Khôlles : Espaces Probabilisés (V.1)

- 13 - 17 Novembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de cours - Tout groupe

1.1 Définition d'un ensemble dénombrable.

Définition: Ensemble Dénombrable

Un ensemble est dit dénombrable lorsque l'on peut trouver une surjection de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.

Si l'ensemble considéré est infini, ceci revient à trouver une Bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble.

1.2 Définition d'une tribu

Définition

Soit Ω un ensemble.

On appelle tribu (ou alternativement σ-Algèbre) sur Ω, un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ($\mathcal{T}$ est un choix de parties de Ω) tel que :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T},\ A^c \in \mathcal{T}$
- $\forall (A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},$ (dénombrable), $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in \mathcal{T}$ (! Union Dénombrable)

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont des Évènements.

1.3 Compatibilité d'une tribu avec l'intersection finie ou dénombrable (démo)

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$, espace Probabilisable. Soit $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, une famille dénombrable d'évènements.

Alors $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable)

Preuve :

Lemme

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}}$$

Preuve :

Montrons cette égalité :

$\forall x \in \overline{\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n},\ x \notin \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ x \notin A_{n_0}$.

Dès lors, $x \in \overline{A_{n_0}} \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$.

Réciproquement, $\forall x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, x \in \overline{A_{n_0}} \Rightarrow x \notin \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \Rightarrow x \in \overline{\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n}$. Ainsi, $\overline{\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$

Utilisons dès lors cette égalité :

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A_n} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{T}$.

Donc $\overline{\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$

1.4 Définition d'une mesure de probabilité.

Définition: Mesure de Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$, espace Probabilisable.

On appelle Mesure de Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ une application $p : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ (ou bien $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$) telle que :

- $\forall A \in \mathcal{T},\ p(A) \in [0, 1]$
- $p(\Omega) = 1$
- (Σ—Additivité) : $\forall (A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ deux-à-deux disjoints, $p(\bigsqcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$ (Donc cette série Converge)

1.5 La probabilité d'une union est inférieure à la somme des probabilités. (démo)

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, Espace probabilisé.

1. $p(\emptyset) = 0$
2. $\forall A, B \in \mathcal{T},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (découle de la définition)
3. $\forall A \in \mathcal{T},\ p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
4. $\forall A, B \in \mathcal{T},\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Preuve :

1. $\emptyset = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \emptyset \Rightarrow p(\emptyset) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(\emptyset)$. Or cette série converge. Nous devons donc avoir $p(\emptyset) = 0$.
2. Découle de la définition d'une mesure de probabilité
3. $\Omega = A \sqcup \overline{A} \Rightarrow p(\Omega) = 1 = p(A) + p(\overline{A}) \Rightarrow p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
4. $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ et cette union est disjointe.

   $p(A \cup B) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = (p(A) - p(A \cap B)) + p(A \cap B) + (p(B) - p(A \cap B))$

   Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

1.6 Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable. Idem pour « presque sûr » (« démo »)

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, Espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{T}$.

- On dit que A est négligeable si $p(A) = 0$
- On dit que A est presque-sûr si $p(A) = 1$

Proposition

- Une union finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable
- Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque-sûrs est presque-sûre

Preuve :

1. Soit $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, suite d'évènements négligeables.

   Nous avons donc $p(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(A_n) = 0$, or une probabilité est positive, donc $p(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = 0$

2. Soit $(B_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, suite d'évènements presque-sûrs.

   Soit $I = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$. Alors $\overline{I} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}$ et les $\overline{B_n}$ sont négligeables.

   Donc $p(\overline{I}) = 0$ d'après ce qui précède, donc $p(I) = 1 - p(\overline{I}) = 1$

1.7 Formule des probabilités totales (démo)

Théorème Formule des Probabilités Totales

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, Espace probabilisé. Soit $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, système complet ou quasi-complet d'évènements.

Soit $B \in \mathcal{T}$. Alors $p(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

Preuve :

Si (A_n) est un système complet d'évènements, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$. Ainsi, $p(B) = p(B \cap \Omega) = p\left(B \cap \left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right)$

Donc $p(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n) \times p_{A_n}(B)$.

Si (A_n) est un système quasi-complet d'évènements, alors posons $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

$\Omega = C \cup \overline{C}$, avec $\overline{C}$ négligeable.

Ainsi, $B = B \cap \Omega = (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \Rightarrow p(B) = P(B \cap C) + 0 = p\left(B \cap \left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n) \times p_{A_n}(B)$.

1.8 Formule de Bayes (« démo »)

Proposition Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, Espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $p(A)$ et $p(B) \neq 0$.

Alors $p_A(B) = \dfrac{p_B(A) \times p(B)}{p(A)}$

Preuve :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \times \frac{p(B)}{p(A)} = p_B(A) \times \frac{p(B)}{p(A)}$$

1.9 Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont également. (démo)

Preuve :

Remarquons simplement que $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B})$. (l'union est disjointe).

Dès lors, $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A)P(B) + p(A \cap \overline{B})$ Par indépendance de A et B.

Dès lors, $p(A)(1 - p(B)) = p(A \cap \overline{B})$ et $1 - p(B) = p(\overline{B})$

Finalement, $p(A)p(\overline{B}) = p(A \cap \overline{B})$: A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Montrer que l'ensemble des entiers relatifs est dénombrable (démo). Idem pour $\mathbb{Q}_+$, avec simplement une idée de démonstration (éventuellement le formalisme complet en exercice)

Preuve :

Il nous est possible d'expliciter cette bijection φ entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, alors $n = 2p$. Auquel cas, $\varphi(2p) = p$. Si n est impair, alors $n = 2p+1$. Auquel cas, $\varphi(2p+1) = -p$

Nous pouvons mentionner le fait que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable en posant la fonction de Couplage de Cantor : $\psi : (m,n) \mapsto \dfrac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$.

Pour $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Or, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable : (Nous pouvons prendre $\varphi : n \mapsto (\nu_2(n), \nu_3(n))$. (les valuations 2-adiques et 3-adiques). Ceci constitue bien une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$ avec les nombres de la forme $2^p \times 3^q$.) Nous avons donc $\mathbb{Q}_+$ dénombrable.

Proposition

1. Une union finie ou Dénombrable d'ensembles Finis ou dénombrables est finie ou Dénombrable
2. Le produit cartésien d'ensembles finis ou dénombrable est fini ou dénombrable.

2.2 Théorèmes de continuité croissante et décroissante (démo)

Théorème Continuité Croissante de la Mesure de Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, Espace probabilisé. Soit $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion.

Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n) = p(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n)$

Preuve :

Posons $B = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$ par stabilité pour l'union dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$ et $C_0 = A_0$.

Lemme

$$B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n$$

Preuve :

L'inclusion réciproque est triviale par définition.
Soit donc $x \in B$. Alors, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ x \in A_{n_0}$.
Posons $n = \min\{p \in \mathbb{N},\ |\ x \in A_p\}$ (qui existe car partie non vide de $\mathbb{N}$).

Alors, $x \in A_n$ et $x \notin A_{n-1} \Rightarrow\ x \in C_n$. Donc $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} C_n$. D'où $B = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} C_n$

Or, les C_n sont deux-à-deux disjoints : $p(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(C_n) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} p(C_n) = \lim\limits_{N \to +\infty} p(\bigcup\limits_{n=0}^{N} C_n) = \lim\limits_{N \to +\infty} p(A_N)$.

D'où $p(B) = \lim\limits_{N \to +\infty} p(A_N)$.

Théorème Continuité Décroissante de la Mesure de Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, Espace probabilisé. Soit $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante pour l'inclusion.

Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n) = p(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n)$

Preuve :

Il suffit d'utiliser la continuité croissante :

$(A_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion, alors $(\overline{A_n})_n$ est croissante pour l'inclusion. Donc $\lim\limits_{N \to +\infty} (p(\overline{A_N})) = p(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n})$.

Donc $\lim\limits_{N\to+\infty}(1-p(A_N)) = p(\overline{\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n}) = 1-p(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n)$. D'où $\lim\limits_{N\to+\infty}(p(A_N)) = p(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n)$

2.3 Montrer que le corps des réels n'est pas dénombrable. (démo)

Preuve :

Utilisons l'argument de la diagonale de Cantor : Supposons que le segment $[0;1]$ soit dénombrable, et posons φ la bijection de $\mathbb{N}$ vers $[0;1]$.

Construisons alors un nombre qui n'est pas atteint par φ:

Posons $f : d \in [\![0;9]\!] \mapsto \begin{cases} d+1 \text{ si } d<9 \\ 0 \text{ si } d=9 \end{cases}$.

Posons également pour tout $x \in [0;1]$, $(x_i)_i$ son écriture décimale (i.e $x = \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} \times x_k$ (qui converge car est majorée par une série géométrique convergente).)

Ainsi, posons $\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} \times f(\varphi(k)_k)$: Nous prenons le i-ème chiffre de l'écriture décimale du i-ème nombre de $[0,1]$, et nous lui ajoutons 1 (ou l'envoyons sur 0). Dès lors, ξ diffère de tout nombre déjà indexé par φ :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\xi \neq \varphi(n)$: $|(\xi - \varphi(n))_n| > 1$. (Le n-ième chiffre de ξ diffère du n-ième chiffre de $\varphi(n)$).

Dès lors, φ n'est pas une bijection de $\mathbb{N}$ dans $[0;1]$: Absurde.

$[0;1]$ n'est pas dénombrable, donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Une tribu infinie n'est pas dénombrable (exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable") (démo)

Lemme 1
Soit Ω un ensemble et $\{A_1,\dots,A_n\}$ une partition de Ω.

On pose pour tout ensemble A : $\sigma(A)$ la σ-Algèbre engendrée par A. C'est la plus petite σ-Algèbre contenant A.
Nous pouvons montrer que $\sigma(A) = \bigcap_{\substack{A \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algèbre}}} \mathcal{A}$

Alors le cardinal de $\sigma(\{A_1,\dots,A_n\})$ vaut 2^n.

Preuve :

Posons $\mathcal{A}$, la famille formée de toutes les réunions d'éléments de $\{A_1,\dots,A_n\}$ (i.e $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i\in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket)\}$).

Alors $\mathcal{A}$ est bien la tribu engendrée par $\{A_1,\dots,A_n\}$: Par définition, toute tribu engendrée par $\{A_1,\dots,A_n\}$ contient toutes les unions possibles de ces éléments (car une tribu est stable par union finie). Donc toute σ-Algèbre contenant cette famille contient $\mathcal{A}$ par définition.

De plus, $\{A_1,\dots,A_n\}$ forme une partition de Ω, ainsi, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, car si $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ pour $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket)$, alors $A^c = \bigcup_{j\in I^c} A_j \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est alors la plus petite σ-Algèbre contenant $\{A_1,\dots,A_n\}$.

Remarquons alors que $|\mathcal{A}| = 2^n$, car $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket) \to \mathcal{A} \\ I = \{i_1,\dots,l_k\} \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \end{cases}$ est une bijection de $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ dans $\mathcal{A}$.

Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit $F_x := \{T \in \mathcal{T} \mid x \in T\}$ et $[x] := \bigcap_{F \in F_x} F$.

Montrons que $x \notin [y]$ implique $y \notin [x]$:
Si $x \notin [y]$ alors il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $x \notin A$ et $y \in A$. Observons que $A^c \in \mathcal{T}$ satisfait $y \notin A^c$ et $y \in A^c$ ce qui montre que $y \notin [x]$. Donc $x \in [y] \Rightarrow [x] = [y]$ ce qui implique que $\sim$, définie par $x \sim y \iff x \in [y]$ est une relation d'équivalence. En effet, la symétrie est la contraposée de la première question, la reflexivité est évidente, et $x \in [y]$ se traduisant en $y \in F$ et $F \in T$ implique $x \in F$ et $F \in \mathcal{T}$, la transitivité est immédiate aussi.

Montrons que $P = \{[x] \mid x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.
C'est la partition qui est engendrée par la relation $\sim$ (L'ensemble Ω quotienté par $\sim$). Il est facile de voir que $[x] \neq [y]$ implique $[x] \cap [y] = \emptyset$, p.ex. par la transitivité de $\sim$.

Soit $T \in \mathcal{T}$. Montrons que $T = \bigcup_{x\in T} [x]$.
Il est clair que $T \subset \bigcup_{x\in T} [x]$. Par définition de $[x]$, si $x \in T$ alors $T \in F_x$ et donc $[x] = \bigcup_{F\in F_x} F \subset T$. On déduit $\bigcup_{x\in T} [x] \subset T$.
Montrons que P est infinie si $\mathcal{T}$ est infinie. D'après le Lemme 1, si $|P| = n$ alors $|\mathcal{T}| = 2^n < +\infty$. Donc, $|P|$ est nécessairement infinie.

Soit P infinie. Montrons par l'absurde que $\mathcal{T}$ est indénombrable. Argumentons par l'absurde: supposons que $\mathcal{T}$ est dénombrable :

1. Montrons que si $\mathcal{T}$ est dénombrable, alors $[x] \in \mathcal{T}$ pour tout $x \in \Omega$.
   Puisque $\mathcal{T}$ est dénombrable, alors $[x]$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ et donc dans $\mathcal{T}$. Mais cela implique que $P \subset T$, rappelons qu'un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable. Ainsi, P est dénombrable.

2. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une énumération de P. Définissons une bijection $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathcal{T}$:

   On définit $\varphi(S) = \bigcup\limits_{k\in S} P_n$. Alors φ est une injection de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{T}$. Donc, $\mathcal{T}$ contient un ensemble non–dénombrable; ainsi $\mathcal{T}$ est non–dénombrable ce qui contredit l'hypothèse.

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1. a_1 est définie comme étant la probabilité que le joueur A gagne le premier point. Par définition, A commence à servir, et le joueur qui sert gagne avec probabilité $2/3$.

Assimilons Ω à l'ensemble des suites à valeurs dans $\{A, B\}$ (formellement, une partie $\omega \in \Omega$ correspond à une suite désignant le joueur gagnant chaque manche).

a_2 correspond à la probabilité que a gagne le deuxième point. Il faut alors considérer les cas où A sert et B sert. Remarquons que les évènements A_1 et B_1 forment un Système complet d'évènements (i.e $A_1 \cup B_1 = \Omega$ et $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, les évènements A_i correspondant à $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = A\}$ et idem pour B_i).

Alors nous pouvons "découper" Ω selon A_1 et B_1 (étant donné que ces ensembles forment une partition de Ω, qui est la définition d'un Système complet d'évènements). Il est alors assez naturel de calculer a_2 comme

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1) = \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{B_1}(A_2) \times \mathbb{P}(B_1)$$

Ainsi, en connaissant le joueur qui sert (via les probabilités conditionnelles), nous pouvons calculer a_2 :

$$a_2 = 2/3 \times 2/3 + 1/3 \times 1/3 = 5/9$$

Question 2. Nous devons ici calculer $\mathbb{P}(A_1 \mid A_2)$ (A_1 sachant A_2, ce qui revient à $\mathbb{P}_{A_2}(A_1)$). Étant donné que l'évènement A_2 n'est pas négligeable d'après ce qui précède, nous avons par définition des probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}_{A_2}(A_1) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \dfrac{2/3 \times 2/3}{5/9} = 4/5$. Alternativement, la formule de Bayes donne le même résultat.

Question 3. Il n'est pas surprenant de pouvoir écrire ce système sous forme matricielle : Ce processus étant récursif, nous pouvons effectuer le même découpage qu'à la question 1 pour obtenir a_{n+1} en fonction de a_n et b_n :

Nous avons $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times 2/3 + \mathbb{P}(B_n) \times 1/3$. Il en va de même pour B_{n+1}.

Ainsi, nous remarquons que l'écriture matricielle suivante convient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Question 4. M est une matrice symétrique réelle, donc à ce titre diagonalisable. Afin de déterminer M^n, nous trouvons Δ diagonale telle que $M = P\Delta P^{-1}$ pour $P \in GL_2(\mathbb{R})$ matrice de passage.

Il suffit alors d'élever les éléments diagonaux de Δ à la puissance n, et de repasser dans la base précédente afin d'efficacement calculer M^n.

Un calcul rapide donne $\chi_M(X) = X^2 - 4/3 X + 1/3 = (X-1)(X-1/3)$. Ainsi, Δ^n converge vers la matrice comportant un unique coefficient 1 sur sa diagonale, et des zéros ailleurs (le placement de 1 dépend de l'ordonnancement des vecteurs propres choisi).

Les suites (a_n) et (b_n) sont alors convergentes.

4.2 Exercice 2

Question 1. Un tel ordonnancement est alors uniquement déterminé par :

- L'ordre des blocs
- L'arrangement individuel des livres dans chaque bloc

Nous avons 6 manières différentes d'organiser trois blocs (3!). Il faut alors multiplier par le nombre d'arrangement possible des livres de mathématiques, puis de physique, puis d'informatique : Nous avons au total $6 \times 14! \times 3! \times 11!$

Question 2. Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés, nous pouvons considérer un arrangement de ces livres comme un bloc à insérer dans les $3+11=14$ livres restants. Ainsi, nous obtenons 14! arrangements possibles pour les livres de mathématiques seuls, puis 14! arrangements possibles pour les autres livres, puis 15 choix de placement du bloc des livres mathématiques. Soit $(14!)^2 \times 15$ possibilités.

4.3 Exercice 3

Soient $A = (x_a, y_a)$ et $B = (x_b, y_b)$ nos deux points.

Remarquons que chaque chemin autorisé reste dans le rectangle délimité par A et B, et que tout chemin de ce rectangle est un chemin valide de A vers B.

Tout chemin de A vers B peut être vu comme une suite correspondant à un ordonnancement des opérations élémentaires "Avancer vers la droite" ($\to$) et "Avancer vers le haut" ($\uparrow$). Un chemin de A vers B comporte $x_b - x_a$ opérations ($\to$) et $y_b - y_a$ opérations ($\uparrow$). Ainsi, tout chemin de A vers B est uniquement déterminé par le choix de $n_x := x_b - x_a$ déplacements horizontaux, parmi les $n_x + n_y$ déplacements nécéssaires.

Finalement, il existe $\binom{x_b - x_a + y_b - y_a}{x_b - x_a} = \binom{x_b - x_a + y_b - y_a}{y_b - y_a}$ chemins possibles.

4.4 Exercice 4

Nous considérons ici chaque réarrangement possible des mots proposés, <u>Sans tenir compte de l'ordre des lettres!</u>.

Pour le mot $ABCDEF$, nous trouvons 6! anagrammes (réarrangements possibles, du fait qu'aucune lettre ne soit en double).

Pour le mot $AAABBCDE$, nous devons prendre en compte le fait que plusieurs lettres "jouent le même rôle". Un calcul naïf donne 8! anagrammes, mais ceci compte plusieurs fois un même mot (en échangeant deux lettres A par exemple, ce qui produit toujours le même mot). Il faut alors supprimer les doublons. Remarquons que pour chaque lettre utilisée plusieurs fois, chaque permutation possible de ces lettres mène à un doublon. A cet effet, nous comptons 3! fois nos mots en considérant les permutations de A, et idem pour B.

Nous obtenons finalement $\frac{8!}{3! \cdot 2!}$

4.5 Exercice 5

Question a. Cet exercice montre qu'il est nécéssaire d'être précis dans l'énoncé des problèmes et des solutions en probabilité : Cet exercice aboutit à un résultat contre-intuitif.

Nous considèrerons que la probabilité d'avoir un garçon vaut $1/2$, au même titre qu'avoir une fille. De plus, les "tirages" sont supposés indépendants.

Les issues possibles de l'expérience sont les ensembles $\{F,F\},\{F,G\},\{G,G\}$ (nous ne tenons pas compte de l'ordre).

La première issue s'obtient avec probabilité $1/4$, tout comme la troisième. Il vient que l'issue $\{F,G\}$ s'obtient avec probabilité $1/2$ (car $\mathbb{P}(\Omega)=1$).

Nous voulons donc calculer $\mathbb{P}(G\in\omega \mid F\in\omega)$. Cette probabilité vaut $\dfrac{\mathbb{P}(G\in\omega\cap F\in\omega)}{\mathbb{P}(F\in\omega)}=\dfrac{1/2}{1/2+1/4}=2/3$.

Question b. Nous imposons cette fois un ordre sur les tirages. Les issues possibles sont alors les couples $(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)$.

Considérons que l'enfant le plus jeune corresponde au premier élément du couple. Nous voulons ici calculer la probabilité que la deuxième coordonée soit G, sachant que la première est F. Cette probabilité vaut bien $1/2$ cette fois, car se calcule par quotient de cardinaux (du fait de l'équiprobabilité des issues) :

$$\mathbb{P}(\omega=(\times,G)\mid\omega=(F,\times))=\frac{\mathbb{P}(\omega=(F,G))}{\mathbb{P}(\omega=(F,\times))}=1/2$$

4.6 Exercice 6

Question 1. On pose $\Omega=[\![1,6]\!]^2$. Notre expérience revient à tirer un couple aléatoire (avec une loi de probabilité uniforme) dans Ω.

Ainsi, $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\mathbb{P}(A)\cap\mathbb{P}(B)$. Les évènements A et B sont bien indépendants. (Nous dénombrons les couples réalisant A et B).

De plus, remarquons que $A\cap C=A\cap B$ et $B\cap C=A\cap B$ par définition de C, d'où l'indépendance entre A, B et C.

Question 2. La remarque précédente nous permet de remarquer que $A\cap B\cap C=A\cap B$, car $A\cap B\subset C$. Or, $\mathbb{P}(C)\neq 1$, ainsi, $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\neq\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C)$: Ces évènements ne sont pas mutuellement indépendants.

4.7 Exercice 7

Notons P l'évènement "Le test est Positif", et M l'évènement "L'individu est malade".

Nous avons $\mathbb{P}(P\mid M)=0.99$, et $\mathbb{P}(P\mid\overline{M})=0.001$. Nous cherchons $\mathbb{P}(M\mid P)$. La formule de Bayes donne

$$\mathbb{P}(M\mid P)=\mathbb{P}(P\mid M)\times\frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}$$

Or, $\mathbb{P}(M)=1/10000$, et $\mathbb{P}(P)=\mathbb{P}(P\mid M)\times\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(P\mid\overline{M})\times\mathbb{P}(\overline{M})=0.99\times 1/10000+0.001\times 9999/10000$.

Ainsi, $\dfrac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}=\dfrac{1}{0.99+9.999}=1/10.989$. Finalement, $\mathbb{P}(M\mid P)=0.99\times 1/10.989\simeq 0.09$, ce qui est peu ($<10\%$).

Sur une telle population, ces taux de succès et de faux-positif sont trop importants pour que ce test soit utile.

4.8 Exercice 8

Notons les évènements A : "La trottinette provient de l'usine A" (idem pour B), et D : "La trottinette présente un défaut".

Nous avons $\mathbb{P}(D \mid A) = 0.05$ et $\mathbb{P}(D \mid B) = 0.02$. Nous cherchons $\mathbb{P}(A \mid D)$.

Encore une fois, la formule de Bayes donne $\mathbb{P}(A \mid D) = \mathbb{P}(D \mid A) \times \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}$.

Les informations de l'énoncé donnent $\mathbb{P}(A) = {}^2/_3$ et $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D \mid B) \times \mathbb{P}(B) = {}^2/_3 \times 0.05 + {}^1/_2 \times 0.02$.

Il vient alors $\mathbb{P}(A \mid D) = 0.05 \times \dfrac{{}^2/_3}{{}^2/_3 \times 0.05 + {}^1/_2 \times 0.02} = \dfrac{1}{1 + {}^3/_4 \times {}^2/_5} = {}^{10}/_{13}$


And I looked, and behold, a pale horse.
And the rider's name was death