Variables aléatoires (discrètes)

Vallaeys Pascal

16 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 95,96,97,98,99,100,102,103,104,106,108,109,110,111

Méthodes standard des exercices :

- Savoir appliquer le théorème de transfert.
- Savoir utiliser les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebichev.
- Reconnaître les lois usuelles.
- Montrer que des variables aléatoires sont indépendantes.
- Utiliser la formule des probabilités totales, jointe aux probabilités conditionnelles.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (CCINP MP 2023)
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.
2. Montrer que si la famille $(P(X>k))_{k\geqslant 0}$ est sommable, alors X admet une espérance finie.
3. Étude de la réciproque : montrer que si X admet une espérance finie, alors la suite $(nP(X>n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.
4. Application : on considère une urne contenant N boules identiques numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au plus grand nombre tiré au cours des n tirages.
5. Calculer $P(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.
6. Montrer, à l'aide d'une somme de Riemann, que la suite $\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right)_{N\geqslant 1}$ admet une limite finie et la calculer.
7. En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 2 :
Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes, de lois $B(n_1;p)$ et $B(n_2;p)$. Quelle est la loi de X_1+X_2 ?

Exercice 3 :
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson. Montrer que X+Y suit une loi de Poisson :
a) Directement à l'aide de l'expression de la loi de Poisson.
b) A l'aide des séries génératrices.

Exercice 4 : (Mines MP 2018)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé (Ω, T, p). On suppose que X suit une loi de Poisson. Montrer que Y suit une loi de Poisson si et seulement si X+Y suit une loi de Poisson.

Exercice 5 : (BECEAS MP 2023)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $\max\{P(X=n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2023)

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). On tire deux boules simultanément. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro porté par les deux boules et Y celle égale au plus grand numéro.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $E(Y^2)$.

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2023)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :
$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X,Y)=(j,k)) = \dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$. Prouver que $E[2^{X+Y}]$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 8 : (Mines télécom 2023)

On possède une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On réalise 2 tirages successifs sans remise. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule tirée et Y celle correspondant au numéro de la seconde.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de Y.
3. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$. Soient $I = \min(X,Y)$, $M = \max(X,Y)$ et $D = M - I$.

1. Montrer que $P(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)^2$.
2. Montrer que I et D sont indépendantes.

Exercice 10 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p ; et que, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, la loi de Y conditionnée à $X=i$ est la loi binomiale de paramètres $n-i$ et p.

Montrer que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

Exercice 11 : (CCINP MP 2023)

1. Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivantes des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

a) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

b) Donner l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires tel que Y suive une loi de Poisson de paramètres λ. Déterminer la loi de X sachant que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est la loi binominale de paramètres (m,p).

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Il n'est pas nécessaire de retrouver l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$ si on les connait déjà.

Exercice 12 : (Mines MP 2018)

Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\{1,...,n\}$.

Exercice 13 : (Mines MP 2022)

Montrer qu'une intersection dénombrable d'événements presque certains est un événement presque certain.

Exercice 14 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi géométrique de raisons p et q.

Soit A : $\omega \to \begin{pmatrix} X(\omega) & -Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$

Trouver la probabilité que A soit diagonalisable sur $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15 : (CCINP MP 2022)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 qui suivent toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1) Déterminer les lois des variables : $Y = \min(X_1,X_2)$ et $S = X_1 + X_2$.

2) Reconnaître la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 16 : (Mines télécom MP 2022)
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
1) Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.
2) Calculer $P(X \text{ est pair})$.

Exercice 17 :
1. Justifier le fait qu'une variable aléatoire, à valeurs réelles, est bornée, alors elle admet des moments à tout ordre.
2. Montrer que si une variable aléatoire réelle admet un moment d'ordre n, elle admet des moments à tout ordre inférieur.

Exercice 18 : (CCINP MP 2021)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Rappelez l'espérance et la variance de X.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. a) Montrer que $P(X < Y) = P(Y < X)$.
b) Calculer $P(X \geqslant Y)$.
5. ?
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve Question 2 : Écrire de deux manières différentes le coefficients devant X^n dans le développement de $((X+1)^n)^2)$.

Exercice 19 : (CCINP PSI 2021)
On étudie succession de lancers d'une pièce équilibrée.
X est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face »
Y est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile »
1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 20 : (Mines MP 2021)
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2 avec p_1 et p_2 dans $]0, 1[$.
Calculer l'espérance de $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

Exercice 21 : (Centrale MP 2019)
Soient $s \in]1, +\infty[$ et X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $\zeta(s)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$, où on note $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p(n/X)$.
b) Soient $n_1, ..., n_k$ des nombres entiers premiers entre eux deux à deux. Montrer que les évènements $\{n_j/X\}_{1 \leq j \leq k}$ sont mutuellement indépendants.
c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangée dans l'ordre croissant. Montrer que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-{}^{1}/{p_n^s}} = \zeta(s)$.
d) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 22 : (Centrale MP 2019)
a) Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)\left(X-\overline{b}\right)$ avec $a \in]1, 2[$, $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $|b| < 1$.
b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note $p_n$la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. Donner une expression et un équivalent de p_n.

Exercice 23 : (TPE MP 2019)
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
a) Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \to E\left((X-m)^2\right)$.

b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $p\,(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $V\,(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 24 :

Peut-on truquer un dé (à six faces, marquées 1,2,. . . ,6) de façon que la somme des points obtenus en deux lancers de ce dé suive une loi uniforme ?

Exercice 25 : (Mines MP 2018)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

a) Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(X,Y) \in P(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

b) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois ?

Exercice 26 : (Mines MP 2023)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note Y le reste de la division euclidienne de X par p. Déterminer la loi de X

Exercice 27 : (Mines MP 2023)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que X_1+X_2 suit la même loi que $2X_1$ avec $X_1 \geqslant 0$.

Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Pour l'exercice 2 : Raisonner dans le cas où la variable aléatoire X_1 admet une variance, puis dans le cas où elle n'en n'admet pas. Dans le cas où X_1 n'admet pas de variance, on pourra considérer la variable aléatoire $Z = \ e^{-X_1}$, qui elle admet une variance.

Commentaires divers : L'examinateur était calme et sympathique. En réalité la continuité de f dans l'exercice 1 est une hypothèse forte, une fonction bornée suffisait.

Exercice 28 : (Mines MP 2022)

sans préparation :

1. Soit n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Trouver une bijection entre les ensembles

$$\mathcal{P}_{p+1}(\{0,...,n\}) \text{ et } \bigcup_{k=p}^{n}(\mathcal{P}_p(\{0,...,k-1\}) \times \{k\}).$$

En déduire que

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}.$$

2. Une urne contient n boules, dont p sont blanches. On tire les boules une à une, sans remplacement, et on note X le numéro du tirage de la dernière boule blanche. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 29 : (Centrale MP 2022)

Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1) Calculer $\mathbb{E}(e^{sS_n})$ pour tout réel $s > 0$.

2) Soit $a \geqslant 0$. Montrer que

$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \exp\left(-n \sup\limits_{s>0}\left(as - \ln\left(1-p+pe^s\right)\right)\right)$.

3) Montrer qu'il existe une fonction H de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait quel que :

$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-nH(\varepsilon)}$.

Indications fournies par l'examinateur pendant l'épreuve :

2) D'abord fixer s, puis transformer $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$ en $\mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{sS_n} \geqslant ?\right)$, et réécrire $\exp(-n(as - \ln(1-p+pe^s)))$.

Exercice 30 : (Mines MP 2022)

(sans préparation)

Soit N variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$

On pose $Y = \sum_{i=0}^{N} X_i$. Par définition : $\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)$

Déterminer la loi de Y.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : La somme de variables suivant la même loi de Bernoulli pourra faire intervenir une loi binomiale.

Exercice 31 : (Centrale MP 2022)

On considère un point qui est libre de se déplacer selon l'axe des entiers $\mathbb{Z}$. A chaque étape, le point se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité p et vers la gauche avec la probabilité $1-p$. Elle se situe initialement en 0. On note S_n la variable aléatoire qui indique la position du point au bout de n mouvements.

1) Donner la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On pose $p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$, et $f : t \mapsto \sum p_n t^n$. Justifier que f est définie sur $]-1,1[$ et calculer $f(t)$ pour $t \in]-1,1[$.

3) On introduit T la variable aléatoire qui indique le rang du premier passage à l'origine, avec la convention que $T = +\infty$ si le point n'y repasse jamais. On note $q_n = \mathbf{P}(T = n)$, et $g : t \mapsto \sum q_n t^n$. Justifier que g est définie sur $]-1,1[$ et établir que $f(t) = 1 + f(t)g(t)$. En déduire l'expression de q_n.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

1) Une fois la loi établie, il m'a suggéré de regarder les cas n pair et impair pour jusitifier que certaines fractions étaient bien des entiers

2) Il m'a conforté dans l'idée d'identifier un développement en série entière reconnaissable

Exercice 32 : (Centrale MP 2021)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = X - Y$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.

2. a) Déterminer la loi conjointe du couple (U,V) puis les lois de U et de V.

b) Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.

3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $P((U=n) \cap \ (V=m)) \neq 0$. Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Pour la 2. a), l'examinateur m'a proposé de faire une disjonction de cas (sans me préciser laquelle) avant de chercher une formule générale pour la loi conjointe.

Exercice 33 :

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ pour tout entier n. On note également$Z_k = e^{\lambda\left(X_k - {}^1/_2\right)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*+$ et $k \in \mathbb{N}$.

1) Rappeler la définition d'une variable aléatoire discrète et justifier rapidement que S_n et Z_k sont des variables aléatoires discrètes. A l'aide des fonctions génératrices, déterminer la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance. Quels sont les espérances et variances des variables aléatoires Z_k ?

2) On note $W_n = e^{\lambda[S_n - E(S_n)]}$. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire discrète.

3) Soit $t \in \mathbb{R}^*+$. Déterminer une fonction $f : (t,\lambda) \to f(t,\lambda)$ telle que pour tout entier naturel n, $p\left(S_n - E\left(S_n\right) > nt\right) \leq e^{-n.f(t,\lambda)}$.

4) Comment choisir le paramètre λ de manière à rendre l'inégalité obtenue la meilleure possible.

5) On lance une pièce équilibrée 1000 fois. Quelle majoration de l'évènement « obtenir au moins 600 fois pile » obtenons-nous ? Quel autre résultat pourrait être fourni par une inégalité du programme ?

Exercice 34 : (Mines MP 2018)

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telles que $p\left(X_i = 1\right) = p\left(X_i = -1\right) = 1/2$ pour tout i. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}+$. Montrer que $E\left(e^{tS_n}\right) = \left(ch\left(t\right)\right)^n$. En déduire que $E\left(e^{tS_n}\right) = \left(ch\left(t\right)\right)^n E\left(e^{tS_n}\right) \leq e^{nt^2/2}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}+$, $p\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right)$ et en déduire que $p\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 35 : (CCINP MP 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. Soit $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$. On donne $P(X = j, Y = i) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Déterminer λ.
2. Donner les lois de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
5. Soit $B = [P(Y = i|X = j)]_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$. Expliciter B, puis calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
6. B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Exercice 36 : (CCINP MP 2023)
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geqslant n) > 0$.
On définit le taux de panne de X par la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ où $x_n = P(X = n|X \geqslant n)$.
1. Montrer que si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$, on définit une loi de probabilité.
2. Déterminer le taux de panne de Y.
3. Dans le cas général, démontrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$.
4. En déduire $P(X = n)$ en fonction des x_k, pour tout $n \geqslant 1$.
5. Déterminer les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant.

Exercice 37 : (Mines télécom MP 2023)
On considère n urnes ($n \geqslant 2$), $a \in \mathbb{N}^*$ et $N = an$ boules. On jette les boules simultanément dans les urnes. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'urnes restées vides après le lancer. Calculer $E(Y)$.

Exercice 38 : (Mines télécom MP 2023)
On se place dans $A = \{1, \dots, n\}$. On choisit F et G deux parties de A de manière équiprobable et indépendante. Soit $i \in A$.
1) Montrer que $P(i \in F) = \dfrac{1}{2}$.
2) Montrer que les événements $(i \in F)$ et $(j \in G)$ sont indépendants pour $j \neq i$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Il faut faire un raisonnement combinatoire propre pour la question 1, cela s'y prête bien à l'oral. Pour la question 2, on revient simplement à la définition de l'indépendance
Commentaires divers. : Pour l'exercice 2, le temps manquait il y avait une troisième question.

Exercice 39 : (Mines télécom MP 2023)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, Supposons que : $\forall k \in \mathbb{N}, E(X^k) = E(Y^k)$
Montrer que X et Y ont la même loi.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Quitte à choisir des probabilités nulles, on pose $(t_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs que peuvent avoir X et Y.

Exercice 40 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $T_r = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1 + \cdots + X_n = r\} \cup \{+\infty\})$.
1) Reconnaître la loi de T_1.
2) Calculer $P(T_r = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer que l'événement $(T_r = +\infty)$ est négligeable.

Exercice 41 : (CCINP PSI 2021)
On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3.
On effectue une série de tirages indépendants avec remise d'un jeton.
On note :
Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux nombres différents.
Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.
1] Déterminer la loi de Y.
2] Déterminer la loi de $Y - 1$.
3] En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
4] Déterminer la loi du couple (Y, Z).

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 42 : (Mines MP 2023)

On considère un mobile Z qui se déplace aléatoirement à droite ou à gauche, sur un axe orienté. A l'instant 0, le mobile est à l'origine. Lorsqu'il est à l'abscisse $n \in \mathbb{Z}$, le mobile fait un bond B_n dont la loi de probabilité est donnée par : $\forall k \in \mathbb{Z}, P(B_n = k) = ap^{|k|}$ avec $p \in]0,1[$. On suppose les bonds mutuellement indépendants.

1. Déterminer a.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse où se trouve le mobile après n bonds. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(A_n \geqslant n) \leqslant \dfrac{p}{n(1-p)^2}$.

Exercice 43 : (Centrale MP 2023)

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit les variables aléatoires suivantes :

X_n et Y_n à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$P(X_n = p, Y_n = q) = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\ q!\ (n-p-q)!} a^p b^q c^{n-p-q} & \text{si} \quad p+q \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec a, b et c dans $]0,1[$ tels que $a+b+c=1$. N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; on note G sa fonction génératrice et on suppose que N est indépendante des variables X_n et Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $U = X_N$ et $V = Y_N$.

1. Soient $x, y \in [0,1]$. Montrer que la variable $x^U\ y^V$ admet une espérance finie notée $e(x,y)$ et que : $\forall x, y \in [0,1],\ e(x,y) = G(ax+by+c)$.

2. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$. Justifier que l'on a : $\forall x, y \in [0,1],\ e(x,y) = e(x,1)e(1,y)$.

3. Réciproquement, on suppose que : $\forall x, y \in [0,1],\ e(x,y) = e(x,1)e(1,y)$. Montrer que N suit une loi de Poisson.

Exercice 44 : (Mines télécom MP 2023)

1. On note l^2 l'ensemble des suites rééells (p_i) telles que la série de terme générale p_i^2 converge. Montrer que l^2 est un espace vectoriel et que l'application : $\forall (p_i), (q_i) \in l^2 \quad <p_i, q_i> = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i q_i$ est un produit scalaire.

2. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre 2. On note $\forall i \in \mathbb{N}\ p_i = P(X = i)$ et $p_{-1} = 0$ On note $I(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{(p_i - p_{i-1})^2}{p_i}$

a) Montrer que $I(X) \geq \dfrac{1}{V(X)}$

b) Enfin montrer que $I(X) = \dfrac{1}{V(X)}$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

2a)Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en remarquant que I(X) et V(X) sont des normes au carrée.On se ramène alors à montrer que $I(X)V(X) \geq 1$.

Je n'ai pas eu le temps de faire la Q2b

Exercice 45 : (Mines MP 2023)

Soient A, B et C des vaiid suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Soit l'équation différentielle $Ay'' + By' + Cy = 0$ et $p(\lambda)$ la probabilité pour que les solutions de cette équation s'annulent une infinité de fois.

Montrez que $\lim_{\lambda \to \infty} p(\lambda) = 1$.

Commentaire : Pour l'exercice 2 j'ai étudié le discriminant de l'équation caractéristique qui est ici une variable aléatoire. J'ai calculé la probabilité pour que celui-ci soit strictement négatif, ce qui est égale à $p(\lambda)$.

Exercice 46 : (Mines MP 2023)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{e}{4})^\lambda$.

Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Utiliser la fonction génératrice ; montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$ pour $t \in \mathbb{R}$ convenable. Étude de fonction

Exercice 47 : (Mines MP 2023)

Soient a, b et n des entiers, on considère une urne contenant b boules blanches et a boules d'autres couleurs. On tire simultanément n boules de cette urne et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer l'image de X, puis sa loi.
2. Déterminer son espérance puis sa variance.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Des indications pour éviter des calculs trop lourds (éviter de repasser par les factorielles...)

Exercice 48 : (Mines MP 2021)

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \geqslant 3p)$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Ayant eu un doute au sujet de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, l'examinateur me l'a fait redémontrer. Pour le calcul de la variance de S_n, il m'a dit d'exprimer $\sum_{i=1}^n Y_i$ en fonction des X_i.

Exercice 49 : (Mines MP 2021)

Soient X et Y deux variables indépendantes, strictement positives et de même loi. Montrer que $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 50 : (Mines MP 2021)

Soit $r > 0$

1) Montrer que la relation suivante :

$\mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\int_0^1 rx^{k-1}(1-x)^r \,\mathrm{d}x$ définit bien une probabilité d'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^*$.

2) Préciser pour quelle valeur de r la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 51 : (X MP 2023)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et n entier avec $n > d$.

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires uniformes et indépendantes à valeurs dans $\tilde{0}, \tilde{1}, ..., \tilde{d}$ où pour i dans $0, 1, ..., d$, $\tilde{i}$ est la classe d'équivalence de i dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On note $S_n = X_1 + ... + X_n$ et pour r entier $p_n(r) = P(S_n = r)$.

1. Montrer qu'à n fixé p_n dépend de r.
2. Calculer $E(t^{X_1})$ fonction génératrice de X_1 et l'exprimer dans le cas où $t = e^{\frac{2ik\pi}{n}} := \zeta^k$ où $0 \leq k \leq n-1$.
3. Calculer la fonction génératrice de S_n et l'exprimer en t défini à la question précédente.
4. Montrer que pour X variable aléatoire $P(X = r) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-kr}E(\zeta^{kX})$ et en déduire $P(S_n = r)$ comme somme de réels ainsi que $P(S_n = 0)$.
5. On suppose que d est pair. Montrer que $p_n(r) \geq \frac{1}{n}$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : 5. Commencer par supposer que n est pair aussi.

Exercice 52 : (X MP 2023)

On tire $\sigma \in S_n$ aléatoirement. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles de σ.

1. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
2. Déterminer la fonction génératrice de X_n.
3. Déterminer son espérance et sa variance.

Commentaires / Indications : Pour la fonction génératrice : si on note f_n la fonction génératrice de X_n j'avais trouvé une relation entre f_n et les $(f_i)_{i\leq n-1}$. L'examinateur m'a plutôt proposé de trouver une relation entre f_n et f_{n-1}.

Pour l'espérance et la variance, j'aurais tout simplement pu dériver cette relation de récurrence (qui est assez simple), mais je n'y ai pas pensé sur le coup (j'essayais plutôt de dériver directement f_n, qui s'exprime sous forme d'un produit de n polynômes de degré 1)...

L'examinateur m'a plutôt proposé une approche combinatoire, proche de ce que j'avais fait précédemment : pour passer de S_n à S_{n-1}, j'avais différencié selon le fait que n soit un point fixe ou non. L'examinateur m'a proposé de regarder le chemin inverse, c'est à dire comment passer de S_{n-1} à S_n. On en déduit que X_n peut en fait s'exprimer sous la forme d'une somme de Bernoulli. On discute ensuite du fait que ceci se voyait en quelques sorte dans la relation de récurrence trouvée sur les fonctions génératrices.

Exercice 53 : (ENS MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}$

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où P est la probabilité uniforme et $\Omega = \mathfrak{S}_n$. On pose A_i l'événement $\{ \ i$ est un point fixe de $\sigma \ \}$.

1. Rappeler la définition d'une probabilité uniforme et donner $P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)$

2. Soit N la variable aléatoire, qui à σ associe son nombre de points fixe. Exprimer N en fonction des $\mathbf{1}_{A_i}$ puis donner $E(N)$ et $V(N)$

3. Soit $F \subset [\![1,n]\!],\ k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que

$$\binom{|F|}{k} = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|=k}} \prod_{i\in I} \mathbf{1}_{i\in F}$$

4. En déduire que $E(N(N-1)...(N-k+1)) = 1$. Calculer la variance de $N(N-1)...(N-k+1)$.

5. Connaissez vous une autre loi vérifiant cela ?

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour la question 5, j'ai répondu que non, alors il me l'a fait vérifier pour une loi de Poisson, mais je n'ai pas eu le temps de finir les calculs.

Commentaires divers : Examinateur très sympathique, qui m'a laissé du temps pour prendre connaissance du sujet.

Exercice 54 : (ENS MP 2023)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, On considère une suite de variables aléatoires définies de la manière suivante :

On choisit un nombre entier aléatoirement et uniformément dans $[1, N]$, on note u_1 ce résultat.

On choisit un nombre entier aléatoirement et uniformément dans $[1, u_1{-}1]$, on note u_2 ce résultat.

On choisit un nombre entier aléatoirement et uniformément dans $[1, u2{-}1]$, on note u_3 ce résultat et cetera.

Le processus s'arrête à l'étape $i \in \mathbb{N}^*$ telle que $u_i = 1$ (lorsque 1 est choisi).

On note E_N l'ensemble des valeurs choisies au cours du processus.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(k \in E_N)$.
2. Calculer $\mathbb{P}_{(3\notin E_N)}(2 \in E_N)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Card}(E_N))$ et en donner un équivalent quand $N \longrightarrow +\infty$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

1. Noter $p_{k,N} = \mathbb{P}(k \in E_N)$.
2. On sait évaluer $\mathbb{P}((3 \in E_N) \cap (2 \in E_N))$.
3. On a $\mathrm{Card}(E_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} 1_{(k\in E_N)}$ (fonctions indicatrices).

Exercice 55 : (ENS MP 2023)

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{E}(X) = 1, \mathbb{E}(X^2) = 2, \mathbb{E}(X^3) = 5$. Trouver la plus petite valeur pour $\mathbb{P}(X = 0)$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Après m'avoir laissé chercher quelques minutes, l'examinateur me demande de donner un nom à $\mathbb{P}(X = n)$ (que je note p_n), puis me dit qu'il faut obtenir un système sur p_0, p_1, p_2, p_3. Une fois ce système obtenu, je le résous, ce qui permet d'exprimer p_0 en fonction des p_n pour $n > 3$. Il y a beaucoup de calculs de fractions et l'examinateur vérifie à chaque étape que ceux-ci sont bons. Pour conclure que la valeur maximale de p_0 est atteinte lorsque $p_n = 0$ pour $n > 3$, il faut montrer qu'un certain polynôme est positif sur un certain intervalle.

Commentaires divers : C'était très calculatoire.

Exercice 56 : (ENS MP 2023)

Soit X un variable aléatoire discrète tel que $E(X^2) < +\infty$, on dit que X est "infiniment divisible" si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ qui vérifient :

(i) $X = X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$

(ii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E(X_{i,n}^2) < +\infty$

Montrer que si X est bornée, alors elle est presque sûrement constante.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : On pourra montrer que $\forall k \in \mathbb{R}, \ \big(P(|X| \geqslant k) = 0\big)$

Exercice 57 : (ENS MP 2023)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Soit B l'évenement : "X est premier avec n".

On note $p_1, p_2, ..., p_r$ les diviseurs premiers de n.

Calculer $P(B)$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Cas r = 2 :
Poser les évenements B_1 et B_2 tel que B_i : "X est premier avec p_i"
Montrer que B_1 et B_2 sont indépendants.

Exercice 58 : (ENS MP 2022)
(donné par l'examinateur pour les 10 dernières minutes)
On considère une boîte composée de n coupons indiscernables au toucher numérotés de 1 à n. On effectue une série de tirages à l'aveugle avec remise d'un coupon à la fois.
Donner l'espérance du nombre de tirages nécessaires pour tirer au moins une fois chacun des coupons, et en donner un équivalent pour de grands nombres de coupons.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Séparer la quête des coupons en plusieurs étapes consistant à trouver un k-ième coupon différent et sommer les différentes espérances trouvées.

Exercice 59 : (X MP 2021)
On considère une urne avec 10000 boules dont 6000 rouges et 4000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules.
Déterminer la probabilité pour qu'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages. (chercher du côté des chemin de Dyck et du problème du scrutin)

Exercice 60 : (X MP 2021)
Soit Z une variable aléatoire à valeurs réelles, telle que $E(Z) = \mu$ et $V(Z) = \sigma^2$.
Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ P(Z > \mu + \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Considérer $P(Z + t > \mu + \varepsilon + t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 61 : (Centrale MP 2021)
1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive si $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.
On se donne une telle suite, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
Montrer que (v_n) converge vers $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de même loi que X. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $P(X \geqslant a) > 0$. Montrer que $n \mapsto \ln P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant a\right)$ est convergente.