

TD mécanique

Mécanique terrestre

1 Latitude, longitude

La précision d'un GPS grand public est de l'ordre de 1''.

1. Les coordonnées de Lille sont : 50°37'50"N et 3°4'0"E. Convertissez les coordonnées de Lille en degrés (valeurs décimales).
2. Sachant que le rayon de la Terre est de 6400 km, à quelle distance terrestre sur l'équateur correspond 1° ? 1' ? 1" ?

2 Force de Coriolis sur un train

(Mines Télécom MP 2019) Un TGV de masse $m = 7,8 \cdot 10^5$ kg circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante $v = 300$ km h $^{-1}$. À l'instant considéré, il se trouve à la hauteur de Valence (latitude $\lambda = 45^\circ$). On se donne une base locale \vec{u}_x vers l'est, \vec{u}_y vers le nord et \vec{u}_z vers le zénith.

1. Faites un schéma complet, incluant la vitesse du train et le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la Terre.
2. Calculez la force de Coriolis subie par le train et comparez-la au poids.
3. Faites un schéma du train vu de l'arrière. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change si le train roule vers le nord ?

3 Diverses caractéristiques de la Lune

(Mines MP 2017) On suppose que la Lune a une orbite circulaire autour de la Terre. Sa période de révolution est de 7 j, 7 h et 43 min. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ kg $^{-1}$ m 3 s $^{-2}$.

1. Un satellite GPS fait un tour de la Terre en 718 min avec une vitesse de 13 940 km h $^{-1}$. Quelle est la masse de la Terre ? Déduisez-en la vitesse moyenne de la Lune et le rayon de sa trajectoire.
2. Le satellite Lunar Reconnaissance Orbiter (masse 1916 kg) a été mis en orbite circulaire autour de la Lune en 2009 avec une vitesse de 1,66 km s $^{-1}$.

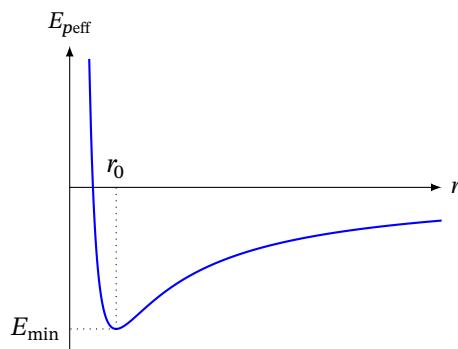


FIG. 1 : Énergie potentielle effective.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle effective pour un point matériel de masse m :

$$E_{\text{peff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G \frac{mm_L}{r} \quad (1)$$

avec C la constante des aires. Le graph 1 donne son allure. On donne $E_{\text{min}} = -2,61$ GJ et $r_0 = 1,79 \cdot 10^3$ km ainsi que la vitesse de libération 2,38 km s $^{-1}$. Déduisez-en :

- (a) la masse de la Lune
 - (b) le rayon de la Lune
 - (c) l'altitude du satellite
 - (d) le champ de pesanteur à la surface de la Lune
3. Un homme de 80 kg se trouve sur la Lune. Quelle est l'intensité de la force qu'il subit ? Si on prend en compte la rotation de la Lune sur elle-même, quel est le champ de pesanteur apparent sur l'équateur ?

4 Pendule de Foucault

L'expérience historique de Léon Foucault a eu lieu à Paris en 1851. Le référentiel d'étude sera le référentiel terrestre local \mathcal{R} à cet endroit (latitude $\lambda = 48^\circ 52'$), muni d'une base cartésienne telle que Oz est radial centrifuge et Ox est vers le sud. L'origine O du repère cartésien sera prise sur la position de repos du pendule.



FIG. 2 : Pendule de Foucault au Panthéon de Paris.

Un pendule de masse $m = 28 \text{ kg}$ et de longueur $l = 67 \text{ m}$ est fixé en A au plafond du Panthéon. Il est muni d'une pointe de masse négligeable qui va jusqu'au sol pour tracer le mouvement du pendule dans du sable. Vous supposerez que le contact de la pointe sur le sable n'entraîne aucun frottement notable.

Écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = 5^\circ$ vers l'est sans vitesse initiale, le pendule oscille et on observe une lente rotation du plan de son mouvement.

1. Supposons d'abord le référentiel \mathcal{R} comme galiléen.
 - (a) Justifiez que le mouvement est plan et précisez le plan en question.
 - (b) Résolvez les équations du mouvement.
2. Le caractère non galiléen de \mathcal{R} est maintenant pris en compte.
 - (a) Décrivez la nature de \mathcal{R} . Quelle est l'action de la force centrifuge ?
 - (b) Exprimez la tension du fil \vec{T} en fonction de sa norme T , des coordonnées cartésiennes de la masse m et de la longueur l .
 - (c) Déterminez les équations du mouvement du pendule.
 - (d) En supposant que les mouvements restent petits et en posant $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, simplifiez les équations du mouvement.
 - (e) Résolvez ces équations par la méthode complexe, en posant $\underline{X} = x + iy$. En exploitant $\Omega \ll \omega_0$ à l'ordre le plus bas non trivial, vous montrerez que :

$$\underline{X} = l \sin(\theta_0) e^{-i\Omega \sin(\lambda)t} \left(-\frac{\Omega \sin(\lambda)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + i \cos(\omega_0 t) \right) \quad (2)$$

et en déduirez les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

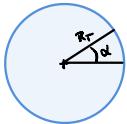
- (f) Dans l'expérience menée par Foucault lui-même, le plan du pendule a tourné à la vitesse de $11^\circ 19'$ par heure. Retrouvez ce résultat.
- (g) Décrivez rapidement les résultats de l'expérience à l'équateur et aux pôles. Comparez-les entre les deux hémisphères.

Exo 1 - Latitude, longitude

① On a $50 + \frac{37}{60} + \frac{50}{3600} \approx 50.631^\circ N$

$$3 + \frac{4}{60} \approx 3.07 E$$

②



On a $d = R_T \alpha$

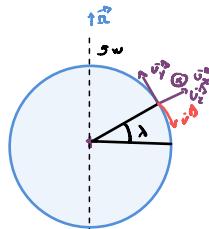
donc pour $\underline{\alpha = 1^\circ}$: $d = R_T \frac{\pi}{180} = 112 \text{ Km}$

$\underline{\alpha = 1'}$: $d = R_T \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60} = 1.9 \text{ Km}$

$\underline{\alpha = 1''}$: $d = R_T \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{3600} = 3 \text{ m}$

Exo 2 - Force de Coriolis sur un train

① On a le schéma suivant



② On a $F_{C,C} = -m\vec{a}_C$

$$= -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_x^P(M)$$

$$= 2m \omega \vec{u}_z^P \wedge (\checkmark \vec{v}_y^P)$$

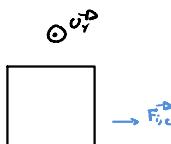
et $\vec{v}_z^P = \cos(\lambda) \vec{u}_z^P + \sin(\lambda) \vec{u}_y^P$

$$= 2m \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \lambda \\ \cos \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \checkmark \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\vec{F}_{C,C} = -2m\omega v \cos(\lambda) \vec{u}_x^P$

et $\frac{\|\vec{F}_{C,C}\|}{\|mg^P\|} \approx 10^{-3}$ elle est donc bcp moins conséquente que le poids.

③ Vue de l'arrière

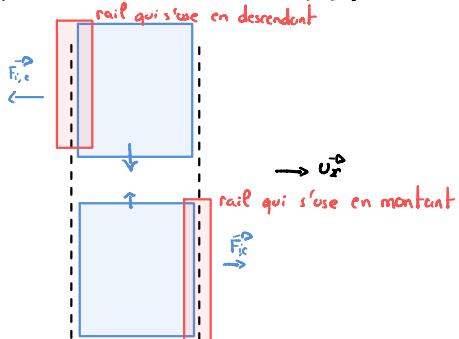


c'est le rail de droite qui s'use le +

Enfin, si le train roule vers le Nord: $\vec{v} = \sqrt{u_y^P}$
 $\Rightarrow \vec{F}_{C,C} = 2mu v \cos(\lambda) \vec{u}_x^P$

et donc avec une vue de l'arrière, on remarque que c'est le rail de gauche qui s'use le plus

Ainsi, en faisant un schéma de dessus



En général, la SNCF fait galbe pour user les rails au mm niveau

Exo 3 - Diverses caractéristiques de la Lune

① D'après le TPC, tout système subissant une force newtonienne décritant un mvt circulaire dispose d'une vitesse constante. (A)

$$\text{Ainsi, d'après la 3\text{\`eme} loi de Kepler, } \frac{T_s^2}{R_s^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\text{or (A)} \Rightarrow 2\pi R_s = V_s T_s$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{V_s T_s}{2\pi}$$

$$\text{Ainsi, } M_T = \frac{R_s^3 4\pi^2}{T_s^2 G} = \frac{V_s^3 T_s}{2\pi G} \approx 1.2 \times 10^{25} \text{ kg}$$

. On constate une diff d'une puissance de 10
 → d'autres forces
 → trajectoire pas forcément circulaire

$$\text{DONC, pour la Lune : } \frac{T_L^2}{R_L^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow R_L \approx 482 \cdot 10^3 \text{ Km}$$

$$\text{et } 2\pi R_L = V_L T_L \Rightarrow V_L \approx 1.3 \text{ Km.s}^{-1}$$

② Δ Rappel: vitesse de libération = vitesse MINIMALE pour qu'un point lancé depuis la surface de la Terre échappe à son attraction → aussi appelée "première vitesse cosmique"

$E_m < 0$: état pié

$E_m > 0$: état de diffusion ($r \rightarrow +\infty$ possible)

Cas limite: $E_m = 0 \rightarrow$ vitesse de libération

$\Delta E_m = 0$ entre décollage ($v = V_{lib}$, $r = R_T$) et l'infini ($v = 0$, $r = +\infty$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_{lib}^2 - \frac{GM_T}{R_T} = 0$$

$$\Rightarrow V_{lib} = \left(\frac{2GM_T}{R_T} \right)^{1/2} \approx 11 \text{ Km.s}^{-1} \text{ pour la Terre.}$$

$$\text{et donc pour la Lune : } V_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} \approx 2.38 \text{ Km.s}^{-1}$$

rayon de la Lune ! (pas de sa trajectoire)

TO BE CONTINUED ...

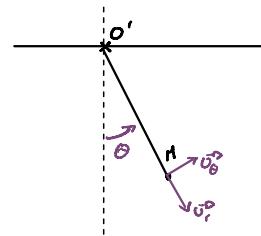
Exo 4 - Pendule de Foucault

① Supposons \mathcal{R} galiléen

a) Forces dans le plan (\vec{u}_x^0, \vec{u}_y^0)

Conditions initiales : aucun mvt selon \vec{u}_z^0

\Rightarrow Mouvement limité au plan (\vec{u}_x^0, \vec{u}_y^0) défini à $t=0$



b) Méthode classique : TMC par rapport à O'

$$\text{On a } \ddot{\theta} + \frac{g}{\rho} \sin(\theta) = 0$$

$$\text{et approx. des petits angles } (\theta_0 = 5^\circ) \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{\rho}}$$

②

a) \mathcal{R} : référentiel terrestre, non-galiléen, en rotation pure uniforme par rapport au référentiel géocentrique

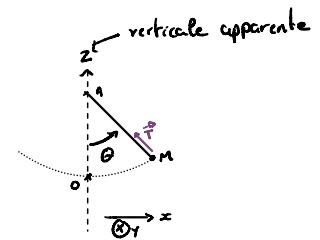
Enfin, la force centrifuge se combine au poids, nous permet d'introduire le poids apparent, qui décale légèrement la verticale.

$$\text{On a } \vec{T} = - \frac{T}{\|\vec{AP}\|} \vec{AP}$$

$$= - \frac{T}{\rho} \vec{Ar}$$

$$= - \frac{T}{\rho} (\vec{A}^0 + \vec{\omega}^2)$$

$$\text{D'où } \vec{T} = - \frac{T}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-\rho \end{pmatrix}$$



$$\Sigma = \{m\}$$

Ref : \mathcal{R}

Forces : o poids apparent

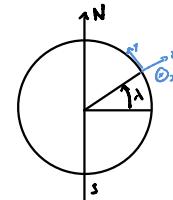
$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z^0$$

o tension du fil

$$\vec{T} \rightarrow OK$$

o force de Coriolis

—



$$\text{On a } \vec{F}_{i,c} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

$$= -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\omega \begin{pmatrix} \cos(\lambda)\dot{z} - \sin(\lambda)\dot{y} \\ \sin(\lambda)\dot{z} \\ -\cos(\lambda)\dot{z} \end{pmatrix}$$

et donc, d'après la 2^{ème} loi de Newton (projétée sur \vec{u}_x^0, \vec{u}_y^0 et \vec{u}_z^0), on a :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{T}{\rho}x - 2m\omega (\cancel{\cos\lambda})\dot{z} - \sin(\lambda)\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{T}{\rho}y - 2m\omega \sin(\lambda)\dot{z} \\ m\ddot{z} = -\frac{T}{\rho}(\cancel{-\rho}) + 2m\omega \cancel{\cos\lambda}\dot{x} - mg \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dot{z}=0 \text{ à l'ordre 1 des petits angles} \\ \hookrightarrow |\dot{y}| \gg |\dot{z}| \end{array}$$

d)

Approx:

- force de Coriolis faible dvt le poids : $\| \vec{F}_{\text{Cor}} \| \ll \| m\vec{g} \|$
- petits angles $\theta \ll 1, |z| \approx 0$

\Rightarrow Faible mvt selon y (car aucun mvt selon y dans l'hyp. galiléenne) : $|\dot{y}| \ll |\dot{x}|, |\dot{z}|$

$$\begin{aligned} \text{et } \Theta \ll 1 \Rightarrow z &= \ell - \rho \cos \Theta \\ &= \ell - (\ell - \frac{\rho \Theta^2}{2}) \\ &= \frac{\rho}{2} \Theta^2 \quad \Rightarrow z \ll \ell \end{aligned}$$

Les équations deviennent alors

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{T}{m\ell} x + 2\omega \sin(\lambda) \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{T}{m\ell} y - 2\omega \sin(\lambda) \dot{x} \\ \ddot{z} = \frac{T}{m} - g = 0 \quad \text{car } \dot{z} \approx 0 \end{cases}$$

i.e.	$T = mg$	et	$\ddot{x} = -\frac{T}{m\ell} x + 2\omega \sin(\lambda) \dot{y}$	(1)
			$\ddot{y} = -\frac{T}{m\ell} y - 2\omega \sin(\lambda) \dot{x}$	(2)

e) On pose alors $\underline{x} = x + iy$

et donc la C.L. (1) + i(2) est une équation en \underline{x} : $\ddot{x} + i\ddot{y} + \omega_0^2(x+iy) = 2\Omega \sin(\lambda)(i\dot{y} - i\dot{x})$

$$\text{i.e. } \ddot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = -2i\Omega \sin(\lambda)(\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\text{d'où } \ddot{\underline{x}} + 2i\Omega \sin(\lambda) \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = 0$$

or, l'énoncé impose de faire l'approx $\Omega \ll \omega_0$, on va donc procéder à un DL₂ en $\frac{\Omega}{\omega_0}$ au voisinage de 0

\Rightarrow Prenons (c) : $r^2 + 2i\Omega \sin(\lambda)r + \omega_0^2 = 0$

$$\text{on a alors } \Delta = -4(\Omega^2 \sin^2(\lambda) + \omega_0^2)$$

$$= -4\omega_0^2 \left(1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \sin^2(\lambda) \right)$$

$$\approx -4\omega_0^2$$

ainsi, à l'ordre 1 : $\Delta \approx -4\omega_0^2$

$$\text{et donc } r_{1,2} = \frac{-2i\Omega \sin(\lambda) \pm 2i\omega_0}{2}$$

$$= i(\pm \omega_0 - \Omega \sin(\lambda))$$

donc $x_{1,2} = i\omega_0 (\pm 1 - \underbrace{\frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\lambda)}_{\text{terme de d}^{\circ} 1 : \text{on ne peut pas le négliger lors d'un DL}})$

Ainsi, $\underline{x}(t) = e^{-i\Omega \sin(\lambda)t} (\underline{A} \cos(\omega_0 t) + \underline{B} \sin(\omega_0 t))$

et initialement, $\begin{cases} \underline{x}(t=0) = i \ell \sin(\theta_0) \\ \dot{\underline{x}}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A} = i \ell \sin(\theta_0) \\ \underline{B} = -\frac{\Omega \sin(\lambda)}{\omega_0} \ell \sin(\theta_0) \end{cases}$

D'où,

$$\underline{x}(t) = e^{-i\Omega \sin(\lambda)t} \left(i \ell \sin(\theta_0) \cos(\omega_0 t) - \frac{\Omega \sin(\lambda)}{\omega_0} \ell \sin(\theta_0) \sin(\omega_0 t) \right)$$

et $\underline{x}(t) = x(t) + i y(t) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t)) \\ y(t) = \operatorname{Im}(\underline{x}(t)) \end{cases}$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \sin(\theta_0) \left(\sin(\Omega \sin(\lambda)t) \cos(\omega_0 t) - \frac{\Omega \sin(\lambda)}{\omega_0} \cos(\Omega \sin(\lambda)t) \sin(\omega_0 t) \right) \\ y(t) &= \ell \sin(\theta_0) \left(\cos(\Omega \sin(\lambda)t) \cos(\omega_0 t) + \frac{\Omega \sin(\lambda)}{\omega_0} \sin(\Omega \sin(\lambda)t) \sin(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

f) Aux oscillations pendulaires habituelles (ici de pulsation ω_0), une autre oscillation bcp + lente se superpose
↳ de pulsation $\Omega \sin(\lambda)$

Ainsi, pour mettre cette puls. en évidence, figeons le pendule dans ses oscillations, i.e fixons les termes en $\omega_0 t$, les équations du mvt se réduisent alors à :

$$\begin{cases} \frac{x(t)}{\ell \sin(\theta_0)} = C \sin(\Omega \sin(\lambda)t) - D \cos(\Omega \sin(\lambda)t) \\ \frac{y(t)}{\ell \sin(\theta_0)} = C \cos(\Omega \sin(\lambda)t) + D \sin(\Omega \sin(\lambda)t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = \ell^2 \sin^2(\theta_0) (C^2 + D^2) = \text{cte}$$

Donc, en se figeant dans ses oscillations, le pendule décrit un cercle. Ce qui signifie bien que le plan dans lequel il oscille tourne lentement avec la rotation de la Terre.

La vitesse angulaire de ce mvt est $\Omega \sin(\lambda) \approx 5.48 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ donc en une heure il a tourné de $11^{\circ}18'$
↳ ≈ donnée énoncée

g) Équateur : $\lambda = 0 \Rightarrow$ vitesse de rot. du pendule est nulle \Rightarrow expérience pas observable

Pôle : $\lambda = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ c'est là où la vitesse de rot. est maximale
 \Rightarrow là où le phénomène est le plus visible.