Colles MPi* Semaine n°4 du 25 au 29/09/2023 (Programme n°2)

Vallaeys Pascal

15 septembre 2023

Thème : Notion de norme et séries numériques ou à valeurs vectorielles

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- DEPLACIE Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- TROUILLET François
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- Gobron Nicolo
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Drouillet Baptiste
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Oubninte Adil
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

<u>Notions de norme :</u>

- Définition d'une norme.
- Montrer que les normes usuelles sont des normes. (pas de norme euclidienne) (démo)
- Deuxième inégalité triangulaire. (démo)
- Montrer qu'une boule est convexe. (démo)
- Unicité de la limite d'une suite si elle existe. (démo).
- Exemple de deux normes non équivalentes.

Séries numériques et sommabilité :

- Définition d'une série convergente. Montrer que le reste tend vers 0 (démo)
- Séries de Riemann par comparaison à une intégrale « à la main » (démo)
- Une série absolument convergente est convergente. (démo pour le cas réel)
- Critère de convergence des séries alternées (démo)
- Exemple de suites équivalentes telles que les séries associées ne soient pas de même nature. (démo)
- Citer précisément la règle de D'Alembert.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

Notions de norme :

- Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes. (démo)

Séries numériques et sommabilité :

- Citer complètement les théorèmes de sommation des relations de comparaison.
- Critères de convergence (démo pour $\leq$, on en déduit pour o,O,équivalent)
- Principe de transformation suite-série, exemple : la constante d'Euler (démo)
- Règle de d'Alembert (démo)
- Définition d'une famille sommable, de réels positifs, puis de complexes.
- Citer le théorème de sommation par paquets (version réelle positive + version complexe)
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

Notions de norme :

- Deux définitions équivalentes d'une valeur d'adhérence d'une suite. (démo de l'équivalence, non fait en classe)

Séries numériques et sommabilité :

- Démonstration des deux théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent, cas divergent). (démo) Application au Th de Césaro.
- Démonstration de la formule de Stirling. (démo)
- Résultats sur les séries de Bertrand (HP) (démo)
- Transformation d'Abel (HP), montrer que $\sum \frac{sin(nx)}{n}$ converge. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 :
a) Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toutes matrices A et B de E, on ait $N(AB) = N(A).N(B)$?
b) Même question avec $N(AB) \leq N(A).N(B)$

Exercice 3 : (St Cyr MP 2019)
Soit $u_n = \frac{\ln n}{n}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$. Donner un équivalent de la somme partielle.

Exercice 4 :
Pour chacun des termes suivants, déterminer si la série correspondante converge :

1. $n.\sin\frac{1}{n}$
2. $1-\cos\frac{\pi}{n}$
3. $(-1)^n.\ln(n)$
4. $\frac{2^n}{n^n}$
5. $\frac{n^n}{2^n}$
6. $\frac{n!}{n^n}$
7. $\frac{n^3.3^n}{n!}$
8. $\cos\left(n^2\pi\right).\frac{1}{n.\ln(n)}$
9. $\sqrt{ch\left(\frac{1}{n}\right)-1}$
10. $\frac{1}{\sqrt{n}}.\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
11. $(-1)^n.\sqrt{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
12. $\frac{1}{n}.\ln(n).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
13. $\frac{5}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
14. $\frac{1}{n^2+2n+3}$
15. $\frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}}$
16. $\left(\frac{n^7+n^3+1}{n^8+1}\right)^{\frac{4}{3}}$
17. $\left(\cos\frac{1}{n}-1\right).\sin(n)$
18. $\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-\frac{1}{sh\frac{1}{n}}$
19. $u_n=\frac{1}{\ln(n)}$.

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2022)
Nature de $\sum\cos\left(n^2\pi\ln(1-\frac{1}{n})\right)$

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2022)
Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum\ln(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)})$

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 : On pose $E = M_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe un réel a, tel que : $\forall M,N\in E,\ \|M.N\|_\infty \le a.\|M\|_\infty.\|N\|_\infty$.
b) En déduire que pour tout norme $\|.\|$ sur E, in existe un réel b tel que : $\forall M,N\in E,\ \|M.N\|\le b.\|M\|.\|N\|$.
c) Montrer l'existence de l'exponentielle d'une matrice.

Exercice 8 :
Soit n un entier naturel non nul.
a) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\ \sum\limits_{k=0}^{n}|P(k)|\le\alpha.\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-X^2}.|P(X)|.dX$.

b) Si r est un entier naturel, montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\ \sum\limits_{k=0}^{r}|P(k)|\le\alpha.\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-X^2}.|P(X)|.dX$.

Exercice 9 : (Magistère MP 2022)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 10 :
Soient $(u_n)_{n\in\aleph}$ et $(v_n)_{n\in\aleph}$ deux suites strictement positives telles que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
a) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
b) Montrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 11 : Règle de Raabe Duhamel
Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ une suite réelle telle qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta>1$.
Montrer que si $\alpha>1$, alors $\sum u_n$ converge. (On posera $w_n=\ln(n^\alpha u_n)$ et on montrera que la suite (w_n) converge).

Exercice 12 :
a) Trouver deux réels α et β tels que $\int\limits_0^\pi\left(\alpha t+\beta t^2\right).\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}$, pour tout entier naturel strictement positif n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos(nt)$.

c) Montrer que si ϕ est une fonction de classe C^1, $\underset{N\to+\infty}{Lim}\int\limits_0^\pi\phi(t).\sin(Nt).dt=0$.

d) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 13 : (IMT MP 2019)

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f \in E$. On note $N(f) = \sup\left\{\left|\int\limits_0^1 f(t)\, t^n dt\right| ; n \in \mathbb{N}\right\}$.

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 14 : (Mines MP 2022)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$: $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$ et :

$N_1(f) = \|f\|_1 + \ \|f'\|_1$ et $N_2(f) = |f(0)| + \ \|f'\|_1$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 15 :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\underset{n \to +\infty}{Lim} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un intervalle.

Donner un exemple non trivial d'une telle suite.

Exercice 16 :

On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{1}{n.n!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

En déduire que e est irrationnel.

Exercice 17 :

a) Montrer que pour tout réel $x \in \left]-1,1\right[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)\, x^n$ où d(n) désigne le nombre de diviseurs de n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$.

Exercice 18 : (Mines MP 2022)

(Sans préparation)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$

1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 19 : (Mines MP 2021)

Déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - E(\frac{k}{n})n}{k(k+1)}$.

Exercice 20 : Soit $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On note Ω l'ensemble de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si pour toute bijection $\sigma \in \Omega$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

b) On pose, dans la suite, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Déterminer la valeur de $\sum u_n$.

c) Etablir la convergence et calculer la somme $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + ...$

d) Quelles sont les valeurs possibles, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $\sum u_{\sigma(n)}$ pour $\sigma \in \Omega$?

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 1,5,6,7,43,46,40,61.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : notions de norme et séries numériques et vectorielles. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°2
- Groupe 2 : Programme n°2
- Groupe 3 : Programme n°2
- Groupe 4 : Programme n°2
- Groupe 5 : Programme n°2
- Groupe 6 : Programme n°2
- Groupe 7 : Programme n°2
- Groupe 8 : Programme n°2
- Groupe 9 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 10 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 13 : Programme n°1
- Groupe 14 : Programme n°1
- Groupe 15 : Programme n°1
- Groupe 16 : Programme n°1