Khôlles : Notion de Norme, Suites, Séries

- 25 - 29 Septembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de Cours - Tout Groupe

1.1 Définition d'une norme.

Définition: Norme

Soit E, $\mathbb{K}$-EV.

On appelle Norme sur E toute application $\|\cdot\|$ respectant :

- $\|\cdot\|$ est une Forme ($\|\cdot\|$ est à valeurs dans $\mathbb{K}$)
- $\|\cdot\|$ est Définie : $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\cdot\|$ est Positive : $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$
- $\|\cdot\|$ est Absolument Homogène : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|\cdot\|$ respècte la première Inégalité Triangulaire : $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

1.2 Montrer que les normes usuelles sont des normes. (pas de norme euclidienne) (démo)

Preuve :

- $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ ($\max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i|$) :

  1. $\|\cdot\|_\infty$ est bien une forme.
  2. Soit $x \in E$ tel que $\max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i| = 0$. Alors $\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = 0 \Rightarrow x = 0$: $\|\cdot\|_\infty$ est Définie
  3. $\|\cdot\|_\infty$ est positive par construction
  4. Soient $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$. $\|\lambda x\|_1 = \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |\lambda x_i| = |\lambda| \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i| = \lambda \|x\|_1$: $\|\cdot\|_\infty$ est bien Absolument Homogène.
  5. Soient $x, y \in E$. Alors $\max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i + y_i| \leqslant \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i| + \max\limits_{j \in [\![1;n]\!]} |y_j|$: $\|\cdot\|_\infty$ respècte l'I.T.1

  $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme.

- $\|\cdot\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$:

  1. $\|\cdot\|_1$ est bien une forme.
  2. Soit $x \in E$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 0$. Alors $\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = 0 \Rightarrow x = 0$ (car somme de termes positifs nulle donne que chaque terme est nul) : $\|\cdot\|_1$ est Définie
  3. $\|\cdot\|_1$ est positive par construction
  4. Soient $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$. $\|\lambda x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = \lambda \|x\|_1$: $\|\cdot\|_1$ est bien Absolument Homogène.
  5. Soient $x, y \in E$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$: $\|\cdot\|_1$ respècte l'I.T.1 (car $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$)

  $\|\cdot\|_1$ est bien une norme.

- $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ sur $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a<b$) :

  1. $\|\cdot\|_1$ est bien une forme.
  2. Soit $f \in E$ telle que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = 0$. Alors $f = 0$ car f est continue et $|f|$ est positive : $\|\cdot\|_1$ est Définie
  3. $\|\cdot\|_1$ est positive par construction (Intégrande positive)
  4. Soient $f \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$. $\|\lambda f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |\lambda f(t)|dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)|dt = \lambda \|f\|_1$: $\|\cdot\|_1$ est bien Absolument Homogène.
  5. Soient $f, g \in E$. Alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)+g(t)|dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt$: $\|\cdot\|_1$ respècte l'I.T.1 (car $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$)

  $\|\cdot\|_1$ est bien une norme.

- $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ sur $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a<b$, ce sup existe par le théorème des bornes atteintes) :

  1. $\|\cdot\|_\infty$ est bien une forme (existence justifiée).
  2. Soit $f \in E$ telle que $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$. Alors $f = 0$: $\|\cdot\|_1$ est Définie.
  3. $\|\cdot\|_\infty$ est positive par construction.
  4. Soient $f \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$. $\|\lambda f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda| \times |f(x)| = |\lambda| \times \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$: $\|\cdot\|_\infty$ est bien Absolument Homogène.
  5. Soient $f, g \in E$. Alors $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{y\in[a,b]} |g(y)|$ respècte l'I.T.1

  $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme.

1.3 Deuxième inégalité triangulaire. (démo)

Proposition Deuxième Inégalité Triangulaire

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN. Soient $x, y \in E$.

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Preuve :

Un petit coup de théorème Belge : Soient $x, y \in E$, nous avons par la première Inégalité triangulaire :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Donc $\|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$.
En passant de l'autre côté : $\|x+y-y\| - \|y\| = \|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$.

De même avec y par symétrie des rôles, d'où la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\|$$

1.4 Montrer qu'une boule est convexe. (démo)

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN. Soit $a \in E$, soit $r \in \mathbb{R}_+$

- On note $B_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$ La boule fermée de centre a et de rayon r.
- On note $B_o(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ La boule ouverte de centre a et de rayon r.
- On note $S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$ La sphère de centre a et de rayon r

Définition: Convexité

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN.

On dit qu'une partie P de E est convexe si :

$$\forall x, y \in P,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in P$$

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}$-EVN.

Une boule de E est convexe.

Preuve :

Soient $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+$
Soient $x, y \in B_f(a,r)$, soit $\lambda \in [0,1]$. Posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

$$\begin{aligned}
\|z-a\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y - a\| \\
&= \|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda a + (1-\lambda)a)\| \\
&= \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\| \\
&\leqslant |\lambda|\|x-a\| + |1-\lambda|\|y-a\| \\
&\leqslant \lambda r + (1-\lambda)r \\
&\leqslant r
\end{aligned}$$

Alors $z \in B_f(a,r)$: $B_f(a,r)$ est Convexe. (Idem pour une boule ouverte).

1.5 Unicité de la limite d'une suite si elle existe. (démo).

Preuve :

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Supposons que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$ avec $l, l' \in E$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|l - l'\| = \|l - x_n + x_n - l'\| \leqslant \|l - x_n\| + \|x_n - l'\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $\|l - l'\| = 0$: $l = l'$.

1.6 Exemple de deux normes non équivalentes.

Montrons que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes :

Intéressons nous à la famille de fonctions $(f_n)_n = (x^n)_n \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x^n\|_\infty = 1$, alors que $\|x^n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Nous avons donc $(f_n)_n \to \tilde{0}$ pour $\|\cdot\|_1$, mais $(f_n)_n \not\to \tilde{0}$ pour $\|\cdot\|_\infty$: $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$

1.7 Définition d'une série convergente. Montrer que le reste tend vers 0 (démo)

Définition: Série Convergente

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN, soit $(u_n)_n \in E^n$.

On dit que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge si la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_N$ converge.

On note alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cette limite.

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN, soit $(u_n)_n \in E^n$.

Si la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge, alors le reste $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ Existe et converge vers 0.

Preuve :

Supposons que $\displaystyle\sum_n u_n$ Converge. On pose $L \in E$ cette limite.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons $S_N + R_N = L$. Or, $S_N \to L$, donc $R_N = L - S_N \to 0$

1.8 Séries de Riemann par comparaison à une intégrale « à la main » (démo)

Définition: Série de Riemann

On appelle "Série de Riemann" une série de la forme $\sum_n \frac{1}{n^s}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Proposition

Une série de Riemann converge si et seulement si s>1.

Preuve :

Montrons que $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, ce qui donnera la divergence de toute série de Riemann avec $s \leqslant 1$:

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Soit $n \geqslant 2$, soit $t \in [n-1, n[$ et $w \in]n, n+1]$.

Par décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{w}$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n} \geqslant \int_{n}^{n+1} \frac{dw}{dn} \geqslant \int_{n}^{n+1} \frac{dw}{w}$$

Ainsi, en sommant :

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{dw}{w}$$

Donc :

$$\int_{1}^{N} \frac{dt}{t} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \int_{2}^{N+1} \frac{dw}{w}$$

Finalement :

$$\ln(N) + 1 \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1) - \ln(2) + 1$$

Par théorème d'encadrement (après avoir ajouté $\frac{1}{1}$), la suite des sommes partielles diverge : $\sum_n \frac{1}{n}$ Diverge.

En revanche, si s>1, les intégrales encadrantes ne sont plus en ln, mais donnent l'encadrement :

$$\int_{1}^{N} t^{-s} dt + 1 \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \geqslant \int_{2}^{N+1} w^{-s} dw + 1$$

Ce qui se calcule comme

$$\frac{N^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} + 1 \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \geqslant \frac{(N+1)^{-s+1}}{-s+1} - \frac{2}{-s+1} + 1$$

Or l'encadrement tend vers deux constantes car s>1. Ainsi, La suite des sommes partielles converge (croissante et majorée) : $\sum_n \frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si s>1

1.9 Une série absolument convergente est convergente. (démo)

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN, soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

On dit que la série $\sum\limits_n u_n$ est Absolument Convergente si $\sum\limits_n \|u_n\|$ est Convergente.

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN de DIMENSION FINIE, soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

Alors $\sum\limits_n u_n$ est Absolument Convergente $\Rightarrow \sum\limits_n u_n$ est Convergente.

Preuve :

• Considérons d'abord le cas $E = \mathbb{R}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n{}^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n{}^- = \min(u_n, 0)$.

Nous avons alors pour tout n : $u_n{}^+ + u_n{}^- = u_n$ et $u_n{}^+ - u_n{}^- = |u_n|$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n{}^+ \leqslant |u_n|$. On note $S_N{}^+ = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n{}^+ \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ qui converge.

Donc, $(S_N{}^+)_N$ est croissante et majorée, cette suite converge donc : $\sum\limits_n u_n{}^+$ Converge.

De même pour $u_n{}^-$: $\sum\limits_n u_n{}^-$ Converge : Par somme, nous avons alors $\sum\limits_n u_n{}^+ + u_n{}^- = \sum\limits_n u_n$ Converge.

• Si E est de dimension p muni de $\|\cdot\|_E$, on se ramène par théorème d'isomorphisme au cas $E = \mathbb{K}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (x_n^1, \ldots, x_n^p)^\top$.

E étant de dimension finie, toute les normes sur E sont équivalentes : On se ramène au cas de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Ainsi, si $\sum\limits_n \|u_n\|_E$ converge, alors $\sum\limits_n \|u_n\|_\infty$ Converge. Or, pour tout $k \in [\![1;p]\!],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n^k| \leqslant \|u_n\|_\infty$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, nous nous ramenons au cas de $E = \mathbb{R}$: $\sum\limits_n x_n^k$ Converge Absolument, donc Converge.

Dans tous les cas, $\sum\limits_n u_n$ Converge.

1.10 Critère de convergence des séries alternées (démo)

Proposition Critère des Séries Alternées

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ soit du signe de $(-1)^n$
- $(|u_n|)_n$ est décroissante.
- $|u_n| \to 0$

Alors :

- $\sum_n u_n$ Converge
- R_p est du signe de u_{p-1} et $|R_p| \leqslant |u_{p-1}|$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

Preuve :

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$. Montrons que $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes :

- $S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+2} - u_{2N+1} \leqslant 0$ car $|u_{2N+2}| \leqslant |u_{2N+1}|$: (S_{2N}) est décroissante.
  Idem, (S_{2N+1}) est croissante.
- $S_{2N+1} - S_{2N} = u_{2N+1} \to 0$ par Hypothèse.

Ainsi, $\exists l \in \mathbb{R},\ S_{2N} \to l$ et $S_{2N+1} \to l$: Donc $S_n \to l$: $\sum_n u_n$ Converge.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_1 \leqslant S_n \leqslant S_0 \Rightarrow\ 0 \leqslant S_1 \leqslant l \leqslant S_0$.

1.11 Exemple de suites équivalentes telles que les séries associées ne soient pas de même nature. (démo)

Exemple

Prenons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or, ceci diverge : La première fraction Converge par CSA, La deuxième Diverge, et la troisième converge car est de Riemann avec α>1.
Ainsi, $\sum_n u_n$ Diverge.

Or, $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et cette série Converge par CSA.

1.12 Citer précisément la règle de d'Alembert

Théorème Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $l<1$, alors $\sum_n u_n$ Converge
2. Si $l>1$, alors $\sum_n u_n$ Diverge
3. Si $l = 1$, On ne peut rien déduire.

2 Questions de Cours - Groupe B et C

2.1 Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes. (démo)

Proposition
Soit E, $\mathbb{K}$-EV, soient $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$, deux normes équivalentes sur E. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \to l \in E$.

$$[x_n \to l \text{ pour } \|\cdot\|_a] \iff [x_n \to l \text{ pour } \|\cdot\|_b]$$

Preuve :

Par définition de deux normes équivalentes : $\exists \alpha, \beta > 0,\ \forall x \in E,\ \alpha\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant \beta\|x\|_a$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \|x_n - l\|_b \leqslant \beta\|x - l\|_a$: Si $\|x_n - l\|_a \to 0$, alors, par théorème d'encadrement, $\|x_n - l\|_b \to 0$

2.2 Citer complètement les théorèmes de Sommation des Relations de Comparaison

Proposition Sommation des Relations de Comparaison - Cas Convergent
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Converge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ CV} \\ R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v)) \end{cases}$
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Converge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ CV} \\ R_n(u) = o(R_n(v)) \end{cases}$
3. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum\limits_n v_n$ Converge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ CV} \\ R_n(u) \sim R_n(v) \end{cases}$

Proposition Sommation des Relations de Comparaison - Cas Divergent
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Diverge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ DV} \\ S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v)) \end{cases}$
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Diverge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ DV} \\ S_n(u) = o(S_n(v)) \end{cases}$
3. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum\limits_n v_n$ Diverge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ DV} \\ S_n(u) \sim S_n(v) \end{cases}$

2.3 Critères de convergence (démo pour $\leqslant$, on en déduit pour o, $\mathcal{O}$, équivalent)

Proposition Boîte à outils

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$ (Termes Positifs!)

1. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum\limits_n v_n \text{ CV} \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_n u_n$ CV.

2. $\begin{cases} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ \sum\limits_n v_n \text{ CV} \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_n u_n$ CV.

3. $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \sum\limits_n v_n \text{ CV} \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_n u_n$ CV.

4. $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ sont de même nature.

Preuve :

1. Montrons la première implication. Les autres en découlent par la définition de $\mathcal{O}$, o et $\sim$.

   Remarquons que $(S_N)_N = \left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n\right)_N$ constitue une suite croissante et majorée :
   La croissance vient de la positivité des u_n : $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geqslant 0$.
   La majoration vient de la convergence de $\sum\limits_n v_n$.

   Ainsi, $(S_N)_N$ converge car est croissante et majorée : $\sum\limits_n u_n$ CV.

2. Par définition : $u_n = \mathcal{O}(v_n) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant K v_n$.
   Or, $\sum\limits_n v_n$ Converge, donc $\sum\limits_n K v_n$ converge (la nature d'une série n'est pas impactée par les premiers termes).
   Donc $\sum\limits_n u_n$ converge.

3. Par définition, $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$ car $u_n = o(v_n) \Rightarrow \exists (\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \varepsilon_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \varepsilon_n v_n$.
   Donc $\sum\limits_n u_n$ Converge.

4. Par définition, $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ et $u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$. D'où la nature des séries identique.

2.4 Principe de transformation suite-série, exemple : la constante d'Euler (démo)

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN, soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

$$(u_n) \text{ Converge } \iff \sum_n u_{n+1} - u_n \text{ Converge}$$

Exemple (La constante d'Euler)

Posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Nous avons alors $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Posons $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ Converge (est de Riemann avec $\alpha > 1$), donc la série des $\sum_n u_{n+1} - u_n$ Converge, donc (u_n) Converge.

Il existe alors $\gamma \in \mathbb{R}$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ et $u_n - \gamma = o(1)$.

Donc : $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$

2.5 Règle de d'Alembert (démo)

Théorème Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $l < 1$, alors $\sum_n u_n$ Converge
2. Si $l > 1$, alors $\sum_n u_n$ Diverge
3. Si $l = 1$, On ne peut rien déduire.

Preuve :

1. Nous avons l'existence d'un $\varepsilon > 0$, avec $l + \varepsilon < 1$ (par exemple : $\varepsilon = \frac{l+1}{2} < 1$).

   Alors, par convergence de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant (l+\varepsilon)$. Donc $u_{n+1} \leqslant u_n \times (l+\varepsilon)$.

   Par récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0} \times (l+\varepsilon)^p$.

   Or, $\sum_p (l+\varepsilon)^p$ car est géométrique, de raison inférieure strictement à 1 en module. Donc, $\sum_p u_{n_0+p}$ Converge : $\sum_n u_n$ Converge.
2. Si $l > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: La série Diverge Grossièrement (car est à termes positifs)
3. Prenons l'exemple de $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   Or, ceci est valable pour tout α, et cette série est divergente pour $\alpha = 1$ mais convergente pour $\alpha = 2$.

2.6 Définition d'une famille sommable, de réels positifs, puis de complexes.

Définition: Famille Sommable

1. Soit I, fini ou Dénombrable. Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$.

   On pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{ fini}}} \left(\sum_{j\in J} u_j\right) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

   On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$

2. Avec $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ ou $\mathbb{C}^I$:

   On dit que $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\iff \displaystyle\sum_n v_n$ Converge Absolument.

2.7 Citer le théorème de sommation par paquets (version réelle positive + version complexe)

Théorème de Sommation par Paquets

Soit $I = \displaystyle\bigsqcup_{j\in J} I_j$ avec J fini ou Dénombrable ($\bigsqcup$ = Union disjointe. Nous avons alors une partition de I) et tel que $\forall j \in J,\ I_j$ soit Fini ou dénombrable ($\Rightarrow$ I dénombrable).

1. Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$

2. Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ ou $\mathbb{C}^I$. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$

2.8 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (démonstation)

Proposition Produit de Cauchy de deux Séries Absolument Convergentes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, deux suites avec $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ Absolument Convergentes.

Alors, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$

Preuve :

Par hypothèse, nous avons (u_p) et (v_q) sommables car les séries associées Convergent Absolument.
Alors, $(u_p \times v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est Sommable.

Posons la partition de $\mathbb{N}^2$: $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \Delta_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$ (des diagonales du plan $\mathbb{N}^2$).

Alors, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(u_p \times \sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_p v_q = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q$

Or, par théorème de sommation par paquets :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_p v_q = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in\Delta_n} u_p v_q = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Deux définitions équivalentes d'une valeur d'adhérence d'une suite. (démo de l'équivalence)

Définition: Valeur d'adhérence d'une suite

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN, soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, soit $a_i n E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence à la suite $(x_n)_n$ si :

1. Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

   Ou

2. $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ B_f(a,r)$ contient une infinité de termes de $(x_n)_n$

Preuve* (de l'équivalence) *:

Supposons (1). Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \to a$:
$\forall r > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_{\varphi(n)} - a\| \leqslant r \Rightarrow\ x_{\varphi(n)} \in B_f(a,r)$.

Ainsi, pour tout $r > 0$, la boule fermée de rayon r, centrée en a possède une infinité de termes extraits de la suite $(x_n)_n$.

Réciproquement, supposons (2). Posons la suite de rayons $(r_n)_n = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_n$. On construit par récurrence φ :

Pour $r = 1$, $B_f(a,1)$ contient une infinité de termes. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ x_{n_0} \in B_f(a,1)$. Posons donc $\varphi(0) = n_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit φ jusqu'au rang n.
$B_f(a, r_{n+1})$ contient une infinité de termes : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 > \varphi(n)$ et $x_{n_0} \in B_f(a, r_{n+1})$. Posons donc $\varphi(n+1) = n_0$.

Ainsi, φ est bien une extractrice (strictement croissante) et $\|x_{\varphi(n)} - a\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ par construction, donc $x_{\varphi(n)} \to a$

3.2 Sommation des relations de comparaison (cas divergente et cas convergent). (démo), Application au Th de Césaro.

Proposition Sommation des Relations de Comparaison - Cas Convergent
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Converge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ CV} \\ R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v)) \end{cases}$

2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Converge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ CV} \\ R_n(u) = o(R_n(v)) \end{cases}$

3. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum\limits_n v_n$ Converge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ CV} \\ R_n(u) \sim R_n(v) \end{cases}$

Preuve **:**

1. Nous avons déjà la convergence de $\sum\limits_n u_n$ grâce à la "Boîte à outils".
   Par définition d'un $\mathcal{O}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists K \in \mathbb{R}_+, \ \forall n \geqslant n_0, \ u_n \leqslant K v_n$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall m \geqslant n, \quad \sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant K \sum\limits_{k=n+1}^{m} v_k \Rightarrow R_n(u) \leqslant K R_n(v)$ par passage à la limite sur m.
   Finalement, $R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v))$.

2. Idem pour un o.

3. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = v_n + o(v_n)$. Posons w_n ce $o(v_n)$.

   Nous avons alors $R_n(u) = R_n(v) + R_n(w)$ et $R_n(w) = o(R_n(v)) \Rightarrow R_n(u) = R_n(v) + o(R_n(v)) \Rightarrow R_n(u) \sim R_n(v)$.

Proposition Sommation des Relations de Comparaison - Cas Divergent
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Diverge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ DV} \\ S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v)) \end{cases}$

2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_n v_n$ Diverge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ DV} \\ S_n(u) = o(S_n(v)) \end{cases}$

3. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum\limits_n v_n$ Diverge, Alors $\begin{cases} \sum\limits_n u_n \text{ DV} \\ S_n(u) \sim S_n(v) \end{cases}$

Preuve :

Identiques au cas Convergent.

Exemple (Théorème de Césaro)

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \to l \in \mathbb{R}$. Montrons que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \to l$:

- Si $l \neq 0$: (supposons $l>0$). Alors, pour n assez grand : $u_n>0$.

  $u_n \to l \Rightarrow u_n \sim l$. Or, $l>0 \Rightarrow \displaystyle\sum_n l$ Diverge. Ainsi, $\displaystyle\sum_n u_n$ est divergente, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k \sim \sum_{k=0}^{N} l = l \times (N+1)$.

  Donc, $\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_n \sim l \Rightarrow \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_n \to l$

- Si $l = 0$: $u_n \to 0 \Rightarrow u_n = o(1)$. Posons donc $v_n = 1$.

  Alors, $\displaystyle\sum_n v_n = \sum_n 1$ est Divergente : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = o(n+1)$.

  Donc, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o(1) \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \to 0$

Dans tous les cas, $u_n \to l \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \to l$

3.3 Démonstration de la formule de Stirling. (démo)

Théorème Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \times n^{n+\frac{1}{2}} \times e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Preuve :

Posons $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n \times \sqrt{n}}$. Montrons que cette suite converge dans $\mathbb{R}$. Il restera alors à montrer que cette limite l vaut $\sqrt{2\pi}$:

Posons $v_n = \ln(u_n)$. Alors, $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left(e \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1/2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2}$ Converge : Par transformation Suite-Série, la suite v_n Converge : $\ln(u_n)$ Converge, donc u_n Converge.

Déterminons alors cette constante : Posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos(t))^n \, dt$.

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^{n+1} \times \cos(t) dt \\ &= \Big[\sin(t) \times (\cos(t))^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin(t) \times (n+1) \times \sin(t)\,(\cos(t))^n \, dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t)) \times (\cos(t))^n \, dt \\ W_{n+2} &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

D'où la relation de Récurrence : $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

Nous calculons facilement $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Par récurrence immédiate :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p \times p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Nous remarquons également que $W_{2p} \times W_{2p+1} = \dfrac{1}{2p+1} \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $(2p+1) \times W_{2p} \times W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Or, $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\ \cos(t) \in [0,1] \Rightarrow\ \cos^{n+2}(t) \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^{n}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$: D'où l'équivalent $W_{n+1} \sim W_n$.

Ainsi, $n{W_n}^2 \sim \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow\ W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (avec $W_n > 0$).

Or, nous avions $n! \sim l \times \sqrt{n} \times n^n \times e^{-n}$.

Ainsi, $(n!)^2 \sim l^2 \times n^{2n} \times n \times e^{-2n}$ et $(2n)! \sim l \times \times (2n)^{2n} \times \sqrt{2n} \times e^{-2n}$.

Donc, $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \sim l \times \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \Rightarrow\ \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \times 4^n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{l}{\sqrt{2}}$, donc ce ratio tend vers $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

Dès lors, $\dfrac{l}{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to +\infty} W_{2n+1} \times \dfrac{2n+1}{\sqrt{n}}$. Or, $\dfrac{W_{2n+1}}{\sqrt{n}} \times (2n+1) \sim \sqrt{\pi}$.

Par unicité de la limite : $l = \sqrt{2\pi}$. D'où la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times n^n \times e^{-n}$$

3.4 Résultats sur les séries de Bertrand (HP) (démo)

Définition: Série de Bertrand

On appelle série de Bertrand toute série de la forme $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition

Une série de Bertrand ne converge que si $\alpha>1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta>1$

Preuve :

(On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$).

- Si $\alpha<0$: $\frac{n^{-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \not\to 0$: La série associée Diverge Grossièrement par Croissance Comparées.
- Si $\alpha \in [0,1[$:

  $n^{\frac{\alpha+1}{2}} \times u_n = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln(n)^\beta} \to +\infty.$

  Ainsi, pour n assez grand, $n^{\frac{\alpha+1}{2}} \times u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n \geqslant \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$. Or, ceci est le terme d'une Série de Riemann Divergente (car l'argument est <1).
  Ainsi, $\sum_n u_n$ Diverge.
- Si $\alpha>1$:

  $n^{\frac{\alpha+1}{2}} \times u_n = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln(n)^\beta} \to 0$. Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$.

  Or, ceci est le terme général d'une Série de Riemann Convergente (car l'argument est >1). Ainsi, par théorème de sommation des Relations de Comparaison, $\sum_n u_n$ Converge.
- Si $\alpha = 1, \beta<0$:

  Nous avons alors pour n assez grand ($n \geqslant 3$), $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Or, la série $\sum_n \frac{1}{n}$ Diverge, alors $\sum_n u_n$ Diverge.
- Si $\alpha = 1, \beta \geqslant 0$:

  Par comparaison Série-Intégrale (également appelé Critère Intégral de Cauchy), nous avons que la série $\sum_n u_n$ est de la même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta} dt$.

  Or, par le changement de variables bijectif, $\mathscr{C}^1$, croissant $u = \ln(t)$, $t = e^u$, $dt = du \times e^u$, l'intégrale devient :

  $$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$$

  Or, cette intégrale ne Converge que lorsque $\beta>1$.

3.5 Transformation d'Abel (HP), montrer que $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n}$ converge. (démo)

Théorème Transformation d'Abel

La transformation d'Abel correspond à une IPP pour les séries :

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que :

- La suite $(A_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ est Bornée
- La série $\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}|$ Converge
- $b_n \to 0$

Alors, la série $\sum_n a_n b_n$ est Convergente.

Exemple (Application à $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n}$)

Posons $u_n = \frac{\sin(n \times \alpha)}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sin\left(\frac{\alpha \times (n+1)}{2}\right)$ (Somme de Dirichlet).

Alors, posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$. Nous avons de plus $\sin(n\alpha) = S_n - S_{n-1}$. Alors:

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{k=1}^{N} (S_k - S_{k-1}) \times \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{k} - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{S_p}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_N}{N}
\end{aligned}$$

Nous avons de plus, $\left|\frac{S_N}{N}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) N} \to 0$.

On note $W_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_k}{k(k+1)}$ et $w_k = \frac{S_k}{k(k+1)}$. Nous avons $|w_k| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(k)(k+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Or, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ Converge, donc $\sum_n w_n$ Converge Absolument, Donc $W_N \to l \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $T_N \to l + 0 \Rightarrow \sum_n u_n$ Converge.

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1. Question de Cours : $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ et $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Question 2. Mentionnons que $\|\cdot\|_1$ est :

- Forme
- Définie
- Positive
- Absolument Homogène
- Respectant la première inégalité triangulaire.

Question 3. Soit $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, convergeant vers g pour $\|\cdot\|_\infty$ (i.e $\|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors par définition : $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f_n - g| \to 0 \Rightarrow\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - g(x)| \to 0$.
Donc : $\forall \varepsilon{>}0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, en passant à l'intégrale (qui conserve les inégalités) : $\displaystyle\int_a^b |f_n(t) - g(t)|dt = \|f_n - g\|_1 \leqslant \varepsilon \times (b-a)$. D'où le fait que $(f_n)_n$ converge vers g pour $\|\cdot\|_1$

Question 4. Non : Ces deux normes sont un contre-exemple classique (qui figure dans le cours!). Il suffit de considérer $(x \mapsto x^n)_n$ sur $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. En effet, cette suite converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$, mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$:

$\displaystyle\int_0^1 |t^n|dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$. Mais $\|x \mapsto x^n\|_\infty^{[0,1]} = 1$ (en $x = 1$). Ainsi, si ces deux normes étaient équivalentes, il existerait $\alpha, \beta{>}0$ tels que $\forall f \in E,\ \ \alpha\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \beta\|f\|_1$. Or ceci ne peut avoir lieu pour la suite définie précédemment.

4.2 Exercice 2

Question 1. Il ne peut exister de telle norme, car $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un anneau intègre : Nous pouvons avoir deux matrices $A, B \in E\setminus\{0\}$ telles ques $A \times B = 0$ (prendre deux Applications linéaires telles que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$). Si une telle norme N existait, nous aurions $N(AB) = 0 = N(A)N(B)$. Or, $\mathbb{R}$ est intègre, donc $N(A) = 0$ ou $N(B) = 0$, ce qui n'est pas le cas, car par définition d'une norme, cette dernière possède le caractère défini : Seul 0 est de norme nulle.

Question 2. Cette fois, nous pouvons exhiber $N : A \mapsto n \times \|A\|_\infty := n \times \displaystyle\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |A_{i,j}|$ qui convient :

Soient $A, B \in E$. Alors $N(AB) := n \displaystyle\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|B\|_\infty \left|\sum_{k=1}^n A_{i,k}\right| \leqslant n\|B\|_\infty\|A\|_\infty \leqslant n^2\|B\|_\infty\|A\|_\infty =$ $N(A)N(B)$: D'où la sous-multiplicativité de N.

4.3 Exercice 3

Remarquons que $\sum_n u_n$ est divergente : $\forall n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$, et $\sum_n \dfrac{1}{n}$ est divergente. Or, la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, d'où la divergence de $\sum_n u_n$.

Comparons la série et l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$: Nous remarquons (en dérivant) que f est décroissante pour $x \geqslant e$. D'où l'encadrement :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geqslant f(n) \geqslant \int_{n}^{n+1} f(t)dt$$
$$\int_{3}^{N} f(t)dt \geqslant \sum_{n=3}^{N} f(n) \geqslant \int_{4}^{N+1} f(t)dt$$

Or, f se primitive simplement en remarquant que f est de la forme $u' \times u$, donc s'intègre en $\dfrac{u^2}{2}$:

$$\left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_3^N \geqslant \sum_{n=3}^{N} f(n) \geqslant \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_4^{N+1}$$
$$\frac{\ln^2(N)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} \geqslant S_N \geqslant \frac{\ln^2(N+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$$

En divisant par $\dfrac{\ln^2(N)}{2}$, il vient l'encadrement : $1 - \dfrac{2}{\ln^2(N)}K_0 \geqslant \dfrac{2S_N}{\ln^2(N)} \geqslant \dfrac{\ln^2(N+1)}{\ln^2(N)} - \dfrac{2}{\ln^2(N)}K_1$

(En notant $K_0 = \dfrac{\ln^2(3)}{2} + \dfrac{\ln(2)}{2}, K_1 = \dfrac{\ln^2(4)}{2} + \dfrac{\ln(2)}{2}$)

Or, $\ln(N+1) = \ln\left(N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)\right) = \ln(N) + \ln\left(1+\dfrac{1}{N}\right)$, donc le quotient $\dfrac{\ln^2(N+1)}{\ln^2(N)}$ tend vers 1.

Ainsi, par théorème d'encadrement, $\dfrac{S_N}{\frac{\ln^2(N)}{2}} \to 1$, donc $S_N \sim \dfrac{\ln^2(N)}{2}$

4.4 Exercice 4

1. La série associée Diverge, car $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, donc $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim 1$ et est de signe constant. Nous pouvons donc affirmer la divergence par sommation des relations de comparaison, du fait que $\sum_n 1$ est divergente.

2. La série associée converge : $1 - \cos\dfrac{\pi}{n} = \left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. Or, les séries $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum_n \dfrac{1}{n^4}$ sont absolument convergentes (Séries de Riemann, de paramètre >1). Donc, par somme, il vient que $\sum_n 1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$ Converge.

3. La série associée diverge grossièrement!

4. La série associée converge, car $\dfrac{2}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant 4$. Ainsi, $0 \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et la série $\sum_n \dfrac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente. Ainsi, les sommes partielles de la série $\sum_n \dfrac{2^n}{n^n}$ sont croissantes et majorées. La suite des sommes partielles converge alors, ce qui donne la convergence de la série.

5. La série associée diverge grossièrement!

6. La série associée converge : La formule de Stirling donne : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. Ainsi, $\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées. Ceci donne bien la convergence de la série $\sum_n \frac{n!}{n^n}$.

7. La série associée converge : Idem, $\frac{n^3 3^n}{n!} \sim \frac{n^3(3e)^n}{\sqrt{2\pi n} n^n} = \frac{n^3}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3e}{n}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, car pour n assez grand, $\frac{3e}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, donc par croissances comparées, $n^3\left(\frac{3e}{n}\right)^n \to 0$ (et la division par $\sqrt{n}$ ne fait rien pour arranger les choses).

8. La série associée converge : Remarquons que le CCSA s'applique : $\cos(n^2\pi) = (-1)^n$, car n et n^2 sont de même parité. De plus, $\frac{1}{n\ln(n)}$ est de signe constant, et décroît vers 0 en valeur absolue. Ainsi, le CCSA donne bien la convergence de cette série.

9. La série associée diverge : Rappelons que $\cosh(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$, donc $\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-1 \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\sqrt{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-1} = \sqrt{\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}n}\sqrt{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{2}n}$, et cette série est divergente.

10. La série associée est divergente : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}^3}\right)$, donc $\frac{\ln(1+\sqrt{n}^{-1})}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, et cette série est divergente, car $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, et $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, car est de Riemann, de paramètre >1.

    <u>Désormais, la rédaction sera laissée au lecteur. Seul l'argument principal sera esquissé.</u>

11. La série associée est Convergente car le CCSA s'applique pour n assez grand.

12. La série associée est Convergente : Le terme général est de signe constant, et équivaut à $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$ par croissances comparées.

13. La série associée est Divergente : Le terme général est plus grand que $\frac{1}{n}$ (pour n assez grand, $\sqrt{n}-1 \leqslant \sqrt{n}+1 \leqslant n$)

14. La série associée est Convergente : Le terme général est en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

15. La série associée est Divergente : Le terme général est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

16. La série associée est Convergente : L'intérieur de la parenthèse est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, ce qui donne une série convergente lorsque ce terme est mis à la puissance $\frac{4}{3}>1$

17. La série associée est Convergente : En développant le cosinus, les séries obtenues sont absolument convergentes.

18. La série associée est Divergente : Il faut développer les deux termes individuellement, puis se ramener au même dénominateur pour obtenir un terme en $\frac{1}{n}$

19. La série associée est Divergente : Le terme général est supérieur à $\frac{1}{n}$.

4.5 Exercice 5

Développons ce terme pour en donner un développement asymptotique : $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.
Ainsi, $\cos\left(n^2\pi\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=\cos\left(n^2\pi\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)=\cos\left(-n\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$ $\sin\left(-n\pi-\frac{\pi}{3n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: La série associée Converge par CCSA et Sommation.

4.6 Exercice 6

Montrons la convergence de cette série tout en calculant sa somme : Nous remarquons un certain télescopage dans la forme donnée :

En effet, $\ln\left(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right)=\ln(2n+1)+\ln(n)-\ln(2n-1)-\ln(n+1)=\ln(n)-\ln(n+1)+\ln(2n+1)-\ln(2(n-1)+1)$

Il vient alors par télescopage que $S_N=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right)=\ln(1)-\ln(N+1)+\ln(2N+1)-\ln(1)=\ln\left(\frac{2N+1}{N+1}\right)$

Ainsi, $S_N=\ln\left(2-\frac{1}{N+1}\right)=\ln(2)+\ln\left(1-\frac{1}{2N+2}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\ln(2)$

D'où la convergence de la série donnée, avec pour valeur $\ln(2)$


Look how instinctively, the
mother croc carries the baby in
its mouth. Nature is beautiful.