ATTENTION : PLUS AUCUNE ERREUR !!!! **Pierre BODET**

Exercice 14 : Si E est un ensemble, on appelle singletons les ensembles $\{e\}$ avec $e \in E$.

<u>a) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E ?</u>

T est stable par union dénombrable donc $\{A \subseteq E \mid A$ est dénombrable$\} \subset T$.
De plus, T est stable par passage au complémentaire donc tous les complémentaires des ensembles dénombrables inclus dans E appartiennent aussi à T.

$T = \{A \subseteq E \mid A$ est dénombrable$\} \cup \{A \subseteq E \mid \overline{A}$ est dénombrable$\}$ (inclusion réciproque : montrer que cette union est une tribu : -contient le vide = trivial

-stable par complémentaire = soit $A \in$ l'union, si A dénombrable, alors $A \in$ l'union. De même dans l'autre cas

-stable par union dénombrable = -si que dénombrables $\rightarrow$ l'union est dénombrable

-si que complémentaires dénombrables $\rightarrow$ Loi de Morgan $\rightarrow$ intersection dénombrable

-si les deux : Posons $An = Bn \cup Cn$ avec Bn tous les An dénombrables et Cn tous les An non dénombrables. On a alors $\overline{An} = \overline{Bn} \cap \overline{Cn}$ et $\cap \overline{Cn}$ est une intersection dénombrable donc l'intersection totale est dénombrable donc $\overline{An}$ est dénombrable.
Comme l'ensemble est stable par complémentaire, il est alors stable par union dénombrable donc c'est une tribu)

En particulier, si E est dénombrable, $T = P(E)$.

<u>b) A supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire des ensembles à deux éléments) de E ?</u>

Soit $\{a,b\}$ une paire de E. $E = \{a,b\} \cup \overline{\{a,b\}}$ donc $\emptyset = \overline{E} \in T$.

Si $card(E) = 2$, $T = \{\emptyset, E\}$
Si $card(E) > 2$:

Il existe donc un troisième élément $c \in E$ donc $\{a,c\}$ est une paire de E. On a alors $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$.
De cette manière, on revient au cas précédent.

$T = \{A \subseteq E \mid A$ est dénombrable$\} \cup \{A \subseteq E \mid \overline{A}$ est dénombrable$\}$

<u>c) Une partie A de E étant fixée, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A ?</u>

Si $A = \emptyset$ ou E, alors $T = \{\emptyset, E\}$

Sinon, soit $(Bn) \in P(E)^N$ tel que pour tout $n \in N$, $A \subseteq Bn$, alors $\cup Bn \in T$ car pour tout n, $A \subseteq Bn$ donc $A \subseteq \cup Bn$ et $\cup Bn \in P(E)$.

Soit B tel quel $A \subseteq B$. On a alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ donc $\{B \mid B \subseteq \overline{A}\} \subset T$.

On a alors $T = \{B \mid A \subseteq B\} \cup \{B \mid B \subseteq \overline{A}\}$ (on a bien E qui est inclus dans le premier ensemble) (l'inclusion réciproque ce montre comme pour la question 1)

d) Soient G et F deux tribus de E. Décrire simplement la tribu engendrée par $F \cap G$, puis de la tribu engendrée par $F \cup G$

$\emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \cup \emptyset$

Soit $A \in F \cap G$. $\overline{A} \in F$ et $\overline{A} \in G$ donc $\overline{A} \in F \cap G$ → stable par passage au complémentaire.

Soit $(A_n) \in F \cap G$. On a $\cup A_n \in F$ et $\cup A_n \in G$ donc on a bien $\cup A_n \in F \cap G$: $F \cap G$ est une tribu

Soit $A \in F \cup G$. Supposons (sans perte de généralité) que $A \in F$. $\overline{A} \in F$ donc $\overline{A} \in F \cup G$.

Soit $(A_n) \in (F \cup G)^N$. Notons (B_n) la sous-suite de (A_n) dont telles que pour tout n, $B_n \in F$.
Notons $(C_n) = (A_n) \setminus (B_n)$. $\cup B_n \in F$ et $\cup C_n \in G$ donc on a $\cup A_n = \cup(B_n \cup C_n) \in F \cup G$:
$F \cup G$ est une tribu

e) Quelle est la tribu de R engendrée par A = {[0, 2] , [1, 3]} ? Quel est son cardinal ?

T = {$\emptyset$, R, [0, 2], [1, 3], [0, 3], (union des deux précédents)
]-∞, 0[∪]2, +∞[, (complémentaires)
]-∞, 1[∪]3,+∞[,
]-∞, 0[∪]3, +∞[,
]-∞, 2[∪]3, +∞[, (précédent union complémentaire de [0, 2])
[2, 3], (complémentaire)
]-∞, 0[∪]1, +∞[, (complémentaire de [0, 3] union [1, 3])
[0, 1], (complémentaire du précédent)
R\{1}, (union du complémentaire de [1, 3] et du complémentaire du précédent)
{1}, (complémentaire du précédent)
R\{2}, (union du complémentaire de [0, 2] et du complémentaire de [2, 3])
{2}, (complémentaire du précédent)
]-∞, 1[∪]2, +∞[, (union du complémentaire de [0, 2] et du complémentaire de [1, 3])
[1, 2], (complémentaire du précédent)
]-∞, 2]∪]3, +∞[, (union du complémentaire de [2, 3] et de [0, 2])
]2, 3], (complémentaire du précédent)
]-∞, 0[∪[1, +∞[, (union du complémentaire de [0, 1] et de [1, 3])
[0, 1[, (complémentaire du précédent)
]-∞, 0[∪[2, +∞[, (union du complémentaire de [0, 3] et de [2, 3])
[0, 2[, (complémentaire du précédent)
]-∞, 1]∪]2, +∞[, (union du complémentaire de [1, 3] et de [0, 1])
]1, 2], (complémentaire du précédent)
]-∞, 1[∪[2, +∞[, (union du complémentaire de [1, 3] et de [2, 3])
[1, 2[, (complémentaire du précédent)
]-∞, 1]∪[2, +∞[, (union du complémentaire de [1, 3] et de]2, 3])
]1, 2[, (complémentaire du précédent)
]-∞, 1]∪]3, +∞[, (union du complémentaire de [1, 3] et de [0, 2])
]1, 3] (complémentaire du précédent)
}

On a tous les segments contenant 0, 1, 2 ou 3 **(6)**. On a également les intervalles ouverts en 1 **(4)** ou 2 **(4)** (donc également les singletons 1 et 2) **(+1 pour]1, 2[)**. On a ensuite les complémentaires de tous ces intervalles **(on fait donc x2)**, Ø et R **(2)**.

Card(T) = 32

Exercice 13 :

Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de [|1, n|] une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de [|1, n|], et par convention, on pose $D_0 = 1$.

1. Calculer D1, D2, D3, D4.

$D_1 = 0$
$D_2 = 1$
$D_3 = 2$
$D_4 = 9$

2. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$? (vaut n!)

Posons A = {bijections [|1, n|] → [|1, n|]}. Card(A) = n!
Pour tout k ∈ [|1, n|], posons Ak = {f ∈ A | f possède exactement k points fixes}
Éléments de Ak : 1) on choisit les k points fixes (k parmi n)
2) f réalise un réarrangement sur le reste : D_{n-k}
Par principe additif, on a l'égalité voulue car ∪Ak = A et que les Ak sont deux à deux disjoints.

3. Montrer que $D_{n+1} = n (D_n + D_{n-1})$.

Posons B = {f bijections de [|1, n+1|] dans [|1, n+1|] | f n'admet pas de point fixe}
On a card(B) = D_{n+1}.

Pour tout k ∈ [|1, n|], posons Bk = {f ∈ B | f(n+1) = k} (k ≠ n+1 car pas de point fixe)

Soient 1 ≤ k ≤ n et f ∈ Bk. Il existe donc 1 ≤ x ≤ n tel que f(x) = k.

Si k ≠ x, alors en renumérotant n+1 de l'espace d'arrivée en k, la restriction de f à [|1, n|] dans [|1, n|] est une bijection : on a D_n possibilités.

Si k = x, alors soit 1 ≤ y ≤ n. Notons z = f(y).
En renumérotant dans l'espace d'arrivée n+1 en z et z en k. On a alors Dn-1 possibilités pour le reste.

Par principe additif, card(Bk) = $D_n + D_{n-1}$.

Par principe additif, comme ∪Bk = B, on a alors l'égalité voulue.

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

• Une tribu infinie n'est pas dénombrable (exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable") (démo)

Exercice 4* (Les tribus infinis sont non–dénombrables!) Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathscr{T} : x \in T\} \qquad \text{et} \qquad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

a) Montrer que $x \notin [y]$ implique $y \notin [x]$. En déduire que $x \sim y$ si $x \in [y]$ est une relation d'équivalence sur Ω.
Si $x \notin [y]$ alors il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $x \notin A$ et $y \in A$. Observons que $A^{\complement} \in \mathcal{T}$ satisfait $y \notin A^{\complement}$ et $y \in A^{\complement}$ ce qui montre que $y \notin [x]$. Donc $x \in [y] \implies [x] = [y]$ ce qui implique que $\sim$ est une relation d'équivalence. En effet, la symétrie est la contraposé de la première question, la reflexivité est évidente, et $x \in [y]$ se traduisant en $y \in F$ et $F \in \mathscr{T}$ implique $x \in F$ et $F \in \mathscr{T}$, la transitivité est immédiate aussi.

b) Montrer que $\mathcal{P} = \{[x] : x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.
C'est la partition qui est engendrée par la relation $\sim$. Il est facile de voir que $[x] \neq [y]$ implique $[x] \cap [y] = \emptyset$, p.ex. par la transitivité de $\sim$

c) Soit $T \in \mathscr{T}$. Montrer que $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.
Il est clair que $T \subseteq \bigcup_{x \in T} [x]$. Par définition de $[x]$, si $x \in T$ alors $T \in \mathcal{F}_x$ et donc $[x] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$. On déduit $\bigcup_{x \in T} [x] \subseteq T$.

d) Montrer que $\mathcal{P}$ est infinie si $\mathscr{T}$ est infinie.
Par exercice 1, si $|\mathcal{P}| = n$ alors $|\mathscr{T}| = 2^n < \infty$. Donc, $|\mathcal{P}|$ est nécessairement infinie.

e) Soit $\mathcal{P}$ infinie. Montrer (par l'absurde) que $\mathscr{T}$ est indénombrable. *Argumentons par l'absurde: supposons que $\mathscr{T}$ est dénombrable*

1. Montrer que si $\mathscr{T}$ est dénombrable, alors $[x] \in \mathscr{T}$ pour tout $x \in \Omega$. Déduire que $\mathcal{P}$ est dénombrable.
   Car $\mathscr{T}$ est dénombrable, alors $[x]$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ et donc dans $\mathcal{T}$. Mais cela implique que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$; rappelons qu'un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

2. Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une énumération de $\mathcal{P}$. S'en servir pour construire une bijection $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathscr{T}$. Conclure
   On définit $\phi(S) = \cup_{k \in S} P_n$. Alors ϕ est une injection de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathscr{T}$. Donc, $\mathscr{T}$ contient un ensemble non–dénombrable; ainsi $\mathscr{T}$ est non–dénombrable ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ une partition de Ω, i.e.

$$\forall i \neq j : \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \ \ (\text{mais } \ A_i, A_j \neq \emptyset), \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup A_j.$$

Soit $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}$. Déterminer la composition et le cardinal de $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$.
Soit $\mathcal{A}$ la famille de tous les réunions d'éléments de $\{A_1, \ldots, A_n\}$. On voit que le complément d'un élément de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$ car $(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots A_{i_k})^{\complement} = (A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots A_{j_\ell})$ si $\{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\} = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Donc $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$. Et l'application $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ définie par

$$\phi(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots A_{i_k}) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}\{1, 2, \ldots, n\}$. Donc card($\mathcal{A}$) = card($\mathcal{P}\{1, 2, \ldots, n\}$) $= 2^n$.