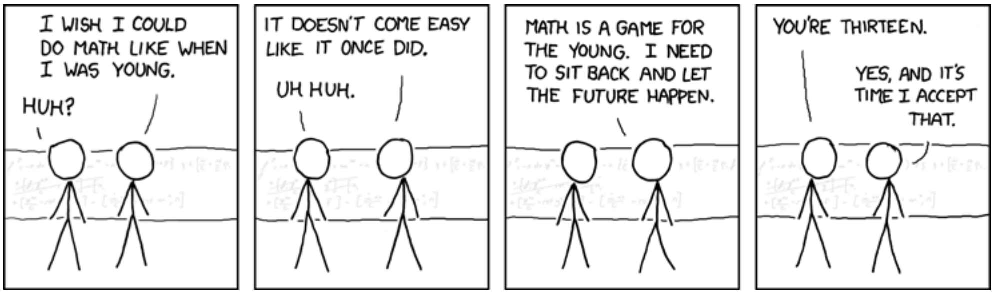
MPI* Maths

Théorèmes d'analyse

Les fondamentaux



Olivier Caffier

Séries numériques ou à valeurs vectorielles

Proposition - Série de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Proposition - CV ABS ⇒ CV

Soient $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie et $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.
Alors,

$$\sum_n u_n \text{ converge absolument } \Rightarrow \sum_n u_n \text{ converge}$$

Théorème - Critère de convergence des séries alternées (CCSA)

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ est du signe de $(-1)^n$.

H_2 $(|u_n|)_n$ est décroissante.

H_3 $|u_n| \to 0$

ALORS

C_1 $\sum_n u_n$ converge

C_2 R_n est du signe de u_{n+1}

et $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq |u_{n+1}|$

Proposition - Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Alors :

1. Si $l < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien dire…

Théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent)

Soient $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum_n v_n$ converge, ALORS $\begin{cases} \sum_n u_n \text{ converge} \\ R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v)) \end{cases}$
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum_n v_n$ converge, ALORS $\begin{cases} \sum_n u_n \text{ converge} \\ R_n(u) = o(R_n(v)) \end{cases}$
3. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum_n v_n$ converge, ALORS $\begin{cases} \sum_n u_n \text{ converge} \\ R_n(u) \sim (R_n(v)) \end{cases}$

Théorème de Cesàro

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to l \in \mathbb{C}$.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = l$$

Proposition - Comparaison suite-série

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.
Alors,

$$(u_n)_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_n u_{n+1} - u_n \text{ converge}$$

Proposition - Comparaison série-intégrale

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.
Notons la fonction $f : \mathbb{N} \to E$ qui dénote (u_n) (par ex. si $u_n = n+1$, on prendra $f : x \mapsto x+1$).
Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \text{ et } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ sont de même nature.}$$

Théorème de sommation par paquets (2 versions)

Soit $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ avec J fini ou dénombrable et $\forall j \in J, I_j$ fini ou dénombrable.
Alors,

1. Soit $(u_i)_i \in (\mathbb{R}_+)^I$, alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big)$$

2. Soit $(u_i)_i \in \mathbb{C}^I$ qu'on suppose sommable, alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big)$$

Proposition - Formule de Stirling

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Proposition - Séries de Bertrand

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge } \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \textbf{OU} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

Fonctions à valeurs vectorielles

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Soit $a \in A$
Alors :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$$

Proposition

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.
Alors

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f\ \mathcal{C}^0 \text{ sur } A$$

Proposition - Une équivalence pratique

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

On suppose $f\ \mathcal{C}^0$ sur I. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1 \text{ en } a.$$

Dans ce cas, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

Définition - Somme de Riemann

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application **continue ou continue par morceaux**.
Soient $[a;b] \subset I$ et $n \in \mathbb{N}$.

(1) On appelle Somme de Riemann (à gauche) la quantité :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

(2) Généralement, on aura $a = 0$ et $b = 1$, d'où

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq. $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$$

Théorème - Égalité des Accroissements Finis

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]a;b[$.
Alors :

$$\text{Il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème - Inégalité des Accroissements Finis

(mm notations). On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+$ tels que $m \leq f' \leq M$.
Alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, x \geq y \Rightarrow m(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x-y)$$

Proposition - Formule de Taylor-Young

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, alors :
$\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|b-a|^n)$$

Proposition - Formule de Taylor Reste Intégral

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors :
$\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Proposition - Caractérisation séquentielle d'un point adhérent à une partie

(mm notations)
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a$$

Proposition - Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$(x_1 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$. Soit $a \in I$.
Alors, l'application

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$.

LE mémo indispensable

➢ **Inégalités**

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$,
$$\sin(x) \leq x$$
- $\forall x \in]1;+\infty[$,
$$\ln(1+x) \leq x$$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$
- $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,
$$(x_1 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$$

➢ **Fonctions**

- f $\mathcal{C}^0$, dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 :
$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- f $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0$:
$$f : x \longmapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Suites et séries de fonctions

Théorème de continuité (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

Théorème de la double limite (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Soit $a \in I$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite finie en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 $(l_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$

C_2 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n = l$

i.e $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

Rmq : On échange les limites !

Théorème d'intégration sur un segment (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C_2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, E)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H_3 $(f_n')_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C_2 $f' = g$

C_3 $\forall [a; b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a; b]$

Théorème de continuité (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 $\sum_n l_n$ converge

C_2 $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

Théorème d'intégration termes à termes sur un segment (Série de fonctions)

Soit $I=[a;b]\subset\mathbb{R}$ un segment, soit $(E,\|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n\in\mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x\mapsto\sum\limits_n f_n(x)$.

H1 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H2 $\sum\limits_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C1 S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C2 $\displaystyle\int_a^b S(x)dx=\sum_n\int_a^b f_n(x)dx$

Théorème de « primitivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E,\|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n\in\mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f\in\mathcal{F}(I,E)$où $I=[a;b]\subset\mathbb{R}$ est un segment.
Soit $c\in[a;b]$.

H1 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C2 $(F_n)_n$ CVU vers F sur I.

avec $F_n : x\mapsto\int_c^x f_n(t)dt$ et $F : x\mapsto\int_c^x f(t)dt$.

Théorème de « dérivation » (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E,\|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n\in\mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x\mapsto\sum\limits_n f_n(x)$.

H1 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H2 $\sum\limits_n f_n$ CVS sur I.

H3 $\sum\limits_n f_n'$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C1 S est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C2 $\forall x\in I, S'(x)=\sum\limits_n f_n'(x)$

Théorème de « dérivation » -> extension $\mathcal{C}^k$ (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^k$ sur I.

H$_2$ $\forall p \in [\![0; k-1]\!] \sum_n f_n^{(p)}$ CVS sur I.

H$_3$ $\sum_n f_n^{(k)}$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C$_1$ S est $\mathcal{C}^k$ sur I.

C$_2$ $\forall p \in [\![0; p]\!], \forall x \in I, S^{(p)}(x) = \sum_n f_n^{(p)}(x)$

Théorème d'approx uniforme d'une fonction continue sur un segment par fonctions en escalier

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier."

i.e, en considérant $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists (g_n) \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_{\text{esc}} \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{K}) \text{ tq. } \|f - g_{\text{esc}}\|_\infty \leq \varepsilon$$

Théorème de Weierstrass

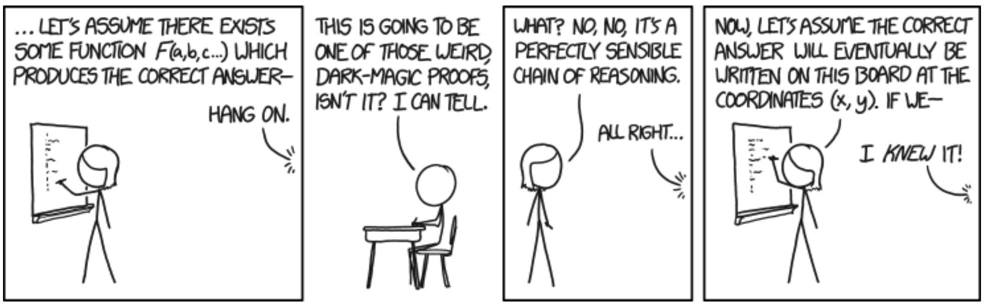
"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiales."

i.e, en considérant $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists (P_n)_n \in \tilde{\mathbb{K}}[X]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (P_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists P_\varepsilon \in \tilde{K}[X] \text{ tq. } \|f - P_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$$


… LET'S ASSUME THERE EXISTS SOME FUNCTION F(a,b,c…) WHICH PRODUCES THE CORRECT ANSWER—
HANG ON.
THIS IS GOING TO BE ONE OF THOSE WEIRD, DARK-MAGIC PROOFS, ISN'T IT? I CAN TELL.
WHAT? NO, NO, IT'S A PERFECTLY SENSIBLE CHAIN OF REASONING.
ALL RIGHT…
NOW, LET'S ASSUME THE CORRECT ANSWER WILL EVENTUALLY BE WRITTEN ON THIS BOARD AT THE COORDINATES (x, y). IF WE—
I KNEW IT!