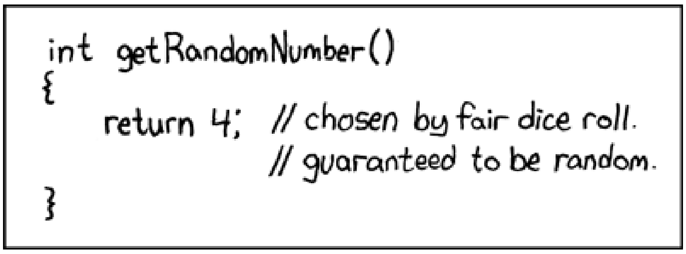
Programme de khôlle

Semaine 16
Groupe C
Variables aléatoires



xkcd n°221

Pierre BODET

Exercice 15 : (Centrale MP 2019)

1. Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\overline{b})$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.
2. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. Donner une expression et un équivalent de p_n.

---

1. En effectuant le tableau de variation de $P(X) = X^3 - X^2 - X - 1$, on obtient

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		1		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	< 0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dès lors, $\exists! a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$ (TVI) et $a \in]1;2[$. Or, $\forall x \in]1;2[$, $P'(x) > 0$ donc $P'(a) \neq 0 \Rightarrow a$ est racine simple. De plus, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(P) = 3$, donc les deux autres racines complexes sont non réelles conjuguées. D'après la relation coefficients-racines, $ab\overline{b} = 1 \Rightarrow |b|^2 = 1/a < 1 \Rightarrow |b| < 1$.

2. Notons X = rang de la première séquence PPP. $X(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$. $p_n = P(X = n)$ avec $n \geq 3$.

Soit Y = rang du premier face. $Y(\Omega) = [\![1; +\infty[\![$.

$\Omega = (Y=1) \bigsqcup (Y=2) \bigsqcup (Y=3) \bigsqcup (Y \geq 4)$.

Pour $n \geq 3$, $(X = n+3) = (Y = 1, X = n+3) \bigsqcup (Y = 2, X = n+3) \bigsqcup (Y = 3, X = n+3) \bigsqcup (Y \geq 4, X = n+3)$.

Or, $(Y \geq 4, X = n+3) = \emptyset$, donc

$$p_{n+3} = P(Y=1)P_{(Y=1)}(X = n+3) + P(Y=2)P_{(Y=2)}(X = n+3) + P(Y=3)P_{(Y=3)}(X = n+3).$$

Ainsi,

$$p_{n+3} = \frac{1}{2} \times p_{n+2} + \frac{1}{4} \times p_{n+1} + \frac{1}{8} \times p_n.$$

En multipliant par 2^{n+3},

$$2^{n+3} p_{n+3} = 2^{n+2} p_{n+2} + 2^{n+1} p_{n+1} + 2^n p_n.$$

Dès lors, en posant $u_n = 2^n p_n$, on a

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n.$$

De plus, $p_3 = \frac{1}{8}$, $p_4 = \frac{1}{16}$ et $p_5 = \frac{1}{16}$. On peut alors fixer u_0, u_1 et u_2.

Méthode 1 : Matrice (autres méthodes (séries entières ou algèbre) non recopiées, voir ses exercices)

On note

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

On a alors$X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:= \mathrm{A}} \times X_n$.

Par récurrence immédiate,

$$X_n = A^n \times X_0.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\overline{b}),$$

scindé simple (d'après la question 1).

A est donc diagonalisable :

$$\exists P \in GL_3(\mathbb{C}) \text{ tel que } A = P\Delta P^{-1}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \overline{b} \end{pmatrix}.$$

Immédiatement,

$$A^n = P\Delta^n P^{-1},$$

donc

$$X_n = P\Delta^n P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

La première coordonnée donne

$$u_n = \alpha a^n + \beta b^n + \gamma \overline{b}^n,$$

et l'on trouve les valeurs de α, β et γ via u_0, u_1 et u_2.

Si $\alpha \neq 0$, alors

$$u_n \sim \alpha a^n \quad \text{donc} \quad p_n \sim \alpha \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

Exercice 16 : (TPE MP 2019)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}((X-m)^2)$.
2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $P(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

1. $\varphi(m) = \mathbb{E}(X^2 - 2mX + m^2) = m^2 - 2m\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2)$.

   φ est minimale si $m = \frac{2\mathbb{E}(X)}{2} = \mathbb{E}(X)$.
2. $P(X \in [a,b]) = 1$. $\Omega = (X \in [a,b]) \bigsqcup (X \notin [a,b])$.

   On suppose que $X(\Omega) \subset [a,b]$. Montrons que $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

   $\varphi(m) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x-m)^2 P(X=x)$. Or, $m = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{2} \leq x - m \leq \frac{b-a}{2}$, i.e. $|x-m|^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

   Donc,
   $$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{(b-a)^2}{4} P(X=x) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

   Or, $\forall m \in \mathbb{R}, \varphi(m) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$. Donc,
   $$\varphi(\mathbb{E}(X)) = V(X) \leq \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 17 : (Mines MP 2023)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $X_1 + X_2$ suit la même loi que $2X_1$ avec $X_1 \geq 0$. Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

1. **Si** $X_1 \in L^2$

   On a $V(X_1 + X_2) = V(2X_1) = 4V(X_1)$.

   Or, X_1 et X_2 sont indépendantes, donc $V(X_1 + X_2) = 2V(X_1)$.

   On en déduit $V(X_1) = 0$.

   C'est pourquoi $\mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2) = 0$.

   Or, $(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 \geq 0$, donc $X_1 - \mathbb{E}(X_1) = 0$ presque sûrement, et donc $X_1 = \mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement.
2. **Cas général**

   Posons $Z_1 = e^{-X_1}$ et $Z_2 = e^{-X_2}$.

   $X_1 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq Z_1 \leq 1$, donc Z_1 admet des moments à tout ordre, en particulier $Z_1 \in L^2$.

   Dès lors,
   $$X_1 + X_2 \rightsquigarrow 2X_1 \Rightarrow e^{-(X_1+X_2)} \sim e^{-2X_1}.$$

   Donc, $e^{-X_1} \cdot e^{-X_2} \sim e^{-2X_1}$.

   Ces variables aléatoires sont bornées, donc elles appartiennent à L^2.

   D'après ce qui précède, on a donc le résultat voulu.

Exercice 18 : (Mines MP 2022)

Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $Y = \sum_{i=0}^{N} X_i$. Par définition :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Déterminer la loi de Y.

$$\Omega = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (N = n), \quad Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (Y = k) = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (N = n, Y = k)$$

Dès lors, $P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) \times P_{N=n}(Y = k)$

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=k-1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k-1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} (1-p)^n \\
&\underset{n'=n-k+1}{=} \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n'+k-1}}{n'!} \frac{n'+k}{(n'!)} (1-p)^{n'+k} \\
&= \lambda^{k-1} \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+k}{n!} (\lambda(1-p))^n}_{:= S}
\end{aligned}$$

Et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{(n-1)!} + k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}$.

$$S = \lambda(1-p) e^{\lambda(1-p)} + k e^{\lambda(1-p)}$$

C'est pourquoi $P(Y = k) = \lambda \dfrac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \times (\lambda(1-p) + k) e^{\lambda(1-p)}$.

Exercice 19 : (Centrale MP 2021)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = X - Y$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.
2. a) Déterminer la loi conjointe du couple (U,V), puis les lois de U et de V.
   b) Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que :
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \quad P((U=n)\cap(V=m)) \neq 0.$$
   Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

1. $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ donc
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$
   De même pour Y.
2. a) $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $V(\Omega) = \mathbb{Z}$.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (U=n, V=k)$$
   Si $k \geq 0$,
$$(U=n, V=k) = (Y=n, X=n+k).$$
$$P(U=n,V=k) = p(1-p)^{n-1}\cdot p(1-p)^{n+k-1} = p^2(1-p)^{2n+k-2}.$$
   Si $k < 0$,
$$(U=n, V=k) = (X=n, Y=n-k).$$
$$P(U=n,V=k) = p(1-p)^{n-1}\cdot p(1-p)^{n-1-k} = p^2(1-p)^{2n-2-k}.$$
   Dans tous les cas,
$$P(U=n,V=k) = p^2(1-p)^{2n-2+|k|}.$$
$$(U=n) = \bigsqcup_{k=-\infty}^{+\infty} (U=n, V=k).$$
$$P(U=n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2+|k|} = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2+k} \underset{k'=k}{+} \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2+k}.$$
$$= 2\frac{p^2(1-p)^{2n-2}}{1-(1-p)} - p^2(1-p)^{2n-2}.$$
$$= (2-p)p(1-p)^{2n-2}.$$
$$U \rightsquigarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2) = \mathcal{G}(p(2-p)).$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (V=k) = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (U=n, V=k).$$
$$P(V=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2+|k|} = \frac{p^2(1-p)^{|k|}}{1-(1-p)^2} = \frac{p^{\cancel{2}}(1-p)^{|k|}}{\cancel{p}(2-p)}.$$
   b) U et V sont indépendantes car
$$P(U=n)P(V=k) = P(U=n, V=k).$$
3.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (U=n, V=0) = (X=n, Y=n).$$
$$\text{Donc } \underbrace{P(U=n)P(V=0)}_{\text{non nulles}} = P(X=n)P(Y=n) = P(X=n)^2 \quad (A).$$
$$P(U=n, V=1) = (X=n+1, Y=n),$$
$$\text{donc } 0 \neq P(U=n)P(V=1) = P(X=n+1)P(Y=n) = P(X=n+1)P(X=n) \quad (B).$$
$$\text{Dès lors, } \frac{(B)}{(A)} = \frac{P(X=n+1)}{P(X=n)} = \underbrace{\frac{P(V=1)}{P(V=0)}}_{\text{1-p}} = \text{constante}.$$
$$\text{On a donc } X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p) \text{ avec } p = 1 - \frac{P(V=1)}{P(V=0)}.$$

Exercice 20 : (Mines MP 2023)

Soient A, B et C des variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit l'équation différentielle $Ay'' + By' + Cy = 0$ et $p(\lambda)$ la probabilité pour que les solutions de cette équation s'annulent une infinité de fois. Montrez que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) = 1$.

L'équation caractéristique de cette équation différentielle a pour discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$.

Or, les solutions de cette équation différentielle s'annulent une infinité de fois si et seulement si on est en régime pseudo-périodique, donc si et seulement si $\Delta < 0$.

Ainsi, $p(\lambda)$ = proba que $\Delta < 0$, c'est-à-dire la probabilité que $B^2 < 4AC$.

Soit $\epsilon > 0$.

$$P\left(|X - \lambda| > \lambda\epsilon\right) \underset{\text{Bienaymé-Tchebychev}}{\leq} \frac{\lambda}{\lambda^2\epsilon^2} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc, quand λ tend vers l'infini, A, B et $C \in [\lambda(1-\epsilon); \lambda(1+\epsilon)]$ presque sûrement.

Dès lors,

$$B^2 - 4AC \leq (\lambda(1+\epsilon))^2 - 4(\lambda(1+\epsilon))^2 \leq -3\lambda^2 + 10\lambda^2\epsilon - 3\lambda^2\epsilon^2.$$

Pour ϵ assez petit, on a donc $B^2 - 4AC < 0$, donc quand λ tend vers l'infini, on a $\Delta < 0$ presque sûrement.

C'est pourquoi

$$\lim_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) = 1.$$

Exercice 21 : (Mines MP 2023)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

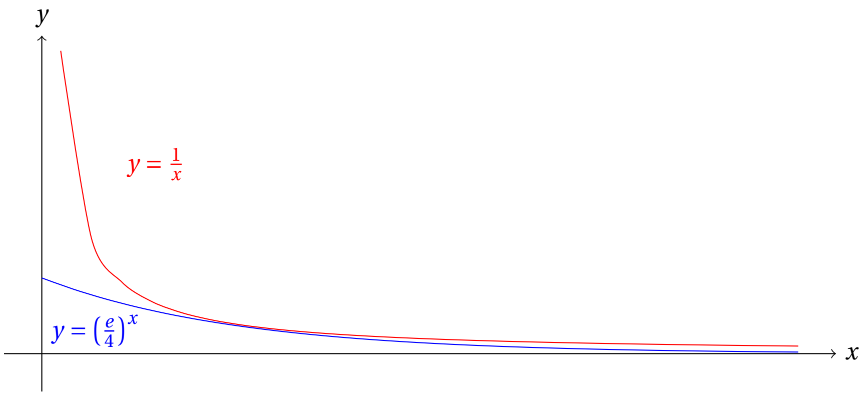
$$P(X \geq 2\lambda) = P(e^{tX} \geq e^{2t\lambda}) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{2t\lambda}} = \frac{G_X(t)}{e^{2t\lambda}} = \frac{e^{\lambda(e^t-1)}}{e^{2t\lambda}}.$$

En particulier, pour $t = \ln(2)$,

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(2-1)}}{e^{2\ln(2)\lambda}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$

D'après Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(X \geq 2\lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) \leq \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$



On avait donc trouvé une meilleure majoration que celle fournie par Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 22 : (Mines MP 2021)

Soient X et Y deux variables indépendantes, strictement positives et de même loi. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

Comme X et Y sont indépendantes et de même loi, on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right). \tag{A}$$

D'après l'inégalité à connaître,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{donc} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

En posant $a = \frac{X}{Y}$ et $b = \frac{Y}{X}$, on a :

$$\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} \geq 2\sqrt{\frac{X}{Y} \times \frac{Y}{X}} = 2\sqrt{1}.$$

C'est pourquoi :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) \geq \mathbb{E}(2) = 2.$$

Donc, d'après (A),

$$2\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 2 \quad \text{donc} \quad \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1.$$

Exercice 23 : (Mines MP 2021)

Soit $r > 0$

1. Montrer que la relation suivante : $P(X = k) = \int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r dx$ définit bien une probabilité d'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
2. Préciser pour quelle valeur de r la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

1. — $r > 0$ et $x \in [0;1]$ donc $r x^{k-1}(1-x)^r \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, pour tout k, $P(X = k) \geq 0$.

   —
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r dx$$

   Par convergence uniforme, car $|x| < 1$, on a

$$P(X=k) \underset{k'=k-1}{=} \int_0^1 r(1-x)^r \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) dx = \int_0^1 r\frac{(1-x)^r}{1-x} dx = [-(1-x)^r]_0^1 = 1$$

   C'est donc bien une probabilité.

2.
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r dx = \int_0^1 r(1-x)^r \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\right) dx$$

   Or,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   C'est pourquoi,
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 r\frac{(1-x)^r}{(1-x)^2} dx = \int_0^1 r\frac{1}{(1-x)^{2-r}} dx$$

   Or, cette intégrale converge si et seulement si $2 - r < 1$, donc si $r > 1$.

   Dans ce cas,
$$\mathbb{E}(X) = r\int_0^1 (1-x)^{r-2} dx = r\left[\frac{(1-x)^{r-1}}{r-1}\right]_0^1 = \frac{r}{r-1}$$

Exercice 24 : (X MP 2021)

On considère une urne avec 10000 boules dont 6000 rouges et 4000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules. Déterminer la probabilité pour qu'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages. (chercher du côté des chemins de Dyck et du problème du scrutin : DM 13 (Problème 1 Partie II) de l'année dernière)

On va représenter le résultat par une marche aléatoire pour laquelle on avance de (1,1) si on tire une boule rouge et on avance de (1,-1) si on tire une boule verte. Posons Ω, l'ensemble des 10000-uplets d'éléments inclus dans $\{R, V\}$. Notons E l'événement représentant qu'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages.

— Un élément de Ω est entièrement déterminé par l'emplacement des éléments valant R, les autres éléments valant automatiquement V. Puisqu'on trouve 6000 fois R sur 10000 emplacements, par principe multiplicatif, on a

$$\text{card}(\Omega) = \binom{10000}{6000}.$$

— **Principe de réflexion : Montrons que le nombre de chemins reliant $(1,1)$ à $(10000,2000)$, tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(1,1)$ à $(10000,2000)$.**

À tout chemin reliant $(1,1)$ à $(10000,2000)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée nulle, on associe un chemin reliant $(1,1)$ de la façon suivante : Si on note α le premier moment où le chemin touche l'axe des abscisses, on lui associe le chemin « miroir » entre l'instant 1 et l'instant α, c'est-à-dire le symétrique par rapport à l'axe des abscisses entre les instants 1 et α, le chemin étant inchangé après l'instant α. Montrons que cela définit bien une bijection entre les chemins reliant $(1,1)$ à $(10000,2000)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée nulle, et les chemins quelconques reliant $(1,1)$ à $(10000,2000)$:

• Si deux chemins ont la même image, alors ils sont égaux car, avant α, le premier contact avec l'axe des abscisses, ils sont opposés au chemin image, donc égaux, et après, ils sont égaux au chemin image, donc égaux entre eux. On a donc bien une injection.

• Tout chemin reliant $(1,1)$ à $(10000,2000)$ a un antécédent : le chemin qui coïncide avec lui à partir de α, le premier moment où ce chemin touche l'axe des abscisses, et qui est symétrique par rapport à l'axe des abscisses avant α. D'où la surjectivité.

On a une bijection, donc on a le résultat.

— $\overline{E}$ est constitué de tous les chemins qui commencent par une descente et de tous les chemins commençant par une montée puis qui touchent l'axe des abscisses. On a donc

$$\text{card}(E) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\overline{E}) = \binom{10000}{6000} - 2 \times \underbrace{\binom{9999}{6000}}_{\text{nombre de chemins reliant } (1,-1) \text{ à } (10000,2000)}.$$

Dès lors,

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{10000}{6000} - 2 \times \binom{9999}{6000}}{\binom{10000}{6000}} = 1 - 2 \times \frac{\cancel{9999!}}{\cancel{6000!} \times \cancel{3999!}} \times \frac{\cancel{6000!} \times 4000\cancel{!}}{10000\cancel{!}} = 1 - 2 \times \frac{4\cancel{000}}{10\cancel{000}} = 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Plus généralement, via le même raisonnement, on prouve que si on a a boules rouges et b boules vertes, la probabilité recherchée vaut

$$\frac{a-b}{a+b}.$$

Pour une preuve plus "théorique", voir l'exercice 55 du chapitre 26 de l'année dernière