Intégration

Vallaeys Pascal

14 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 19,25,26,28,49

Méthodes standard des exercices :

- Montrer qu'une fonction est intégrable ou qu'une intégrale converge/
- Rédiger et justifier un changement de variable.
- Rédiger et justifier une intégration par parties.
- Utiliser le théorème de convergence dominée.
- Utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
a) Montrer que $\underset{x\to+\infty}{Lim} \int\limits_{x}^{x+1} f(t)\,dt = 0$.
b) Montrer que si de plus f est décroissante, $\underset{x\to+\infty}{Lim}\, xf(x) = 0$.

Exercice 2 :
Après avoir justifié la convergence des intégrales, montrer que quand n tend vers $+\infty$, on a $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^n}dx \sim \frac{1}{n}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2023)
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \longmapsto \dfrac{(x\ln x)^n}{n!}$.
1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme.
2. Montrer que $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer cette intégrale.
3. Montrer que $\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t$ converge et exprimer cette intégrale sous la forme d'une série.

Exercice 4 : (CCINP MP 2023)
On définit pour $n \geqslant 1$, $f_n : t \longmapsto \dfrac{t^{n-1}\ln(t)}{n}$ sur $I = [0, 1]$ avec la convention $f_n(0) = 0$.
1. Déterminer $\|f_n\|_{\infty,I}$.
2. On pose $g : t \longmapsto \dfrac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}$ sur $J =]0, 1[$.
a) Montrer que g est intégrable sur J.
Indication : on pourra rappeler la valeur de $\lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{\ln(t)}{t-1}$.
b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2023)
Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que ces deux intégrales sont bien définies, et que $I = J$.

2. Deux autres questions non traitées.

Exercice 6 : (Mines MP 2023)
1. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable sur son intervalle de définition montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)x = 0$
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7 : (CCINP MP 2023)
1. Soit $M > 0$ et $u : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall x \in [1, +\infty[,\ |u(x)| \leqslant M$. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{u'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ convergent.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ converge.
Commentaires divers : Examinateur discret mais sympathique, ne m'a ni interrompu ni questionné durant toute ma présentation.

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2023)
1. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.
2. Soit $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Vérifier que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$.
3. Soit $a > 1$ et (u_n) une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1+a}{2}$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_{n+1} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} u_n$. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \leqslant C v_n$ à partir d'un certain rang.
4. Étudier rapidement le cas $a < 1$.
5. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de I_n.
6. Montrer la relation de récurrence $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$. Que peut-on en déduire sur la suite (I_n) ?

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)
Existence et valeur de :
$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $\alpha \in\,]-1;1[$; pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n}\cos nx$. Soit $W : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$
1) Montrer que W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; exprimer W' à l'aide des fonctions usuelles.
2) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2)\mathrm{d}x$.

Exercice 11 : (Mines télécom MP 2023)
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

Exercice 12 : (CCINP MP 2023)
1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, puis démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}dt = 0$
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

Exercice 13 : (Mines MP 2022)
Domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14 : (Mines télécom MP 2022)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Très peu : Dès que j'ai proposé quelquechose afin de montrer que A était un corps il a soufflé et dit :"On va passer à l'exercice suivant..." (D'une manière qui signifiait que j'étais trop mauvais pour arriver au bout de l'exercice),

pour le deuxième exercice il se contentait de répondre : "Mais on ne te demande pas de la calculer l'intégrale..." à chaque méthode que je proposait pour résoudre l'exercice (tout en critiquant mon choix de méthode).

Commentaires divers :

Je ne sais pas si c'était volontaire de sa part mais l'examinateur m'a parru très peu sympatique et j'avais l'impression qu'il me prenait un peu pour un débile avec ses commmentaires du type :

"Oui, faire le produit avec l'inverse ça s'appelle faire un quotient", "Tu vois bien qu'une IPP ça nous apporte rien ici !" ou encore "Ah parceque tu sais obtenir la série entière d'un quotient ? Je suis curieux, montre-moi !".

Au final, plutôt que d'essayer de m'indiquer la méthode à adopter pour le deuxième exercice il a préféré passer à des calculs d'intégrales plus basiques, qui devaient correspondre à l'idée qu'il s'était faite de mon niveau en maths.

Exercice 15 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1) Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$

avec P_n polynôme réel dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

2) Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{m,n} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t)P_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $I_{m,n}$, sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Exercice 16 : (CCINP MP 2022)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifiez l'existence de ces intégrales

2) Montrer que I_n est constante.

3) Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$

4) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

5) En déduire la valeur d'une intégrale célèbre. (ajouté)

Exercice 17 : (Mines MP 2021)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18 : (Mines télécom MP 2021)

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 19 : (Mines MP 2021)

1) Montrer que E l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est une espace vectoriel normé (la norme ici est la racine de l'intégrale du carré sur $\mathbb{R}_+$

2)Soit $f \in E, f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f'' \in E$ Montrer que $f' \in E$ et que $\|f'\|^2 \leqslant \|f\| . \|f''\|$

Exercice 20 : (Mines MP 2021)

On note $L^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2$ existe.

1) Montrer que $L^2(\mathbb{R}_+)$ est un espace vectoriel.

2) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f, f' et f'' soient dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que f et f' ont des limites finies en $+\infty$ et les déterminer.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f''(t)^2 - 4f'(t)^2 + 16f(t)^2)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

4) Étudier le cas d'égalité.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

2) Quels liens existent entre intégrabilité et limite ? Il me dit que la continuité de ff' est inutile pour affirmer $|ff'| \to l \implies ff' \to l$ puisque j'ai montré auparavant que $|ff'| \to l \implies l = 0$. Il en profite pour me demander la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$.

3) Peut-être, en effet, que l'intégrande est positif, mais il faut le démontrer. Faire une transformation de l'intégrande pour faire apparaître un carré.

Commentaires divers :

Examinateur de mauvaise humeur et très captieux. Son respect est difficile à gagner, mais il n'est pas totalement impitoyable et je ne me laisse pas démonter. Son vocabulaire est beaucoup plus proche de la sup que de la spé. Il semble attendre des automatismes que je ne connais pas.

Mon attitude ne serait pas celle qu'on attend à un oral (il faut tout écrire, sinon c'est considéré comme du "monologue" que l'examinateur n'est pas tenu d'écouter), il me le fait remarquer au milieu.

Comme je n'écris pas tout et qu'il n'écoute pas, il m'accuse presque de dire que les fonctions intégrables sont de limite nulle en $+\infty$, je lui fais rapidement un dessin de contre-exemple, il me demande un peu plus de détail sur la construction. Je demande confirmation de la définition d'une sous-algèbre (en la donnant juste), il me dit que c'est bien au programme en MP et me rappelle au passage que les sous-algèbres sont unitaires.

Exercice 21 : (Mines PSI 2021)

1) Soit $a, b > 0$. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(t) = \mathrm{e}^{-(n+1)t}\left(1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$ pour $t > 0$.

Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f$ où f est la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 22 :

On pose $I = \int\limits_0^{\pi} x.\ln(\sin(x))\,dx$, $J = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x).\ln(\sin(x))\,dx$ et $K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$.

a) Montrer que I, J et K convergent.

b) Exprimer I+J en fonction de K.

c) Montrer que $\frac{2I}{\pi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx$.

d) En déduire I.

Exercice 23 :

On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ et $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$.

a) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

b) Montrer que I=0.

c) En déduire J.

Exercice 24 :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$.

a) Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.

c) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout réel x appartenant à $[0, \sqrt{n}]$, on a $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

e) En déduire que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 25 : (ENS MP 2021)

1) On pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{\pi} x^n(\pi - x)^n \sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg P_n = n$ et $I_n = P_n(\pi)$.

2) Montrer que : $0 < I_n \leqslant \dfrac{\pi^{2n+1}}{n!}$.
3) En déduire que π est irrationnel.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1) Il m'a conseillé de poser $\forall x, f(x) = x^n(\pi - x)^n$ et d'étudier $J_k = \frac{1}{n!}\int_0^\pi f^{(k)}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 26 : (Mines télécom MP 2023)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^{2\alpha} + x^2}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.
1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que
$\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
5. Question non traitée par l'étudiant. Une question possible : chercher la limite de S en $+\infty$.

Exercice 27 : (Mines télécom MP 2023)
Soit f continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$.
1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ g_n(t) = f(t^n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 28 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
1. Montrer que I_n existe.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 29 : (Mines télécom MP 2023)
Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$ puis calculer sa valeur.

Exercice 30 : (Mines télécom MP 2023)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{n+x}}\mathrm{d}x$.
1. Justifier que l'intégrale généralisée I_n est convergente.
2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(n^\alpha I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
4. Préciser la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n I_n$.

Exercice 31 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n(1 - \sqrt{x})$.
a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 32 : (CCINP PC 2013)
Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 33 : (Mines télécom MP 2023)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$. En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1-t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\ I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t,\ J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

2. Justifier l'existence de ces intégrales et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_n = W_{2n-2}$.
4. Déterminer une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
5. En déduire que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ et en déduire la valeur de I.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 34 : (Centrale MP 2023)

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$.
3. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 35 : (Mines MP 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer un équivalent de u_n quand $\alpha = 0$.
2. Si $\alpha \in]1,+\infty[$, déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Si $\alpha = 1$, déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis un équivalent de u_n.
4. En déduire le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 36 : (Mines MP 2023)

Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}$

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\deg(P)+2 \leqslant \deg(Q)$ et toutes les racines de Q sont complexes non réelles et distincte.

2. Exprimer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$ en fonction des racines de Q.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2n}}$

Exercice 37 : (Centrale MP 2022)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$.
2. Déterminer un équivalent de a_n à l'infini et déterminer la nature de la série $\sum a_n$.
3. En calculer la somme.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Avec une intégration par parties, obtenir une relation de récurence, puis montrer que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers 1.

Exercice 38 : (Mines MP 2022)

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}) | f(0) = f(1) = 0\}$.

1) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
2) Soit $f \in E$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)f'(t)}{\tan(\pi t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{f(t)^2}{\sin^2(\pi t)}\mathrm{d}t$.
3) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t \geqslant \pi^2 \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t$. Qu'en est-il du cas d'égalité ?

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Après avoir proposé plusieurs idées pour la dernière question (premier exercice), on m'a proposé de considérer la fonction $g : t \mapsto \frac{\pi}{\tan \pi t} f(t) - f'(t)$.

Exercice 39 : (Centrale MP 2021)
On considère $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x$.
1. Montrer l'existence de c.
2. Montrer $c < 0$. (autres questions que je n'ai pas eu le temps de faire)

Exercice 40 :
On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(4x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx$. Justifier la convergence de I, et calculer cette intégrale.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 41 : (ENS MP 2022)
Soit f une fonction continue sur $]0,1]$, à valeurs réelles, continue et décroissante.
Pour tout $x \in]0,1]$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t) \, \mathrm{d}t$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
1) Montrer que $I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leqslant r_n \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2) Condition pour que (r_n) converge.
Question bonus : Étudier la convergence de (r_n) pour $f : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln x$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la question 2), l'examinatrice attendait une hypothèse plus faible que 'se prolonge par continuité en 0' qu'elle m'a tout de même laissé traiter.
Pour la question bonus, l'examinatrice m'a arrêté lorsque j'ai commencé à utiliser Stirling, il s'agissait de retrouver l'équivalent à partir de cet exemple de fonction.

Exercice 42 : (ENS MP 2022)
On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ continue et 1-périodique. On suppose que f est intégrable sur $]0,1[$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\theta)^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}t = 0.$$

On commencera par donner un sens à cette intégrale.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pas grand chose.
Commentaires divers :
Il s'agissait de l'oral spécifique à l'ENS Ulm, aussi est-il normal de ne pas résoudre l'exercice d'une traite/tout seul.
L'examinateur ne m'aidait pas vraiment, c'est aussi ce qui est arrivé à mes camarades pour cette épreuve. Il disait parfois que j'allais dans une bonne direction mais ne me donnait pas de nouvelle idée pour mener à bien ma piste, et je n'ai pas beaucoup avancé.
J'ai finalement eu une bonne note (15/20), donc cela montre qu'il est difficile de s'évaluer sur un oral de ce type. Mon conseil est de dire absolument tout qui nous semble intéressant et qui pourrait donner quelque chose, même si c'est très vague : quand les examinateurs font le choix de ne pas nous aider sur un exercice très difficile (ce qui semblait être un choix général), toute bonne remarque est valorisée.

Exercice 43 : (ENS MP 2021)
1) Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n^\alpha$ converge si, et seulement si, $\alpha \geqslant 1$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable. Existe-t-il $\alpha \neq 1$ tel que f^α soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$?
3) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable.

Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ et telle que $f \circ \varphi$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Commentaires divers :
L'examinateur n'exigeait pas beaucoup de rigueur. Il m'a laissé répondre à la question 2 avec un dessin.

Exercice 44 : (ENS MP 2021)
Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, continues par morceaux et intégrables, avec $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P = 1$.
On suppose aussi que $\ln(f)P$ est intégrable.
1. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \ln(f)P \leq \ln\left(\int_{\mathbb{R}} fP\right)$.
On pose $P_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
2. Vérifier que P_0 satisfait les mêmes conditions que P. Pour $c > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on va définir $\delta_c(y) = \displaystyle\int_{I_c(y)} P_0(x)\,\mathrm{d}x$, avec $I_c(y) = \mathbb{R}\backslash[-c+y, c+y]$.
3. Déterminer $\delta_c(y)$ explicitement, montrer que la fonction δ_c admet un minimum sur $\mathbb{R}$, déterminer ce minimum ainsi que la ou les valeurs en laquelle ou lesquelles il est atteint.
4. On suppose $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fP_0 = 1$. Montrer que pour tout réel y : $\exp\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \ln(f)P_0\right) \leq 2\left(\displaystyle\int_{I_c(y)} fP_0\right)^{\min(\delta_c)}$.
5. On ne suppose plus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fP_0 = 1$.
Montrer que $\exp\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \ln(f)P_0\right) \leq 2\left(\displaystyle\int_{I_c(y)} fP_0\right)^{\min(\delta_c)}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fP_0\right)^{1-\min(\delta_c)}$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1. Se ramener au cas où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fP = 1$ puis, dans le cas général, poser $g = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} gP = 1$.
4. Séparer l'intégrale de $\ln(f)P_0$ en deux avec la relation de Chasles. Pour le premier terme, poser un Q_0 d'intégrale 1 tel que $\displaystyle\int_{I_c(y)} \ln(f)P_0 = \int_{\mathbb{R}} \ln(f)Q_0$. Faire de même pour le second terme. Ensuite, c'est du calcul et on finit par devoir étudier $x \mapsto \dfrac{1}{x^x(1-x)^{1-x}}$.
5. Comme pour la question 1, poser g qui vérifie les conditions de la questions précédente.

Exercice 45 :
a) Montrer que $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = 4.\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(8k+1)(8k+5)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$.
b) Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 46 : (X 2007 134)
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.

Exercice 47 :
On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} x.e^{-x^6.\sin^2 x}dx$ et $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} x.e^{-x^6.\sin^2 x}dx$.
a) Montrer que pour tout réel t de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin^2 t \geq \frac{4.t^2}{\pi^2}$.
b) En déduire la convergence de la série de terme général u_n.
c) En déduire la convergence de I.