Colles MPi* Semaine n°9 du 4/11/2024 au 8/11/2024 (Programme n°5)

Vallaeys Pascal

28 octobre 2024

Thème : Fonctions à valeurs vectorielles et surtout révisions de sup des fonctions numériques.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites. (démo non refaite en spé)
- Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse. (démo)
- Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordres supérieurs. (démo)

- Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe C^1 . (démo)
- Somme de Riemann et théorème associé. (proposer un exemple)
- Révisions de sup : Th de Rolle (démo), égalité et inégalité des accroissements finis (démo).
- Formules de Taylor (Young + reste intégral) (démo de la formule avec reste intégral).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle. (démo)
- Dérivée de L(f) où L est une application linéaire continue (démo)
- Dérivée de B(f,g) où B est une application bilinéaire continue. (démo)
- Continuité de la fonction "distance à une partie A". (démo)
- Inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique pour des réels positifs. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann. (démo)
- Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $O(\frac{1}{n})$. (avec la bonne hypothèse, démo non faite)
- Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $O(\frac{1}{n^2})$. (avec la bonne hypothèse, démo non faite)
- Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral. (démo du cours de sup)
- Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
- Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes. (démo de sup)
- Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes. (démo de sup)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Montrer chacune des inégalités suivantes sur l'intervalle demandé :
a) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ sur $\mathbb{R}^*+$
b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :
a) On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
b) Procéder de même avec $u_n = \frac{1}{n}.\left[\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n})\right]$, puis $u_n = \frac{1}{n.\sqrt{n}}.\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2023)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. On suppose P non constant et on note a une racine de P dans $\mathbb{C}$.
1. Montrer que $a = 0$ ou $|a| = 1$.
2. Montrer que $a = 1$ ou $|a-1| = 1$.
3. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la propriété énoncée plus haut.

Exercice 4 : (CCINP MP 2022)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :
1) Énoncer le théorème de Rolle.
2) Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?
3) Montrer le résultat voulu.

Exercice 5 :
a) Calculer le coefficient de x^n dans la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $f : x \to x^n(1-x)^n$.
b) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
c) Démontrer le même résultat à l'aide d'un dénombrement.

Exercice 6 :
On pose $T_n(x) = \cos(n.Arc\cos(x))$.

1. Montrer que T_n est un polynôme.

2. Trouver une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.
3. Déterminer les extrema de T_n.

Exercice 7 :
Soient $a_1, ..., a_n$ et $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs.
a) Montrer que $\sqrt[n]{a_1...a_n} \leq \frac{a_1+...+a_n}{n}$.
b) Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3}.... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 8 : Soit f la fonction $x \to \left(x^2-1\right)^n$. Montrer que $f^{(n)}$ admet n zéros distincts deux à deux, entre -1 et 1.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $\cos x = nx$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette équation a une et une seule solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la monotonie et la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre trois en $1/n$ de x_n.
4. La série $\sum \ln(\cos x_n)$ converge-t-elle ?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \sim \frac{c}{n!}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 10 : (Mines MP 2023)
Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$? il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = x^{-3n}P_n(x)f(x)$ pour tout $x \neq 0$ et donner le degré de P_n.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a toutes ses racines réelles.

Exercice 11 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \in]0,1[$.
1) Montrer que f admet un unique point fixe.
2) Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Exercice 12 : (Mines MP 2022)
Quels sont les polynômes complexes P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ (en notant $\mathbb{U}$ le cercle unité) ?

Exercice 13 : (ENS MP : juste pour la dernière question)
On pose $T_n(x) = \cos(n.Arc\cos(x))$.

1. Montrer que T_n est un polynôme.
2. Trouver une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.
3. Déterminer les extrema de T_n.
4. Montrer que pour tout polynôme P de même degré et de même coefficient dominant que T_n, on a $\|P\| \geq \|T_n\|$.

Exercice 14 :
On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}.\sin\frac{k}{n^2}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.\sin\frac{k}{n}$.
a) Montrer que pour tout réel x, on a $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
b) En déduire que $\underset{n\to+\infty}{Lim} |u_n - v_n| = 0$.
c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\aleph}$.

Exercice 15 :
On considère la fonction $f : x \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de f est de la forme $\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+0,5}}$ où P_n est un polynôme de degré n.
3. Montrer que $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P'_n(X) - (2n+1)XP_n(X)$.
4. Montrer que $P_{n+1}(X) + (2n+1)X.P_n(X) + n^2(1+X^2)P_{n-1}(X) = 0$.
5. Montrer que $P'_n(X) = -n^2 P_{n-1}(X)$.
6. Calculer $P_n(0)$ pour tout entier n.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 16 : (Centrale MP 2021)

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\,|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17 : (Mines-Ponts 2019)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$.
b) Préciser le degré et les racines de P_n. Etudier la somme des racines.
c) Montrer que $\forall\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2\theta} \le \frac{1}{\theta^2} \le 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$.
d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 18 : (Mines-Ponts 2019) Soient a et b deux réels tels que a<b, et E l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in E$, on note $\varphi(f) = \int\limits_a^b f \times \int\limits_a^b \frac{1}{f}$. Déterminer $\varphi(E)$.

Exercice 19 : (Mines PC)

On suppose que le graph de f admet deux centres de symétrie. Montrer que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Exercice 20 : (Classique écrits X-ENS)

Montrer qu'une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique, est uniformément continue.

Exercice 21 :

Soit f une fonction de classe C^3 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f - \frac{1}{2n}\int\limits_0^1 f' + \frac{1}{12n^2}\int\limits_0^1 f'' + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

En déduire un développement limité à l'ordre 3 de $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Exercice 22 : On note $E = \left\{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 0\right\}$. Déterminer $\underset{f\in E}{Inf}\int\limits_0^1 |f - f'|$. (On posera $g(x) = f(x)e^{-x}$) (X 2006 142)

Exercice 23 :

Soient u et v deux nombres strictement positifs. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. n désigne un entier strictement positif.

a) Montrer que $uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

b) Montrer que si $(a_i)_{1\le i\le n}$ et $(b_i)_{1\le i\le n}$ sont deux familles de nombres strictement positifs, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i.b_i \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

d) En déduire que $\|X\| = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

e) Montrer que si f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$ on a $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 3,4,84,85,89.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Fonction vectorielles et numériques (surtout). Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°5
- Groupe 5 à 7 : Programme n°5
- Groupe 8 à 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 à 14 : Programme n°4