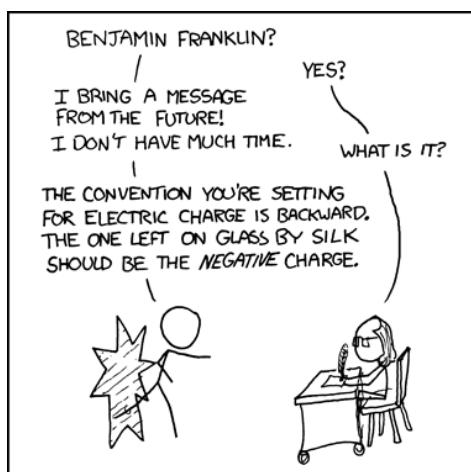


MPI\* Physique  
TD Électromagnétisme

Électrostatique



Olivier Caffier



# 1 Action d'un fil sur une charge ponctuelle

On considère un fil rectiligne, de longueur supposée infinie, et porteur d'une densité linéique de charges  $\lambda > 0$ . Une charge électrique ponctuelle  $q > 0$  se trouve initialement à une distance  $r_0$  du fil, sans vitesse.

1. Calculez le champ électrique électrostatique rayonné par le fil.
2. Déduisez-en la vitesse de la charge ponctuelle quand elle se trouve à une distance  $r$  du fil.

**Corrigé :**

**1** **Source** fil rectiligne selon  $Oz$ , de longueur infinie, de densité lin.  $\lambda > 0$

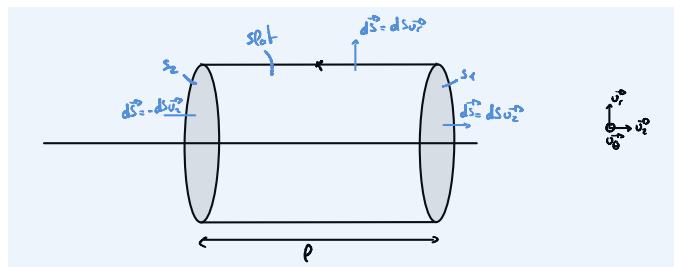
**Invariances** par translation le long de  $Oz$   
par rotation autour de  $Oz$

$$\frac{d\vec{r}}{\theta} \rightarrow \vec{v}_r$$

**Symétries** Vect<sub>rl</sub>( $\vec{u}_r, \vec{u}_z$ ) et Vect<sub>rz</sub>( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ) sont plans de symétrie  
 $\vec{E}$  est un vecteur vrai

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

**Surface de Gauss** On considère un cylindre de rayon  $r$ , centré sur  $Oz$ , de longueur  $P$



$$\text{On pose aussi } S = S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{lat}}$$

**Calcul du flux à travers  $S$**  On a  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{S_1 \cup S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$  car  $\vec{E} \perp d\vec{s}$  sur  $S_1 \cup S_2$   $= E(r) \oint_{S_{\text{lat}}} ds$   
d'où  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) 2\pi r P$

**Calcul de  $Q_{\text{int}}$**  On a  $Q_{\text{int}} = \lambda \times P$

**Th. de Gauss** On a  $E(r) 2\pi r P = \frac{\lambda P}{\epsilon_0}$  donc  $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r}$

$$\text{d'où } \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

On retrouve bien la disc. de 2<sup>e</sup> espèce en 0.

**2** On a donc  $\vec{F} = q \vec{E}(M) = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \vec{u}_r$

Initialement, la charge est sans vitesse et tout au long de notre étude, elle ne subit que l'action de  $\vec{F}$  (qui est selon  $\vec{u}_r$ ).  
On peut donc considérer que le mouvement est rectiligne selon  $\vec{u}_r$ .

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r$$

Ainsi, d'après la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

$$m \ddot{a} = \vec{F} \xrightarrow{\text{proj. sur } \vec{u}_r} m \ddot{r} - \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} = 0$$

$\times r$

$$m \ddot{r} r - \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{r}{r^2} = 0$$

intégration

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \times \ln(r) = \text{cte}$$

et initialement,  $\dot{r}(0) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{cte} = -\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0) \\ r(0) = r_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{cte} = -\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0)$$

Finalement,

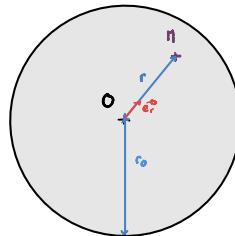
$$\dot{r}(t) = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\pi m \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\pi m \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \vec{u}_r$$

## 2 Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson

J.J. Thomson, qui a découvert l'électron en 1897, avait proposé une conception de l'atome. Bien qu'il se soit révélé faux, son modèle est instructif et met en jeu des raisonnements qui rentrent dans le cadre du programme.

Dans l'atome d'hydrogène, Thomson a supposé que la charge positive était uniformément répartie en volume, tandis que la charge négative était assimilable à une particule ponctuelle chargée se déplaçant dans ce volume.

La charge positive totale est notée  $e$ , la charge de l'électron  $-e$ . La sphère délimitant l'atome est de centre  $O$  et de rayon  $r_0$ . L'électron est de masse  $m_e$  et repéré par le point  $M$  (cf. figure ci-dessous).



### 1. Étude du champ de l'ion H<sup>+</sup>

- Calculez  $\rho$ , la densité volumique de charge associée à la charge positive.
- Étudiez les symétries et invariances du champ électrique rayonné en tout point.
- Calculez le champ électrique rayonné par l'ion en tout point  $M$  de l'espace, en fonction de  $e, r_0, r = \|\overrightarrow{OM}\|, \epsilon_0$  et  $\overrightarrow{OM}$ . Commentaire ? Tracez l'allure de sa norme  $E(r)$ .

### 2. Étude du mouvement de l'électron

Son poids est négligé, il n'est donc soumis qu'à l'attraction électrostatique de la charge positive. Vous supposerez qu'il n'y a pas d'ionisation :  $r$  reste inférieur à  $r_0$ .

- Démontrer que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2 \overrightarrow{OM}$$

Exprimer la fréquence propre de cet oscillateur harmonique en fonction de  $e, r_0, \epsilon_0$  et  $m_e$ .

- La plus petite fréquence observée à l'époque de Thomson dans le spectre de l'hydrogène était  $f_{\min} = 460\text{THz}$ . Déduisez-en une valeur numérique d'un majorant de  $r_0$ . C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau. Commentez.

**Corrigé :**

(1)

1.a On a  $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$

1.b Invariances par toute rotation autour du centre O

Symétries Vect<sub>M</sub>( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ) & Vect<sub>M</sub>( $\vec{u}_r, \vec{u}_\phi$ ) sont des plans de symétrie

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

1.c Surface de Gauss Sphère de centre O, de rayon  $r$ , passant par M.

Calcul du flux On a  $\iiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) 4\pi r^2$

Calcul de Q<sub>int</sub> si  $r > r_0$ :  $Q_{\text{int}} = e$   
si  $r \leq r_0$ :  $Q_{\text{int}} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = e \times \left(\frac{r}{r_0}\right)^3$

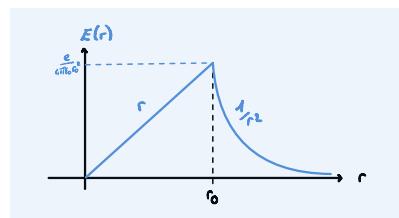
Th. de Gauss  $\bullet E(r < r_0) 4\pi r^2 = \frac{e}{\epsilon_0 r_0^3} \times r^2 \Rightarrow E(r < r_0) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r_0^3} \times r$

$\bullet E(r > r_0) 4\pi r^2 = \frac{e}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r > r_0) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \times \frac{1}{r^2}$

Bon à bien une fact C<sup>0</sup> ! (distrib. vole)

D'où  $\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r_0^3} \vec{u}_r & \text{si } r < r_0 \\ \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} & \text{si } r > r_0 \end{cases}$

## Tracé de $E(r)$



2

2.a Comme  $\vec{F} = -e\vec{E}(r)$  avec  $r < r_0 \Rightarrow \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{Ori}$

Ainsi, d'après la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $m_e \frac{d^2 \vec{Ori}}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{Ori}$

d'où  $\frac{d^2 \vec{Ori}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{Ori}$

avec  $\omega_0 = \left( \frac{e^2}{4\pi m_e \epsilon_0 r_0^3} \right)^{1/2}$

2.b On a pour tout  $r_0$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \geq f_{\min} \Leftrightarrow$$

$$r_0 \leq \left( \frac{e^2}{16\pi^3 m_e \epsilon_0 f_{\min}^2} \right)^{1/3} := r_{\max}$$

22  
0.31 nm

Ordre de grandeur réel

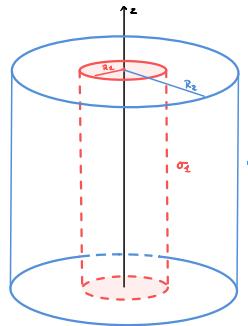
$$\begin{aligned} &\sim 10^{-10} \text{ m} && \text{(atome)} \\ &\sim 10^{-15} \text{ m} && \text{(noyau)} \end{aligned}$$

ici, on est sur du  $10^{-10}$ , c'est pas fou...

### 3 Condensateur cylindrique

Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques séparées par un isolant, de sorte que les armatures portent toujours des charges électriques opposées mais qu'aucun courant ne circule de l'une à l'autre.

On se propose d'étudier le rayonnement électrostatique d'un condensateur cylindrique, tel que représenté. Sa longueur  $L$  sera supposée grande devant les rayons  $R_1$  et  $R_2$  (cf. figure ci-dessous).



- Question préliminaire : calculez le champ électrique rayonné dans tout l'espace par un cylindre uniformément chargé en surface, de rayon  $R$ , de longueur  $L \gg R$  et de densité surfacique de charge  $\sigma$ .
- Revenons au condensateur cylindrique. On rappelle que les armatures d'un condensateur portent à tout instant des charges opposées.
  - Soient  $\sigma_1 > 0$  la densité surfacique de charge de l'armature de  $R_1$ , et  $\sigma_2 < 0$  celle de l'armature de rayon  $R_2$ . Exprimez  $\sigma_2$  en fonction de  $R_1, R_2$  et  $\sigma_1$ .
  - Calculez le champ électrostatique rayonné dans tout l'espace par ce condensateur. Commentez.

**Corrigé :**

1 Cf. cours, on a

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \vec{v}_r & \text{si } r > R \\ \vec{0} & \text{si } r < R \end{cases}$$

2

2.a Notons  $Q_1 > 0$  et  $Q_2 < 0$  les charges totales contenues dans ces armatures.

On a alors

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{2\pi R_1 L} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{2\pi R_2 L}$$

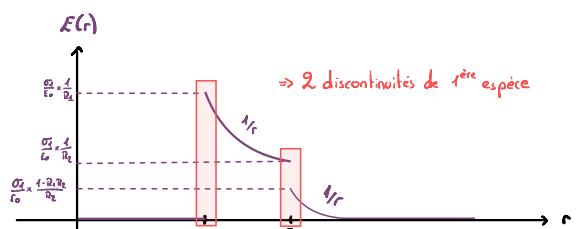
or, comme précisé par l'énoncé :  $Q_1 = -Q_2 \Rightarrow \sigma_2 2\pi R_1 L = -\sigma_1 2\pi R_2 L$

$$\Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_1 \times \frac{R_1}{R_2}$$

2.b Le champ  $\vec{E}$  étant additif, on a :

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \vec{v}_r & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \left( \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \times \frac{1}{r} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \right) \vec{v}_r & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

Si on trace  $E(r)$ ,



$$\text{or } \sigma_2 = -\sigma_1 \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \vec{E}(r > R_2) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \times \frac{1}{r} \vec{v}_r$$

## 4 Plan épais chargé

Soit une distribution de charge uniforme en volume égale à  $\rho$  entre les deux plans  $x = -a$  et  $x = a$ , nulle ailleurs.

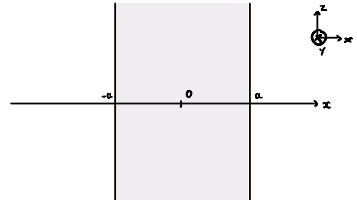
- Calculez le champ rayonné par cette distribution en tout point de l'espace.
- Réduisez l'épaisseur de la distribution tout en maintenant sa charge constante :  $a \rightarrow 0$  avec  $\rho a = \text{cst}$ . Que retrouvez-vous ?

**Corrigé :**

① Invariances par translation le long des axes  $O_y$  et  $O_z$

Symétries Vect $_{\text{Pl}}$ ( $\vec{u}_x^*$ ,  $\vec{u}_y^*$ ) et Vect $_{\text{Pl}}$ ( $\vec{u}_x^*$ ,  $\vec{u}_z^*$ ) sont plans de symétrie

$$\Rightarrow \vec{E}(\text{Pl}) = E(x) \vec{u}_x^*$$

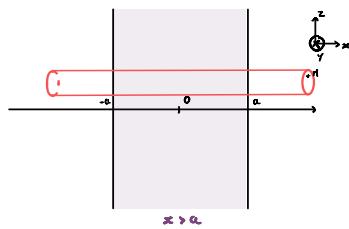
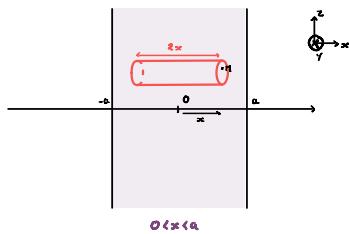


Parité ou Imparité de  $E(x)$  comme  $\vec{E}$  est un vecteur vrai et que ce plan chargé est lui-même plan de symétrie, on a

$$\vec{E}(\text{Pl}) = -\vec{E}(\text{Pl}) \Rightarrow E(-x) = -E(x)$$

$\Rightarrow E$  est impaire, on ne s'intéressera donc qu'aux  $x > 0$  et on conclura l'imparité de  $E$ .

**Surface de Gauss** On considère un cylindre de longueur  $2a$ , de section  $S$ , contenant  $\text{Pl}$  dans son disque droit :



**Calcul du flux** Comme  $\vec{E} \perp \vec{u}_r$ , on a que  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2S E(x)$

$$0 < x < a: Q_{\text{int}} = 2xS \times \rho$$

$$x > a: Q_{\text{int}} = 2aS \times \rho$$

**Th. de Gauss**

$$E(0 < x < a) \underset{\text{Gauss}}{=} 2S \frac{\rho}{\epsilon_0} \times x \quad \text{et} \quad E(x > a) \underset{\text{Gauss}}{=} 2S \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

donc, par imparité de  $E$ , on a :

$$\vec{E}(\text{Pl}) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{u}_x^* & \text{si } x < -a \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} x \vec{u}_x^* & \text{si } -a < x < a \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{u}_x^* & \text{si } x > a \end{cases}$$

Bon retrouve bien la continuité physique à la distrib. vol. !

- ② On retrouve l'exemple du cours "plan uniformément chargé" sans épaisseur ;)

