MPI* Physique

TD Thermodynamique

Conducto-convection

Olivier Caffier

Table des matières

Ce que Faidherbe enseigne, ailleurs ne s'apprend pas.

1 Canon à neige

(CCP PC 2019) Afin de produire de la neige artificielle pour une température extérieure $T_e = -15$ °C, on pulvérise des gouttes d'eau de rayon $R = 0,2$ mm à la température initiale $T_i = 10$ °C. On veut calculer le temps mis par une goutte pour passer à l'état solide.

À l'interface eau-air, le flux thermique $\delta\phi$ à travers une surface dS s'écrit :

$$\delta\phi = h\big(T(t) - T_e\big)\,dS \tag{1}$$

avec T la température de la goutte, supposée uniforme. On donne $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} et $c = 4,18$ kJ.kg^{-1} pour l'eau liquide, $h = 65$ W.m^{-2}.K^{-1} et $L_{\text{fus}} = 333$kJ.kg^{-1} à 0 °C.

On fera l'hypothèse que le rayon de la goutte ne varie pas durant le changement d'état.

1. Par le premier principe, établissez :

$$c\rho R\frac{\partial T}{\partial t} = -3h(T - T_e) \tag{2}$$

2. Déterminez $T(t)$. En admettant que la goutte refroidit jusqu'à être en surfusion, calculez l'instant t_1 où la goutte atteint $T_s = -5$ °C.
3. Lorsque la goutte atteint T_s, il y a rupture de surfusion. La température remonte à $T_0 = 0$ °C en se solidifiant partiellement. Soit x la fraction massique de liquide restant.
   (a) Cette transformation est supposée adiabatique car très rapide. Quelle est la grandeur conservée?
   (b) Calculez x puis la durée de la solidification du reste de la goutte.
4. Calculez la durée totale du processus.

Corrigé :

1. On a, comme $\delta W = 0$ (goutte incompressible par hypothèse) :

$$dU = \delta Q$$

D'une part, on a

$$dU = c\rho V dT = c\rho\frac{4}{3}\pi R^3 dT$$

D'autre part, comme on a supposé une température de la goutte uniforme, il n'y a que de la conducto-convection :

$$\begin{aligned}\delta Q = \delta Q_{cc} &= -\delta\phi dt\\ &= -h(T(t) - T_e)4\pi R^2 dt\end{aligned}$$

Donc, en reprenant les deux derniers résultats :

$$\boxed{c\rho R\frac{\partial T}{\partial t}(t) = -3h(T(t) - T_e)}$$

2. En reprenant l'équation précédente, on obtient (avec la condition initiale $T(0) = T_i$) :

$$\boxed{T(t) = (T_i - T_e)\exp(-t/\tau) + T_e}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{c\rho R}{3h}$$

Après une chaîne d'équivalences, on trouve :

$$\boxed{t_1 = \tau \ln\left(\frac{25}{10}\right) \simeq 3{,}93 \text{ sec}}$$

3. (a) La grandeur conservée est

$$\boxed{\Delta H = Q = 0}$$

(b) Cette transformation est en effet *monobare*, mais ***pas monotherme*** : **il ne s'agit donc pas d'un changement d'état!**
Bon, néanmoins, l'enthalpie est conservée, donc on va pouvoir *transiter par une étape intermédiaire* :

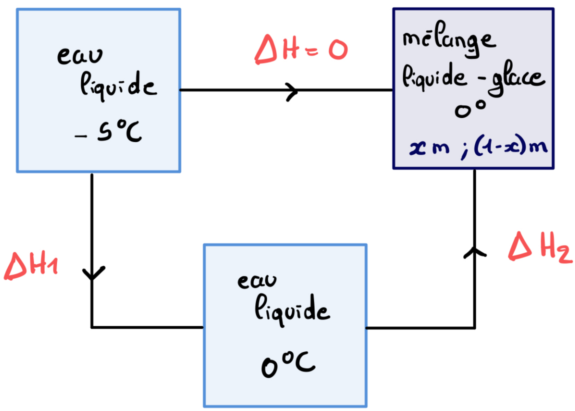


FIGURE 1 – Schéma d'une étape fictive équivalente

Ainsi, par construction :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$$

- Pour ΔH_1 : il s'agit d'un chauffage d'eau liquide, donc :

$$\Delta H_1 = mc(T_0 - T_s)$$

- Pour ΔH_2 : il s'agit d'une solidification d'une partie de l'eau, donc :

$$\Delta H_2 = (-L_{\text{fus}})(1-x)m$$

Dès lors, la conservation de l'enthalpie nous permet de dire que :

$$c(T_0 - T_s) = (1-x)L_{\text{fus}}$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{x = 1 - \frac{T_0 - T_s}{L_{\text{fus}}}c \simeq 0,94}$$

D'autre part, on considère Q le transfert thermique reçu par la goutte, on a alors :

$$Q = \Delta H_2 = -(1-x)mL_{\text{fus}}$$

or $m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$, on en déduit ainsi que :

$$\boxed{Q = -(1-x)\rho\frac{4}{3}\pi R^3 L_{\text{fus}}}$$

Cependant, on sait également que :

$$\begin{aligned} Q &= \Phi_{\text{c.c}}(R)\Delta t \\ &= j_{\text{c.c}}(R)4\pi R^2 \Delta t \end{aligned}$$

et la *loi de Newton* nous permet ainsi d'affirmer que :

$$\boxed{Q = h(T_e - T_0)4\pi R^2 \Delta t}$$

Nous arrivons en fin de compte à l'expression suivante :

$$\boxed{\Delta t = \frac{1-x}{3h(T_0 - T_e)}\rho R L_{\text{fus}} \simeq 21,3 \text{ secondes}}$$

4. En dernier lieu,

$$\boxed{t_{\text{tot}} = t_1 + \Delta t \simeq 25,2 \text{ secondes}}$$

Ce qui est plutôt satisfaisant (disons que ce n'est pas très long) pour un canon à neige !

3 Température d'un vin

(CCP MP 2019) Une bouteille de vin est modélisée comme un cylindre de hauteur $H =$ 23 cm, de diamètre extérieur $d = 7{,}5$ cm et d'épaisseur $e = 5$ mm. On note $T_a = 25$ °C la température de l'air ambiant, T_s la température de la surface extérieure de la bouteille et $T(t)$ celle du vin, supposée uniforme et lentement variable. On donne une température initiale du vin $T_0 = 12$ °C.

Le vin est assimilé à de l'eau : capacité thermique massique $c = 4185$ J.K^{-1}.kg^{-1} et $\lambda =$ 1,0 W.m^{-1}.K^{-1}.

Tout transfert thermique par le fond de la bouteille ou son goulot est négligé. On supposera que le verre est en régime permanent et que sa température ne dépend que de r.

1. Calculez le flux thermique dans le verre. Que pouvez-vous en dire ? Calculez la résistance thermique de conduction.
2. On considère un échange conducto-convectif avec l'air ambiant. Exprimez le flux thermique et la résistance thermique associées.
3. Quelle est la résistance thermique globale ?
4. À l'aide de la figure 2, évaluez le coefficient de conducto-convection h.

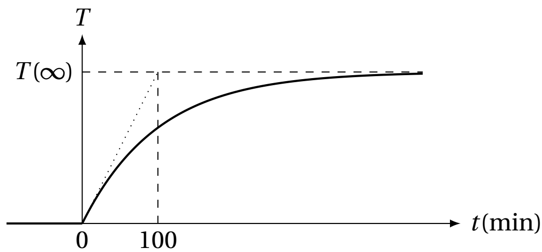


FIGURE 2 – Profil de température du vin

Corrigé :

1. On se situe dans l'*ARQS*, donc le flux est à caractère conservatif, il est constant pour tout $r \in]\frac{d}{2} - e, \frac{d}{2}[$:

$$\forall r \in]\frac{d}{2} - e, \frac{d}{2}[, \;\; \Phi(r) = \Phi_{\text{verre}}$$

On en déduit donc que, dans cet intervalle :

$$j_Q(r) = \frac{\Phi_{\text{verre}}}{2\pi r H}$$

et donc, grâce à la *loi de Fourier*, on peut dire que :

$$-\lambda T'(r) = \frac{\Phi_{\text{verre}}}{2\pi r H}$$

En intégrant, il vient :

$$T(d/2) - T(d/2 - e) = \Phi_{\text{verre}} \frac{\ln\left(\frac{d/2-e}{d/2}\right)}{2\pi H\lambda}$$

On en déduit alors *par identification*[1] :

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi H\lambda} \ln\left(\frac{d}{d-2e}\right) \simeq 9,9 \times 10^{-2}\ \text{K.W}^{-1}}$$

2. Par simple utilisation de la *loi de Newton*, on a :

$$\boxed{\Phi_{\text{sortant}} = h(T_s - T_a) 2\pi \frac{d}{2} H}$$

et donc de même, on trouve *par identification* :

$$\boxed{R_{\text{c.c}} = \frac{1}{h\pi d H}}$$

3. Le flux thermique traverse radialement, on a donc affaire à *un assemblage série de résistances thermiques*, d'où l'expression :

$$\boxed{R_{\text{tot}} = R_{\text{th}} + R_{\text{c.c}}}$$

4. Résultat de sup' : si on trace la tangente en l'origine, l'abscisse de son intersection avec T_∞ nous donne τ. Ainsi, $\tau = 100$ secondes.
Maintenant, il faudrait savoir à quoi τ correspond ! Étudions de nouveau le système, appliquons le premier principe :
   - $dU = cT'(t)dt$
   - $\delta Q = -\Phi dt = -\dfrac{1}{R_{\text{tot}}}(T(t) - T_a)dt$

   Donc le premier principe nous permet d'affirmer que ($\delta W = 0$) :

$$T'(t) + \frac{1}{cR_{\text{tot}}} T(t) = \frac{T_a}{R_{\text{tot}}}$$

On a alors que $\tau = cR_{\text{tot}}$! On en déduit enfin :

$$\boxed{h = \frac{c}{\pi d H(\tau - cR_{\text{th}})} \simeq 10,3\ \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}}$$

1. attention aux conventions de signes ici, on avait pris le flux comme négatif donc on va devoir remettre un moins.

4 Chauffage d'une dalle

Une dalle en béton (épaisseur H, masse volumique μ, conductivité thermique λ, capacité thermique massique c) forme le sous-sol d'une maison. Elle est chauffée par en dessous par une circulation d'eau chaude dans des tuyaux noyés dans le béton.

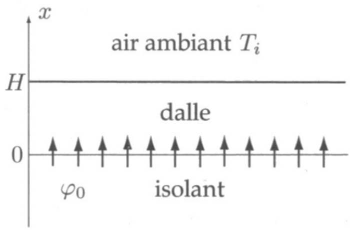


FIGURE 3 – Chauffage d'une dalle.

Figure 3 :

— la dalle reçoit de l'air ambiant au-dessus un flux thermique donné par la loi de Newton $\varphi_{\text{air}\to\text{dalle}} = h\big(T_i - T(H)\big)$;

— la circulation d'eau fournit un flux $\varphi_0(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$.

Données : $h = 6,7$ S.I ; $\varphi_0 = 20,1$ W.m^{-2}.

1. Déterminez l'unité de h.
2. Soit $\vec{\jmath} = j(x,t)\,\vec{u}_x$ la densité de flux thermique. À quelle équation obéit-elle ? Vous poserez $a = \lambda/\mu c$.
3. Cherchez une solution en régime forcé par séparation des variables, en supposant que H est infinie. Interprétation ?

Corrigé :

1. La *loi de Newton* nous donne directemnt le résultat :

$$\boxed{h \text{ s'exprime en W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}}$$

2. Un principe de Curie nous permet d'affirmer que :

$$\vec{\jmath}(M,t) = j(x,t)\vec{u}_x$$

D'autre part, en considérant une tranche $[x, x+dx]$ de la dalle, on remarque qu'il n'y a pas de conducto-convection, ainsi on retrouve l'équation usuelle :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Alors, en dérivant partiellement par rapport à x cette équation, on trouve (on peut permuter les dérivées partielles d'après le *théorème de Schwarz*) :

$$\mu c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right)-\lambda\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(x,t)=0$$

or d'après la *loi de Fourier*, $j(x,t)=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$, il vient :

$$-\frac{\mu c}{\lambda}\frac{\partial j}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,t)=0$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\frac{\partial j}{\partial t}(x,t)-a\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,t)=0}$$

3. Procédons à une résolution par séparation des variables :

$$j(x,t)=f(x)g(t)$$

Néanmoins, on néglige les solutions du régime transitoire (solution homogène) on ne prend que en compte le *régime sinusoïdal forcé* (donc après quelques τ).
Passons en complexe :

$$\underline{j}(x,t)f(x)g(t)$$

défini pour $x\in[0,H]$ et $t\in[\mathrm{qq}\tau,+\infty[$.

Nos conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} j(0,t)=\varphi_0\cos(\omega t)\\ j(H,t)=j_{\mathrm{cc}}(t)\end{cases}$$

Ainsi, essayons :

$$\begin{cases} g(t)=\exp(i\omega t)\\ f(0)=\varphi_0\end{cases}$$

On va essayer de renvoyer tout préfacteur dans f, pour simplifier les choses.

Alors, notre précédente équation, munie de cet ansatz, se traduit par :

$$i\omega f(x)\exp(i\omega t)-af''(x)\exp(i\omega t)=0$$

i.e :

$$\boxed{f''(x)-\frac{i\omega}{a}f(x)=0}$$

Calculons l'équation caractéristique de cette équation :

$$\begin{aligned} r^2 - \frac{i\omega}{a} = 0 \Leftrightarrow r^2 &= \exp(i\pi/2)\frac{\omega}{a} \\ &\Leftrightarrow r = \pm\exp(i\pi/4)\sqrt{\frac{\omega}{a}} \end{aligned}$$

D'où :

$$r = \pm\frac{1+i}{\delta}$$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ l'épaisseur de peau.

Alors,

$$f(x) = A\exp\left(x\frac{1+i}{\delta}\right) + B\exp\left(-x\frac{1+i}{\delta}\right)$$

Notre énoncé suppose H infinie, donc $H \gg \delta$: on résout sur $[0, +\infty[$, ce qui implique que $A = 0$ pour éviter une divergence en $+\infty$. Alors :

$$\boxed{f(x) = B\exp\left(-x\frac{1+i}{\delta}\right)}$$

On ré-injecte cela dans notre ansatz global :

$$\underline{j}(x,t) = B\exp\left(-x\frac{1+i}{\delta}\right)\exp(i\omega t)$$

Il ne reste plus qu'à trouver B, utilisons notre condition à la limite en 0 :

$$\underline{j}(0,t) = \varphi_0\exp(i\omega t)$$

D'où

$$B = \varphi_0$$

Ce qui nous donne donc :

$$\underline{j}(x,t) = \varphi_0\exp\left(-x\frac{1+i}{\delta}\right)\exp(i\omega t)$$

En passant en réel :

$$\boxed{j(x,t) = \varphi_0\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

On a donc trouvé une solution ondulatoire progressive et amortie, avec une propagation selon les x croissants.

5 Homéothermie

(Mines MP 2018) Un animal homogène sphérique de rayon R baigne dans l'eau (voir Figure 4). Sa température interne est maintenue à $T_c = 37$ °C par un mécanisme métabolique de puissance volumique P_0. À grande distance de l'animal, la température de l'eau est $T_\infty = 5$ °C.

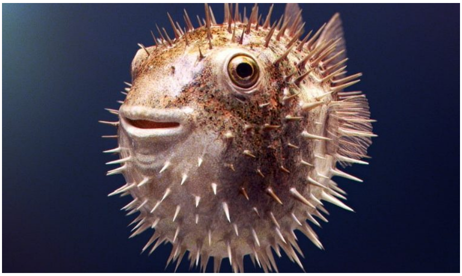


FIGURE 4 – Photographie d'un poisson globe, connu pour sa forme atypique...

On donne la conductivité de l'eau $\lambda_e = 0,61 W.m^{-1}.K^{-1}$ et le coefficient de conducto-convection à la surface de la peau $h = 100 W.K^{-1}.m^{-2}$.

1. Déterminez la température de l'eau à toute distance de l'animal.
2. Soit $T_{ec} = 25$ °C la température de l'eau à la surface de l'animal. Trouvez une relation entre T_{ec} et λ_e.
3. Évaluez R. Expliquez pourquoi ce mécanisme favorise les gros mammifères.
4. Évaluez P_0.

Corrigé :

1. Remarquons d'abord que nous nous situons en *régime statique*, et que la conducto-convection n'est présente qu'à la surface de la peau de l'animal, donc notre équation de la chaleur version ARQS est valable sur $]R, +\infty[$:

$$\Delta T = 0$$

i.e

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 T'(r)\right) = 0$$

d'où l'existence de deux constantes α, β telles que :

$$T(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta$$

Or, on a $T(r \to R^+) = T_{ec}$ et $T(r \to +\infty) = T_\infty$.
D'où :

$$\boxed{T(r) = \frac{R}{r}(T_{ec} - T_\infty) + T_\infty}$$

2. Par continuité du flux en $r = R$:

$$\underbrace{\Phi(R^-)}_{\text{conducto-convection}} = \underbrace{\Phi(R^+)}_{\text{conduction}} \tag{3}$$

Alors, d'après la *loi de Newton* :

$$\Phi(R^-) = h(T_{ec} - T_c)4\pi R^2$$

et on a également :

$$\Phi(R^+) = j_Q(R)4\pi R^2 = -\lambda_e T'(R)4\pi R^2$$

Ainsi, d'après (3) :

$$-\lambda_e \frac{T_{ec} - T_\infty}{R} = h(T_{ec} - T_c)$$

D'où :

$$\boxed{R = \frac{\lambda_e}{h}\frac{T_{ec} - T_\infty}{T_c - T_{ec}}}$$

3. On a

$$\boxed{R \simeq 1 \text{ cm}}$$

4. On remarque que, grâce au régime statique, le flux parcouru par la surface du poisson sera le même que celui parcouru dans la coquille sphérique $[r, r + dr]$:

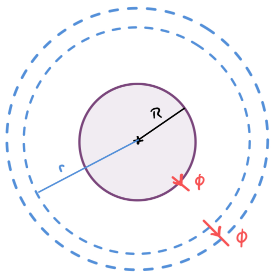


FIGURE 5 – Notre coquille sphérique et notre flux.

Or, dans notre coquille, il vient :

$$\Phi(r) = j_Q(r)4\pi r^2$$

et, à la surface de l'animal (par continuité du flux là où la conducto-convection se produit) :

$$\Phi(R) = P_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

On en déduit que, pour $r > R$:

$$P_0 = \frac{3r^2 j_Q(r)}{R^3}$$

Enfin, la loi de fourier nous dit que $j_Q(r) = -\lambda_e T'(r) = \lambda_e \frac{R}{r^2}(T_{ec} - T_\infty)$.
Finalement,

$$\boxed{P_0 = \frac{3\lambda_e (T_{ec} - T_\infty)}{R^2} \simeq 360 \text{ kW.m}^{-3}}$$

Remarque : on aurait aussi pu utiliser la continuité du flux en $r = R$ avec la conducto-convection et donc en utilisant la *loi de Newton*, on aurait alors eu :

$$P_0 = \frac{3h(T_c - T_{ce})}{R}$$

6 Conduction dans un vase Dewar

À l'instant initial, remplissons un vase Dewar avec de l'eau liquide à $T_i = 10\,°\mathrm{C}$. La surface libre de l'eau est en contact avec l'atmosphère dont la température est $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Vous admettrez que la température dans le vase n'est fonction que de l'altitude z et du temps t. L'origine des altitudes est prise au fond du vase.

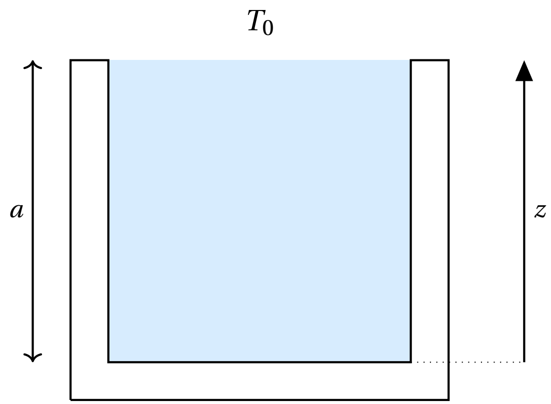


FIGURE 6 – Conduction dans un vase Dewar.

La surface libre, d'abscisse a, échange de la chaleur avec l'atmosphère suivant la loi de Newton avec un coefficient convecto-conductif h. Soit ρ la masse volumique de l'eau, λ sa conductivité thermique et c sa capacité thermique massique.

1. Expliquez pourquoi la convection est négligeable dans le vase.
2. Donnez l'équation aux dérivées partielles gouvernant T dans le vase et écrivez les conditions aux limites associées.
3. La résolution de cette équation sera faite avec l'ansatz $T(z,t) = A + f(z)g(t)$.
   (a) Commentez le choix de cet ansatz.
   (b) Menez la résolution. En particulier, montrez que $g(t)$ peut être mis sous la forme $e^{-D\alpha^2 t}$ avec D la diffusivité de l'eau et α une constante.
   (c) Que vaut A ?
   (d) Trouvez une équation permettant de trouver α que vous ne chercherez pas à résoudre. Discutez les valeurs possibles pour α et concluez sur la forme générale de la température.

Corrigé :

1. Deux choses :
   (a) On a un volume de taille raisonnable (ça peut aider)

(b) Mais surtout, en « chauffant » par le haut, on limite la convection de liquide chaud du bas vers le haut (on pense à l'exemple de la casserole, où on fait bouillir de l'eau par dessous)

Néanmoins, cette approximation reste très discutable, mais on essaie de se rapprocher du programme de MPI !

2. Comme la conducto-convection n'est présente qu'en $z = a$, l'équation de la chaleur reste valable sur $]0, a[$:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(z,t) - D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t) = 0} \tag{4}$$

De plus :

- en $z = a$, on a la continuité du flux :

$$\underbrace{\Phi(a^-)}_{\text{conduction}} = \underbrace{\Phi(a^+)}_{\text{conducto-convection}}$$

Or, la *loi de Fourier* nous dit que :

$$\Phi(a^-,t) = j_Q(a^-,t)S = -\lambda\frac{\partial T}{\partial z}(a^-,t)S$$

et la *loi de Newton* nous permet d'affirmer que :

$$\Phi(a^+,t) = j_{cc}S = h\left(T(a^-,t) - T_0\right)S$$

Ainsi, l'égalité des flux nous permet d'arriver à cette condition en $z = a$:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial z}(a^-,t) + \frac{h}{\lambda}\left(T(a^-,t) - T_0\right) = 0}$$

- en $z = 0$, on a par continuité du flux et par caractérisation du vase (le flux est nul !) :

$$\Phi(0^+,t) = 0$$

et on déduit, encore une fois grâce à la *loi de Fourier* que :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial z}(0,t) = 0}$$

3. (a) On retrouve bien une valeur ne dépendant ni du temps, ni de l'espace, et deux fonctions représentant la fluctuation de température, fonctions qui ne sont *a priori* pas sinusoïdales et qui s'influencent entre elles : si on a par exemple une exponentielle décroissante, leur produit décroitra également, donc le temps influence la température dans l'espace.

(b) Injectons cet ansatz dans notre équation (4), on arrive alors à l'équation suivante :

$$f(z)g'(t) - Df''(z)g(t) = 0 \tag{5}$$

Procédons à la méthode de *séparation des variables*, divisons (5) par $g(t)$ et $f(z)$ dans le cas où ces fonctions ne sont pas nulles :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = D\frac{f''(z)}{f(z)}$$

Donc, on a l'existence d'une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que pour tous z, t n'annulant pas $f(z)$ et $g(t)$:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = D\beta$$

et

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \beta$$

Néanmoins, si $\beta > 0$, cela impliquerait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq. $\beta = \alpha^2$, et donc que

$$g'(t) - D\alpha^2 g(t) = 0$$

On aurait alors une fonction g qui divergerait en $t \to +\infty$, ce qui est bien sûr absurde.
Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\beta = -\alpha^2$, i.e :

$$\boxed{g'(t) + D\alpha^2 g(t) = 0} \qquad \boxed{f''(z) + \alpha^2 f(z) = 0}$$

D'où :

$$\boxed{g(t) = \exp\left(-D\alpha^2 t\right)}$$

et

$$f(z) = \tilde{A}\cos(\alpha z) + \tilde{B}\sin(\alpha z)$$

Or, on sait que $\frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = 0$ donc $\tilde{B} = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{f(z) = \tilde{A}\cos(\alpha z)}$$

(c) Comme on a une exponentielle décroissante, A représente la température de l'eau au bout d'une longue durée. Comme on a juste négligé la convection, il va de soi qu'après un certain temps, la température dans le liquide soit égale à T_0 :

$$\boxed{A = T_0}$$

(d) En reprenant notre autre condition limite en $z = z^-$:

$$g(t)f'(a) + \frac{h}{\lambda}(f(a)g(t) + A - T_0) = 0$$

i.e

$$\exp(-D\alpha^2 t)f'(a) = -\frac{h}{\lambda}f(a)\exp(-D\alpha^2 t) - \frac{h}{\lambda}(A - T_0)$$

Par unicité des coefficients dans une famille libre [2], il vient :

$$f'(a) = -\frac{h}{\lambda}f(a)$$

i.e

$$\cancel{\tilde{A}}\alpha \sin(\alpha a) = \cancel{\tilde{A}}\frac{h}{\lambda}\cos(\alpha a)$$

D'où :

$$\boxed{\tan(\alpha a) = \frac{h}{\lambda\alpha}}$$

On a alors une famille de solutions pour α : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit alors une famille de solutions pour les températures :

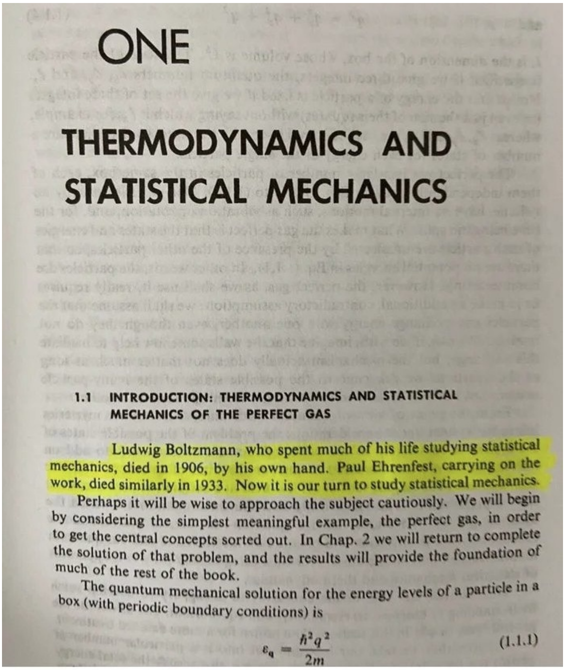
$$T_n(z,t) = T_0 + \tilde{A}_n \cos(\alpha_n z)\exp(-D\alpha_n^2 t)$$

L'équation de la chaleur étant linéaire, toute C.L de solutions est aussi solution.

Finalement,

$$T(z,t) = T_0 + \sum_{n\geq 1} B_n \cos(\alpha_n z)\exp(-D\alpha_n^2 t)$$

2. jolie manière de dire : « par identification »



ONE

THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS

1.1 INTRODUCTION: THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS OF THE PERFECT GAS

Ludwig Boltzmann, who spent much of his life studying statistical mechanics, died in 1906, by his own hand. Paul Ehrenfest, carrying on the work, died similarly in 1933. Now it is our turn to study statistical mechanics.

Perhaps it will be wise to approach the subject cautiously. We will begin by considering the simplest meaningful example, the perfect gas, in order to get the central concepts sorted out. In Chap. 2 we will return to complete the solution of that problem, and the results will provide the foundation of much of the rest of the book.

The quantum mechanical solution for the energy levels of a particle in a box (with periodic boundary conditions) is

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \qquad (1.1.1)$$

The people studying it: