TD Électromagnétisme

Dipôle électrostatique

1 Moment dipolaire de l'eau

Le moment dipolaire de la molécule d'eau vaut 1,86 D. Calculez la charge -2δ portée par l'oxygène, sachant que l'angle $\widehat{HOH}$ est de 104,5° et la longueur de la liaison H – O est de 96 pm.

2 Dipôle dans le champ d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plans uniformément chargés, l'un de charge surfacique $-\sigma < 0$ et d'abscisse $x = -a < 0$, l'autre de charge σ et d'abscisse a sur un axe Ox perpendiculaire aux plans.

Rappelons que le champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan est uniforme et donné par :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_x \tag{1}$$

Un dipôle électrostatique $\vec{p}$ est placé sur l'axe Ox en $x = 0$. L'angle qu'il fait avec $\vec{e}_x$ est noté α (figure 1).

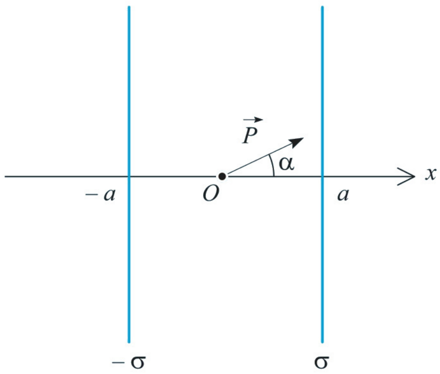

FIG. 1 : Dipôle dans le champ d'un condensateur plan.

1. Déterminez son énergie potentielle E_p pour α quelconque, en fonction de $p = \| \vec{p} \|$, σ, α et ε_0.
2. Discutez les positions d'équilibre de ce dipôle.
3. Modélisons ce dipôle comme constitué de deux charges ponctuelles, N de charge $-q < 0$ placée en $x = -b$ et P de charge $q > 0$ placée en $x = b$. Elles sont de même masse m.
   (a) Pourquoi le dipôle ne quitte-il pas sa position ?
   (b) Étudiez les petites oscillations du dipôle autour de sa position d'équilibre stable. Vous poserez $\beta = \alpha - \alpha_{\text{éq}}$, où $\alpha_{\text{éq}}$ est la valeur de α à l'équilibre stable. Donnez la période de ses oscillations.
4. Le dipôle est maintenant supposé au repos sur sa position d'équilibre stable. Rappelons que le potentiel rayonné en un point M par un dipôle $\vec{p}$ placé en O est :

$$V_d(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad r = \|\vec{r}\| \tag{2}$$

   (a) Déterminez le potentiel $V_c(M)$ rayonné par les armatures en un point M d'abscisse $x \in]-a, a[$. Le potentiel de l'armature positive sera noté U et celui de l'armature négative choisi nul.
   (b) Déduisez-en le potentiel total $V(M)$ en fonction de θ, angle repérant M défini précédemment.
   (c) Après avoir factorisé la partie angulaire dans le potentiel, montrez qu'il existe deux équipotentielles particulières $V = U/2$ que vous caractériserez.
   (d) Tracez l'allure de quelques lignes de champ.

3 Champ inconnu

Un champ électrostatique $\vec{E}$ est invariant par rotation autour d'un axe Oz. Sa divergence est nulle, sauf au voisinage de O où elle peut tendre vers l'infini.

1. Écrivez l'équation différentielle gouvernant le potentiel scalaire V.
2. Résolution de l'équation. Le laplacien en sphérique s'écrit :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} \tag{3}$$

La résolution va être faite par séparation, en cherchant une solution de la forme $V(r,\theta) = f(r)g(\theta)$.

(a) Déterminez les équations différentielles vérifiées par f et g.
(b) Vérifiez que $g(\theta) = \cos(\theta)$ est solution et cherchez f sous la forme $f(r) = Ar^\alpha$.
(c) Déduisez-en le champ électrostatique associé. Que remarquez-vous ?

4 Modèle de solvatation d'un ion

On peut modéliser la molécule d'eau comme un dipôle électrostatique de moment $p = 6{,}2.10^{-30}$ C m.

Soit quatre molécules d'eau situées aux sommets G_1 à G_4 d'un tétraèdre régulier (figure 2). La distance séparant le centre du tétraèdre d'un sommet est $d = CG_i = 0{,}3$ nm. On impose que l'axe des dipôles est colinéaire à $\overrightarrow{CG_i}$ mais pas forcément de même sens. Pour un couple quelconque de points, $\widehat{G_iCG_k} = \beta = 109°28'$.

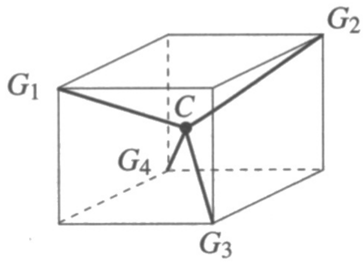

FIG. 2 : Modèle de solvatation d'un ion.

1. Établissez l'expression de l'énergie d'interaction de deux dipôles en fonction de p, d et β. Mettez en évidence trois cas possibles.
2. Déduisez-en l'énergie potentielle d'interaction de ces quatre molécules d'eau en fonction de d, p et β pour les cinq arrangements des quatre dipôles respectant les conditions imposées.
   Indication : l'énergie potentielle étant associée à une interaction, il faut faire attention à ne pas compter plusieurs fois la même interaction ! Ainsi, les forces $\vec{F}_{i\to k}$ et $\vec{F}_{k\to i}$ correspondent à une seule et même interaction (voir principe des actions réciproques).
3. Un cation de charge $e = 1{,}6.10^{-19}$ C est placé en C, ce qui modélise sa solvatation. Exprimez de nouveau les énergies potentielles d'interaction correspondant aux cinq arrangements précédents. Applications numériques en eV.
4. Quel est l'arrangement le plus stable des quatre molécules autour de l'ion ?
5. Que pensez-vous de ce modèle, sachant que l'énergie de solvatation d'un ion de cette taille est d'environ -240 kJ mol^{-1} ?