Topologie des espaces vectoriels normés

Vallaeys Pascal

16 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 34,35,36,37,38,41,44,45

Méthodes de base :

- Justifier qu'un ensemble est ouvert ou fermé (diverses caractérisations)
- Montrer la continuité d'une application linéaire.
- Montrer qu'un ensemble est compact.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (BECEAS MP 2023)
1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que cette propriété n'est pas vérifiée si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ et si $n \geqslant 2$.

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2023)
On pose $E = \mathcal{C}^{\circ}([0;1])$ que l'on muni de $\| .\|_\infty$.
On pose $\forall f \in E,\ u(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t)\ \ f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $|||u|||$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)
1. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E.
Montrer que K est fermé et borné.
On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, muni de la norme $||.||_2$, définie par $||f||_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$.
2. On admet dans un premier temps que $||.||_2$ est une norme sur E.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto e^{inx}$.
a) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $||f_n - f_p||_2 = 2\sqrt{\pi}$.
b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

3. a) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité : $|uv| \leqslant \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}$. En déduire que pour toutes fonctions f et g de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$.

b) Soit $(f, g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction : $h : \lambda \mapsto \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$, démontrer que : $\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant ||f||_2||g||_2$.

c) En déduire que $||.||_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

Commentaires divers :

L'examinateur ne donne pas d'indications et me demande de lui présenter ce que j'ai préparé et de sauter les questions non traitées. Il me demande systématiquement d'énoncer les théorèmes utilisés.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2022)
1) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$?
2) Rappeler la définition d'un connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
3) On considère S la sphère unité de $\mathbb{R}^2$; montrer que S est une partie connexe par arcs (*faire un schéma*).
4) Montrer que l'image de S par une application continue f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un segment.

Exercice 5 : (Mines télécom MP)

Soit E un espace vectoriel normé, F un fermé de E, G un compact de E.
Montrer que $F+G$ est un fermé de E.

Exercice 6 : (Mines Télécom MP 2021)
On pose $E=\mathbb{C}[X]$.
On munit E de la norme définie par $\|P\|=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(|a_k|)$, où P est de la forme $P=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_kX^k$.
On pose $f:\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(b)\end{array}\right.$ avec b un complexe fixé.
1. Montrer que f est linéaire.
2. Étudier la continuité de f et déterminer sa norme induite.

Exercice 7 : (Centrale MP 2021)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On pose $N_\infty(u)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ et $N(u)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{|u_n|}{2^n}$ pour tout $u\in E$.
1) Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?
2) Soit Z l'ensemble des suites nulles à partit d'un certain rang. Montrer que $\mathring{Z}=\emptyset$. Que vaut $\overline{Z}$?

Exercice 8 : On suppose que A est une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé E.
a) Montrer que $\overline{A}$ est connexe par arcs.
b) L'intérieure de A est-elle connexe par arcs ?

Exercice 9 :
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.
a) Comparer l'adhérence de l'union des $(A_i)_{i\in I}$ à l'union de leurs adhérences.
b) Procéder de même avec l'intérieur.
c) Que dire pour les frontières ?

Exercice 10 :
a) Montrer que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, un sous-espace F possède des points intérieurs si et seulement si il est égal à E tout entier.
b) Montrer que, en dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels sont fermés.
c) Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 11 : (TPE MP)
Soient A,B deux matrices complexes d'ordre n. Montrer que $Dét\,(AB-\lambda I_n)=Dét\,(BA-\lambda I_n)$. (On pourra commencer par le montrer dans le cas où A est inversible puis montrer que $GL_n\,(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n\,(\mathbb{R})$).

Exercice 12 :
Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\Delta_n\,(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $M_n\,(\mathbb{C})$.

Exercice 13 :
a) Montrer que la distance entre deux compacts non vides existe et est atteinte.
b) Montrer de même que le diamètre d'un compact non vide est atteint.

Exercice 14 :
On pose $E=M_n\,(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe un réel a, tel que : $\forall M,N\in E$, $\|M.N\|_\infty\leq a.\|M\|_\infty.\|N\|_\infty$.
b) En déduire que pour tout norme $\|.\|$ sur E, in existe un réel b tel que : $\forall M,N\in E$, $\|M.N\|\leq b.\|M\|.\|N\|$.
c) Montrer l'existence de l'exponentielle d'une matrice.

Exercice 15 : (Mines-Ponts 2017)
a) Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ de classe C^1 telle que $\|f'\|_\infty<1$. Montrer que f possède un unique point fixe.
b) Soit C un compact non vide d'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ et $f:C\to C$ vérifiant pour tous $x\neq y$, $\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe.
c) Soit C un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ et $f:C\to C$ vérifiant pour tous x,y, $\|f(x)-f(y)\|\leq\|x-y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 16 : (CCINP MP)

On note B l'espace vectoriel des applications réelles d'une variable réelle continues et bornées. Pour toute fonction f de B, on note $\varphi(f)(x) = e^x \int\limits_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme continu de B.

b) Déterminer sa norme induite.

Exercice 17 : Soit A une partie d'un espace vectoriel normé.

a) Montrer que $Vect\left(\overline{A}\right) \subset \overline{Vect\,(A)}$.

b) Donner un cas où l'inclusion est stricte.

Exercice 18 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue. On suppose que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

a) Montrer que l'image directe de tout fermé de E par f est un fermé de F.

b) Donner un exemple d'application continue ne vérifiant pas l'hypothèse proposée.

c) On note $\Gamma_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X]$ / P est unitaire et toutes ses racines sont réelles$\}$. Montrer que cet ensemble est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 19 : (Mines MP 2023)

Montrer que l'ensemble des suites bornées est un fermé de ℓ^∞.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : L'examinateur m'a rappelé la définition de ℓ^∞, ainsi que la définition de la norme infinie pour les suites.

Exercice 20 : (Mines MP 2023)

Soient $(E, \|\ \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E. On dit qu'un point $a \in E$ est un point d'accumulation de A si l'intersection entre A et n'importe quel voisinage de a contient un autre point que a. On considère désormais A une partie de E qui admet un unique point d'accumulation noté a. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \{x \in A \mid \frac{1}{n} \leqslant \| x - a \| \leqslant n\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est fini.
2. Montrer que, si on pose $A' = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, alors $A \cup \{a\} = A' \cup \{a\}$.
3. Montrer que A est dénombrable.

Exercice 21 : (Centrale MP 2023)

Soit $p \geqslant 2$. Pour $u = (u_1, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$, on pose $P_u = X^p - u_1 X^{p-1} + u_2 X^{p-2} + ... + (-1)^p u_p$.

On note Δ l'ensemble des u tels que P_u soit scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

1. a) Donner la caractérisation séquentielle des fermés. Définition d'un compact ?

b) Soit $u \in \mathbb{R}^p$, montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_u, alors $|z| \leqslant \max(1, \sum\limits_{k=1}^{p} |u_k|)$.

c) En déduire que Δ est fermé.

Il y avait 2 autres questions.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour 1b), essayer de majorer $|z|^p$.

Exercice 22 : (Mines MP 2022)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et N la norme sur E définie par :

$\forall f \in E \ , \quad N(f) = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

1. Vérifie que N est une norme.

2. N est-elle équivalente à N_1 ?

3. Soit $\phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f^2 \end{array}$. ϕ est-elle continue pour la norme N_1 ?

Exercice 23 : (Centrale MP 2021)

On note $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée.

On dit qu'une suite (x_n) vérifie le critère (C) si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \varepsilon$.

1) On note a et b deux éléments de E, $B'(a,r)$ la boule fermée de rayon $r > 0$ et de centre a, et $B'(b,R)$ la boule fermée de centre b et rayon $R > 0$. Montrer que : $d(a,b) \leqslant R - r \Leftrightarrow B'(a,r) \subset B'(b,R)$. Qu'en est-il pour les boules ouvertes ?

2) On choisit pour espace $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Montrer que toute suite vérifiant le critère (C) converge. Réciproque ?

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Il m'a été conseillé de considérer le point $c = a - r\frac{b-a}{\|b-a\|}$.

Exercice 24 : (Mines-Ponts 2019)

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a) Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexe.

b) Soit D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Exercice 25 : (Mines-Ponts 2019)

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$. En déterminer les composantes connexes par arcs.

Exercice 26 : (Mines-Ponts 2019)

Soient (A_k) et (B_k) deux suites d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B.

a) On suppose que pour tout indice k, A_k et B_k sont semblables. En va-t-il de même pour A et B ?

b) Que dire si on suppose maintenant A_k et B_k orthogonalement semblables ?

Exercice 27 :

Démontrer le résultat sur les sommes de Riemann à l'aide du théorème de Heine.

Exercice 28 : (Mines MP 2018)

Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte non vide de E.

a) Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides inclus dans K. Montrer que $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \varnothing$.

b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers $g : K \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 29 : (Mines télécom MP 2023)

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = [a_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$; soit $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \ldots, \frac{e_n}{t^n}\right)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sim}(N) = \{PMP^{-1};\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que N est nilpotente si, et seulement si, 0 est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$.

Exercice 30 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(I_n + A)$.
3. Montrer que $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $M \in C(A) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(A + M)$.
5. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de cette preuve que le résultat de la question précédente reste vrai si on a seulement $M \in C(A)$.
6. Que permettent de dire les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ par rapport à l'exercice ?

Exercice 31 : (Mines MP 2023)

On fixe $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose :

$$T_\omega(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T_\omega(f)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit $a > 0$. Montrer que T_ω est un endomorphisme continu et injectif de $\mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non nulle, telle que : $T_\omega(f) = \lambda f$.

Donner une équation différentielle vérifiée par f et la résoudre.

4. Montrer que $\lambda \in]0, 1]$.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 32 : (Centrale MP 2023)
Soient (E, N), (E', N') des espaces vectoriels normés.
Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\|\cdot\|$ l'application sur $\mathbb{R}_d[X]$ définie par : $\left\| \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \right\| = \max_{k \in [|0,d|]} |a_k|$
1. Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. a) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que $Y = \{\ell\} \cup \{y_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E'.
b) Soit $f : E \to E'$ continue telle que pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ soit un compact de E. Montrer alors que pour tout fermé F de E, $f(F)$ est un fermé de E'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ unitaire, x une racine réelle de P telle que $|x| \leqslant 1$. Montrer que $|x| \leqslant \|P\| + 1$. En déduire que $\{P \in \mathbb{R}_d[X] \mid$ toute racine réelle de P vérifie $|x| \leqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
L'examinateur ne m'a pas fourni d'indications particulères pendant cette épreuve.
Commentaires divers :
L'examinateur ne m'a pas donné beaucoup d'indications, mais il a pû me faire plusieurs remarques pendant l'oral :
Lorsque je traitais le bien-fondé de l'application $\|\cdot\|$, il n'était pas satisfait de mon choix $\|\cdot\| : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}$ car il s'attendait à $\|\cdot\| : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_+$ pour garantir que l'application soit une norme. Il a cependant accepté ma justification après lui avoir prouvé que les 3 axiomes de norme garantissait sa positivité. La question 2. a) était à admettre dans un premier temps et pouvait être démontrée en fin d'épreuve si il restait le temps nécessaire.
Le dernier ensemble explicité en question 3 peut-être erroné au niveau de la condition sur les racines réelles de P.

Exercice 33 : (Mines MP 2023)
Soit p un entier naturel non nul et a, b des réels tels que $a < b$
On note $Z_p = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([a,b]\,, \mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{card}\{x \in [a,b]\,, f(x) = 0\} \quad \geqslant p \right\}$.
Déterminer l'adhérence de Z_p pour la norme infinie.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Montrer que c'est égal à Z_1
Dans un sens : poser une fonction bien trouvée
Dans l'autre sens : montrer que Z_1 est fermé
Commentaires divers :
Examinateur très gentil mais peu bavard.
(Bon courage pour vos concours)

Exercice 34 : (Centrale MP 2022)
Soit X un compact non vide d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ et $f : X \to X$.
On suppose $\forall (x, y) \in X^2 \quad ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$.
1. Montrer que f est continue et injective.
On suppose désormais $\forall (x, y) \in X^2 \quad ||f(x) - f(y)|| \geq ||x - y||$.
Soit $a \in X$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
2.a. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers a.
b. Montrer $\forall (a, b) \in X^2 \quad ||f(a) - f(b)|| = ||a - b||$.

Exercice 35 : (Mines MP 2022)
Soit E un K-espace vectoriel, A une partie de E et f une fonction continue de $[0, 1]$ dans E telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$. Montrer qu'il existe un élément qui appartient à la fois à la frontière de A et à $f([0, 1])$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Utiliser la fonction D : $x \mapsto d(x, A)$

Exercice 36 : (Centrale MP 2021)
Soit $n \geqslant 2$. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on munit E d'une norme $\|\cdot\|$. On note $S = \{M \in E \text{ tq } \|M\| = 1\}$.
Montrer qu'il existe $U \in S$ telle que $\det U = \max_{X\in S}(\det X)$, puis montrer que U est inversible.Pour tout $A \in E$, on note $N(A) = \max_{M\in S}(\mathrm{Tr}(AM))$. Montrer que N est une norme sur E. Que peut-on dire de $N(U^{-1})$?
Calculer $N(U^{-1})$ dans le cas $n = 2$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
2. Il faut simplement minorer $N(U^{-1})$.

Exercice 37 :

Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension finie, et $u \in L(E)$. Montrer que $Ker(u) = Ker(u^2)$ si et seulement si il existe c>0 tel que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq c.\left\|u^2(x)\right\|$.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 38 : (X MP 2023)
$\mathcal{F} = [0,1]^{[0,1]}$; $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$; $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F} \mid \forall a \in \mathbf{R}, \{y \in [0,1] \mid f(y) \leqslant a\}$ est fermé $\}$;
$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{F} \mid \forall a \in \mathbf{R}, \{y \in [0,1] \mid f(y) \geqslant a\}$ est fermé $\}$.
1. Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{I} \cap \mathcal{S}$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$L_n(f)(x) = \inf\big(\{1\} \cup \{f(y) + n|x-y|; y \in [0,1]\}\big)$$

Montrer que $(L_n(f))$ est une suite croissante de fonctions continues.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve
Pour montrer que L_n est continue, on pourra montrer qu'elle est lipschitzienne.
Pour montrer qu'une borne inférieure de fonctions k-lipschitziennes est elle-même k-lipschitzienne, on peut d'abord traiter le cas de deux fonctions.
Commentaires divers :
Pour montrer que le minimum de deux fonctions k-lipschitziennes est k-lipschitzienne, un dessin a été apprécié par l'examinateur.

Exercice 39 : (ENS MP 2023)
Montrer que]0,1[n'est pas réunion disjointes de fermés d'intérieur non vide.
Commentaires divers : Examinateur très silencieux

Exercice 40 : (Mines MP 2021)
1) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang inférieur ou égal à r (avec $0 \leq r \leq n$) est un fermé.
2) Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang exactement r.

Exercice 41 : (ENS MP 2021)
Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ de borne inférieure a et de borne supérieure b, on note $l(I) = b - a$ la longueur de l'intervalle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $d(x) = d(x, N)$ la distance de x à N, où N est l'entier le plus proche de x.
Soit $X \subset \mathbb{R}$. On dit que X vérifie la propriété (m_0) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles de longueur non nuls tels que $X \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} l(I_n) < \varepsilon$
Vérifier que $\mathbb{Q}$ vérifie (m_0)
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ converge.
Pour $\alpha > 0$, notons $F(\alpha) = \{n \in \mathbb{N} \mid d(\alpha n) < f(n)\}$.
Soit $E = \{\alpha > 0 \mid |F(\alpha)| = +\infty\}$
Montrer que E vérifie (m_0)
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Mettre en rapport ε et la convergence de la série des $f(n)$.
Réécrire $\alpha \in E$ avec des inégalités.
Faire une analogie avec la première question.
Isoler α dans l'inégalité trouvée.
(Pour tout $n \in F(\alpha)$, on avait noté k_n l'entier le plus proche de $n\alpha$) Quelle heuristique peut-on avoir sur k_n quand n devient grand ?
Plus précisément, trouver une inégalité entre k_n et n à un δ près à partir d'un certain rang.
Commentaires divers :
Il était attendu qu'on utilise explicitement la densité de $\mathbb{Q}$ dans la première question.

Exercice 42 : (ENS MP 2021)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
1) Montrer que E admet une partie dénombrable dense dans E
2) Soit A une partie de E, montrer qu'il existe une partie de A dénombrable dense dans A.

3) Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de A. Montrer qu'on peut en extraire un recouvrement dénombrable.

4) On ne suppose plus E de dimension finie. On suppose cependant que E vérifie la propriété suivante : pour toute partie A de E, pour tout recouvrement de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement dénombrable. Montrer que E admet une partie dénombrable dense dans E

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Considérer pour $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{B}(x_n, \frac{1}{k}) \cap A$. Si cet ensemble est non vide on choisit un $x_n^{(k)} \in \mathcal{B}(x_n, \frac{1}{k}) \cap A$. Montrer que l'ensemble des $x_n^{(k)}$ est dense dans A

3) On considère $\mathcal{B} = \left\{\mathcal{B}(x_n, r) \,|\, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}_+^* \text{ et } \exists i \in I \,|\, \mathcal{B}(x_n, r) \subset \Omega_i\right\}$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense dans A. Montrer que $\mathcal{B}$ est un recouvrement de A

Exercice 43 : (Mines-Ponts 2019)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On pose $S(f) = \left\{g \circ f \circ g^{-1}; g \in GL(E)\right\}$. Montrer que $S(f)$ est fermé dans E si et seulement si f est diagonalisable.

Exercice 44 : (X 2007 80)

Soit E un espace euclidien et K un compact non vide. Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant K.

Exercice 45 :

On munit $\mathbb{C}[X]$ de $\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k.X^k\right\| = Max\,|a_k|$. Soit d un entier naturel.

a) Existe-t-il $K_1 \in \mathbb{R}+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X]$, $\|P.Q\| \leq K_1 \|P\| . \|Q\|$?

b) Existe-t-il $K_2 \in \mathbb{R}+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\|P.Q\| \leq K_2 \|P\| . \|Q\|$?

c) Existe-t-il $K_3 \in \mathbb{R}+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X]$, $\|P\| . \|Q\| \leq K_3 \|P.Q\|$?

d) Existe-t-il $K_3 \in \mathbb{R}+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| . \|Q\| \leq K_4 \|P.Q\|$?