TD Traitement du signal

Filtrage analogique

1 Série de Fourier d'un signal triangulaire

On étudie le signal de la figure 1.

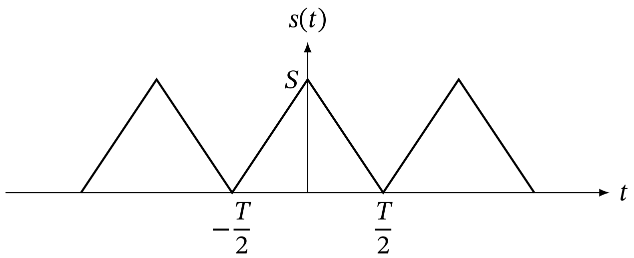


FIG. 1 : Signal triangulaire.

Sans aucun calcul, précisez laquelle des quatre décompositions de Fourier est la bonne pour ce signal :

1. $s(t) = \frac{S}{2} + \frac{4S}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\big(2\pi(2n-1)ft\big)}{(2n-1)^2}$
2. $s(t) = \frac{S}{2} - \frac{4S}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\big(2\pi(2n-1)ft\big)}{(2n-1)^2}$
3. $s(t) = \frac{S}{4} - \frac{4S}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\big(2\pi(2n-1)ft\big)}{(2n-1)^2}$
4. $s(t) = \frac{S}{2} - \frac{4S}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\big(2\pi(2n-1)ft\big)}{(2n-1)^2}$

2 Filtre *RL*

On considère le circuit de la figure 2 avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$.

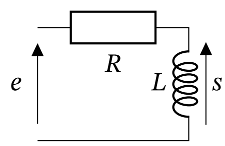
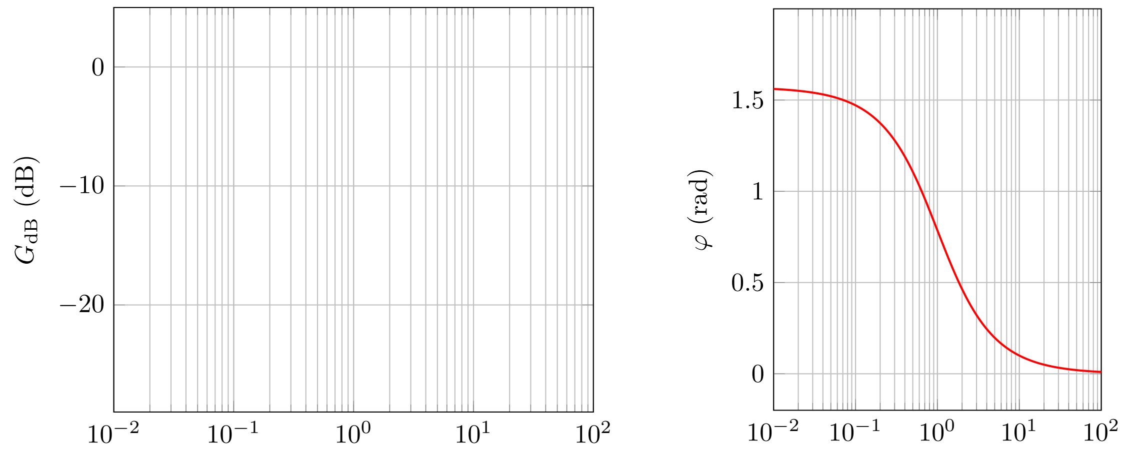


FIG. 2 : Filtre *RL*.

1. Quel type de filtre ce circuit permet-il de réaliser ?
2. Déterminez sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = H_0\frac{jx}{1+jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \tag{1}$$

3. Déterminez les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence, ainsi que leur ordonnée à l'origine en $x = 1$. Construisez le diagramme de Bode asymptotique en gain sur la figure 3a et déduisez-en à main levée l'allure du diagramme réel.



(a) **(b)**

FIG. 3 : Diagramme de bode en fonction de x : a) en gain, b) en phase.

4. La tension e s'écrit sous la forme d'une somme de trois harmoniques de même amplitude, même phase initiale et de fréquences respectives $f_1 = 100\,\text{Hz}$, $f_2 = 1\,\text{kHz}$ et $f_3 = 100\,\text{kHz}$. Donnez l'expression du signal d'entrée e et proposez une expression pour le signal de sortie s.
5. La tension e est maintenant un signal triangulaire de fréquence 60 Hz. Justifiez que s est alors un signal créneau de même fréquence.

3 Modulation et démodulation en amplitude

(Centrale PSI 2015) Dans le cas d'une transmission aérienne et/ou sur de grandes distances, un signal basse fréquence $e(t) = E\cos(2\pi f t)$ ne peut pas être transmis sans une forte détérioration.

Une solution possible est la *modulation en amplitude* : on génère un signal haute fréquence $p(t) = S\sin(2\pi f_p t)$, appelé *porteuse* ($f \ll f_p$), et on combine astucieusement les deux de manière à ce que l'amplitude de la porteuse varie avec le signal.

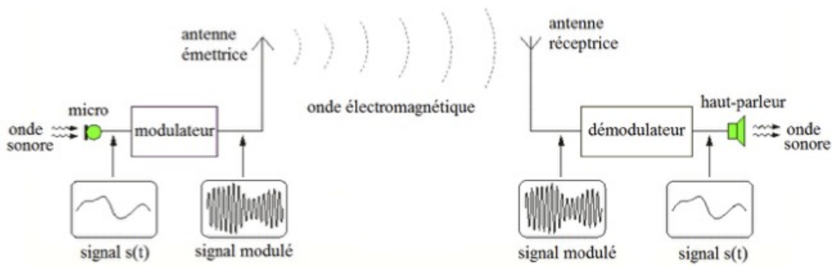


FIG. 4 : Exemple de dispositif de communication par modulation-démodulation.

La fréquence de la porteuse est un choix conventionnel qui doit être connu aussi bien de l'émetteur que du récepteur (exemple : fréquence d'une station de radio).

1. Modulation.
   (a) À l'aide d'un multiplieur (figure 5a) et d'un additionneur (figure 5b), proposez une manière d'obtenir le *signal modulé* :
   $$s(t) = A\big(1 + m\cos(2\pi f t)\big)\sin(2\pi f_p t) \tag{2}$$
   (b) m est appelé *taux de modulation*. Représentez le signal modulé dans les $m < 1$ et $m > 1$.
   (c) Représentez le spectre du signal modulé. Commentez son allure et la possibilité de le transmettre sur de grandes distances.
2. Démodulation.
   (a) À la réception du signal modulé, on le multiplie par la porteuse à l'aide d'un multiplieur. Le résultat est le signal $u(t)$. Déterminez son spectre.
   (b) Comment reconstruire le signal initial ?

FIG. 5 : a) Multiplieur. b) Additionneur.

4 Filtre en double T

Soit le filtre de la figure 6.

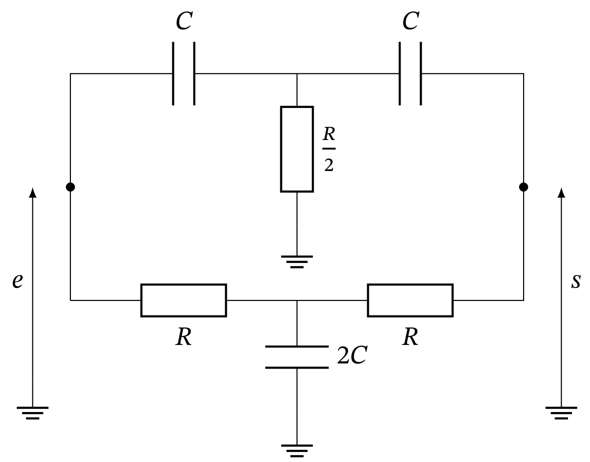


FIG. 6 : Filtre en double T.

1. Prévoyez qualitativement la nature de ce filtre.
2. En admettant que sa fonction de transfert est :

$$H = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 4ix} \quad \text{avec} \quad x = RC\omega \tag{3}$$

   tracez son diagramme de Bode (gain et phase) à la calculatrice ou à l'ordinateur.
3. Calculez numériquement les fréquences de coupure et précisez la bande passante avec $R = 50\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 3{,}2\,\mathrm{nF}$.
4. Décrivez le signal de sortie si $e(t) = E\cos(2\pi f t)$ avec $E = 2\,\mathrm{V}$ et $f = 1\,\mathrm{kHz}$.
5. Même question si le signal de sortie est un créneau de moyenne nulle, d'amplitude E et de fréquence f. On rappelle :

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n f t) \tag{4}$$