MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 11

Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Définition - Convergence simple (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
On dit que $(f_n)_n$ *converge simplement* (CVS) vers f sur I si :

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0$$

i.e pour tout $x \in I$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

Définition - Convergence uniforme (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
On dit que $(f_n)_n$ *converge uniformément* (CVU) vers f sur I si :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

A.2 La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple. Contre-exemple pour la réciproque

Proposition - CVU ⇒ CVS

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Alors,

$$(f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \implies (f_n)_n \text{ CVS vers } f \text{ sur } I$$

⚠ **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!** (Prendre $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0;1]$)

DÉMONSTRATION.

A.3 Théorème de continuité pour les suites de fonctions

Théorème de continuité (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

DÉMONSTRATION.

A.4 Théorème de la double limite pour les suites de fonctions

Théorème de la double limite (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Soit $a \in I$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite finie en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 $(l_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$

C_2 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n = l$

i.e $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

Rmq : On échange les limites !

A.5 Théorème d'intégration sur un segment des suites de fonctions

Théorème d'intégration sur un segment (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.

H₁ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H₂ $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C₁ f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C₂ $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

DÉMONSTRATION.

A.6 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H₁ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H₂ $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H₃ $(f_n')_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C₁ f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C₂ $f' = g$

C₃ $\forall [a;b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a;b]$

A.7 Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions

Définition - Convergence simple (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $\sum_n f_n$ *converge simplement* sur I (CVS) si :

$$\forall x \in I \ \underline{\text{fixé}},\ \sum_n f_n \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ On revient aux séries numériques/vectorielles.

Définition - Convergence uniforme (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$.
Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$ et $S_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. On dit que $\sum_n f_n$ *converge uniformément* sur I (CVU) si :

$$(S_N)_N \text{ CVU vers } S \text{ sur } I.$$

et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $\|S(x) - S_N(x)\|_E = \|R_N(x)\|_E$, on a que :

$$\sum_n f_n \text{ CVU sur } I \Leftrightarrow (S_N)_N \text{ CVU vers } S \text{ sur } I$$
$$\Leftrightarrow (R_N)_N \text{ CVU vers } \tilde{0} \text{ sur } I.$$

Définition - Convergence normale

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $\sum_n f_n$ *converge normalement* sur I (CVN) si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I.
- $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge (série numérique).

A.8 Théorème de continuité pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de continuité (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

EXEMPLE.

A.9 Théorème de la double limite pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 $\sum_n l_n$ converge

C_2 $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

EXEMPLE.

A.10 Théorème d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème d'intégration termes à termes sur un segment (Série de fonctions)

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H₁ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H₂ $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C₁ S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C₂ $\int_a^b S(x)dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx$

EXEMPLE.

A.11 Théorème de « dérivation » pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de « dérivation » (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

- H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.
- H$_2$ $\sum_n f_n$ CVS sur I.
- H$_3$ $\sum_n f_n'$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

- C$_1$ S est $\mathcal{C}^1$ sur I.
- C$_2$ $\forall x \in I, S'(x) = \sum_n f_n'(x)$

EXEMPLE.

A.12 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment

Théorème d'approx uniforme d'une fonction continue sur un segment par fonctions en escalier

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier. "

i.e, en considérant $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \exists (g_n) \in \text{Esc}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_{\text{esc}} \in \text{Esc}(I, \mathbb{K}) \text{ tq. } \|f - g_{\text{esc}}\|_\infty \leq \varepsilon$$

A.13 Théorème de Weierstrass

Théorème de Weierstrass

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiales. "

i.e, en considérant $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \exists (P_n)_n \in \tilde{\mathbb{K}}[X]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (P_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \exists P_\varepsilon \in \tilde{K}[X] \text{ tq. } \|f - P_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$$

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H2 $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H3 $(f_n')_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C1 f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C2 $f' = g$

C3 $\forall [a;b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a;b]$

DÉMONSTRATION.

B.2 Théorème de « primitivation » des suites de fonctions sur un segment

Théorème de « primitivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$ où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.
Soit $c \in [a;b]$.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H$_2$ $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C$_1$ f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C$_2$ $(F_n)_n$ CVU vers F sur I.

avec $F_n : x \mapsto \int_c^x f_n(t)dt$ et $F : x \mapsto \int_c^x f(t)dt$.

DÉMONSTRATION.

B.3 Pour une série de fonctions, CVN ⇒ CVU ⇒ CVS

Proposition - Une propriété sacrément importante

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Alors,

$$\left[\sum_n f_n \text{ CVN sur } I\right] \Longrightarrow \left[\sum_n f_n \text{ CVU sur } I\right] \Longrightarrow \left[\sum_n f_n \text{ CVS sur } I\right]$$

DÉMONSTRATION.

B.4 Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement

Une série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement

Prenons $I = [0;1]$, considérons $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$
Alors,

$$\sum f_n \text{ CVU sur } I \text{ mais ne CVN pas sur } I.$$

DÉMONSTRATION.

B.5 Extension $\mathcal{C}^k$ du théorème de « dérivation » et application à zêta

Théorème de « dérivation » -> extension $\mathcal{C}^k$ (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- H₁ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^k$ sur I.
- H₂ $\forall p \in [\![0; k-1]\!] \sum_n f_n^{(p)}$ CVS sur I.
- H₃ $\sum_n f_n^{(k)}$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

- C₁ S est $\mathcal{C}^k$ sur I.
- C₂ $\forall p \in [\![0; p]\!], \forall x \in I, S^{(p)}(x) = \sum_n f_n^{(p)}(x)$

EXEMPLE.

B.6 Équivalent de zêta au voisinage de 1^+ à l'aide d'une comparaison intégrale

Proposition - Équivalent de zêta au voisinage de 1^+

On a, avec $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$,

$$\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$$

DÉMONSTRATION.

B.7 Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 $\sum_n l_n$ converge

C_2 $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

DÉMONSTRATION.

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Limite de zêta en 1^+ en « epsilon »

Proposition - Limite de zêta en 1^+

$$\lim_{x \to 1} \zeta(x) = +\infty$$

DÉMONSTRATION.

C.2 La fonction zêta est log-convexe

Proposition - Log-convexité de zêta

"La fonction zêta est log-convexe."

i.e

$\log \circ \zeta$ est une fonction convexe.

DÉMONSTRATION.

C.3 Démonstration du théorème de la double limite

Théorème de la double limite (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Soit $a \in I$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite finie en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 $(l_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$

C_2 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n = l$

i.e $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

DÉMONSTRATION.

C.4 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment

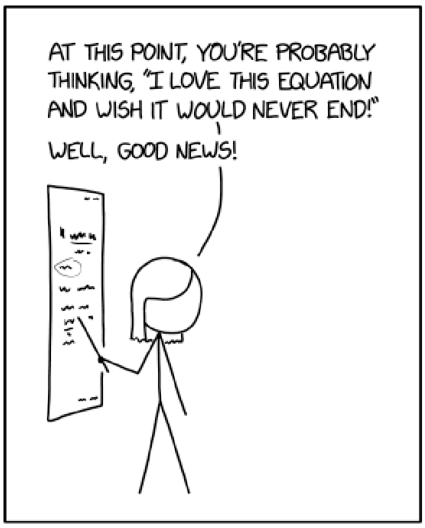
Théorème d'approx uniforme d'une fonction continue sur un segment par fonctions en escalier

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier. "

i.e, en considérant $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_{\text{esc}} \in \text{Esc}(I, \mathbb{K}) \text{ tq. } \|f - g_{\text{esc}}\|_\infty \leq \varepsilon$$

DÉMONSTRATION.



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.