TD Électromagnétisme

Électrostatique 1

1 Action d'un fil sur une charge ponctuelle

On considère un fil rectiligne, de longueur supposé infinie, et porteur d'une densité linéique de charges $\lambda > 0$. Une charge électrique ponctuelle $q > 0$ se trouve initialement à une distance r_0 du fil, sans vitesse.

1. Calculez le champ électrostatique rayonné par le fil.
2. Déduisez-en la vitesse de la charge ponctuelle quand elle se trouve à une distance r du fil.

2 Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson

J.J. Thomson, qui a découvert l'électron en 1897, avait proposé une conception de l'atome. Bien qu'il se soit révélé faux, son modèle est instructif et met en jeu des raisonnements qui rentrent dans le cadre du programme.

Dans l'atome d'hydrogène, Thomson a supposé que la charge positive était uniformément répartie en volume, tandis que la charge négative était assimilable à une particule ponctuelle chargée se déplaçant dans ce volume.

La charge positive totale est notée e, la charge de l'électron $-e$. La sphère délimitant l'atome est de centre O et de rayon r_0. L'électron est de masse m_e et repéré par le point M (figure 1).

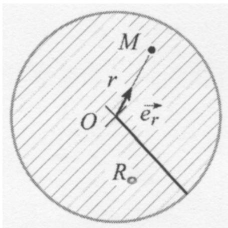


FIG. 1 : Modèle atomique de Thomson.

1. Étude du champ de l'ion H^+.
   (a) Calculez ρ, la densité volumique de charge associée à la charge positive.
   (b) Étudiez les symétries et invariances du champ électrique rayonné en tout point.
   (c) Calculez le champ électrique rayonné par l'ion en tout point M de l'espace, en fonction de e, r_0, $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, ε_0 et $\overrightarrow{OM}$. Vous distinguerez les cas $r < r_0$ et $r > r_0$, avec r la distance de M au centre O. Commentaire ? Tracez l'allure de sa norme $E(r)$.
2. Étude du mouvement de l'électron.
   Son poids est négligé, il n'est donc soumis qu'à l'attraction électrostatique de la charge positive. Vous supposerez qu'il n'y a pas ionisation : r reste inférieur à r_0.
   (a) Démontrez que l'équation du mouvement peut s'écrire :

   $$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2\overrightarrow{OM}$$

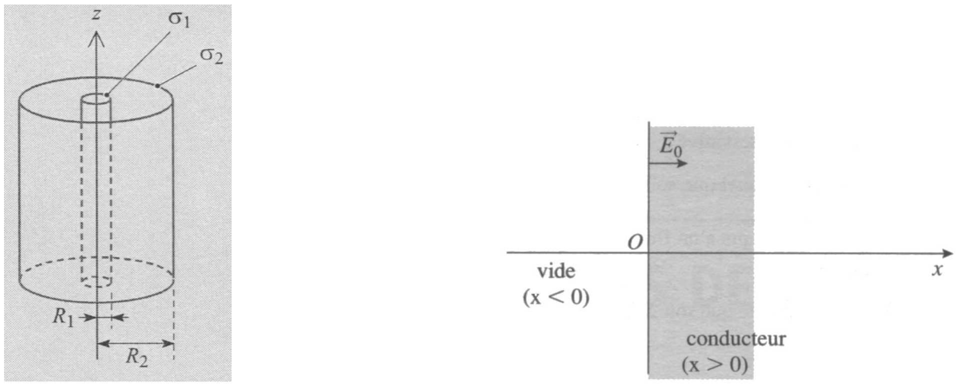
   Exprimez la fréquence propre de cet oscillateur harmonique en fonction de e, r_0, ε_0 et m_e.
   (b) La plus petite fréquence observée à l'époque de Thomson dans le spectre de l'hydrogène était $f_{\min} = 460\,\text{THz}$. Déduisez-en une valeur numérique d'un majorant de r_0. C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau. Commentez.

3 Condensateur cylindrique

Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques séparées par un isolant, de sorte que les armatures portent toujours des charges électriques opposées mais qu'aucun courant ne circule de l'une à l'autre.

On se propose d'étudier le rayonnement électrostatique d'un condensateur cylindrique, tel que représenté figure 2a. Sa longueur L sera supposée grande devant les rayons R_1 et R_2.

1. Question préliminaire : calculez le champ électrostatique rayonné dans tout l'espace par un cylindre uniformément chargé en surface, de rayon R, de longueur $L \gg R$ et de densité surfacique de charge σ.
2. Revenons au condensateur cylindrique. On rappelle que les armatures d'un condensateur portent à tout instant des charges opposées.
   (a) Soit $\sigma_1 > 0$ la densité surfacique de charge de l'armature de R_1, et $\sigma_2 < 0$ celle de l'armature de rayon R_2. Exprimez σ_2, en fonction de R_1, R_2 et σ_1.
   (b) Calculez le champ électrostatique rayonné dans tout l'espace par ce condensateur. Commentez.



(a) **(b)**

FIG. 2 : a) Condensateur cylindrique. b) Conducteur en régime stationnaire.

4 Plan épais chargé

Soit une distribution de charge uniforme en volume égale à ρ entre les deux plans $x = -a$ et $x = a$, nulle ailleurs.

1. Calculez le champ rayonné par cette distribution en tout point de l'espace.
2. Réduisez l'épaisseur de la distribution tout en maintenant sa charge constante : $a \to 0$ avec $\rho a = \text{cst}$. Que retrouvez-vous ?

5 Conducteur en régime stationnaire, charge surfacique

Considérons un conducteur dont le champ électrique satisfait, en régime permanent, l'équation :

$$\Delta\vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0} \tag{1}$$

sachant que le laplacien d'un vecteur est, en cartésiennes, défini par : $\Delta\vec{E} = (\Delta E_x, \Delta E_y, \Delta E_z)$. La constante λ_D est caractéristique du matériau et positive.

La figure 2b montre le paramétrage. La surface du conducteur est supposée plane et l'axe Ox est choisi selon sa normale.

1. Trouvez l'expression du champ électrique puis celle de la charge volumique ρ lorsque le champ extérieur dans le vide au voisinage de cette surface vaut $E_0\,\vec{e}_x$. Vous admettrez que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers zéro.
2. Quelle est l'unité de λ_D ? Donnez une interprétation physique de cette constante.
3. Déterminez la charge volumique ρ_0 au niveau de la surface du conducteur, en fonction de E_0, λ_D et ε_0.
4. λ_D est de l'ordre de quelques nm pour un conducteur usuel. Pour un échantillon de taille macroscopique, il est donc plus commode d'introduire la charge surfacique σ du conducteur.
   Exprimez σ en fonction de ρ_0 et λ_D, puis en fonction de E_0 et ε_0, par deux méthodes.