# Colles MPi* Semaine n°12 du 02/12/2024 au 06/12/2024 (Programme n°7)

Vallaeys Pascal

16 novembre 2024

## Thème : Suites et séries de fonctions.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

**Liste des élèves du groupe A :**

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

**Liste des élèves du groupe B :**

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier
- Martinsse

**Liste des élèves du groupe C :**

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

## 1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

### 1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonction.
- La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple (« démo »). Contre-exemple pour la réciproque. (démo)

- Théorème de continuité pour les suites de fonctions. (démo)
- Théorème de la double limite pour les suites de fonctions.
- Théorème d'intégration sur un segment des suites de fonctions (démo)
- Théorème de « dérivation » des suites de fonctions.
- Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions.
- Théorème de continuité pour les séries de fonctions + application à zêta.
- Théorème de la double limite pour les séries de fonctions + application à zêta au voisinage de $+\infty$ .
- Théorème d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions + application à zêta.
- Théorème de « dérivation » pour les séries de fonctions + application à zêta.
- Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment.
- Théorème de Weierstrass.

### 1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Th de « dérivation » des suites de fonctions. (démo)
- Th de « primitivation » des suites de fonctions sur des segments. (démo)
- Pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS (démo de la première implication)
- Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement. (démo)
- Extension $C^k$ du théorème de "dérivation" + application à la fonction zêta.
- Équivalent de zêta au voisinage de $1^+$ à l'aide d'une comparaison intégrale. (démo)
- Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale de cette série de fonctions. (démo)

### 1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Limite de zéta en $1^+$ en « epsilon ». (non fait en cours)
- La fonction zêta est log-convexe. (démo)
- Démonstration du théorème de la double limite (démo HP)
- Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment. (démo)

## 2 Exercices de référence

### 2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

**Exercice 1 :** (Mines télécom MP 2022)

On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est continue sur son domaine.
3. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Donner le tableau de variation de $f$.
5. Donner la limite de $f$ en $+\infty$.

**Exercice 2 :**

Soit $\alpha$ un réel. Pour tout entier naturel n, on définit $f_n : \begin{array}{c} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \to n^\alpha x^n (1-x) \end{array}$.

a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonction.

b) Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha$ cette convergence est-elle uniforme ?

**Exercice 3 :** Fonction zéta de Riemann

Pour tout réel x, strictement supérieur à 1, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$.

c) Montrer que $\zeta$ est de classe $C^\infty$ et calculer ses dérivées successives.

d) Etudier les variations de $\zeta$.

e) Montrer que $\zeta$ est convexe.

f) Montrer que $\ln(\zeta)$ est convexe.

## 2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

**Exercice 4 :**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose : $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.
1) Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
2) Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3) Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

**Exercice 5 :** (Mines télécom MP 2021)
Soit $f \in C^0([a,b])$ telle que tous ses moments sont nuls i.e. $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b x^k f(x)\,dx = 0$
1) Rappeler le théorème de Weierstrass
2) Montrer que $f$ est nulle

**Exercice 6 :** (IMT MP 2019)
Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$ et $(P'_n)$ converge uniformément vers $f'$ sur $[0,1]$.

## 2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

**Exercice 7 :**
On note $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Pour tout réel x de D, on pose $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2}$.
1) Montrer que $f$ est correctement définie, continue et 1-périodique sur D.
2) On pose pour tout réel x de D, $g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$. Montrer que $g$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer alors que pour tout réel x, $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4.g(x)$. En déduire que pour tout réel x de D, la valeur de $f(x)$.
4) Montrer alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Exercice 8 :** (Magistère MP 2022)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $K$-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction $u$.
Montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice 9 :** Théorème de Weierstrass : preuve par convolution
Soit n un entier naturel. On pose $a_n = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n dt$, et on considère la fonction $\varphi_n : x \to \frac{1}{a_n}\left(1-x^2\right)^n$

1. Calculer $\int\limits_{0}^{1} t\left(1-t^2\right)^n dt$ et en déduire que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$
2. Soit a $\in ]0, 1]$. Montrer que $(\varphi_n)$converge uniformément vers la fonction nulle sur [a, 1].
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction continue nulle en dehors de $[-1/2,\ 1/2]$. Montrer que f est uniformément continue. On pose $f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x-t)\,\varphi_n(t)\,dt$ pour tout réel x.
4. Montrer que $f_n$ est une fonction polynomiale sur $[-1/2,\ 1/2]$.
5. Montrer que $f(x) - f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} (f(t) - f(x-t))\,\varphi_n(t)\,dt$.
6. En déduire que $(f_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$
7. Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de [−a, a]. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.
8. Soit f une fonction réelle continue sur [a, b]. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

**Exercice 10 :** Polynômes de Bernstein. Pour tout entier nature n et tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $B_{n,k}(x) = \dbinom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\sum_{k=0}^{n} k.B_{n,k}(x)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2.B_{n,k}(x)$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n} - x)^2.B_{n,k}(x)$
3. Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On note $A = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/\, \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha\right\}$ et $B = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/\, \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}$. Montrer que $\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.
4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.
5. Conclusion ?

**Exercice 11 :** (Mines MP 2023)
Soit $S$ un segment non trivial de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction de classe $C^2$ de $S$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est convexe si, et seulement si, il existe une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers $f$.

**Exercice 12 :** (ENS MP 2022)
Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bornée.
2. On pose $\alpha = -\frac{ln(a)}{ln(b)}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} cos(b^n \pi x).$$

3. Montrer que $f_{a,b}$ est $\alpha$-höldérienne, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}.$$

# 3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,27,48,53,54.

# 4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : suites et séries de fonctions. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

# 5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°7
- Groupe 5 à 7 : Programme n°7
- Groupe 8 à 11 : Programme n°7
- Groupe 12 à 14 : Pas de colle de math cette semaine