag}(I_r, 0) \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, I_{n-r}) \cdot P^{-1} = 0$, sledi, da je ali $B \cdot C = 0$ ali $C \cdot B = 0$. Če pa sedaj v te dve enačbi vstavimo definiciji matrik B in C pa hitro vidimo, da sledi, da je $B_{22} = 0$. Pokažimo še, da je $B_{12} = 0$. Recimo, da ni, torej obstaja indeks (i, j), kjer $1 \leq i \leq r$ in $1 \leq j \leq n-r$, da ima tam B_{12} neničelno vrednost. Z $E_{ji}^{(n-r)\times r}$ označimo $(n-r)\times r$ matriko, ki ima na (j, i)-tem mestu 1, povsod drugod pa 0. Potem je $B_{12} \cdot E_{ji}^{(n-r)\times r} \neq 0$ in $E_{ji}^{(n-r)\times r} \cdot B \neq 0$. Iz tega sledi, da je

$$B \cdot Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ E_{ji}^{(n-r)\times r} & 0\end{bmatrix} \cdot P^{-1} \neq 0 \quad \text{in} \quad Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ E_{ji}^{(n-r)\times r} & 0\end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot B \neq 0,$$

torej $Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ E_{ji}^{(n-r)\times r} & 0\end{bmatrix} \cdot P^{-1} \notin N(B)$. Vendar pa je $Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ E_{ji}^{(n-r)\times r} & 0\end{bmatrix} \cdot P^{-1} \in N(A)$ ter $N(A) = N(B)$, s čimer pridemo v protislovje. Torej je $B_{12} = 0$. Na podoben način lahko pokažemo tudi, da je $B_{21} = 0$. Sledi, da je $B = P \cdot \operatorname{diag}(B_{11}, 0) \cdot Q$. Sedaj moramo pokazati, da je B_{11} polnega ranga. Če B_{11} ni polnega ranga, obstaja neničelna matrika $H_0 \in M_r(q)$, da je $B_{11} \cdot H_0 = 0$. Iz tega sledi, da je $H = Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(H_0, 0) \cdot P^{-1} \in N(B)$, torej je $H \in N(A)$. Vendar pa $H \cdot A \neq 0$, kar nas pripelje v protislovje.

Še obratno, naj bo $C \in \{P \cdot \operatorname{diag}(X, 0) \cdot Q \mid X \in GL_r(q)\}$. Po točki (a) imata A in C enake sosede, torej je $\mathrm{Tw}(A) = \mathrm{Tw}(C)$.

(c) Naj bo $A \in M_n^1(2)$. Po točki (b) in trditvi 4.2, je $|\mathrm{Tw}(A)| = m_2(1, 1) = 2^1 - 1 = 1$, torej je A v osamljeni množici dvojčkov.

Obratno, naj bo A v osamljeni množici dvojčkov, torej $|\mathrm{Tw}(A)| = 1$. Naj bo $A \in M_n^r(q)$ za neke n, r in q. Po točki (b) in trditvi 4.2 je $|\mathrm{Tw}(A)| = m_q(r, r) = \prod\limits_{i=0}^{r-1} \frac{(q^r - q^i)^2}{q^r - q^i} = \prod\limits_{i=0}^{r-1} (q^r - q^i)$. Ker so vsi členi produkta pozitivna cela števila, je to enako 1 natanko tedaj, ko so vsi faktorji enaki 1, kar pa je možno le, če sta $q = 2$ in $r = 1$. $\square$

Opomba 4.5. Soseščino matrike $A = P \cdot \mathrm{diag}(I_r, 0) \cdot Q$, kjer sta $P, Q \in \mathrm{GL}_n(q)$ in $1 \leq r \leq n-1$, iz točke (a) leme 4.4 lahko drugače zapišemo tudi kot

$$N(A) = \{Q^{-1} \cdot Y \cdot P^{-1} \mid Y \in Z^*(M_n(q)),\ \mathrm{rang}(Y) \leq n-r\}.$$

Res, naj bo $B \in N(A)$. Po točki (a) leme 4.4 jo lahko zapišemo kot $B = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix}$ ali kot $B = \begin{bmatrix} 0 & Y^T \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$ za $X, Y \in M_{(n-r)\times n}(q) \setminus \{0\}$. Zapisa preoblikujemo in dobimo $B = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} \cdot P \cdot P^{-1}$ in $B = Q^{-1} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} 0 & Y^T \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$. Ker sta Q^{-1} in P^{-1} polnega ranga, matriki $\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & Y^T \end{bmatrix}$ pa sta nepolnega ranga, natančneje ranga $\leq n-r$, imata tudi produkta $\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} \cdot P$ in $Q \cdot \begin{bmatrix} 0 & Y^T \end{bmatrix}$ rang manjši ali enak $n-r$, torej sta delitelja niča v $M_n(q)$ in posledično vozlišči grafa $\Gamma(M_n(q))$.

Lema 4.6. *Graf* $\Gamma(M_n(q))$ *ima* $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_q(n,i)}{m_q(i,i)}$ *množic dvojčkov.*

Dokaz. Naj bo $1 \leq i \leq n-1$. Vemo že, da $|M_n^i(q)| = m_q(n,i)$. Po točki (b) leme 4.4 je $|\mathrm{Tw}(A)| = m_q(i,i)$ za vsako matriko $A \in M_n^i(q)$. Torej je v $M_n^i(q)$ natanko $\frac{m_q(n,i)}{m_q(i,i)}$ množic dvojčkov. Sedaj seštejemo po i-jih in dobimo rezultat. $\square$

Sedaj, ko imamo vse potrebne leme, poglejmo, koliko je $\dim(\Gamma(M_n(q)))$. Delimo primere glede na to, koliko sta q in n.

Izrek 4.7. *Naj bo* $q \geq 3$. *Potem je*

$$dim(\Gamma(M_n(q))) = q^{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_q(n,i)}{m_q(i,i)} - m_q(n,n).$$

Dokaz. Ker je $q \geq 3$, po točki (c) leme 4.4 sledi, da je $\beta(\Gamma(M_n(q))) = 0$. Iz tega in iz točke (iii) trditve 2.14 sledi, da je $\dim(\Gamma(M_n(q))) = V(\Gamma(M_n(q))) - \alpha(\Gamma(M_n(q)))$. Uporabimo lemi 4.3 in 4.6 ter dejstvo, da je $1 = \frac{m_q(n,n)}{m_q(n,n)}$, in dobimo $\dim(\Gamma(M_n(q))) = q^{n^2} - m_q(n,n) - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_q(n,i)}{m_q(i,i)} = q^{n^2} - m_q(n,n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_q(n,i)}{m_q(i,i)}$. $\square$

Izrek 4.8. *Naj bo* $n \geq 3$. *Potem je*

$$dim(\Gamma(M_n(2))) = 2^{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_2(n,i)}{m_2(i,i)} - m_2(n,n).$$

Dokaz. Poglejmo, kakšne so množice dvojčkov grafa $\Gamma(M_n(2))$, kjer $n \geq 3$. Po točki (c) leme 4.4 so vse matrike iz $M_n^1(2)$ v osamljenih množicah dvojčkov, ostala vozlišča grafa pa so v pravih množicah dvojčkov. Dokažimo najprej, da nobena matrika iz $M_n^1(2)$ ni vsebovana v nobeni bazi grafa $\Gamma(M_n(2))$. Naj bo $A \in M_n^1(2)$. Ker je njen rang enak 1, jo lahko zapišemo kot $A = P \cdot E_{11} \cdot Q$, kjer sta $P, Q \in \mathrm{GL}_n(2)$. Naj bodo

$$
\begin{aligned}
B_1 &= Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, I_{n-1}) \cdot P^{-1},\\
B_2 &= Q^{-1} \cdot H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, I_{n-1}) \cdot P^{-1},\\
B_3 &= Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, I_{n-1}) \cdot H_{1n} \cdot P^{-1},
\end{aligned}
$$

kjer je $H_{1n} = I_n - E_{11} - E_{nn} + E_{1n} + E_{n1}$. Očitno je $H_{1n} \in \mathrm{GL}_n(2)$. Hitro opazimo, da je $A \in \bigcap_{i=1}^{3} N(B_i)$, saj ima A povezave z vsemi tremi B_i-ji. Ker so Q^{-1}, H_{1n} in P^{-1} polnega ranga, rang matrike $\operatorname{diag}(0, I_{n-1})$ pa je $n-1$, sledi, da je $B_i \in M_n^{n-1}(2)$ za $i = 1, 2, 3$. Po točki (c) leme 4.4 torej velja, da $|\mathrm{Tw}(B_i)| \geq 2$ za $i = 1, 2, 3$. Naj bo sedaj B poljubna baza grafa $\Gamma(M_n(2))$. Po točki (i) trditve 2.14 vsaka rešljiva množica, torej tudi baza B, grafa vsebuje vsa, razen morda enega, vozlišča iz vsake prave množice dvojčkov $\mathrm{Tw}(B_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Naj bodo $C_i \in \mathrm{Tw}(B_i) \cap B$ za $i = 1, 2, 3$ taka vozlišča, ki so vsebovana v B. Po točki (b) leme 4.4 jih lahko zapišemo kot

$$
\begin{aligned}
C_1 &= Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, X_1) \cdot P^{-1},\\
C_2 &= Q^{-1} \cdot H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2) \cdot P^{-1},\\
C_3 &= Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, X_3) \cdot H_{1n} \cdot P^{-1}
\end{aligned}
$$

za $X_1, X_2, X_3 \in GL_{n-1}(2)$. Ker je $C_i \in \mathrm{Tw}(B_i)$ za vsak $i = 1, 2, 3$, velja, da ima A povezave z vsemi tremi C_i-ji, torej $A \in \bigcap_{i=1}^{3} N(C_i)$. Pokažimo sedaj, da je A edino vozlišče v tem preseku, torej $\bigcap_{i=1}^{3} N(C_i) = \{A\}$. Naj bo $X \in \bigcap_{i=1}^{3} N(C_i)$. Po opombi 4.5 ga lahko zapišemo kot $X = P \cdot Y \cdot Q$, kjer je $Y \in Z^*(M_n(2))$. Ker je $X \in N(C_1)$ sledi, da je $X \cdot C_1 = 0$ ali $C_1 \cdot X = 0$. Če velja prva enakost, dobimo $0 = X \cdot C_1 = P \cdot Y \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, X_1) \cdot P^{-1} = P \cdot Y \cdot \operatorname{diag}(0, X_1) \cdot P^{-1}$, iz česar pa sledi, da je $Y \cdot \operatorname{diag}(0, X_1) = 0$. Če velja druga enakost, dobimo $0 = C_1 \cdot X = Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, X_1) \cdot P^{-1} \cdot P \cdot Y \cdot Q = Q^{-1} \cdot \operatorname{diag}(0, X_1) \cdot Y \cdot Q$, iz česar sledi, da je $\operatorname{diag}(0, X_1) \cdot Y = 0$. Torej je $Y \in N(\operatorname{diag}(0, X_1))$. Podobno, iz $X \in N(C_2) \cap N(C_3)$ dobimo, da je $Y \cdot H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2) = 0$ ali $H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2) \cdot Y = 0$ ter da je $Y \cdot \operatorname{diag}(0, X_3) \cdot H_{1n} = 0$ ali $\operatorname{diag}(0, X_3) \cdot H_{1n} \cdot Y = 0$. Iz tega pa sledi, da je $Y \in N(H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2)) \cap N(\operatorname{diag}(0, X_3) \cdot H_{1n})$. Torej je

$$
Y \in N(\operatorname{diag}(0, X_1)) \cap N(H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2)) \cap N(\operatorname{diag}(0, X_3) \cdot H_{1n}).
$$

Ker je $Y \in N(\operatorname{diag}(0, X_1))$ in ima $\operatorname{diag}(0, X_1)$ rang $n-1$, sledi, da je Y ranga 1, torej brez škode za splošnost oblike

$$
Y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad Y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}^T
$$

za $a = 0, 1$ in $\gamma \in M_{(n-1)\times 1}(2)$. Če je $Y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$, potem iz $Y \in N(H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2))$ sledi, da je ali $Y \cdot H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2) = 0$ ali $H_{1n} \cdot \operatorname{diag}(0, X_2) \cdot Y = 0$. Označimo

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

ter

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}$$

in recimo, da velja prva enakost. Če zmnožimo matrike, dobimo, da je

$$Y \cdot H_{1n} \cdot \mathrm{diag}(0, X_2) = \begin{bmatrix} 0 & ax_{n-1,1} & ax_{n-1,2} & \cdots & ax_{n-1,n-1} \\ 0 & \gamma_1 x_{n-1,1} & \gamma_1 x_{n-1,2} & \cdots & \gamma_1 x_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_{n-1} x_{n-1,1} & \gamma_{n-1} x_{n-1,2} & \cdots & \gamma_{n-1} x_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = 0.$$

Ker pa je matrika X_2 polnega ranga (ranga $n-1$) pa sledi, da je $a = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$, kar pa je v protislovju z neničelnostjo matrike Y. Torej mora veljati druga enakost. Če zmnožimo matrike, dobimo, da je

$$H_{1n} \cdot \mathrm{diag}(0, X_2) \cdot Y = \begin{bmatrix} \gamma_1 x_{n-1,1} + \gamma_2 x_{n-1,2} + \ldots + \gamma_{n-1} x_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 x_{1,1} + \gamma_2 x_{1,2} + \ldots + \gamma_{n-1} x_{1,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 x_{2,1} + \gamma_2 x_{2,2} + \ldots + \gamma_{n-1} x_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 x_{n-2,1} + \gamma_2 x_{n-2,2} + \ldots + \gamma_{n-1} x_{n-2,n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

iz česar pa sledi, da je $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$. Podoben razmislek lahko naredimo tudi, če je Y oblike $Y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}^T$ in tudi tukaj dobimo, da je $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$. Sledi, da je $Y = aE_{11}$ za $a = 0, 1$ in, ker je Y neničelna matrika, je $Y = E_{11}$. Torej je $X = P \cdot Y \cdot Q = P \cdot E_{11} \cdot Q = A$ in res velja, da je $\bigcap\limits_{i=1}^{3} N(C_i) = \{A\}$. Posledično je A rešljiv z množico $\{C_1, C_2, C_3\} \subseteq B$, saj je edino vozlišče, ki ima povezavo z vsemi tremi C_i-ji za $i = 1, 2, 3$. Torej $A \notin B$. Baza B je bila poljubna, iz česar sledi, da vozlišče A ni vsebovano v nobeni bazi. Torej res velja, da vsaka matrika iz $M_n^1(2)$ ni vsebovana v nobeni bazi grafa $\Gamma(M_n(2))$. Uporabimo lemo 2.15 ter ponovno dejstvo, da je $1 = \frac{m_q(n,n)}{m_q(n,n)}$, in dobimo, da je $dim(\Gamma(M_n(2))) = |V(\Gamma(M_n(2)))| - \alpha(\Gamma(M_n(2))) - \beta(\Gamma(M_n(2))) = 2^{n^2} - m_2(n,n) - 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{m_2(n,i)}{m_2(i,i)} = 2^{n^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_2(n,i)}{m_2(i,i)} - m_2(n,n)$. □

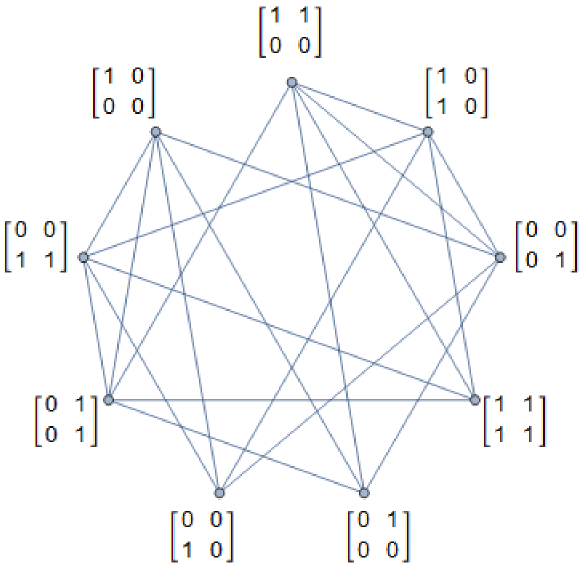
Trditev 4.9. *$dim(\Gamma(M_2(2))) = 3$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da je $\dim(\Gamma(M_2(2))) \geq 3$. Po lemi 4.3 in trditvi 4.2 je $|V(\Gamma(M_2(2)))| = 2^{2^2} - m_2(2,2) - 1 = 16 - 6 - 1 = 9$ in $\mathrm{diam}(\Gamma(M_2(2))) = 2$. Uporabimo trditev 2.10 in dobimo $9 - 2^{\dim(\Gamma(M_2(2)))} \leq \dim(\Gamma(M_2(2)))$. Hitro lahko preverimo, da je ta neenakost izpolnjena za vsa naravna števila večja ali enaka 3. Torej je $\dim(\Gamma(M_2(2))) \geq 3$.

Pokažimo sedaj še, da je $\dim(\Gamma(M_2(2))) \leq 3$. Poglejmo, kaj so vozlišča grafa $\Gamma(M_2(2))$. To so binarne 2×2 matrike ranga 1, torej

$$V(\Gamma(M_2(2))) = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. v_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Oglejmo si, kako so povezana oglišča.



Slika 3: Graf $\Gamma(M_2(2))$.

Preverimo, da je množica $\{v_1, v_4, v_6\}$ rešljiva množica grafa $\Gamma(M_2(2))$. Označimo $W = \{v_1, v_4, v_6\}$ in poglejmo predstavitve ostalih vozlišč glede na to množico:

$$\begin{aligned} r(v_2|W) &= (1, 1, 1) \\ r(v_3|W) &= (1, 2, 1) \\ r(v_5|W) &= (1, 2, 2) \\ r(v_7|W) &= (1, 1, 2) \\ r(v_8|W) &= (2, 1, 1) \\ r(v_9|W) &= (2, 2, 1). \end{aligned}$$

Predstavitve so med seboj različne, torej je $\dim(\Gamma(M_2(2))) \leq 3$. Sledi, da je $\dim(\Gamma(M_2(2))) = 3$ in množica $W = \{v_1, v_4, v_6\}$ je ena izmed možnih baz. $\square$

Slovar strokovnih izrazov

basis baza
metric dimension metrična dimenzija
neighbourhood soseščina

proper twin-set prava množica dvojčkov
resolving set rešljiva množica
ring kolobar
single twin-set osamljena množica dvojčkov
twin-set množica dvojčkov
undirected graph neusmerjen graf
vertex vozlišče
zero-divisor graph graf deliteljev niča

Literatura

[1] D. F. Anderson in P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, Journal of Algebra **217**(2) (1999) 434–447.

[2] G. Chartrand in dr., *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Applied Mathematics **105**(1) (2000) 99–113.

[3] D. Dolžan, *The metric dimension of the total graph of a finite commutative ring*, Canadian Mathematical Bulletin **59**(4) (2016) 748–759.

[4] S. Pirzada, M. Aijaz in S. Redmond, *Upper dimension and bases of zero-divisor graphs of commutative rings*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics **17**(1) (2020) 168–173.

[5] S. Pirzada in R. Raja, *On the metric dimension of a zero-divisor graph*, Communications in Algebra **45**(4) (2017) 1399–1408.

[6] S. Pirzada, R. Raja in S. Redmond, *Locating sets and numbers of graphs associated to commutative rings*, Journal of Algebra and Its Applications **13**(07) (2014) 1450047.

[7] A. Ravagnani, *Rank-metric codes and their duality theory*, Designs, Codes and Cryptography **80** (2015) 197–216.

[8] F. T. Shikun Ou, Dein Wong in Q. Zhou, *Fixing number and metric dimension of a zero-divisor graph associated with a ring*, Linear and Multilinear Algebra **69**(10) (2021) 1789–1802.

[9] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics: volume 1*, Cambridge University Press, USA, 2 izd., 2011.

[10] Wikipedia contributors, *Eulerjeva funkcija fi — wikipedija, prosta enciklopedija*, 2015, [ogled 2024-30-07], dostopno na `https://sl.wikipedia.org/w/index.php?title=Eulerjeva_funkcija_fi`.