Khôlles : Semaine 19

- 6 - 10 Février 2023 -

Sommaire

1 Questions de cours - Groupes A, B, C

1.1 Définition d'un produit scalaire + exemple.

Définition

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle Produit Scalaire sur E une Forme bilinéaire, symétrique, définie positive :

- Forme : $\forall x, y \in E,\ \langle x; y\rangle \in \mathbb{R}$
- Symétrique : $\forall x, y \in E,\ \langle x; y\rangle = \langle y; x\rangle$
- Bilinéaire : $\forall y \in E,\ x \mapsto \langle x; y\rangle$ est linéaire, Idem pour $y \mapsto \langle x; y\rangle$
- Définie : $\forall x \in E,\ \langle x; x\rangle = 0 \implies x = 0$
- Positive : $\forall x \in E,\ \langle x; x\rangle \geqslant 0$

Exemple (Produits scalaires canoniques)

- $\mathbb{R}^n : \langle x; y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \langle A; B\rangle = \operatorname{Tr}(A^\top B)$

1.2 Appliquer le procéde de Gram-Schmidt sur un exemple.

Proposition

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs. Alors il existe $(f_1, \ldots, f_n)$, famille libre orthonormée telle que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$

Preuve :

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ famille libre.

On pose $f_1 = e_1$, et $f_2 = e_2 + \alpha f_1$ avec α tel que $\langle f_1, f_2\rangle = 0$

Or, nous avons $\langle f_1, f_2\rangle = \langle e_2, f_1\rangle + \alpha \|f_1\|^2 = 0 \iff \alpha = -\dfrac{\langle e_2, f_1\rangle}{\|f_1\|^2}$.

Idem, posons $f_3 = e_3 + a f_1 + b f_2$, on cherche a et b tels que $\langle f_3, f_1\rangle = \langle f_3, f_2\rangle$.

Or, $\langle f_3, f_1\rangle = \langle e_3, f_1\rangle + a\|f_1\|^2 + \underbrace{\langle f_2, f_1\rangle}_{=0} \implies a = -\dfrac{\langle e_3, f_1\rangle}{\|f_1\|^2}$

Idem, $\langle f_3, f_2\rangle = \langle e_3, f_2\rangle + b\|f_2\|^2 + a\underbrace{\langle f_1, f_2\rangle}_{=0} \implies b = -\dfrac{\langle e_3, f_2\rangle}{\|f_2\|^2}$

En itérant le processus, nous obtenons $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille orthogonale libre. Il ne reste qu'à la normaliser.

$\blacksquare$

1.3 Inégalité de Cauchy Schwarz. (démo)

Proposition

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$
Alors, $\forall x, y \in E$:

$$|\langle x; y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x; x\rangle}\sqrt{\langle y; y\rangle}$$
$$|\langle x; y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$
$$\langle x; y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

Preuve :

Si $y = 0$, l'inégalité est vraie, car $\langle x, 0\rangle = 0$ pour tout x.
Supposons $y \neq 0$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \langle x + ty; x + ty\rangle \end{cases}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.
$f(t) = \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$.

f est une fonction polynomiale du second degré (car $y \neq 0$) qui ne change pas de signe : $\Delta \leqslant 0$. Or, $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$.

On conclut par croissance de la racine.

Étudions le cas d'égalité (si $y \neq 0$):
Il y a égalité si et seulement si $\Delta = 0 \iff f$ admet une racine:

$$\begin{aligned} &\iff \exists t_0, f(t_0) = 0 \\ &\iff \|x + ty\| = 0 \\ &\iff \exists t_0, x + t_0 y = 0 \\ &\iff \exists t_0 x = -t_0 y \\ &\iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

■

1.4 Norme associée à un produit scalaire (démo)

Proposition

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien réel.
Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x;x\rangle}$. Alors $\|\cdot\|$ définit une norme.

Preuve :

- $\forall x \in E$, $\|x\|$ existe et est dans $\mathbb{R}$
- $\forall x \in E,\ \sqrt{\langle x;x\rangle} \geqslant 0$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = \underbrace{\sqrt{\lambda^2\langle x;x\rangle}}_{\text{Bilinéarité}} = |\lambda|\|x\|$
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies \sqrt{\langle x;x\rangle} = 0 \implies x = 0$ Car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie.
- $$\begin{aligned}\forall x,y \in E\ \|x+y\|^2 &= \langle x+y;x+y\rangle \\ &= \langle x;x\rangle + \langle y;y\rangle + 2\langle x;y\rangle \\ &= \|x\|^2\|y\|^2 + 2\langle x;y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2\|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad \text{I.C.S} \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

■

1.5 Une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et non nuls est libre (démo)

Proposition

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien réel.

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ famille de vecteurs deux-à-deux orthogonaux et tous non nuls. Alors, $(x_1,\dots,x_p)$ est libre

Preuve :

$\forall \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{R}$, Si $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$, alors :

$$\begin{aligned}&\forall i \in [\![1,p]\!],\ \langle x_i, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\rangle = 0 \\ &\implies \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \langle x_k; x_i\rangle = \lambda_i\langle x_i;x_i\rangle = 0 \\ &\implies \lambda_i = 0 \text{ car } x_i \neq 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0 \implies (x_1,\dots,x_p)$ est libre.

■

1.6 Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie muni d'une b.o.n.

Proposition

Soit E, espace Euclidien, $F \subset E$ un SEV.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ B.O.N de F. Alors :

$$\forall x \in E,\ p_F^{\perp}(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x; e_k \rangle e_k$$

1.7 $S(E)$ est un espace vectoriel. (démo)

Preuve :

- $0 \in S(E) \to$ Immédiat
- Soit $(u, v) \in S(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^* = \lambda u + \mu v \to$ OK

■

1.8 Définition de l'adjoint.

Définition

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors, $\exists! u^* \in \mathscr{L}(E),\ \forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

u^* s'appelle l'adjoint de u pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

1.9 Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée

Proposition

Soit E euclidien. $B = (e_1, \dots, e_n)$ une B.O.N de E

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\mathrm{Mat}_B(u^*) = (\mathrm{Mat}_B(u))^\top$

1.10 Lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique. ("démo")

Proposition

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit B B.O.N de E.

$$\left[u \text{ Auto-adjoint}\right] \iff [\text{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})]$$

Preuve :

Si $u \in S(E)$, $u^* = u$. Or, $\text{Mat}_B(u^*) = (\text{Mat}_B(u))^\top$. Donc, $\text{Mat}_B(u) = (\text{Mat}_B(u))^\top$

$$\text{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

Réciproquement, $\text{Mat}_B(u^*) = (\text{Mat}_B(u))^\top \implies \text{Mat}_B(u^*) = \text{Mat}_B(u)$ car $M \in S_n(\mathbb{R})$

$$u^* = u$$

■

1.11 Pour un endomorphisme auto-adjoint, les s.e.p. sont en somme directe orthogonale. (démo)

Proposition

Soit E euclidien, $u \in S(E)$.
Alors, les Sous-espaces propres de u sont deux-à-deux orthogonaux (la somme est toujours directe).

Preuve :

$\forall \lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$ tels que $\lambda \neq \mu$:

$\forall x \in E_\lambda(u), y \in E_\mu(u),\ \langle u(x); y\rangle = \langle \lambda x; y\rangle = \lambda\langle x; y\rangle$

Or, u est auto-adjoint : $= \langle x; u(y)\rangle = \mu\langle x; y\rangle$. Ainsi, puisque $\lambda \neq \mu \implies \langle x, y\rangle = 0$

D'où $E_\lambda(u) \overset{\perp}{\bigoplus} E_\mu(u)$

■

1.12 Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^* (demo).

Proposition

Soit E euclidien. $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F \subset E$ un S.E.V

Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^* et réciproquement.

Preuve :

$\forall x \in F,\ u(x) \in F.$

$\forall y \in F^{\perp},\ z \in F : \langle y; z\rangle = 0$, Or, $u(F) \subset F \implies \langle y; u(z)\rangle = 0 = \langle u^*(y); z\rangle$

Ainsi, $u^*(y) \in F^{\perp} \implies F^{\perp}$ stable par u^*

■

1.13 Si F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, il en va de même pour son orthogonal. ("démo")

Preuve :

Conséquence directe de la proposition précédente :
F stable par $u \in S(E) \implies F^{\perp}$ stable par $u^* = u$

■

1.14 Le spectre réel d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$ et E_1 et E_{-1} sont orthogonaux. (démo)

Proposition

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$.

1. $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$
2. $E_1(u) \perp E_{-1}(u)$

Preuve :

1. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \exists x_0 \in E,\ x_0 \neq 0$ et $u(x_0) = \lambda x_0$

   Or, $\|u(x_0)\| = \|x_0\| \implies |\lambda|\|x_0\| = \|x_0\| \implies \lambda \in \{-1, 1\}$
2. $\forall x_1, x_2 \in E_1(u) \times E_{-1}(u)$:

$$\begin{aligned}\langle u(x_1), u(x_2)\rangle &= \langle x_1, x_2\rangle \\ &= \langle x_1, -x_2\rangle \quad \text{car } x_2 \in E_{-1}(u) \\ &= -\langle x_1, x_2\rangle\end{aligned}$$

   Alors, $\langle x_1, x_2\rangle = 0 \implies E_1(u) \perp E_{-1}(u)$

■

1.15 Théorème de réduction par blocs des isométries.

Théorème

Soit E, espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors, $\exists F_1, F_2, \dots, F_p$ SEV de E tels que :

- $E = \bigoplus_k F_k$
- $\forall k \in [\![1,p]\!] F_k$ est stable par u
- $F_1, \dots, F_p$ sont deux-à-deux orthogonaux.
- $\forall k \in [\![1,p]\!] F_k$ de dimension 1 ou 2
- $\forall k \in [\![1,p]\!],\ \tilde{u}\begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto u(x) \end{cases} = Id, -Id,$ ou $R_\theta \ (\theta \in \mathbb{R})$

Théorème : (Version 2)

Soit E, espace euclidien. $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors, $\exists B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ B.O.N de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & & & \\ \hline & D_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & D_p \end{array}\right)$$

Avec les D_i, des blocs de la forme (1), (-1) ou $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

En permutant la base, nous pouvons réécrire :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & R_{\theta_0} & & \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{array}\right)$$

avec les R_θ des matrices de rotation.

1.16 Théorème spectral. (version endomorphisme et version matricielle)

Théorème : Théorème Spectral (V.1)

Soit E, espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}[u \in S(E)] &\iff \left[E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)\right] \\ &\iff [\exists B,\ \text{B.O.N de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_B(u) \text{ soit diagonale}] \\ &\iff [\exists B,\ \text{B.O.N de } E \text{ Constituée de vecteurs propres de } u]\end{aligned}$$

Théorème : Théorème Spectral (V.2)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}[A \in S_n(\mathbb{R})] &\iff [A \text{ est orthosemblable à une matrice diagonale}] \\ &\iff [\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists \Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale, telle que } A = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^\top]\end{aligned}$$

1.17 Définition d'un endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif.

Définition

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$

On dit que u est un endomorphisme auto-adjoint / symétrique positif si :

- $u \in S(E)$
- $\forall x \in E,\ \langle u(x); x\rangle \geqslant 0$

On dit que u est un endomorphisme auto-adjoint / symétrique défini positif si :

- $u \in S(E)$
- $\forall x \in E,\ x \neq 0 \implies \langle u(x); x\rangle > 0$

2 Questions de cours, groupes B et C

2.1 Identité de polarisation et identité du parallélogramme. (démo)

Proposition

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien réel.

Nous avons :
1), $\forall x, y \in E,\ \langle x+y, x+y\rangle = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ (Théorème d'Al-Kashi / Pythagore généralisé)

De plus,
2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$

Ainsi, Nous avons l'identité de polarisation en faisant la différence $(1-2)\cdot\dfrac{1}{4}$:

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

L'identité du parallélogramme vient avec la somme $(1+2)$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2.2 Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie muni d'une b.o.n. (démo)

Preuve :

Soit $x \in E,\ p_F^{\perp}(x) \in F \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ p_F^{\perp}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

$F \oplus F^{\perp} = E$ car E est euclidien, Alors, $\exists! y \in F^{\perp},\ x = p_F^{\perp}(x) + y$.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, p_F^{\perp}(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_i; e_k\rangle = \alpha_i$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, p_F^{\perp}(x)\rangle = \langle e_i; x-y\rangle = \langle e_i; x\rangle - \underbrace{\langle e_i; y\rangle}_{0 \text{ car } y \in F^{\perp}}$

Alors, $\alpha_i = \langle e_i; x\rangle \implies$ CQPC.

■

2.3 Caractérisation des isométries par la conservation de la norme. (démo)

Étant donné que la conservation de la norme est la définition, je pense que la question portait sur la conservation du produit scalaire.

Proposition

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$.

Nous avons équivalence entre :

$$\begin{aligned}
u \text{ est une isométrie} &\iff \forall x, y \in E\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \\
&\iff \exists B = (e_1, \dots, e_n) \text{ BON de } E \text{ telle que } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ soit une BON de } E \\
&\iff \forall B = (e_1, \dots, e_n) \text{ BON de } E, (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est une BON de } E \\
&\iff u^* \circ u = Id :\ u \text{ bijective et } u^{-1} = u^*
\end{aligned}$$

Preuve :

$\underline{4 \implies 3}$:

Direct, il existe bien une base de cette forme + Gram-Schmidt → OK

$\underline{2 \implies 1}$:

$\forall x \in E\ \|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$

$\underline{\text{Isométrie} \implies \text{bijective}}$:

$\forall x \in \mathrm{Ker}(u),\ \|u(x)\| = \|x\|$. Or, $u(x) = 0 \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$. Ainsi, u est injective et est linéaire en dimension finie : u est bijective.

$\underline{1 \implies 2}$ Par polarisation :
$\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

$\underline{2 \implies 4}$:

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$, BON de E.
$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$

Alors, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de cardinal n : c'est une BON de E

$\underline{3 \implies 1}$:

$\forall x \in E,\ \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ telle que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

Alors, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ (Pythagore).

$u(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)$. Or, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON, donc $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$
u est une isométrie.

$\underline{2 \implies 5}$:

$\forall x, y \in E,\ \langle u^* \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

Alors, $\forall x, y \in E,\ \langle u^* \circ u(x) - x, y\rangle = 0 \implies u^* \circ u(x) - x \in E^{\perp} = \{0\}$.

Ainsi, $u^* \circ u(x) = 0 \implies u^* \circ u = Id \implies u$ bijective et $u^{-1} = u^*$

$\underline{5 \implies 1}$:

$\forall x \in E,\ \|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle u^* \circ u(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$

■

2.4 Caractérisation des isométries par l'image d'une b.o.n. (démo)

2.5 Caractérisation des isométries par u^* (demo)

Voir ci-dessus.

2.6 Existence et unicité de l'adjoint. (démo)

Note:-

Théorème de Représentation des formes linéaires :

Soit E, espace euclidien.

1. $\forall a \in E,\ \Phi_a : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, a \rangle \end{cases}$ est une forme linéaire
2. $\forall \phi \in E^*,\ \exists! a \in E,\ \phi = \Phi_a$
   i.e, $\forall x \in E,\ \phi(x) = \langle x, a \rangle$

Théorème Existence et unicité de l'adjoint

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors, $\exists! u^* \in \mathscr{L}(E),\ \forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

u^* s'appelle l'adjoint de u pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Preuve :

Etape 1 :

$\forall y \in E,\ \varphi : x \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est une forme linéaire. Alors, $\exists! a \in E,\ \varphi = \Phi_a$.
i.e, $\exists! a \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u(x), y \rangle = \langle x, a \rangle$

a dépend de y et de u : on le note $u^*(y)$.
Donc, $\forall y \in E,\ \exists! u^*(y) \in E,\ \forall x \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

Etape 2 :

Montrons que $u^* : y \mapsto u^*(y)$ est linéaire. Soient $y_1, y_2 \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\forall x \in E,\ \langle u(x), y_1 \rangle = \langle x, u^*(y_1) \rangle$, idem pour y_2.

$$\langle u(x), \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \langle x, u^*(\lambda y_1 + \mu y_2) \rangle$$

Or, $\lambda \langle u(x), y_1 \rangle + \mu \langle u(x), y_2 \rangle = \lambda \langle x, u^*(y_1) \rangle + \mu \langle x, u^*(y_2) \rangle = \langle x, \lambda u^*(y_1) + \mu u^*(y_2) \rangle$

Donc, par unicité de a dans la proposition : $u^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda u^*(y_1) + \mu u^*(y_2)$: u^* est linéaire.

■

2.7 Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée. (démo)

Preuve :

On note $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_B(u)$. De même, $B = (b_{i,j}) = \mathrm{Mat}_B(u^*)$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & a_{i,j} & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ u(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k$

Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \langle e_i, u(e_j)\rangle = a_{i,j} = \langle u^*(e_i), e_j\rangle = b_{j,i}$

Ainsi, $A = B^\top$

■

2.8 Si F est stable par une isométrie, il en va de même pour son orthogonal. (démo)

Proposition

Soit E, espace euclidien. $u \in O(E)$, soit $F \subset E$ un SEV.

$$F \text{ stable par } u \implies F^\perp \text{ stable par } u$$

Preuve :

Nous avons déjà vu que F stable par $u \implies F^\perp$ stable par $u^* = u^{-1}$ ici.

Soit $y \in F^\perp,\ \ z \in F$

F stable par u et u bijective $\implies u_{|F}$ bijective. Ainsi :

$\exists z_1 \in F, u(z_1) = z \implies \langle u(y), z\rangle = \langle u(y), u(z_1)\rangle = \langle y, z_1\rangle = 0.$

Alors, $u(y) \in F^\perp$: $F^\perp$ est stable par u.

■

2.9 Une projection est une projection orthogonale si et seulement si c'est un endomorphisme auto-adjoint. (démo)

Proposition

Soit E euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ une $\underline{\underline{\text{projection}}}$. Alors:

$$[p \text{ est auto-adjoint}] \iff [p \text{ est une projection orthogonale}]$$

Preuve :

Sens direct :

$\forall x \in \text{Ker}(p),\ \ y \in \text{Im}(p)$:
$y \in \text{Im}(p) \implies \exists z_0 \in E,\ \ p(z_0) = y$.

$\langle x, y\rangle = \langle x, p(z_0)\rangle = \langle p(x), z_0\rangle = 0$ car $p(x) = 0$

Alors, $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$: p est une projection orthogonale.

Réciproquement, Soit $x, y \in E$, Alors $\exists((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \left(\text{Ker}(p) \times \text{Im}(p)\right)^2$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ (car $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$).

$$\begin{aligned}\langle p(x), y\rangle &= \langle p(x_1 + x_2), y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_2, y_1 + y_2\rangle = \langle x_2, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_2, y_2\rangle \quad \text{car orthogonaux}\end{aligned}$$

On montre de même que $\langle x, p(y)\rangle = \langle x_2, y_2\rangle = \langle p(x), y\rangle$.

Alors, $p^* = p$

■

2.10 Une symétrie est une symétrie orthogonale si et seulement si c'est une isométrie. (démo)

Preuve :

Soit E euclidien, $H \subset E$, Hyperplan. Soit $a \in H^\perp$ tel que $\|a\| = 1$. Alors, $E = H \oplus \text{Vect}(a)$

Soit s, symétrie orthogonale par rapport à H : $\forall x \in H, s(x) = x,\ \ s(a) = -a$.

$\forall x \in E,\ \ \exists!(x_h, \lambda) \in H \times \mathbb{R},\ \ x = x_h + \lambda a \implies \|x\|^2 = \|x_h\|^2 + \lambda^2$

$s(x) = s(x_h + \lambda a) = x_h - \lambda_a \implies \|s(x)\|^2 = \|x_h\|^2 + \lambda^2$: s est une isométrie.

■

2.11 $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. (démo)

Preuve :

E étant de dimension finie ($E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné :

1. $\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $c_1, \dots, c_n$ sont de norme 1 (forment une BON de E) : $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} {m_{i,j}}^2 = 1$.

   $\Longrightarrow \forall i,j \in [\![1;n]\!]^2$, $|m_{i,j}| \leqslant \Longrightarrow \|M\|_\infty \leqslant 1$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

2. (V.1) Par caractérisation séquentielle :
$\forall (M_p)_p \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $M_p \to a$: Montrons que $a \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

   $M_p \to a \implies {M_p}^\top \to a^\top \implies M_p \cdot {M_p}^\top \to a \cdot a^\top$ (la transposition et le produit par une matrice sont des applications continues car linéaires en dimension finie).

   Or, $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_p \cdot {M_p}^\top = I_n \implies aa^\top = I_n \implies a \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé

2. (V.2) Posons $\varphi_1 : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ M \mapsto (M, M^\top) \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{cases}$

   Alors, ces deux applications sont continues car linéaire (et bilinéaire) en dimension finie. Posons alors $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$

   Alors, ψ est constate égale à I_n sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_n\})$.

   Or, $\{I_n\}$ est un fermé ($= B_f(I_n, 0)$), donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

$\blacksquare$

2.12 Caractérisation des endomorphismes auto-adjoint positifs (resp. définis positifs) par le spectre. (démo)

Proposition

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$

$$[u \in S^+(E)] \iff [u \in S(E) \text{ et } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+]$$
$$[u \in S^{++}(E)] \iff [u \in S(E) \text{ et } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*]$$

Preuve :

Sens direct :

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\exists x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$ et $u(x_0) = \lambda x_0$.

$\langle u(x_0), x_0\rangle \geqslant 0$ car $u \in S^+(E)$. Donc, $\lambda\langle x_0, x_0\rangle = \lambda\|x_0\| \geqslant 0 \implies \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$

Réciproquement, D'après le théorème spectral, $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E constituée de vecteurs propres de u.

$\implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_i \in \mathrm{Sp}(u),\ u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda \geqslant 0$.

$\forall x \in E, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \implies \langle u(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$

Idem pour S^{++}, dans la réciproque, si $x \neq 0 \implies \exists x_i \neq 0 \implies \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 > 0$

■

3 Questions de cours du groupe C uniquement

3.1 Théorème spectral. (démo)

Preuve :

Sens direct : Par récurrence sur $\mathrm{Dim}(E) = n$.

Si $n = 1$: Soit $e \in E$, $e \neq 0$. Alors, $\left(\frac{e}{\|e\|}\right)$ est une BON de E et $\mathrm{Mat}_B(u)$ est diagonale.

Si $n = 2$: Soit $B = (e_1, e_2)$, BON de E (qui existe grâce au théorème de la base incomplète + Gram-Schmidt)

$\implies M = \mathrm{Mat}_B(u) \in S_2(\mathbb{R}) \implies \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Alors, $\chi_M(X) = X^2 - (a+c)X + (ac-b)^2$, $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b)^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$

$\Delta = 0 \iff b = 0$ et $a = c \iff M = aI_2 \iff u = aId$

Alors, u est diagonalisable dans toute base donc toute BON.

$\Delta > 0$: χ_M scindé simple $\implies \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \chi_M(X) = (X-\lambda)(X-\mu)$ et u est alors diagonalisable.

$E = E_\lambda(u) \bigoplus E_\mu(u)$, $\lambda \neq \mu$ et $u \in S(E) \implies E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

$E = E_\lambda(u) \overset{\perp}{\bigoplus} E_\mu(u)$: H_2 est vraie.

Montrons alors que $H_1, H_1, H_{n-2}, H_{n-1} \implies H_n$:

- $\mathbb{K} = \mathbb{R} \implies u$ admet une droite ou un plan stable, donc $\exists F \subset E$, SEV stable par u tel que $\mathrm{Dim}(F) = 1$ ou 2
- $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^\perp$ car E euclidien.
- $u \in S(E)$ et F stable par $u \implies F^\perp$ stable par u.

F stable par u et $u \in S(E) \implies u_{|F} \in S(F)$

$H_1, H_2 \implies \exists B$, BON de F constituée de vecteurs propres de $u_{|F}$ donc de u.

$F^\perp$ stable par $u \implies u_{|F^\perp} \in S(F^\perp)$

$H_{n-2}, H_{n-1} \implies \exists B'$, BON de $F^\perp$ constituée de vecteurs propres de $u_{|F^\perp}$ donc de u.

$E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^\perp \implies (B, B')$ est une BON de E constituée de vecteurs propres de u.

Réciproquement, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, u(e_i) = \lambda_i e_i$.

$\forall x, y \in E,\ , \exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n \in \mathbb{R},\ x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y\rangle &= \langle u(\sum_{k=1})^n x_k e_k, \sum_{k=1}^n y_k e_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^n x_k \lambda_k y_{k'} \langle e_k, e_{k'}\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n x_k y_k \lambda_k
\end{aligned}$$

On montre de même que $\langle x, u(y)\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \lambda_k = \langle u(x), y\rangle \implies u \in S(E)$

■

3.2 Théorème de réduction par blocs des isométries. (démo)

Preuve :

Par récurrence sur la dimension :

Si $n = 1$: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$: donc u est de la forme $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}) \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |u(x)| = |\lambda x| = |x| \implies \lambda \in \{-1, 1\}$

et $u = Id_{\mathbb{R}}$ ou $u = -Id_{\mathbb{R}}$ ($p = 1$, $F_1 = \mathbb{R}$)

Si $n = 2$, $E = \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathcal{O}(E) \implies u = R_\theta$ ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite

- Si u est une rotation, $F_1 = \mathbb{R}^2$ convient.
- Si u est une symétrie orthogonale, $E = E_1(u) \bigoplus E_{-1}(u)$, $u_{|E_1} = Id$, $u_{|E_{-1}} = -Id$, $F_1 = E_1(u)$ et $F_2 = E_{-1}(u)$ Conviennent.

  Montrons que $H_{n-1}, H_n \implies H_{n+1}$: Soit E euclidien de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{O}(E)$

- u admet un plan stable ou une droite stable : $\exists F_1 \subset E$ de Dimension 1 ou 2
- $u \in \mathcal{O}(E)$ et F_1 stable par $u \implies F_1^\perp$ stable par u, alors $E = F_1 \overset{\perp}{\bigoplus} F_1^\perp$
- Par HR : Puisque $\mathrm{Dim}(F_1^\perp) \leqslant n$, on peut écrire $F_1^\perp$ comme $F_1^\perp = \overset{\perp}{\bigoplus_k} F_k$, stables par u, deux-à-deux orthogonaux. (et $u_{|F_i} = R_\theta$ ou $\pm Id$)

  Sur F_1 : $u_{|F_1} \in \mathcal{O}(F_1)$ et $\mathrm{Dim}(F_1) = 1$ ou $2 \implies u_{|F_1} = Id, -Id$ en dim 1, ou R_θ ou symétrie orthogonale en dim 2

  Par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

■

3.3 Le projeté orthogonal minimise la distance à un sous-espace (démo non refaite en spé)

Preuve :

Soit F, SEV de E. Soit $x \in E$.

- Si $x \in F$, $p(x) = x \to$ OK
- Sinon, posons $p = p(x)$, Soit $f \in F$, $f \neq p$.
  Alors, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x - f\|^2 &= \|x - p + p - f\|^2 \\
&= \langle x - p + p - f ; x - p + p - f \rangle \\
&= \langle x - p ; x - p \rangle + \underbrace{2\langle x - p, p - f \rangle}_{=0 \text{ car } x-p \in F^\perp \text{ et } p-f \in F \text{ car SEV}} + \langle p - f ; p - f \rangle \\
&= \|x - p\|^2 + \underbrace{\|p - f\|^2}_{\geqslant 0}
\end{aligned}$$

■