Suites et séries de fonctions

Vallaeys Pascal

16 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,27,48,53,54

Méthodes de base :

- Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
- Montrer la convergence normale ou uniforme d'une série de fonctions.
- Montrer la continuité d'une fonction somme d'une série de fonctions.
- Montrer la dérivabilité (C^1) d'une fonction somme d'une série de fonctions.
- Intégrer terme à terme une série de fonctions sur un segment.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)

On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Donner la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2022)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \min\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur des ensembles à préciser.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose : $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.
1) Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
2) Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3) Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 4 : (Mines télécom PC 2021)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \beta]$?
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2021)

Soit $f \in C^0([a,b])$ telle que tous ses moments sont nuls i.e. $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b x^k f(x)\,dx = 0$
1) Rappeler le théorème de Stone-Weierstrass
2) Montrer que f est nulle
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Si P est un polynôme, comment s'écrit $\int_a^b P(x) f(x)\,dx$?
Commentaires divers :

Du modérateur : il s'agit du "simple" théorème d'approximations de Weierstrass

Exercice 6 : (IMT MP 2019)
Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et (P'_n) converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

Exercice 7 :
Soit α un réel. Pour tout entier naturel n, on définit $f_n : \begin{matrix} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \to n^\alpha x^n (1-x) \end{matrix}$.
a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonction.
b) Pour quelles valeurs du paramètre α cette convergence est-elle uniforme ?

Exercice 8 :
On pose $f_n(x) = \frac{2^n.x}{1+n.2^n.x^2}$.
a) Etudier le domaine de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note f la limite.
b) Comparer $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 f$.
c) Qu'en déduisez-vous en termes de convergence uniforme ?

Exercice 9 :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées.
a) Montrer que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge uniformément vers $f+g$.
b) Montrer que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge uniformément vers fg.

Exercice 10 : Fonction zéta de Riemann
Pour tout réel x, strictement supérieur à 1, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
a) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x) = +\infty$.
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
c) Montrer que ζ est de classe C^∞ et calculer ses dérivées successives.
d) Etudier les variations de ζ.
e) Montrer que ζ est convexe.
f) Montrer que $\ln(\zeta)$ est convexe.

Exercice 11 :
On suppose qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$de [a, b] vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers f continue et on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$d'éléments de [a, b] convergeant vers x. Montrer que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Exercice 12 :
On note $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Pour tout réel x de D, on pose $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2}$.
1) Montrer que f est correctement définie, continue et 1-périodique sur D.
2) On pose pour tout réel x de D, $g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$. Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer alors que pour tout réel x, $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4.g(x)$. En déduire que pour tout réel x de D, la valeur de $f(x)$.
4) Montrer alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13 : (Mines télécom MP 2022)
Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+\frac{x}{n})$. Montrer que f est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 14 : (Mines MP 2023)
1. Soit $c > 2$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant
$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x)$. Montrer que $f = 0$.
2. Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x-n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \ x}$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour l'exercice 1 : Trouver un intervalle qui pour tout x dans cet intervalle contient $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ et considérer le sup de f sur cet intervalle.

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2023)
Calculer : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

Exercice 16 : (Magistère MP 2022)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions K-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction u.

Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 17 : (Mines MP 2022)
On étudie $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}$

a) Donner le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est continue sur D.
c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 18 : Théorème de Weierstrass : preuve par convolution
Soit n un entier naturel. On pose $a_n = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n dt$, et on considère la fonction $\varphi_n : x \to \frac{1}{a_n}\left(1-x^2\right)^n$

1. Calculer $\int\limits_{0}^{1} t\left(1-t^2\right)^n dt$ et en déduire que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$
2. Soit]0, 1]. Montrer que (φ_n)converge uniformément vers la fonction nulle sur [, 1].
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction continue nulle en dehors de $[-1/2,\ 1/2]$. Montrer que f est uniformément continue. On pose $f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x-t)\,\varphi_n(t)\,dt$ pour tout réel x.
4. Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-1/2,\ 1/2]$.
5. Montrer que $f(x) - f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} (f(t) - f(x-t))\,\varphi_n(t)\,dt$.
6. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$
7. Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de [−a, a]. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.
8. Soit f une fonction réelle continue sur [a, b]. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 19 : Polynômes de Bernstein. Pour tout entier nature n et tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k.B_{n,k}(x)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2.B_{n,k}(x)$.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{k}{n}-x)^2.B_{n,k}(x)$
3. Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On note $A = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/\, \left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \alpha\right\}$ et $B = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/\, \left|\frac{k}{n}-x\right| < \alpha\right\}$. Montrer que $\sum\limits_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.
4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
5. Conclusion ?

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 20 : (CCINP MP 2023)
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = n^x \mathrm{e}^{-nx}$. Soit $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$.
1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 21 : (CCINP MP 2023)
On pose $f_n(t) = \frac{\exp(-nt^2)}{n^2+t^2}$
1. Montrer que la série des f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On notera f sa somme.
2. Montrer que $f(0) = 1$
3. Construire un tableau de variations de f_n' .
4. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 22 : (CCINP MP 2023)
Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on pose $f_n(x) = \frac{1-x^{2n+2}}{1+x}$.
1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur son intervalle de convergence simple.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t) \mathrm{d}dt$.
4. Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]-1, 1[,\ f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k+1}$.
5. Montrer que $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et calculer sa somme à l'aide des questions précédentes.

Exercice 23 : (CCINP MP 2023)
Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{R}$, on considère $f_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2}$.
1. Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
On note S sa somme.
2. Étudier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \pi$.
Indication : on pourra considérer, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $t \mapsto \frac{2x}{x^2+t^2}$.

Exercice 24 : (Mines télécom MP 2023)
1. Montrer la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. On pose $u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n})$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
a) Étudier la convergence simple, puis la convergence normale de S.
b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer S'.

Exercice 25 : (CCINP MP 2022)
On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x > 0$.
1. Justifier l'existence et le caractère $\mathcal{C}^1$ de S, puis donner une expression de $S'(x)$.
2. En déduire la monotonie de S.
3. Montrer que $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et en déduire un équivalent simple de S en 0^+.

Exercice 26 : On pose $f_n(x) = th\,(x+n) - th\,(n)$.
1) Déterminer le mode de convergence de la série de fonctions associée.
2) On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que S est croissante et continue.
3) Montrer que pour tout réel x, on a $S\,(x+1) = S\,(x) + 1 - th(x)$.

Exercice 27 : (TPE MP)
Montrer que $\psi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}$ est solution de $y'' + e^t y = 0$.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 28 : (Centrale MP 2023)
Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha \geqslant 2$ et $\beta \in]1, +\infty[$, on pose :
$f_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.
1. Donner les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries de fonctions.
2. On suppose que $\alpha < \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $\alpha \geqslant \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas dérivable en 0. En déduire une condition pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit de classe $\mathcal{C}^k$, mais non $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29 : (Centrale MP 2023)
Soit $T \in \mathbb{R}^+$. Soient f et g deux fonction à valeurs réelles :
$f \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T-périodique.
On considère $\omega(f,t) = \sup\{|f(x) - f(y)|$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant t\}$
1. a) Énoncer la définition de la continuité uniforme pour une fonction réelle et rappeler le théorème de Heine.
b) Montrer que $\lim_{t\to 0} \omega(f,t) = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^T f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\right)$
3. Une intégrale très moche à calculer, que je n'ai pas pu aborder.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
2) L'idée est de réécrire l'intégrale de gauche en utilisant Chasles pour les intégrales, avec une expression de la forme suivante :
$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} quelque\_chose(x)dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} autre\_chose(x)dx$. Ensuite, on montre que l'un des terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ en utilisant vraisemblablement la question précédente, et que le second correspond à $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \int_0^T g(x)dx$ en utilisant la T-périodicité de g.
Commentaires divers : Il est possible que l'énoncé de la question 2 soit un poil erroné. Prudence donc !

Exercice 30 : (Mines MP 2022)
avec préparation :
Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = x^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$, puis étudier la continuité de sa somme.

Exercice 31 : (Mines-Ponts 2019)
a) Donne le domaine de définition de $S : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$, et étudier sa continuité.
b) Déterminer les limites et équivalents éventuels de S en 0^+ et $+\infty$.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 32 : (X MP 2023)
Soit $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, m \leq a(t) \leq M$.
On suppose $m > 1/2$ ou $M < 2$. Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, 1\}$.
Montrer que $\exists!\ \Sigma \in \mathcal{C}^o(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Sigma(t) = 1 + \frac{\Sigma(tq)}{a(t)}$$

Exercice 33 : (Mines MP 2023)
Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^2 de S dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si, et seulement si, il existe une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour le sens direct, montrer l'existence d'une suite de polynômes positifs approchant f''

Exercice 34 : (ENS MP 2022)
Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bornée.
2. On pose $\alpha = -\frac{ln(a)}{ln(b)}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} cos(b^n \pi x).$$

3. Montrer que $f_{a,b}$ est α-höldérienne, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

4.Soit $x \in \mathbb{R}$ et N, m deux entiers naturels non nuls, on pose $h = \frac{N}{b^m}$, calculer $\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(x) cos(b^m \pi t) dt.$
5. Montrer que

$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) cos(b^m \pi t) dt \leq C a^m.$$

6.Montrer qu'il existe x_m un réel tel qu'on ait $|f_{a,b}(x_m) - f_{a,b}(x)| \leq \frac{C}{2} a^m$.
7. Que peut-on dire d'une fonction α-höldérienne avec $\alpha > 1$.
8. Montrer que $f_{a,b}$ n'est dérivable nulle part.
Commentaires divers :
Les inégalités des questions 5 et 6 sont possiblement dans l'autre sens... Seules les questions 1, 2 et 3 étaient données sous format papier, les autres me furent dictées par l'examinateur.

Exercice 35 : (ENS MP 2021)
Montrer que pour tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.
On cherchera f comme somme d'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[, \ \phi(x) = 0 \\ \forall x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], \ \phi(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \phi(\lambda_n x) \frac{a_n}{n!} x^n \end{cases}$
Commentaires divers :
Epreuve de Maths ULCR
Il s'agit du théorème de réalisation de Borel

Exercice 36 : (ENS MP 2021)
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$
On note (P_n) la suite de polynôme : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot X^k (1-X)^{n-k}$.
Montrez que (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Indication : essayez de voir le second terme (en $\binom{n}{k} \times X^k (1-X)^{n-k}$) comme une espérance.
L'examinateur m'a ensuite aidé à formaliser les intuitions de « qui est gros, qui est petit » dont je lui avais déjà fait part.