

廃棄物処理における 線形問題の応用

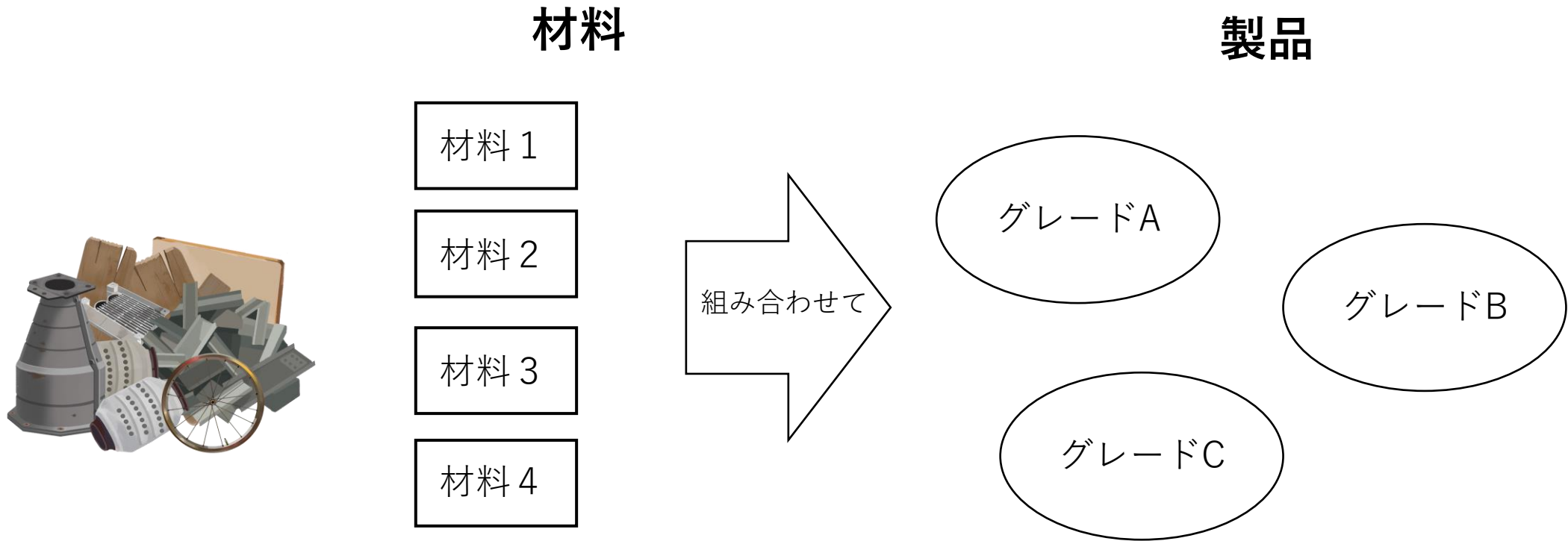


目次

- 問題の説明
- 定式化
 - ①パラメータ（入力情報）
 - ②決定変数
 - ③制約条件
 - ④目的関数
- 結果
- まとめ

廃棄物処理センター（SAVE IT COMPANY）

4種類の廃棄物を収集し、組み合わせて資源化している。



これから求めるもの

①パラメータ（入力情報）

②決定変数

③制約条件

④目的関数

①パラメータ 製品データ

グレード	仕様	資源化コスト(\$/ポンド)	売値(\$/ポンド)
A	材料1: 全体の30%以下 材料2: 全体の40%以上 材料3: 全体の50%以下 材料4: ちょうど20%	3.00	8.50
B	材料1:全体の50%以下 材料2:全体の10%以上 材料4:ちょうど10%	2.50	7.00
C	材料 1 :全体の70%以下	2.00	5.50

① パラメータ 材料（廃棄物） データ

材料	量(ポンド/1週間)	処理にかかるコスト(\$)	追加制約
1	3,000	3.00	① 少なくとも半分以上の量を資源化すること。 ② \$30,000は使う。
2	2,000	6.00	
3	4,000	4.00	
4	1,000	5.00	

②決定変数

- とりあえずなんか定義してみる…

y_i :1週間に生産されるグレード*i*製品の量 ($i=A,B,C$)

製品のグレードは材料の割合によって決まることから

z_{ij} :グレード*i*製品における材料*j*の割合 ($i=A,B,C; j=1,2,3,4$)

材料*j*において、

$$1 \text{ 週間に使用できる材料 } j \text{ の量} = z_{Aj}y_A + z_{Bj}y_B + z_{Cj}y_C$$

材料データより、1週間に使用できる材料の量は3000ポンドであることから

$$z_{Aj}y_A + z_{Bj}y_B + z_{Cj}y_C \leq 3000$$

②決定変数

$$Z_{Aj}y_A + Z_{Bj}y_B + Z_{Cj}y_C \leq 3000$$

→これは正当な制約条件ではない。つまり $Z_{Aj}y_A$ などは決定変数ではない。

※左辺が線形関数で表現されておらず、様々な製品(A,B,C)が関わっているため。

★ 2 種類の変数を1種類の変数に置き換える

$$x_{ij} = Z_{ij}y_i \text{ (For } i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4)$$

= グレード*i*製品における材料*j*の量

決定変数は x_{ij} :グレード*i*における材料*j*の量

③制約条件

②で求めた決定変数 x_{ij} を使ってモデルの制約条件を定義する。

$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = 1$ 週間に製作されたグレード i 製品の量

$x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Cj} = 1$ 週間に使用された材料 j の量

$\frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}} = \text{グレード}i\text{製品における材料}j\text{の割合}$

※製品データより、グレードAにおいて材料1は全体の30%以下なので、

$$\frac{x_{A1}}{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}} \leq 0.3$$

両辺を分母で割ると

$$x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$$

③制約条件

1. Mixture specifications (second column of Table 3.16):

製品データの仕様による、材料の割合の制約

$$x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 1})$$

$$x_{A2} \geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 2})$$

$$x_{A3} \leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 3})$$

$$x_{A4} = 0.2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 4})$$

$$x_{B1} \leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{grade B, material 1})$$

$$x_{B2} \geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{grade B, material 2})$$

$$x_{B4} = 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{grade B, material 4})$$

$$x_{C1} \leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) \quad (\text{grade C, material 1}).$$

2. Availability of materials (second column of Table 3.17):

材料データによる、材料の最大使用制約

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 3,000 \quad (\text{material 1})$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 2,000 \quad (\text{material 2})$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 4,000 \quad (\text{material 3})$$

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \leq 1,000 \quad (\text{material 4}).$$

3. Restrictions on amounts treated (right side of Table 3.17):

材料データによる、材料の最小使用制約

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 1,500 \quad (\text{material 1})$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \geq 1,000 \quad (\text{material 2})$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \geq 2,000 \quad (\text{material 3})$$

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \geq 500 \quad (\text{material 4}).$$

4. Restriction on treatment cost (right side of Table 3.17):

材料データによる、コスト制約

$$3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) \\ + 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) = 30,000.$$

5. Nonnegativity constraints:

非負制約

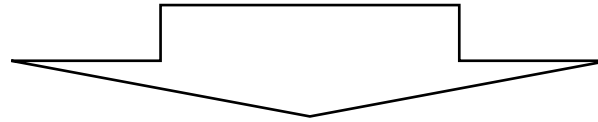
$$x_{A1} \geq 0, \quad x_{A2} \geq 0, \quad \dots, \quad x_{C4} \geq 0.$$

④ 目的関数

目的

1週間における、3種類の製品の売上による**純利益の増大**

※純利益 = 全体収入 - 資源化コスト



純利益、つまり目的関数をZとおくと、

Maximize Z

$$= 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) + 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

赤字は1ポンド量ごとの利益を表現している

※グレードA製品の場合

製品データより、1ポンドごとの売上が\$8.50、資源化コストが\$3.00なことから、
1ポンドごとの利益は $8.50 - 3.00 = 5.5$ となる。

問題の定式化

②決定変数

x_{ij} : グレード*i*製品における材料*j*の量

Z: 1週間における純利益

Maximize Z

$$= 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \\ + 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\ + 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

④目的関数

②制約条件

1. Mixture specifications (second column of Table 3.16):

$$\begin{aligned} x_{A1} &\leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && \text{(grade A, material 1)} \\ x_{A2} &\geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && \text{(grade A, material 2)} \\ x_{A3} &\leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && \text{(grade A, material 3)} \\ x_{A4} &= 0.2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && \text{(grade A, material 4)} \\ x_{B1} &\leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) && \text{(grade B, material 1)} \\ x_{B2} &\geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) && \text{(grade B, material 2)} \\ x_{B4} &= 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) && \text{(grade B, material 4)} \\ x_{C1} &\leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) && \text{(grade C, material 1).} \end{aligned}$$

2. Availability of materials (second column of Table 3.17):

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\leq 3,000 && \text{(material 1)} \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\leq 2,000 && \text{(material 2)} \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\leq 4,000 && \text{(material 3)} \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\leq 1,000 && \text{(material 4).} \end{aligned}$$

3. Restrictions on amounts treated (right side of Table 3.17):

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\geq 1,500 && \text{(material 1)} \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\geq 1,000 && \text{(material 2)} \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\geq 2,000 && \text{(material 3)} \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\geq 500 && \text{(material 4).} \end{aligned}$$

4. Restriction on treatment cost (right side of Table 3.17):

$$3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) \\ + 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) = 30,000.$$

5. Nonnegativity constraints:

$$x_{A1} \geq 0, \quad x_{A2} \geq 0, \quad \dots, \quad x_{C4} \geq 0.$$

グレード	仕様	資源化コスト(\$/ポンド)	売値(\$/ポンド)
A	材料1: 全体の30%以下 材料2: 全体の40%以上 材料3: 全体の59%以下 材料4: ちょうど20%	3.00	8.50
B	材料1: 全体の50%以下 材料2: 全体の10%以上 材料4: ちょうど10%	2.50	7.00
C	材料1: 全体の70%以下	2.00	5.50

材料	量(ポンド/1週間)	資源化コスト(\$/ポンド)	追加制約
1	3,000	3.00	①少なくとも半分以上の量を資源化すること。 ②\$30,000は使う。
2	2,000	6.00	
3	4,000	4.00	
4	1,000	5.00	

①パラメータ(入力情報)

補足：制約条件

左辺を線形関数で表して
線形モデルに適した形にする

1. Mixture specifications (second column of Table 3.16):

$$x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 1})$$

$$x_{A2} \geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 2})$$

$$x_{A3} \leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 3})$$

$$x_{A4} = 0.2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{grade A, material 4})$$

$$x_{B1} \leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{grade B, material 1})$$

$$x_{B2} \geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{grade B, material 2})$$

$$x_{B4} = 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{grade B, material 4})$$

$$x_{C1} \leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) \quad (\text{grade C, material 1}).$$

$$0.7x_{A1} - 0.3x_{A2} - 0.3x_{A3} - 0.3x_{A4} \leq 0 \quad (\text{grade A, material 1})$$

$$-0.4x_{A1} + 0.6x_{A2} - 0.4x_{A3} - 0.4x_{A4} \geq 0 \quad (\text{grade A, material 2})$$

$$-0.5x_{A1} - 0.5x_{A2} + 0.5x_{A3} - 0.5x_{A4} \leq 0 \quad (\text{grade A, material 3})$$

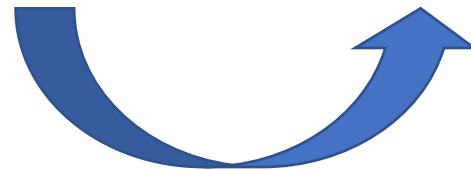
$$-0.2x_{A1} - 0.2x_{A2} - 0.2x_{A3} + 0.8x_{A4} = 0 \quad (\text{grade A, material 4})$$

$$0.5x_{B1} - 0.5x_{B2} - 0.5x_{B3} - 0.5x_{B4} \leq 0 \quad (\text{grade B, material 1})$$

$$-0.1x_{B1} + 0.9x_{B2} - 0.1x_{B3} - 0.1x_{B4} \geq 0 \quad (\text{grade B, material 2})$$

$$-0.1x_{B1} - 0.1x_{B2} - 0.1x_{B3} + 0.9x_{B4} = 0 \quad (\text{grade B, material 4})$$

$$0.3x_{C1} - 0.7x_{C2} - 0.7x_{C3} - 0.7x_{C4} \leq 0 \quad (\text{grade C, material 1}).$$



すべての変数を左辺に移項

結果（このモデルにおける最適解）

グレード	一週間に使われた量				一週間に生産された量
	材料				
	1	2	3	4	
A	412.3(19.2%)	859.6(40%)	447.4(20.8%)	429.8(20%)	2149
B	2587.7(50%)	517.5(10%)	1552.6(30%)	517.5(10%)	5175
C	0	0	0	0	0
計	3000	1377	2000	947	

目的関数Zの最適値 = 35,109,65 つまり一週間の全体利益は\$35,109,65

まとめ

今回のような問題は**混合問題 (Blending problem)** という。

