Calcul différentiel

Vallaeys Pascal

2 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 33,52,56,57,58

Méthodes de base :

- Montrer qu'une fonction est différentiable.
- Montrer qu'une fonction est de classe C^1.
- Résolution d'une équation aux dérivées partielles.
- Déterminer des extrema locaux ou globaux.
- Appliquer le théorème d'optimisation sous contrainte.
- Utilisation de la règle de la chaîne.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (CCINP MP 2022)
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$
Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, \frac{x}{y}) \end{array}$
1) Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2) On pose $(u,v) = \Phi(x,y)$ et $f(x,y) = F(u,v)$.
Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3) Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) + 2 = 0$
4) Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour la question 3), il faut utiliser les résultats trouvés précédemment en faisant un changement de variable dans l'équation.

Exercice 2 : (CCINP MP 2021)
On considère $\mathbb{R}^n$ et son produit scalaire naturel $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives. 1. Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$, $\langle f(h), h \rangle > 0$
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$
a) Montrer que g est différentiable et calculer son gradient.
b) Montrer que g admet un unique point critique $z_0 = f^{-1}(u)$.
c) Montrer que g admet un minimum global en z_0.
Indication : Calculer le signe de $g(z_0 + h) - g(z_0)$.

Exercice 3 : (Centrale MP 2021)
On rappelle que le laplacien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire : $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
On pose $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| < 1\}$.
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\mathcal{B}}$ et telle que f est nulle sur $Fr(B)$.
1) Pour cette question on suppose que pour tout $x \in \mathcal{B}, f(x) > 0$.
Montrer que qu'il existe un x_0 de $\mathcal{B}$ telle que le maximum de f soit atteint en x_0.
Montrer qu'on a alors $\Delta f(x_0) \leq 0$.
2) On suppose à présent qu'il existe $x \in \mathcal{B}$ tel que $f(x) = 0$.
Montrer que le laplcien de f s'annule au moins une fois.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Pour montrer que $\Delta f(x_0) \leq 0$, l'examinateur m'a demandé de d'abord montrer le cas où $n = 1$
Commentaires divers :
Examinateur parlant peu et difficile à comprendre à cause de problèmes d'élocution.

Exercice 4 : (Ecrit CCINP MP 2017)
Soit $f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \sin\left(x^2 - y^2\right) \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to (x+y, x-y) \end{array}$

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en un point (x,y).

2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'une vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application $d\left(f \circ g\right)(x,y)$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

a. En calculant $f \circ g$.

b. En utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Exercice 5 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $f \in S^{++}(E)$ et $u \in E$.
Pour $x \in E$, on note $F(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.
a) Montrer que F est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
b) Montrer que F atteint son minimum sur E en un point que l'on précisera.

Exercice 6 :
On pose $f(x,y) = \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
a) Montrer que f est continue.
b) Montrer que f est de classe C^1.
b) Montrer que f n'est pas de classe C^2 au voisinage de (0,0).

Exercice 7 :
Soit de classe C^2. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (Laplacien). On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$.

1. (a) On pose z=x+iy et $f(x,y) = \ln\left|e^{ze^{-z}}\right|$. Calculer Δf.
   (b) Montrer que $f : (x,y) \to \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ est harmonique.
2. Soit de classe C^2 et f définie par $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Déterminer g de sorte que f soit harmonique.
3. Soit de classe C^2 On pose $f : (x,y,z) \to g\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$. Déterminer g de sorte que f soit harmonique.
4. Exprimer le Laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 8 :
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$une fonction de classe C^1, et soit $(x_1, ..., x_n, h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. On considère $g : t \to f(x_1 + th_1, ..., x_n + th_n)$. Justifier le fait que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9 : (Mines MP 2021)
Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction f définir sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $f(x,y) = g'(x)$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 10 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Étudier les extrema de la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x(y^2 + \ln(x)^2) \end{array} \right.$$

Exercice 11 : (CCINP MP 2023)
On note, pour tous réels x et y : $f(x,y) = y^2 \sin(x/y)$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$.
1. On pose $X_0 = (x_0, 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est continue en X_0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.

Calculer les dérivées partielles de f en X_1.

f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1, puis en $(0,1)$.

3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0. Si on suppose que f est différentiable en X_0, que vaut sa différentielle ?

Exercice 12 : (CCINP MP 2022)

Soit $f:\ (x,y)\longmapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f:(0,0)\longmapsto 0$.

1.Prouver que $f\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

2.On pose $\overrightarrow{u_\theta}=(\cos\theta,\sin\theta)$ avec $\theta\in]-\pi,\pi]$. Trouver les θ tels que la dérivée partielle de f en $(0,0)$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$ existe.

3.Existent-ils des dérivées partielles de f en $(0,0)$?

4.Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ avec $(x,y)\neq(0,0)$.

5.Est-ce qu'ils existent des dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13 : (CCINP TSI 2021)

Soit $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les points où f admet des extrema locaux.

Exercice 14 : (TPE MP 2019)

On définit f sur $[0,1]^2$ par $f(1,1)=0$ et $f(x,y)=\frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x,y)\neq(1,1)$.

a) Montrer que f est continue.

b) Déterminer le maximum de f.

Exercice 15 :

Donner la différentielle de f au point demandé, à la main puis à l'aide des dérivées partielles :

a) $f:(x,y)\to\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)$.

b) $f:(x,y)\to Arc\sin(xy)$ en (0,0) puis $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

c) $f:(x,y)\to tan(\pi+x+y)$ en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 16 : Donner les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f:\begin{array}{c}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ \overrightarrow{x}\to(\overrightarrow{x}/\overrightarrow{a})\exp\left(-\|\overrightarrow{x}\|^2\right)\end{array}$ où $\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$ est un vecteur non nul fixé.
2. $f:\begin{array}{c}\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}\\ z\to\frac{1}{z}\end{array}$.
3. $f:\begin{array}{c}M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})\\ M\to M^2\end{array}$ et $g:\begin{array}{c}M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})\\ M\to M^3\end{array}$.
4. $f:\begin{array}{c}M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})\\ M\to Tr\left(M^3\right)\end{array}$
5. $f:\begin{array}{c}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\\ P\to\int\limits_0^1 P^2\end{array}$.
6. $f:\begin{array}{c}M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\ M\to Det(M)\end{array}$ en toute matrice inversible.
7. $f:\begin{array}{c}GL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})\\ M\to M^{-1}\end{array}$ en toute matrice inversible.

Exercice 17 : (CCINP PC)

Déterminer les tangentes à la courbe d'équation $x^2+3xy+y^2=0$ passant par (1,7).

Exercice 18 : (Centrale PSI)

On considère la surface d'équation $x^2+y^2+z^2+6x+4y-2z=1$. Existe-t-il des plans tangents à cette surface et parallèles au plan d'équation $x+y+z=0$?

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 19 : (Mines MP 2023)

On note $f(x,y)=\displaystyle\int_0^1\ln(t^x+t^y)\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. f admet-elle des extremums ?

Exercice 20 : (Mines MP 2023)

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ dérivable tels que f admet un extremum en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

2. Énoncer un théorème semblable pour U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.

3. Étudier les extremums de $f : (x, y) \mapsto \sin(|x + iy|)^2$ sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

1. Utiliser directement la dimension pour montrer que la somme est directe.

2). Utiliser le signe de l'accroissement au voisinage de x_0.

Commentaires divers : Examinateur plutôt froid mais sympathique.

Pour la 3., j'ai uniquement eu le temps d'expliquer le raisonnement qu'il aurait fallu mener.

Exercice 21 : (CCINP MP 2023)

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni d'une norme sous-multiplicative $\|\|$, ie $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

1. Soit $H \in E$, $\|H\| < 1$, montrer que $I_n - H$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} H^n$.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans E.

3. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$.

a) Montrer que f est différentiable en I_n et que $df(I_n)(H) = -H$.

b) Montrer que f est différentiable en tout point de E

(on remarquera que $(M + H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1})$).

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Q1) Attention à bien justifier la sommabilité de la série.

Commentaires divers : L'examinateur était neutre et ne m'a pas donné d'indications, il m'a autorisé à laissé des justifications en suspens pour continuer les exercices.

Exercice 22 : (Centrale MP 2023)

Soit E euclidien, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si F est un fermé non vide de E, on note $g_F(x) = d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$. On note F^c le complémentaire de F.

1. a) Si $x \in E$ et F est un s-ev de E, exprimer le projeté orthogonal de x sur F à l'aide d'une base orthonormée de F, et démontrer ce résultat.

b) En déduire l'expression de $g_F(x)$ à l'aide d'une base orthonormée de E adaptée à F.

c) Montrer que g_F est différentiable sur F^c et exprimer sa différentielle.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$, on note $F_{n,x} = \{f \in F \,|\, \|x - f\| \leqslant g_F(x) + \frac{1}{n}\}$ et $\Phi_n(y) = \inf\limits_{f \in F_{n,x}} \langle 2y, f \rangle$. De même, on note $F_{0,x} = \{f \in F \,|\, \|x - f\| \leqslant g_F(x)\}$ et $\Phi_0(y) = \inf\limits_{f \in F_{0,x}} \langle 2y, f \rangle$.

a) Montrer que Φ_n converge uniformément vers Φ_0 sur la sphère unité de E, c'est à dire $S = \{y \in E \,|\, \|y\| = 1\}$. En déduire l'existence d'une suite $(c_n)_n$ qui vérifie (je sais plus).

b) Non traitée, elle parlait de la suite définie précédemment.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

2) a) Données par l'examinateur : A y fixé, montrer que les inf sont atteints.

Montrer que la suite $(\Phi_n(y))_n$ est croissante.

Je ne sais pas comment on pourrait finir après cela. Peut-être un des théorèmes de Dini (à condition de montrer que les Φ_n sont continues).

Exercice 23 : (Mines MP 2023)

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne usuelle. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $a > 0$.

Soit f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geqslant a\, N(x - y)^2$.

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $N(x)$ tend vers $+\infty$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Considérer, pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto f(tx)$.

Exercice 24 :

Soient $a_1, ..., a_n$ et $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs.

On note $X = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + ... + x_n = 1\}$

Montrer que $\sqrt[n]{a_1 ... a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$, à l'aide du théorème d'optimisation sous une contrainte, appliqué sur X.

Exercice 25 : (Mines MP 2022)

On pose : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$

Est-ce que f est continue ? de classe C^1 ?

Exercice 26 : (Mines MP 2018)
On pose $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + x^{2n} + y^{2n}\right)$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur D.

Exercice 27 : (Mines-Ponts 2019) Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Delta f = 0$.
On pose $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$.
a) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $r \in \mathbb{R} \to \int\limits_0^{2\pi} f(r.\cos\theta, r.\sin\theta)d\theta$ est constante.

Exercice 28 : Soit E une espace euclidien et $u \in S(E)$. On note $\varphi : x \to \frac{(u(x)/x)}{(x/x)}$ pour x vecteur non nul de E.
a) Calculer la différentielle de φ en tout point.
b) Montrer que cette différentielle est nulle uniquement aux points qui sont des vecteurs propres de u.

Exercice 29 : (Centrale MP)
Soit $\lambda > 0$ un réel et $U = (\mathbb{R}^*+)^n$.
On pose $f : \begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) \to \frac{1}{2}(x_1...x_n)^2 - \lambda x_1...x_n + \frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n} \end{array}$.
a) Déterminer le nombre de points critiques de f, suivant λ.
b) Etudier les extrema de f.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 30 : (ENS MP 2022)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continue et minorée.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0, \lambda > 0$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - x_0\|$.
Montrer que g admet un minimum global On suppose f différentiable, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe y_ε, tel que $f(y_\varepsilon) < \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + \varepsilon$ et $\|\text{grad} f\| < \sqrt{\varepsilon}$
Indications fournies par l'examinateur pendant l'épreuve :
Choisir un point $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant une certaine propriété. Puis appliquer 1 pour obtenir un point y_ε Utiliser la valeur de la différentielle comme limite d'un taux d'accroissement pour l'inégalité

Exercice 31 : (ENS MP 2022)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$. On pose u l'application :

$$u \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y)dy \end{array}.$$

Montrer que u est bien définie, qu'elle est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est uniformément continue.

Exercice 32 : (ENS MP 2022)
1) Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\Delta u > 0$ sur $\overline{B}(0,1)$. Montrer que u atteint son maximum sur la sphère $S(0,1)$.
2) Démontrer le même résultat en supposant uniquement $\Delta u \geqslant 0$ sur $\overline{B}(0,1)$.
3) Soit V telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$.
Montrer $\Delta V = 0$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinatrice pendant l'épreuve :
Question 2 : Considérer l'application u_n définie par $\forall x \in \overline{B}(0,1)$, $u_n(x) = u(x) + \frac{1}{n}\|x\|^2$.

Exercice 33 :

$$\text{Soit } f : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \\ M \to \begin{pmatrix} Tr(M) \\ Tr\left(M^2\right) \\ \vdots \\ Tr(M^n) \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

b) Comparer le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.

c) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 34 : (ULM MP)

Soient $x_1, x_2, ..., x_k$ des entiers naturels de somme $n \in \mathbb{N}$. Comment rendre leur produit $x_1.x_2...x_k$ maximal sous ces conditions ?

Exercice 35 : (X PC 2014) Déterminer l'image de l'application f : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y)$.