MPI* Physique

TD Électromagnétisme

Électrostatique

WE WERE GOING TO USE THE TIME MACHINE TO PREVENT THE ROBOT APOCALYPSE, BUT THE GUY WHO BUILT IT WAS AN ELECTRICAL ENGINEER.

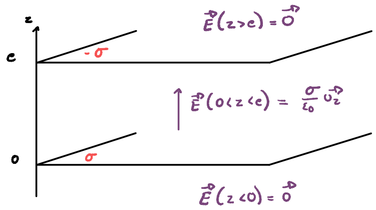
Olivier Caffier

1 Nuage d'orage

1. Retrouvez le champ électrostatique rayonné par un condensateur plan.
2. Un nuage électrique suffisamment étendu pour être considéré comme mince est assimilé à un plan $z = h$, de densité surfacique $\sigma < 0$.
   Proposez une expression pour le champ électrostatique régnant entre le sol et le nuage, ainsi que le potentiel associé sachant qu'il est posé nul au sol.
3. Déduisez-en la capacité de ce condensateur, application numérique pour un nuage carré (« Comme dans Minecraft », Florent - 18/11/2024) de 10 km avec $h = 2$ km et $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}.
4. Supposons qu'il s'agisse d'un nuage d'orage. Lorsque l'éclair se forme, le champ électrique vaut 25 kV.m^{-1}. Déduisez-en le potentiel du nuage.

Corrigé :

1



relation de passage bien vérifiée

D'où $\vec{E}(z) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z<0 \text{ ou } z>e \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z} & \text{si } 0<z<e \end{cases}$

2 On reprend le schéma précédent avec $e = h$

On a donc $\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}}$ pour $0<z<h$

D'autre part, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$

$$\Rightarrow V'(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + \underbrace{\text{cte}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}z}$$

3 On a U la tension = différence de potentiel entre $z=h$ et $z=0$

Ainsi

$$U = V(z=h) - V(z=0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times h$$

Or,

$$C = \left|\frac{Q}{U}\right| = \frac{\sigma \times S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}h}$$

D'où $\boxed{C = \frac{S \times \varepsilon_0}{h}}$ avec L la largeur, ℓ la longueur

A.N : $C \approx 4.42 \times 10^{2}$ nF

4 $E(z=h) = 25$ kV.m^{-1} $= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

et $V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}z$

$$\Rightarrow V(z=h) = 25 \times 10^3 \times h$$

A.N : $V(z=h) \approx 5 \times 10^{4}$ kV

2 Condensateur cylindrique

Suite de l'exercice 3 de la feuille précédente : calculez la capacité du condensateur, ainsi que sa capacité linéique dont vous ferez l'application numérique avec $R_1 = 1$ cm et $R_2 = 5$cm. Vous calculerez aussi le potentiel électrostatique rayonné dans tout l'espace.

Corrigé :

On rappelle qu'on avait
$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{r}\,\vec{u_r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) \Rightarrow V'(r) = -E(r)$

$$\Rightarrow V(r) = \begin{cases} A & (\text{si } r < R_1) \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \times \ln(r) + B & (\text{si } R_1 < r < R_2) \\ C & (\text{sinon}) \end{cases}$$

et on veut $V(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$

$\underline{\text{Cté en } R_2 :}$ $\Rightarrow B = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln(R_2)$

$\underline{\text{Cté en } R_1 :}$ $\Rightarrow A = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) & \text{si } 0 < r < R_1 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } r > R_2 \end{cases}}$$

et donc $U = \cancel{V(R_2)} - V(R_1)$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

Enfin, $Q = \sigma_1 2\pi R_1 \ell$

et $C = \left| \frac{Q}{U} \right|$ $\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$

et Capacité linéique $= \frac{C}{\ell}$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$\underline{\text{A.N}}$: $34\ \text{pF.m}^{-1}$

3 Mise en contact d'un conducteur et d'un semi-conducteur

(CCINP MP 2019) Un semi-conducteur est un matériau où le courant électrique est porté par deux types de porteurs : les *électrons* et les *trous* (de charge opposée à celle d'un électron). On le modélise ici comme un milieu contenant des charges $+q$ et $-q$, de permittivité ε_0, occupant tout le demi-espace $x > 0$.

- Les charges $+q$ ont une densité volumique $n_+(x) = n_0 \exp(\frac{-qV(x)}{kT})$
- Les charges $-q$ ont une densité volumique $n_-(x) = n_0 \exp(\frac{+qV(x)}{kT})$

avec k la constante de Boltzmann et T la température.

On accole à ce milieu un conducteur parfait de potentiel V_0 occupant le demi-espace $x \leq 0$.

1. Trouvez l'équation différentielle régissant V.
2. On suppose maintenant que $\frac{qV(x)}{kT} \ll 1$. Donnez l'expression de $V(x)$ dans tout l'espace.
3. Trouvez σ, la densité surfacique de charge du conducteur.

Corrigé :

1 Dans l'espace $(x \geq 0)$:

On a $\rho(x) = q\, n_+(x) - q\, n_-(x)$

$$= q n_0 \left(\exp\left(\frac{-qV(x)}{kT}\right) - \exp\left(\frac{qV(x)}{kT}\right)\right)$$

Et donc d'après l'équation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{V''(x) + \frac{q n_0}{\varepsilon_0}\left(\exp\left(\frac{-qV(x)}{kT}\right) - \exp\left(\frac{qV(x)}{kT}\right)\right) = 0}$$

2 Si on suppose que $\frac{qV(x)}{kT} \ll 1$, on peut alors procéder à un DL1 dans l'expression précédente :

$$V''(x) + \frac{q n_0}{\varepsilon_0}\left(\cancel{1} + \left(\frac{-qV(x)}{kT}\right) - \cancel{1} - \left(\frac{qV(x)}{kT}\right)\right) = 0$$

D'où $\quad V''(x) - 2\frac{q^2 n_0}{\varepsilon_0 kT} V(x) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V''(x) - \beta^2 V(x) = 0 \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\frac{2q^2 n_0}{k \varepsilon_0 T}}}$$

$\Rightarrow V(x) = A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}$

or on veut $\begin{cases} V(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 & \Rightarrow A = 0 \\ V(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} V_0 & \Rightarrow B = V_0 \end{cases}$

annul. du pot. à l'∞

cté

$$\boxed{\text{D'où} \quad \begin{aligned} V(x \geq 0) &= V_0 e^{-\beta x} \\ V(x \leq 0) &= V_0 \end{aligned}}$$

3 On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x \leq 0 \\ -V_0 \beta e^{-\beta x} \vec{u_x} & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi, pour $x \ll 1$, on a d'après la relation de passage :

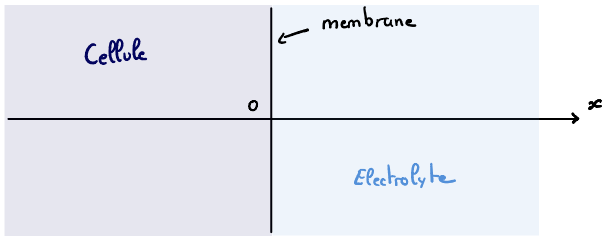
$$-V_0 \beta e^{-\beta x} \vec{u_x} - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_x}$$

D'où $\sigma(x \geq 0) = -\sigma \beta V_0 \, e^{-\beta x}$

$\approx -\sigma \beta V_0$ à la surface du conducteur

4 Étude d'une membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan yOz, l'axe Ox étant orienté vers l'extérieur de la cellule, (figure ci-dessous).



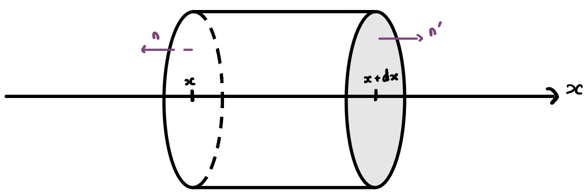
Toutes les grandeurs physiques sont supposées n'avoir de dépendance spatiale qu'en x.

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule) indique une variation de potentiel en général négative. Le potentiel est alors modélisé comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -V_0 \exp(-\frac{x}{a}) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

avec $V_0 > 0$.

1. Calculez le champ électrique puis la densité volumique de charge en tout point. Quel est le signe de ρ ? Comment une densité de charge peut-elle exister dans un liquide ?
2. Y a-t-il d'autres distributions de charge dans le système ?
3. Calculez la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de section S s'étendant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ (figure ci-dessous). Commentez.



Corrigé :

1 Pour $x \leq 0$: $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V$

$\Rightarrow E(x) = -V'(x)$

$= 0$ car $V(x \leq 0) = cte$ $\Rightarrow \vec{E}(x \leq 0) = \vec{0}$

et d'après M.G : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow \rho(x \leq 0) = 0$

Pour $x > 0$: $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V$ $\Rightarrow \vec{E}(x>0) = -\frac{V_0}{a}\exp\left(\frac{-x}{a}\right)$

et de même, M.G $\Rightarrow \rho(x>0) = \frac{V_0}{a^2}\exp\left(\frac{-x}{a}\right) > 0$

⇝ Électrolyte ⇒ présence d'ions ?

(2) Ici, on remarque une discontinuité de $1^{\text{ère}}$ espèce en 0, or on travaillait avec une distrib. vol. (qui ne génère pas de disc.)

$\Rightarrow$ présence d'une distribution surfacique de charges en $x=0$

Enfin, d'après la relation de passage :

$$-\frac{V_0}{a}\underbrace{\exp\left(\frac{-x}{a}\right)}_{\approx 1} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a}$$

(3)

$$Q_{tot} = S\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\,dx + S\sigma$$

$$= S\left(\cancel{\int_{-\infty}^{0}\rho(x<0)\,dx} + \int_{0}^{+\infty}\rho(x>0)\,dx\right) + S\sigma$$

$$= S\,\frac{V_0\varepsilon_0}{a^2}\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{-x}{a}\right)dx + S\sigma$$

$$= S\,\frac{V_0\varepsilon_0}{a^2}\left[(-a)\exp\left(\frac{-x}{a}\right)\right]_0^{\cancel{+\infty}} + S\sigma$$

$$= S\,\frac{V_0\varepsilon_0}{a^2}\times a + S\sigma$$

$$= S\left(\cancel{\frac{V_0\varepsilon_0}{a} + \sigma}\right)$$

car $\sigma = -\frac{V_0\varepsilon_0}{a}$

d'où $Q_{tot} = 0$

$\Rightarrow$ la matière est donc bien neutre...

5 Potentiel de Yukawa de l'atome d'hydrogène

Une modélisation parfois utilisée du potentiel rayonné par un atome d'hydrogène est le potentiel de Yukawa. En coordonnées sphériques, il s'exprime par :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-\frac{r}{a_0})$$

où $a_0 = 53$ pm est une constante caractéristique de l'hydrogène.

Nous voulons déterminer la distribution de charge qui rayonne un tel potentiel. L'atome est donc supposé à symétrie sphérique et centré sur un point O.

Le potentiel de Yukawa a aussi joué un rôle historiquement plus proche (dès les années 1930), dans l'étude des forces qui s'exercent à l'intérieur du noyau des atomes.

1. Calculez le champ électrique rayonné dans tout l'espace.
2. Calculez la charge $q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r.
3. Déduisez-en $q(r \to +\infty)$ et $q(r \to 0)$. Interprétez.
4. Calculez la charge électrique $dq(r)$ contenue dans une coquille sphérique de rayon r et d'épaissuer dr, définie comme le volume situé entre une sphère de rayon r et une de rayon $r + dr$.
Indication : le volume dV d'une telle coquille doit être écrit au premier ordre en dr.
5. Déduisez-en qu'il existe, en plus de la charge concentrée en O, une distribution volumique $\rho(r)$ non uniforme que vous calculerez.
6. Définissez une densité linéaire de charge $\lambda(r)$ le long d'un rayon. Commentez son allure.

Corrigé :

1 On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta}} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u_\varphi}}\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{r^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right) - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\times\frac{1}{r}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)\right)$$

D'où $$\boxed{\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0}\right)\vec{u_r}}$$

2 Appliquons le th. de Gauss avec S une sphère de rayon r et de centre O. $\Rightarrow Q_{int} = q(r)$

Ainsi, $$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow q(r) = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r) \qquad (A)$$

d'où $$\boxed{q(r) = e\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)\left(1 + \frac{r}{a_0}\right)}$$

3 Ainsi $$\boxed{\begin{aligned} q(r \to +\infty) &= 0 \\ q(r \to 0) &= e \end{aligned}}$$

donc qd $r \to 0$, on se situe bien dans le noyau et donc on a bien une charge +e
qd $r \to +\infty$, on prend en compte l'électron et donc la charge tot. est nulle.

$\Rightarrow$ c'est un bon modèle qui prend bien en compte la taille du noyau etc...

④ On a $q(r+dr) - q(r) = dq(r) \times \frac{dr}{dr} = q'(r)\,dr$

$$= \left(\frac{-e}{a_0} \exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)\left(\cancel{1} + \frac{r}{a_0}\right) + \cancel{\frac{e}{a_0}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)} \right) dr$$

$$\Rightarrow \boxed{dq(r) = -\frac{re}{a_0^2}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)dr}$$

⑤ Dans la coquille, on dispose d'une charge dq dans un volume dV : $dq = \rho\, dV$

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{dq}{dV}$$

et $\underbrace{V(r+dr) - V(r)}_{dV} \overset{\text{Taylor}}{=} V'(r)\,dr = 4\pi r^2 dr$ donc $dV = 4\pi r^2 dr$

⚠ Volume !!

et Q4 $\Rightarrow dq = -\frac{e}{a_0^2}\, r \exp\left(\frac{-r}{a_0}\right) dr$

DONC $\boxed{\rho(r) = \frac{dq}{dV} = -\frac{e}{4\pi a_0^2} \times \frac{1}{r} \times \exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)}$

⑥ On a $\lambda(r) = \frac{dq(r)}{dr}$

or $dq(r) = -\frac{re}{a_0^2}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right) dr$ (Q_4)

$$\boxed{\text{D'où } \lambda(r) = -\frac{re}{a_0^2}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)}$$

6 Transfert de charge entre deux électrodes cylindriques

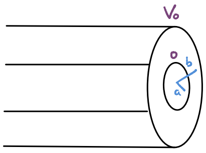
(Mines PSI 2013) Soit deux électrodes cylindriques. Les cylindres sont coaxiaux, de rayons respectifs a et b ($a < b$).

La cathode, de rayon a, est reliée à la masse. On impose une tension V_0 à l'anode. L'espace entre les deux électrodes est considéré comme vide.

1. Établissez une équation différentielle vérifiée par le potentiel et résolvez-la.
2. Des électrons sont émis de la cathode avec une vitesse initiale nulle. Trouvez une relation entre r et $\dot{r}$.
3. Exprimez le temps de vol d'un électron sous la forme d'une intégrale que vous ne chercherez pas à calculer.

Corrigé :

1



Entre a et b, il y a du vide donc $\rho = 0$

donc d'après l'équation de Laplace : $\boxed{\Delta V = 0}$

or, en cylindriques, cela revient à dire que

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

$$= 0$$

← Système à symétrie cylindrique : $V(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

D'où $\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dV}{dr}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad r\,V'(r) = cte_1$$

$$\Rightarrow \quad V'(r) = \frac{cte_1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad V(r) = cte_1 \ln(r) + cte_2$$

et
- V $\mathcal{C}^0$ en $r = a, b$
- $V(b) = V_0$
- $V(a) = 0$

Finalement, $V(a \leq r \leq b) = \dfrac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \times \ln\left(\dfrac{r}{a}\right)$

2 On a d'après le TEM que $\Delta E_m = 0$

$$\Rightarrow \quad E_{m_0} = E_m(r)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{=0} - e\underbrace{V(a)}_{=0} = \frac{1}{2}mv^2 - eV(r)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2e}{m}V(r)$$

$$= \underbrace{\frac{2e}{m}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\ln\left(\frac{r}{a}\right)}_{\geq 0 \text{ car } r \geq a}$$

et $v^2 = \dot{r}^2$ avec $\dot{r} \geq 0$

D'où $\dot{r} = \sqrt{\dfrac{2eV_0}{m\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)}$

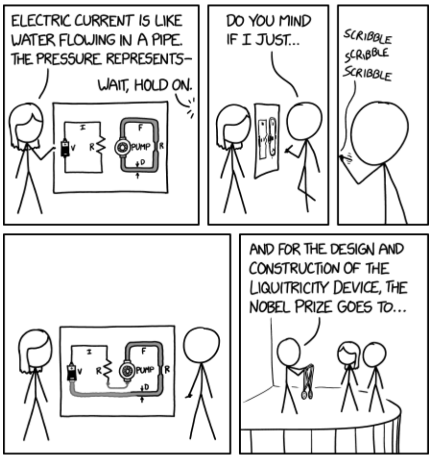
3 Soit τ le tps de vol d'un électron, on a (astuce classique) :

$$\tau = \int_0^{\tau} dt \qquad \text{et} \qquad dt = \frac{dt}{dr} \times dr = \frac{1}{\dot{r}} dr$$

$$= \int_a^{r_{final}} \frac{1}{\dot{r}} dr$$

à préciser ?

d'où $\tau = \displaystyle\int_a^{r_{final}} \left(\frac{m \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2e V_0} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)} \right)^{1/2} dr$


ELECTRIC CURRENT IS LIKE WATER FLOWING IN A PIPE. THE PRESSURE REPRESENTS–
WAIT, HOLD ON.
DO YOU MIND IF I JUST...
SCRIBBLE
SCRIBBLE
SCRIBBLE
AND FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF THE LIQUITRICITY DEVICE, THE NOBEL PRIZE GOES TO...