Colles MPi* Semaine n°15 du 08/01/2024 au 12/01/2024 (Programme n°10)

Vallaeys Pascal

14 décembre 2023

Thème : Variables aléatoires.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie. Le faire sur des exemples simples.

- Définition d'une variable aléatoire (discrète) + l'image réciproque d'une partie de $X(\Omega)$ est un élément de la tribu (démo).
- Si X est une variable aléatoire, f(X) est une variable aléatoire (démo)
- Définition de deux variables aléatoires indépendantes, et de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- X,Y indépendantes => f(X) et g(Y) indépendantes (démo)
- Calcul de l'espérance des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à l'aide de la définition.
- Une loi géométrique est une loi sans mémoire (démo, rappeler le sens de cela)
- Propriété de l'espérance (linéarité, positivité (démo), croissance).
- Énoncé du théorème de transfert.
- Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
- Variance d'une somme de variables aléatoires.
- Inégalité de Markov (1 démo)
- Si X admet un moment d'ordre 2, X est d'espérance finie (démo)
- Inégalité de Bienaymé Tchebychev.
- Lien entre l'existence de l'espérance et de la variance et la dérivabilté de Gx en 1. (démo pour X d'espérance finie => G_X dérivable en 1)
- Espérance et variance des lois usuelles à l'aide de G_X. (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Loi de Poisson comme limite (simple) d'une loi binomiale (démo)
- Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.
- Variance d'une somme de variables aléatoires. (démo)
- Inégalité de Markov (2 démos)
- Inégalité de Cauchy Schwarz pour l'espérance (démo)
- Calcul de la variance des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à l'aide de la définition.
- Inégalité de Bienaymé Tchebychev (démo)
- Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes (2*démo)
- Loi faible des grands nombres (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Linéarité de l'espérance. (démo)
- Si $|X| \leq Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. (démo)
- Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendante. (démo)
- Théorème de transfert. (démo)
- La dérivabilité de G_X en 1 entraine l'existence de l'espérance. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes, de lois $B(n_1; p)$ et $B(n_2; p)$. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

Exercice 2 :
Montrer qu'une intersection dénombrable d'événements presque certains est un événement presque certain.

Exercice 3 :
On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 qui suivent toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
1) Déterminer les lois des variables : $Y = \min(X_1, X_2)$ et $S = X_1 + X_2$.
2) Reconnaître la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 4 :
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
1) Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.
2) Calculer $P(X \text{ est pair})$.

Exercice 5 :

1. Justifier le fait qu'une variable aléatoire, à valeurs réelles, est bornée, alors elle admet des moments à tout ordre.

2. Montrer que si une variable aléatoire réelle admet un moment d'ordre n, elle admet des moments à tout ordre inférieur.

Exercice 6 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappelez l'espérance et la variance de X.

2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

3. Calculer $P(X = Y)$.

4. a) Montrer que $P(X < Y) = P(Y < X)$.

b) Calculer $P(X \geqslant Y)$.

Exercice 7 :

Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

2. Déterminer la loi de $X + Y$.

3. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 8 :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1; 1\}$ et suivant la même loi. Soit T une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose $T, X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.

1. Montrer que $V = \displaystyle\prod_{i=1}^{T} X_i$ admet un moment à tout ordre.

2. Calculer l'espérance et la variance de V.

Exercice 9 :

Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\{1, ..., n\}$.

Exercice 10 :

1. Soit n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Trouver une bijection entre les ensembles

$$\mathcal{P}_{p+1}(\{0, ..., n\}) \text{ et } \bigcup_{k=p}^{n} (\mathcal{P}_p(\{0, ..., k-1\}) \times \{k\}).$$

En déduire que

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

2. Une urne contient n boules, dont p sont blanches. On tire les boules une à une, sans remplacement, et on note X le numéro du tirage de la dernière boule blanche. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 11 :

Soit n et b deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches. On tire les boules successivement et sans remise. On note X la variable aléatoire qui donne l'instant du premier tirage d'une boule noire.

Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 12 :

On considère un point qui est libre de se déplacer selon l'axe des entiers $\mathbb{Z}$. A chaque étape, le point se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité p et vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. Elle se situe initialement en 0. On note S_n la variable aléatoire qui indique la position du point au bout de n mouvements.

1) Donner la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On pose $p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$, et $f : t \mapsto \sum p_n t^n$. Justifier que f est définie sur $]-1,1[$ et calculer $f(t)$ pour $t \in]-1,1[$.

3) On introduit T la variable aléatoire qui indique le rang du premier passage à l'origine, avec la convention que $T = +\infty$ si le point n'y repasse jamais. On note $q_n = \mathbf{P}(T = n)$, et $g : t \mapsto \sum q_n t^n$. Justifier que g est définie sur $]-1,1[$ et établir que $f(t) = 1 + f(t)g(t)$. En déduire l'expression de q_n.

Exercice 13 :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = X - Y$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.

2. a) Déterminer la loi conjointe du couple (U,V) puis les lois de U et de V.

b) Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.

3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $P((U = n) \cap \ (V = m)) \neq 0$. Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 14 :

Soient $s \in]1,+\infty[$ et X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $\zeta(s)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$, où on note $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p(n/X)$.

b) Soient $n_1, ..., n_k$ des nombres entiers premiers entre eux deux à deux. Montrer que les évènements $\{n_j/X\}_{1 \leq j \leq k}$ sont mutuellement indépendants.

c) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangée dans l'ordre croissant. Montrer que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - {}^1/_{p_n^s}} = \zeta(s)$.

d) Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 15 :

a) Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)\left(X - \overline{b}\right)$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.

b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note $p_n$la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. Donner une expression et un équivalent de p_n.

Exercice 16 :

Soient a, b, m trois réels vérifiant $a \leqslant m \leqslant b$. On considère l'ensemble des variables alétoires discrètes X qui vérifient : $E(X) = m$ et $a \leqslant X \leqslant b$

1. Qualitativement, que caractérise la variance ?

2. Déterminer le maximun des $E(X^2)$ pour X dans l'ensemble considéré.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

(2) Comment simplement caractériser le fait que deux "nombres" (à savoir X-a et X-b)sont de signes opposés ?

Exercice 17 :

On considère une urne avec 10000 boules dont 6000 rouges et 4000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules.

Déterminer la probabilité pour qu'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages. (chercher du côté des chemin de Dyck et du problème du scrutin)

Exercice 18 :

Soit X une variable aléatoire réelle positive et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. On suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi de 2X. Montrer que X est presque sûrement constante. (on traitera le cas où X admet une variance, sinon on considèrera $exp(-X)$)

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 95,96,97,98,99,100,102,103,104,106,108,109,110,111.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : variables aléatoires. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°10
- Groupe 2 : Programme n°10
- Groupe 3 : Programme n°10
- Groupe 4 : Programme n°10
- Groupe 5 : Programme n°10
- Groupe 6 : Programme n°10
- Groupe 7 : Programme n°10
- Groupe 8 : Programme n°10
- Groupe 9 : Programme n°10
- Groupe 10 :Programme n°10
- Groupe 11 : Programme n°10
- Groupe 12 : Programme n°10
- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine