Colles MPi* Semaine n°5 du 30/09/2024 au 04/10/2024 (Programme n°3)

Vallaeys Pascal

19 septembre 2024

Thème : Début de la réduction, orienté vers le polynôme caractéristique.

Ce thème sera travaillé sur deux semaines. Cette semaine principalement les concepts de base et les résultats concernant le polynôme caractéristique.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Caffier
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- BISKUPSKI
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définitions de matrices semblables, montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

- Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. (démo)
- Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
- Une droite est stable si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre (démo)
- Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. (démo)
- $Card(sp(u)) \leq dim(E)$ (2 justifications dont une avec le polynôme caractéristique)
- Définition du polynôme caractéristique et lien avec les valeurs propres (démo)
- Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre, majoration avec la multiplicité de la valeur propre (démo)
- Exemple de matrice non diagonalisable sur le corps des réels puis sur le corps des complexes (démo)
- Diagonalisation de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 (deux méthodes, démo)
- Lien entre les valeurs propres et la trace et le déterminant dans le cas d'une matrice trigonalisable.(« démo »)
- L'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Le polynôme caractéristique est un polynôme, unitaire, de degré n, dont on connait les coefficients de degré n-1 et 0 (démo)
- Si le sev F est u-stable, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u (démo)
- Théorème fondamental de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique (démo !)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Un endo est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (démo)
- Réduction de la matrice circulante : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ (exemple de fin de cours).
- Une matrice A est nilpotente si et seulement si $Tr(A^k) = 0$ pour tout entier k non nul.

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (CCINP MPi 2023)
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \quad$ si $x > 0$, et $T(f)(0) = f(0)$.
1. Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T ; T est-il injectif ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de T, et donner le sous espace propre associé.
4. Donner le spectre de T et les éléments propres associés.

Exercice 3 : (ENSEA ENSIIE MP 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto \quad (X-1)^2P' - nXP \end{array} \right.$
1. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n.

Exercice 4 : (CCINP MP 2023)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$.
1. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?

2. Calculer A_2^n et A_1^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : (Mines MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(A)M$.
1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2023)
Soient trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminées par leurs premiers termes $x_0,\ y_0,\ z_0$ et les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n/2 + y_n/4 + z_n/4 \\ y_{n+1} & = & x_n/4 + y_n/2 + z_n/4 \\ z_{n+1} & = & x_n/4 + y_n/4 + z_n/2 \end{array}\right. .$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 : (Mines MP 2023)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccc} u: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de E.

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2023)
1. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(\ AB - I_n\ ) =\ \det(\ BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
On pourra considérer la suite $A_p = A - \frac{1}{p}I_p$.

Exercice 9 : (Centrale MP)
Soit $E = \mathbb{C}^n$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $u \in L(E)$.
a) Montrer que si u laisse tous les plans stables, il est diagonalisable.
b) Déterminer l'ensemble des endomorphismes laissant tous les plans stables (les déterminer tous).
c) Si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u, cela implique-t-il que u est diagonalisable ?
d) La réciproque est-elle vraie ?
e) Répondre aux mêmes questions dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$.

Exercice 10 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
b) Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 11 :
a) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes diagonalisables ?
b) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes non diagonalisables ?

Exercice 12 :
Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que : $\exists q \in \mathbb{N}^*/u^q = Id$. Montrer que $\dim\left(Ker\left(u - Id\right)\right) = \frac{1}{q}\sum\limits_{k=1}^{q} Tr\left(u^k\right)$.

Exercice 13 :
Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On note (P) la propriété : u admet n valeurs propres distinctes deux à deux. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Q_k : u admet $\binom{n}{k}$ sous-espaces stables de dimension k.
a) Montrer que $(P) \Leftrightarrow (Q_1)$.
b) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(P) \Rightarrow (Q_k)$.
c) Montrer que $(P) \Leftrightarrow (Q_{n-1})$

Exercice 14 : (ENS MP 2023)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), P = \chi_A, P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ et α_i la multiplicité de λ_i.
Soient les $F_i = \mathrm{Ker} P_i(A)$.
1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i F_i$.
2. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de A restreinte à F_i.
3. Montrer que $A = D + N$ avec D matrice diagonalisable et N nilpotente, telles que $DN = ND$.
4. Soit $\phi_A : M \mapsto AM - MA$. Exprimer la décomposition $N + D$ de ϕ_A en fonction de celle de A.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 59, 63 (en admettant qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable), 67, 69, 70, 73, 83, 101.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : réduction. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°3
- Groupe 5 à 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 à 11 : Programme n°2
- Groupe 12 à 14 : Programme n°2