Équations différentielles

Vallaeys Pascal

4 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 31,32,42,74,75

Méthodes de base :

- Équations différentielles linéaire de première année (ordre un et ordre 2 à coefficients constants)
- Citer et utiliser le théorème de Schwarz.
- Calculer l'exponentielle d'une matrice carrée.
- Résolution de système différentiel linéaire.
- Méthodes pour les équations d'ordre 2.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)

Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x+y-z \\ y' & = & 5x+y-z \\ z' & = & 6x-6y+z \end{array}\right.$.

Exercice 2 : (ENSEA/ENSIIE MP 2023)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2) Calculer $\exp(A)$.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2021)
Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
0. Donner un exemple d'une telle norme.
1. Montrer que la série $\sum_{p\geqslant 0} \frac{A^p}{p!}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.

Exercice 4 : (Mines MP 2021)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie : $\lim_{x\to\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = \ell$. Montrer qu'alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 5 : (Mines MP 2021)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$.
Justifier l'existence d'un réel d tel que $A^3 + dA = 0$.
Déterminer d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.
Montrer que $\exp(A) = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ où α et β sont deux réels à expliciter.

Exercice 6 : (CCINP PC)
a) Sur $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose $\varphi(x) = \frac{x-2}{2x-1}$. Quelles sont les images par φ de $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$?
b) Que vaut $\varphi \circ \varphi$?

c) Montrer que si f est solution de (E) : $f'(x) = f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)$ alors f est de classe C^2.
d) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.
e) Résoudre (E).

Exercice 7 :
1. Montrer que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique réelle est une matrice orthogonale.
2. Montrer que l'exponentielle d'une matrice est un polynôme en cette matrice.

Exercice 8 :
Résoudre $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$. On cherchera d'abord une solution polynomiale, puis une autre « guidée » par la première.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2022)
Soit l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.
1- Chercher les solutions sous forme de somme d'une série entière .
2- Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' - z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$
3- Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' + z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$
4- Faire le raccordement des solutions pour en déduire la solution sur $\mathbf{R}$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Q1 : Justifier correctement la recherche de solutions (Rayon de convergence, dérivabilité)
Partie 2, Q1 : $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{(2n)!}x^n$ est solution.

Exercice 10 : Résoudre l'équation $y" + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}$ sur $\mathbb{R}^*+$

Exercice 11 : Principe d'entrelacement de Sturm
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et p et q deux fonctions continues définies sur I.
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + p.y' + q.y = 0$

1. Montrer que toute solution non nulle de (E) ne possède qu'un nombre fini de zéros sur tout segment inclus dans I.
2. Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de (E). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1, la fonction y_2 s'annule une et une seule fois.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 12 : (Mines-télécom MPi 2023)
Exercice 1
Soit E un espace de dimension finie.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
1. Rappeler la définition de $\exp(\varphi)$ et montrer son existence.
2. On suppose que $\varphi^2 = Id_E$. Exprimer $\exp(\varphi)$.

Exercice 2
Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
1/ La matrice A est-elle diagonalisable ?
2/ Calculer les valeurs propres de A.
3/ On pose l'application

$$W : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto W(t) \end{cases}$$

telle que $W' = AW$. Exprimer W en fonction de t et de d'autres paramètres que l'on précisera.

Exercice 13 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Intégrer l'équation différentielle $t\frac{d\theta}{dt} - (1+t)\theta = \frac{t^2}{\mathrm{ch}(t)}$.

Exercice 14 : (Mines télécom MP 2023)
Donner les fonctions 2π-périodiques qui vérifient $f'(x) = f(x-\pi) + sin(x)$

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2023)
1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A.
3. Calculer A^n.
4. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$

Exercice 16 : (CCINP MP 2023)
Soit $(E) : (1-x^2)y' - xy = f(x)$.
1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]-1,1[$.
2. Soit $h : x \mapsto \sqrt{1-x^2} - \arccos x$. Démontrer que h est dérivable et calculer h'.
3. Résoudre (E) sur $]-1,1[$ pour $f(x) = 1-x$.
4. Montrer que s'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$, alors $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = 0$.
5. Soit $f(x) = ax + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$ si, et seulement si, $b = 0$.

Exercice 17 : (Mines télécom MP 2021)
Déterminer les fonctions $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle : $(t^2+1)x'' - 2x = 0$.

Exercice 18 : (CCINP PSI 2021)
Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$
1/ Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2/ En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que P^{-1}A(t)P soit diagonalisable .
3/ Résoudre le système différentiel.

Exercice 19 : (IMT MP 2019)
a) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions du type $x \to a.\cos(x) + b.\sin(x) + \int\limits_0^x \sin(x-t)\, e^{-\sqrt{t}} dt$.
b) Montrer qu'une seule de ces solutions admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 20 :
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \sin(t)$
2. $\left(1+t^2\right) y' - t.y = t$
3. $\left(1-t^2\right) y' + t.y = 0$
4. $y'' + 2y' + y = t.e^t$
5. $y'' + y = t^2 + 1$
6. $xy' - 3y = 0$
7. $y'.sh(x) - y.ch(x) + 1 = 0$
8. $y'.\sin(x) + y.\cos(x) = \sin^2 x$

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 21 : (Mines télécom MP 2023)
Soit A une matrice symétrique définie positive de taille n.
On se donne une solution non nulle $X : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$.
N désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.
1) Donner la forme générale des solutions.
2) Montrer que pour tout $r > 0$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $N(X(t)) = r$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : On utilise notamment la caractérisation spectrale pour le côté défini positif, la relation $N(PX) = N(X)$ pour P orthogonale

Exercice 22 : (Mines MP 2023)
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + te^t \\ y' = 2x + y + e^t \end{cases}$$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Après être passé en système matriciel, diagonaliser la matrice. Résoudre le système résultant.

Exercice 23 : (Mines MP 2022)
Soit n, un entier naturel. On note E_n l'ensemble des applications f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$$

.

1) Montrer que E_n est un espace vectoriel.
2) Donner la dimension de E_n.
3) (Donnée à l'oral) Donner une base de E_n.

Exercice 24 : (Mines MP 2021)
Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
1- Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme D défini sur E par
$\forall f \in E \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad D(f)(x) = f'(x) + xf(x)$.
2- Utiliser le résultat précédent afin de résoudre les équations différentielles suivantes :
$y'' + 2xy' + (x^2 - 3)y = 0$;
$y'' + 2xy' + (x^2 + 5)y = 0$;
$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$.

Exercice 25 : (Mines-Ponts 2019)
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = |\cos x|$. Existe-t-il des solutions positives ? bornées ? bornées positives ?

Exercice 26 : (Mines-Ponts 2017)
Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $Ker(N)$ et $Ker\left(e^N - I_n\right)$.

Exercice 27 : (Mines MP 2018)
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
a) On suppose que $A^3 = A^2$. Calculer $\exp(A)$.
b) On suppose que $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$. Calculer $\exp(A)$.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 28 : (X MP 2022)
Soit λ un réel.
1) Résoudre l'équation différentielle : $y' = \dfrac{\lambda}{1-t} + \dfrac{1+2t}{1-t}y$.
2) Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\exp(-2t)}{(1-t)^3}$.
Justifier que la fonction f est développable en série entière et donner un équivalent des coefficients de ce développement.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1) L'examinateur n'a pas souhaité que je développe la fin de la méthode de variation de la constante.
2) On peut commencer par regarder $\dfrac{\exp(-2t)}{1-t}$

Exercice 29 : (Mines MP 2022)
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]a,b[$ $(a < b)$ telle que :

- $\lim\limits_{b^-} f = -\infty$
- $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$
- $\forall x \in]a,b[, (f(x))^2 + f'(x) \geqslant -1$.

1. Montrer que $b-a \geqslant \pi$.
2. Donner un exemple de fonction f telle que $b-a=\pi$.

Exercice 30 : (Mines-Ponts 2019)
On considère l'équation différentielle (E) : $y''-y=|\cos x|$. Existe-t-il des solutions positives ? bornées ? bornées positives ?

Exercice 31 : (Mines-Ponts 2019)
Soit u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et f une solution de l'équation différentielle $y''+(1+u)\,y=0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x)=f(x)+\int\limits_0^x \sin(x-t)\,u(t)\,f(t)\,dt$.
a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par g.
b) Montrer qu'il existe $c>0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leq c+\int\limits_0^x |u(t)\,f(t)|\,dt$.
c) Montrer que f est bornée.

Exercice 32 : (Mines-Ponts 2019)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $[A,B]=AB-BA$, et on suppose que A et B commutent avec $[A,B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t)=e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$.
a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kB-BA^k=kA^{k-1}[A,B]$.
b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
c) Montrer que $e^{A+B}=e^Ae^Be^{-\frac{[A,B]}{2}}$.

Exercice 33 : (X MP*)
a) Résoudre l'équation différentielle : $x.f'(x)+\lambda.f(x)=\frac{1}{x+1}$.
b) Trouver les solutions qui ont une limite finie en 0.
c) Trouver les solutions développables en série entière.
d) Déterminer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$.

Exercice 34 : (Centrale MP 2017)
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
a) On suppose A diagonalisable. Montrer que e^A est diagonalisable.
b) On suppose qu'il existe D diagonale et N nilpotent commutant tels que $A=D+N$. Montrer alors que si e^A est diagonalisable, alors e^N l'est également. En déduire que N=0.
c) Prouver l'existence de D et N.
d) Prouver l'unicité.

Exercice 35 : (X PC 2013)
Déterminer les fonctions f telles que $f^{(n)}=f$ et $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $f^{(k)} \neq f$.

Exercice 36 : (X(2) 103)
Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ et ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(f)(x)=\int\limits_0^1 \min(x,t)\,f(t)\,dt$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ. (X(2) 103)