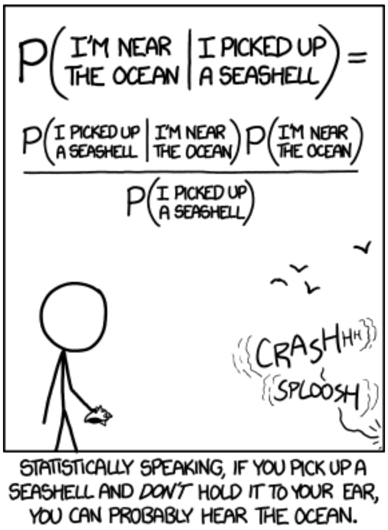
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 10



Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition d'un ensemble dénombrable

Définition - Ensemble dénombrable

On dit d'un ensemble qu'il est *dénombrable* si il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

A.2 Définition d'une tribu

Définition - Tribu

Soit Ω un ensemble.
On appelle *tribu* sur Ω un ensemble $T \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

- $\emptyset \in T$
- $\forall A \in T, \overline{A} \in T$ (stable par complémentaire)
- $\forall (A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$, on a $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in T$ (stable par union dénombrable)

Les éléments de T sont appelés des *évènements*.

A.3 Compatibilité d'une tribu avec l'intersection finie ou dénombrable

Proposition

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'évènements.
Alors :

$$\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in T$$

i.e T est stable par intersection dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$. Montrons que $\overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n}$

$x \in \overline{\bigcap_n A_n} \Leftrightarrow x \notin \bigcap_n A_n$

$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $x \notin A_{n_0}$

$\Leftrightarrow$ — tq $x \in \overline{A_{n_0}}$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_n \overline{A_n}$ $\longrightarrow$ OK

Or T est stable par complémentaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \overline{A_n} \in T$

et est stable par union finie ou dénombrable $\Rightarrow \bigcup_n \overline{A_n} \in T$

Enfin, on a montré que $\bigcup_n \overline{A_n} = \overline{\bigcap_n A_n} \in T$ et T stable par complémentaire : $\bigcap_n A_n \in T$

D'où le résultat recherché.

A.4 Définition d'une mesure de probabilité

Définition - Mesure de probabilité

Soit (Ω, T) un espace probabilisable.
On appelle *mesure de probabilité* sur (Ω, T) une application $p : T \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall A \in T, p(A) \in [0;1]$
- $p(\Omega) = 1$
- $\forall I$ ensemble dénombrable, $\forall (A_i)_{i\in I} \in T^I$ 2 à 2 disjoints, on a

$$p\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} p(A_i)$$

(σ-additivité)

A.5 La probabilité d'une union est inférieure à la somme des probabilités

Proposition

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé et soient $A, B \in T$.
Alors,

$$p(A\cup B) \leq p(A) + p(B)$$

DÉMONSTRATION. Montrons que $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

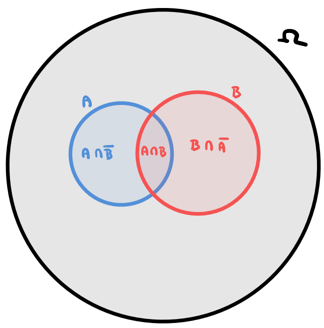
On a $A = (A\cap B) \sqcup (A\cap \bar{B})$
$B = (B\cap A) \sqcup (B \cap \bar{A})$

$\Rightarrow A\cup B = (A\cap B) \sqcup (A\cap\bar{B}) \sqcup (\bar{A}\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B) = \underbrace{P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B})}_{= P(A)} + \underbrace{P(\bar{A}\cap B)}_{= P(B) - P(A\cap B)}$

$= P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{\geq 0}$

d'où $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$



A.6 Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable, idem pour "presque sûr"

Définition - Évènements négligeables et presque sûrs

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A \in T$. Alors :

- A est dit *négligeable* si $p(A) = 0$.
- A est dit *presque sûr* si $p(A) = 1$.

Proposition

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Alors :

1. Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.
2. Une intersection dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûre.

DÉMONSTRATION.

1. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ avec I dénombrable et $\forall i \in I, p(A_i) = 0$

On a $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$ et $0 \leq p\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \leq \sum_{i\in I} \underbrace{p(A_i)}_{=0}$
≤ 0

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ est négligeable

2. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ avec I dénombrable et $\forall i \in I, p(A_i) = 1$

On a $B = \bigcap_{i\in I} A_i \in T \Rightarrow \bar{B} = \bigcup_{i\in I} \bar{A_i} \in T$

et $0 \leq p(\bar{B}) \leq \sum_{i\in I} \underbrace{p(\bar{A_i})}_{=0} \Rightarrow p(\bar{B}) = 0$

$\Rightarrow p(B) = 1$

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ est presque sûre

A.7 Formule des probabilités totales

Définition - Système quasi-complet d'évènements

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soient I un ensemble dénombrable et $(A_i)_{i\in I} \in T^I$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *système quasi-complet d'évènements* si :

1. Les (A_i) sont 2 à 2 disjoints : $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i\in I} A_i$ est presque sûre : $p\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = 1$.

Proposition - Formule des probabilités totales

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ un système quasi-complet d'évènements avec I dénombrable.
Soit $B \in T$.
Alors,

$$\boxed{p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)}$$

et si pour tout $i \in I, p(A_i) > 0$:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i\in I} p(A_i) \times p_{A_i}(B)}$$

Démonstration.

~> Si $(A_i)_i$ est un SCE :

On a $B = B \cap \Omega$
$= B \cap (\bigsqcup_{i\in I} A_i)$
$= \bigsqcup_{i\in I} (B \cap A_i)$

$\Rightarrow p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)$

~> Si (A_i) est un SQCE :

posons $\Omega = C \sqcup \bar{C}$ avec $C = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ et $p(C) = 1$

Ainsi, $B = B \cap \Omega$
$= (B \cap C) \sqcup (B \cap \bar{C})$ or $B \cap \bar{C} \subseteq \bar{C} \Rightarrow p(B \cap \bar{C}) \leq \overbrace{p(\bar{C})}^{=0}$
$\Rightarrow p(B \cap \bar{C}) = 0$

donc $p(B) = p(B \cap C) + \cancel{p(B \cap \bar{C})}$
$= p(B \cap C)$

d'où $p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)$

A.8 Formule de Bayes

Définition - Probabilité conditionnelle

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors, on définit la probabilité conditionnelle $p_B(A)$, i.e la probabilité que l'évènement A soit réalisé sachant que B l'est, par :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$$

Proposition - Formule de Bayes

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors, si $p(B) \neq 0$, on a

$$\boxed{p_B(A) = p_A(B) \times \frac{p(A)}{p(B)}}$$

Démonstration.

On a $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \times \frac{p(A)}{p(B)}$
$= p_A(B) \times \frac{p(A)}{p(B)}$ $\longrightarrow$ OK

A.9 Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont également

Définition - Évènements indépendants

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
On dit que A et B sont *indépendants* si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Définition - Famille d'évènements mutuellement indépendants et 2 à 2 indépendants

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ avec I dénombrable.

- On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ sont *mutuellement indépendants* si :

$$\forall J \subset I \text{ \underline{fini}, on a } p\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ sont 2 à 2 indépendants si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j)$$

- On a bien mut. ind. $\Rightarrow$ 2 à 2 ind. mais **la réciproque est fausse!!**

Proposition

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors,

$$A, B \text{ ind. } \Rightarrow A, \overline{B} \text{ ind.}$$

DÉMONSTRATION.

Supposons $A \perp\!\!\!\perp B$,

On a $A = A \cap \Omega$
$= A \cap (B \sqcup \overline{B})$
$= (A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$
$= p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times (\underbrace{1 - p(B)}_{= p(\overline{B})})$
$= p(A) \times p(\overline{B})$

d'où $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

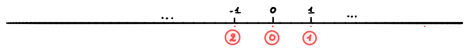
B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}_+$ est dénombrable

Proposition

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION.



On pose $\phi : n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ qui est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$

→ ok

Proposition

$\mathbb{Q}_+$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION.

↳ Cela revient à montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable

Montrons que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable

Écrivons les elts de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans un tableau que l'on parcourt en diagonale :

	0	1	2	...
0	0	2	5	...
1	1	4	...	
2	3	...		
...	...			

i.e on pose une application $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tq
$\phi((0,0)) = 0$
$\phi((1,0)) = 1$
$\phi((0,1)) = 2$
...

On peut alors la définir "pour chaque diagonale", on prend

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0;n]\!],\quad \phi((n,k)) = \frac{n(n+1)}{2} + k}$$

↳ montrer qu'il s'agit d'une bij...

B.2 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Proposition

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Montrons que $[0;1[$ n'est pas dénombrable.

Représentons chaque élément de $[0;1[$ par son écriture décimale, i.e :

$$\forall x \in [0;1[, \exists!(a_n(x))_n \in [\![0;9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x = 0, a_1(x)a_2(x)\dots$$

On remarque que, dans cette écriture, pour que deux réels diffèrent, il suffit qu'il existe une seule composante de leur écriture qui diffère, i.e :

$$\forall x, y \in [0;1[, x \neq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq. } a_n(x) \neq a_n(y)$$

Supposons alors par l'absurde que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. Alors

$$\exists (x_n) \in [0;1[^{\mathbb{N}} \text{ tq. } [0;1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Exposons alors les éléments de cette suite :

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0, a_1(x_1)a_2(x_1)a_3(x_3)\dots \\
&x_2 = 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_2)\dots \\
&x_3 = 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_3)\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Construisons alors un $\tilde{x} \in [0;1[$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{x} \neq x_n$.

Posons l'écriture décimale de $\tilde{x} = 0, a_1(\tilde{x})a_2(\tilde{x})a_3(\tilde{x})$

(1) On prend $a_1(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_1(\tilde{x}) \neq a_1(x_1)$

(2) De même, on prend $a_2(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_2(\tilde{x}) \neq a_2(x_1)$

...

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on prend $a_n(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_n(\tilde{x}) \neq a_n(x_n)$

On se retrouve alors dans cette configuration (en bleu les composantes qui diffèrent avec l'écriture décimale de $\tilde{x}$) :

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0, a_1(x_1)a_2(x_1)a_3(x_3)\dots \\
&x_2 = 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_2)\dots \\
&x_3 = 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_3)\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

On remarque alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{x} \neq x_n$, i.e $\tilde{x} \notin [0;1[$, ce qui est absurde.

$\mathbb{R}$ n'est donc pas dénombrable.

Remarques :

- Ce procédé se prénomme : le *procédé diagonal de Cantor*
- On prend les $a_i(\tilde{x})$ dans $[\![0;8]\!]$ pour éviter le problème d'une suite stationnaire convergeant vers 1.

↳ car $1 = 0,999\dots$

B.3 Théorèmes de continuité croissante et décroissante

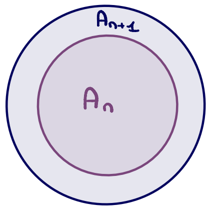
Théorème de continuité croissante

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ croissante par l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
Alors,

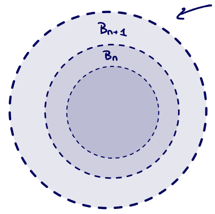
$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

DÉMONSTRATION.

On pose $B_0 = A_0$ et $\forall n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$
$= A_n \cap \overline{A_{n-1}}$



$\Rightarrow$



Ce sont des anneaux !

Alors (*)

(1) $\forall p,q \in \mathbb{N},\ p \neq q \Rightarrow B_p \cap B_q = \emptyset$

(2) $\bigsqcup_{k=0}^{n} B_k = A_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ d'où $\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$

On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (car union dénombrable d'élts de T)

$\Rightarrow p\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)$ existe et comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$,

on a
$$p\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(B_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p(B_n) = \lim_{N\to+\infty} p\Big(\underbrace{\bigsqcup_{n=0}^{N} B_n}_{=A_N}\Big) = \lim_{N\to+\infty} p(A_N)$$

$\longrightarrow$ OK

(*)

(1): Soient $p,q \in \mathbb{N}$ tq $p \neq q$, s.p.g $p > q$

Si $B_p \cap B_q \neq \emptyset$: alors $\exists \omega_0 \in B_p \cap B_q$
$\to \omega_0 \in B_p = A_p \cap \overline{A_{p-1}}$
$\to \omega_0 \in B_q = A_q \cap \overline{A_{q-1}}$
$\subset A_q$
$\subset A_{p-1}$ car $p-1 \geq q$ et (A_n) croissante

$\Rightarrow \omega_0 \in \overline{A_{p-1}} \cap A_p$ $\to$ ABS

donc les (B_p) sont bien 2 à 2 disj.

(2): On a que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k \subset A_k$
$\Rightarrow \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$
alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\omega \in A_k$
on peut ainsi définir $K_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$

si $K_0 = 0$: $\omega \in A_0 = B_0$
$\in \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k$

sinon : $\omega \in A_{K_0}$ et $\omega \notin A_{K_0-1}$
$\Rightarrow \omega \in A_{K_0} \setminus A_{K_0-1} = B_{K_0}$
$\Rightarrow \omega \in \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_k$

D'où $\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

Théorème de continuité décroissante

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ décroissante par l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

DÉMONSTRATION.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \overline{A_n}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$
$\Rightarrow C_n \subset C_{n+1}$ "le complémentaire renverse l'inclusion"

Ainsi, (C_n) est croissante par l'inclusion.

DONC, d'après le th. de continuité croissante :

$$p\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} p(C_n) \qquad (A)$$

or, $\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{A_k} = \overline{\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k}$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(C_n) = p(\overline{A_n}) = 1 - p(A_n)$

Ainsi, (A) $\Rightarrow$ $p\Big(\overline{\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k}\Big) = \lim_{n\to+\infty} 1 - p(A_n)$

i.e $1 - p\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = 1 - \lim_{n\to+\infty} p(A_n)$

D'où $p\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} p(A_n)$

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Une tribu infinie n'est pas dénombrable

Proposition

Une tribu infinie n'est pas dénombrable.

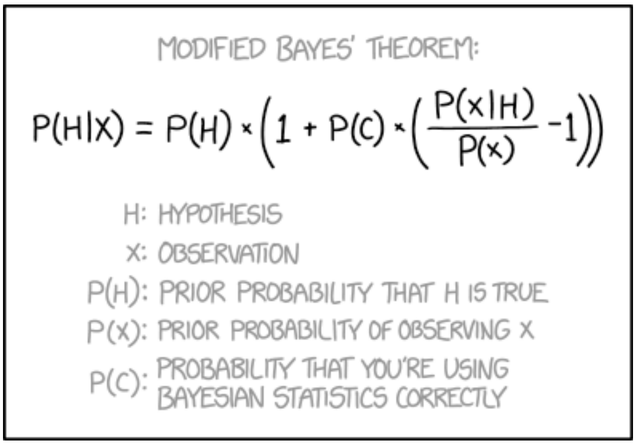
DÉMONSTRATION.

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement


MODIFIED BAYES' THEOREM:
P(H|X) = P(H) × (1 + P(C) × (P(X|H) / P(X) − 1))
H: HYPOTHESIS
X: OBSERVATION
P(H): PRIOR PROBABILITY THAT H IS TRUE
P(X): PRIOR PROBABILITY OF OBSERVING X
P(C): PROBABILITY THAT YOU'RE USING BAYESIAN STATISTICS CORRECTLY