ベルヌーイ多項式

§6.1.1 定義

$$B_0(x) = 1$$

$$B_n'(x) = \frac{dB_n(x)}{dx} = n \cdot B_{n-1}(x),\ n \geqq 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

この性質をもつ実多項式の列 $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。

このBn(x)に対して数列 B_n を $B_n = B_n(0)\quad n \in \mathbb{N}$ と定義する。

※ B_n と $B_n(x)$ はちがうもので、区別しないといけない。

?

$B_0(x)=1$ と定理3.1.4により、

$$\boxed{B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k},\quad n \geqq 0}$$

が得られる。

ここで $B_0 = 1$ と決め、

$$B_n = -n \int_0^1 \left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt \right) dx$$

$n \geqq 1$

が得られる。

"B_n は $B_{n-1}(x)$ より" のところの意味がよくわかりません。

$B_1, B_2, \cdots B_{n-1}$ によって B_n は
一意的に決定される。

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ B_n'(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \ x \in \mathbb{R} \\ \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

これらの条件によって
多項式 $B_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ は一意的に決まる。

$$\boxed{\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}, \quad n \geqq 0 \\ B_n &= -n \int_0^1 \left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt \right) dx, \quad n \geqq 1 \end{aligned}}$$

$B_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ は ベルヌーイ多項式

B_n $(n \in \mathbb{N})$ は ベルヌーイ数

という。

ベルヌーイ数は有理数である。

ベルヌーイ数の式

$$B_n = -n\int_0^1\left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt\right)dx,\quad n \geqq 1$$

両辺nでわる。

$$\frac{1}{n}B_n = -\int_0^1 \underbrace{\overbrace{\left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt\right)}^{(1\cdot)}dt}_{\text{部分積分法でとく。}}$$

$$= -\left[x\cdot\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt\right]_0^1 + \int_0^1 x\cdot B_{n-1}(x)\,dx$$

$$= -\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt + \int_0^1 x\cdot B_{n-1}(x)\,dx$$

n=1を代入してみる。

$$B_1 = -\int_0^1 \underbrace{B_0(t)}_{1}\,dt + \int_0^1 x\underbrace{B_0(x)}_{1}\,dx$$

$$= -[t]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -(1) + \left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

ベルヌーイ多項式の式にn=1を代入してみる。

$$B_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k x^{1-k}$$

$$= \binom{1}{0} \underbrace{B_0}_{1} x + \binom{1}{1} \underbrace{B_1}_{-\frac{1}{2}} \underbrace{x^0}_{1}$$

$$= \underbrace{\binom{1}{0}}_{?} x + \binom{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2} \text{ と、}$$

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0, \quad n \geqq 1$$

により、 $B_n = n\int_0^1 x \cdot B_{n-1}(x)\,dx, \quad n \geqq 2$ が得られ、

これと、 $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}, \quad n \geqq 0$

により、

$$\underbrace{B_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \frac{B_k}{n-k+1}, \quad n \geqq 2}$$ が得られる。

これを導く過程がよく分かりません。

ベルヌーイ数の式を積分する前の式 (B.2)

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0 \quad n \geqq 1$$

より、

$$B_n(1) = B_n \quad n \neq 1$$

が得られる。

さらに、これとベルヌーイ多項式の式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \cdot x^{n-k}, \quad n \geqq 0$$

より、

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad n \neq 1$$

が成り立つ。

B_2を求めてみる。

$$\frac{1}{2}B_2 = -\int_0^1 B_1(t)\,dt + \int_0^1 x B_1(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}B_2 = -\int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)dt + \int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}B_2 = -\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1$$

$$= -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$B_2 = \cancel{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$B_2 = \frac{4-3}{\cancel{12}_{6}} \times \cancel{2} = \frac{1}{6}$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$B_2(x)$も求めてみる。

$$B_2(x) = 2\cdot\int_0^x B_1(t)\,dt + B_2$$

$$= 2\cdot\int_0^x \left(t-\frac{1}{2}\right)dt + \frac{1}{6}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]_0^x + \frac{1}{6}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{6}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

//