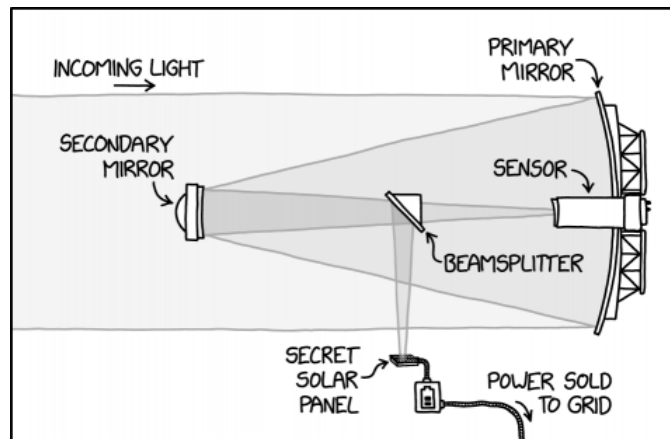


MPI\* Physique

# TD Optique Ondulatoire

(avec problèmes de cohérence)



ASTRONOMY NEWS: THE INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION HAS FINALLY BANNED BEAMSPLITTERS, OPTICAL DEVICES USED BY SCIENTISTS TO EMBEZZLE LIGHT FROM THEIR INSTRUMENTS.

### 3 Observation d'étoiles doubles

(Mines MP 2016) Les deux composantes d'une étoile double sont vues sous un angle  $\alpha$  depuis la Terre. On pointe un interféromètre d'Young vers le milieu des deux étoiles et on place un écran à une distance  $D$  derrière la bifente.

1. En supposant les étoiles de même intensité, donnez l'expression de l'éclairement sur l'écran pour une longueur d'onde donnée dans le visible.
2. Pour l'étoile double Capella de la constellation du Cocher, des astronomes ont obtenu une première annulation de contraste pour  $a = 1,16$  m dans la longueur d'onde  $\lambda = 635$  nm. Déduisez-en la distance angulaire  $\alpha$ .
3. Expliquez l'intérêt de cette méthode par rapport à une observation directe sachant que la turbulence atmosphérique limite la résolution à environ  $1''$  sans optique adaptative.
4. Fizeau et Stephan ont essayé par cette méthode de mesurer le diamètre angulaire des étoiles. Sachant qu'ils ont disposé des fentes d'Young sur un télescope d'environ  $1$  m de diamètre, expliquez pourquoi ils n'ont pas réussi.

#### Corrigé :

1. La figure 1 montre les rayons incidents issus d'une des deux étoiles. Comme ils arrivent inclinés par rapport à l'axe optique mais parallèles entre eux, seulement deux d'entre eux touchent les fentes d'Young!

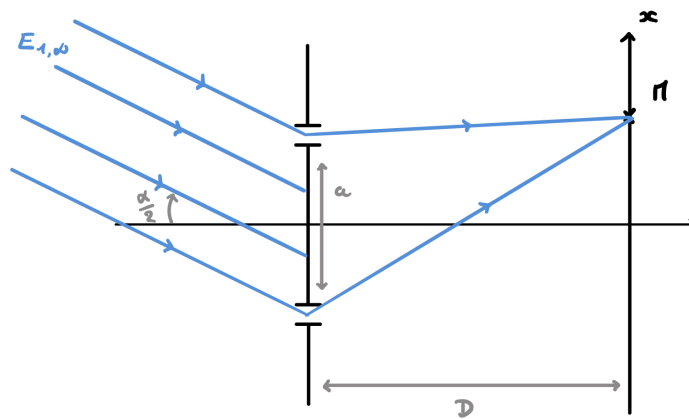


FIGURE 1 – Rayons issus de la première étoile.

Simplifions le schéma avec uniquement ces deux rayons et calculons la ddm du rayon du bas par rapport à celui du haut.

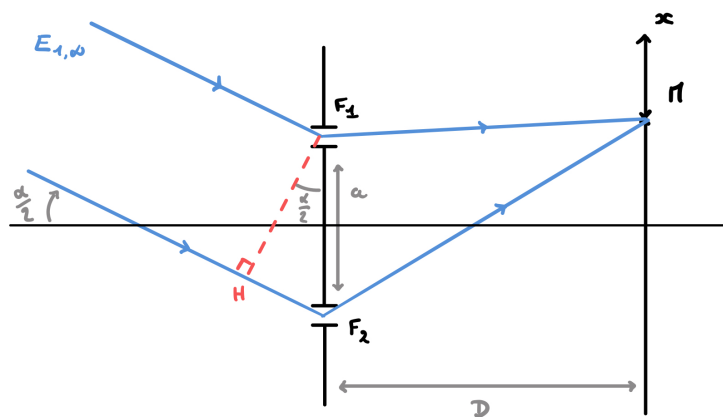


FIGURE 2 – Rayons issus de la première étoile, schéma simplifié.

Dès lors,

$$\delta = \delta_{\text{avant},1} + \delta_{\text{après},1}$$

D'après le cours,

$$\delta_{\text{après},1} = \frac{ax}{D}$$

Pour  $\delta_{\text{avant},1}$ , on se réfère au dernier plan d'onde (voir figure 2) i.e  $F_1 H$ . On a alors :

$$\begin{aligned}\delta_{\text{avant},1} &= \pm(HF_2) \\ &= \pm HF_2\end{aligned}$$

Or, la géométrie et les conditions de Gauss nous disent que :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{HF_2}{a} \Rightarrow HF_2 \approx a \frac{\alpha}{2}$$

Enfin, ici  $\delta_{\text{avant},1} > 0$  :

$$\delta_{\text{avant},1} = a \frac{\alpha}{2}$$

Pour la deuxième étoile, on obtient le même résultat sauf que  $\delta_{\text{avant},2} < 0$  :

$$\delta_{\text{avant},2} = -a \frac{\alpha}{2}$$

Les étoiles étant incohérentes entre elles, on a :

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2 \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + a \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) + 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} - a \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) \\ &= 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right)\end{aligned}$$

Finalement,

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right)$$

On retrouve donc la formule usuelle avec un facteur de visibilité uniforme, mais dépendant de  $\alpha$ .

2. Notons  $V = \cos\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right)$  le facteur de visibilité.

Le premier brouillage a lieu sur le premier zéro du facteur de visibilité donc :

$$\cos\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi a \alpha}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

Dès lors,

$$\alpha = \frac{\lambda}{2a} = 2,73 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

3. Une seconde d'arc correspond à  $4,84 \cdot 10^{-6}$  rad, donc les turbulences limitent trop la précision pour séparer les deux étoiles.
4. Il s'agit là de mesurer le diamètre d'une étoile. Il faut donc munir le télescope d'un dispositif séparateur : en pratique, il s'agit d'un diaphragme percé de deux trous afin de les recueillir les rayons issus de deux points diamétralement opposés de l'étoile. Ces deux rayons sont alors envoyés sur une bifente pour interférer.

Le diamètre d'une étoile étant bien plus petit que la distance entre les deux étoiles d'un système double, on travaille ici avec  $\alpha$  bien plus petit. Pour voir un brouillage, il faudra donc un  $a$  beaucoup plus grand. Or, la distance proposée ici est du même ordre de grandeur qu'à la question précédente. On a donc aucune chance de parvenir à mesurer un diamètre d'étoile avec ce dispositif.

## 4 Sources incohérentes entre deux miroirs

Figure 3 :  $S$  et  $S'$  sont deux sources ponctuelles monochromatiques de même longueur d'onde  $\lambda$  et de même intensité. Le cache  $C$  supprime tout éclairage direct. Les miroirs sont supposés légèrement imparfaits, de sorte que les rayons ayant subi plusieurs réflexions avant d'arriver sur l'écran sont assez atténués pour être négligeables.

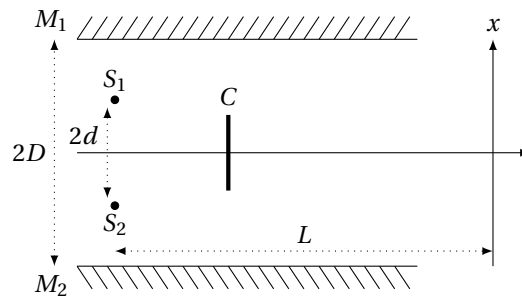


FIGURE 3 – Interférences obtenues avec deux miroirs parallèles.

1. Construisez l'interféromètre fictif équivalent.
2. Calculez l'éclairement sur l'écran et décrivez l'allure des franges. En particulier, mettez en évidence le facteur de visibilité et discutez-le.

**Corrigé :**

1. On a :

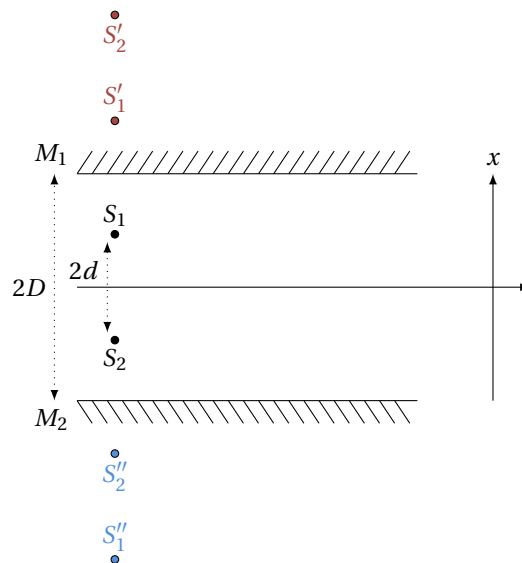


FIGURE 4 – Interféromètre fictif équivalent, étape intermédiaire.

Maintenant, pour simplifier un peu les choses, on se pose la question suivante : **qui interfère avec qui ?**

- $(S'_1, S''_1)$  forment une paire de sources cohérentes ;
- De même pour  $(S'_2, S''_2)$  ;
- Pas d'interférences entre  $S_1$  et  $S_2$ .

On peut alors simplifier une première fois la figure (voir figure 5) ! Et puis après ne s'intéresser qu'aux sources cohérentes entre elles (voir figure 6).

2. On se retrouve alors avec une situation un peu différente par rapport à d'habitude : l'axe optique est décalé. Cela ne change pas grand chose si ce n'est le calcul de la ddm, qui passe de  $\frac{4Dx}{L}$  à  $\frac{4D(x - \Delta)}{L}$ .

Alors, la formule de Fresnel nous dit :

$$I_1 = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D(x - \Delta)}{L} \right) \right)$$

et de même :

$$I_2 = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D(x + \Delta)}{L} \right) \right)$$

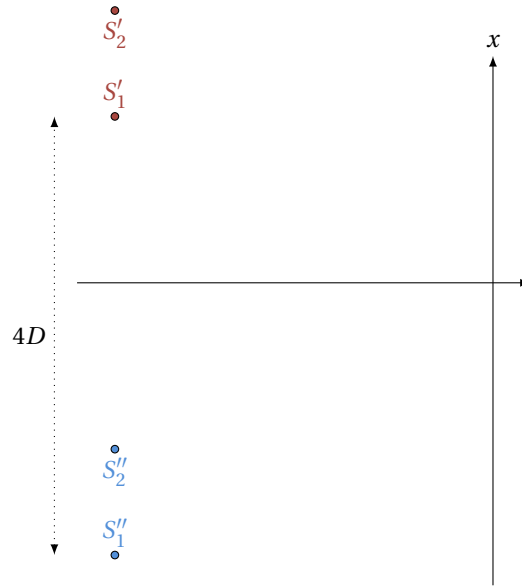


FIGURE 5 – Interféromètre fictif équivalent, étape intermédiaire n°2.

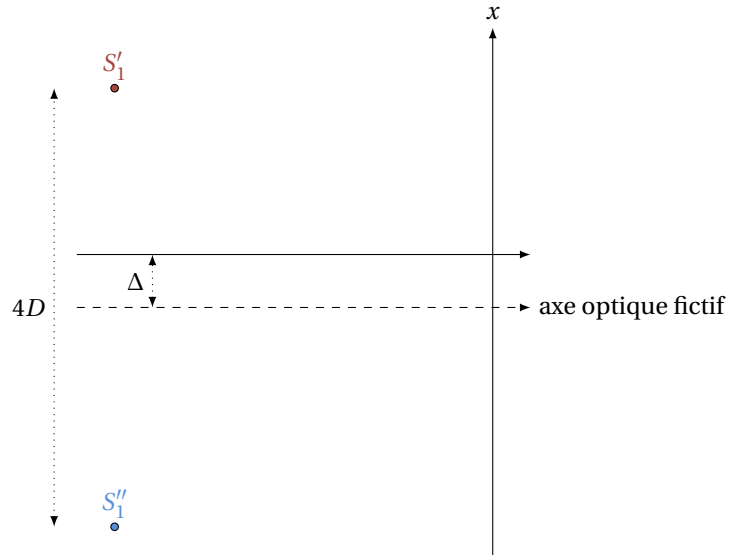


FIGURE 6 – Interféromètre fictif équivalent, étape finale (focus sur  $(S'_1, S''_1)$ ).

Donc :

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 \\
 &= 2I_0 \left( 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D(x-\Delta)}{L}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D(x+\Delta)}{L}\right) \right) \\
 &= 4I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{8D\Delta}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{8D}{L} x\right) \right)
 \end{aligned}$$

et on retrouve en faisant les schémas que  $\Delta = d$  :

$$I = 4I_0 \left( 1 + V \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{8D}{L} x\right) \right)$$

avec  $V$  le facteur de visibilité défini comme suit :

$$V = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{8Dd}{L}\right)$$

Les franges sont alors des droites d'équation  $x = \text{cte}$ . L'interfrange est égale à  $i = \frac{\lambda L}{4D}$ .

Enfin,  $V$  ne dépendant pas de  $x$ , on a que le contraste  $\mathcal{C} = |V|$  est uniforme. Il dépend néanmoins de l'écart entre les deux sources, et il reste bien à valeurs dans  $[0, 1]$ .

## 5 Fentes d'Young et prisme

(Mines Télécom MP) Soit un dispositif de fentes d'Young en lumière blanche. Les fentes sont espacées de  $a = 6.0 \text{ mm}$  et l'écran est à une distance  $L = 1 \text{ m}$  des fentes. La source est ponctuelle et sur l'axe optique.

On perce un trou de très petit diamètre à une distance  $x = 4.0 \text{ mm}$  de l'axe optique et la lumière traversant ce trou est envoyée sur un prisme. Combien y a-t-il de franges sombres à la sortie du prisme?

**Corrigé :** On a, d'après la formule de Fresnel :

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 (1 + \cos(\Delta\psi)) \\ &= 2I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{L}\right) \right) \end{aligned}$$

Sauf qu'ici,  $x$  est fixé mais pas  $\lambda$ !

Dès lors, pour avoir un éclairement maximal :

$$\frac{2\pi ax}{\lambda L} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{2ax}{L(2k+1)}$$

Dès lors, si on travaille dans le visible,  $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$  et  $\lambda_{\max} = 750 \text{ nm}$ , on en déduit alors que :

$$\begin{cases} k_{\min} = 59,5 \\ k_{\max} = 31,5 \end{cases}$$

Finalement, on trouve  $|k_{\max} - k_{\min}| = 28$  franges sombres :

Il y a 28 franges sombres à la sortie du prisme, donc 29 raies sombres.