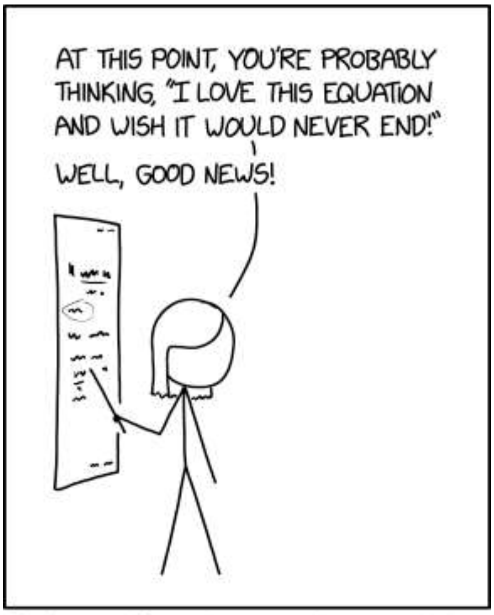
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 13



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.

Olivier Caffier

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 1 (Mines Télécom MP 2023) Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)(2-x)}$$

1. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Corrigé :

1. On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$: $f(x) = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{2-x}$ avec $a = b = \dfrac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\text{DSE} \\ \text{sur }]-1,1[}} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{1-\frac{x}{2}}}_{\text{DSE sur }]-2,2[}\right)$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left((-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}_{:= a_n} x^n}$$

2. Ainsi, à l'ordre 3 au vois. de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$= \dots$$

Exercice 2 (CCINP MP 2017) On considère

$$f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$$

1. Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 2$.
3. En déduire son développement en série entière.

Corrigé :

1 On considère donc une telle fct, on sait que $\forall x \in]\cdots[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow$ DSE de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$ qu'on notera $S = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

primitive sur $]-R,R[$

$$\arcsin(x) = \sum_n \frac{b_n x^{n+1}}{n+1} + \underline{\text{cte}}$$

+ produit de Cauchy $\Rightarrow$ f est développable en série entière sur $]-1,1[$

2 On a donc $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + 2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\arcsin(x)$$

Ainsi, $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2 + \left(\cancel{2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} - x\,2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\arcsin(x)$

$= 2$

D'où le fait que f' soit sol de $(\mathcal{E})$: $(1-x^2)y' - xy = 2$

3 Soit donc $\sum a_n x^n$ la DSE de f' sur $]-1,1[$

et f' est sol de $(\mathcal{E})$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\right]x^n + (a_1 - 2) = 0$$

$\overset{\text{Th. } R>0}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ \forall n \geq 0,\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}a_n \end{cases}$ et a_0 librement choisi !

Mq $R>0$: Utilisons la règle de d'Alembert pour les séries numériques sur termes pairs & impairs

$\Rightarrow R_1 = R_2 = 1$

$\Rightarrow R = \min(R_1, R_2) = 1$ ✓

OR cette série entière est sol du mm pb de Cauchy que f' :

- y est sol de $(\mathcal{E})$
- $y(0) = 0$

$\Rightarrow a_0 = 0$

$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0$

Finalement, on trouve que $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = \cancel{f(0)} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_{2p+1}}{2p+2}x^{2p+2}$$

D'où, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_{2p+1}}{2p+2}x^{2p+2}$$

Exercice 3 (CCINP MP 2021) Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :

1. $\sum_n (n+1)3^n z^{2n}$
2. $\sum_n \frac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$

Corrigé :

① Utilisons la règle de d'Alembert pour les séries numériques, posons $u_n = (n+1)3^n x^{2n}$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3\frac{n+2}{n+1}x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3x^2$

DONC d'après cette règle : si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\sum u_n$ CV

si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\sum u_n$ DV

$\boxed{\text{D'où} \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

D'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = x\frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$

dérivée

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

DONC pour tout $x \in]-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}[$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^n x^{2n} = \frac{1}{(1-3x^2)^2}}$ (A)

NÉANMOINS, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$: $(1-3z^2)^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^n z^{2n} = 1$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ mm coeff

$\Rightarrow$ (A) est donc vraie sur $\mathbb{C}$ également (sur $D_o(0,R)$)

② Posons $a_n = \frac{2^{(-1)^n}}{n}$

$a_n^- = \frac{1}{2n}$ et $a_n^+ = \frac{2}{n}$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n^- \leq a_n \leq a_n^+ \Rightarrow R^- \geq R \geq R^+$

cf. démo cours

or $R^+ = R(\sum_n a_n^+ x^n) = R(\sum_n \frac{2}{n}x^n) = 1$ et de mm, $R^- = 1$

$\boxed{\text{D'où} \quad R = 1}$

Ensuite, pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_{2n}}_{=\frac{2}{2n}} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_{2n+1}}_{\frac{1}{2(2n+1)}} x^{2n+1}$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n}}_{=-\ln(1-x^2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

$\Sigma x^{2p} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$

$\int$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$

$\Sigma \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2}(\ln(1-x) + \ln(1+x))$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{S(x) = -\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$

Exercice 4 (Mines Télécom MP 2021) Développer en série entière la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1-\sqrt{2}x+x^2)$$

Corrigé :

On a $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2}+2x}{x^2-\sqrt{2}x+1}$

$$= \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} \quad \text{avec } x_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } x_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-1}{x_1} \times \frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{-1}{x_2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(\frac{-1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(\frac{x_2^{n+1} + x_1^{n+1}}{\underbrace{x_1^{n+1} x_2^{n+1}}_{=1}} \right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(x_2^{n+1} + x_1^{n+1} \right)$$

or $x_2 = \overline{x_1} \Rightarrow x_2^{n+1} = \overline{x_1}^{n+1}$

$\Rightarrow x_2^{n+1} + x_1^{n+1} = 2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}\right) = 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$

D'où $f'(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) x^n$

$\int$ sur $]-R,R[$

$$f(x) = \cancel{f(0)} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Finalement, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exercice 5 On pose $a_0 = 0, a_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$
2. En déduire que le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
3. Calculer la somme de cette série entière sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
4. En déduire a_n en fonction de n.

Corrigé :

1. Montrons ce résultat par récurrence :

- $n=0$, $n=1$: OK
- $H_n, H_{n+1} \Rightarrow H_{n+2}$: $|a_{n+2}| \leq |a_{n+1}| + 2|a_n| + 1$

$$\leq 2^{n+2} - 1 + 2(2^{n+1} - 1) + 1$$

$$\leq 2 \times 2^{n+2} - 3 + 2$$

$$\boxed{|a_{n+2}| \leq 2^{n+3} - 1}$$

$\longrightarrow$ OK

2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < 2^{n+1}$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \frac{1}{2}$, $|a_n z^n| \leq |a_n||z|^n < 2^{n+1}|z|^n$
$< 2\,|2z|^n$

↳ série géométrique $\Rightarrow \sum a_n z^n$ CV ABS

$\Rightarrow R \geq \frac{1}{2}$

3. Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $|x| < \frac{1}{2}$

Or $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n}_{} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n}_{= \frac{1}{x} S(x) - \cancel{\frac{a_0}{x}}} + \underbrace{2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{= 2S(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n}_{= \frac{1}{1+x}}$

$= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2}$

$= \frac{1}{x^2}\left(S(x) - a_1 x - \cancel{a_0}\right)$ $\quad a_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad S(x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2\right) = \frac{2x + 1}{(1+x)\,x}$$

Finalement, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,

$$\boxed{S(x) = \frac{x^2}{1 - x - 2x^2} \times \frac{2x+1}{(1+x)\,x} = \frac{-2x^2 - x}{(1+x)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)}}$$

4. On a donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq. $\underbrace{S(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{x - \frac{1}{2}}}$

Développer S en série entière

+ Th. $\underline{\underline{R > 0}}$

$\Rightarrow$ On en déduit une expression de a_n.

Exercice 6 Montrer que
$$\int_0^{2\pi} \exp(2.\cos(x))dx = 2\pi.\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}$$

Corrigé :

On a $I = \int_0^{2\pi} exp(2.\cos(x))\,dx = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos^n(x)}{n!}\,dx$

Th. d'int. $\longrightarrow$ $= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{2\pi}\cos^n(x)\,dx$ Intégrale de Wallis avec $W_1 = 0$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{(2n)!}}\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{2^{2n}}(n!)^2}\times 2\pi$

$$\boxed{\text{D'où } I = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}}$$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 7 (Mines Télécom MP 2022) Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Corrigé :

On a $R_1 = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \{ |z| \mid a_n z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \}$

On a, pour $x \in \mathbb{C}$, $|a_n^2 x^n| = |a_n \sqrt{|x|}^n|^2$

DONC, si $\sqrt{|x|} < R_1$, i.e $|x| < R_1^2$, on a alors (par déf. du rayon) : $a_n \sqrt{|x|}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow (a_n \sqrt{|x|})^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $R_2 \geq |x|$

Ainsi, $|x| \leq R_1^2 \Rightarrow R_2 \geq |x|$

$\boxed{\Rightarrow R_2 \geq R_1^2}$

Réciproquement, si $\sqrt{|x|} > R_1 \Rightarrow a_n \sqrt{|x|}^n \not\to 0$

$\Rightarrow a_n^2 |x|^n \not\to 0$

$\boxed{\Rightarrow R_1^2 \leq R_2}$

$\boxed{\text{d'où } R_2 = R_1^2}$

Exercice 8 (Mines MP 2021)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
2. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n x^n}{n!}$ pour les x tels que la série converge.
   Montrer que $S(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$

Corrigé :

1 On a $\sum a_n$ CV $\Rightarrow a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n| \leq K$

On pose alors $\alpha_n = \frac{a_n}{n!}$, et on a bien $|\alpha_n| \leq \frac{K}{n!} = \beta_n$

$\Rightarrow R_\alpha \geq R_\beta = +\infty$ car DSE de l'exp.

D'où $R_\alpha = +\infty$

2 On a donc $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n x^n}{n!}$ $(R = +\infty)$

Montrons que $S(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$

Comme $s_n \longrightarrow L$, on a que $\forall \varepsilon>0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0$, $L-\varepsilon \leq s_n \leq L+\varepsilon$

Ainsi, soit $\varepsilon>0$. Prenons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ considérons donc un tel $N_0 \in \mathbb{N}$, on a :

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{s_n x^n}{n!}}_{P(x)} + \underbrace{\sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{s_n x^n}{n!}}_{T(x)}$$

et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{(L-\varepsilon')x^n}{n!} \leq T(x) \leq \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{(L+\varepsilon')x^n}{n!}$

i.e $(L-\varepsilon')\left(e^x - Q_0(x)\right) \leq T(x) \leq (L+\varepsilon')\left(e^x + Q_0(x)\right)$

avec $Q_0(x) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{x^n}{n!}$

donc $(L-\varepsilon')(1 - e^{-x}Q_0(x)) \leq T(x)e^{-x} \leq (L+\varepsilon')(1 + e^{-x}Q_0(x))$

et $Q_0(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists \eta_1 > 0$ tq $\forall x \geq \eta_1$ $L - 2\varepsilon' \leq T(x)e^{-x} \leq L + 2\varepsilon'$

$P(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists \eta_2 > 0$, $\forall x \geq \eta_2$, $-\varepsilon' \leq P(x)e^{-x} \leq \varepsilon'$

Ainsi, $\exists \eta = \max(\eta_1, \eta_2)$ tq $\forall x \geq \eta$, $L - 3\varepsilon' \leq S(x)e^{-x} \leq L + 3\varepsilon'$

i.e $L - \varepsilon \leq S(x)e^{-x} \leq L + \varepsilon$

D'où $S(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$

Exercice 9 Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(2\pi n!e)$

Corrigé :

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(2\pi n! e)$

$$= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(\cancel{2\pi \underbrace{p}_{\in \mathbb{Z}}} + 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{:= R_n}\right)$$

et $R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \underbrace{\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\beta_n}$

$$0 \leqslant \beta_n = \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\dots k}$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow \beta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $R_n = \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Ainsi, $u_n = \sin(2\pi R_n)$

...

$\sim \frac{2\pi}{n}$

D'où $\sum u_n$ DV

Exercice 10 (Centrale MP 2021) Soit f la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$.

1. Calculer, pour $r\in]0,R[$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt$
2. On considère l'égalité suivante :

$$\forall r\in]0,R[, \forall z\in B(0,r), \boxed{f(z)=\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}dt}$$

   (a) Montrer l'égalité pour $f: z\mapsto z^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   (b) Montrer l'égalité pour la fonction f définie dans l'introduction.

Corrigé :

1. Soit $r\in]0,R[$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,dt = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}\,dt$

Th. d'int. CVN

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt}_{\substack{=0 \text{ si } n\neq 0\\ =2\pi \text{ si } n=0}}$$

$$= a_0\, 2\pi$$

DONC $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,dt = 2\pi a_0}$

2. a) Soit $n\in\mathbb{N}$, considérons $f: z\mapsto z^n$, prenons $r\in]0,R[$ et $z\in B_o(0,r)$

On a

$$I_n=\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{r^n e^{int}}{re^{it}-z}\,dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{int}\times\frac{1}{1-\frac{z}{r}e^{-it}}\,dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{int}\times\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\big(\tfrac{z}{r}e^{-it}\big)^k\Big)dt$$

$|\cdot|<1$

$$= \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{r^{n-k}e^{i(n-k)t}z^k}_{:=g_k(t)}\,dt$$

Th. int. CVN

$$\overset{(*)}{=}\sum_{k=0}^{+\infty} r^{n-k}z^k\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt}_{\substack{=0 \text{ si } n\neq k\\ =2\pi \text{ sinon}}}$$

$$= z^n\, 2\pi$$

CVN : et $|g_k(t)| = r^n\left|\frac{z}{r}\right|^k$

$\Rightarrow \|g_k\|_\infty = r^n\left|\frac{z}{r}\right|^k < 1$

$\Rightarrow \sum\|g_k\|_\infty$ CV

$\Rightarrow \sum g_k$ CVN

D'où, pour $f: z\mapsto z^n$, $\boxed{\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,dt}$

b) Ainsi, pour $f: z\mapsto\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on a pour $r\in]0,R[$ et $z\in B_o(0,R)$:

$$\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,dt = \int_0^{2\pi} re^{it}\frac{\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}}{re^{it}-z}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 0}\underbrace{\frac{a_n r^{n+1}e^{i(n+1)t}}{re^{it}-z}}_{:=h_n(t)}\,dt$$

Th. int. CVN

$$= \sum_{n\geq 0} a_n \underbrace{\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{r^n e^{int}}{re^{it}-z}\,dt}_{=2\pi z^n \text{ d'après Q précédente}}$$

$$= 2\pi\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

D'où $\boxed{\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,dt}$

et $|h_n(t)| = \dfrac{|a_n|\,r^{n+1}}{|re^{it}-z|}$

considérons $\varphi: t\longmapsto |re^{it}-z|$ qui est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,2\pi]$

$\Rightarrow$ bornée et atteint ses bornes

$\Rightarrow \exists\, t_0\in[0,2\pi]$ tq $\forall t$, $\varphi(t)\geq \underbrace{\varphi(t_0)}_{:=m}>0$

donc $\|h_n\|_\infty \leq \dfrac{|a_n|\,r^{n+1}}{m} = \dfrac{r}{m}\times\underbrace{|a_n|\,r^n}_{\text{TG série CV}}$

d'où $\sum h_n$ CVN

Exercice 11 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$ absolument monotone : $\forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}\geq 0$.

On note $S_n(x)$ sa somme de Taylor d'indice n, et $R_n(x)$ le reste intégral de Taylor d'indice n.

1. Montrer que $\forall x\in]0,a[, S_n(x)$ est croissante et majorée.
2. En déduire que la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que
$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$$
4. En déduire que pour tout couple (x,y) de $]0,a[$ tel que $x<y$, on a $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\leq\frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.
5. Montrer que f est développable en série entière sur $]0,a[$.

Corrigé :

1 Soit $x\in]0,a[$, soit $n\in\mathbb{N}$, alors :

$$S_{n+1}(x)-S_n(x)=\underbrace{\frac{\overbrace{f^{(n)}(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{n!}_{\geq 0}}\underbrace{x^n}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow (S_n(x))\nearrow$

D'autre part, $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$

$\Rightarrow\quad S_n(x)\leq\underbrace{f(x)}_{\text{valeur fixe par rapport à } n}$

d'où $(S_n(x))_n\nearrow$ et majorée.

2 Comme $(S_n(x))$ est croissante et majorée, elle admet une limite $\ell(x)$

Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}$, $R_n(x)=f(x)-\underbrace{S_n(x)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell(x)}$

$\Rightarrow (R_n(x))_n$ converge !

3 On a $R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

$$\Rightarrow\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^x\frac{1}{x}\left(\frac{x-t}{x}\right)^n f^{(n+1)}(t)dt$$
$$=\frac{1}{n!}\int_0^x\frac{1}{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

$u=\frac{t}{x}$; $t=ux$; $dt=x\,du$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{1}{\cancel{x}}(1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\cancel{x}\,du$$

D'où $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$

4 Soient $x,y\in]0,a[$ tels que $x<y$:

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}-\frac{R_n(y)}{y^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-u)^n\underbrace{\left(f^{(n+1)}(xu)-f^{(n+1)}(yu)\right)}_{\leq 0}du$$

et $f^{(n+2)}\geq 0\Rightarrow f^{(n+1)}$ est croissante

≤ 0

D'où $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\leq\frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$

5 On sait d'après la question précédente, que $x\mapsto\frac{R_n(x)}{x}$ est croissante sur $]0,a[$.

En particulier, pour $x\in]0,a[$, posons $y=\frac{x+a}{2}>x$

Ainsi, $R_n(x)\leq\underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\underbrace{R_n(y)}_{\to\ell_y\ (Q_2)}$

$\Rightarrow R_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

$\Rightarrow S_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$

D'où, pour tout $x\in]0,a[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Exercice 12 (CCINP MP 2023) On pose $I_0 = I_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$$

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière définissant f vérifie $R \geq 1$.
2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire l'expression de f, la valeur de R et une expression de I_n pour tout n.

Corrigé :

1 Montrons par rec. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{I_n}{n!}\right| \leq 1$:

- $n = 0, 1$: OK
- $H_n, H_{n+1} \Rightarrow H_{n+2}$: On a, par déf. $|I_{n+2}| = |I_{n+1} + (n+1)I_n|$

$$\Rightarrow \left|\frac{I_{n+2}}{(n+2)!}\right| \leq \frac{1}{n+2}\underbrace{\left|\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\right|}_{\leq 1 \text{ par H.R}} + \frac{1}{(n+2)\cancel{(n+1)}}\cancel{(n+1)}\underbrace{\left|\frac{I_n}{n!}\right|}_{\leq 1 \text{ par H.R}}$$

$$\leq \frac{2}{\underbrace{n+2}_{\geq 2 \text{ car } n \in \mathbb{N}}}$$

$$\leq 1 \qquad \rightarrow \text{OK}$$

Subséquemment, pour $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < 1$

On a $\left|\frac{I_n}{n!} x^n\right| = \underbrace{\left|\frac{I_n}{n!}\right|}_{\leq 1} \times |x|^n \leq \underbrace{|x|^n}_{\text{TG série géom !}}$ $\overset{(*)}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ CV ABS pour $\forall |x| < 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{R \geq 1}$

2 On a $\underbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{I_n}{n!} x^n}_{= f(x) - I_1 x - I_0} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n + \frac{1}{n} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!} x^n$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 2} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} \frac{x^n}{n} + \sum_{n\geq 2} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!} \frac{x^n}{n}$$

Donc, en dérivant termes à termes (à justifier !!)

$$f'(x) - I_1 = \sum_{n\geq 2} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} \cancel{\frac{n}{n}} x^{n-1} + \sum_{n\geq 2} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!} \cancel{\frac{n}{n}} x^{n-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}}_{= f(x) - I_0} + x \underbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2}}_{= f(x)}$$

d'où $f'(x) - \cancel{I_1} = f(x)(1 + x) - \cancel{I_0}$ car $I_0 = I_1$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est sol. de } (E) : \ y' - (1+x)y = 0}$

3 On remarque que $g : x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$ est également sol. du pb. de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (E) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \overset{(\pi)}{\Rightarrow} \quad f = g$$

DONC $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)}$

↳ DSE etc... (A.B.S.L)