

TD Thermodynamique

Conduction thermique

Régime statique

1 Exercices à géométrie cartésiennes

Dans ces exercices, on se ramène à un problème unidimensionnel avec deux invariances par translation, donc où les grandeurs ne dépendent que d'un paramètre cartésien (et du temps).

1.1 Sensation de chaud ou de froid

(Mines Télécom MP 2022) Il est bien connu que, en général, un métal paraît plus froid au toucher que du bois. Expliquons ce phénomène par une modélisation simple.

Deux cylindres de même section, latéralement isolés, de même axe Ox , de conductivités thermiques respectives λ_1 et λ_2 , de longueurs respectives L_1 et L_2 , sont mis bout à bout, l'interface se trouvant en $x = 0$. Les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ sont maintenues aux températures respectives T_1 et T_2 .

En régime stationnaire, déterminez la température de l'interface. Application numérique pour un contact main-bois ou main-acier. Commentez.

Données : $T_1 = 37^\circ\text{C}$ (main), $T_2 = 20^\circ\text{C}$ (bois ou acier), $L_1 = L_2$; $\lambda_1 = 10\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$ (main); $\lambda_2 = 1\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$ (bois); $\lambda_2 = 100\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$ (acier).

1.2 Double vitrage

(CCP PC 2015) On veut comparer les performances énergétiques d'un simple vitrage et d'un double vitrage.

1. Soit une vitre d'épaisseur e , de surface S et de conductivité thermique λ . La température est T_e à l'extérieur et T_i à l'intérieur. Calculez la résistance thermique de la vitre R_{th} et le flux thermique Φ qui la traverse.
2. Un double vitrage est constitué de deux vitres de même épaisseur e , de même surface S et de même conductivité thermique λ , séparées par une couche d'air d'épaisseur e' et de conductivité λ' . Mêmes questions et commentaire.
3. Déterminez le champ de température dans le double vitrage en régime permanent.

Données : $\lambda = 1,2\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$; $\lambda' = 0,025\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$; $e = e' = 1\text{ mm}$; $T_e = 7^\circ\text{C}$; $T_i = 17^\circ\text{C}$; $S = 0,5\text{ m}^2$.

1.3 Création d'entropie dans une barre

(IMP MP 2019) On dispose d'une barre métallique de surface calorifugée, de longueur L , de section S et de conductivité thermique λ . On note $T(x = 0) = T_0$ et $T(x = L) = T_1$. On suppose le régime permanent établi.

1. Calculez $T(x)$.
2. Calculez l'entropie créée par unité de temps \dot{S}_c . Quelle en est la cause?

1.4 Accumulation de neige sur un toit

(Centrale MP 2018) Le toit d'un chalet est incliné de 30° par rapport à l'horizontale. Les murs et le toit sont en bois d'épaisseur $e = 20\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 0,15\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$. Il fait $T_e = -15^\circ\text{C}$ dehors et une température T_i inconnue à l'intérieur.

Il neige, à raison de $D = 2,1\text{ kg h}^{-1}\text{ m}^{-2}$. On note $\mu = 30\text{ kg m}^{-3}$ la masse volumique de la neige et $\lambda' = 0,11\text{ W K}^{-1}\text{ m}^{-2}$ sa conductivité thermique.

On admet que, lorsque la température de la surface de neige au contact du toit atteint 0°C , la couche de neige glisse du toit. C'est ce que l'on observe au bout de 2 h. Calculez T_i .

2 Exercices dans d'autres géométries

Dans le cas général (tridimensionnel), l'équation de la chaleur est :

$$\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0 \quad (1)$$

On se limitera le plus souvent à des cas unidimensionnels :

- en cartésiennes : deux invariances par translation, donc $T(z, t)$
- en cylindriques : une invariance par translation et une par rotation, donc $T(r, t)$
- en sphériques : deux invariances par rotation, donc $T(r, t)$

Le laplacien en cylindriques ou en sphériques n'étant pas exigible, il faut refaire la preuve de l'équation de la chaleur pour le retrouver. La méthode est la même qu'en cours, mais la « tranche » de système devient une « coquille » (cylindrique ou sphérique), et les deux « extrémités » du système n'ont pas même aire (par exemple en sphériques, ce sont des sphères de rayons différents, r et $r + dr$).

2.1 Préliminaire : résistance thermique

L'expression de la résistance thermique R_{th} dépend de la géométrie du système. Construisez cette expression dans les trois cas unidimensionnels listés dans le paragraphe précédent.

- Géométrie cartésienne : \vec{j}_Q est de direction constante, entre deux plans distants de L (cas vu en cours).
- Géométrie cylindrique : \vec{j}_Q est selon \vec{u}_r en cylindriques, entre deux cylindres de rayons R_1 et R_2 et de même longueur L .
- Géométrie sphérique : \vec{j}_Q est selon \vec{u}_r en sphériques, entre deux sphères de rayons R_1 et R_2 .

La méthode est toujours la même : équation de la chaleur en régime statique, calcul de la température quand celle-ci est fixée aux deux extrémités, loi d'Ohm thermique, identification de la résistance.

Vous devez trouver :

$$R_{th} = \begin{cases} \frac{L}{\lambda S} & \text{en cartésiennes} \\ \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) & \text{en cylindriques} \\ \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_1 R_2 \lambda} & \text{en sphériques} \end{cases} \quad (2)$$

2.2 Barreau d'uranium

(CCP MP 2013) On considère un cylindre infini d'uranium de diamètre $D = 29$ mm. Les réactions nucléaires engendrent une puissance volumique $P_V = 250 \text{ MW m}^{-3}$. Il est plongé dans un milieu à température constante $T_s = 200^\circ\text{C}$ de sorte que l'extérieur du cylindre est à T_s . Le barreau a une conductivité $\lambda = 27 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$. On note le courant thermique dans le cylindre \vec{j}_Q .

1. (a) Déterminez la direction de \vec{j}_Q .
(b) En régime permanent, en faisant un bilan de conservation de l'énergie pour un morceau de cylindre de largeur dr et de hauteur h quelconque, déterminez \vec{j}_Q .
(c) Déduisez-en le profil de température dans le barreau.
(d) Quelle est la température maximale dans le barreau ? Application numérique. Commentez, sachant que la température de fusion de l'uranium est de 1232°C .
2. On fait maintenant un trou cylindrique de même axe dans le barreau, de diamètre $d = 2$ mm. La surface interne du barreau est calorifugée.
(a) Quel est le nouveau profil de température ?
(b) Quelle est la nouvelle température maximale ?

2.3 Épaisseur d'un igloo

Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs d'un igloo contenant un seul habitant si la température extérieure est de -20°C ?

La conductivité de la glace sera prise égale à $\lambda = 0,05 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, la température intérieure minimale nécessaire à la survie est de 10°C et considérera que le métabolisme de l'habitant dégage une puissance $P = 50 \text{ W}$.