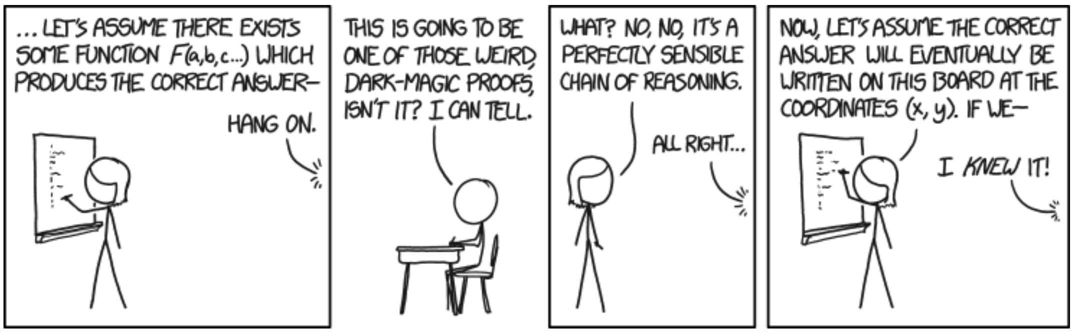
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 3



Olivier Caffier

Colles MPi* Semaine n°3 du 18 au 22/09/2023 (Programme n°1)

Vallaeys Pascal

5 septembre 2024

Thème : Révisions d'algèbre linéaire

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

-

Liste des élèves du groupe B :

-

Liste des élèves du groupe C :

-

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'une projection et décomposition de l'espace associée.(démo)
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.(démo, pas refait en spé)
- Théorème du rang. (démo)
- Si une application linéaire est bijective, sa réciproque est linéaire. (démo, pas refait en spé)
- Si une somme de n sous-espaces est directe, la décomposition d'un vecteur est unique (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base. (démo, pas refait en spé)
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. (démo, dim finie puis quelconque)
- L'image directe et l'image réciproque de sev par une application linéaire sont des sev. (démo, pas refait en spé)
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. (démo)
- Existence et expression du polynôme interpolateur (avec les bonnes hypothèses). (démo)
- Majoration de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (en dimension finie) par la somme des dimensions. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.(démo, pas refait en spé)
- Formule de changement de base pour les matrices (démo, pas refait en spé)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $E = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

(ii) $Ker(f) = Ker(f^2)$

(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

(iv) $Ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(v) $E = Ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

Exercice 2 : (Mines MP 2023) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E.

Montrer que : $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Exercice 3 : (Mines MP 2022)

Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ nilpotent. Montrer que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

Exercice 5 : (CCINP MP 2023)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus Im(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $Im(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = Im(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 6 : (Mines MP 2022)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = \mathrm{O}_n$ si et seulement si A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ où $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Exercice 7 :

a) Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et f(x) soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

b) En déduire les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec tous les autres.

c) Proposer une solution matricielle de la question précédente.

Exercice 8 : (IMT MP 2017)

Montrer par récurrence sur n que tout matrice de $M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad rg(A) < n$. Soit $G = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid ABA = 0\}$.

Montrer que G est un espace vectoriel, puis déterminer sa dimension.

Exercice 10 : (CCINP MP 2022)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \end{cases}$$

Exercice 11 :

Quelles sont les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on ait $Dét(A+M) = Dét(A) + Dét(M)$.

Exercice 12 : (Centrale)

Soient $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Montrer qu'il existe n+1 réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int\limits_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P(x_k)$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 13 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Si on pose $d_n = \dim(Ker(f^{n+1})) - \dim(Ker(f^n))$, montrer que la suite $(d_n)_{n\in\aleph}$ est décroissante.

Exercice 14 : (Mines-Ponts 2019)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que B est de rang 1. Comparer $\det(A+B).\det(A-B)$ et $\det(A^2)$.

Exercice 15 : (Centrale MP)
Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme multiplicative, c'est à dire telle que : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $f(A.B) = f(A).f(B)$. On suppose f non constante.
a) Que vaut $f(I_n)$? $f(0)$?
b) Montrer que deux matrices semblables ont même image par f.
c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A) \neq 0$ si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la notion de matrices équivalentes).
d) Pouvez-vous proposer deux applications f possibles ?
e) Existe-t-il de telles applications qui soient en outre linéaires ?

Exercice 16 : (X MP 2021)
Déterminer les matrices qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes.
(pour occuper les 5 dernières minutes)

Exercice 17 :

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ n réels. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et M la matrice de terme général $w^{(i-1).(j-1)}$.
a) Calculer le produit A.M.
b) En déduire le déterminant de A. (On utilisera un polynôme dont les coefficients sont les a_i)

Exercice 18 : (Centrale MP)

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\Phi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ X \to A^T.X.B \end{matrix}$.

Déterminer le déterminant de Φ.

Exercice 19 : (X 2001 42)
Soient $0 < t_1 < ... < t_n$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$. Montrer que le déterminant de la matrice de terme général $\left(t_i^{\alpha_j}\right)$ est strictement positif.

Exercice 20 : (X)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que A-B soient inversibles et $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$. Montrer que n est un multiple de 6.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 55,60,64,65,87,90.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Révisions d'algèbre linéaire. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°1
- Groupe 5 à 7 : Programme n°1
- Groupe 8 à 10 : Programme n°1
- Groupe 11 à 13 : Pas de colle de math cette semaine

Connaissances de cours et démonstrations exigibles

Groupe A

- Définition d'une projection et décomposition de l'espace associée (démo)

Def. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $p \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que p est une projection $\Leftrightarrow$ $p^2 = p$

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
ALORS

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$$

Démo

$\rightsquigarrow$ Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$, alors $\begin{cases} p(y) = 0 \\ \exists x \in E \text{ tq } y = p(x) \end{cases}$ donc $p(y) = \underbrace{p^2(x)}_{\substack{= p(x) \\ = y}} = 0$

donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$

$\rightsquigarrow$ Soit $x \in E$

ANALYSE Supposons qu'il existe $(x_K, x_{im}) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tq $x = x_K + x_{im}$

Ainsi, $p(x) = p(x_{im}) = x_{im}$ car $x_{im} \in \mathrm{Im}(p)$ et $p^2 = p$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{im} = p(x) \\ x_K = x - p(x) \end{cases}$$

SYNTHÈSE $\rightarrow$ OK

- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire (démo)

Prop. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$$

Démo

$\Rightarrow$: Supposons que u soit injective. En part., comme u est inj. et lin., 0_E ne peut disposer que d'un seul antécédent par u : 0_E

d'où $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$

$\Leftarrow$: Soient $x, y \in E$ tq $u(x) = u(y)$. i.e $u(x-y) = 0$

or $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ $\Rightarrow$ $x = y$

d'où l'injectivité de u.

- Théorème du rang (démo)

Th. Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose E de dim. finie

Alors

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

Démo Soit S un supp. de $\mathrm{Ker}(u)$ tq $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus S$

Ainsi, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(S)$

D'autre part, considérons $u_{|S} : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \\ x \longmapsto u(x) \end{array}$

inj: Soit $x \in \mathrm{Ker}(u_{|S})$, alors $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap S = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{Ker}(u_{|S}) = \{0\}}$

surj: Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$

or $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus S$ $\Rightarrow \exists ! (x_K, x_S) \in \mathrm{Ker}(u) \times S$ tq $x = x_K + x_S$

$\Rightarrow$ ——— $y = u(x_S)$
$= u_{|S}(x_S)$

y admet donc un antécédent par $u_{|S}$.
D'où la surjectivité.

ccl: Il s'agit d'un isomorphisme $\Rightarrow \dim S = \dim(\mathrm{Im}\, u)$

D'où

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \mathrm{rg}(u)$$

- Si une application linéaire est bijective, sa réciproque est linéaire

Prop. Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v et $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$$u \in G\mathcal{L}(E,F) \Rightarrow u^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$$

Démo

- $u(0_E) = 0_F \Rightarrow u^{-1}(0_F) = 0_E$

- Soient $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
  $\underline{\text{Mq } u^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda u^{-1}(x) + \mu u^{-1}(y)}$

  comme u est bij., $\exists \tilde{x}, \tilde{y} \in E$ tq $\begin{cases} u(\tilde{x}) = x \\ u(\tilde{y}) = y \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \tilde{x} = u^{-1}(x) \\ \tilde{y} = u^{-1}(y) \end{cases}$

  Ainsi, $u(\lambda \tilde{x} + \mu \tilde{y}) \underset{u \text{ lin.}}{=} \lambda u(\tilde{x}) + \mu u(\tilde{y})$
  $= \lambda x + \mu y$

  et donc en composant par u^{-1} : $\lambda \tilde{x} + \mu \tilde{y} = u^{-1}(\lambda x + \mu y)$

  i.e $\lambda u^{-1}(x) + \mu u^{-1}(y) = u^{-1}(\lambda x + \mu y)$

d'où la linéarité de u^{-1}

- Si une somme de n sous-espaces est directe, la décomposition d'un vecteur est unique

Prop. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $E_1, \dots, E_n \subset E$ n sous-espaces.

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ alors $\forall x \in E, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \; x = x_1 + \dots + x_n$

Démo Soit $x \in E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Supposons qu'il existe 2 décompositions $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ tq $x = \sum x_i = \sum y_i$

Ainsi, $\sum_{1 \leq i \leq n} \underbrace{x_i - y_i}_{\in E_i} = 0$ et comme la somme est directe, on a $\forall i \in [\![1;n]\!], \; x_i - y_i = 0$
i.e $x_i = y_i$

d'où l'unicité de la décomposition.

Groupe B

- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base

Prop. Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille d'élts de F.
Alors

$$\exists ! \, u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{tq} \quad \forall i \in [\![1;n]\!], \; u(e_i) = f_i$$

Démo Soient u, v 2 application linéaires envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{F}$.
Posons $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \in E$

Ainsi,
$$\begin{aligned} u(x) &= u\Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i\Big) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u(e_i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i f_i \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i v(e_i) \\ &= v\Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i\Big) \\ &= v(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall x \in E, \; u(x) = v(x)$
$\Rightarrow u = v$

d'où l'unicité d'une telle application.

L'existence est immédiate en posant

$$u : x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \longmapsto \sum_{1 \leq i \leq n} x_i f_i$$

⚠ Ne pas oublier de montrer qu'elle est linéaire et qu'elle convient !

- **Le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan (démo en dim. finie, puis cas général)**

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \neq \tilde{0}$

Alors

$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi \text{ est un hyperplan de } E}$$

Démo

→ En dim finie : $\varphi \neq \tilde{0} \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi \neq \{0\}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} \varphi = 1$ car $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$

Th. du rang $\longrightarrow$ $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} \varphi) = n - 1$

donc comme $\operatorname{Ker}(\varphi)$ admet un supp. dans E, il sera de dim. 1.

Ker φ est donc bien un hyperplan.

→ Cas général : $\varphi \neq \tilde{0} \Rightarrow \exists x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$

Posons $\Delta = \operatorname{Vect}(x_0)$.

- Soit $x \in \operatorname{Ker}(\varphi) \cap \Delta$. ainsi $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tq } x = \lambda x_0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi(\lambda x_0) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ car $\varphi(x_0) \neq 0$ par hyp.

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) \cap \Delta = \{0\}$

- Soit $x \in E$

ANALYSE Soient $(x_K, x_\Delta) \in \operatorname{Ker} \varphi \times \Delta$ tq $x = x_K + x_\Delta$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x_\Delta) = \lambda \varphi(x_0)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$$

donc $\begin{cases} x_\Delta = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \\ x_K = x - x_\Delta \end{cases}$

SYNTHÈSE
- $x_\Delta \in \operatorname{Vect}(x_0)$ ✓
- $x_K \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ ✓
- $x = x_K + x_\Delta$ ✓

D'où $E = \operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \Delta$

et Δ est de dim. 1

$\Rightarrow$ Ker(φ) est bien un hyperplan.

L'image directe et l'image réciproque de s.e.v par une application linéaire sont des s.e.v

Prop. Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v et $E_1 \subset E$, $F_1 \subset F$ 2 s.e.v. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

Alors

$$u(E_1) \quad \text{et} \quad u^{-1}(F_1) \quad \text{sont des s.e.v}$$

- $u(E_1) \subset F$ et $u^{-1}(F_1) \subset E$
- $u(0_E) = 0_F$ et $0_E \in E_1$, $0_F \in F_1$ $\Rightarrow$ $u(E_1), u^{-1}(F_1) \neq \emptyset$
- Soient $x, y \in u(E_1)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

  $\Rightarrow \exists \hat{x}, \hat{y} \in E_1$ tq $x = u(\hat{x}) \wedge y = u(\hat{y})$

Ainsi, $\lambda x + \mu y = \lambda u(\hat{x}) + \mu u(\hat{y})$

$= u(\lambda \hat{x} + \mu \hat{y})$ or E_1 est un s.e.v donc $\lambda \hat{x} + \mu \hat{y} \in E_1$

$\Rightarrow$ $\lambda x + \mu y \in u(E_1)$

Soient $x, y \in u^{-1}(F_1)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\exists \hat{x}, \hat{y} \in F_1$ tq $u(x) = \hat{x} \wedge u(y) = \hat{y}$

Ainsi $u(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{x} + \mu \hat{y} \in F_1$ car F_1 est un s.e.v

$\Rightarrow$ $\lambda x + \mu y \in u^{-1}(F_1)$

donc ce sont bien des s.e.v

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Prop. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ une matrice triangulaire par blocs.

Alors

$$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(C)$$

Démo

$\rightsquigarrow$ <u>Si A est inversible</u> : alors on peut écrire M sous la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_q & A^{-1}B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Det}(M) = \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right|}_{(1)} \times \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & A^{-1}B \\ \hline (0) & C \end{array}\right|}_{(2)}$$

(1) En développant par rapport à la dernière ligne (raisonnement par rec), on obtient bien $\mathrm{Det}(A)$ pour tout p

(2) — première colonne — — $\mathrm{Det}(C)$ pour tout q

$\Rightarrow \mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(C)$

$\rightsquigarrow$ <u>Sinon</u> : $\mathrm{Det}(A) = 0$ $\rightsquigarrow$ colonnes de A forment une famille liée

$\Rightarrow$ colonnes de M forment une famille liée

$\Rightarrow \mathrm{Det}(M) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(C)$

Existence et expression du polynôme interpolateur

Prop. Soient $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec les a_i 2 à 2 $\neq$

Alors

$$\exists!\, P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } \forall i \in [\![0;n]\!],\ P(a_i) = b_i$$

Démo

EXISTENCE Posons pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$

Ainsi, $\forall i, k \in [\![0;n]\!]$, $L_i(a_k) = \delta_{k,i}$

$\Rightarrow$ On peut donc construire $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(a_k)$

et $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(a_k) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(a_k)$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i \delta_{k,i}$$

$$= b_k$$

Donc P convient

D'où l'existence d'un tel polynôme.

UNICITÉ Considérons l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ inj : Soit $P \in \ker(\varphi)$, alors $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $P(a_k) = 0$

$\Rightarrow P$ admet $n+1$ racines

or $\deg P \leq n$ car $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$\Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ $\Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$, d'où l'injectivité

$\rightsquigarrow$ bij : φ est linéaire et inj. entre 2 espaces de mm dimension, elle est donc bijectivité.

$\rightarrow$ La bijectivité garantit donc l'unicité d'un tel polynôme

Majoration de la dimension d'une somme de s.e.v (dim. finie) par la somme des dimensions

Prop. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $E_1, \dots, E_p$ p s.e.v de E de dim. finie.

Alors

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

Démo

$p=2$: $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

Grassmann $\rightarrow$ $\leq \dim E_1 + \dim E_2$ $\rightarrow$ OK

$H_p \Rightarrow H_{p+1}$: $\dim(E_1 + \dots + E_p + E_{p+1}) = \dim(E_1 + \dots + E_p) + \dim(E_{p+1}) - \dim((E_1 + \dots + E_p) \cap E_{p+1})$

$\leq \dim(E_1 + \dots + E_p) + \dim(E_{p+1})$

H.R $\rightarrow$ $\leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$

H_{p+1} vraie

Ce qui clôt la récurrence

D'où l'inégalité recherchée.

Exercices de référence

Groupe A

Exo 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $E = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
(ii) $Ker(f) = Ker(f^2)$
(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
(iv) $Ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
(v) $E = Ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

Implications évidentes : 1. $\Rightarrow$ 4.
1. $\Rightarrow$ 5.

1. $\Rightarrow$ 2. : Supposons que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

D'une part, on a toujours $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$

car si $x \in \mathrm{Ker} f$, alors $f(x) = 0$
$\Rightarrow f^2(x) = 0$

donc $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$

D'autre part, soit $x \in \mathrm{Ker} f^2$.

→ si $x \in \mathrm{Ker} f$: $x \in \mathrm{Ker} f^2 \longrightarrow$ OK

→ sinon : $f^2(x) = 0$ mais $f(x) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

$\Rightarrow f(x) = 0$

et donc $x \in \mathrm{Ker} f$
↳ ABS

donc $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow$ d'où le résultat par double inclusion

1. $\Rightarrow$ 3. : Supposons que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

- $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$: $\longrightarrow$ OK
- $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$: Soit $y \in \mathrm{Im} f$

$\Rightarrow \exists x \in E$ tq $y = f(x)$

or $x \in E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ donc $\exists! (\hat{x}, \hat{\hat{x}}) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im} f$

tq $x = \hat{x} + \hat{\hat{x}}$

donc $f(x) = \underbrace{f(\hat{x})}_{=0} + \underbrace{f(\underbrace{\hat{\hat{x}}}_{\in \mathrm{Im} f})}_{\in \mathrm{Im} f^2}$

ainsi $y = f(x) \in \mathrm{Im} f^2 \longrightarrow$ OK

$\Rightarrow$ d'où le résultat par double inclusion

5. $\Rightarrow$ 4. : Supposons que $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$

D'après la formule de Graßmann :

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg} f - \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f)$$

et donc d'après le théorème du rang, on a bien :

$$\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

4. + 5. $\Rightarrow$ 1. : par déf de la supplémentarité

2. $\Rightarrow$ 4. : Supposons que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

Soit $y \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. Alors $\begin{cases} f(y) = 0 \\ \exists x \in E \text{ tq } y = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$
$\Rightarrow f(x) = 0$
$\Rightarrow y = 0$

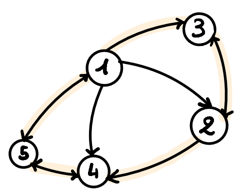
$\Rightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

2. $\Leftrightarrow$ 3. : Th. du rang, égalités des dim + inclusion
$\Rightarrow$ égalité des espaces

4. $\Rightarrow$ 5. : $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f \subset E$

et $\dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f) = \underbrace{\dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f}_{\substack{= \dim E \\ \text{par th. du rang}}} - \underbrace{\dim \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f}_{\substack{= 0 \\ \text{par hyp}}}$

Finalement, on a



on a bien un cycle. D'où les équivalences recherchées

Rmq : oui il y a quelques implications en trop, on va dire que c'était pour le sport !

EXO 2

Exercice 2 : (Mines MP 2023) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E.

Montrer que : $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

D'une part, $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

$$\Rightarrow \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))}_{\geqslant 0}$$

Graßmann

$$\leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

d'où la première inégalité.

D'autre part, en appliquant cette inégalité à $u+v$ et $(-v)$, on a :

$$\mathrm{rg}((u+v) + (-v)) \leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(-v)$$ et $\mathrm{rg}(-v) = \mathrm{rg}(v)$

$$\Rightarrow \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$$

Par symétrie des rôles, on a $\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$ donc on a $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$

d'où la $2^{\text{ème}}$ inégalité recherchée.

EXO 3

Exercice 3 : (Mines MP 2022)

Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}$ l'endomorphisme concerné.

⇝ On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ → "toute matrice peut s'écrire comme la somme ..."

On peut donc alors créer une base adaptée composée de vecteurs de $S_n(\mathbb{K})$ et de $A_n(\mathbb{K})$: $B = (s_1, \dots, s_k, a_{k+1}, \dots, a_{n^2})$

Donc

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(s_1) \cdots & u(s_k) & u(a_{k+1}) & \cdots u(a_{n^2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} s_1 \\ \\ s_k \\ a_{k+1} \\ \\ a_{n^2} \end{array}$$

Ainsi, $\begin{cases} \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_B(u)) = k \times 1 + (n^2 - k) \times (-1) \\ \mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}(\mathrm{Mat}_B(u)) = 1^k \times (-1)^{n^2-k} \end{cases}$

et $\begin{cases} k = \dim(S_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2} \\ n^2 - k = n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{cases}$ donc $\mathrm{Tr}(u) = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2 + n - n^2 + n}{2} = n$

$$\mathrm{Det}(u) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Finalement, $\mathrm{Tr}(u) = n$

$\mathrm{Det}(u) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

EXO 4

Exercice 4 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ nilpotent. Montrer que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

$\to k=0$, trivial

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotent, i.e $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $u^k = \tilde{0}$ $\wedge$ $u^{k-1} \neq \tilde{0}$

$\Rightarrow \exists a \in E\setminus\{0\}$ tq. $u^{k-1}(\vec{a}) \neq 0$

$\Rightarrow \exists a \in E\setminus\{0\}$ tq. $a, u(a), \dots, u^{k-1}(a) \neq 0$

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(a) = 0$

En composant par u^{k-1}, on a $\lambda_0 u^{k-1}(a) + \underbrace{\dots}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$ car $u^{k-1}(a) \neq 0$ par hyp

donc $x = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u^i(a)$, on commence par $u^{k-2} \Rightarrow \lambda_1 = 0$

...

$\Rightarrow \lambda_{k-1} = 0$

$F = (a, u(a), \dots, u^{k-1}(a))$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \mathrm{Card}(F) \leq \dim(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \boxed{k \leq n}$

EXO 5

Exercice 5 : (CCINP MP 2023)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus Im(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $Im(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = Im(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

(1) Soit $x \in E$

Analyse Soient $(x_K, x_{im}) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ tq $x = x_K + x_{im}$

Ainsi,

$$\begin{cases} f(x_K) = x_K \\ \exists\, \tilde{x}_{im} \in E \text{ tq } x_{im} = f(\tilde{x}_{im}) - \tilde{x}_{im} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} x &= x_K + x_{im} && (L_1) \\ f(x) &= x_K + f^2(\tilde{x}_{im}) - f(\tilde{x}_{im}) && (L_2) \\ f^2(x) &= x_K + \tilde{x}_{im} - f^2(\tilde{x}_{im}) && (L_3) \end{aligned}$$

$(L_2) + (L_3)$: $f(x) + f^2(x) = 2x_K + \tilde{x}_{im} - f(\tilde{x}_{im})$
$= 2x_K - x_{im}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{im} = x - x_K \\ f(x) + f^2(x) = 2x_K - x_{im} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{im} = x - x_K \\ f(x) + f^2(x) + x = 3x_K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_K = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \\ x_{im} = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x)) \end{cases}$$

SYNTHÈSE $x = x_K + x_{im}$ ✓

- $x_K \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$:

$f(x_K) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + \underbrace{f^3(x)}_{=x})$

$= x_K$

$\Rightarrow f(x_K) - x_K = 0$

$\Rightarrow x_K \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ ✓

- $x_{im} \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$: ✓

$x_{im} = (f - \mathrm{Id})\left(\frac{f^2(x) - x}{3}\right)$

② C: Soit $y \in Im(f - Id_E)$, alors $\exists x \in E$ tq. $y = f(x) - x$

$f(y) = f^2(x) - f(x)$

$f^2(y) = x - f^2(x)$

$\Rightarrow (f^2 + f + Id)(y) = \cancel{f(x)} \cancel{-x} + \cancel{f^2(x)} \cancel{-f(x)} \cancel{+x} - \cancel{f^2(x)}$

$= 0$

$y \in Ker(f^2 + f + Id)$

D: ? (dim. finie → OK, sinon : ff)

↳ cf. Q3 avec Th. du rang

③ C: Soit $x \in Ker(f - Id)$ alors $f(x) = x \Rightarrow f^2(x) = x$

$\Rightarrow x = (f^2 + f + Id)(\frac{x}{3})$

$\Rightarrow x \in Im(f^2 + f + Id)$

D: Soit $y \in Im(f^2 + f + Id)$ alors $\exists x \in E$ tq $y = (f^2 + f + Id)(x)$

et $f(y) = y$ car $f^3 = Id$

$\Rightarrow y \in Ker(f - Id)$

② D: $\dim Ker(f - Id_E) = rg(f^2 + f + Id)$ ⚠ dim. finie

Th. rang $\Rightarrow$ $\cancel{\dim E} - rg(f - Id_E) = \cancel{\dim E} - \dim(Ker(f^2 + f + Id))$

$\Rightarrow \begin{cases} rg(f - Id_E) = \dim(Ker f^2 + f + Id) \\ Im(f - Id_E) \subset Ker(f^2 + f + Id) \end{cases}$ ⟶ OK

Groupe B

EXO 6

Exercice 6 : (Mines MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = O_n$ si et seulement si A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} O & I_r \\ O & O \end{pmatrix}$ où $r \leqslant \frac{n}{2}$.

$\Leftarrow$: Supposons que A soit semblable à $C = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PCP^{-1}$

et donc $A^2 = PC^2P^{-1}$ avec $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= O_n$

d'où $A^2 = O_n$

$\Rightarrow$: Supposons que $A^2 = O_n$
Soit f l'endomorphisme associé à A. Notons $r = rg(f)$.
Le fait que $f \neq \hat{0}$ et $f^2 = \hat{0}$ nous indique que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f$
Soit $(e_1, \dots, e_r)$ base de $\mathrm{Im}\, f$ complétée en base par les vecteurs $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ de $\mathrm{Ker}\, f$
↳ Choisissons des vecteurs $(e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ tq $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $f(e_{n-r+i}) = e_i$

⇝ Montrons que $\hat{\mathcal{B}} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i = 0$

on applique f

$$\underbrace{\sum_{1 \leq i \leq n-r} \lambda_i \underbrace{f(e_i)}_{=0}}_{=0 \text{ car } \in \mathrm{Ker}\, f} + \sum_{n-r \leq i \leq n} \lambda_i f(e_i) = 0$$

i.e $\lambda_{n-r+1} e_1 + \dots + \lambda_n e_r = 0$

↳ or $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ donc est libre $\Rightarrow$ $\lambda_{n-r+1} = \dots = \lambda_n = 0$

Donc on a $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$
↳ or $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ donc de mm $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$

$\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{B}}$ est une famille libre
et est de cardinal n $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{B}}$ est une base

Ainsi, A est semblable à la matrice $D = \mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}}(f)$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_r) & f(e_{r+1}) & \cdots & f(e_{n-r}) & f(e_{n-r+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} (0) & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_{n-r} \\ e_{n-r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow rg(f) \leq \dim \mathrm{Ker}\, f = n - rgf$

$\Rightarrow rg(f) \leq \frac{n}{2}$

D'où le résultat recherché.

EXO 7

Exercice 7 :

a) Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et f(x) soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

b) En déduire les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec tous les autres.

c) Proposer une solution matricielle de la question précédente.

a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tq $f(x) = \lambda_x . x$

Mq $\exists! \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$

Soient $x, y \in E$

⇝ si x et y sont colinéaires : $\exists \mu \in \mathbb{K}$ tq $y = \mu x$

$$\Rightarrow \quad f(y) = \lambda_y . y \quad \text{et} \quad f(y) = f(\mu x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y \qquad \Rightarrow \quad \lambda_x = \lambda_y$$

⇝ sinon :
$$f(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_x = \lambda_{x+y} \\ \lambda_y = \lambda_{x+y} \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda_x = \lambda_y$$

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endo. commutant avec tous les autres avec $E = \mathbb{R}^n$

Soit $x \in E$, notons p la projection de E sur $\mathrm{Vect}(x)$ parrallèlement à son sup' (qui existe !)

Par def., p et f commutent donc
$$p(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$$

or $p(f(x)) \in \mathrm{Vect}(x)$ i.e $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ ⇒ x et $f(x)$ sont liés

et ceci pour tout $x \in E$. Donc d'après la question précédente : f est une homothétie.

c) On cherche les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$

On a
$$A = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} E_{i,j}$$

On prend $B = E_{k,l}$ avec $k, l \in [\![1;n]\!]$

Ainsi,
$$AB = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} \underbrace{E_{i,j} E_{k,l}}_{= \delta_{j,k} E_{i,l}} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k} E_{i,l}$$

et
$$BA = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} \underbrace{E_{k,l} E_{i,j}}_{\delta_{l,i} E_{k,j}} = \sum_{j=0}^{n} a_{l,j} E_{k,j}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} & a_{1,k} & \\ & \vdots & \\ (0) & a_{k,k} & (0) \\ & \vdots & \\ & a_{n,k} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & (0) & \\ a_{l,1} \; \cdots & a_{l,l} & \cdots \; a_{l,n} \\ & (0) & \end{pmatrix}$$

⇒ $a_{k,k} = a_{l,l}$ et les autres coeffs = 0

et ceci étant valable pour tout $k, l \in [\![1;n]\!]$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{1,1} \end{pmatrix} = a_{1,1} I_n$$

on retrouve bien une homothétie.

EXO 8

Exercice 8 : (IMT MP 2017)

Montrer par récurrence sur n que tout matrice de $M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n la propriété de l'énoncé
- **$n=1$:** la matrice <u>est</u> la matrice nulle $\longrightarrow$ ok
- **$H_n \Rightarrow H_{n+1}$:** Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tq $\mathrm{Tr}(A)=0$. Notons f l'endomorphisme associé à A.
  - Si f est une homothétie : Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda I_{n+1}$

    or, par hyp, $\mathrm{Tr}(A)=0$

    $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda = 0$ i.e $(n+1)\lambda = 0$

    $\Rightarrow \lambda = 0$ d'où la similitude avec O_{n+1}
  - Sinon : alors $\exists x \in E$ tq $(x, f(x))$ soit libre

    Soit donc $\widehat{\mathcal{B}} = (x, e_2, \dots, e_{n+1})$ une base complétée par $(e_2, \dots, e_{n+1})$

    On a alors

$$A \approx \mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(x) & f(e_2) & \cdots & f(e_{n+1}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 1 & & A' \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ e_2 \\ \vdots \\ \\ e_{n+1} \end{matrix} \end{array}$$

Donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}}(f))$

$= \mathrm{Tr}(A')$ or $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc par H.R $\exists G \in GL_n(\mathbb{K}), \exists \hat{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diag. nulle tq $A' = G\hat{A}G^{-1}$

$= 0$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

qui est inversible car $\det P = \det G \times 1 \neq 0$

De plus, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ on vérifie en faisant $PP^{-1} = I_{n+1}$

D'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \hat{A} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ avec $\hat{A}$ de diag. nulle.

$\rightsquigarrow$ ce qui clôt la récurrence.

Exo 9

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $rg(A) < n$. Soit $G = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid ABA = 0\}$.
Montrer que G est un espace vectoriel, puis déterminer sa dimension.

Tout d'abord,

- $0_n \in G \Rightarrow G$ non-vide
- $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Soient $B_1, B_2 \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda B_1 + \mu B_2)A = \lambda \underbrace{AB_1A}_{=0} + \mu \underbrace{AB_2A}_{=0}$

$= 0$

$\Rightarrow \lambda B_1 + \mu B_2 \in G$

G est donc un s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un e.v de référence $\Rightarrow G$ est un espace vectoriel

Ensuite, considérons $a \in \mathcal{L}(E)$ l'endo associé à A, ainsi $\tilde{G} = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid a \circ v \circ a = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$
on transfère le pb.

Pour $v \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$v \in \tilde{G} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v \circ a) \subset \mathrm{Ker}(a)$$

or $\mathrm{Im}(v \circ a) = v(\mathrm{Im}(a))$

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(a)$. D'après le th. de la base incomplète, $\exists (e_{r+1}, \dots, e_n) \in E^{n-r}$ tq

$B_1 = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E.

D'autre part, considérons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(a)$ qu'on peut également compléter avec des vecteurs $f_{p+1}, \dots, f_n$

Donc $B_2 = (f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ est également une base de E.

Ainsi, $v \in \tilde{G} \Leftrightarrow v(\mathrm{Im}(a)) \subset \mathrm{Ker}(a)$

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \; v(e_k) \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$

Enfin,

$$\mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(v) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} v(e_1) \cdots v(e_r) & v(e_{r+1}) \cdots v(e_n) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} (*) & (*) \\ \hline (0) & (*) \end{array}\right) & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_p \\ f_{p+1} \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

Toutes les $(*)$ sont des "degrés de liberté" $\Rightarrow \dim(\tilde{G}) =$ nb de degrés de liberté

$= n^2 - r(n-p)$

$= n^2 - (rg(a))^2$

et $p = \dim \mathrm{Ker}(a) \overset{\text{famous theorem}}{\Rightarrow} n - p = rg(a)$

$= r^2$

et comme on a transféré le pb, on peut dire :

$$\dim G = n^2 - rg(A)^2$$

> 0 car $rg(A) < 0$

Exo 10

Exercice 10 : (CCINP MP 2022)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \end{cases}$$

$\Leftarrow$: Supposons que $\begin{cases} \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\} \\ \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E \end{cases}$

D'après le théorème du rang appliqué à $f+g$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f+g) &= \dim E - \dim(\mathrm{Ker}\, f+g) \\ &= \dim E - \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g) \quad \longleftarrow \text{car } \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\} \\ &= \dim E + \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g - \dim \mathrm{Ker} f - \dim \mathrm{Ker} g \quad \longleftarrow \text{formule de Graßmann} \\ &= 2\dim E - (\underbrace{\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g}_{= 2\dim E - \mathrm{rg} f - \mathrm{rg}(g) \text{ d'après le th. du rang}}) \\ &= \mathrm{rg} f + \mathrm{rg}(g) \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E \longrightarrow$

$\longrightarrow$ OK

$\Rightarrow$: Supposons que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$

- D'une part, $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g)$

$$\text{Graßmann} \longrightarrow \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g)$$

d'où $\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) \leqslant \cancel{\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)} - \cancel{\mathrm{rg}(f+g)}$

$\leqslant 0$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}}$

- D'autre part, $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g \subset \mathrm{Ker}(f+g)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(f+g) &\geqslant \dim \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g \\ &\geqslant \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker}\, g - \dim E \\ &\geqslant \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g - \dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g) \end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g) &\geqslant \underbrace{\dim \mathrm{Ker} f}_{= \dim E - \mathrm{rg}(f)} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker} g}_{= \dim E - \mathrm{rg}(g)} - \underbrace{\dim \mathrm{Ker}(f+g)}_{= \dim E - \mathrm{rg}(f+g)} \\ &\geqslant \dim E - \cancel{\mathrm{rg}(f)} - \cancel{\mathrm{rg}(g)} + \cancel{\mathrm{rg}(f+g)} \\ &\geqslant \dim E \end{aligned}$$

or $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g \subset E$

D'où $\boxed{\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E}$

EXO 11

Quelles sont les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on ait $Dét(A+M) = Dét(A) + Dét(M)$.

⇝ D'une part, A n'est pas inversible car sinon, $Det(2A) = 2^n Det(A)$ par déf. du déterminant

$= 2 Det(A)$ par hyp.

or $n \geq 2 \Rightarrow Det(A) = 0$ ABS

⇝ Supposons $A \neq 0$ Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes et C_i sa colonne non-nulle.

Ainsi, on peut compléter $(E_1, \dots, E_{i-1}, C_i, E_{i+1}, \dots, E_n)$ en une base de $\mathbb{K}^n$

vecteur de $\mathbb{K}^n$ = colonne d'une matrice

Notons la matrice $B = (E_1 - C_1, \dots, E_{i-1} - C_{i-1}, 0, E_{i+1} - C_{i+1}, \dots, E_n - C_n)$

Ainsi $B \notin GL_n(\mathbb{R})$ car possède une colonne nulle et donc $\underbrace{Det(A)}_{=0} + \underbrace{Det(B)}_{=0} = 0$ (1)

D'autre part, les colonnes de $A+B$ forment une base de $\mathbb{K}^n \Rightarrow A+B \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow Det(A+B) \neq 0$

ce qui va à l'encontre de (1)

⇒ Seule la matrice nulle convient.

EXO 12

Exercice 12 : (Centrale)

Soient $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Montrer qu'il existe n+1 réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(x_k)$.

Tout d'abord, $\varphi : P \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est une forme linéaire

Ensuite, pour $i \in [\![0;n]\!]$, posons $\varphi_i : P \mapsto P(x_i)$. Montrons qu'il s'agit d'une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{K})$

Soient $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tq $\underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} \mu_i \varphi_i = \tilde{0}}_{(A)}$. Considérons les $(P_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ avec $P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - x_i)$

$\forall k,j \in [\![0;n]\!]$, $P_k(x_j) = 0$ si $k \neq j$

$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} x_j - x_i$

ainsi, en évaluant (A) en P_j,

on a $\mu_j \underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} x_j - x_i}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \mu_j = 0 \ \forall j \in [\![0;n]\!]$

⇒ les $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ forment une famille libre de cardinal $n+1$

⇒ il s'agit d'une base

DONC, $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i$

i.e $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i(P)$ i.e $\int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(x_i)$

d'où le résultat voulu.


ET DE UN !