Colles MPi* Semaine n°11 du 27/11/2023 au 01/12/2023 (Programme n°7)

Vallaeys Pascal

17 novembre 2023

Thème : Suites et séries de fonctions.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonction.

- La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple (« démo »). Contre-exemple pour la réciproque. (démo)
- Théorème de continuité pour les suites de fonctions. (démo)
- Théorème de la double limite pour les suites de fonctions.
- Théorème d'intégration sur un segment des suites de fonctions (démo)
- Théorème de « dérivation » des suites de fonctions.
- Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions.
- Théorème de continuité pour les séries de fonctions + application à zêta.
- Théorème de la double limite pour les séries de fonctions + application à zêta au voisinage de $+\infty$.
- Théorème d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions + application à zêta.
- Théorème de « dérivation » pour les séries de fonctions + application à zêta.
- Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment.
- Théorème de Weierstrass.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Th de « dérivation » des suites de fonctions. (démo)
- Th de « primitivation » des suites de fonctions sur des segments. (démo)
- Pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS (démo de la première implication)
- Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement. (démo)
- Extension C^k du théorème de "dérivation" + application à la fonction zêta.
- Équivalent de zêta au voisinage de 1^+ à l'aide d'une comparaison intégrale. (démo)
- Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale de cette série de fonctions. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Limite de zéta en 1^+ en « epsilon ». (non fait en cours)
- La fonction zêta est log-convexe. (démo)
- Démonstration du théorème de la double limite (démo HP)
- Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)

On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Donner la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 : (CCINP MP 2022)

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x > 0$.

1. Justifier l'existence et le caractère $\mathcal{C}^1$ de S, puis donner une expression de $S'(x)$.

2. En déduire la monotonie de S.

3. Montrer que $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et en déduire un équivalent simple de S en 0^+.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

1) Étudier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

2) Montrer que $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{N}$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \pi$, en utilisant une comparaison série-intégrale.

Exercice 4 : (TPE MP)
Montrer que $\psi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}$ est solution de $y'' + e^t y = 0$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 5 : (CCINP MP 2022)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose : $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.
1) Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
2) Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3) Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2021)
Soit $f \in C^0([a,b])$ telle que tous ses moments sont nuls i.e. $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b x^k f(x)\, dx = 0$
1) Rappeler le théorème de Weierstrass
2) Montrer que f est nulle

Exercice 7 :
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
a) Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int\limits_0^1 t^n f(t) dt$.
b) Donner un équivalent de $\int\limits_0^1 t^n f(t) dt$ si f(1) n'est pas nul.
c) Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int\limits_0^1 \cos(nt).f(t) dt$ si f est de classe C^1.
d) Reprendre la question précédente avec simplement f continue.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 8 : (Magistère MP 2022)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions K-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction u. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 9 :
On note $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Pour tout réel x de D, on pose $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2}$.
1) Montrer que f est correctement définie, continue et 1-périodique sur D.
2) On pose pour tout réel x de D, $g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$. Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer alors que pour tout réel x, $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4.g(x)$. En déduire que pour tout réel x de D, la valeur de $f(x)$.
4) Montrer alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 10 : (Mines-Ponts 2019)
On considère $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (Arc\tan(n+x) - Arc\tan(n))$. Etudier f : domaine de définition, monotonie, régularité, comportement asymptotique. Tracer son graph.

Exercice 11 :
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f'' soit bornée. On pose, pour tout entier naturel n, $g_n(x) = n.\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$.

a) Étudier la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Étudier la convergence uniforme.

Exercice 12 : (Mines MP 2021) (15 minutes de préparation) :
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une fonction continue $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ et une fonction continue b-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $\omega(f,t) = \sup\{|f(x)-f(y)|, |x-y| \le t\}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx \int_0^b g(x)dx + \epsilon_n(f,g)$ où $\epsilon_n(f,g)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2(nx)}dx$.

Exercice 13 : Polynômes de Bernstein. Pour tout entier nature n et tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k.B_{n,k}(x)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2.B_{n,k}(x)$.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{k}{n}-x)^2.B_{n,k}(x)$
3. Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On note $A = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/\, \left|\frac{k}{n}-x\right| \ge \alpha\right\}$ et $B = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/\, \left|\frac{k}{n}-x\right| < \alpha\right\}$. Montrer que $\sum\limits_{k\in A} B_{n,k}(x) \le \frac{1}{4n\alpha^2}$.
4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
5. Conclusion ?

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,27,48,53,54.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : suites et séries de fonctions. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°7
- Groupe 2 : Programme n°7
- Groupe 3 : Programme n°7
- Groupe 4 : Programme n°7
- Groupe 5 : Programme n°7
- Groupe 6 : Programme n°7
- Groupe 7 : Programme n°7
- Groupe 8 : Programme n°7
- Groupe 9 : Programme n°7
- Groupe 10 : Programme n°7
- Groupe 11 : Programme n°7
- Groupe 12 : Programme n°7
- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine