Structures algébriques, arithmétiques et polynômes

Vallaeys Pascal

16 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 86,94

Méthodes de base :

- Justifier une structure algébrique ou un morphisme de structure.
- Déterminer l'ordre d'un élément dans un groupe.
- Travailler dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Utiliser les théorème de Gauss et de Bézout.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (CCINP MP 2023)
On considère un groupe $(G,.)$ cyclique d'ordre n, engendré par a. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f : x \in G \longmapsto x^r$. On pose également $d = \text{pgcd}(r, n)$.
1. Montrer que f est un morphisme de groupe.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe de G engendré par a^d.
4. Soit $y \in G$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $y = x^r$.

Exercice 2 : (Mines MP 2022)
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in G, \quad M^2 = I_n$.
1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer $|G| \leq 2^n$.
3. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que les deux groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1$.
Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n.
Dans les cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne

Exercice 4 : (Magistère MP 2022)
Soit G un groupe. Montrer l'équivalence suivante : G est fini $\Leftrightarrow$ G admet un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2022)
Exprimer $\sin(3x)$ comme polynôme de $\sin x$. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : On pourra utiliser la notation complexe. On pourra ensuite raisonner par l'absurde.

Exercice 6 : (CCINP MP 2022)
Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle "radical" de I et l'on note $\sqrt{I}$, l'ensemble : $\sqrt{I} = \{x \in A \,|\, \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.
1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
2) Donner le radical de deux exemples simples d'idéaux de A.
3) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que :
a) $I \subset J \Longrightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$;
b) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;

c) $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

4) Application dans $\mathbb{Z}$: on donne $m = \prod_{i=1}^{k} p_i$ et $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout i de 1 à k, $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.
Montrer que $m\mathbb{Z} = \sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 7 : (Mines MP 2021)
Soit p un nombre entier impair. Démontrer l'équivalence :

$$p \text{ premier} \iff p \text{ ne divise pas } (p-1)!$$

Exercice 8 : (Mines MP 2021)
Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = I_2$.
Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2021)
1) Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.
2) Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Exercice 10 : (Mines-Ponts 2019)
a) Dénombrer les carrés de ${}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$.
b) On suppose que $p \equiv 1\,[4]$. En calculant la classe de $(p-1)!$ modulo p de deux manières, montrer que -1 est un carré modulo p.
c) On suppose que -1 est un carré modulo p. Montrer que $p \equiv 1\,[4]$.

Exercice 11 : (Mines-Ponts 2019)
a) Soit φ un isomorphisme entre deux groupes G et H. Montrer que x est générateur de G si et seulement si $\varphi(x)$ est générateur de H.
b) Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 12 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $n \geq 2$ un entier et $\gamma \in S_n$ un n-cycle. Décomposer γ en produit de transpositions.

Exercice 13 : (IMT MP 2019)
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que si m divise n, $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.
b) Étudier la réciproque.

Exercice 14 :
Soit $(G, .)$ un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = e$.
a) Montrer que G est commutatif.
b) Si G est fini de cardinal fixé, montrer qu'il n'existe, à isomorphisme prêt qu'un seul tel groupe.
c) Répondre à la même question si on suppose à la place : $\forall x, y \in G\ (xy)^2 = x^2y^2$.

Exercice 15 : Soit G un groupe. A quelle condition sur G l'application $x \to x^{-1}$ est-elle un morphisme de groupe ?

Exercice 16 :
a) Quel est le plus petit entier n pour lequel il existe deux groupes de cardinal n non isomorphes.
b) Quel est le plus petit groupe non commutatif ?

Exercice 17 :
Résoudre $\begin{cases} x \equiv 3\,[11] \\ x \equiv 2\,[19] \end{cases}$, puis $\begin{cases} 3x \equiv 1\,[5] \\ 5x \equiv 2\,[6] \end{cases}$.

Exercice 18 :
Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$.

Exercice 19 :
On note $A = \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \text{ tels que } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que A est un anneau, pour les opérations usuelles.

b) On pose, $\forall z \in A$, $N(z) = |z|^2$. Utiliser N pour montrer que si deux nombres entiers sont sommes de deux carrés d'entiers, il en va de même pour leur produit.

c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.

Exercice 20 :

Soit m un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier naturel. On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + i.b \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}\}$, et $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + \sqrt{m}.b \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.

b) Déterminer les éléments inversibles de cet anneau ainsi que la structure algébrique de l'ensemble des ces éléments inversibles.

c) Montrer que $A = (\mathbb{Z}[\sqrt{m}], +, \times)$ est un anneau.

d) On pose sur A : $N(a + b.\sqrt{m}) = a^2 - b^2.m$. Montrer que l'image par N du produit de deux éléments de A est égale au produit des images de ces éléments.

e) En utilisant N, déterminer les éléments inversibles de A.

f) Si m=13, montrer que 2, $3 - \sqrt{13}$ et $-3 - \sqrt{13}$ sont irréductibles (Ils ne peuvent s'écrire sous la forme du produit de deux éléments non inversibles).

g) Toujours pour m=13, donner un exemple de nombre pouvant se décomposer de plusieurs manière en produit d'irréductibles.

h) Démontrer que sur $\mathbb{R}[X]$, la décomposition en produits d'irréductibles est unique.

Exercice 21 : Théorème de Wilson.

Soit p un nombre premier autre que 2.

a) Quels sont les éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ égaux à leur inverse ?

b) En déduire que $(p-1)! \equiv -1\,[p]$.

c) Etudier le problème réciproque : cette congruence entraine-t-elle que p est premier ?

Exercice 22 : (Mines-Ponts 2017 et tous les ans)

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

a) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$.

b) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) = U$.

Exercice 23 : (Mines MP 2023)

Soit G un groupe commutatif d'ordre pq où p et q sont deux entiers premiers distincts.

1. Montrer que G est cyclique.
2. Montrer l'importance de la commutativité.

Exercice 24 : (Mines télécom MP 2022)

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour p entier diviseur de n, on introduit l'événement $D_p = \{1 \leqslant k \leqslant n,\ p|k\}$.

1) Calculer $P(D_p)$.

2) Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Les événements $D_{p_1}, \ldots, D_{p_r}$ sont-ils mutuellement indépendants ?

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'indicatrice d'Euler ($\varphi(n)$ est le nombre d'éléments de Ω premiers avec n).

Montrer que : $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Exercice 25 : (Centrale MP 2021)

Soit $\mathbb{K}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, montrer que $f : x \mapsto ax$ est un automorphisme. En déduire que a est inversible.
2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $(1, a)$ est libre et $(1, a, a^2)$ est liée.
3. Montrer l'existence de $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$, puis que $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Exercice 26 : (Mines MP 2021)

Soit p un nombre premier. On pose $q = (p^2 - p)(p^2 - 1)$. Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1) Donner le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2) Montrer que : $A^{q+2} = A^2$.

3) Quel est le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, pour $n \geqslant 1$?

4) Quel est le cardinal de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 27 : (Mines télécom MP 2022)
Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si :
$\forall (x,y) \in A^2, xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$.
Soit A un anneau abélien dont tous les idéaux sont premiers, montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

Exercice 28 : Montrer qu'il y a un nombre de la forme 111. . .1 (c'est à dire que tous les chiffres décimaux sont 1) qui est divisible par 19.

Exercice 29 : (Mines MP 2021)
Une application p d'un ensemble E dans E est dite idempotente si $p \circ p = p$.
1. a) Montrer que si p est injective et idempotente, alors $p = \mathrm{Id}_E$.
b) Montrer que si p est surjective et idempotente, alors $p = \mathrm{Id}_E$.
c) Construire une application idempotente p différente de l'identité pour $E = \{a, b\}$.
2. Montrer que p est idempotente ssi : $\forall x \in p(E),\ p(x) = x$.
3. Donner les trois applications idempotentes pour $E = \{a, b\}$, et les dix pour $E = \{a, b, c\}$.

Exercice 30 : On désigne par a et p des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
a) Montrer que si $a^p - 1$ est premier alors a=2 et p est premier.
b) Montrer que si $2^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.
c) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que $P(n)$ soit premier pour tout entier naturel n. (On montrera que si P(n) est premier, P(n) divise P(n+P(n)))
d) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme 6k-1, où k est un nombre entier naturel.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 31 : (Mines MP 2023)
Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables commutant entre elles.
1. a) Montrez que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.
b) Conclure pour $A_1, \ldots, A_p$ (on fera une récurrence).
2. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = I_n\}$. Montrer que G est fini. Que dire de son cardinal ?
3. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ distincts. Existe-t-il un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$?

Exercice 32 : (Centrale MP 2023)
Soit $(G, *)$ un groupe d'ordre N.
On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de $(G, *)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
1. a) Rappeler la définition d'un ordre, que dire de l'ordre de $g \in G$.
b) Que dire de $\phi(g)$ pour $\phi \in \widehat{G}$.
c) Montrer que $\widehat{G}$ est fini. On note $\widehat{N}$ son cardinal.
2. a) Pour $\phi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$ montrer que : $\sum_{g \in G} \phi(g) = 0$.
b) Montrer que $\{\phi,\ \phi \in \widehat{G}\}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^G$.
c) En déduire que $\widehat{N} \leqslant N$.
d) Non traitée.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour 1b) L'examinateur attendait que l'on dise que $\phi(g)$ est une racine N-ième de l'unité.
Pour 2a) Il faut utiliser le fait que ϕ est un morphisme et qu'il est différent du neutre

Exercice 33 : (Centrale MP 2023)
Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est principal s'il est engendré par un nombre fini d'éléments c'est-à -dire : $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in I,\ \forall x \in I,\ \exists a_1, \ldots, a_p \in A,\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$. On érit aussi $I = \mathrm{Vect}_A(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. On dit qu'un anneau est noethérien si tous ses idéaux sont principaux.
1. Montrer que $\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ sont noethériens.
2. Montrer qu'un anneau $(A, +, \times)$ est noethérien ssi toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire à partir d'un certain rang.

Commentaires divers : L'examinateur a demandé la démonstration de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est noethérien.

Exercice 34 : (Mines MP 2023)
On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite ordonnée des nombres premiers. On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\prod_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{1+\frac{1}{p_k}}$. On désigne par φ l'indicatrice d'Euler.
1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_n}$ converge.
2. Montrer que $v_n\geq\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$. Qu'en déduire ?
3. Existe-t-il un réel $a\in\mathbb{R}^*$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\varphi(n)>an$?
4....
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Exercice 1 :
1) Pour un des deux sens, il faut utiliser une comparaison asymptotique
2) Les facteurs qui forment le nombre v_n font penser à la somme d'une série géométrique. Puis penser à la décomposition des entiers en facteurs premiers.
Commentaires divers : L'énoncé de l'exercice 1 est incomplet.
L'examinateur a donné beaucoup d'indications, et laissait peu de temps mort.
L'exercice 1 était à préparer, et on est passé à l'exercice 2 au bout de 40 minutes de présentation au tableau.

Exercice 35 : (Mines télécom MP 2023)
Montrer que $P(x)=x^3+3x^2+2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 36 : (Mines MP 2022)
Montrer qu'aucun des nombres de la forme $10001, 100010001\ldots$ n'est premier.

Exercice 37 : (Mines MP 2022)
Soit p un nombre premier.
On pose : $G_p=\{z\in\mathbb{C}^*,\exists k\in\mathbb{N}, z^{p^k}=1\}$.
1) Montrer que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$
2) Soit H un sous-groupe de G_p , $H\neq G_p$, $H\neq\{1\}$.
Montrer que H est cyclique.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Ecrire G_p de manière ensembliste, faire un dessin.

Exercice 38 : (Mines MP 2022)
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec :
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}.$$
1) Déterminer le sous-groupe engendré par A et B.
2) Que dire des éléments qui commutent avec A et B ?

Exercice 39 : (Magistère MP 2022)
1. Soit $n_1,\ldots,n_k$ des entiers deux à deux distinct supérieurs ou égaux à 2. Montrer que
$\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\geqslant\frac{1}{k+1}$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que : $\varphi(n)\geqslant\dfrac{n\ln(2)}{\ln(n)+\ln(2)}$
où φ est l'indicatrice d'Euler.

Exercice 40 : (Centrale MP 2021)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, noté $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$, où les g_i sont distincts.
1. a) Montrer que $\operatorname{rg}p=\operatorname{Tr}p$ si p est un projecteur.
b) Si $i\in[\![1,n]\!]$, on note $f_i : g\mapsto g\circ g_i$. Montrer que f_i est une permutation de G.
2. On pose $p=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G}g$.

a) Montrer que p est un projecteur.

b) Montrer que $\dim\left(\bigcap_{g\in G}\operatorname{Ker}(g-\operatorname{Id})\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr}g$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G et H un supplémentaire de F. On note q le projecteur sur F parallèlement à H. Montrer qu'il existe un supplémentaire de F stable par tous les éléments de G.

Exercice 41 :
On note $E=C^0([a,b],\mathbb{R})$, avec a<b deux réels fixés. Soit $f\in E$ une fonction non constante.
a) Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. (attention au sens de l'écriture f^n)
b) En déduire les sous-algèbres de dimension finies (en tant qu'espace vectoriel) de E.
c) Soit $c\in[a,b]$. On note $I_c=\{f\in E \text{ telle que } f(c)=0\}$. Montrer que I_c est un idéal de E.
d) Montrer que I_c vérifie la propriété (*) : $\forall J$, idéal de E, tel que $I_c\subset J\subset E$, on a soit $I_c=J$, soit $J=E$.
e) Montrer que tout idéal de E vérifiant la propriété (*) est de la forme I_c.

Exercice 42 :
Soit n un entier naturel non nul.
a) Factoriser $(X+1)^n-(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
b) En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot an^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
c) Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n}\cot an\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 43 :
On pose E=$\mathbb{C}^n$, avec n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $u\in L(E)$ et p un projecteur de E.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes, utilisant les noyaux et les images de u et p, pour que p et u commutent.
2. Supposons que u ne soit pas une homothétie ($u\neq\lambda.Id\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$). Montrer qu'il existe une projection ne commutant pas avec u.
3. Soit G un sous-groupe fini de GL(E), et p un projecteur dont l'image est stable par tous les éléments de G. On pose $u=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}$. Montrer que u est un projecteur commutant avec tous les éléments de G. ($|G|$ désigne le cardinal de G)
4. En déduire que si H est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G, il possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 44 : (ENS MPi 2022 ???)
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace euclidien.
Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un sous-groupe L de $(\mathbb{R}^n,+)$ est un réseau si :
$$\begin{cases}(i) & \operatorname{Vect}(L)=\mathbb{R}^n\\ (ii) & \forall x\in\mathbb{R}^n,\forall R>0,\ \ B(x,R)\cap L \text{ est fini}\end{cases}$$
1. Déterminer L pour $n=1$.
2. On note $L(e)=\{a_1e_1+\cdots+a_ne_n\ \ tq\ \ (a_1,...,a_n)\in\mathbb{Z}^n\}$. Montrer que $L(e)$ est un réseau.
3. Donner une CNS pour que $L(e)=L(e')$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Faire un dessin pour la première question. Pour la 3ème, quels éléments particuliers de l'un appartiennent à l'autre ?

Commentaires divers : Examinatrice pas très loquace, pas très agréable. ULCR 45 minutes.

Exercice 45 : (ENS MP 2023)
Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On considère un sous-groupe G de $(GL(\mathbb{C}^n),\times)$..
On suppose que : $\forall g\in G, g^N=Id$.
Montrer que G est fini.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Considérer le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ engendré par G.

Commentaires divers : Oral Ulm 1 heure

Exercice 46 : (X MP 2023)
Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $z(\sigma)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ commutant avec σ.
1. Montrer que $z(\sigma)$ est un groupe, puis que pour tout automorphisme ϕ de $\mathcal{S}_n$, $z(\phi(\sigma)) = \phi(z(\sigma))$.
2. Déterminer le cardinal de ce groupe pour une transposition et pour une composition de transpositions à supports disjoints.
3. Montrer que si $n \neq 6$, alors pour toute transposition σ et pour tout automorphisme ϕ , $\phi(\sigma)$ est une transposition.

Exercice 47 : (X MP 2023)
Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $(N_1, ..., N_r) \in \mathbb{N}^r$ premiers entre eux deux à deux.
1. Montrer que pour tout r-uplet d'entiers $(f_1, ..., f_r)$, il existe un entier F tel que : $\forall i \in [\![1, r]\!], \ F \equiv f_i \ [N_i]$.
2. Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{C}[X])^2$ sans racines communes (premiers entre eux), montrer que pour tout couple de polynômes (f_1, f_2), il existe F tel que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $P_i \mid F - f_i$
3. Généralisation à r polyômes.
4. Montrer que pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, F et G deux polynômes sans racines communes, il existe $H \in \mathbb{C}[X]$, $G \mid H^N - F$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1. traiter le cas r = 2
2. $\varnothing$
3. faire une récurrence sur r
4. montrer que si on le montre pour les monômes, alors on le montre sur le reste.
Commentaires divers : Examinateur sympathique. Il m'a pas mal aidée, j'ai été un peu longue à la détente, et je n'ai pas fini la question 4.

Exercice 48 : (X MP 2023)
Soit n un entier naturel et G un groupe de cardinal n. Pour d entier naturel, on note N_d l'ensemble des éléments de G d'ordre d : $N_d(G) = \{x \in G \mid \omega(x) = d\}$.
1. Montrer que $\sum_{d|n} \operatorname{Card} N_d(G) = n$.
2. Si G est un groupe cyclique, montrer que $\operatorname{Card}(\{x \in G \mid x^d = e\}) = d$
3. Montrer que si pour tout d divisant n, $\operatorname{Card}(\{x \in G \mid x^d = e\}) \leqslant d$, alors G est cyclique.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1. $\varnothing$.
2. Aide pour le calcul du nombre d'entiers $k < d$ tels que $n|kd$.
3. On pourra commencer par calculer $N_d(G)$.
Commentaires divers : Examinateur peu bavard mais souriant, assez distant.

Exercice 49 : (X MP 2022)
Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note P_σ la matrice de permutation associée (ie en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice de l'application linéaire qui à e_i associe $e_{\sigma(i)}$). Montrer qu'il y a équivalence entre :

- σ et τ sont conjuguées
- P_σ et P_τ sont semblables

Il restait du temps, l'examinateur m'a donc demandé de calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de P_σ, en fonction des $c_i(\sigma)$, nombre de cycles de longueur i dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 50 : (ENS MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer $P(XY = 0)$.
Indications fournies par l'examinateur pendant l'épreuve :
L'examinateur a invité à considérer des cas particuliers, notamment $n = 4$ et $n = 6$, pour en déduire une conjecture, faisant intervenir les ordres additifs des éléments. Afin d'étudier plus en détail les ordres de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il a posé des questions visant à introduire l'isomorphisme chinois.
Commentaires divers :
L'examinateur commence par signaler que l'exercice est difficile et qu'il ne s'agit pas de le résoudre en entier.

Exercice 51 : (ENS MP 2022)
1) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, $\operatorname{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^{\operatorname{pgcd}(m,n)} - 1$

2) On pose pour tout entier n le polynôme cyclotomique Φ_n dont les racines sont les racines primitives $n-$ièmes de l'unité. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{2n}(X) = \pm\Phi_n(-X)$ si n est impair, et $\Phi_n(X^2)$ si n est pair.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

1) Quasiment aucune aide si ce n'est de traiter le cas $n \wedge m = 1$ puis de s'y ramener dans le cas général.

2) J'ai eu un tout petit peu de mal à restituer la définition de "racine primitive", qui est $\{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![1, n]\!]\ k \wedge n = 1\}$. A la suite de cela, on m'a demandé d'écrire les 4 premiers polynômes. Penser à écrire -1 sous la forme exponentielle.

Commentaires divers :

Raisonner sur les racines possible des diviseurs des deux polynômes simultanément.

Beaucoup (si ce n'est que ça) de Bézouteries pour la question 2, en raisonnant sur l'énumération des racines des polynômes mis en jeux.

Exercice 52 : Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations.