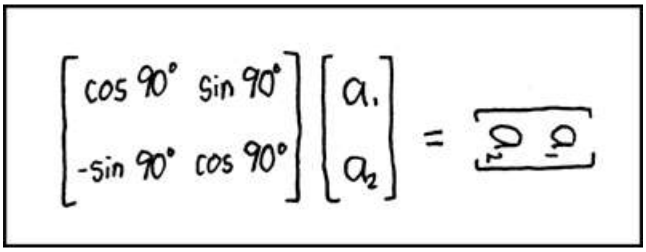
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 5



Olivier Caffier

Colles MPi* Semaine n°5 du 30/09/2024 au 04/10/2024 (Programme n°3)

Vallaeys Pascal

19 septembre 2024

Thème : Début de la réduction, orienté vers le polynôme caractéristique.

Ce thème sera travaillé sur deux semaines. Cette semaine principalement les concepts de base et les résultats concernant le polynôme caractéristique.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Caffier
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- BISKUPSKI
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définitions de matrices semblables, montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

- Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. (démo)
- Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
- Une droite est stable si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre (démo)
- Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. (démo)
- $Card(sp(u)) \leq dim(E)$ (2 justifications dont une avec le polynôme caractéristique)
- Définition du polynôme caractéristique et lien avec les valeurs propres (démo)
- Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre, majoration avec la multiplicité de la valeur propre (démo)
- Exemple de matrice non diagonalisable sur le corps des réels puis sur le corps des complexes (démo)
- Diagonalisation de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 (deux méthodes, démo)
- Lien entre les valeurs propres et la trace et le déterminant dans le cas d'une matrice trigonalisable.(« démo »)
- L'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Le polynôme caractéristique est un polynôme, unitaire, de degré n, dont on connait les coefficients de degré n-1 et 0 (démo)
- Si le sev F est u-stable, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u (démo)
- Théorème fondamental de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique (démo !)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Un endo est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (démo)
- Réduction de la matrice circulante : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ (exemple de fin de cours).
- Une matrice A est nilpotente si et seulement si $Tr(A^k) = 0$ pour tout entier k non nul.

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (CCINP MPi 2023)
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \quad$ si $x > 0$, et $T(f)(0) = f(0)$.
1. Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T ; T est-il injectif ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de T, et donner le sous espace propre associé.
4. Donner le spectre de T et les éléments propres associés.

Exercice 3 : (ENSEA ENSIIE MP 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto \quad (X-1)^2P' - nXP \end{cases}$
1. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n.

Exercice 4 : (CCINP MP 2023)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$.
1. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?

2. Calculer A_2^n et A_1^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : (Mines MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(A)M$.
1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2023)
Soient trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminées par leurs premiers termes $x_0,\ y_0,\ z_0$ et les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n/2 + y_n/4 + z_n/4 \\ y_{n+1} & = & x_n/4 + y_n/2 + z_n/4 \\ z_{n+1} & = & x_n/4 + y_n/4 + z_n/2 \end{array}\right. .$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 : (Mines MP 2023)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de E.

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2023)
1. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(\ AB - I_n\ ) =\ \det(\ BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
On pourra considérer la suite $A_p = A - \frac{1}{p} I_p$.

Exercice 9 : (Centrale MP)
Soit $E = \mathbb{C}^n$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $u \in L(E)$.
a) Montrer que si u laisse tous les plans stables, il est diagonalisable.
b) Déterminer l'ensemble des endomorphismes laissant tous les plans stables (les déterminer tous).
c) Si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u, cela implique-t-il que u est diagonalisable ?
d) La réciproque est-elle vraie ?
e) Répondre aux mêmes questions dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$.

Exercice 10 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
b) Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 11 :
a) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes diagonalisables ?
b) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes non diagonalisables ?

Exercice 12 :
Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que : $\exists q \in \mathbb{N}^* / u^q = Id$. Montrer que $\dim(Ker\,(u - Id)) = \frac{1}{q}\sum\limits_{k=1}^{q} Tr\left(u^k\right)$.

Exercice 13 :

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On note (P) la propriété : u admet n valeurs propres distinctes deux à deux. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Q_k : u admet $\binom{n}{k}$ sous-espaces stables de dimension k.

a) Montrer que $(P) \Leftrightarrow (Q_1)$.

b) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(P) \Rightarrow (Q_k)$.

c) Montrer que $(P) \Leftrightarrow (Q_{n-1})$

Exercice 14 : (ENS MP 2023)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), P = \chi_A, P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ et α_i la multiplicité de λ_i.

Soient les $F_i = \mathrm{Ker} P_i(A)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i F_i$.
2. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de A restreinte à F_i.
3. Montrer que $A = D + N$ avec D matrice diagonalisable et N nilpotente, telles que $DN = ND$.
4. Soit $\phi_A : M \mapsto AM - MA$. Exprimer la décomposition $N + D$ de ϕ_A en fonction de celle de A.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 59, 63 (en admettant qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable), 67, 69, 70, 73, 83, 101.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : réduction. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°3
- Groupe 5 à 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 à 11 : Programme n°2
- Groupe 12 à 14 : Programme n°2

Connaissances de cours et démonstrations exigibles

Groupe A

- **Définition de matrices semblables, montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables**

Def. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

① On dit que A est semblable à B si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^{-1}BP$

② ______ $\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $\exists \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 2 bases de $\mathbb{K}^n$ tq $A = Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$ ^ $B = Mat_{\mathcal{B}_2}(u)$

Enfin, en prenant la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{K}^2$, on voit que $Mat_{(e_1,e_2)}(u) = A \Leftrightarrow \begin{cases} u(e_1) = 0 \\ u(e_2) = e_1 \end{cases}$

Ainsi, en prenant $\hat{\mathcal{B}} = (e_1, 2e_2)$, on a que $B = Mat_{\hat{\mathcal{B}}}(u)$

Le même endomorphisme est donc représenté dans 2 bases différentes par A & B.

Donc A et B sont semblables

- **Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique**

Prop. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq A soit semblable à B. Alors

(1) $rg(A) = rg(B)$
(2) $Tr(A) = Tr(B)$
(3) $Det(A) = Det(B)$
(4) $\chi_A = \chi_B$

Démo

(1) A et B représentent le même endo $u \Rightarrow \begin{cases} rg(A) = rg(u) \\ rg(B) = rg(u) \end{cases} \Rightarrow rg(A) = rg(B)$

(2) De mm, $Tr(A) = Tr(u) = Tr(B)$

ou $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^{-1}BP \Rightarrow Tr(A) = Tr(P^{-1}BP) = Tr(BPP^{-1}) = Tr(B)$

(3) $Det(A) = Det(P^{-1}BP) = \underbrace{Det(P^{-1})}_{= \frac{1}{Det(P)}} \times Det(B) \times Det(P)$
$= Det(B)$

(4) $\chi_A = Det(XI_n - A)$
$= Det(XI_n - P^{-1}BP)$
$= Det(P^{-1}(XI_n - B)P)$
$= Det(XI_n - B)$
$= \chi_B$

Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre

Def. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $u \in \mathcal{L}(E)$

① Pour $x \in E$, on dit que x est un vecteur propre de u si $\begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tq } u(x) = \lambda x \end{cases}$

② Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est valeur propre de u si $\exists x \neq 0$ tq $u(x) = \lambda x$

On note $Sp(u)$ l'ensemble des val. propres de u.

Une droite est stable si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, notons $\Delta = Vect(x)$

$\Rightarrow$: Supposons qu'elle soit stable. Alors $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ donc x est vect. propre.

$\Leftarrow$: Supposons que x soit vecteur propre i.e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$

Alors, pour $y = \mu x \in \Delta$, avec $\mu \in \mathbb{K}$ $\quad u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda x$ donc $u(y) \in \Delta$

D'où la stabilité.

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in Sp(u)$ 2 à 2 $\neq$

Alors $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq n} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)$

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1}(u) \times \dots \times E_{\lambda_p}(u)$ tq $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq p} x_i = 0$

En composant par $(u - \lambda_1 Id)$, il vient : $\displaystyle\sum_{2 \leq i \leq p} (\lambda_i - \lambda_1) x_i = 0$

$\vdots$

$(u - \lambda_{p-1} Id)$: $\displaystyle\underbrace{\prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_p - \lambda_{i})}_{\neq 0} x_p = 0$

$\Rightarrow x_p = 0$

En remontant, on obtient bien $x_p = x_{p-1} = \dots = x_1 = 0$

D'où la somme directe.

$Card(Sp(u)) \leq \dim E$

(1) $Sp(u) = Rac(\chi_u)$ or $\chi_u \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $n = \dim E$

$\Rightarrow \# Rac(\chi_u) \leq n$

$\Rightarrow \# Sp(u) \leq \dim E$

(2) En utilisant la prop précédente, on a que $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\dim(E_{\lambda_i})}_{\geq 1}$

or $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} \subset E$

$\Rightarrow p \leq \dim E$

i.e $\# Sp(u) \leq \dim E$

Définition du polynôme caractéristique et lien avec les valeurs propres

Def. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\chi_u(x)$ par $\chi_u(x) = \mathrm{Det}(X\,\mathrm{Id} - u)$
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\chi_A(x)$ par $\chi_A(x) = \mathrm{Det}(XI_n - A)$

Prop. (mm not)

$$\boxed{\mathrm{Rac}(\chi_u) = Sp(u)}$$

Démo: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \in Sp(u) &\Leftrightarrow \exists x \in E\setminus\{0\} \text{ tq } u(x) = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \quad — \quad (\lambda \mathrm{Id} - u)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad — \quad x \in \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id} - u) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id} - u) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Det}(\lambda \mathrm{Id} - u) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Rac}(\mathrm{Det}(X\mathrm{Id} - u))
\end{aligned}$$

Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre, majoration avec la multiplicité de la valeur propre.

Prop. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda \in Sp(A)$, on a

$$1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda$$

Démo

Posons $p = \dim E_\lambda(A)$. Travaillons avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

Considérons $\tilde{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E_\lambda(A)$ qu'on complète en base avec $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ tq $B = \tilde{B} \sqcup (e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit base de E.

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$$

Ainsi, $\chi_u = \mathrm{Det}(XI_n - \mathrm{Mat}_B(u))$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} X-\lambda & & & \\ & \ddots & & -B \\ & & X-\lambda & \\ \hline & 0 & & XI_{n-p} - C \end{array}\right]$$

$$= (X-\lambda)^p \chi_C$$

$\Rightarrow m_\lambda \geq p$

Enfin, $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow \dim E_\lambda(A) \geq 1$

D'où les 2 inégalités recherchées.

- Exemple de matrice non diagonalisable sur le corps des réels, puis complexes

$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A = X^2 + 1$
$= (X - i)(X + i)$

d'où A non-diag sur $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A = X^2$

$\Rightarrow \quad Sp(A) = \{0\}$ si A était diag, elle serait semblable à la matrice nulle $\Rightarrow A = 0$

ABS

- Diagonalisation de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1

Prenons $M = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$

$\Rightarrow \quad rg(M) = 1$

famous theorem $\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} M = n - 1$ i.e $\boxed{\dim E_0(M) = n - 1}$ (A) $\rightarrow$ $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, $\vdots$, $e_{n-1} - e_n$ conviennent

Enfin,

$M(e_1 + \dots + e_n) = n(e_1 + \dots + e_n) \quad \Rightarrow \quad \dim E_n(M) \geq 1$

(A) $\Rightarrow$ $\boxed{\dim E_n(M) = 1}$ $\hookrightarrow$ $e_1 + \dots + e_n$ convient.

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$ et $M = P \begin{pmatrix} n & & (*) \\ & 0 & \\ (*) & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ $\rightarrow$ OK

SINON,

$M^2 = nM \quad \Rightarrow \quad X^2 - nX$ est annulateur de M

i.e $X(X - n)$ est annulateur de M ainsi $Sp(M) \subset Rac(X(X-n)) = \{0; n\}$

etc...

- Lien entre les valeurs propres et la trace et le déterminant pour une matrice trigonalisable

Prop. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A trigonalisable

Alors $\quad Tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda \times m_\lambda \quad$ et $\quad Det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^{m_\lambda}$

Démo La trace et le déterminant sont invariants par similitude, en considérant une base où A est trigo, les val propres s'alignent sur la diag. On obtient le résultat voulu.

- Le nilindice est inférieur ou égal à la dimension de l'espace

$\hookrightarrow$ cf. exo 4, S3

Groupe B

- **Le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire, de degré n, dont on connaît les coefficients, de degré n-1 et 0**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

on a $$\operatorname{Det}(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \times \prod_{1 \leq i \leq n} (XI_n - A)_{i,\sigma(i)}$$

→ La seule permutation permettant d'obtenir du degré n est l'identité :

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (XI_n - A)_{i,Id(i)} = \prod_{1 \leq i \leq n} (X - A_{i,i})$$

$$\Rightarrow cd(\chi_A) = 1$$

Si $\sigma \neq Id$, 2 elts sont donc échangés ⇒ on aura du degré n-2

DONC le coeff en n-1 s'obtient également avec l'identité : $\sum_{1 \leq i \leq n} X^{n-1}(-A_{i,i}) = X^{n-1}(-Tr(A))$

ENFIN, le terme constant se détermine en évaluant χ_A en 0 : $\chi_A(0) = \det(0 I_n - A)$
$= \det(-A)$
$= (-1)^n \det(A)$

Ainsi,

$$\boxed{\chi_A(X) = X^n - Tr(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \operatorname{Det}(A)}$$

- **Si un s.e.v est u-stable, le polynôme caractéristique de l'endo induit divise celui de u**

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim n, soit $F \subset E$ un s.e.v, Supposons F stable par u

notons $f = \dim F$, alors $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_f)$ base de F complétée par $e_{f+1}, \dots, e_n$ vecteurs

tq $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup (e_{f+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E.

$$\text{Ainsi,} \quad Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} u(\mathcal{B}_F) & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) & \mathcal{B}_F \end{array}$$

u-stable !!

et donc $$\chi_u = \left[\begin{array}{c|c} XI_n - A & -B \\ \hline 0 & XI_n - C \end{array}\right] = \chi_{\tilde{u}} \times \operatorname{Det}(XI_n - C)$$

→ OK

◦ Théorème fondamental de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$$u \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda \end{cases}$$

Démo

$\Rightarrow$: $\exists \mathcal{B}$ une base de E tq

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_u = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \qquad \Rightarrow \chi_u \text{ scindé}$$

On pose alors $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et $(m_{\lambda_i})_i$ les multiplicités associées

On sait que $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq m_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1;p]\!]$

or, par hyp, $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$

$$\Rightarrow n = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = n$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1;p]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}(u)) = m_{\lambda_i} \qquad \to OK$$

$\Leftarrow$: On a $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda = n \quad \text{par propriété de } \chi_u$$

or on sait que $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(p)$ est une somme directe

$$\Rightarrow \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(p)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(p)) = \sum_{i=1}^{p} m_\lambda = n$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$

$\Rightarrow u$ diagonalisable.

Groupe C

- Un endo est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé

Prop. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v tq $\dim E = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$

On a

$$u \text{ trigonalisable} \Leftrightarrow \chi_u \text{ est scindé}$$

Démo

$\Rightarrow$: u trigonalisable $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$ une base de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \chi_u = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)} = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$$

$\Rightarrow \chi_u$ scindé !

$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons χ_u scindé

- si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : " $\dim E = n$, χ_u scindé $\Rightarrow u$ trigonalisable "

- $\underline{n=1}$: immédiat
- $\underline{H_{n-1} \Rightarrow H_n}$

χ_u scindé $\Rightarrow Sp(u) \neq \emptyset$

Dès lors, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x_0) = \lambda x_0$

$x_0 \neq 0 \Rightarrow (x_0)$ est une famille libre

$\Rightarrow \exists e_2, \dots, e_n$ tq $\mathcal{B} = (x_0, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E.

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} u(x_0) & \dots \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline (0) & \tilde{M} \end{array}\right) & \begin{array}{c} x_0 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

et donc

$$\chi_u = (X-\lambda) \times \chi_{\tilde{M}}$$ avec $\chi_{\tilde{M}}$ le pol. de l'endo induit $\tilde{u} = u_{|\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_n)}$

or χ_u scindé $\Rightarrow \chi_{\tilde{M}}$ scindé

$\overset{H.R}{\Rightarrow}$ $\tilde{u}$ trigonalisable ($\tilde{M}$ aussi donc)

$\Rightarrow \exists P \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$, $\exists T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ tq T triang. sup

tq

$$\tilde{M} = PTP^{-1}$$

DONC

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline (0) & PTP^{-1} \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & P \end{array}\right)}_{\tilde{P}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline (0) & T \end{array}\right)}_{\tilde{T}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & P^{-1} \end{array}\right)}_{\tilde{P}^{-1}}$$

$\rightarrow$ $\underline{H_n \text{ vraie}}$

Ce qui clôt la rec.

- **Réduction de la matrice circulaire**

PROP Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & (\dots) & \ddots & (\dots) \\ a_1 & \cdots & & a_0 \end{pmatrix}$

Alors $\mathrm{Det}(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\rho^k)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\rho = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

DEMO L'idée est de diagonaliser A pour ensuite calculer son déterminant.

Tout d'abord, posons $J = \left(\begin{array}{c|c} (0) & \begin{matrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{matrix} \\ \hline 1 & (0) \end{array}\right)$ $\overset{\text{imm.}}{\Longrightarrow}$ $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$ $J^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-k} \\ \hline I_k & 0 \end{array}\right)$

et donc $\boxed{A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k}$

or la famille $(I_n, \dots, J^{n-1})$ est libre (aucun coeff. en commun) $\Rightarrow \forall Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $Q(J) = 0$, $d^\circ Q \geq n$

or $J^n - I_n = 0 \Rightarrow \underbrace{X^n - 1}_{Q(X)}$ est annulateur de J

$$\left.\begin{array}{l} \text{et } \quad Q = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \rho^k) \quad \text{scindé simple, unitaire} \\ \Pi_J \mid Q \Rightarrow \Pi_J \text{ scindé simple} \\ d^\circ \Pi_J \geq n,\ d^\circ Q = n \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi_J = Q = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \rho^k)$$

DONC J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Sp}(J) = \{\rho^k\}_{k \in [\![0;n-1]\!]}$

$\Rightarrow \exists R \in GL_n(\mathbb{K}), \exists \Delta = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \rho & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \rho^{n-1} \end{pmatrix}$, $J = R \Delta R^{-1}$

DONC

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \\ &= R \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k \right) R^{-1} \\ &= R \begin{pmatrix} P(1) & & & (0) \\ & P(\rho) & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & P(\rho^{n-1}) \end{pmatrix} R^{-1} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{d'où } \quad \mathrm{Det}(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\rho^k)}$

- **Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A nilpotente $\Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \ Tr(A^k) = 0$**

$\Rightarrow$: Supposons que A soit nilpotente,

Alors $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ Sp(A) = \{0\} \end{cases} \Rightarrow A$ trigonalisable, i.e $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}}_{:= T} P^{-1}$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $Tr(A^k) = Tr(T^k)$
$= 0$

d'où $\forall k \in [\![1;n]\!], \ Tr(A^k) = 0$

$\Leftarrow$: Supposons que $\forall k \in [\![1;n]\!], \ Tr(A^k) = 0$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow A$ trigonalisable. Ainsi $\exists T$ de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_1 \end{matrix}}^{m_{\lambda_1}} & \overbrace{(*)}^{m_{\lambda_2}} & (*) & \overbrace{(*)}^{m_{\lambda_p}} \\ (0) & \begin{matrix} \lambda_2 & (*) \\ (0) & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & (0) & \ddots & \\ & & (0) & \begin{matrix} \lambda_p & (*) \\ (0) & \lambda_p \end{matrix} \end{pmatrix}$$

avec $Sp(A) = \{\lambda_1; \ldots; \lambda_p\}$

Tq. $\left.\begin{array}{l} Tr(A) = Tr(T) = \sum\limits_{1 \leq i \leq p} m_{\lambda_i} \lambda_i \\ \forall k \in [\![1;n]\!], \ Tr(A^k) = \sum\limits_{1 \leq i \leq p} m_{\lambda_i} \lambda_i^k \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \ \sum\limits_{1 \leq k \leq p} m_{\lambda_i} \lambda_i^k = 0 \qquad (A)$

Notons $F = \left\{ P \in \mathbb{C}_n[X] \mid \sum\limits_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} P(\lambda_i) = 0 \right\} \longrightarrow$ s.e.v de $\mathbb{C}_n[X]$

$(A) \Rightarrow (X^i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F d'où $F = Vect\left((X^i)_i\right)$
$= \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(0) = 0\}$

Notons $P_1(X) = X(X - \lambda_2) \ldots (X - \lambda_p) \in F$

$\Rightarrow \sum\limits_{1 \leq i \leq p} m_{\lambda_i} P_1(\lambda_i) = 0$

$\Rightarrow m_{\lambda_1} \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \ldots (\lambda_1 - \lambda_p) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ car on a supposé les λ_i 2 à 2 $\neq$

De mm, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$

DONC A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte $\Rightarrow$ **$\underline{A \text{ nilpotente}}$**
cf. cours

Exercices de référence

Groupe A

Exercice 1 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

On a

$$\chi_M = \underbrace{\begin{bmatrix} X & & (0) & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & X & -1 \\ -1 & \cdots & & X-1 \end{bmatrix}}_{:= P_n(X)}$$

dvt 1ère colonne

$$= X P_{n-1}(X) + \underbrace{(-1)^{n+1} \times (-1)}_{= (-1)^n} \times \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & -1 \\ X & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & X & 0 \quad -1 \end{bmatrix}_{[n-1]}$$

dvt 1ère ligne

$$= X P_{n-1}(X) + (-1)^n \times (-1)^{\overset{n-1+1}{n}} \times (-1) \times \begin{bmatrix} X & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & X \end{bmatrix}_{[n-2]}$$

i.e.

$$\boxed{P_n(X) = X P_{n-1}(X) - X^{n-2}}$$

$$= X\left(X P_{n-2}(X) - X^{n-3}\right) - X^{n-2}$$

$$= X^2 P_{n-2}(X) - 2X^{n-2}$$

$\dots$

$$= X^{n-1}(X-1) - (n-2)X^{n-2}$$

$$= X^{n-2}\left(X^2 - X - (n-2)\right)$$

$\Delta = 1 + 4(n-2)$

$r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

D'où $\chi_M = X^{n-1}(X - r_1)(X - r_2)$

et $Sp(M) = Rac(\chi_M)$

$\Rightarrow Sp(M) = \{0 \,;\, r_1 \,;\, r_2\}$

Exercice 2 : (CCINP MPi 2023)
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt \quad$ si $x > 0$, et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T ; T est-il injectif ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de T, et donner le sous espace propre associé.
4. Donner le spectre de T et les éléments propres associés.

① • T est linéaire : $\longrightarrow$ OK

• $T(\tilde{0}) = \tilde{0}$: $\longrightarrow$ OK

• $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ i.e mq pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on a $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

comme f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$, $T(f)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (intégrale d'une fonction $\mathcal{C}^0$) $\to$ on peut aussi par un taux d'accroissement

Mq $T(f)$ est $\mathcal{C}^0$ en 0 : i.e $\lim\limits_{x \to 0} T(f)(x) = T(f)(0) = f(0)$

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est $\mathcal{C}^0$ en 0 : $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$

Considérons donc un tel $\eta > 0$, alors $\forall x \in [0;\eta]$, $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ et $f(x) = \frac{x f(x)}{x} = \frac{\int_0^x f(x) dt}{x}$

donc $$\left| \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt - f(0) \right| = \left| \frac{1}{x}\int_0^x f(t) - f(0)\, dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|\, dt$$

or $\forall t \in [0;x]$, $t \leq x \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$

donc $$\left| \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt - f(0) \right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x \varepsilon\, dt = \frac{\varepsilon x}{x} = \varepsilon$$

D'où $\left| \frac{1}{x}\int_0^x f(t) dt - f(0) \right| \leq \varepsilon$

i.e $\lim\limits_{x \to 0} T(f)(x) = f(0)$
$= T(f)(0)$

d'où la continuité

② **LEMME** $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $$T(f)'(x) = \frac{F'(x)x - F(x)}{x^2}$$
$$= \frac{f(x)x - F(x)}{x^2}$$ avec $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Soit $f \in E_0(T)$, alors $T(f) = \tilde{0}$ i.e $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = 0$ et $T(f) = \tilde{0} \overset{\text{fct constante}}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(f)'(x) = 0$

i.e $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x f(x) - \cancel{F(x)}}{x^2} = 0$

i.e $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\frac{F(x)}{x} = 0$

i.e $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = 0$

donc $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f = \tilde{0}$ $\Rightarrow$ $E_0(T) = \emptyset$

0 n'est donc pas valeur propre de T.

Ainsi: $E_0(T) = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(T) = \{\tilde{0}\}$

$\Rightarrow$ T est injective

3 ANALYSE Soit $f \in E$ qui convient, i.e $T(f) = f$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x f(x) = F(x)$ ... $\Rightarrow$ f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc en dérivant cette égalité : $\cancel{f(x)} + x f'(x) = \cancel{f(x)}$

$\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \lambda$

et $T(f) = f$ $\Rightarrow$ $f(0) = \lambda$ $\Rightarrow$ f cte

SYNTHÈSE Soit $f = \tilde{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(f)(0) = f(0)$ ✓

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \lambda \, dt = \lambda = f(x)$

$\longrightarrow$ OK

D'où $E_1(T) = \{\tilde{\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

et donc 1 est bien val. propre.

4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, soit $f \in E_\lambda(T)$, i.e $T(f) = \lambda f$
$f \neq \tilde{0}$

On a $T(f)(0) = f(0)$
$= \lambda f(0)$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda f(x) = \frac{F(x)}{x}$

i.e $\lambda x f(x) = F(x)$ blabla pour dire que f est $\mathcal{C}^\infty$

$\Rightarrow$ $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ $f'(x) + \frac{1}{\lambda x}(\lambda - 1) f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = K e^{\int \frac{1-\lambda}{\lambda t} dt} = K \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln(x)\right) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

Ainsi, $f \in E \Leftrightarrow \lambda \in \,]0;1[$

SYNTHÈSE $\longrightarrow$ OK

D'où $Sp(T) = \,]0;1]$

Exercice 3 : (ENSEA ENSIIE MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto (X-1)^2P' - nXP \end{cases}$

1. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n.

1 → OK

2 ANALYSE Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ qui convient

i.e $\exists P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ tq $\varphi_n(P) = \lambda P$

i.e $(X-1)^2 P' - nXP = \lambda P$

$\Leftrightarrow$ P est sol de $(\mathcal{E})$: $\boxed{(x-1)^2 y' - (nx+\lambda) y = 0}$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\Rightarrow y(x) = K e^{\int \frac{nx+\lambda}{(x-1)^2}}$$

OR, $\dfrac{nx+\lambda}{(x-1)^2} = \dfrac{n}{x-1} + \dfrac{n+\lambda}{(x-1)^2}$

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{nx+\lambda}{(x-1)^2} = n \ln|x-1| - \frac{n+\lambda}{(x-1)} + \text{cte}$

$$\Rightarrow y(x) = |x-1|^n e^{-\frac{n+\lambda}{(x-1)}}$$

or on veut que $y \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\boxed{\lambda = -n}$, i.e $y(x) = |x-1|^n$

$\Rightarrow \boxed{P = (X-1)^n}$

SYNTHÈSE
- $\varphi_n(P) = -nP$ ✓
- $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ✓

$\Rightarrow \boxed{Sp_{\mathbb{R}}(\varphi_n) = \{-n\} \quad \text{et} \quad E_{-n}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(P)}$

EXO 4 → calculatoire, calculer χ_A ...

Exercice 5 : (Mines MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(A)M$.
1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il diagonalisable ?

Supposons $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$

1 $\to$ OK

2 **ANALYSE** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ qui convient

i.e $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $f(M) = \lambda M$

i.e $\mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(A)M = \lambda M$

$\leadsto$ Si $\lambda \neq \mathrm{Tr}(A)$: M est col. à A

$\leadsto$ Sinon : $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$

et $H = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = H \oplus \mathrm{Vect}(A)}$

Ainsi, $\forall M \in H,\ f(M) = \mathrm{Tr}(A)M \Rightarrow \boxed{M \in E_{\mathrm{Tr}(A)}(f)}$

$\forall M \in \mathrm{Vect}(A),\ \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $M = \lambda A \Rightarrow f(M) = 2\mathrm{Tr}(A)M \Rightarrow \boxed{M \in E_{2\mathrm{Tr}(A)}(f)}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = E_{\mathrm{Tr}(A)}(f) \oplus E_{2\mathrm{Tr}(A)}(f)}$ $\Rightarrow$ f diag. !!

Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$

1 $\to$ OK

2 Alors $f : M \longmapsto \mathrm{Tr}(M)A \Rightarrow f^2 : M \longmapsto \mathrm{Tr}(M)\cancel{\mathrm{Tr}(A)}A = 0$

$\Rightarrow X^2$ est annulateur de f

$\Rightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$

et si f était diag, alors $\exists \mathcal{B}$ une base tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0_n$

$\Rightarrow f = \tilde{0}$ ce qui est ABSURDE car $\underline{A \neq 0}$

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2023)
Soient trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminées par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n/2 + y_n/4 + z_n/4 \\ y_{n+1} &= x_n/4 + y_n/2 + z_n/4 \\ z_{n+1} &= x_n/4 + y_n/4 + z_n/2 \end{cases}.$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

En posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{M} X_n$$

Diagonalisons M Celle l'est car $M \in S_n(\mathbb{R})$ (th. spectral))

Ainsi

$$\chi_M(x) = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & x-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & x-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{bmatrix} x-1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ x-1 & x-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ x-1 & -\frac{1}{4} & x-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & x-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} & x-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & x-\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

D'où $\chi_M(x) = (x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$

Ainsi $Sp(M) = \left\{1 ; \frac{1}{4}\right\}$

$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $M = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = P\Delta^n P^{-1} X_0$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

$M \mapsto PMP^{-1}$ est $\mathcal{C}^0$!! (passage à la limite)

Groupe B

Exercice 7 : (Mines MP 2023)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de E.

1

⇝ u est une A.L : OK

⇝ Montrons le caractère "endo" : i.e mq $\forall f \in E$, $u(f)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;1]$

Soit $f \in E$, soit $x \in [0;1]$, on a

$$u(f)(x) = \underbrace{\int_0^x t f(t)\,dt}_{F_1} + \underbrace{\int_x^1 x\, f(t)\,dt}_{F_2}$$

et F_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ car primitive de $x \mapsto x f(x)$

F_2 est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ car produit | de la primitive de $x \mapsto f(x)$
| de $x \mapsto x$

qui sont ttes les 2 $\mathcal{C}^1$

$\Rightarrow$ $u(f)$ est $\mathcal{C}^1$

D'où le caractère endo.

2 **ANALYSE** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ qui convient, i.e $\exists f \in E$ tq $u(f) = \lambda f$

i.e $\forall x \in [0;1]$, $\underbrace{\int_0^x t f(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt}_{\mathcal{C}^1} = \lambda f(x)$

$\overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow}$ f $\mathcal{C}^1$

dérivons cette égalité : $\cancel{x f(x)} + \int_x^1 f(t)\,dt + \cancel{-x f(x)} = \lambda f'(x)$

i.e $\underbrace{\int_x^1 f(t)\,dt}_{\mathcal{C}^1} = \lambda f'(x)$ $\Rightarrow$ f' $\mathcal{C}^1$

Dérivons de nouveau cette égalité :

$-f(x) = \lambda f''(x)$ (2)   D'où f sol de (E) : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$

Si $\lambda > 0$: $y(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$

Si $\lambda < 0$: $y(x) = A' e^{\frac{x}{\sqrt{\lambda}}} + B' e^{-\frac{x}{\sqrt{\lambda}}}$

⇝ ajuster A, B, A', B' pour que $u(f) = \lambda f$ (1) (flemme)

Maintenant, montrons que $0 \notin Sp(u)$ Soit $f \in \operatorname{Ker} u$ i.e $\forall x \in [0;1]$, $u(f)(x) = 0$

(2) $\Rightarrow$ $-f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $f = \hat{0}$ $\Rightarrow$ $0 \notin Sp(u)$

SYNTHÈSE ⟶ OK

D'où $Sp(u) = \mathbb{R}^*$

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2023)
1. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(\ AB - I_n\ ) = \ \det(\ BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
On pourra considérer la suite $A_p = A - \frac{1}{p} I_{\cancel{p}\,n}$

(1) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a

$$\det(AB - I_n) = \det\left(A(BA - A^{-1} I_n A)A^{-1}\right)$$

$$= \cancel{\det(A)} \times \det(BA - I_n \cancel{A^{-1}A}) \times \cancel{\det(A^{-1})}$$

$$= \det(BA - I_n) \longrightarrow \text{OK}$$

(2) Construisons une suite $(B_p)_p \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $B_p \longrightarrow A$

Considérons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$

Ainsi, $\mathrm{Det}(A_p) = \mathrm{Det}(A - \frac{1}{p} I_n)$

$= (-1)^n \,\mathrm{Det}(\frac{1}{p} I_n - A)$

$= (-1)^n \chi_A(\frac{1}{p})$ — or $d^\circ \chi_A = n \Rightarrow \chi_A$ dispose d'un nombre fini de racines $\Rightarrow \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq p_0$, $\chi_A(\frac{1}{p}) \neq 0$

$\neq 0$ pour $p \geq p_0$

Ainsi, définissons $B_p = \begin{cases} I_n & \text{si } p < p_0 \\ A_p & \text{sinon} \end{cases}$

DONC, $\begin{cases} (B_p)_p \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \\ B_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A \end{cases}$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Det}(\underbrace{B_p B - I_n}_{\to AB - I_n}) = \mathrm{Det}(\underbrace{B B_p - I_n}_{\to BA - I_n})$ par $C^{té}$ du produit mat. / de la CL.

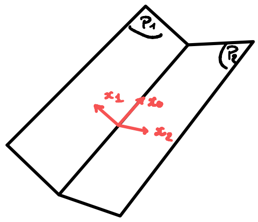
et donc, COMME LE DÉTERMINANT EST C^0 !!

par unicité de la limite, on a : $\boxed{\mathrm{Det}(AB - I_n) = \mathrm{Det}(BA - I_n)}$

Exercice 9 : (Centrale MP)
Soit $E = \mathbb{C}^n$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $u \in L(E)$.
a) Montrer que si u laisse tous les plans stables, il est diagonalisable.
b) Déterminer l'ensemble des endomorphismes laissant tous les plans stables (les déterminer tous).
c) Si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u, cela implique-t-il que u est diagonalisable ?
d) La réciproque est-elle vraie ?
e) Répondre aux mêmes questions dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$.

(A) $\forall x_0 \in E \setminus \{0\}$, on note $\Delta_{x_0} = \text{Vect}(x_0)$

$\exists P_1, P_2$ 2 plans $\neq$ de $\mathbb{C}^n$, $\exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tq $\Delta_{x_0} = P_1 \cap P_2$



$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$ tq (x_0, x_1, x_2) libre $(n \geq 3\,!)$
On pose $P_1 = \text{Vect}(x_0, x_1)$ et $P_2 = \text{Vect}(x_0, x_2)$

Ainsi, par hypothèse, $u(P_1) \subset P_1$ et $u(P_2) \subset P_2$

or $\Delta_{x_0} \subset P_1 \Rightarrow u(\Delta_{x_0}) \subset u(P_1) \subset P_1$
de mm, $u(\Delta_{x_0}) \subset P_2$

donc $u(\Delta_{x_0}) \subset P_1 \cap P_2 = \Delta_{x_0} \Rightarrow \Delta_{x_0}$ stable par u

famous exercise $\Rightarrow \forall x_0 \in E \setminus \{0\}$, x_0 est vect prop de u

$\Rightarrow$ u est une homothétie

$\Rightarrow$ u diagonalisable

(B) $\rightarrow$ les homothéties ?

(C) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall F \subset E$ s.e.v stable par u
$\exists G$ supp. de F dans E $(E = F \oplus G)$ stable par u.

Procédons par récurrence :

- $n = 1$: immédiat

- $H_{n-1} \Rightarrow H_n$: $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \text{Rac}(\chi_u) \neq \emptyset$
$\Rightarrow Sp(\chi_u) \neq \emptyset$

DONC $\exists \lambda \in Sp(u)$, $\exists x_1 \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x_1) = \lambda x_1$
Considérons $\begin{cases} \Delta_{x_1} \text{ qui est stable par } u. \text{ Ainsi, } \exists H_1 \text{ tq } E = \Delta_1 \oplus H_1 \text{ et } H \text{ stable par } u \\ \tilde{u} = u_{|H_1} \text{ l'endo induit.} \end{cases}$

Mq $\tilde{u}$ vérifie l'H.R Soit $G \subset H_1$ un s.e.v stable par $\tilde{u}$ donc par u
Par hyp, $\exists K$ supp de G dans $\mathbb{C}^n$ stable par u

ALORS $K \cap H_1$ est un supp de G dans H_1 stable par $\tilde{u}$ (à prouver)

Ainsi, par H.R, $\tilde{u}$ est diagonalisable $\Rightarrow \exists (x_2, \dots, x_n)$ base de H_1 constituée de vect propre de $\tilde{u}$ donc de u
DONC $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de vect. propres de u

$\Rightarrow$ u diag. !!

D Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ diagonalisable.

Mq $\forall F \subset \mathbb{C}^n$ s.e.v stable par u, $\exists G$ supp. de F ds E stable par u

u diag $\Rightarrow \exists \overline{\mathcal{B}} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E constituées de vect. propres de u

Soit $F \subset \mathbb{C}^n$ un s.e.v stable par u.

Considérons $\hat{u} = u_{|F}$ l'endo induit. Ainsi u diag $\Rightarrow \pi_u$ scindé simple

or $\pi_{\hat{u}} \mid \pi_u \Rightarrow \pi_{\hat{u}}$ scindé simple

$\Rightarrow$ $\hat{u}$ diag

$\Rightarrow \exists \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_k)$ base de F constituée de vect. propre du $\hat{u}$ donc u

Ainsi, $\underbrace{\exists e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_n}}_{:= \tilde{\mathcal{B}}} \in \underbrace{(e_1, \dots, e_n)}_{\overline{\mathcal{B}}}$ tq $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \sqcup \tilde{\mathcal{B}}$ base de E

et donc $G = \mathrm{Vect}(\tilde{\mathcal{B}})$ est | un supp de F dans $\mathbb{C}^n$
| stable par u car constitué de vect propre de u (par def. de $\tilde{\mathcal{B}}$)

$\longrightarrow$ OK

E $E = \mathbb{R}^2$

$u = R_\theta$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z} \Rightarrow$ pas de vect propre

$\Rightarrow$ pas de droite stable

s.e.v de $\mathbb{R}^2$ stable par R_θ : $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ donc R_θ vérifie l'hypothèse

OR R_θ n'est pas diagonalisable

$\longrightarrow$ OK

Exercice 10 : (Mines-Ponts 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

b) Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

A On a $\chi_A = (X-1)(X^2+X+1)$ non scindé sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ u non diag sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\rightsquigarrow$ s.e.v de $\mathbb{R}^3$ stable par u :

s.e.v stable	dim
$\{0\}$	0
$E_1(A)$	1
?	2
$\mathbb{R}^3$	3

Soit donc $P \subset \mathbb{R}^3$ un plan vectoriel de dim 2 stable par u

Considérons $\hat{u} = u_{|P}$ l'endo induit

Alors $\chi_{\hat{u}} / \chi_u$ et $\chi_{\hat{u}} \in \mathbb{R}_2[X]$ est de d°2

$\Rightarrow \chi_{\hat{u}} = X^2 + X + 1$

Donc, d'après le th. de Cayley-Hamilton, $\chi_{\hat{u}}(\hat{u}) = 0$

i.e $\hat{u}^2 + \hat{u} + Id = \hat{0}$

D'où $P \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$

or le lemme de décomposition des noyaux nous permet de dire que $E = \mathrm{Ker}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, u^2 + u + Id) = 2$

D'où $P = \mathrm{Ker}\, u^2 + u + Id$

Finalement :

s.e.v stable	dim
$\{0\}$	0
$E_1(A)$	1
$\mathrm{Ker}(u^2+u+Id)$	2
$\mathbb{R}^3$	3

B A et M commutent $\Leftrightarrow$ les s.e.p de A sont stables par M

plonger dans $\mathbb{C}$? $\rightsquigarrow$ jsp


ON A FAIT 1/5 DE L'ANNÉE
imgflip.com