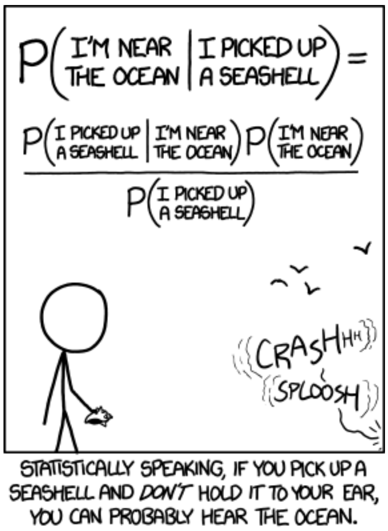
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 10



Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition d'un ensemble dénombrable

Définition - Ensemble dénombrable

On dit d'un ensemble qu'il est *dénombrable* si il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

A.2 Définition d'une tribu

Définition - Tribu

Soit Ω un ensemble.
On appelle *tribu* sur Ω un ensemble $T \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

- $\emptyset \in T$
- $\forall A \in T, \overline{A} \in T$ (stable par complémentaire)
- $\forall (A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$, on a $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in T$ (stable par union dénombrable)

Les éléments de T sont appelés des *évènements*.

A.3 Compatibilité d'une tribu avec l'intersection finie ou dénombrable

Proposition

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'évènements.
Alors :

$$\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in T$$

i.e T est stable par intersection dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$. Montrons que $\overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n}$

$x \in \overline{\bigcap_n A_n} \Leftrightarrow x \notin \bigcap_n A_n$

$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $x \notin A_{n_0}$

$\Leftrightarrow$ — tq $x \in \overline{A_{n_0}}$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_n \overline{A_n}$ $\longrightarrow$ OK

Or T est stable par complémentaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \overline{A_n} \in T$

et est stable par union finie ou dénombrable $\Rightarrow \bigcup_n \overline{A_n} \in T$

Enfin, on a montré que $\bigcup_n \overline{A_n} = \overline{\bigcap_n A_n} \in T$ et T stable par complémentaire : $\bigcap_n A_n \in T$

D'où le résultat recherché.

A.4 Définition d'une mesure de probabilité

Définition - Mesure de probabilité

Soit (Ω, T) un espace probabilisable.
On appelle *mesure de probabilité* sur (Ω, T) une application $p : T \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall A \in T, p(A) \in [0;1]$
- $p(\Omega) = 1$
- $\forall I$ ensemble dénombrable, $\forall (A_i)_{i\in I} \in T^I$ 2 à 2 disjoints, on a

$$p\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} p(A_i)$$

(σ-additivité)

A.5 La probabilité d'une union est inférieure à la somme des probabilités

Proposition

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé et soient $A, B \in T$.
Alors,
$$p(A\cup B) \leq p(A) + p(B)$$

Démonstration. Montrons que $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

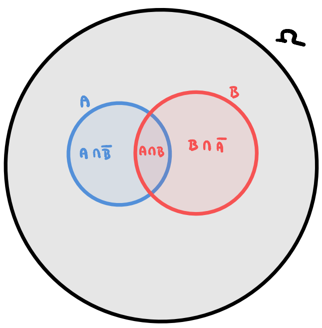
On a $A = (A\cap B) \sqcup (A \cap \bar{B})$
$B = (B\cap A) \sqcup (B\cap \bar{A})$

$\Rightarrow A\cup B = (A\cap B) \sqcup (A\cap \bar{B}) \sqcup (\bar{A}\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B) = \underbrace{P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B})}_{= P(A)} + \underbrace{P(\bar{A}\cap B)}_{= P(B) - P(A\cap B)}$

$= P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{\geq 0}$

d'où $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$



A.6 Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable, idem pour "presque sûr"

Définition - Évènements négligeables et presque sûrs

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A \in T$. Alors :

- A est dit *négligeable* si $p(A) = 0$.
- A est dit *presque sûr* si $p(A) = 1$.

Proposition

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Alors :

1. Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.
2. Une intersection dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûre.

Démonstration.

1. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ avec I dénombrable et $\forall i \in I, p(A_i) = 0$

On a $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$ et $0 \leq p\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \leq \sum_{i\in I} \underbrace{p(A_i)}_{=0}$
≤ 0

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ est négligeable

2. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ avec I dénombrable et $\forall i\in I, p(A_i) = 1$

On a $B = \bigcap_{i\in I} A_i \in T \Rightarrow \bar{B} = \bigcup_{i\in I} \bar{A_i} \in T$

et $0 \leq p(\bar{B}) \leq \sum_{i\in I} \underbrace{p(\bar{A_i})}_{=0} \Rightarrow p(\bar{B}) = 0$

$\Rightarrow p(B) = 1$

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ est presque sûre

A.7 Formule des probabilités totales

Définition - Système quasi-complet d'évènements

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soient I un ensemble dénombrable et $(A_i)_{i\in I} \in T^I$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *système quasi-complet d'évènements* si :

1. Les (A_i) sont 2 à 2 disjoints : $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i\in I} A_i$ est presque sûre : $p\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$.

Proposition - Formule des probabilités totales

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ un système quasi-complet d'évènements avec I dénombrable.
Soit $B \in T$.
Alors,

$$\boxed{p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)}$$

et si pour tout $i \in I, p(A_i) > 0$:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i\in I} p(A_i) \times p_{A_i}(B)}$$

DÉMONSTRATION.

⇝ Si $(A_i)_i$ est un SCE :

On a $B = B \cap \Omega$
$= B \cap \left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right)$
$= \bigsqcup_{i\in I} (B \cap A_i)$

$\Rightarrow$ $p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)$

⇝ Si (A_i) est un SQCE :

posons $\Omega = C \sqcup \overline{C}$ avec $C = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ et $p(C) = 1$

Ainsi, $B = B \cap \Omega$
$= (B \cap C) \sqcup (B \cap \overline{C})$ or $B \cap \overline{C} \subseteq \overline{C}$ $\Rightarrow p(B\cap\overline{C}) \leqslant \underbrace{p(\overline{C})}_{=0}$
$\Rightarrow p(B \cap \overline{C}) = 0$

donc $p(B) = p(B \cap C) + \cancel{p(B \cap \overline{C})}$
$= p(B \cap C)$

d'où $p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)$

A.8 Formule de Bayes

Définition - Probabilité conditionnelle

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors, on définit la probabilité conditionnelle $p_B(A)$, i.e la probabilité que l'évènement A soit réalisé sachant que B l'est, par :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$$

Proposition - Formule de Bayes

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors, si $p(B) \neq 0$, on a

$$\boxed{p_B(A) = p_A(B) \times \frac{p(A)}{p(B)}}$$

DÉMONSTRATION.

On a $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} \times \dfrac{p(A)}{p(B)}$

$= p_A(B) \times \dfrac{p(A)}{p(B)}$ $\longrightarrow$ OK

A.9 Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont également

Définition - Évènements indépendants

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
On dit que A et B sont *indépendants* si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Définition - Famille d'évènements mutuellement indépendants et 2 à 2 indépendants

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I} \in T^I$ avec I dénombrable.

- On dit que les $(A_i)_{i \in I}$ sont *mutuellement indépendants* si :

$$\forall J \subset I \ \underline{\text{fini}}, \text{ on a } p\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

- On dit que les $(A_i)_{i \in I}$ sont 2 à 2 indépendants si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j)$$

- On a bien mut. ind. $\Rightarrow$ 2 à 2 ind. mais **la réciproque est fausse!!**

Proposition

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors,

$$A, B \text{ ind. } \Rightarrow A, \overline{B} \text{ ind.}$$

DÉMONSTRATION.

Supposons $A \perp\!\!\!\perp B$,

On a $A = A \cap \Omega$
$= A \cap (B \sqcup \overline{B})$
$= (A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$
$= p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times \underbrace{(1 - p(B))}_{= p(\overline{B})}$
$= p(A) \times p(\overline{B})$

d'où $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

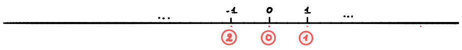
B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}_+$ est dénombrable

Proposition

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION.



On pose $\phi : n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ qui est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$

$\rightarrow$ OK

Proposition

$\mathbb{Q}_+$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION.

↳ Cela revient à montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable

Montrons que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable

Écrivons les elts de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans un tableau que l'on parcourt en diagonale :

	0	1	2	...
0	0	2	5	...
1	1	4	...	
2	3	...		
...	...			

i.e on pose une application $\phi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tq
$\phi((0,0)) = 0$
$\phi((1,0)) = 1$
$\phi((0,1)) = 2$
...

On peut alors la définir "pour chaque diagonale", on prend

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0;n]\!],\quad \phi((n,k)) = \frac{n(n+1)}{2} + k}$$

↳ montrer qu'il s'agit d'une bij...

B.2 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Proposition

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Montrons que $[0;1[$ n'est pas dénombrable.

Représentons chaque élément de $[0;1[$ par son écriture décimale, i.e :

$$\forall x \in [0;1[, \exists!(a_n(x))_n \in [\![0;9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x = 0, a_1(x)a_2(x)\dots$$

On remarque que, dans cette écriture, pour que deux réels diffèrent, il suffit qu'il existe une seule composante de leur écriture qui diffère, i.e :

$$\forall x, y \in [0;1[, x \neq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq. } a_n(x) \neq a_n(y)$$

Supposons alors par l'absurde que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. Alors

$$\exists (x_n) \in [0;1[^{\mathbb{N}} \text{ tq. } [0;1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Exposons alors les éléments de cette suite :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1(x_1)a_2(x_1)a_3(x_1)\dots \\
x_2 &= 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_2)\dots \\
x_3 &= 0, a_1(x_3)a_2(x_3)a_3(x_3)\dots \\
\dots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Construisons alors un $\tilde{x} \in [0;1[$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{x} \neq x_n$.

Posons l'écriture décimale de $\tilde{x} = 0, a_1(\tilde{x})a_2(\tilde{x})a_3(\tilde{x})$

(1) On prend $a_1(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_1(\tilde{x}) \neq a_1(x_1)$

(2) De même, on prend $a_2(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_2(\tilde{x}) \neq a_2(x_1)$

...

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on prend $a_n(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_n(\tilde{x}) \neq a_n(x_n)$

On se retrouve alors dans cette configuration (en bleu les composantes qui diffèrent avec l'écriture décimale de $\tilde{x}$) :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1(x_1)a_2(x_1)a_3(x_1)\dots \\
x_2 &= 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_2)\dots \\
x_3 &= 0, a_1(x_3)a_2(x_3)a_3(x_3)\dots \\
\dots
\end{aligned}$$

On remarque alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{x} \neq x_n$, i.e $\tilde{x} \notin [0;1[$, ce qui est absurde.

$\mathbb{R}$ n'est donc pas dénombrable.

Remarques :

- Ce procédé se prénomme : le *procédé diagonal de Cantor*
- On prend les $a_i(\tilde{x})$ dans $[\![0;8]\!]$ pour éviter le problème d'une suite stationnaire convergeant vers 1.

B.3 Théorèmes de continuité croissante et décroissante

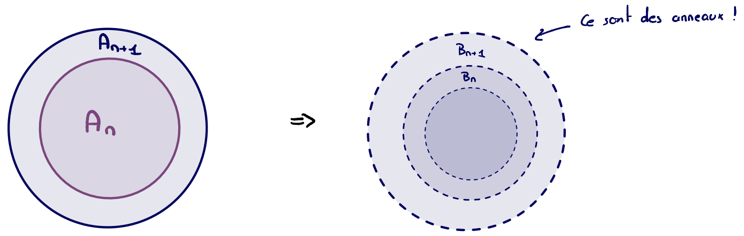
Théorème de continuité croissante

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ croissante par l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

DÉMONSTRATION.

On pose $B_0 = A_0$ et $\forall n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$
$= A_n \cap \overline{A_{n-1}}$



Alors (+)

(1) $\forall p,q \in \mathbb{N}$, $p \neq q \Rightarrow B_p \cap B_q = \emptyset$

(2) $\bigsqcup_{k=0}^{n} B_k = A_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ d'où $\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$

On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (car union dénombrable d'élts de T)

$\Rightarrow p\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)$ existe et comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$,

on a $p\big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(B_n)$

$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p(B_n)$

$= \lim_{N\to+\infty} p\big(\underbrace{\bigsqcup_{n=0}^{N} B_n}_{= A_N}\big)$

$= \lim_{N\to+\infty} p(A_N)$

$\longrightarrow$ OK

(+)

(1) : Soient $p,q \in \mathbb{N}$ tq $p \neq q$, s.p.g $p > q$

Si $B_p \cap B_q \neq \emptyset$: alors $\exists \omega_0 \in B_p \cap B_q$
$\to \omega_0 \in B_p = A_p \cap \overline{A_{p-1}}$
$\to \omega_0 \in B_q = A_q \cap \overline{A_{q-1}}$
$\subset A_q$
$\subset A_{p-1}$ car $p-1 \geq q$ et (A_n) croissante

$\Rightarrow \omega_0 \in \overline{A_{p-1}} \cap A_p$ $\to$ ABS

donc les (B_p) sont bien 2 à 2 disj.

(2) : On a que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k \subset A_k$
$\Rightarrow \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$

alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\omega \in A_k$

on peut ainsi définir $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$

si $k_0 = 0$: $\omega \in A_0 = B_0$
$\in \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_k$

Sinon : $\omega \in A_{k_0}$ et $\omega \notin A_{k_0-1}$
$\Rightarrow \omega \in A_{k_0} \setminus A_{k_0-1} = B_{k_0}$
$\Rightarrow \omega \in \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_k$

D'où $\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

Théorème de continuité décroissante

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ décroissante par l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

DÉMONSTRATION.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \overline{A_n}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$
$\Rightarrow C_n \subset C_{n+1}$ "le complémentaire renverse l'inclusion"

Ainsi, (C_n) est croissante par l'inclusion.

DONC, d'après le th. de continuité croissante :

$p\big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\big) = \lim_{n\to+\infty} p(C_n)$ (A)

or, $\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{A_k} = \overline{\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k}$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(C_n) = p(\overline{A_n}) = 1 - p(A_n)$

Ainsi, (A) $\Rightarrow$ $p\big(\overline{\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k}\big) = \lim_{n\to+\infty} 1 - p(A_n)$

i.e $1 - p\big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\big) = 1 - \lim_{n\to+\infty} p(A_n)$

D'où $p\big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\big) = \lim_{n\to+\infty} p(A_n)$

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Une tribu infinie n'est pas dénombrable

Proposition

Une tribu infinie n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Lemme 1 Soit Ω un ensemble et soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ une partition de Ω

On pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\sigma(A) :=$ la plus petite σ-algèbre engendrée par A, i.e. la plus petite σ-algèbre contenant A.

On peut donc montrer que

$$\sigma(A) = \bigcap_{\substack{T\ \sigma\text{-alg.} \\ A \subset T}} T$$

et donc $\# \sigma(\{A_1, \dots, A_n\}) = 2^n$

Démo :

Posons $A = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket) \right\}$

ALORS $A = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$: en effet

- toute tribu engendrée par $\{A_1, \dots, A_n\}$ contient toutes les unions possibles de ces élts (stable par union finie)

  $\Rightarrow$ toute σ-algèbre contenant $\{A_1, \dots, A_n\}$ contient A

- De plus, $\{A_1, \dots, A_n\}$ forme une partition de Ω.

  Donc, pour tout $B \in A$, $B^c \in A$ car si $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ avec $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket)$, on a $B^c = \bigcup_{i \in I^c} A_i$ $\underline{\in A}$

  (stable par complémentaire)

  $\Rightarrow$ $A = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$

Remarquons alors que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket) & \longrightarrow & A \\ I = \{i_1, \dots, i_k\} & \longmapsto & \bigcup_{i \in I} A_i \end{array}$$

est une bijection de $\llbracket 1;n \rrbracket$ dans A

or $\# \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket) = 2^n$

D'où $\# \sigma(\{A_1, \dots, A_n\}) = 2^n$

$\rightsquigarrow$ Soient Ω un ensemble non-vide et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

Pour $x \in \Omega$, on définit

$$F_x := \{ T \in \mathcal{T} \mid x \in T \} \qquad \text{et} \qquad [x] := \bigcap_{F \in F_x} F$$

Montrons que $\forall x,y \in \Omega,\ x \notin [y] \Rightarrow y \notin [x]$

Soient $x,y \in \Omega$, supposons que $x \notin [y]$.

Alors, $\exists A \in \mathcal{T}$ tq $x \notin A$ et $y \in A$. Ainsi, $x \in A^c$ et $y \notin A^c$ $\Rightarrow y \notin \bigcap_{F \in F_x} F_x$ → A^c est compris dans l'intersection

$\Rightarrow y \notin [x]$ → OK

Ainsi, $x \in [y] \Rightarrow [x] = [y]$

DONC $x \sim y \Leftrightarrow x \in [y]$ est une relation d'équivalence (reflexivité et transitivité immédiatement obtenues)

Montrons que $P = \{[x] \mid x \in \Omega\}$ est une partition de Ω

↳ partition engendré par la relation $\sim$ $\Rightarrow \forall x,y \in \Omega,\ [x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

→ OK

Soit $T \in \mathcal{T}$. Montrons que $T = \bigcup_{x \in T} [x]$

⇝ D'une part, on a bien $T \subset \bigcup_{x \in T} [x]$ car $\forall x \in T,\ x \in [x]$ par reflexivité de $\sim$

⇝ D'autre part, pour $x \in T$, $T \in F_x$ et $[x] = \bigcap_{F \in F_x} F \subset T$ d'où $\bigcup_{x \in T} [x] = T$

d'où $T = \bigcup_{x \in T} [x]$

Ainsi, si $\mathcal{T}$ est infinie, d'après le lemme 1, si $\# P = \# \{[x] \mid x \in \Omega\}$
$= n$

ALORS $\# \mathcal{T} = 2^n < +\infty$
↳ ABS

donc $P = \{[x] \mid x \in \Omega\}$ est infini.

Supposons que $\mathcal{T}$ soit dénombrable :

□ Mq $\forall x \in \Omega,\ [x] \in \mathcal{T}$: puisque $\mathcal{T}$ est dénombrable, $[x]$ est une intersection dénombrable d'elts de $\mathcal{T}$

$\Rightarrow [x] \in \mathcal{T}$

or $P = \{[x] \mid x \in \Omega\}$ donc $P \subset \mathcal{T}$ avec $\mathcal{T}$ dénombrable

$\Rightarrow$ P dénombrable

□ Posons $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, posons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \sigma(\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathcal{T} \\ S & \longmapsto & \bigcup_{k \in S} P_k \end{array}$

Alors φ est une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{T}$

DONC

$\sigma(\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est non dénombrable

$\Rightarrow \mathcal{T}$ comprend une partie non dénombrable

$\Rightarrow \mathcal{T}$ non dénombrable, ABS

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 1 On souhaite ranger sur une étagère 14 livres de mathématiques (distincts), 3 livres de physique, et 11 d'informatique. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

1) Si les livres sont regroupés par matières, un tel rangement est entièrement déterminé par :

- le rangement des maths : $14!$ configs possibles
- le rangement de l'info : $11!$ configs possibles
- le rangement de la physique : $3!$ —
- L'ordre des matières : $3!$ configs possibles

Par principe multiplicatif, $N = (3!)^2 \times 14! \times 11!$

2) Si seuls les livres de maths doivent être groupés, un tel rangement est entièrement déterminé par :

En considérant le grp de maths comme un seul elt, cela revient à ranger $14+1 = 15$ elts.

- le rangement des 15 elts : $15!$ configs possibles
- le rangement de ces livres de maths : $14!$ configs possibles

Par principe multiplicatif, $N = 14! \times 15!$

Exercice 2 Soit A un ensemble fini. Déterminer $\sum\limits_{X \subset A} \#X$

Corrigé : Notons $n = \#A$

Ainsi, $$S = \sum_{X \subseteq A} \#X = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \subseteq A \\ \#X = k}} \underbrace{\#X}_{=k} = \sum_{k=0}^{n} k \times \underbrace{\sum_{\substack{X \subseteq A \\ \#X = k}} 1}_{=\binom{n}{k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= n \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$$

$$= n \times 2^{n-1}$$

Finalement, $\sum\limits_{X \subseteq A} \#X = n \times 2^{n-1}$

Exercice 3 (Mines Télécom MP 2022) Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$
2. Soit $p \in]0,1[$. On pose pour tout $n \geq k$, $P(n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$
Montrer que P définit bien une loi de probabilité.

Corrigé :

(1) On a pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

une fonction DSE étant $\mathcal{C}^\infty$ sur son ouvert de convergence,
on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

dérivée k-ième

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

d'où $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

(2) On a $\Omega = [\![k;+\infty[\![$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et donc pour $n \in \Omega$, $P(\{n\}) = \binom{n-1}{k-1} p^n (1-p)^{n-k}$

⇝ Mq $\sum_{n=k}^{+\infty} P(\{n\}) = 1$

On a
$$\sum_{n=k}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{n-k}$$
$$= p^k \sum_{n=k-1}^{+\infty} \binom{n}{k-1} (1-p)^{n-k+1}$$
$$= p^k \sum_{n=k-1}^{+\infty} \binom{n}{k-1} (1-p)^{n-(k-1)}$$

Q1 !! ⟶
$$= p^k \frac{1}{(\cancel{1}-(\cancel{1}-p))^{k\cancel{-1+1}}}$$
$$= \frac{p^k}{p^k}$$

D'où $\sum_{n=k}^{+\infty} P(\{n\}) = 1$

⟶ OK

Exercice 4 De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes qui comporte exactement 2 dames et 2 cœurs ?

Corrigé :

Une telle main est entièrement déterminée par :

⇝ Dame de ♡ choisie par le tirage de dame :

- Choix des dames : $\binom{3}{1}$
- Choix des ♡ : $\binom{12}{1}$ ← 13 cœur − dame
- Choix de la dernière carte : il reste $52 - 13 - 3 = 36$ (cœur, dames)

Donc par principe mult. : $\binom{3}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{36}{2}$

⇝ Dame de ♡ non choisie :

- Choix des dames : $\binom{3}{2}$
- Choix des ♡ : $\binom{12}{2}$
- Choix de la dernière carte : il reste $52 - 13 - 3 = 36$ cartes

Par principe multiplicatif, $\binom{3}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{1}$

Finalement, par principe additif, on a

$$N = \binom{3}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{36}{2} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{1}$$ i.e $N = 29\,808$

Exercice 5 Quel est le plus probable ?

1. Obtenir au moins un as en lançant 4 dés.
2. Obtenir au moins deux as en lançant 10 dés.
3. Obtenir au moins une paire d'as en lançant 25 paires de dés.

Corrigé :

1 4D D_1, D_2, D_3, D_4

$\Omega = [\![1;6]\!]^4$ $\#\Omega = 6^4$

$\bar{A}$: "pas d'as"

$\#\bar{A} = 5^4$ $\Rightarrow P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

2 10 D

B : " au moins 2 as "

$\Omega = [\![1;6]\!]^{10}$ $\#\Omega = 6^{10}$

$\bar{B} = C_0 \sqcup C_1$

$\# C_0 = 5^{10}$

$\# C_1 = 10 \times 5^9$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5^{10} + 10 \cdot 5^9}{6^{10}} \right)$$

3 On lance les paires individuellement...

Exercice 6 Soit (Ω, A, p) un espace probabilisé. On note $B = \{X \in A \mid p(X) \in \{0,1\}\}$.
Montrer que B est une tribu.

Corrigé :

Revenons à la définition de tribu :

- $\emptyset \in B$: comme A est une tribu, on a $\emptyset \in A$ et $p(\emptyset) = 0$ $\Big\} \Rightarrow \underline{\emptyset \in B}$

- B est stable par complémentaire. Soit $C \in B$, mq $\bar{C} \in B$

  $C \in B \Rightarrow C \in A$ et $p(C) \in \{0,1\}$
  $\Rightarrow p(\bar{C}) = 1 - p$ et $p(C) \in \{0,1\}$
  $\Rightarrow p(\bar{C}) \in \{1,0\}$
  $\Rightarrow \bar{C} \in B$ $\quad \to$ OK

- B est stable par union dénombrable. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$, mq $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in B$

  comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et que A est une tribu : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in A$

  Notons $\hat{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, mq $p(\hat{B}) \in \{0,1\}$

  On a $\hat{B} = \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ p(B_n)=0}} B_n \right) \sqcup \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ p(B_n)=1}} B_n \right)$

  σ-add $\Rightarrow p(\hat{B}) = \underbrace{p\left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ p(B_n)=0}} B_n \right)}_{= 0 \text{, cf. demos de cours}} + \underbrace{p\left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ p(B_n)=1}} B_n \right)}_{\geq 1}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $p(B_n) = 1$, $B_n \subset \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ p(B_k)=1}} B_k$

  si cette union $\neq \emptyset$

  $\Rightarrow \underbrace{p(B_n)}_{=1} \leq p\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ p(B_k)=1}} B_k \right)$

  or $\forall C \in B$, $p(C) \in [0;1]$ $\Rightarrow \forall C \in B$, $p(C) \geq 1 \Rightarrow p(C) = 1$

  $\Rightarrow p(\hat{B}) \in \{0,1\}$

  $\Rightarrow \tilde{B} \in B$ $\quad \to$ OK

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 7 Démonter les formules suivantes par une expérience, ou autre méthode :

1. $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$
2. $\displaystyle\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n}\binom{k-1}{r-1}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$
4. $\displaystyle 2^p\binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$
5. $\displaystyle 0 = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$
6. $\displaystyle\left(1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\dots\right)^2+\left(\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\dots\right)^2 = 2^n$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$

Corrigé :

1. Choisir r elts parmi 2 ensembles de cardinaux m et n.
↳ cf. exo 22

2. rec sur n :

on = 1 : $r=1 \longrightarrow \sum_{k=r}^{n}\binom{k-1}{r-1} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1}$ ↳ H_1 vraie

• $H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Soit $r \in [\![1 ; n+1]\!]$,

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$\overset{H.R}{\longrightarrow} = \binom{n}{r-1} + \sum_{k=r}^{n}\binom{k-1}{r-1}$$

$$= \sum_{k=r}^{n+1}\binom{k-1}{r-1}$$

↳ H_{n+1} vraie

3. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}$$

$$= n \times 2^{n-1}$$ ⟶ ok

4. $$2^p\binom{n}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\times\binom{n}{p}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}\times\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!}\times\frac{\cancel{p!}\,n!}{k!\cancel{p!}(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{n-k}{p-k}\times\binom{n}{k}$$ ⟶ ok

5. $$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}\times\frac{\cancel{(n-k)!}}{(p-k)!(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}\times\frac{1}{p!}\times\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}\times(-1)^k$$

$$= \binom{n}{p}\times\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k$$

$$= \binom{n}{p}\times(1-1)^p$$

$$= 0$$ ⟶ ok

6. Considérons $\displaystyle S = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\right)^2$

et intéressons nous à $T = (1+i)^n$

On a
$$T = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}i^k + \sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}i^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{j}(-1)^j + i\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{j}(-1)^j$$

Ainsi, $|T| = \sqrt{\mathrm{Re}(T)^2+\mathrm{Im}(T)^2}$

d'où $|T|^2 = S$

or $|T| = |(1+i)^n|$
$= |1+i|^n$
$= \sqrt{2}^n$

d'où $S = 2^n$

7. rec.

$H_n \Rightarrow H_{n+1}$: $$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{(k+1)!} = \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$$

$$\overset{H.R}{\longrightarrow} = \frac{n+1}{(n+2)!} + 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1 + \frac{n+1}{(n+2)!} - \frac{n+2}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$ ⟶ ok

8. On voit bien en $(n+1)!$ le résultat d'une somme télescopique,

$$(n+1)!-1 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)!-k! = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k\times((k+1)-1)\times(k-1)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\times k\times(k-1)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\times k!$$ ⟶ ok

Exercice 8 (Mines MP 2021)

1. Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \subset Y$?
2. Dans une urne contenant n boules numérotées 1 à n, on tire une poignée de boules, que l'on remet ensuite dans l'urne. On tire une deuxième poignée de boules. Quelle est la probabilité de tirer deux poignées de boules distinctes, i.e aucune boule de la deuxième poignée n'a été tirée à la première ?

Corrigé :

1 On note $A = \{(X,Y) \in P(E)^2 \mid X \subset Y\}$ et $n = \# E$

On prend $k \in [\![0;n]\!]$, notons

$$A_k = \{(X,Y) \in A \mid \# Y = k\}$$

Ainsi, un élément $(X,Y) \in A_k$ est entièrement déterminé par :

- $\rightsquigarrow$ le choix des k elts de Y : $\binom{n}{k}$ choix
- $\rightsquigarrow$ le choix de X : 2^k choix

$\Rightarrow \# A_k \underset{\text{principe mult.}}{=} \binom{n}{k} 2^k$

Enfin, $A = \bigsqcup_{0 \leq k \leq n} A_k \Rightarrow \# A = \sum_{0 \leq k \leq n} \# A_k$

D'où $\# A = 3^n$

2 On prend $\Omega = \mathcal{P}([\![1;n]\!])^2$ et on note $A = \{(P_1,P_2) \in \Omega \mid P_1 \cap P_2 = \emptyset\} = \underbrace{\{(P_1,P_2) \in \Omega \mid P_1 \subset \overline{P_2}\}}$

$= \{(P_1,P_2) \in \Omega \mid P_1^c \cap P_2^c = \emptyset\}$

On a $\# \Omega = (2^n)^2$ i.e $\# \Omega = 4^n$

$\# A = 3^n$

$$\underset{\text{équiproba}}{\Rightarrow} \quad p(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Exercice 9 Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p?

Corrigé :

Une telle répartition est entièrement déterminée par :

- La première partie : $\binom{np}{p}$ choix
- La deuxième partie : $\binom{(n-1)p}{p}$ choix

  $\vdots$

- La n-ième partie : $\binom{p}{p} = 1$ choix

En dénombrant de cette manière, il ne faut pas oublier de diviser par le nombre de permutations possibles (donc ici $\#S_n$)

Ainsi, par principe multiplicatif, on a

$$S = \frac{1}{n!} \times \prod_{k=0}^{n-1} \binom{p(n-k)}{p}$$

$$= \frac{1}{\#S_n} \times \binom{np}{p} \times \binom{(n-1)p}{p} \times \dots \times \binom{2p}{p} \times \binom{p}{p}$$

produit télescopique !

$$= \frac{1}{n!} \times \frac{(np)!}{p!\cancel{((n-1)p)!}} \times \frac{\cancel{((n-1)p)!}}{p!\cancel{((n-2)p)!}} \times \dots \times \frac{\cancel{(2p)!}}{p!\,\cancel{p!}} \times \frac{\cancel{p!}}{p!}$$

$$= \frac{(np)!}{n!} \times \frac{1}{(p!)^n}$$

Finalement, il existe $\frac{(np)!}{n!} \times \frac{1}{(p!)^n}$ partitions de card. p d'un ensemble à np éléments.

Exercice 10 On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n et de k balles indiscernables. On range les balles dans les boîtes et on se demande quel est le nombre de façons possibles de le faire.

Corrigé :

Exercice 11 On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ et s un réel strictement supérieur à 1. On munit Ω de la tribu $T = P(\Omega)$. On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On munit T de la loi telle que : $p(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s).n^s}$

1. Montrer que c'est bien une probabilité.
2. Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, sont indépendants dans leur ensemble.
3. Exprimer l'évènement « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction $\overline{A_p}$.
4. On numérote les nombres premiers dans l'odre croissant : $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$, et on note $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}$.
   Montrer que $p(\{1\}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$
5. En déduire $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})}$

Corrigé :

(1) On a $\sum_{n\geq 1} p(\{n\}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\zeta(s) n^s}$

$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$

$= \frac{1}{\cancel{\zeta(s)}} \times \cancel{\zeta(s)}$

D'où $\sum_{n\geq 1} p(\{n\}) = 1$

$\rightarrow$ OK

(2) A_n : "être un multiple de n"

Mq les $(A_p)_{p\in\mathbb{P}}$ sont indépendants dans leur ensemble

ie $\forall p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$, 2 à 2 $\neq$, on a $p\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_{p_i}\right) = \prod_{1\leq i\leq k} p(A_{p_i})$

or pour $p \in \mathbb{P}$, $A_p = \{np \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\Rightarrow p(A_p) = p\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{np\}\right)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} p(\{np\})$

$\Rightarrow p(A_p) = \frac{1}{p^s}$

$\Rightarrow \prod_{1\leq i\leq k} p(A_{p_i}) = \left(\prod_{1\leq i\leq k} \frac{1}{p_i}\right)^s = p(A_{p_1 \cdots p_k})$

$\rightsquigarrow$ Mq $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \cdots p_k}$

$\supseteq$: Soit $n \in A_{p_1 \cdots p_k}$, on a $p_1 \cdots p_k \mid n$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1;k]\!]$, $p_i \mid n$

$\Rightarrow n \in A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k}$

$\rightarrow$ OK

$\subseteq$: Soit $n \in A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k}$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1;k]\!]$, $p_i \mid n$

or les (p_i) sont premiers entre eux 2 à 2

Th. Gauss $\Rightarrow p_1 \cdots p_k \mid n$

$\Rightarrow n \in A_{p_1 \cdots p_k}$

$\rightarrow$ OK

$\rightsquigarrow$ DONC, on a bien $p\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_{p_i}\right) = \prod_{1\leq i\leq k} p(A_{p_i})$

$\rightarrow$ OK

(3) B : "n'être multiple d'aucun nombre premier"

$\Rightarrow B = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \overline{A_p} = \{1\}$

(4) On a (d'après Q2.) $(A_{p_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ mut. ind

donc $(\overline{A_{p_k}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ mut. ind.

$\Rightarrow P(E_n) = \prod_{i=1}^{n} p(\overline{A_{p_k}}) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$

par construction (E_n) est décroissante selon l'inclusion : $E_{n+1} \subset E_n$

DONC, d'après le théorème de continuité décroissante :

$\lim_{n\to+\infty} p(E_n) = p\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = p\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}}\right)$

$= p\left(\bigcap_{p\in\mathbb{P}} \overline{A_p}\right)$

$= p(B)$

$= p(\{1\})$

Donc, par unicité de la limite :

$p(\{1\}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$

(5) Enfin, on a par déf. de p que $p\{1\} = \frac{1}{\zeta(s)}$

D'où

$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right)$

Exercice 12 (Mines MP 2021) Soient $p \in]0,1[$ et $\alpha \in \left]0, \frac{1}{p} - 1\right[$

Pour $n \geq 1$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est αp^n.

1. Quelle est la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant ?
2. Quelle est la probabilité qu'une famille ait k garçons ?
3. Quelle est la probabilité qu'une famille ~~ait~~ avec au moins un garçon ait au moins deux garçons ?

Corrigé :

1) Notons E_n : " avoir exactement n enfants "

On a $\Omega = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n \Rightarrow \underbrace{p(\Omega)}_{=1} = \sum_{n\geq 0} p(E_n)$

union disj.

$\Rightarrow p(E_0) = 1 - \sum_{n \geq 1} p(E_n)$

$= 1 - \alpha \sum_{n\geq 1} p^n$

D'où $p(E_0) = 1 - \alpha \dfrac{p}{1-p}$

2) On pose G_k : " avoir exactement k garçons "

On a $\Omega = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$ donc pour $k \in \mathbb{N}$, $G_k = G_k \cap \Omega$

$= \bigsqcup_{n\geq 0} G_k \cap E_n$

$= \bigsqcup_{n \geq k} E_n \cap G_k$

$$\Rightarrow p(G_k) = \sum_{n\geq k} p(E_n \cap G_k)$$

$$= \sum_{n \geq k} \underbrace{p(E_n)}_{\alpha p^n} \times \underbrace{p_{E_n}(G_k)}_{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

s'obtient avec une loi binomiale ou avec du dénombrement

$$= \alpha \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{p}\right)^k \underbrace{\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}}_{= \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{k+1}}}$$

avec un DSE

$$= \alpha \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^k \left(1 - \frac{p}{2}\right)^k}$$

→ moyen sûr du résultat...

3) G_k^- : " avoir au moins k garçons "

On a $p_{G_1^-}(G_2^-) = \dfrac{p(G_2^- \cap G_1^-)}{p(G_1^-)} = \dfrac{\overbrace{p_{G_2^-}(G_1^-)}^{=1} \times p(G_2^-)}{p(G_1^-)}$

$\neq 0$!!

$$= \frac{p(G_2^-)}{p(G_1^-)}$$

Raisonnons avec le complémentaire : $\overline{G_1^-} = G_0$

$\Rightarrow 1 - p(G_1^-) = p(G_0)$

$\Rightarrow p(G_1^-) = 1 - p(G_0)$

$= 1 - \dfrac{\alpha}{1 - \frac{p}{2}}$

$\overline{G_2^-} = G_0 \sqcup G_1$

$\Rightarrow p(G_2) = 1 - p(G_0) - p(G_1)$

...

↳ terminer le calcul

ABSL ;)

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

Exercice 13 Soit n un entier naturel non nul.

On appelle *dérangement* de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention : on pose $D_0 = 1$.

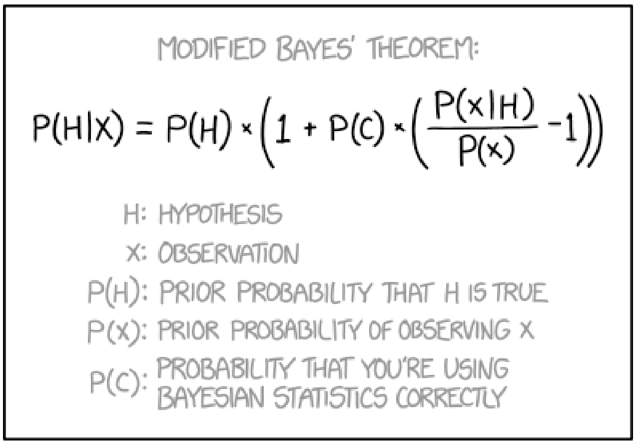
1. Calculer D_1, D_2, D_3 et D_4.
2. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$
3. Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$

Corrigé :

Exercice 14 Si E est un ensemble, on appelle *singletons* les ensembles $\{e\}$ avec $e \in E$.

1. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E?
2. À supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (i.e ensembles à deux éléments) de E.
3. Une partie A de E étant fixée, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A?
4. Soient G, F deux tribus de E. Décrire simplement la tribu engendrée par $F \cap G$, puis de la tribu engendrée par $F \cup G$.
5. Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $A = \{[0,2];[1,3]\}$

Corrigé :


MODIFIED BAYES' THEOREM:
P(H|X) = P(H) × (1 + P(C) × (P(X|H) / P(X) − 1))
H: HYPOTHESIS
X: OBSERVATION
P(H): PRIOR PROBABILITY THAT H IS TRUE
P(X): PRIOR PROBABILITY OF OBSERVING X
P(C): PROBABILITY THAT YOU'RE USING BAYESIAN STATISTICS CORRECTLY