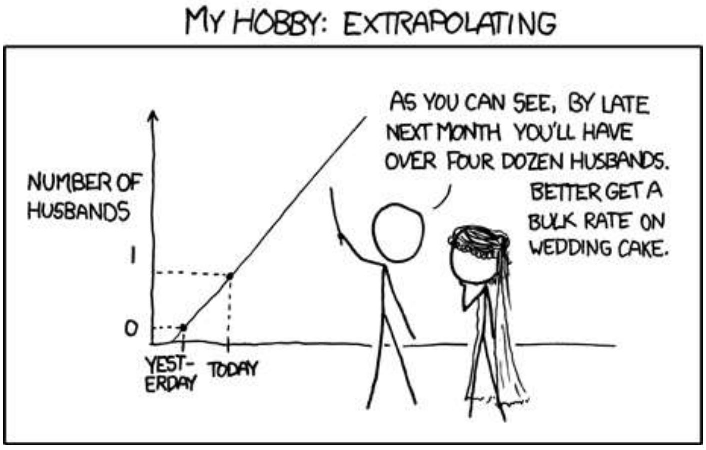
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 9



Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites.

Définition - Limite d'une application

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f : \begin{array}{ll} A & \to F \\ \vec{x} & \mapsto f(\vec{x}) \end{array}$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists r > 0, \forall x \in B_f(a, r) \cap A, ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon \\ \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f : \begin{array}{ll} A & \to F \\ \vec{x} & \mapsto f(\vec{x}) \end{array}$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - a\|_E \leq \varepsilon$

Soit donc $\varepsilon > 0$,

Par hyp sur f, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $\|x - a\|_E \leq \eta$

$\Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$

On considère $n_\eta \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\eta$, $\|x_n - a\|_E \leq \eta$

$\Rightarrow \|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$

On a donc bien :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\eta \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\eta$, $\|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$: Réciproquement, raisonnons par contraposée

Supposons alors que $\lim_{x \to a} f(x) \neq l$

i.e $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists x \in A$, $\|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - l\|_F > \varepsilon$

Soit donc un tel $\varepsilon > 0$, on prend alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{1}{n+1}$

On vient alors de construire une suite $(x_n)_n$ tq $x_n \longrightarrow a$

mais $f(x_n) \not\longrightarrow l$

d'où l'existence d'une telle suite.

d'où le résultat par contraposée

D'où le résultat par contraposée

Définition - Continuité d'une application

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

(1) Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(2) On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Soit $a \in A$
Alors :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$$

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Supposons f continue en a. Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$

$\hookrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in A, \|y - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(y) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$

Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe alors un $\eta > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$

or $\eta > 0$ donc, comme $x_n \longrightarrow a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|x_n - a\|_E \leq \eta \Rightarrow$ —

AINSI, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$

D'où $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

$\Leftarrow$: Réciproquement, raisonnons par contraposée

Supposons que $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A, \|x - a\| \leq \eta$ et $\|f(x) - f(a)\| > \varepsilon$

écrire $A \Rightarrow B$ puis la contraposée si besoin !

Soit donc un tel $\varepsilon > 0$, prenons pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{1}{n+1}$

On vient alors de construire une suite (x_n) tq
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - a\|_E \leq \frac{1}{n+1}$ i.e $x_n \longrightarrow a$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon$ i.e $f(x_n) \not\longrightarrow f(a)$

D'où l'existence d'une telle suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$ et $f(x_n) \not\longrightarrow f(a)$

D'où le résultat par contraposée.

D'où l'équivalence.

A.2 Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse.

Définition - Application lipschitzienne

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

(1) Soit $K \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est K-lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$

(2) On dit que f est lipschitzienne si $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-lipschitzienne.

Proposition

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.
Alors

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f\ C^0 \text{ sur } A$$

⚠ **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!**

⇝ En effet, en prenant la fonction $f : x \mapsto x^2$, qui est bien $\mathbb{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ mais s'il existait un tel $K \in \mathbb{R}_+$:
on aurait pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |(x+1)^2 - x^2| \leq K$, i.e $|2x+1| \leq K$.

ce qui est absurde car on ne peut borner cette quantité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

DÉMONSTRATION.

f est lipschitzienne, il existe alors $K \in \mathbb{R}_+$ tq f soit K-lip. : i.e $\forall (x,y) \in A^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x-y\|_E$

⇝ Montrons que f est uniformément continue

i.e mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in A^2, \|x-y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$, prenons alors $\eta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, alors $\forall (x,y) \in A^2$ tq $\|x-y\|_E \leq \frac{\varepsilon}{K}$

on a, comme f est K-lip, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x-y\|_E \leq \cancel{K} \frac{\varepsilon}{\cancel{K}}$

d'où $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$

d'où f uniformément continue

⇝ Montrons mtn que unif cont. $\Rightarrow$ cont.

Soit $x \in A$ fixé,

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un $\eta > 0$ tq $\forall y \in A$, $\|y - x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$

f est donc continue pour tout $x \in A$.

D'où f lip $\Rightarrow$ f unif. continue $\Rightarrow$ f continue

D'où le résultat voulu.

A.3 Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordre supérieurs.

Définition - Application dérivable

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

(1) On dit que f est dérivable en a si :

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

On note $f'(a)$ cette limite.

(2) On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout point $a \in I$.

Proposition - Une équivalence pratique

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

On suppose f $\mathcal{C}^0$ sur I. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1 \text{ en } a.$$

Dans ce cas, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

⚠ Faux aux ordres supérieurs !!

Il suffit de prendre la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui n'est pas 2 fois dérivable en 0 mais admet un DL_2 en ce point.

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Si f est dérivable en a, alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

i.e $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = o_{h \to 0}(1)$

$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

donc f admet un DL_1 en a

$\Leftarrow$: Réciproquement, $\exists v \in F$ tq $f(a+h) = f(a) + hv + o(h)$

$\Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v + o(1)$

donc le taux d'accroissement possède une limite finie $\Rightarrow f$ dérivable en a

et $f'(a) = v$

A.4 Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

La fonction
$$f : x \mapsto x^2 \sin(\tfrac{1}{x})$$
est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas $\mathcal{C}^1$. sur $\mathbb{R}$

DÉMONSTRATION.

Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite !}}$

ainsi f' ne dispose pas de limite en $x = 0$!

$\Rightarrow$ f' n'est pas $\mathcal{C}^0$

$\Rightarrow$ f n'est pas $\mathcal{C}^1$

A.5 Somme de Riemann et théorème associé (proposer un exemple)

Définition - Somme de Riemann

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application **continue ou continue par morceaux**.

Soient $[a;b] \subset I$ et $n \in \mathbb{N}$.

(1) On appelle Somme de Riemann (à gauche) la quantité :
$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

(2) Généralement, on aura $a = 0$ et $b = 1$, d'où
$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

EXEMPLE.

Prenons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (\frac{k}{n})^2}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \tan^{-1}(1) - \cancel{\tan^{-1}(0)}$

$= \frac{\pi}{4}$

d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$

A.6 Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq. $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$$

DÉMONSTRATION. f est continue sur $[a;b]$ donc d'après le th. des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes

Soit donc $m = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

Si $m = M$ alors f est constante en tout point $\Rightarrow f' = \tilde{0}$ sur $[a;b]$

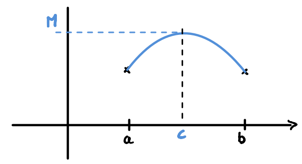
$\Rightarrow$ n'importe quel $c \in [a;b]$ convient !

Sinon puisque $f(a) = f(b)$, les deux extremas ne peuvent pas être atteints aux bornes

supposons, sans perte de qualité, que M n'est pas atteint en a & en b :

$\exists c \in]a;b[$ tq $f(c) = M$, i.e $f'(c) = 0$

car f dérivable sur $]a;b[$ et M un extremum



D'où l'existence d'un tel c

Théorème - Égalité des Accroissements Finis

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]a;b[$.
Alors :

$$\text{Il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉMONSTRATION. Considérons les applications

$$\varphi : \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \end{array}$$

$\psi = f - \varphi$ qui est bien $\mathcal{C}^0$ sur I et dérivable sur $\mathring{I}$

D'autre part, $\left.\begin{array}{l} \varphi(a) = f(a) \\ \varphi(b) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(a) = \psi(b) = 0$

Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a;b[$ tq $\psi'(c) = 0$ i.e $f'(c) = \varphi'(c)$

i.e $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

D'où l'existence recherchée

Théorème - Inégalité des Accroissements Finis

(mm notations). On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+$ tels que $m \leq f' \leq M$.
Alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \underset{\geq}{\cancel{\leq}} y \Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$$

DÉMONSTRATION. On a, d'après l'EAF que $\forall x \geq y \in I$, $\exists c \in]y;x[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{\underbrace{x - y}_{>0}}$ (sinon : trivial)

or $m \leq f' \leq M$

$\Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$

$\longrightarrow$ OK

A.7 Formules de Taylor (Young + reste intégral), démo uniquement de la formule reste intégral

Proposition - Formule de Taylor-Young

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, alors : $\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|b-a|^n)$$

Proposition - Formule de Taylor Reste Intégral

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors : $\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

DÉMONSTRATION. Procédons par récurrence

- $\underline{n=0}$: $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{= f(a)} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{= f(b) - f(a)} = f(b)$

H_1 vraie.

- $\underline{H_n \Rightarrow H_{n+1}}$: On a, par H.R,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

IPP à rédiger...

$$= \quad — \quad + \underbrace{\left[-\frac{(b-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\right]_a^b}_{= 0 + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)} - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

H_{n+1} vraie.

Ce qui clôt la récurrence.

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

Définition - Point adhérent à une partie

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$.
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\forall r > 0, B_f(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

Proposition - Caractérisation séquentielle d'un point adhérent à une partie

(mm notations)
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a$$

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Supposons que $a \in E$ soit adhérent à A

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $r_n = \frac{1}{n+1}$

Ainsi, par hyp, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B_f(a, r_n) \cap A$

On vient alors de construire $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$

tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - a\|_E \leq \underbrace{r_n = \frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

avec donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

D'où l'existence d'une telle suite.

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|x_n - a\|_E \leq \varepsilon$

i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\underbrace{x_n}_{\in A} \in B_f(a, \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $B_f(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

D'où l'adhérence de a.

B.2 Dérivée de $L(f)$ où L est une application linéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie. Soit $f : I \to E$ une application et $L \in \mathcal{L}(E,F)$ (qui se trouve être continue car nous travaillons en dimension finie!).
Soit $a \in I$, on suppose f dérivable en a.
Alors $L(f)$ est dérivable en a et

$$L(f)'(a) = L(f'(a))$$

DÉMONSTRATION.

On montrera plus tard dans l'année que

$\exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in E$, $\|\mathcal{L}(x)\|_F \leq K \|x\|_E$

Soit $h \in \mathbb{R}$ tq $a+h \in I$, alors $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f(a+h)) = \mathcal{L}(f(a)) + h\mathcal{L}(f'(a)) + \underbrace{\mathcal{L}(o(h))}_{= o(h)}$, cf. ci-contre

Ainsi, $\mathcal{L}(f(a+h)) = \mathcal{L}(f(a)) + h\mathcal{L}(f'(a)) + o(h)$

donc $\mathcal{L}(f)$ admet un DL_1 en a

$\Rightarrow \mathcal{L}(f)$ est dérivable en a et $\mathcal{L}(f)'(a) = \mathcal{L}(f'(a))$

Enfin, montrons que $\mathcal{L}(o(h)) = o(h)$

On a : $\exists \varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $o(h) = \varepsilon(h)$

DONC, comme $\mathcal{L}$ est K-lip :

$\|\mathcal{L}(\varepsilon(h))\|_F \leq K \times \underbrace{\|\varepsilon(h)\|_E}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$

d'où $\mathcal{L}(o(h)) = o(h)$

D'où le résultat voulu.

B.3 Dérivée de $B(f,g)$ où B est une application bilinéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F), (G, \|.\|_G)$ 3 $\mathbb{R}$-e.v.n.
Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Soit $a \in I$, supposons E et F de dimension finie ou f $\mathcal{C}^0$.
Si f et g sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ l'est également et :

$$B(f,g)'(a) = B(f',g)(a) + B(f,g')(a)$$

avec $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow F$

DÉMONSTRATION.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tq. $a+h \in I$

Alors
$$\begin{aligned}B(f,g)(a+h) &= B(f(a+h), g(a+h)) \\ &= B(f(a) + hf'(a) + o(h),\ g(a) + hg'(a) + o(h)) \\ &= B(f(a), g(a)) + h\big(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\big) + \underbrace{h^2 B(f'(a), g'(a)) + B(f(a), o(h)) + B(o(h), g(a))}_{(*)\ = o(h)} \\ &= B(f(a), g(a)) + h\big(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\big) + o(h)\end{aligned}$$

Donc $B(f,g)$ admet un DL_1 en a.

$\Rightarrow$ $B(f,g)$ est dérivable en a et $B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$

$(*)$: D'une part, $\|h^2 B'(f',g')(a)\|_G = |h| \times \underbrace{|h| \times \|B'(f',g')(a)\|_G}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} = o(h)$

D'autre part, $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|B(x,y)\|_G \leqslant K \|x\|_E \|y\|_F$

donc $o(h) = h\varepsilon(h)$ avec $h\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

on a alors $\|B(f(a), o(h))\|_G = \|B(f(a), \varepsilon(h))\|_G \leqslant \underbrace{K \|f(a)\|_E \|\varepsilon(h)\|_F}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} \times |h|$

$= o(h)$

De mm pour l'autre.

B.4 Continuité de la fonction "distance à une partie A"

Définition - Fonction "distance à une partie A"

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$. On définit d la fonction distance à A par :

$$d : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf_{a \in A} \|x - a\| \end{array}$$

On note généralement $d(x) = d(x, A)$

Proposition - Continuité de la fonction "distance à une partie A"

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$. On note d la fonction distance à A par . Alors

d est continue.

DÉMONSTRATION. Montrons que la fonction distance est 1-lip.

On a que, $\forall x, y \in E$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_E = \inf_{a \in A} \|x - y + y - a\|$

or $\forall a \in A$, $\|x - y + y - a\| \leqslant \|x - y\|_E + \|y - a\|_E$ d'après l'I.T

donc, en passant à l'inf, on a :

$d(x, A) \leqslant \|x - y\|_E + \inf_{a \in A} \|y - a\|$ i.e $d(x, A) \leqslant \|x - y\|_E + d(y, A)$

ne dépend pas de $a \in A$!

$\Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\|_E$

et sym. des rôles $\Rightarrow d(y, A) - d(x, A) \leqslant \|y - x\|_E = \|x - y\|_E$

d'où $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \|x - y\|_E$

donc d est 1-lip $\Rightarrow$ d est continue

D'où le résultat voulu.

B.5 Inégalité arithmético-géométrique.

Proposition - Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$(x_1 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

DÉMONSTRATION. On a, d'après l'inégalité de Jensen appliquée au logarithme népérien (version concave donc) :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i)}{n} = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

ainsi, par croissance de l'exp, on a : $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

d'où $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}$

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

DÉMONSTRATION.

C.2 Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ avec $I = [a;b]$, $a < b$. On prend $(a_k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ une subdivision régulière de I d'ordre n.

Alors, en posant $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k)$, on a

$$R_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

DÉMONSTRATION.

C.3 Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soient $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.
On prend $(a_k)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ une subdivision régulière de I d'ordre n.
Alors, en posant $T_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$, on a :

$$T_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

DÉMONSTRATION.

C.4 Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$. Soit $a \in I$.
Alors, l'application

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$.

DÉMONSTRATION.

C.5 Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition

$$\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION.

C.6 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes

Proposition - Inégalité de Jensen

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ t.q $\sum_i \lambda_i = 1$.
Alors,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

DÉMONSTRATION.

C.7 Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Proposition - Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On a :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in I^3, x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

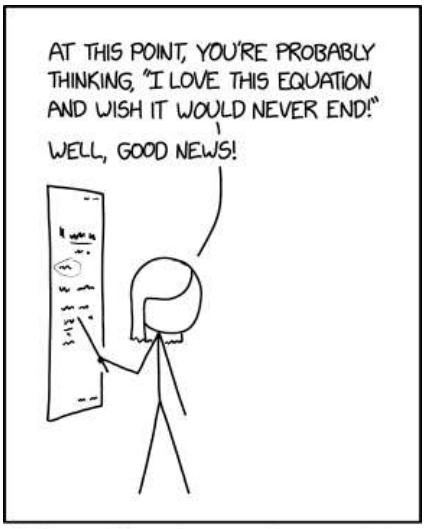
Démonstration.

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.