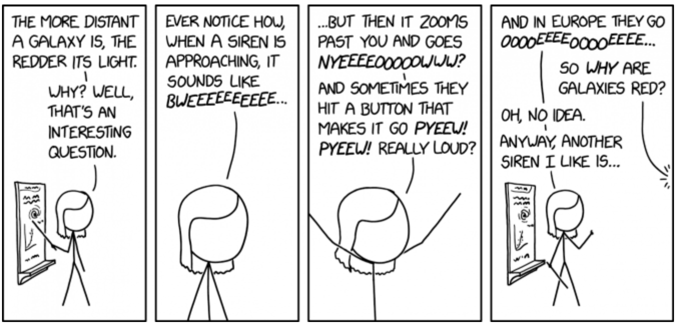
MPI* Physique

TD Ondes Électromagnétiques

Réflexion sur un conducteur parfait



Olivier Caffier

Table des matières

Ce que Faidherbe enseigne, ailleurs ne s’apprend pas.

1 Réflexion d'une onde polarisée circulairement

Soit une OPPM polarisée circulairement se propageant dans le vide selon les z décroissants jusqu'à un métal parfaitement conducteur occupant le demi-espace $z < 0$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t + kz)\vec{u}_y \quad (1)$$

1. Calculez le champ magnétique incident et le vecteur de Poynting incident.
2. Prouvez l'existence d'une onde réfléchie dont vous calculerez les champs et le vecteur de Poynting.
3. Déterminez la structure de l'onde totale (champs, vecteur de Poynting) dans le demi-espace $z > 0$.
4. Calculez la charge surfacique et le courant surfacique sur $z = 0$.
5. La polarisation de l'onde incidente est-elle circulaire gauche ou droite ? Que devient-elle après réflexion ?

Corrigé :

1. Repassons en complexe :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \Re\left(E_0 e^{i(\omega t+kz)}\vec{u}_x + E_0 e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i(\omega t+kz)}\vec{u}_y\right)\\ &= \Re\left(E_0 e^{i(\omega t+kz)}\begin{pmatrix}1\\ e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\vec{k} = -k\vec{u}_z$, la relation de structure nous dit que $\underline{\vec{B}_i} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}_i}}{\omega}$, d'où :

$$\boxed{\underline{\vec{B}_i} = -\frac{E_0}{c}e^{i(\omega t+kz)}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}}$$

Et $\langle\vec{\Pi}_i\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\Re\left(\underline{\vec{E}_i}\wedge\underline{\vec{B}_i}^*\right)$, on arrive finalement à :

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}_i\rangle = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}_z}$$

2. C'est du cours $\vec{E}$ est tangentiel au miroir et il est continue en $z = 0$ pour tout t (d'après la relation de passage).
Or, comme il s'agit d'un métal parfait, $\vec{E}(0^-, t) = \vec{0}$, ce qui impliquerait alors que $\vec{E}(0^+, t) = \vec{0}$ pour tout t.
Ainsi, si l'on suppose qu'il n'y a pas d'onde réfléchie, on en déduit que $\vec{E}_i(0^+, t) = \vec{0}$ pour tout t, donc $E_0 = 0$: ce qui est absurde.

d'où l'existence d'une onde réfléchie.

On a donc les champs suivants (le principe de Curie nous garantit les mêmes pulsations) :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\vec{E}_r} &= E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\vec{B}_r} &= -\dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}}$$

Le vecteur de Poynting quant à lui vaut :

$$\boxed{\langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z}$$

On retrouve alors la relation $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = -\langle \vec{\Pi}_r \rangle$: toute l'énergie de l'onde incidente a été renvoyée en arrière.

3. Comme on s'amuse à le rappeler à chaque TD : $\vec{\Pi}$ n'est pas additif! On doit donc d'abord calculer $\vec{E}_{\text{tot}}$ et $\vec{B}_{\text{tot}}$ avant toute manuvre ;)
On trouve :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_{\text{tot}} &= E_0 e^{i\omega t} \left(e^{ikz} - e^{-ikz} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2E_0 e^{i\omega t} \sin(kz) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}} = 2E_0 \left(-\sin(\omega t)\sin(kz)\vec{u}_x + \cos(\omega t)\sin(kz)\vec{u}_y \right)}$$

De même, on trouve :

$$\boxed{\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{2E_0}{c} \left(\sin(\omega t)\cos(kz)\vec{u}_x - \cos(\omega t)\cos(kz)\vec{u}_y \right)}$$

4. Comme mentionné en Q2, la relation de passage avec $\vec{E}$ tangentiel nous donne directement que :

$$\boxed{\sigma = 0}$$

Pour $\vec{j}_s$, utilisons la relation de passage pour $\vec{B}$:

$$\vec{B}_{\text{tot}}(0^+,t) - \underbrace{\vec{B}_{\text{tot}}(0^-,t)}_{=\vec{0}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

Dès lors, en notant $\vec{j}_s = j_{s,x}\vec{u}_x + j_{s,y}\vec{u}_y$, il vient :

$$\frac{2E_0}{c}\begin{pmatrix}\sin(\omega t)\\ -\cos(\omega t)\\ 0\end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} j_{s,x}\\ j_{s,y}\\ 0\end{pmatrix}$$

On en déduit finalement que :

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\left(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y\right)}$$

5. Réalisons la figure habituelle, pointons $\vec{k}$ vers nous et mettons la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dans notre schéma.
Dernière chose, on a besoin de calculer deux quantités :
   - $\vec{E}(0,0) = E_0\vec{u}_x$
   - $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(0,0) = \omega E_0 \vec{u}_y \implies$ croissance selon y

   Cette croissance se traduit donc sur le dessin par une prise de direction depuis $\vec{E}(0,0)$ vers la partie du cercle où les y augmentent :

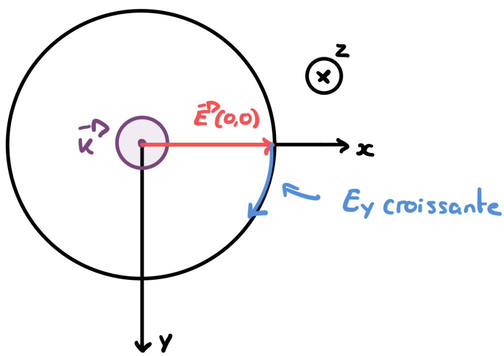


FIGURE 1 – Polarisation de l'onde incidente

Pour l'onde incidente, il s'agit donc d'une polarisation droite.

De même pour $\vec{E}_r$,

- $\vec{E}_r(0,0) = -E_0\vec{u}_x$;
- $\frac{\partial \vec{E}_r}{\partial t}(0,0) = -\omega E_0 \vec{u}_y \implies$ décroissance selon y ;

On obtient alors le dessin suivant :

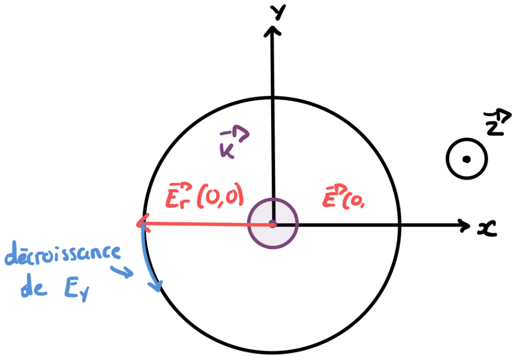


FIGURE 2 – Polarisation de l'onde réfléchie

Et on remarque bien le phénomène produit : il s'agit d'une polarisation gauche pour l'onde réfléchie.

2 Microcoupures d'un téléphone portable

(Centrale MP 2015) En ville, les ondes électromagnétiques utilisées par la téléphonie mobile sont perturbées par les immeubles. Dans une modélisation très simplifiée, on suppose que l'onde devant une façade d'immeuble assimilée au plan $x = L$ a pour champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 \cos(2\pi f t + \varphi) \sin\left(\frac{2\pi f}{c}(x - L)\right) \vec{u}_z \tag{2}$$

pour $x \leqslant L$, avec E_0 une constante et $f = 900$ MHz.

1. Commentez cette expression.
2. On admet que la puissance $\mathcal{P}$ reçue par le téléphone est quadratique avec le champ électrique. On suppose qu'il existe une puissance seuil $\mathcal{P}_s$ en dessous de laquelle la réception du signal est impossible, et que la moyenne de $\mathcal{P}$ suivant x est $10\mathcal{P}_s$.

   Le téléphone étant porté par un piéton marchant à $v = 4$km.h^{-1} suivant x, calculez la fréquence des coupures ainsi que leur durée.

Corrigé :

1. On a un produit de fonctions sinusoïdales du temps & de l'espace : on a affaire à une onde qui n'est pas progressive, qui est **stationnaire** et qui est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_z$. On peut surtout dirre qu'elle est coincée entre 2 immeubles, comme dans une **cavité unidimensionnelle**! (cf. cours)
2. Traduisons phrase par phrase l'énoncé :
   - *ń la puissance $\mathcal{P}$ reçue par le téléphone est quadratique avec le champ électrique. ż* :
     $$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq. } \mathcal{P} = \alpha \vec{E}^2$$
   - *ń la moyenne de $\mathcal{P}$ suivant x est* $10\mathcal{P}_s$ *ż* : si on note $\langle \mathcal{P} \rangle$ la moyenne par rapport au temps et $\langle\langle \mathcal{P} \rangle\rangle$ la moyenne du temps moyennée sur x.
     Alors,
     $$\begin{aligned} \mathcal{P} = \alpha \vec{E}^2 \implies \langle \mathcal{P} \rangle &= \alpha \langle \vec{E}^2 \rangle \\ &= \frac{\alpha E_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi f}{c}(x - L)\right) \end{aligned}$$
     Ainsi, $\langle\langle \mathcal{P} \rangle\rangle = \frac{\alpha E_0^2}{4}$ et on l'énoncé nous dit que $\langle\langle \mathcal{P} \rangle\rangle = 10\mathcal{P}_s$
     Donc,
     $$\alpha E_0^2 = 40\mathcal{P}_s$$

   Ce qui nous permet de simplifier l'expression de $\langle \mathcal{P} \rangle$:

   $$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = 20\mathcal{P}_s \sin^2\left(\frac{2\pi f}{c}(x - L)\right)}$$

On a toujours une fonction sinusoïdale (carrée attention, ça change un peu le graphe) en x, d'amplitude $20\mathcal{P}_s$. On cherche alors les x tels que $\langle\mathcal{P}\rangle(x) = \mathcal{P}_s$.

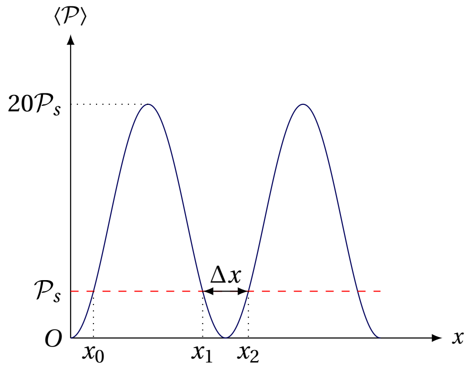


FIGURE 3 – Tracé à la volée de $\langle\mathcal{P}\rangle(x)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{P}\rangle(x) = \mathcal{P}_s &\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{2\pi f}{c}(x-L)\right) = \frac{1}{20} \\
&\Leftrightarrow \sin(\frac{2\pi f}{c}(x-L)) = \pm\sqrt{\frac{1}{20}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{c}{2\pi f}\arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{1}{20}}\right) + L
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\Delta x = \frac{c}{2\pi f}\left|\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{20}}\right) - \arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{20}}\right)\right| = \frac{c}{\pi f}\left|\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{20}}\right)\right|$$

En prenant les données de l'énoncé :

$$\Delta x = 24 \text{ mm}$$

Dès lors, si le piéton circule à vitesse constante $v = 4$ km.h^{-1}, la relation $v = \delta x/\delta t_c$ nous permet de dire que :

$$\boxed{\Delta t_c = \frac{\Delta x}{v} \simeq 22 \text{ ms}}$$

De plus, on rappelle qu'*on cherche également la fréquence des coupures*, i.e $f_c = 1/T_c$ avec T_c la période de la fonction de coupure : sur la figure 3, quand on se situe en dessous de $\mathcal{P}_s$, on ne capte plus rien, donc on retrouve une fonction créneau (et périodique de surcroît) qui vaut 1 si on capte et 0 sinon. Dès lors, on peut dire (remarque assez classique pour une foncton sinusoïdale) [1] que :

$$x_2 - x_0 = \frac{\lambda}{2}$$

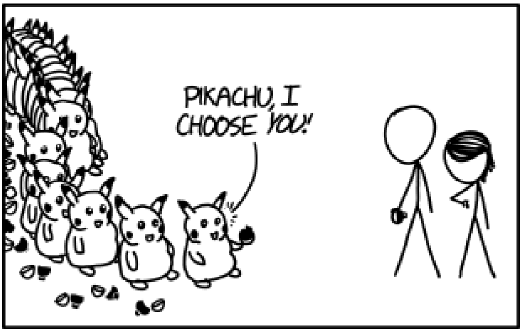
D'autre part, on sait que $\lambda = c/f$ et que $v = \dfrac{x_2 - x_0}{T_c}$, on trouve alors que :

$$T_c = \frac{c}{2vf} = 0,15 \text{ s}$$

Finalement, comme $f_c = 1/T_c$, on a :

$$\boxed{f_c = \frac{2vf}{c} \simeq 6,7 \text{ Hz}}$$

1. la fameuse demie-longueur d'ondes


PIKACHU, I CHOOSE YOU!