Colles MPi* Semaine n°10 du 18/11/2024 au 22/11/2024

Vallaeys Pascal

6 novembre 2024

Thème : Espaces probabilisés (sans variables aléatoires), dénombrement. (programme n°6)

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier
- Martinsse

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'un ensemble dénombrable.
- Définition d'une tribu.
- Compatibilité d'une tribu avec l'intersection finie ou dénombrable (démo)
- Définition d'une mesure de probabilité.

- La probabilité d'une union est inférieure à la somme des probabilités. (démo)
- Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable. Idem pour « presque sûr » (« démo »)
- Formule des probabilités totales (démo)
- Formule de Bayes (« démo »)
- Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont également. (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Montrer que l'ensemble des entiers relatifs est dénombrable (démo). Idem pour $\mathbb{Q}+$, avec simplement une idée de démonstration (éventuellement le formalisme complet en exercice)
- Théorèmes de continuité croissante et décroissante (démo).
- Montrer que le corps des réels n'est pas dénombrable. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Une tribu infinie n'est pas dénombrable (exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable") (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
On souhaite ranger sur une étagère 14 livres de mathématiques (distincts), 3 livres de physique, et 11 d'informatique. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 2 : Soit A un ensemble fini. Déterminer $\sum\limits_{X\subset A} Card\,(X)$.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $k \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que : $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
2. Soit $p \in \left]0,1\right[$. On pose : $\forall n \geqslant k, P(n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$.
Montrer que P définit bien une loi de probabilité.

Exercice 4 :
De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes qui comporte exactement 2 dames et 2 coeurs ?

Exercice 5 : Quel est le plus probable ?
a) Obtenir au moins un as en lançant 4 dés ?
b) Obtenir au moins deux as en lançant 10 dés ?
c) Obtenir au moins une paire d'as en lançant 25 paires de dés ?

Exercice 6 : Soit (Ω, A, p) un espace probabilisé. On note $B = \{X \in A / p\,(X) \in \{0,1\}\}$. Montrer que B est une tribu.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 :
Démontrer les formules suivantes à l'aide de modélisation par une expérience, ou autre méthode :

1. $\binom{m+n}{r} = \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$
2. $\binom{n}{r} = \sum\limits_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}$
4. $2^p \binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n\_k}{p-k}$
5. $0 = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$
6. $\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - ....\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + ...\right)^2 = 2^n$. (Utiliser $(1+i)^n$)
7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
8. $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$

Exercice 8 : (Mines MP 2021)
1. Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \subset Y$?
2. Dans une urne contenant n boule numérotées de 1 à n, on tire une poignée de boules, que l'on remet ensuite dans l'urne. On tire une deuxième poignée de boules. Quelle est la probabilité de tirer deux poignées de boules distinctes, i.e, aucune boule de la deuxième poignée n'a été tirée à la première ?

Exercice 9 : Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

Exercice 10 : On dispose de n boites numérotées de 1 à n et de k balles indiscernables. On range les balles dans les boites et on se demande quel est le nombre de façons possibles de le faire.

Exercice 11 : On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ et s un réel strictement supérieur à un. On muni Ω de la tribu $T = P(\Omega)$. On note $\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On munit T de la loi telle que : $p(\{n\}) = \frac{1}{\varsigma(s).n^s}$.

1. Montrer que c'est bien une probabilité.
2. Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, sont indépendants dans leur ensemble.
3. Exprimer l'évènement « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction des $\overline{A_p}$.
4. On numérote les nombres premiers dans l'ordre croissant : $2 = p_1 < p_2 < .... < p_k < ...$, et on note $E_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}$. Montrer que $p(\{1\}) = \prod_{p \ premier} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.
5. En déduire $\varsigma(s) = \prod_{p \ premier} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$.

Exercice 12 : (Mines MP 2021)
Soit p $\in]0, 1[$ et $\alpha \in \left]0, \frac{1}{p} - 1\right[$. Pour $n \geqslant 1$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est αp^n.
1) Quelle est la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant ?
2) Quelle est la probabilité qu'une famille ait k garçons ?
3) Quelle est la probabilité qu'une la famille avec au moins un garçon ait au moins deux garçons ?

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 13 :
Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention, on pose $D_0 = 1$.

Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention, on pose $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .D_{n-k}$?

3. Montrer que $D_{n+1} = n\left(D_n + D_{n-1}\right)$.

Exercice 14 : Si E est un ensemble, on appelle singletons les ensembles $\{e\}$ avec $e \in E$.
a) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E ?
b) A supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire des ensembles à deux éléments) de E ?
c) Une partie A de E étant fixée, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A ?
d) Soient G et F deux tribus de E. Décrire simplement la tribu engendrée par $F \cap G$, puis de la tribu engendrée par $F \cup G$.
e) Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $A = \{[0,2], [1,3]\}$? Quel est son cardinal ?

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 105,107,112.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Espaces probabilisés (sans variables aléatoires), dénombrement, exercices de sup. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°6
- Groupe 5 à 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 à 11 : Programme n°5
- Groupe 12 à 14 : Programme n°5