TD Ondes électromagnétiques

Plasmas dilués

1 Propagation des ondes dans l'ionosphère

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans l'ionosphère. On considère que celle-ci forme un plasma dans lequel les ions sont fixes et les électrons mobiles. On néglige le poids des particules et on suppose qu'elles se déplacent à des vitesses non relativistes. On donne l'ordre de grandeur $\nu_p \sim 1\,\text{MHz}$ pour la fréquence plasma.

1. Deux élèves proposent une relation λ et ν :

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_p^2}} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu_p^2 - \nu^2}} \tag{1}$$

   Lequel a raison ?
2. On note N la densité volumique d'électrons. Établissez l'expression de ν_p sous la forme $\nu_p = \alpha\sqrt{N}$.
3. On propose le modèle suivant pour l'ionosphère : il y a du vide jusqu'à l'altitude z_0, puis entre z_0 et z_1 la densité N varie de manière affine $N(z) = \beta(z - z_0) + \gamma$. Après z_1, N décroît.
   On effectue l'expérience suivante : on envoie un paquet d'ondes de fréquence moyenne ν variable à la verticale et on mesure le temps au bout duquel on détecte une onde réfléchie.

Fréquence	Réponse
$< 3{,}0\,\text{MHz}$	$\tau_0 = 0{,}20\,\text{ms}$
$6{,}0\,\text{MHz}$	$\tau_1 = 0{,}30\,\text{ms}$
$> 6{,}0\,\text{MHz}$	pas de réponse

   Montrez qu'une mesure de τ_0 et τ_1 permet de déterminer β et γ. Calculez-les.

Données : $m_e = 9{,}1.10^{-31}\,\text{kg}$; $e = 1{,}6.10^{-19}\,\text{C}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\text{F}\,\text{m}^{-1}$.

2 Réflexion à la surface d'un plasma

(Mines MP 2022) Un plasma de pulsation propre ω_p occupe le demi-espace $x > 0$. Une OPPM polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u}_y$ se propage dans le vide (demi-espace $x < 0$) et atteint le plasma sous incidence normale. Cela donne naissance à une onde réfléchie qui repart en arrière et à une onde transmise qui pénètre dans le plasma.

1. Définissez l'indice optique n du plasma et donnez la valeur de n^2 en fonction de la pulsation plasma. Commentez.
2. En admettant qu'elles ont même pulsation et mêmes directions de propagation et de polarisation que l'onde incidente, proposez des expressions d'OPPM pour les ondes réfléchies et transmises. Leurs amplitudes complexes seront notées E_r et E_t, et vous ferez intervenir l'indice optique du plasma.
3. On introduit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

$$r = \frac{E_r}{E_0} \qquad t = \frac{E_t}{E_0} \tag{2}$$

   La modélisation des charges et des courants dans le plasma étant volumique, il n'y a pas de charge ou de courant surfacique, donc aucune discontinuité des champs en $x = 0$. Exprimez r et t en fonction de l'indice optique du plasma.
4. Rappelez brièvement l'existence de deux régimes fréquentiels pour le plasma et discutez les conséquences sur r et t.

5. On définit les coefficients de réflexion et transmission en énergie :

$$R = \frac{\|\langle\vec{\Pi}_r\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}\rangle\|} \qquad T = \frac{\|\langle\vec{\Pi}_t\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}\rangle\|} \tag{3}$$

Calculez ces coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie dans chaque régime fréquentiel. Que vaut $R + T$? Interprétez.

3 Propagation d'une onde entre deux plasmas

(Centrale MP 2021) On considère la propagation d'une onde électromagnétique confinée entre deux plasmas. On la représente dans le plan xOy et les plasmas occupent les régions $y < -a/2$ et $y > a/2$. On travaillera avec les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{-\beta y} e^{i(kx-\omega t)} \vec{u}_z & y > \dfrac{a}{2} \\ \vec{E} = E_0 cos(\alpha y) e^{i(kx-\omega t)} \vec{u}_z & |y| < \dfrac{a}{2} \\ \vec{E} = E_0 e^{\beta y} e^{i(kx-\omega t)} \vec{u}_z & y < -\dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{4}$$

où α et β sont des constantes réelles positives.

1. Déterminez lesquelles des trois expressions ci-dessus caractérisent une onde plane.
2. Dans un plasma, le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et le champ $\vec{E}$ sont reliés par :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \tag{5}$$

   où n, e et m sont respectivement la densité volumique d'électrons, la charge élémentaire, et la masse d'un électron. Établissez cette relation.
3. Établissez la relation de dispersion de $\vec{E}$ dans un plasma en utilisant $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\epsilon_0}}$, et donnez la relation de dispersion de l'onde dans le vide.
4. Donnez les expressions de α et β en fonction de k, ω, ω_p et c.
5. Exprimez une condition de comparaison sur k et ω/c qui assure la bonne définition de ces constantes.

4 Dispersion dans le plasma interstellaire

(X 1990) Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m_e, de charge $-e$, de densité volumique n_0, en mouvement non relativiste, et d'ions supposés fixes. Il est supposé localement neutre, aussi bien au repos que lors du passage d'une onde électromagnétique. On cherche alors des solutions en OPPM :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{6}$$

1. (a) Montrez que de telles solutions n'existent que si la densité de courant $\vec{j}$ des électrons est elle-même de la forme :

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{7}$$

   (b) Montrez que $\vec{j}$ est orthogonal à $\vec{k}$.
2. Retrouvez rapidement la conductivité de ce plasma.
3. Exprimez $\vec{j}_0$ en fonction de ω, $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$, et déduisez-en une nouvelle expression pour la conductivité.
4. Déduisez-en la relation de dispersion dans ce plasma en posant $K = \sqrt{\mu_0 n_0 e^2/m_e}$, puis la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Quelle relation vérifient ces dernières ?
5. Deux trains d'ondes de longueurs d'ondes respectives λ_1 et λ_2 sont émis au même moment par un astre et reçus par une observation situé à une distance L aux instants t_1 et t_2 respectivement. En supposant $K^2\lambda_1^2, K^2\lambda_2^2 \ll 1$, montrez que la différence des instants de réception est :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \simeq \frac{LK^2}{8\pi^2 c}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \tag{8}$$

6. Des mesures de dispersion à partir de signaux émis par le pulsar du Crabe conduisent à une limite supérieure égale à $2{,}8.10^4\ \mathrm{m}^{-3}$ pour la densité électronique volumique du plasma interstellaire. Quelle serait, dans ces conditions, la limite supérieure pour Δt dans le visible pour une étoile située à une distance de 10^3 ly ?