§6.2.3 級数 $P_m(x)$

定理 6.2.2

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ なる ε に対して、級数 (1) は区間 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ で一様収束し、

等式 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} = -\log(2\sin \pi x) + i\pi\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

$0 < x < 1$ が成り立つ。

これの虚数部分を考えると、

$$e^{2\pi i n x} = \cos 2\pi n x + i\underbrace{\sin 2\pi n x}$$

になるから、

$e^{2\pi i n x}$ の虚数部分だけ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

右辺も虚数部分だけ

両辺πで割ると、

$$(1) \quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = \frac{1}{2} - x$$

が示される。

左辺は $x=0$、$x=1$ のとき 値0をとる。

§4.3.1(3)にある様に ←?

コレは? → ガウスは $0 \leqq x < 1$ より0

(2) 級数

$$P_1(x) := \begin{cases} x-[x]-\dfrac{1}{2} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

と定義すると、(1)と比較して、

(1)の右辺 $-x+\dfrac{1}{2}+[x] = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\pi n x}{n} + [x]$

両辺に−かける

$$x-[x]-\frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} - [x]$$

コレはどうなった???

→ ガウスは0

(3) $P_1(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\sin 2\pi n x}{2\pi n} \quad x \in \mathbb{R}$

が導かれる。

$x=\dfrac{1}{4}$ とおく。

$$P_1\left(\frac{1}{4}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin \frac{\pi}{2} n}{2\pi n}$$

① ② ③ ④

$1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 0 \to \cdots$

※ライプニッツ級数とは?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$P_1\left(\frac{1}{4}\right) = -\left\{\frac{1}{\pi} + 0 - \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}\pi} + 0 + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}_{5}\pi} + 0 \cdots\right\}$$

$$P_1\left(\frac{1}{4}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{\pi}{2}n}{2\pi n}$$

ライプニッツ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$\frac{1}{\pi}$ されてるのと − のちがいのみ

ライプニッツ級数が $\frac{\pi}{4}$ を表すという別証明が得られる.

$m \geqq 2$ のとき $P_m(x)$、$x \in \mathbb{R}$ を一様絶対収束する様な次の級数によって定義する。

(4) $$P_{2k}(x) := (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$P_{2k+1}(x) := (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{2k+1}}$$

定理5.1.4より

(5) $$P'_{m+1}(x) = P_m(x) \quad m \geqq 1, \ x \in \mathbb{R}$$

が成りたつ。

ただし、$m = 1$ の場合は $x \notin \mathbb{Z}$ と仮定しなければならない。

$m=1$ のとき

$x \notin \mathbb{Z}$ と仮定すると

$P_2(x) = P_1(x)$ は 成り立つ？

$$P_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^2} \qquad P_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin 2\pi n x}{(2\pi n)}$$

微分する　　(3)の式

$$P_2'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2\pi n x}{2\pi n}$$

$$= P_1(x)$$

$m=k$ のとき

$\cancel{P_{k+1}(x) = P_k(x)}$

$P_{2k+1}'(x) = P_{2k}(x)$

$m=k+1$ のとき

$\cancel{P_{k+2}(x) = P_{k+1}(x)}$

$P_{2k+2}'(x) = P_{2k+1}(x)$

→ 区間 $0<x<1$ において次数 m の多項式となる。

(4) より、

$$\int_0^1 P_n(t)\,dt = 0$$ を得る。

$P_m(x)$ は $m \geqq 2$ のとき絶対一様収束するから…？

ここで

(7) $B_n(x) := n!\,P_n(x)$ 　$B_0(x) = 1$ とおくと、

多項式(7)は、§6.1.1 の性質 (B.0)(B.1)(B.2)を満足する。

⇨ 区間[0, 1]においてベルヌーイ多項式と一致することがわかる。

※ (B.0) $B_0(x)=1$ → OK

(B.1) $$B'_n(x)=\frac{dB_n(x)}{dx}=n\cdot B_{n-1}(x)$$ → 帰納法のため

$n\geqq 1,\ x\in\mathbb{R}$

(B.2) $$\int_0^1 B_n(t)\,dt=0$$ → OK.

$n\geqq 1$

(4)において $m=2k$のとき $x=0$とおくと、

$$\begin{cases} P_{2k}(0):=(-1)^{k-1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2\pi n)^{2k}} \\ P_{2k+1}(0):=(-1)^{k-1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{2k+1}} \end{cases}$$

← $\cos 0=1$ より.

(7) $n=2k$のとき

$$B_{2k}(x)=(2k)!\,P_{2k}(x)$$

$$\frac{B_{2k}(x)}{(2k)!}=P_{2k}(x)$$

$$(-1)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2\pi n)^{2k}}=P_{2k}(0)=\frac{B_{2k}}{(2k)!}$$

となる。

※リーマン・ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

よって結局、

有理数

$$(8) \quad \zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2\cdot(2k)!} \cdot B_{2k} \qquad k>0$$

を得る。

ベルヌーイ数を用いてゼータ関数の正の偶数での値を表すことができた。

これより、偶数 $n \geqq 2$ に対して $\zeta(n)$ が π^n の有理数倍となることが再び示された。

(§5.5.5 参照)

実際に値を入れてみた

$$\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2}{2\cdot 2!} \underbrace{B_2}_{\text{ベルヌーイ数で}\frac{1}{6}} = \frac{\cancel{4}\pi^2}{\cancel{4}} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = -\frac{(2\pi)^4}{2\cdot 4!} \underbrace{B_4}_{-\frac{1}{30}} = -\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{16}\pi^4}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}} \cdot \left(-\frac{1}{30}\right)$$

$$= -\frac{\pi^4}{3} \times \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

⋮

$\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} = Q_{2k}$ に関しては、奇数の階乗を使用した次の式が成り立つ。(ネットで調べました…)

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3!} \qquad Q_2 = \frac{1}{3!}$$

$$\frac{1}{90} = \frac{1}{(3!6)} - \frac{2}{5!} \qquad Q_4 = \frac{Q_2}{3!} - \frac{2}{5!}$$

$$\frac{1}{945} = \frac{1}{(3!90)} - \frac{1}{(5!6)} + \frac{3}{7!} \qquad Q_6 = \frac{Q_4}{3!} - \frac{Q_2}{5!} + \frac{3}{7!}$$

よって

$\zeta(2k)$ の式は

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3!}$$

$$\zeta(4) = \frac{\zeta(2)\pi^2}{3!} - \frac{2\pi^4}{5!}$$

$$\zeta(6) = \frac{\zeta(4)\pi^2}{3!} - \frac{\zeta(2)\pi^4}{5!} + \frac{3\pi^6}{7!}$$

$\vdots$

$\zeta(2k)$ は奇数の階乗の積を分母に持つ式で表される。 → π^2 の有理数倍である。