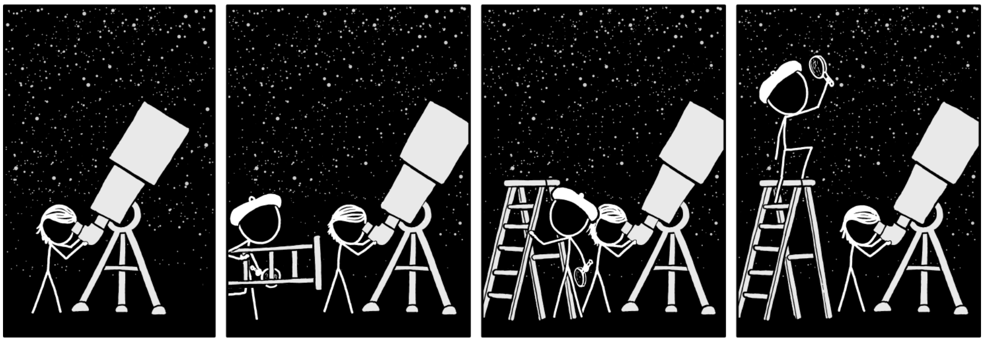
MPI* Physique

Optique Géométrique

Exercices



Olivier Caffier

Table des matières

Questions de cours

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes.
2. Donner la définition de la réflexion, de la réflexion, d'un dioptre. Notion de milieu plus ou moins réfringents et conséquence sur les rayons par rapport à la normale.
3. Expliquer le phénomène de réflexion totale et la notion d'angle limite.
4. Donner les définitions suivantes : objet, image, point réel/virtuel, foyer image, foyer objet.
5. Énoncer les conditions de Gauss et leurs conséquences.
6. Donner la définition de la vergence. Quelle est son unité ? Quel est son signe ?
7. Donner la définition du grandissement et du grossissement, interprétation avec leur signe (image renversée, droite...).
8. Schémas d'une lentille convergente/divergente + règles de construction.
9. Schéma d'un miroir plan + construction.
10. Définition d'un système focal/afocal.
11. Énoncer les relations de conjugaison.
12. Énoncer les méthodes d'autocollimation et de Bessel.

1 Exercices du polycopié « Rappels MP2I »

1.1 Relations fondamentales du prisme et minimum de déviation

On considère le prisme suivant :

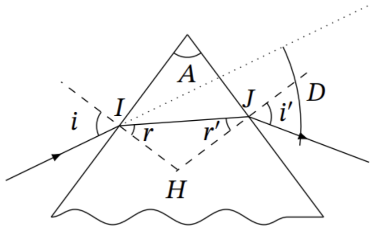


FIGURE 1 – Positionnement d'un prisme par rapport au rayon incident pour une utilisation « normale ».

Retrouvez les relations suivantes, appelées *relations fondamentales du prisme* :

$$\begin{cases} A &= r + r' \\ D &= i + i' - A \end{cases}$$

Corrigé :

- La déviation D est la somme des déviations des deux réfractions :

$$D = D_1 + D_2$$
$$\text{i.e } D = (i - r) + (i' - r')$$

- On applique les lois de Snell-Descartes pour les deux réfractions aux petits angles :

$$\begin{cases} \sin(i) = n\sin(r) \\ n\sin(r') = \sin(i') \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} i \approx nr \\ i' \approx nr' \end{cases}}$$

- La somme des angles dans un quadrilatère vaut 2π, donc ici dans $AIJH$:

$$A + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + H = 2\pi$$

  D'où :

$$\boxed{A + H = \pi}$$

- La somme des angles d'un triangles vaut π, donc ici dans IJH :

$$\boxed{r + r' + H = \pi}$$

- On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} D = (i - r) + (i' - r') \\ i \approx nr \\ i' \approx nr' \\ A + H = \pi \\ r + r' + H = \pi \end{cases}$$

  Ainsi, $L_4 - L_5$ nous permet d'affirmer que :

$$\boxed{\mathrm{A = r + r'}}$$

  Enfin, ce résultat et L_1 nous permettent de conclure :

$$\begin{aligned} D &= (i - r) + (i' - r') \\ &= i + i' - (r + r') \end{aligned}$$

  D'où le résultat voulu :

$$\boxed{D = i + i' - A}$$

1.2 Questions simples sur les lentilles minces

Reportez-vous à la Figure 2. La lentille $\mathcal{L}$ est divergente de focale f' et de centre O.

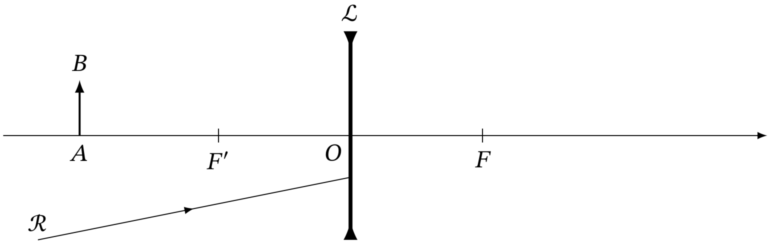


FIGURE 2 – Questions simples sur les lentilles minces.

Construisez l'image $A'B'$ de AB et le réfracté de $\mathcal{R}$. Les deux constructions sont indépendantes. Quelle est la nature de l'image $A'B'$?

Corrigé : On a les constructions suivantes :

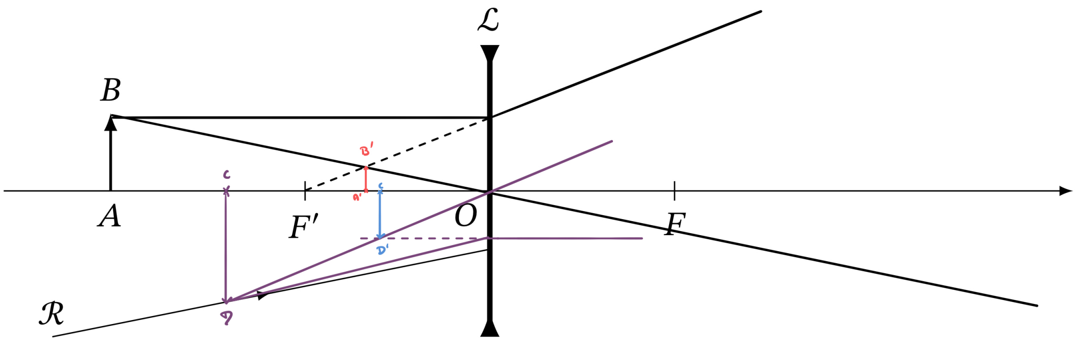


FIGURE 3 – Les deux constructions.

1.3 Méthode focométrique de Bessel

Prouvez les relations et affirmations du paragraphe sur la méthode de Bessel.

Corrigé : En posant $p = \overline{OA}$ et $D = \overline{AA'}$, il vient que $\overline{OA'} = D - p$. Ainsi, d'après la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff p^2 - pD + Df' = 0$$

Dès lors,

$$\Delta = D(D - 4f')$$

et on retrouve bien les situations suivantes :

- $\Delta < 0$, i.e $D < 4f'$: la relation de conjugaison n'admet pas de solution réelle, donc la lentille ne peut pas conjuguer l'objet et l'image car sont trop proches ;
- $\Delta = 0$, i.e $D = 4f'$: la relation de conjugaison admet une seule et unique solution, situation impossible en pratique (la précision infinie se fait rare de nos jours) ;
- $\Delta > 0$, i.e $D > 4f'$: la relation de conjugaison admet deux solutions réelles p_1 et p_2, avec

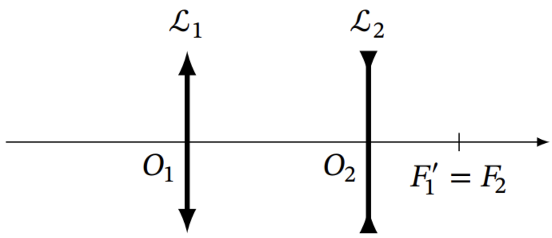
  $$d = |p_1 - p_2| = \sqrt{D(D - 4f')}$$

  et on retrouve bien le résultat suivant :

  $$\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

1.4 Système afocal

Soit le doublet optique de la figure ci-dessous avec $L_1(O_1, f_1' = 20\text{ cm})$ et $L_2(O_2, f_2' = -5cm)$, les foyers F_1' et F_2 étant confondus.



1. Vérifiez rapidement que cet instrument est afocal.
2. Calculez le grandissement γ ; dépend-il de la position de l'objet A ?
3. Un objet est vu, à l'infini, sous un angle α. Déterminez le grossissement.

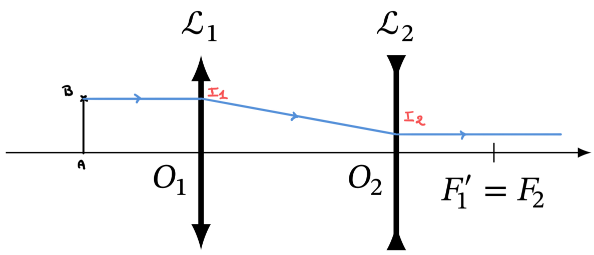
Corrigé :

1. *afocal* := un objet à l'infini ressort à l'infini.
   Ce qui signifie ainsi que l'image d'un objet à l'infini par (L_1) est dans le plan focal image de (L_1). Cette image est un objet pour (L_2) qui en donne une image à l'infini, elle doit donc être dans le plan focal objet de (L_2) :

$$\boxed{F_1' = F_2}$$

donc ce système est bien afocal.

2. On se repère à l'aide du schéma suivant : Dès lors, on remarque que :



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2I_2}}{\overline{O_1I_1}}$$

Et le *théorème de Thalès* nous dit que

$$\frac{\overline{O_2I_2}}{\overline{O_1I_1}} = \frac{\overline{O_2F_2}}{\overline{O_1F_1'}}$$

D'où :

$$\boxed{\gamma = -\frac{f_2'}{f_1'} = 0,25}$$

3. Considérons donc un rayon incident, d'angle α. Après la première lentille (L_1), ce rayon passe par son foyer image F_1' et subit une déviation angulaire donnée par la relation (conditions de Gauss) :

$$\alpha \simeq \tan(\alpha) = -\frac{h}{f_1'}$$

et de même,

$$\alpha' \simeq \tan(\alpha') = \frac{h}{f_2'}$$

Enfin,

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2'}$$

Finalement,

$$\boxed{G = -\frac{f_1'}{f_2'} = 4}$$

Donc, l'angle sous lequel on voit l'objet est multiplié par 4 et le signe positif nous permet également de dire que l'image n'est pas renversée.

1.5 Étude simplifiée d'un objectif de photocopieur

Les procédés acutels de reprographie nécessitent la formation de l'image du document sur une surface photosensible par l'intermédiaire d'un objectif de reproduction. Nous désirons reproduire un document de format A4 soit au même format, soit au format A3 (double du A4 en surface), soit au format A5 (moitié du A4 en surface). Les différents tirages sont réalisés à l'aide d'un objectif en modifiant la position relative des lentilles à l'intérieur du système.

La distance entre le document et le récepteur photosensible est de $d_1 = 384$ mm. Une première lentille divergente L_1, de distance focale $f_1' = -90$ mm, est placée à $d_2 = 180$ mm du récepteur (figure ci-dessous).

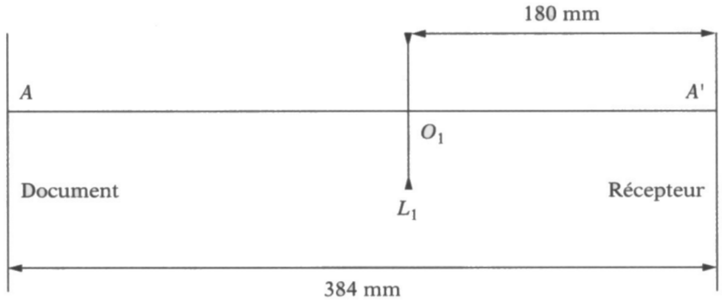


FIGURE 4 – Étude d'un objectif de photocopieur : dispositif rudimentaire

1. La lentille L_1 peut-elle donner une image du document sur le récepteur ? Justifiez par la relation de conjugaison.
2. Ajoutons alors une lentille mince L' devant L_1, à $d_3 = 180$ mm du document (cf. figure ci-dessous) :

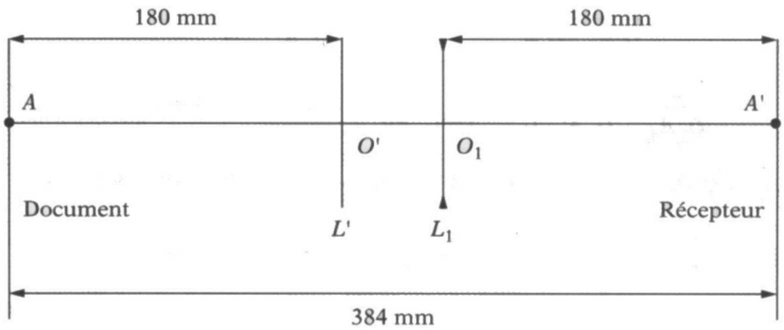


FIGURE 5 – Étude d'un objectif de photocopieur : dispositif corrigé

   (a) La lentille L' peut-elle être divergente ? Justifiez par des relations de conjugaison.
   (b) Calculez la distance focale f' de cette deuxième lentille pour obtenir une image nette du document sur le récepteur. Application numérique.
   (c) Notons γ le grandissement du système optique constitué des deux lentilles, γ_1 le grandissement de la lentille L_1 et γ' celui de la lentille L'.
      i. Exprimez γ en fonction de γ_1 et γ' puis calculez-le.
      ii. Quel type de tirage permettra cet objectif ? A4 en A3 ou A4 en A5 ?
3. En fait, la lentille L' est constituée de deux lentilles L_2 et L_3 accolées, L_2 étant identique à L_1. Calculez la distance focale f_3' de L_3. Quelle est la nature de cette lentille mince ?
4. Déplaçons L_3 jusqu'à la coller à L_1.
   (a) Montrez que l'image du document reste sur le récepteur.
   (b) Calculez le nouveau grandissement γ_2 de ce système optique à trois lentilles. Déduisez)en le type de tirage obtenu.

Corrigé :

1. Supposons par l'absurde que cela soit possible la relation de conjugaison nous donne alors :

$$\underbrace{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}_{>0}=\underbrace{\frac{1}{f_1'}}_{<0}$$

   On a donc une absurdité de signe, cela est donc impossible : la lentille L_1 ne peut pas donner une image du document sur le récepteur.

2. (a) Si L' est une lentille divergente, on a la relation stigmatique suivante :

$$A \xrightarrow{L'} A_1 \xrightarrow{L_1} A'$$

   et donc on retrouve le résultat suivant : *une composée de lentille divergente est une lentille divergente*. Donc l'image du document pourrait être projetée sur le récepteur.
   Cela paraît plausible.

   (b) Aidons-nous des relations de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O'A_1}}-\frac{1}{\overline{O'A}}=\frac{1}{f'}$$

   Ce qui nous permet de dire que :

$$f'=\frac{\overline{O'A_1}\times\overline{O'A}}{\overline{O'A}-\overline{O'A_1}}$$

   Néanmoins, on ne connait pas $\overline{O'A_1}$ donc il nous faut une deuxième équation, utilisons la relation de conjugaison pour L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}}-\frac{1}{\overline{O_1A_1}}=\frac{1}{f_1'}$$

   Ainsi,

$$\overline{O_1A_1}=\frac{\overline{O_1A'}f_1'}{f_1'-\overline{O_1A'}}$$

   Enfin, $\overline{O'A_1}=\overline{O'O_1}+\overline{O_1A_1}$, d'où :

$$\overline{O'A_1}=\overline{O'O_1}+\frac{\overline{O_1A'}f_1'}{f_1'-\overline{O_1A'}}=84\text{ mm}$$

   Finalement,

$$\boxed{f'=\frac{\overline{O'A_1}\times\overline{O'A}}{\overline{O'A}-\overline{O'A_1}}=57{,}3\text{ mm}}$$

   (c) i. On a directement :

$$\begin{aligned}\gamma&=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\\&=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}\times\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}\\&=\gamma_1\times\gamma'\end{aligned}$$

   Si l'on considère Ainsi,

$$\boxed{\gamma=\gamma_1\gamma'}$$

   Or, on sait que $\gamma'=\frac{\overline{O'A_1}}{\overline{O'A}}=-0{,}5$ et $\gamma_1=\frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A_1}}=3$.
   D'où :

$$\boxed{\gamma=-1{,}5}$$

   ii. On a $|\gamma|>1$. Comme on veut doubler une surface, cela signifie que c'est l'aire qui doit être doublée. Or, ici γ représente une longueur et non une aire. Le grandissement surfacique correspond donc à γ^2 d'où $\gamma^2=2{,}25>2$, donc **cela permet de transformer du A4 en A3**.

3. L'association de deux lentilles de vergence V_2 et V_3 accolées est équivalente à une lentille de vergence $V' = V_2 + V_3$, d'où :
$$f'_3 = \frac{1}{f'} - \frac{1}{f'_1}$$
Finalement,
$$\boxed{f'_3 = \frac{f'_1 \times f}{f'_1 - f} = 35 \text{ mm}}$$
Alors, comme $f'_3 > 0$: **la lentille (L_3) est convergente.**
4. De même, on calcule $f'_{1\,3}$ et on trouve que la focale est la même que celle de (L_{2+3}) ce qui est normal puisque (L_1) et (L_2) sont identiques.
Par retour inverse de la lumière, si on passe par (L') puis par (L_1) ou par (L_1) puis (L'), l'image reste toujours sur le récepteur. Mais le nouveau grandissement est l'inverse du précédent car le sens de la lumière est changée donc $\gamma_2 = \frac{1}{\gamma} = -0,7$.
Le tirage permet alors de faire du A5 car $\gamma_2^2 = 0.4 < 0.5$.

1.6 Lunette de Galilée

La lunette de Galilée est destinée à observer des objets terrestres. Elle est constituée de deux lentilles, un objectif convergent (lentille L_1, centre O_1, focale $f'_1 = 25$ cm) et un oculaire divergent (lentille L_2, centre O_2, focale $f'_2 = -5$ cm).

1. Calculez la dimension $e = \overline{O_1O_2}$ de la lunette pour qu'un observateur puisse voir sans accomoder un objet situé à l'infini. Application numérique. Comment s'appelle un tel système ? Que pouvez-vous dire des foyers des deux lentilles ?
2. Un objet AB est placé à l'infini, vu depuis l'objectif sous un angle α_1.
   (a) Calculez l'angle α_2 sous lequel est vue son image par l'observateur, en fonction de α_1 et des focales. Faites un schéma montrant la marche de ce rayon.
   (b) Le grossissement G de la lunette est défini comme le rapport entre l'angle sous lequel est vu l'objet à travers la lunette et l'angle sous lequel il est vu sans appareil. Exprimez G en fonction de α_1 et α_2 puis en fonction des focales. Application numérique.
3. L'objet AB est désormais placé à une distance finie, à $D = 50$ cm en amont de l'objectif. Sa longueur est $L = 5$ cm.
   (a) Faites un schéma de la lunette en construisant l'image $A'B'$ par la lunette de l'objet AB.
   (b) Calculez numériquement $\overline{O_2A'}$ pour localiser cette image.
   (c) Calculez le grandissement associé en fonction des focales. Application numérique. Dépend-il vraiment de la position de l'objet ?

Corrigé :

1. On a l'équation stigmatique suivante :
$$\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 = F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$$
Ainsi, il vient :
$$\begin{aligned} e &= \overline{O_1O_2} \\ &= \overline{O_1F'_1} - \overline{O_1F'_1} \\ &= \overline{O_1F'_1} - \overline{O_2F_2} \\ &= f'_1 + f'_2 \end{aligned}$$
Finalement,
$$\boxed{e = f'_1 + f'_2 = 20 \text{ mm}}$$
On remarque qu'un objet à l'infini ressort à l'infini : c'est donc un *système afocal*.
On a également remarqué que $F'_1 = F_2$.
2. (a) Procédons d'abord par le schéma :
   Les *conditions de Gauss* nous permettent de dire que $\alpha_2 \approx \tan(\alpha_2)$ et $\alpha_1 \approx \tan(\alpha_1)$.
   Or, la trigo nous dit que $\tan(\alpha_2) = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{\overline{A'_1B'_1}}{f'_2}$ et $\tan(\alpha_1) = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{f'_1}$.
   Finalement,

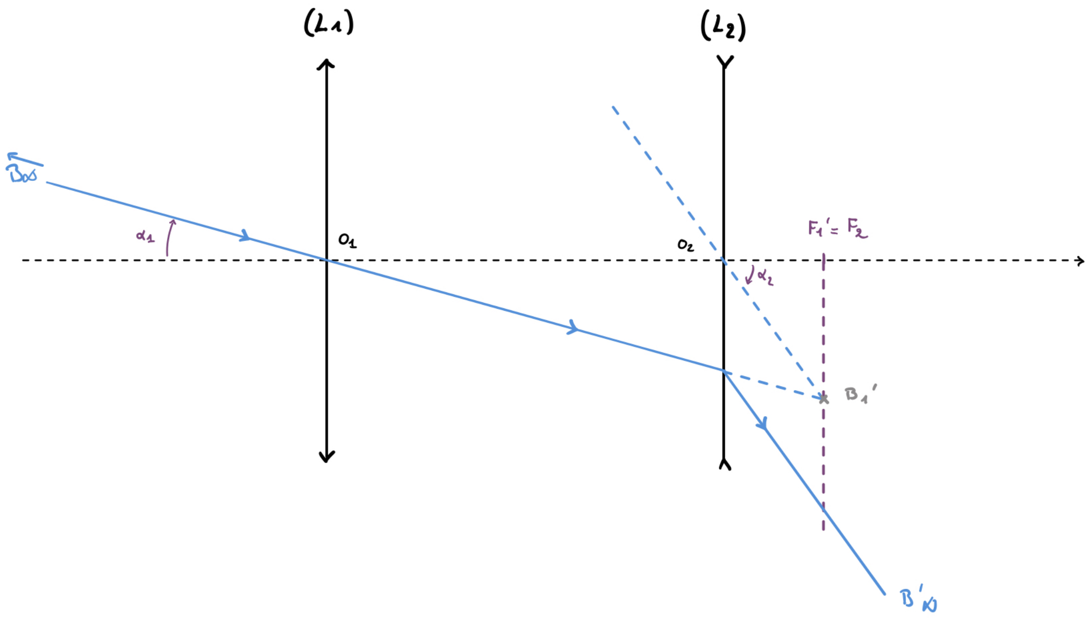


FIGURE 6 – Lunette de galilée.

$$\boxed{\alpha_2 = -\alpha_1 \frac{f_1'}{f_2'}}$$

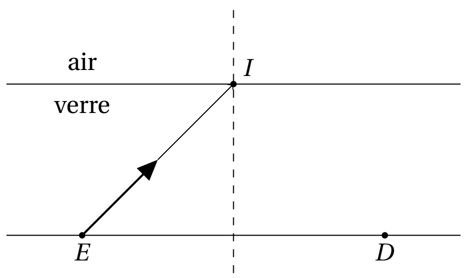
(b) On a :

$$\begin{aligned} G &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ &= -\frac{f_1'}{f_2'} \\ &= 5 \end{aligned}$$

2 Exercices classiques

2.1 Détection de pluie sur un pare-brise

On modélise un pare-brise par une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur $e = 5$ mm, d'indice $n_v = 1{,}5$. Un fin pinceau lumineux issue d'un émetteur situé en E arrive de l'intérieur du verre sur le dioptre verre/air en I avec un angle d'incidence $i = 60°$.



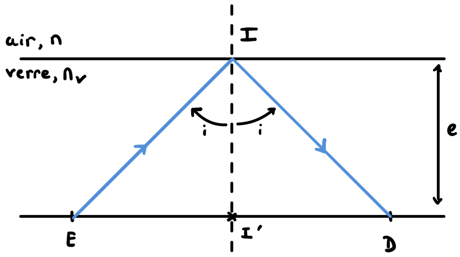
1. Montrer que le flux lumineux revient intégralement sur le détecteur situé en D et déterminer la distance ED.
2. Lorsqu'il pleut, une lame d'eau d'indice $n_e = 1{,}33$ et d'épaisseur $e' = 1$ mm se dépose sur le pare-brise. Représenter le rayon lumineux dans ce cas. À quelle distance du détecteur arrive-t-il ?

Corrigé :

1. Il suffit de calculer l'angle d'incidence limite pour la réfraction :

$$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n}{n_v}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\right) \simeq 41{,}8°$$

Or, d'après l'énoncé, $i = 60° > i_{\text{lim}}$ donc on a carrément une réflexion totale !
Maintenant, en s'aidant du schéma ci-dessous :



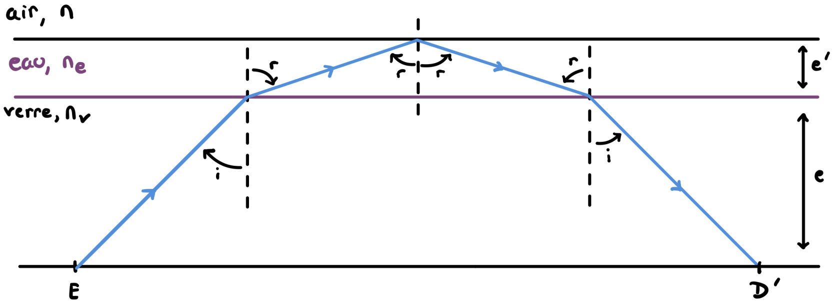
la géométrie nous dit que :

$$\begin{aligned} ED &= EI' + I'D \\ &= 2e\tan(i) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{ED = 2e\tan(i) \simeq 1{,}73 \text{ cm}}$$

2. On a maintenant une nouvelle situation :



Et on peut avoir deux réflexions totales ! Calculons les deux angles limites :

- Calcul de i_{lim} :

$$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_v}\right) \simeq 62{,}46°$$

- Calcul de r_{lim} :

$$r_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n_e}\right) \simeq 48{,}75°$$

Maintenant, on sait déjà que $i < i_{\text{lim}}$ donc on a bien réfraction en premier lieu (ouf), vérifions qu'il y a bien réflexion totale dans le deuxième cas.
D'après la loi de Snell-Descartes :

$$n_v \sin(i) = n_e \sin(r)$$

D'où

$$r = \arcsin\left(\frac{n_v}{n_e}\sin(i)\right) \simeq 77{,}61° > r_{\text{lim}}$$

on a bien réflexion totale au contact goutte/air !

Dès lors, en reprenant notre géométrie classique, on a

$$ED' = 2e\tan(i) + 2e'\tan(r)$$

Finalement,

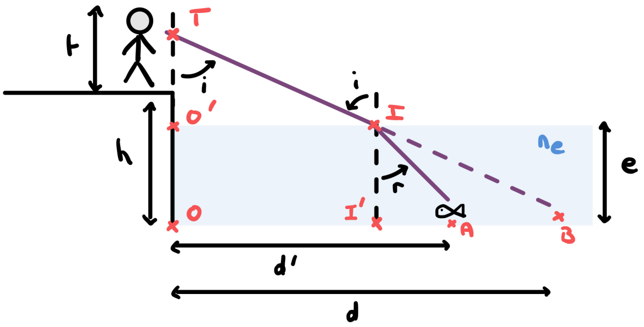
$$\boxed{ED' - ED = 2e'\tan(r) \simeq 0{,}91 \text{ cm}}$$

Le rayon ne tombe donc plus sur le détecteur mais à environ 1cm de celui-ci : un système de commande relié au détecteur peut alors déclencher les essuies glaces.

2.2 Erreur sur le positionnement d'un objet

Un observateur de taille $t = 1,8$ m regarde un objet au fond d'un bassin depuis le bord. Le bassin, de hauteur $h = 1,5$ m contient une épaisseur $e = 1$ m d'eau (indice $n = 1,33$). L'objet semble situé à une distance $d = 1$ m du bord. Déterminer la véritable position de l'objet.

Corrigé : Modélisons la situation :



On veut calculer d', or :

$$d' = O'I + I'A$$

Et :

- Dans le triangle (TO'I) : $O'I = (t + h - e)\tan(i)$;
- Dans le triangle (IAI') : $I'A = e\tan(r)$;
- La relation de Snell-Descartes nous dit que : $r = \arcsin\left(\frac{1}{n_e}\sin(i)\right)$;
- Dans le triangle (TOB) : $i = \arctan(\frac{d}{t+h})$

Finalement :

$$\boxed{d' = \frac{d(t+h-e)}{t+h} + e\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_e}\sin\left(\arctan\left(\frac{d}{t+h}\right)\right)\right)\right) \simeq 0,92 \text{ m}}$$

2.3 La loupe

Un observateur emmétrope, c'est-à-dire ayant un œil normal, peut voir distinctement de l'infini à une distance minimale d_m. On dit que l'observateur *accomode* si l'objet qu'il observe n'est pas à l'infini.

Cet observateur regarde à l'œil nu un tout petit objet plan que l'on assimilera à un segment AB de longueur l, perpendiculaire à l'axe optique.

1. Déterminer α_m, angle maximal sous lequel l'objet peut être vu.
2. L'observateur regarde AB à travers une lentille mince convergente de distance focale f' et de centre O (loupe). Son œil est situé à une distance a de la loupe ($a < d_m$).
   Déterminer les positions de l'objet rendant possible l'observation d'une image nette par l'observateur emmétrope. Faire une construction géométrique de l'image. L'image est-elle droite ou renversée ?
3. Pour quelle position de l'objet l'observation se fait-elle sans accomodation ? Exprimer l'angle α sous lequel l'œil voit l'image.
   Application numérique : que vaut le grossissement commercial de la loupe $G = \alpha/\alpha_m$? On donne $d_m = 0,25$ m et $f' = 50$ mm.

2.4 Fibre optique à saut d'indice

Le guidage de la lumière peut être assuré par des fibres optiques.

Une fibre optique est constituée d'un cylindre de verre (ou de plastique) appelé *cœur*, entouré d'une gaine transparente d'indice de réfraction plus faible. La gaine contribue non seulement aux propriétés mécaniques de la fibre mais évite aussi les fuites de lumière vers d'autres fibres en cas de contact. Actuellement, le diamètre du cœur d'une fibre varie de 3 à 200 μm selon ses propriétés, et le diamètre extérieur de la gaine peut atteindre 400 μm.

On considère une fibre optique constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice $n_2 < n_1$ et de rayon b. Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires à l'axe du cylindre (Oz) formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 qui sera pris égal à l'indice de l'air pour les applications numériques.

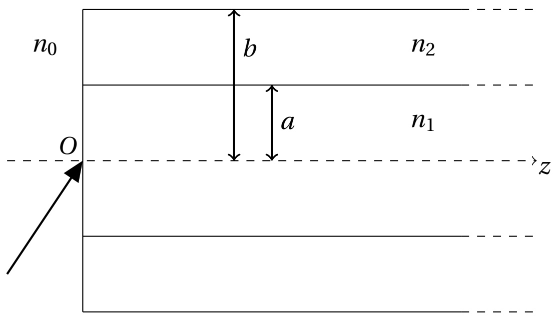
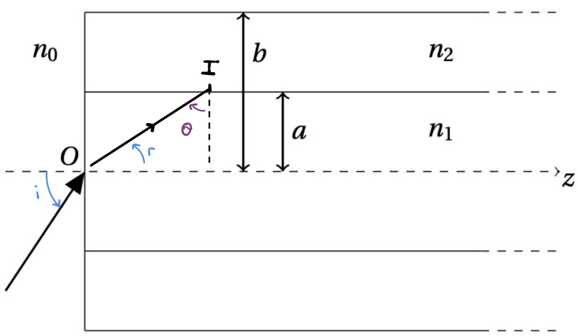


FIGURE 7 – Mise en schéma d'une fibre optique

1. Un rayon lumineux arrive en O. On appelle i l'angle d'incidence sur la surface d'entrée de la fibre. Déterminer, en fonction de n_0, n_1 et n_2, la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur. On appelle *angle d'acceptance* i_a de la fibre la valeur maximale de i. Donner l'expression de i_a.
2. On appelle *ouverture numérique* de la fibre la quantité $ON = n_0 \sin(i_a)$. Exprimer ON en fonction de n_1 et n_2.
   Application numérique : calculer ON pour $n_1 = 1,456$ (silice) et $n_2 = 1,410$ (silicone).
3. On envoie dans la fibre un faisceau lumineux avec tous les angles d'incidence $i \in [0, i_a]$. Calculez la différence $\delta\tau$ entre la durée maximale et la durée minimale de propagation d'un bout à l'autre de cette fibre. On exprimera le résultat en fonction de la longueur L de la fibre, des indices n_1 et n_2, et de la vitesse de la lumière dans le vide c.
   Application numérique : $L = 1,00$ km, donner la valeur de $\delta\tau$.
4. Le signal transporté par la fibre est constitué d'impulsions lumineuses d'une durée T_1 à un intervalle régulier T. Quelle est la valeur minimale de T faut-il choisir pour que les impulsions soient distinctes à la sortie de la fibre? Proposer une définition de la bande passante en bits (ou nombre d'impulsions) par seconde. Comparer la valeur de la bande passante obtenue ici avec celle d'un téléphone portable (64 bits/sec) et celle de la télévision (100 Mbits/sec).

Corrigé :

1. On se réfère au schéma suivant : On veut :



- une *réfraction en O* : on supposera que cela sera toujours vérifié ;
- une *réflexion totale en I* : comme θ est négatif, on veut que [1] :

$$\boxed{|\sin(\theta)| > \frac{n_2}{n_1}}$$

1. principe même de la réflexion totale

or, la géométrie nous dit que :

$$-\theta + r + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \theta = r - \frac{\pi}{2}$$

On a donc

$$\begin{aligned}|\sin(\theta)| &= |\sin(r - \frac{\pi}{2})| = \cos(r)\\ &= \sqrt{1 - \sin^2(r)}\end{aligned}$$

Or, d'après la *loi de Snell-Descartes* :

$$\sin(r) = \frac{n_0}{n_1}\sin(i) \implies \sin^2(r) = \left(\frac{n_0}{n_1}\sin(i)\right)^2 \implies |\sin(\theta)| = \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}\sin^2(i)}$$

Alors,

$$\begin{aligned}|\sin(\theta)| > \frac{n_2}{n_1} \iff 1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}\sin^2(i) > \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 &\iff \sin^2(i) < \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_0^2}\\ &\iff i \in [-i_a, i_a]\end{aligned}$$

avec :

$$\boxed{i_a = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}\right)}$$

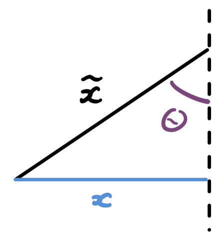
2. En reprenant l'expression précédente de i_a, on trouve que :

$$\boxed{ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \simeq 0,363}$$

3. Calculons la durée maximale et la durée minimale et faisons ensuite la différence :
   - **Durée minimale** : obtenue en se déplaçant le long de l'axe (on fait un tout droit quoi), on a immédiatement

$$\boxed{t_{\min} = \frac{Ln_1}{c}}$$

   - **Durée maximale** : obtenue avec l'angle d'acceptance $\theta = i_a$



$$\implies \tilde{x} = \frac{x}{\sin(\theta)}$$

Donc, avec $d_{\text{parcourue}} = \frac{L}{\sin(i_a)}$ et $v = \frac{c}{n_1}$, on a :

$$\boxed{t_{\max} = \frac{Ln_1}{c\sin(i_a)}}$$

   - **Différence** : On en déduit que

$$\boxed{\delta\tau = \frac{Ln_1}{c}\left(\frac{1}{\sin(i_a)} - 1\right) \simeq 0,158\ \mu\text{s}}$$

4. Il faut que $T > \delta\tau$, i.e

$$\boxed{f < \frac{1}{\delta\tau} = 6,3 \times 10^6\ \text{bits/sec}}$$

Update : cela convient pour le téléphone mais pas pour la télévision !

2.5 La lunette astronomique

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes de même axe optique Δ :

- l'une L_1 (objectif) de distance focale image $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$;
- l'autre L_2 (oculaire) de distance focale image $f'_2 = \overline{O_2F'_2}$.

On rappelle qu'un œil normal voit un objet sans accommoder si celui-ci est placé à l'infini.

On souhaite observer la planète Mars qui est vue sous un diamètre apparent α.

1. Pour observer la planète avec la lunette, on forme un système afocal. Que signifie l'adjectif afocal ? En déduire la position relative des deux lentilles.
2. Faire le schéma de la lunette pour $f'_1 = 5f'_2$. Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux (non parallèle à l'axe) formé de rayons issus de l'astre. On appelle $\overline{A'B'}$ l'image intermédiaire.
3. On souhaite photographier cette planète. Où faut-il placer le capteur CCD ?
4. On note α' l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette. L'image est-elle droite ou renversée ?
5. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Exprimer G en fonction de f'_1 et f'_2.
6. On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale image $f'_3 = \overline{O_3F'_3}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.
   Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?
7. On appelle γ_3 le grandissement de la lentille L_3. En déduire $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de f'_3 et γ_3.
8. Faire un schéma (on placera O_3 entre F_1 et F_2 et on appellera $\overline{A'B'}$ la première image intermédiaire et $\overline{A''B''}$ la seconde image intermédiaire).
9. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de G et γ_3. Comparer G' à G en signe et valeur absolue.

Corrigé :

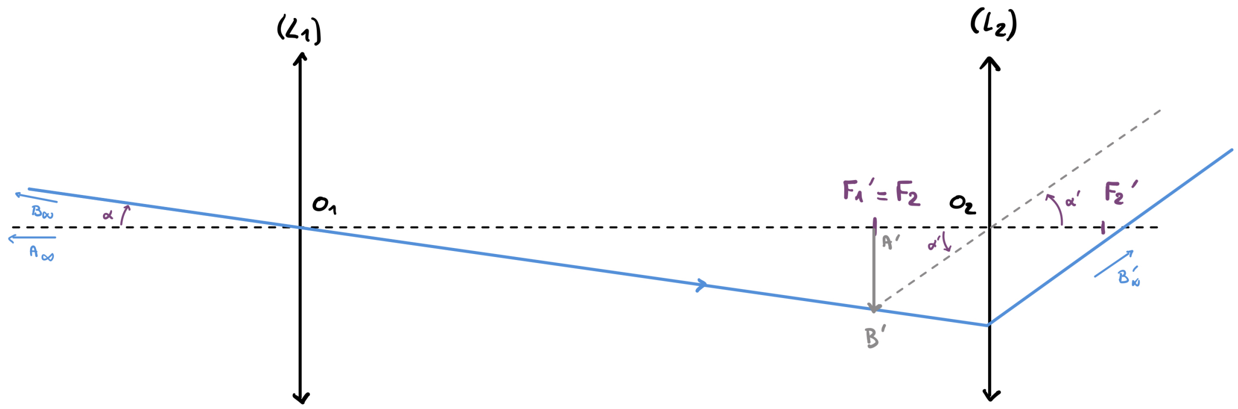
1. *afocal* := un objet à l'infini ressort à l'infini.
   Ce qui signifie ainsi que l'image d'un objet à l'infini par (L_1) est dans le plan focal image de (L_1). Cette image est un objet pour (L_2) qui en donne une image à l'infini, elle doit donc être dans le plan focal objet de (L_2) :

$$\boxed{F'_1 = F_2}$$

   D'où la série de conjugaisons suivantes :

$$\boxed{\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 = F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty}$$

2. On a le schéma suivant :



3. La lentille (L_2) sert à observer l'astre à l'œil nu, sans accomoder. Ainsi, si l'on souhaite prendre une photo, on retire (L_2) et on place le capteur CCD de sorte que son foyer objet soit confondu avec F'_1.
4. On remarque que pour un faisceau incident *venant du haut*, le faisceau émergent semble *provenir du bas* : **l'image est donc renversée**.
5. Les *conditions de Gauss* nous permettent de dire que

$$\alpha' \simeq \tan(\alpha') = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} \text{ et } \alpha \simeq \tan(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1}}$$

Donc,

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{O_1F_1}}{\overline{O_2F_2}}$$

Finalement :

$$\boxed{G = -\frac{f_1'}{f_2'} = -5}$$

6. Par la lunette, on a toujours un objet à l'infini dont l'image par l'objectif (L_1) est dans le plan focal image de (L_1) ; et une image finale à l'infini, dont l'antécédent par l'oculaire (L_2) est dans le plan focal objet de (L_2). Il faut donc que (L_3) conjugue les points F_1' et F_2 :

$$\boxed{F_1' \xrightarrow{(L_3)} F_2}$$

7. On a, d'après *la relation au centre optique* :

$$\gamma_3 = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}} \implies \overline{O_3F_2} = \gamma_3 \overline{O_3F_1'}$$

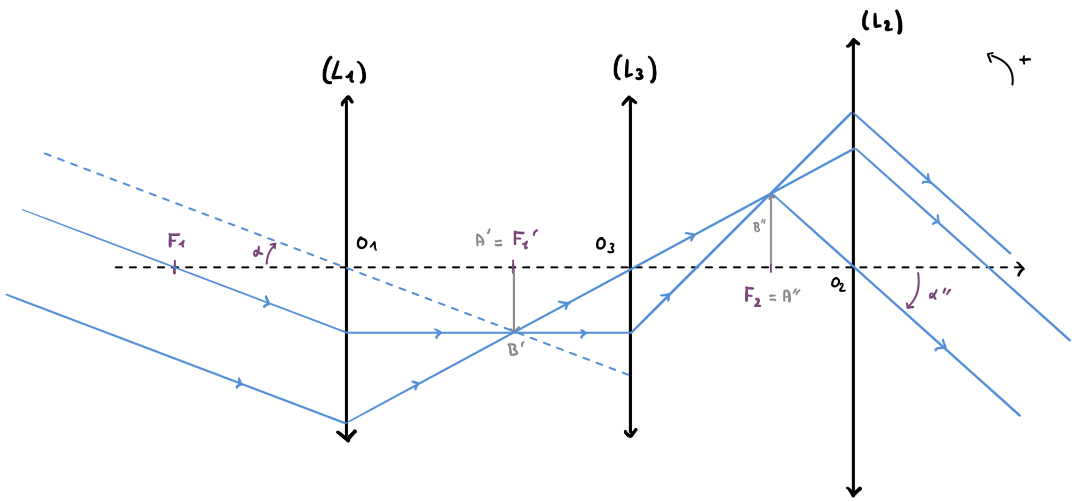
or on sait que :

$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'} \implies \frac{1}{\overline{O_3F_1'}}\left(\frac{1}{\gamma_3} - 1\right) = \frac{1}{f_3'}$$

Finalement,

$$\boxed{\overline{O_3F_1'} = f_3'\left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3}\right)}$$

8. On a le schéma suivant :



9. On a, avec les *conditions de Gauss* :

$$\alpha \simeq \tan(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \text{ et } \alpha'' \simeq \tan(\alpha'') = -\frac{\overline{A''B''}}{f_2'}$$

et $\gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$, $G' = \frac{\alpha''}{\alpha}$, d'où :

$$\boxed{G' = -\gamma_3 \frac{f_1'}{f_2}}$$

Comme $\gamma_3 < 0$ et $\frac{-f_1'}{f_2'} < 0$, donc on a bien $G' > 0$: l'image est bien droite cette fois-ci !
Enfin, $\left|\frac{G}{G'}\right| = \frac{1}{|\gamma_3|}$, leur rapport dépend donc bien de γ_3 !

2.6 Optique de l'œil

Le cristallin de l'œil est assimilable à une lentille mince de centre optique O. On modélise l'œil par une lentille mince convergente de centre optique O, dont la vergence V est variable. L'image se forme sur la rétine, qui dans la réalité est à la distance $d_{\text{réel}} = 15$ mm de O mais que l'on considèrera égale à $d = 11$ mm pour compenser le fait qu'on néglige la présence du corps vitreux entre le cristallin et la rétine.

1. Un observateur doté d'une vision « normale » regarde un objet $\overrightarrow{AB}$ placé dans un plan de front à 1 m devant lui, et tel que $\overline{AB} = 10$ cm.
   Préciser si l'image formée par le cristallin est réelle ou virtuelle, droite ou renversée.
2. On note $\overrightarrow{A'B'}$ l'image de $\overrightarrow{AB}$ sur la rétine. Calculer le grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, et en déduire la taille de l'image $\overline{A'B'}$.
3. Calculer la vergence V du système.
4. L'observateur regarde maintenant un objet placé à 25 cm devant lui. Préciser si l'image est réelle ou virtuelle, droite ou renversée.
5. Calculer la variation de la vergence par rapport à celle de la question 3., ainsi que la taille de l'image.
6. On s'intéresse maintenant à un sujet myope possédant donc un cristallin trop convergent. Lorsqu'il regarde à l'infini, l'image se forme à $0,5$ mm en avant de la rétine (située à $d = 11$ mm de O). Pour corriger ce problème, cette personne est dotée de lunettes dont chaque verre est assimilé à une lentille mince de vergence V' constante et de centre optique O', placé à $l = 2$ cm de O.
   Calculer la vergence V' des verres de lunettes.
7. L'individu observe un objet situé à 1 m devant lui. Calculer la position de l'image intermédiaire ainsi que le grandissement de l'ensemble [lunette,cristallin].