Réduction des endomorphismes en dimension finie

Vallaeys Pascal

15 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 59,62,67,69,70,72,73,83,88,91,93,101

Méthodes de base :

- Diagonaliser explicitement une matrice 3×3.
- Utiliser un polynôme annulateur pour justifier qu'une matrice est diagonalisable.
- Transférer un problème après réduction de la matrice.
- Trigonaliser une matrice 3×3.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (CCINP MPi 2023)
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \quad$ si $x > 0$, et $T(f)(0) = f(0)$.
1. Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T ; T est-il injectif ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de T, et donner le sous espace propre associé.
4. Donner le spectre de T et les éléments propres associés.

Exercice 3 : (ENSEA ENSIIE MP 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto \qquad (X-1)^2P' - nXP \end{array} \right.$
1. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.
1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A)$. Montrer que A est la matrice d'une projection.

Exercice 5 : (CCINP MP 2023)
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2, puis un polynôme annulateur de M de degré 4.
3. Montrer que M est diagonalisable, et préciser les valeurs possibles de son spectre.
4. Donner les différentes formes possibles de M.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la dernière question, il faut d'abord montrer que M et A sont diagonalisables pour une même base de vecteurs propres.

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$.
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 7 : (Mines MP 2023)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccl} u: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de E.

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2023)
1. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(\ AB - I_n\ ) = \ \det(\ BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
On pourra considérer la suite $A_p = A - \frac{1}{p} I_p$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = O_n$.
1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Exercice 10 : (Mines télécom MP 2023)
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
1. Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.
2. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

Exercice 11 : (CCINP MP 2023)
Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
1. Calculer A^2 et A^3. En déduire un polynôme annulateur de A.
2. Donner les éléments propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
4. A est-elle trigonalisable ? Si oui, la trigonaliser.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

Exercice 12 : (Mines MP 2023)
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que A^2 est diagonalisable. A est-elle diagonalisable ? Que dire du rang de A ?
2. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs nuls ou de taille 2.
3. Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathbb{C}$ le sont dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : (CCINP MP 2023)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$.
1. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A_2^n et A_1^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 : (CCINP MP 2023)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

1. Déterminer le spectre de A de trois façons :

.En utilisant la définition des valeurs propres et des vecteurs propres.
.En calculant son polynôme caractéristique χ_A.
.En calculant son polynôme minimal μ_A.
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$?
4. Dans ce cas, déterminer $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 15 : (CCINP MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
3. On suppose que $A^3 - 3A - 4\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
4. On suppose que $A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair.
Commentaires divers : Dans l'exercice 2, il manque deux sous-questions portant sur la notion de rang.

Exercice 16 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A^2 = -I_n \;\Rightarrow\; \det A = 1$.

Exercice 17 : (CCINP MP 2023)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
On souhaite montrer de trois façons différentes que f est nilpotent.
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
2. Soit $u : h \in \mathcal{L}(E) \longmapsto h \circ g - g \circ h$. En étudiant u, montrer que f est nilpotent.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que : $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$. En déduire que f est nilpotent.
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr} f^k = 0$. On suppose que f admet p valeurs propres distinctes. Montrer que $p = 1$. En déduire que f est nilpotent.

Exercice 18 : (Mines MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(A)M$.
1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 19 : (Mines télécom MP 2022)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 20 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + I_n = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(A)$est un entier.

Exercice 21 : (Mines MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère l'application u définie, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $u(M) = A.M.A$
1) Montrer que u est un endomorphisme. Montrer que u est nilpotente si, et seulement si, A est nilpotente.
2) Montrer que u est diagonalisable si A l'est. Puis montrer la réciproque dans le cas où A est inversible.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
2) Commencer par étudier le cas particulier où A est diagonale et calculer explicitement la valeur des coefficients de $u(M)$ dans ce cas.

Exercice 22 : (CCINP MP 2022)
1. Énoncer sans démonstration le lemme des noyaux.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.
2. On suppose $\det f^2 \neq 0$ et f^2 diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.
3. On suppose $\det f^2 = 0$, f^2 diagonalisable et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. Montrer que f est diagonalisable.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice 23 : (Mines MP 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Soit ϕ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_A(M) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$.
1. Étudier les sous-espaces propres et la diagonalisabilité de ϕ_A.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation $\phi_A(M) = B$.

Exercice 24 : (Centrale MP 2021)
1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0_n\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n$. Montrer que $\operatorname{Tr}(A) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

Exercice 25 : (Mines télécom MP 2021)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Montrer que : $\operatorname{Sp} A = \{0\} \Leftrightarrow A$ est nilpotente.
2. On suppose $\operatorname{Tr} A^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 26 : (Mines MP 2021)
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(M) = M^{-1}$.

Exercice 27 :
a) Montrer que le commutant d'une matrice A donnée est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ (ensemble des matrices qui commutent avec A).
b) Montrer que si deux matrices sont semblables, leurs commutants ont même dimension.
c) Que dire de la dimension de ce commutant, si A est diagonalisable.

Exercice 28 : Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 29 :
a) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes diagonalisables ?
b) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes non diagonalisables ?

Exercice 30 : (Centrale MP)
Soit $E = \mathbb{C}^n$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $u \in L(E)$.
a) Montrer que si u laisse tous les plans stables, il est diagonalisable.
b) Déterminer l'ensemble des endomorphismes laissant tous les plans stables (les déterminer tous).
c) Si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u, cela implique-t-il que u est diagonalisable ?
d) La réciproque est-elle vraie ?
e) Répondre aux mêmes questions dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$.

Exercice 31 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
b) Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 32 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n) / u^3 = u + Id$. Montrer que $Det(u) > 0$.

Exercice 33 :
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose M^2 diagonalisable.
1. Montrer que si M est inversible, alors elle est diagonalisable.
2. Que dire dans le cas général ?

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 34 : (CCINP MPi 2023)
On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 2$.
Soit $A \in E$ telle que $A^2 = I_n$, $A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$.
1. Montrez que $\mathrm{tr}(A) \equiv n \mod 2$.
2. Montrez que $\mathrm{tr}(A) \leqslant n-2$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Les valeurs propres de A étant 1 et - 1, il faut penser à écrire sa trace sous la forme $k*1+(n-k)*(-1)$.

Exercice 35 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle a. Montrer que $a > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} \sin(\pi a^n)$ converge.

Exercice 36 : (CCINP MP 2023)
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB - BA = B$.
1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \det(B^k) \cdot \det(A + kI_n) = \det(B^k) \cdot \det A$.
3. a) Montrer que A admet un nombre limité de valeurs propres.
b) En déduire que $\det B = 0$.
c) Supposons B inversible. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda + 1$ est aussi une valeur propre de A. En déduire le résultat précédent.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la 3.c) de l'exercice 2 : utiliser $AB - BA = B$ (indication donnée avec l'énoncé)

Exercice 37 : (CCINP MP 2023)
1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel stable par u. Que dire du spectre de u ?
2. Montrer que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.
3. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
4. Montrer que cette matrice ne dépend pas du vecteur x choisi.

Exercice 38 : (CCINP MP 2023)
Soit f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$
1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Redéfinir la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Donner les éléments propres de f.
4. L'application f est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, exprimer la matrice de f dans la base canonique en fonction d'une matrice diagonale.
5. Pour n dans $\mathbb{N}$, définir f^n.
Commentaires divers : Examinateur (très) lent, ne voulant pas de réponse à une question à l'oral (ceci est un oral). Ne suit pas la présentation de l'exercice et souhaite que tout soit écrit au tableau.

Exercice 39 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Étudier, selon les valeurs de a, si A est diagonalisable ou non.

Exercice 40 : (CCINP MP 2023)
Soit $u : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto -X + \mathrm{tr}(X) I_n$.
1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de u.

2. En déduire que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Exercice 41 : (CCINP MP 2023)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que deux endomorphismes u et v de E. On suppose que u et v commutent et u diagonalisable avec n valeurs propres distinctes.
1. Montrer que tous les vecteurs propres de u sont également vecteurs propres de v.
2. Montrer que v est diagonalisable dans une même base que u.
3. Montrer qu'il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ telle que $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.

Exercice 42 : (Mines télécom MP 2023)
Soient trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminées par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n/2 + y_n/4 + z_n/4 \\ y_{n+1} & = & x_n/4 + y_n/2 + z_n/4 \\ z_{n+1} & = & x_n/4 + y_n/4 + z_n/2 \end{array}\right. .$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

Exercice 43 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.
Montrer que A est diagonalisable.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Utiliser un polynôme annulateur de A.

Exercice 44 : (CCINP MP 2022)
Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, et $tr(A) = 8$.
1. Quellles sont les valeurs propres possibles de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Aucune car : "Je ne peux pas te donner d'indication sans te donner la réponse" (ce que j'estime complètement faux).
Commentaires divers :
L'examinateur a été muet pendant la quasi-totalité de l'épreuve, il a seulement dit "Bien pour l'exercice 1 mais il y a une erreur dans le 2 (sans vouloir m'indiquer ne serait-ce que le numéro de la question où était l'erreur)" quand j'ai eu finit de présenter les exercices, et il a fait quelques commentaires à la fin de l'épreuve.
Le fait d'avoir passé plus de dix minutes seul à essayer de chercher mon erreur m'a vraiment donné l'impression d'être à un écrit, je n'ai pas vraiment compris la volonté de cet examinateur de se fermer à toute forme de discussion...

Exercice 45 : A quelle condition sur le réel α la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 46 : (Mines MP 2023)
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension fini u et v deux endomorphismes de E et a et b dans $\mathbb{C}$ tels que uv-vu=au+bv
1. Montrer que si a=b=0 alors u et v admettent un vecteur propre commun
2. On suppose maintenant a=0 et $b \neq 0$ Montrer que u est non inversible puis donner l'expression de $u^n v - vu^n$ puis montrer que u est nilpotente puis montrer que le résultat persiste (u et v admettent un vecteur propre commun)
3. Montrer le résultat dans le cas où a et b sont quelconques
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour 2.3) considérer (au+bv)v-v(au+bv)

Exercice 47 : (Mines MP 2023)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) \\ \vdots & (0) & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on pose $N = A - I_n$ et pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, $(E) : X^2 = A$.

1. Trouver les matrices qui commutent avec N.

2. Soit X solution de (E) ; montrer qu'il existe $(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que (E) possède au plus 2 solutions.

4. Donner le développement limité au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ à la précision $o(x^n)$.

5. Résoudre (E).

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Question 1 : trouver une relation simple qui caractérisent ces telles matrices.

Exercice 48 : (Mines MP 2023)

On considère ϕ telle que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme.

2. Montrer de plusieurs manières que ϕ est diagonalisable.

3. Expliciter une base de vecteurs propres.

Exercice 49 : (Mines MP 2022)

Un endomorphisme f est dit cyclique dans E tel que $\dim E = n$, si :

$\exists\, x_0 \in E : \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)) = E$.

1. Soit g un endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathbb{R}^3$ soit :

$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Montrer que g est cyclique et diagonalisable.

2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?

3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?

4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 50 : (Mines MP 2022)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe P polynôme annulateur de f vérifiant : $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Après avoir écrit $P = XQ$, remarquer que X et Q sont premiers entre eux.

Exercice 51 : (Mines MP 2022) (15 min de préparation, 15 min de passage)

Soit $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$, On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par :

$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$

1. Étudier la convergence de la suite. 2. On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ l'application telle que :

$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R},\ \ \phi(f)(x) = f(ax+b)$

a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que ϕ est bijective.

c) Soit λ une valeur propre de ϕ différente de 1 et f_λ un vecteur propre associé.

(i) Montrer que $f_\lambda(\frac{b}{1-a}) = 0$ et que $\lambda \in]-1,1[\setminus \{0\}$.

(ii) Montrer que f'_λ est aussi un vecteur propre.

d) Déterminer les vecteurs propres de ϕ.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Utiliser la question 1. pour la 2.c) et observer les valeurs propres apparaissant si λ est valeur propre, et les conséquences sur les vecteurs propres (on ne peut engendrer qu'un nombre fini de valeurs propres, ce qui donne une condition sur une certaine dérivée du vecteur propre, ce qui permet de déterminer sa nature puis sa forme).

Exercice 52 : (Mines MP 2022)
Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'aucune matrice de cette base ne soit diagonalisable.

Exercice 53 : (Mines MP 2022)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer que si u est de rang r, alors son polynôme minimal a un degré inférieur ou égal à $r+1$.
2) Dans le cas général, peut-on améliorer cette majoration ?
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Utiliser le théorème du rang pour avoir la dimension de $E_0(u)$

Exercice 54 : (Mines MP 2022)
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. On suppose qu'il existe $n+1$ réels deux à deux distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ tels que, pour tout i entre 1 et $n+1$, la matrice $C_i = A + t_i B$ soit nilpotente.
Montrer que les matrices A et B sont nilpotentes.

Exercice 55 : (Mines MP 2021)
On note :
- $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n de trace nulle.
- $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

1. $\mathcal{N}$ est-il l'ensemble des matrices nilpotentes ?
2. Montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$.
3. A-t-on $\mathcal{N} = \mathcal{H}$?

Exercice 56 : (Mines MP 2021)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que (A et B ont une valeur propre commune) $\Leftrightarrow$ ($\exists P \neq 0$, tel que $AP = PB$)

Exercice 57 : (Centrale PC)
Réduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension de son commutant.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 58 : (X MP 2023)
On considère E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$[a,b] = a \circ b - b \circ a = f \circ v$$

avec $f \in \mathcal{L}(\mathbf{C}, E)$, $v \in \mathcal{L}(E, \mathbf{C})$ et $v \circ f = 0$.
1. Calculer le déterminant de $[a,b]$.
2. Montrer que a et b sont trigonalisables dans une même base.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : S'inspirer du cas où les deux endomorphismes commutent.
Commentaires divers : Je n'ai pas eu l'impression que l'examinateur s'attendait à ce que je termine l'exercice, il comptait s'arrêter à la démonstration que a et b aient un vecteur propre commun en affirmant qu'on concluait par récurrence.

Exercice 59 : (ENS MP 2023)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), P = \chi_A, P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ et α_i la multiplicité de λ_i.
Soient les $F_i = \mathrm{Ker} P_i(A)$.
1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i F_i$.
2. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de A restreinte à F_i.
3. Montrer que $A = D + N$ avec D matrice diagonalisable et N nilpotente, telles que $DN = ND$.
4. Soit $\phi_A : M \mapsto AM - MA$. Exprimer la décomposition $N + D$ de ϕ_A en fonction de celle de A.

Exercice 60 : (Mines MP 2023)

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts ($n \geqslant 2$). On considère également n nombres complexes non nuls $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. On suppose que la suite $\left(x_k = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p \lambda_p^k\right)_{k \geqslant 0}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

1. Montrer que : $\forall p \in [\![1, n]\!], |\lambda_p| < 1$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lim_{k \to +\infty} \operatorname{tr}(A^k) = 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module strictement inférieur à 1.

Exercice 61 : (ENS MP 2022)

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, différente de la matrice nulle et de l'identité. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{Tr}(D)$ pour que D soit la diagonale d'une matrice réelle P telle que $P^2 = P$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Essayer de raisonner par récurrence sur $\operatorname{Tr}(D)$ (une récurrence sur n peut apparemment aussi marcher).

Commentaires divers :

Épreuve de l'oral spécifique à Ulm, donc il n'était absolument pas attendu de pouvoir résoudre le problème, simplement de creuser des pistes et d'échanger avec l'examinatrice. Cette dernière a d'ailleurs peu parlé, me laissant explorer mes pistes. Voici quelques unes des pistes explorées :

Trouver d'abord une condition nécessaire et essayer de prouver sa suffisance. Essayer avec les matrices 2×2. Étudier le cas des matrices de rang 1.

Exercice 62 : (X MP 2021)

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} B = 1$. On suppose que $\alpha = \operatorname{Tr}(BA^{-1}) \neq -1$.

Montrer que $A + B$ est inversible d'inverse $A^{-1} - \frac{A^{-1}BA^{-1}}{1+\alpha}$.

Exercice 63 : (X MP)

Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que : $\exists q \in \mathbb{N}^* / u^q = Id$. Montrer que $\dim(Ker\,(u - Id)) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} Tr\left(u^k\right)$.

Exercice 64 : (X MP 2013)

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On note (P) la propriété : u admet n valeurs propres distinctes deux à deux. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Q_k : u admet $\binom{n}{k}$ sous-espaces stables de dimension k.

a) Montrer que $(P) \Leftrightarrow (Q_1)$.

b) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(P) \Rightarrow (Q_k)$.

c) Montrer que $(P) \Leftrightarrow (Q_{n-1})$