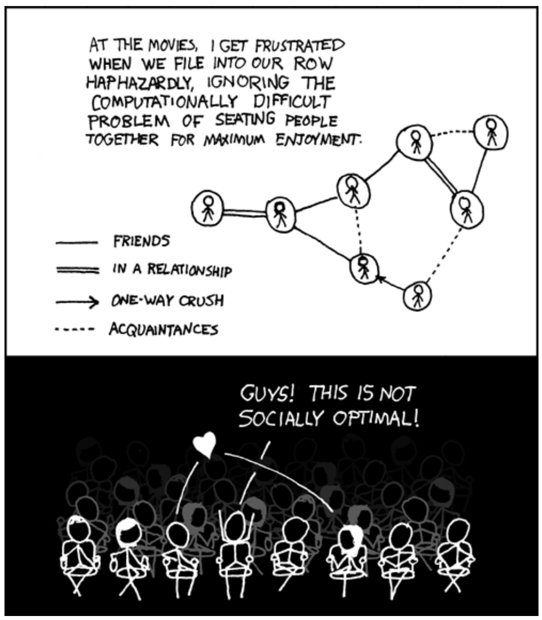
MPI* Info

Graphes de flots

TD17



Olivier Caffier

1 Introduction aux graphes de flots

Définition - Graphe de flot

Un *graphe de flot* est un quintuplet $G = (S, A, c, s, t)$ où :

- (S, A) est un graphe orienté et sans boucle (sans arc de la forme (v, v)) ;
- $s \in S$ est une source de (S, A) (degré entrant nul) et $t \in S$ est un puit de (S, A) (degré sortant nul) ;
- $c : A \to \mathbb{R}_+$ est une fonction dite de *capacité*.

On étend d'ailleurs c à tous les couples (u, v) de sommets en posant $c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin A$.

La figure 1 représente un graphe de flot G_0. Les capacités sont représentées sur les arcs.

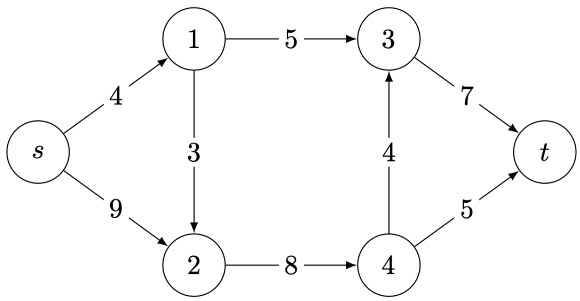


FIGURE 1 – Le graphe de flot G_0.

Définition - flot et débit

Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot.
On appelle *flot* sur G une fonction $f : S^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **Antisymétrie** : $\forall u, v \in S, f(u, v) = -f(v, u)$;
- **Respect de la capacité** : $\forall u, v \in S, f(u, v) \leq c(u, v)$;
- **Conservation** : $\forall u \in S \setminus \{s, t\}, \sum\limits_{v \in S} f(u, v) = 0$

On appelle *débit* du flot f la valeur :

$$|f| = \sum_{u \in S} f(s, u)$$

La figure 2 représente le graphe de flot G_0 et un flot f compatible avec G. Pour chaque arc (u, v) on représente sur l'arc $f(u, v)/c(u, v)$. Les autres valeurs nulles et négatives de f peuvent se déduire des valeurs positives.

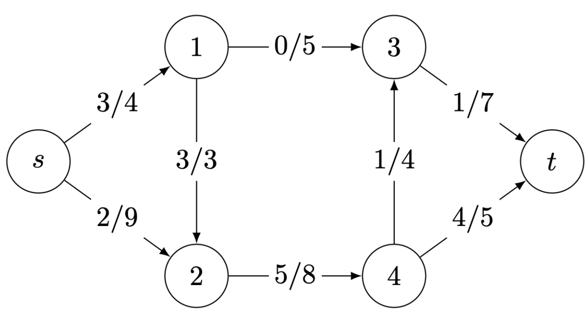


FIGURE 2 – Le graphe de flot G_0 et un flot f.

Dans la suite du sujet, G désignera toujours un graphe de flot et f un flot sur G.

Question 1. Justifier que $f(u,v) > 0$ implique que $(u,v) \in A$ et $f(u,v) < 0$ implique que $(v,u) \in A$.

Définition - flux sortant / entrant / net

On reprend les mêmes notations. Pour $u \in S$, on appelle :

- *flux sortant* de u la quantité :

$$\phi_+(u) = \sum_{v \in S, f(u,v)>0} f(u,v)$$

- *flux entrant* de u la quantité :

$$\phi_-(u) = \sum_{v \in S, f(u,v)<0} f(v,u)$$

- *flux net* de u la quantité :

$$\phi(u) = \phi_+(u) - \phi_-(u)$$

Question 2. Montrer que la condition **conservation** est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall u \in S \backslash \{s,t\}, \phi(u) = 0$$

Question 3. Montrer que $|f| = \phi(s) = -\phi(t)$.

Le problème MAXFLOW, auquel on s'intéresse dans le reste du sujet, est défini comme suit.

MAXFLOW

- **Entrée** : un graphe de flot G;
- **Sortie** : un flot f maximal, c'est-à-dire un flot tel que $|f|$ soit maximal.

Question 4. Représenter graphiquement une solution à MAXFLOW pour l'instance précédente représentée sur la figure 1. On justifiera que le flot proposé est maximal.

2 Algorithme de Ford-Fulkerson

Définition - Capacité et saturation

Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot.
On définit les termes suivants :

- La *capacité disponible d'un arc* $(u,v) \in A$ est la quantité $c(u,v) - f(u,v)$;
- Un arc est dit *saturé* si sa capacité disponible vaut zéro;
- La *capacité disponible d'un chemin* γ de s à t est le minimum des capacités disponibles de ses arcs;
- Un chemin de s à t est dit *saturé* si sa capacité disponible vaut zéro.

Si un chemin γ de s à t n'est pas saturé, il dispose d'une capacité disponible $m > 0$. On définit alors l'action de *saturation* du chemin γ comme la modification suivante de f :

```
for each (u,v) of γ do
    f(u,v) ← −f(u,v) + m
    f(v,u) ← −f(v,u) − m
```

On remarquera que, après saturation du chemin γ, f est toujours un flot sur G et que γ est désormais saturé.

La figure 3 montre le résultat de la saturation du chemin $(S,2,3,4,t)$ dans le graphe G_0 à partir du flot f de la figure 2. On a augmenté le débit de 3 le long du chemin. Les nouveaux arcs saturés sont $(2,4)$ et $(4,3)$.

On considère l'algorithme suivant :

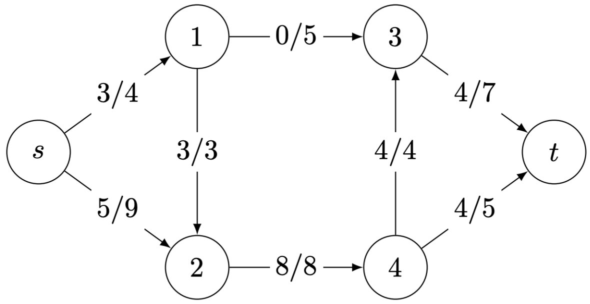


FIGURE 3 – Le graphe de flot G_0 et le flot f après saturation du chemin $(s, 2, 4, 3, t)$.

Algorithm 1 Algorithme glouton pour MAXFLOW

Require: Un graphe de flot $G = (S, A, c, s, t)$
$\forall (u, v) \in S^2, f(u, v) \leftarrow 0$
while il existe un chemin non saturé de s à t **do**
saturer ce chemin
return f

Question 5. Expliquer comment trouver un chemin non saturé de s à t dans un graphe de flot, étant donné un flot f.

Question 6. Terminer l'exécution de l'algorithme 1 sur le graphe G_0 à partir du flot f de la figure 3 et représenter graphiquement le résultat.

La question précédente et la **Q4.** montrent que l'algorithme 1 ne renvoie pas toujours un flot maximal. Pour corriger ce problème, il faut s'autoriser à faire « refluer » le flot en arrière le long d'un arc.

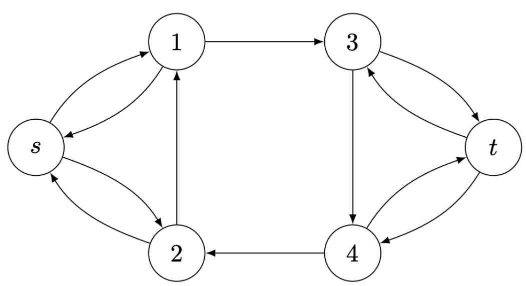
Définition - Graphe élémentaire et chemin améliorant

Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot.
On définit le *graphe résiduel* $G_f = (S, A_f)$ où

$$A_f = \{(u, v) \in S^2 \mid c(u, v) - f(u, v) > 0\}$$

Un *chemin améliorant pour* f est un chemin de s à t dans G_f.

On a représenté ci-dessous le graphe résiduel associé au flot de la figure 3 :



Question 7. Justifier que si $(u, v) \in A_f$, alors $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$.

⚠ On fera bien attention à ne pas oublier dans la suite que le graphe résiduel peut contenir des arcs qui n'étaient pas dans le graphe G initial.

Question 8. Représenter graphiquement le graphe résiduel de G_0 pour le flot obtenu à la **Q6.**

L'algorithme de Ford-Fulkerson est alors le suivant :

Algorithm 2 Ford-Fulkerson

Require: $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot
  $\forall (u, v) \in A, f(u, v) \leftarrow 0$
  while il existe un chemin améliorant pour f **do**
    saturer ce chemin
  return f

---

où f est un flot maximal sur G.

Question 9. Terminer l'exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le graphe G_0 avec le flot obtenu à la **Q6.**