Colles MPi* Semaine n°12 du 04/12/2023 au 08/12/2023 (Programme n°8)

Vallaeys Pascal

17 novembre 2023

Thème : Séries entières.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Lemme d'Abel (démo).

- Définitions du rayon + définitions équivalentes.
- Convergence normale d'une série entière sur les segments inclus dans]-R,R[(démo)
- Règle de d'Alembert pour les séries entières (démo à partir de la règle pour les séries numériques).
- Continuité d'une fonction définie par une SE sur]-R,R[(démo).
- Caractère C^∞ d'une SE sur]-R,R[(démo).
- Intégration d'une SE sur un segment inclus dans]-R,R[(démo).
- Expression des coefficients à partir des dérivées de S en 0 (démo).
- Unicité des coefficients (démo).
- DSE usuels (démo).
- Obtention du DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle : exemple de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{sin(x)}{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (après avoir été prolongée par continuité en 0).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Utilisation des relations de comparaison pour comparer les rayons de deux séries entières (démo).
- Produit de Cauchy de deux séries entières + rayon. (démo à partir du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)
- Lemme : $R(\sum n.a_n x^n) = R(\sum a_n x^n)$ (démo).
- Exemple de fonction C^∞ au voisinage de 0 non DSE (démo).
- Théorème de convergence radial d'Abel (démonstration du cas simple : si $\sum a_n$ est absolument convergente)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Équivalence entre les quatre définitions du rayon de convergence (démo).
- Démonstration du théorème de convergence radial d'Abel (démo du cas général)
- Justification du produit de Cauchy à l'aide de la sommabilité. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (CCINP MP 2022)
Soit $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.
1. Décomposer f en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité du développement.
3. a) Soit $R > 0$ et g une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ tel que pour tout $x \in\ ]-R,R[\,,\ g(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$. Exprimer une relation entre a_p et $g^{(p)}(0)$ en la prouvant.
b) En déduire une développement limité de f à l'ordre 3.

Exercice 2 : (CCINP MP 2022)
On pose, pour tout réel x : $u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = r^n(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx})$ avec r réel fixé tel que $|r| < 1$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer : $P_r(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, pour tout réel x.
3) Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x$.
4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3 : (CCINP MP 2017)
On considère la fonction f définie par $f(x) = (\arcsin x)^2$.
1) Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2) Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 2$.
3) En déduire son développement en série entière.

Exercice 4 : (Mines MP 2021)

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+1}{x^2+2x\,\mathrm{cotan}(\alpha)-1} \end{array}$, avec $\alpha \in]0;\pi[$.

Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.

Exercice 5 : (CCINP MP 2021)

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :

a) $\sum (n+1)3^n z^{2n}$

b) $\sum \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 6 : (Centrlale MP 2021)

Soit f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer, pour $r \in]0;R[$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t$.

2. On considère l'égalité suivante :

$$\forall r \in]0;R[\,,\ \forall z \in B(0,r),\ f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer l'égalité pour $f : z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer l'égalité pour la fonction f définie dans l'introduction.

Exercice 7 :

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-a,a[$ absolument monotone : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geq 0$. On note $S_n(x)$ sa somme de Taylor d'indice n, et $R_n(x)$ le reste intégral de Taylor d'indice n.

1. Montrer que $\forall x \in]0,a[$, $S_n(x)$ est croissante et majorée.
2. En déduire que la suite $(R_n(x))_{n\in\aleph}$ converge.
3. Montrer que $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.
4. En déduire que pour tout couple (x,y) de $]0,a[$, tel que x<y, on a $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.
5. Montrer que f est développable en série entière sur $]0,a[$.

Exercice 8 :

On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$.

b) En déduire que le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum a_n.z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

c) Calculer la somme de cette série entière sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

d) En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 9 : (CCINP PSI 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 = 3 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

2. On note $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. Montrer que f est bien définie sur $\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 10 : (X MP)
Montrer que $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = 4.\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(8k+1)(8k+5)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$.

Exercice 11 : (Mines MP)
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ (introduire une série entière)

Exercice 12 : (X 2007 94)
a) Montrer que $\frac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)}$ est réel.
b) En déduire une manière d'obtenir une valeur approchée de π.
c) Comparer la vitesse de convergence à celle d'autre séries donnant π.

Exercice 13 : (CCINP PSI ??)
Nature de la série de terme général $\sin(2\pi n!e)$.

Exercice 14 : (X PC 2014)
Montrer que e est irrationnel.

Exercice 15 : (Mines MP 2021)

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

2) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{s_n x^n}{n!}$ pour les x tels que la série converge. Montrer que $S(x)e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 2,20,21,22,23,24,47,51.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : séries entières. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°8
- Groupe 2 : Programme n°8
- Groupe 3 : Programme n°8
- Groupe 4 : Programme n°8
- Groupe 5 : Programme n°8
- Groupe 6 : Programme n°8
- Groupe 7 : Programme n°8
- Groupe 8 : Programme n°8
- Groupe 9 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 10 :Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 13 : Programme n°7
- Groupe 14 : Programme n°7
- Groupe 15 : Programme n°7
- Groupe 16 : Programme n°7