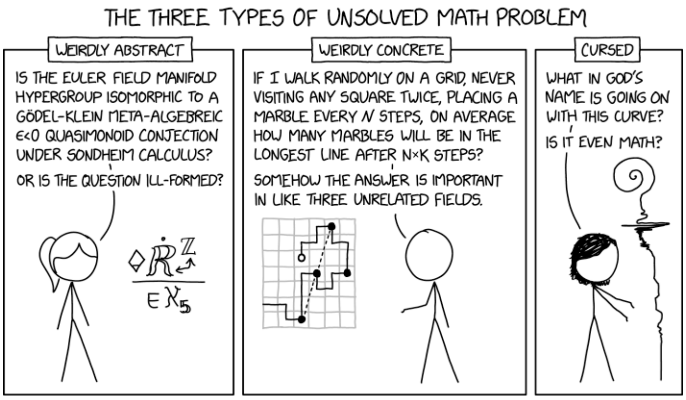
MPI* Maths-Info

Théorème Maître

(démonstration)



Olivier Caffier

Rappel : Ce théorème est hors-programme, ne doit pas être utilisé dans les copies etc... Néanmoins, rien ne nous empêche d'utiliser le résultat pour nous orienter lors d'un raisonnement. (Le parallèle en maths pourrait être les séries/intégrales de Bertrand).

Théorème maître (avec notation de Landau)

Supposons la relation de récurrence suivante :

$$C(n) = aC(\lfloor \tfrac{n}{b} \rfloor) + \mathcal{O}(n^\alpha)$$

On a :

— Si $\alpha < \log_b a$ alors $C(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$

— Si $\alpha = \log_b a$ alors $C(n) = \mathcal{O}(n^\alpha \log_b n)$

— Si $\alpha > \log_b a$ alors $C(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$

DEMO : On expose la suite

$$\begin{cases} u_{n_0} & = \lambda \\ u_n & = au_{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} + cn^\alpha \end{cases}$$

On suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante,

— **Cas n°1 :** $n = n_0 b^p$
$v_p = u_{n_0 b^p} \Rightarrow v_{p+1} = au_{n_0 b^p} + C(n_0 b^{p+1})^\alpha$.
Ainsi,

$$v_{p+1} = av_p + \delta (b^\alpha)^{p+1}, v_0 = u_{n_0}$$

en notant $\delta = cn_0^\alpha$

On a alors :

$$\begin{aligned} &v_0 = av_0 + \delta b^\alpha \\ &v_1 = av_1 + \delta b^{2\alpha} = a^2 v_0 \delta ab^\alpha + \delta b^{2\alpha} \\ &v_2 = av_2 + \delta b^{3\alpha} = a^3 v_0 + \delta a^2 b^\alpha + \delta ab^{2\alpha} + \delta b^{2\alpha} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_p &= a^p v_0 + \delta \sum_{k=0}^{p-1} a^k (b^\alpha)^{p-k} \\ &= a^p v_0 + \delta b^{\alpha p} (\sum_{k=0}^{p-1} (\frac{a}{b^\alpha})^k \\ &= v_0 a^p + \delta b^{\alpha p} \frac{1 - (\frac{a}{b^\alpha})^p}{1 - \frac{a}{b^\alpha}} \end{aligned}$$

en supposant $a \neq b^\alpha$

Or $n = n_0 b^p \Rightarrow \ln(n) = \ln(n_0) + p\ln(b)$

Ainsi

$$p \sim \tfrac{\ln(n)}{\ln(b)} = \log_b(n)$$

D'où

$$\begin{aligned} a^p &= a^{\log_b(n) - \log_b(n_0)} \\ &= e^{(\log_b(n) - \log_b(n_0))\ln(a)} \\ &= e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}\ln(n) + \text{ (negligeable)}} \\ &= e^{\ln(n^{\log_b(a)} + \text{negligeable})} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{a^p = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)})}$$

— $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{a}{b^\alpha} > 1$ i.e ($\alpha < \log_b(a)$)
Alors

$$\begin{aligned} t_2 = \delta b^{\alpha p} \frac{1-(\frac{a}{b^\alpha})^p}{1-\frac{a}{b^\alpha}} \sim \mu b^{\alpha p} (\frac{a}{b^\alpha})^p = \mu a^p \\ = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}) \end{aligned}$$

d"où

$$\boxed{\boxed{v_p = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)})}}$$

— $\boxed{\mathbf{2}}$ $\alpha > \log_b(a)$

$$\begin{aligned} t_2 &\sim \mu b^{\alpha p} \\ v_p &= \mathcal{O}(a^p) + t_2 \end{aligned}$$

or $b^\alpha > a$.
D'où

$$\begin{aligned} v_p &= \mathcal{O}((b^\alpha)^p) \\ &= \mathcal{O}((\frac{n}{n_0})^\alpha) \end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\boxed{v_p = \mathcal{O}(n^\alpha)}}$$

— $\boxed{\mathbf{3}}$ $\alpha = \log_b(a)$
On a

$$\begin{aligned} v_p &= a^p v_0 + \delta b^{\alpha p} p \\ &= v_0 a^p + \delta (\frac{n}{n_0})^\alpha p \\ &= \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}) + \frac{\delta}{n_0^\alpha} n^\alpha \frac{\ln(n) - \ln(n_0)}{\ln(b)} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\boxed{n^\alpha \log_b(n)}}$$

— **Cas n°2 (cas général) :** Pour $n \in \mathbb{N}$, comme il s'agit d'une suite croissante.

$$n_0 b^p \leq n < n_0 b^{p+1}$$

On a alors un encadrement qui nous permet de nous ramener au **Cas n°1**

d'où le résultat voulu

EXEMPLE

— **Tri fusion** $a = 2, b = 2, \alpha = 1 \to \mathcal{O}(n \log(n))$
— **Dichotomie** $a = 1, b = 2, \alpha = 0 \to \mathcal{O}(n^0 \log(n))$