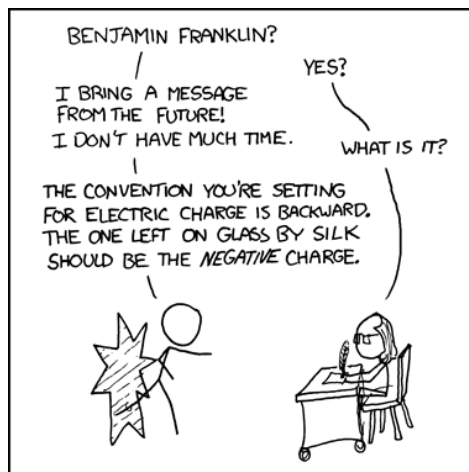


# MPI\* Physique

## Électromagnétisme

Travaux dirigés



WE WERE GOING TO USE THE TIME MACHINE TO PREVENT THE ROBOT APOCALYPSE, BUT THE GUY WHO BUILT IT WAS AN ELECTRICAL ENGINEER.

Olivier Caffier



# Liste des TDs

<b>1</b>	<b>Électrostatique 1</b>	<b>1</b>
1.1	Action d'un fil sur une charge ponctuelle . . . . .	1
1.2	Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson . . . . .	1
1.3	Condensateur cylindrique . . . . .	2
1.4	Plan épais chargé . . . . .	2
1.5	Conducteur en régime stationnaire, charge surfacique . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Électrostatique 2</b>	<b>4</b>
2.1	Nuage d'orage . . . . .	4
2.2	Condensateur cylindrique . . . . .	4
2.3	Mise en contact d'un conducteur et d'un semi-conducteur . . . . .	4
2.4	Étude d'une membrane cellulaire . . . . .	4
2.5	Potentiel de Yukawa de l'atome d'hydrogène . . . . .	5
2.6	Transfert de charge entre deux électrodes cylindriques . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Conduction électrique</b>	<b>6</b>
3.1	Vitesse des électrons libres dans un métal . . . . .	6
3.2	Courant engendré par une rotation . . . . .	6
3.3	Action d'un éclair . . . . .	6
3.4	Gravure ionique . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Dipôle électrostatique</b>	<b>8</b>
4.1	Moment dipolaire de l'eau . . . . .	8
4.2	Dipôle dans le champ d'un condensateur plan . . . . .	8
4.3	Champ inconnu . . . . .	9
4.4	Modèle de solvation d'un ion . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>10</b>
5.1	Champ dans un câble coaxial . . . . .	10
5.2	Champ magnétique d'un éclair . . . . .	10
5.3	Bobines de Helmholtz . . . . .	11
5.4	Étude d'un champ magnétique . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Compléments de magnétostatique</b>	<b>12</b>
6.1	Cadre tournant dans un champ magnétique . . . . .	12
6.2	Oscillations d'un dipôle dans le champ d'une spire . . . . .	12
6.3	Équilibre d'une barre . . . . .	12
6.4	Compression magnétique d'un plasma . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Liste des corrigés</b>	<b>14</b>

## Électrostatique 1

### 1.1 Action d'un fil sur une charge ponctuelle

On considère un fil rectiligne, de longueur supposée infinie, et porteur d'une densité linéique de charges  $\lambda > 0$ . Une charge électrique ponctuelle  $q > 0$  se trouve initialement à une distance  $r_0$  du fil, sans vitesse.

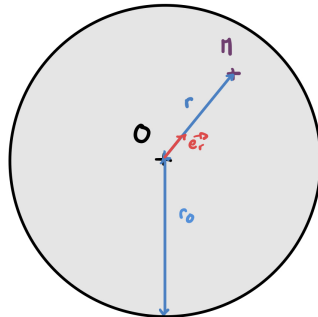
1. Calculez le champ électrique électrostatique rayonné par le fil.
2. Déduisez-en la vitesse de la charge ponctuelle quand elle se trouve à une distance  $r$  du fil.

### 1.2 Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson

J.J. Thomson, qui a découvert l'électron en 1897, avait proposé une conception de l'atome. Bien qu'il se soit révélé faux, son modèle est instructif et met en jeu des raisonnements qui rentrent dans le cadre du programme.

Dans l'atome d'hydrogène, Thomson a supposé que la charge positive était uniformément répartie en volume, tandis que la charge négative était assimilable à une particule ponctuelle chargée se déplaçant dans ce volume.

La charge positive totale est notée  $e$ , la charge de l'électron  $-e$ . La sphère délimitant l'atome est de centre  $O$  et de rayon  $r_0$ . L'électron est de masse  $m_e$  et repéré par le point  $M$  (cf. figure ci-dessous).



#### 1. Étude du champ de l'ion $H^+$

- (a) Calculez  $\rho$ , la densité volumique de charge associée à la charge positive.
- (b) Étudiez les symétries et invariances du champ électrique rayonné en tout point.
- (c) Calculez le champ électrique rayonné par l'ion en tout point  $M$  de l'espace, en fonction de  $e$ ,  $r_0$ ,  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ ,  $\epsilon_0$  et  $\overrightarrow{OM}$ . Commentaire? Tracez l'allure de sa norme  $E(r)$ .

#### 2. Étude du mouvement de l'électron

Son poids est négligé, il n'est donc soumis qu'à l'attraction électrostatique de la charge positive. Vous supposerez qu'il n'y a pas d'ionisation :  $r$  reste inférieur à  $r_0$ .

- (a) Démontrer que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2 \overrightarrow{OM}$$

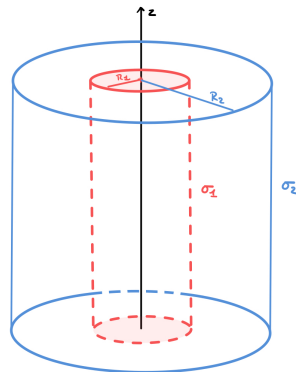
Exprimer la fréquence propre de cet oscillateur harmonique en fonction de  $e$ ,  $r_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $m_e$ .

- (b) La plus petite fréquence observée à l'époque de Thomson dans le spectre de l'hydrogène était  $f_{\min} = 460 \text{ THz}$ . Déduisez-en une valeur numérique d'un majorant de  $r_0$ . C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau. Commentez.

### 1.3 Condensateur cylindrique

Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques séparées par un isolant, de sorte que les armatures portent toujours des charges électriques opposées mais qu'aucun courant ne circule de l'une à l'autre.

On se propose d'étudier le rayonnement électrostatique d'un condensateur cylindrique, tel que représenté. Sa longueur  $L$  sera supposée grande devant les rayons  $R_1$  et  $R_2$  (cf. figure ci-dessous).



1. Question préliminaire : calculez le champ électrique rayonné dans tout l'espace par un cylindre uniformément chargé en surface, de rayon  $R$ , de longueur  $L \gg R$  et de densité surfacique de charge  $\sigma$ .
2. Revenons au condensateur cylindrique. On rappelle que les armatures d'un condensateur portent à tout instant des charges opposées.
  - (a) Soient  $\sigma_1 > 0$  la densité surfacique de charge de l'armature de  $R_1$ , et  $\sigma_2 < 0$  celle de l'armature de rayon  $R_2$ . Exprimez  $\sigma_2$  en fonction de  $R_1, R_2$  et  $\sigma_1$ .
  - (b) Calculez le champ électrostatique rayonné dans tout l'espace par ce condensateur. Commentez.

### 1.4 Plan épais chargé

Soit une distribution de charge uniforme en volume égale à  $\rho$  entre les deux plans  $x = -a$  et  $x = a$ , nulle ailleurs.

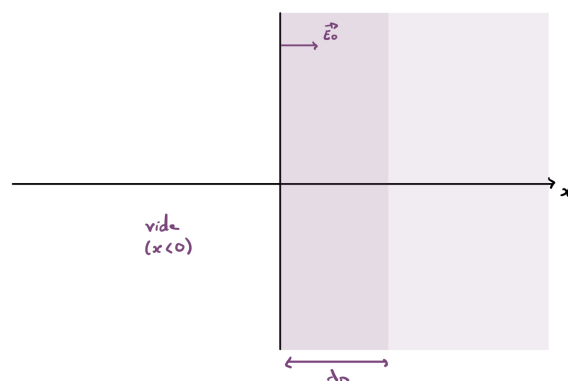
1. Calculez le champ rayonné par cette distribution en tout point de l'espace.
2. Réduisez l'épaisseur de la distribution tout en maintenant sa charge constante :  $a \rightarrow 0$  avec  $\rho a = \text{cst}$ . Que retrouvez-vous?

### 1.5 Conducteur en régime stationnaire, charge surfacique

Considérons un conducteur dont le champ électrique satisfait, en régime permanent, l'équation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$$

On considère  $\lambda_D > 0$ . Le paramétrage est précisé par la figure ci-dessous. La surface du conducteur est supposée plane et l'axe  $O_x$  est choisi selon sa normale.



1. Trouvez l'expression du champ électrique puis celle de la charge volumique  $\rho$  **lorsque le champ extérieur dans le vide au voisinage de cette surface vaut**  $E_0 \vec{e}_x$ . Vous admettrez que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers zéro.
2. Quelle est l'unité de  $\lambda_D$ ? Donnez une interprétation physique de cette constante.
3. Déterminez la charge volumique  $\rho_0$  au niveau de la surface du conducteur en fonction de  $E_0$ ,  $\lambda_D$  et  $\epsilon_0$ .
4.  $\lambda_D$  est de l'ordre de quelques nm pour un conducteur usuel. Pour un échantillon de taille macroscopique il est donc plus commode d'introduire la charge surfacique  $\sigma$  du conducteur.  
Exprimer  $\sigma$  en fonction de  $\rho_0$  et  $\lambda_D$ , puis en fonction de  $E_0$  et  $\epsilon_0$ , par deux méthodes.

## Électrostatique 2

### 2.1 Nuage d'orage

1. Retrouvez le champ électrostatique rayonné par un condensateur plan.
2. Un nuage électrique suffisamment étendu pour être considéré comme mince est assimilé à un plan  $z = h$ , de densité surfacique  $\sigma < 0$ .  
Proposez une expression pour le champ électrostatique régnant entre le sol et le nuage, ainsi que le potentiel associé sachant qu'il est posé nul au sol.
3. Déduisez-en la capacité de ce condensateur, application numérique pour un nuage carré (« Comme dans Minecraft », Florent - 18/11/2024) de 10 km avec  $h = 2$  km et  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .
4. Supposons qu'il s'agisse d'un nuage d'orage. Lorsque l'éclair se forme, le champ électrique vaut  $25 \text{ kV.m}^{-1}$ . Déduisez-en le potentiel du nuage.

### 2.2 Condensateur cylindrique

Suite de l'exercice 3 de la feuille précédente : calculez la capacité du condensateur, ainsi que sa capacité linéique dont vous ferez l'application numérique avec  $R_1 = 1 \text{ cm}$  et  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Vous calculerez aussi le potentiel électrostatique rayonné dans tout l'espace.

### 2.3 Mise en contact d'un conducteur et d'un semi-conducteur

(CCINP MP 2019) Un semi-conducteur est un matériau où le courant électrique est porté par deux types de porteurs : les *électrons* et les *trous* (de charge opposée à celle d'un électron). On le modélise ici comme un milieu contenant des charges  $+q$  et  $-q$ , de permittivité  $\epsilon_0$ , occupant tout le demi-espace  $x > 0$ .

- Les charges  $+q$  ont une densité volumique  $n_+(x) = n_0 \exp\left(\frac{-qV(x)}{kT}\right)$
- Les charges  $-q$  ont une densité volumique  $n_-(x) = n_0 \exp\left(\frac{+qV(x)}{kT}\right)$

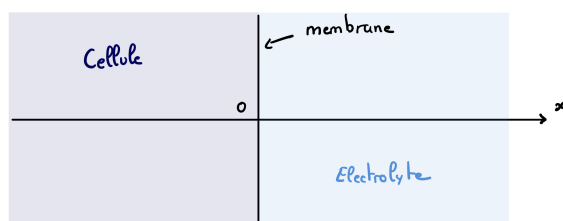
avec  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température.

On accole à ce milieu un conducteur parfait de potentiel  $V_0$  occupant le demi-espace  $x \leq 0$ .

1. Trouvez l'équation différentielle régissant  $V$ .
2. On suppose maintenant que  $\frac{qV(x)}{kT} \ll 1$ . Donnez l'expression de  $V(x)$  dans tout l'espace.
3. Trouvez  $\sigma$ , la densité surfacique de charge du conducteur.

### 2.4 Étude d'une membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan  $yOz$ , l'axe  $Ox$  étant orienté vers l'extérieur de la cellule, (figure ci-dessous).



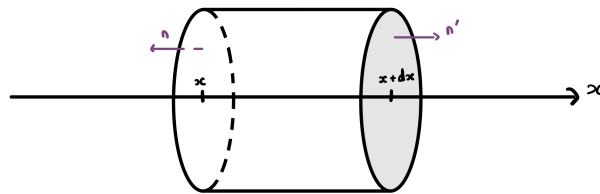
Toutes les grandeurs physiques sont supposées n'avoir de dépendance spatiale qu'en  $x$ .

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule) indique une variation de potentiel en général négative. Le potentiel est alors modélisé comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -V_0 \exp(-\frac{x}{a}) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

avec  $V_0 > 0$ .

1. Calculez le champ électrique puis la densité volumique de charge en tout point. Quel est le signe de  $\rho$ ? Comment une densité de charge peut-elle exister dans un liquide?
2. Y a-t-il d'autres distributions de charge dans le système?
3. Calculez la charge totale contenue dans un cylindre d'axe  $Ox$  et de section  $S$  s'étendant de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$  (figure ci-dessous). Commentez.



## 2.5 Potentiel de Yukawa de l'atome d'hydrogène

Une modélisation parfois utilisée du potentiel rayonné par un atome d'hydrogène est le potentiel de Yukawa. En coordonnées sphériques, il s'exprime par :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-\frac{r}{a_0})$$

où  $a_0 = 53$  pm est une constante caractéristique de l'hydrogène.

Nous voulons déterminer la distribution de charge qui rayonne un tel potentiel. L'atome est donc supposé à symétrie sphérique et centré sur un point  $O$ .

*Le potentiel de Yukawa a aussi joué un rôle historiquement plus proche (dès les années 1930), dans l'étude des forces qui s'exercent à l'intérieur du noyau des atomes.*

1. Calculez le champ électrique rayonné dans tout l'espace.
2. Calculez la charge  $q(r)$  contenue dans une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .
3. Déduisez-en  $q(r \rightarrow +\infty)$  et  $q(r \rightarrow 0)$ . Interprétez.
4. Calculez la charge électrique  $dq(r)$  contenue dans une coquille sphérique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ , définie comme le volume situé entre une sphère de rayon  $r$  et une de rayon  $r + dr$ .  
*Indication : le volume  $dV$  d'une telle coquille doit être écrit au premier ordre en  $dr$ .*
5. Déduisez-en qu'il existe, en plus de la charge concentrée en  $O$ , une distribution volumique  $\rho(r)$  non uniforme que vous calculerez.
6. Définissez une densité linéaire de charge  $\lambda(r)$  le long d'un rayon. Commentez son allure.

## 2.6 Transfert de charge entre deux électrodes cylindriques

(Mines PSI 2013) Soit deux électrodes cylindriques. Les cylindres sont coaxiaux, de rayons respectifs  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ).

La cathode, de rayon  $a$ , est reliée à la masse. On impose une tension  $V_0$  à l'anode. L'espace entre les deux électrodes est considéré comme vide.

1. Établissez une équation différentielle vérifiée par le potentiel et résolvez-la.
2. Des électrons sont émis de la cathode avec une vitesse initiale nulle. Trouvez une relation entre  $r$  et  $\dot{r}$ .
3. Exprimez le temps de vol d'un électron sous la forme d'une intégrale que vous ne chercherez pas à calculer.

## Conduction électrique

### 3.1 Vitesse des électrons libres dans un métal

On se donne un fil de cuivre, supposé cylindrique et rectiligne :

- Section  $S = 1 \text{ mm}^2$
- Intensité du courant  $I = 1 \text{ A}$
- Conductivité du cuivre  $\gamma = 5.96.10^7 \text{ S.m}^{-1}$
- Densité  $d = 8,95$
- Masse molaire  $M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$

Après avoir déterminé la densité volumique d'électrons libres, calculez la vitesse d'un électron libre participant à ce courant électrique.

### 3.2 Courant engendré par une rotation

Un cylindre de rayon  $R$  et de grande longueur est mis en rotation autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire  $\omega$ . Il est uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charges  $\rho$ .

Calculez la densité volumique de courant engendrée par cette rotation.

### 3.3 Action d'un éclair

(CCP PC 2019) La foudre frappe un piquet paratonnerre (figure 1). Elle est modélisée comme un flux d'électrons descendant, correspondant à un courant électrique  $I$ , et on suppose que l'intégralité de ces électrons pénètre dans le sol.

Le sol est assimilé à un milieu conducteur de conductivité électrique  $\gamma = 1.10^{-2} \text{ S.m}^{-2}$ .

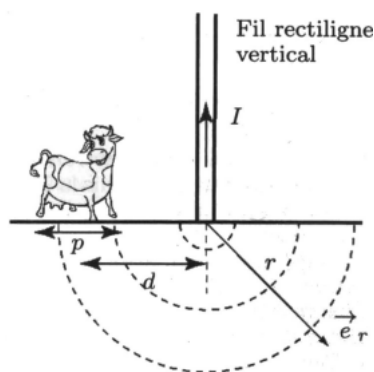


FIGURE 3.1 – Action d'un éclair

L'étude est menée sur une durée assez courte pour traiter les grandeurs électriques comme constantes.

1. Déterminez la relation entre  $I$  et  $j(r)$  où  $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ .
2. Déduisez-en l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}$  régnant dans le sol et vérifiez que le potentiel s'écrit sous la forme :

$$V(r) = -\frac{I}{\gamma 2\pi r}$$



3. Une vache se trouve à proximité du point d'impact.

- Déterminez la tension  $U_p$  entre les pattes avant et arrière de la vache, distante de  $p$ .
- Sachant que la vache peut être assimilée à une résistance  $R = 2.5 \text{ k}\Omega$  et qu'elle supporte au maximum une intensité  $I = 25 \text{ mA}$ , déterminez la distance minimal  $d$  du point d'impact à laquelle elle doit se situer pour survivre.

### 3.4 Gravure ionique

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.

Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système constitué de trois grilles métalliques, numérotées 0, 1 et 2 (voir figure 2).

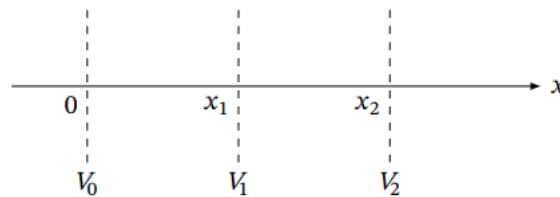


FIGURE 3.2 – Gravure ionique

Les trois grilles sont portées à des potentiels différents, contrôlables indépendamment les uns des autres, tels que  $V_1 < V_2 < V_0 = 0$ . Le potentiel est partout négatif.

Le dispositif est traversé par un flux continu de cations identiques, tous de masse  $m$  et de charge  $e$ , se propageant dans la direction  $x$ . On note  $n(x)$  la densité volumique de cations. Les cations sont lâchés au niveau de la grille 0 avec une vitesse initiale négligeable.

- Déterminez la vitesse  $v(x)$  d'un cation en fonction d'un potentiel  $V(x)$  et montrez qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération au sein du dispositif.
- Montrez que le vecteur densité de courant s'écrit  $\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$ , avec  $j_0$  une constante que vous ne chercherez pas à déterminer pour l'instant.
- Montrez que le potentiel est gouverné par l'équation différentielle sur  $[0, x_1]$  :

$$V''(x) + \frac{j_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{-2eV(x)}} = 0$$

En admettant que sa solution est

$$V(x) = -\left(\frac{81j_0^2 m}{32\epsilon_0^2 e}\right)^{1/3} x^{4/3}$$

montrez que  $j_0 = k|V_1|^{3/2}$  en précisant la valeur de  $k$ .

- (Question facultative) Justifiez la forme de la solution admise ci-dessus.
- On place un substrat de section  $S$  immédiatement après la grille 2 dans l'axe du faisceau pendant une durée  $\Delta t$ . Le faisceau est supposé uniforme à l'échelle du substrat. Déterminez le nombre  $N$  de cations atteignant le substrat, ainsi que leur vitesse. Concluez sur le bon fonctionnement du dispositif, c'est-à-dire la possibilité de contrôler séparément les deux paramètres.

## Dipôle électrostatique

### 4.1 Moment dipolaire de l'eau

Le moment dipolaire de la molécule d'eau vaut 1,86D. Calculez la charge  $-2\delta$  portée par l'oxygène, sachant que l'angle  $\widehat{HOH}$  est de  $104,5^\circ$  et la longueur de la liaison  $H-O$  est de 96pm.

### 4.2 Dipôle dans le champ d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plans uniformément chargés, l'un de charge surfacique  $-\sigma < 0$  et d'abscisse  $x = -a < 0$ , l'autre de charge  $\sigma$  et d'abscisse  $x = a$  sur un axe  $Ox$  perpendiculaire aux plans.

Rappelons que le champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan est uniforme et donné par :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Un dipôle électrostatique  $\vec{p}$  est placé sur l'axe  $Ox$  en  $x = 0$ . L'angle qu'il fait avec  $\vec{e}_x$  est noté  $\alpha$  (voir figure 1).

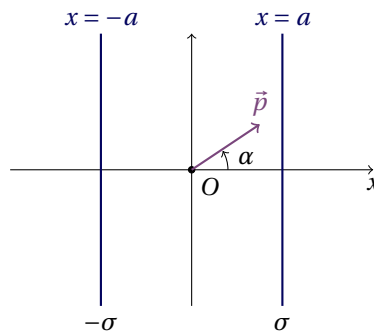


FIGURE 4.1 – Dipôle dans le champ d'un condensateur plan.

1. Déterminez son énergie potentielle  $E_p$ , pour  $\alpha$  quelconque, en fonction de  $p = \|\vec{p}\|$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$  et  $\epsilon_0$ .
2. Discutez les positions d'équilibre de ce dipôle.
3. Modélisons ce dipôle comme constitué de deux charges ponctuelles,  $N$  de charges  $-q < 0$  placées en  $x = -b$  et  $P$  de charge  $q > 0$  en  $x = b$ . Elles sont de même masse  $m$ .
  - (a) Pourquoi le dipôle ne quitte-t-il pas sa position?
  - (b) Étudiez les petites oscillations du dipôle autour de sa position d'équilibre stable. Vous poserez  $\beta = \alpha - \alpha_{\text{éq}}$ , où  $\alpha_{\text{éq}}$  est la valeur de  $\alpha$  à l'équilibre stable. Donnez la période de ses oscillations.
4. Le dipôle est maintenant supposé au repos sur sa position d'équilibre stable. Rappelons que le potentiel rayonné en un point  $M$  par un dipôle  $\vec{p}$  placé en  $O$  est :

$$V_d(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  et  $r = \|\vec{r}\|$

- (a) Déterminez le potentiel  $V_c(M)$  rayonné par les armatures en un point  $M$  d'abscisse  $x \in ]-a, a[$ . Le potentiel de l'armature positive sera noté  $U$  et celui de l'armature négative choisi nul.
- (b) Déduisez-en le potentiel total  $V(M)$  en fonction de  $\theta$ , angle repérant  $M$  défini précédemment.

- (c) Après avoir factorisé la partie angulaire dans le potentiel, montrez qu'il existe deux équipotentielles particulières  $V = U/2$  que vous caractériserez.
- (d) Tracez l'allure de quelques lignes de champ.

### 4.3 Champ inconnu

Un champ électrostatique  $\vec{E}$  est invariant par rotation autour d'un axe  $Oz$ . Sa divergence est nulle, sauf au voisinage de  $O$  où elle peut tendre vers l'infini.

1. Écrivez l'équation différentielle gouvernant le potentiel scalaire  $V$ .
2. Résolution de l'équation. Le laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

La résolution va être faite *par séparation*, en cherchant une solution de la forme  $V(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ .

- (a) Déterminez les équations différentielles vérifiées par  $f$  et  $g$ .
- (b) Vérifiez que  $g(\theta) = \cos(\theta)$  est solution et cherchez  $f$  sous la forme  $f(r) = Ar^\alpha$
- (c) Déduisez-en le champ électrostatique associé. Que remarquez-vous?

### 4.4 Modèle de solvation d'un ion

On peut modéliser la molécule d'eau comme un dipôle électrostatique de moment  $p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$ .

Soit quatre molécules d'eau situées aux sommets  $G_1$  et  $G_4$  d'un tétraèdre régulier (voir figure 2). La distance séparant le centre du tétraèdre d'un sommet est  $d = CG_i = 0,3 \text{ nm}$ . On impose que l'axe des dipôles est colinéaire à  $\overrightarrow{CG_i}$  mais pas forcément de même sens. Pour un couple quelconque de points,  $\widehat{G_i CG_k} = \beta = 109^\circ 28'$ .

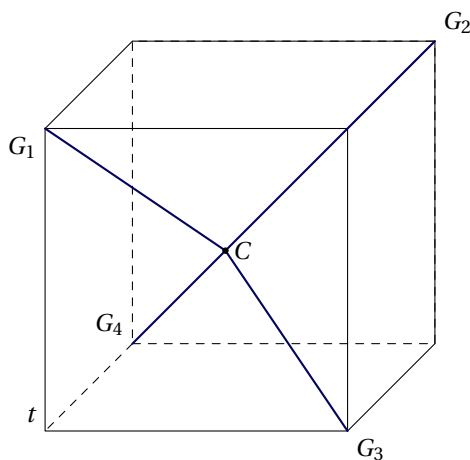


FIGURE 4.2 – Modèle de solvation d'un ion

1. Établissez l'expression de l'énergie d'interaction de deux dipôles en fonction de  $p$ ,  $d$  et  $\beta$ . Mettez en évidence trois cas possibles.
2. Déduisez-en l'énergie potentielle d'interaction de ces quatre molécules d'eau en fonction de  $d$ ,  $p$  et  $\beta$  pour les cinq arrangements des quatre dipôles respectant les conditions imposées.  
*Indication* : l'énergie potentielle étant associée à une interaction, il faut faire attention à ne pas compter plusieurs fois la même interaction ! Ainsi les forces  $\vec{F}_{i \rightarrow k}$  et  $\vec{F}_{k \rightarrow i}$  correspondent à une seule et même interaction (voir principe des actions réciproques).
3. Un cation de charge  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  est placé en  $C$ , ce qui modélise sa solvation. Exprimez de nouveau les énergies potentielles d'interaction correspondant aux cinq arrangements précédents. Applications numériques en eV.
4. Quel est l'arrangement le plus stable des quatre molécules autour de l'ion ?
5. Que pensez-vous de ce modèle, sachant que l'énergie de solvation d'un ion de cette taille est d'environ  $-240 \text{ kJ.mol}^{-1}$  ?

## Magnétostatique

### 5.1 Champ dans un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres de même axe, de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , conducteurs, sur lesquels circulent des courants  $I$  et  $-I$  respectivement (voir figure 1). Ces courants circulent de manière uniforme sur les surfaces métalliques des cylindres.

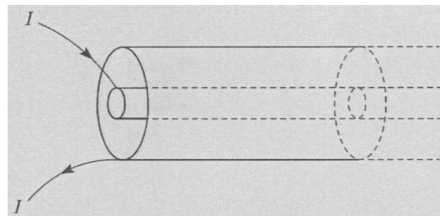


FIGURE 5.1 – Câble coaxial

1. Calculez le champ magnétique rayonné dans tout l'espace.
2. Déduisez-en un intérêt pratique de ce type de câble.

### 5.2 Champ magnétique d'un éclair

La distribution de courants représentée figure 2 modélise le courant d'un éclair tombant verticalement sur le sol. Un cou-

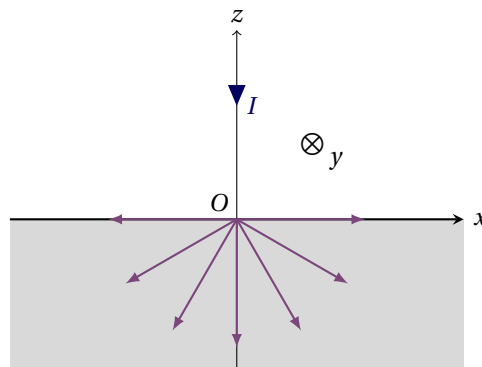


FIGURE 5.2 – Champ magnétique d'un éclair

rant d'intensité  $I$  descend l'axe  $Oz$  et se répand de manière isotrope dans le sol (demi-espace  $z < 0$ ).

1. Déterminez la densité volumique de courant en tout point dans le sol, en notant  $r$  sa distance à  $O$ .
2. Déduisez-en le champ magnétostatique en tout point de l'espace.

*Indication :* L'aire d'une calotte sphérique de rayon  $r$  et de demi-angle au centre  $\alpha$  est  $2\pi r^2(1 - \cos(\alpha))$ .

### 5.3 Bobines de Helmholtz

On donne le champ magnétique rayonné par une spire de rayon  $R$ , traversée par un courant  $I$ , en un point  $M$  de son axe  $Ox$  :

$$\vec{B}_e(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_x$$

où  $\alpha$  est le rayon angulaire de la spire vue du point  $M$  (voir figure 3.a).

1. Soit  $B = \|\vec{B}(M)\|$ . Calculez  $B$  en fonction de  $u = x/R$ , en notant  $B_0$  sa valeur au centre de la spire. Tracez son allure.
2. Le montage des bobines de Helmholtz consiste en deux bobines plates identiques ( $N$  spires chacune, de même rayon  $R$ , même courant  $I$ , même axe) placées à la distance  $d = R$  l'une de l'autre. Ce montage est représentée en figure 3.b.
  - (a) Calculez le champ magnétique en  $O$ , point situé sur l'axe au milieu des deux bobines.
  - (b) Argumentez le fait que le champ magnétique peut être considéré comme constant avec un très bon degré d'approximation quand la distance entre les deux bobines est précisément égale à  $R$ .  
Vous pourrez, par exemple, tracer l'allure du champ pour diverses valeurs de cette distance pour voir ce que le cas  $d = R$  a de remarquable, ou bien discuter la nature de l'extremum du champ magnétique en  $x = 0$ .

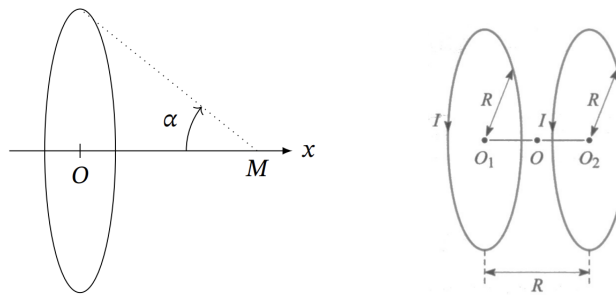


FIGURE 5.3 – a) (à gauche) Angle sous lequel on voit une spire. b) Dispositif de Helmholtz

### 5.4 Étude d'un champ magnétique

Dans un repère cartésien on donne le champ vectoriel

$$\vec{B} = B_0 \cos(2\pi \frac{x}{a}) \vec{u}_y$$

1. Ce champ peut-il être un champ magnétique dans une région vide de charge et de courant?
2. Pour compenser cette difficulté, on corrige la forme du champ :

$$\vec{B} = B_x(x, y) \vec{u}_x + B_0 f(y) \cos(2\pi \frac{x}{a}) \vec{u}_y$$

Déterminez l'équation différentielle vérifiée par  $f$  et intégrez-la en faisant l'hypothèse que  $f$  passe par un extremum égal à 1 en  $y = 0$ . Puis déterminez  $B_x$ .

## Compléments de magnétostatique

### 6.1 Cadre tournant dans un champ magnétique

Un cadre rectangulaire est parcouru par un courant  $I$  constant et plongé dans le champ magnétique d'un fil rectiligne parcouru par un courant  $i$  constant. La figure 1 indique le paramétrage.

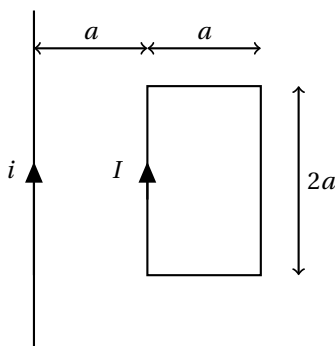


FIGURE 6.1 – Paramétrage

1. Sans calcul, pourquoi la force de Laplace sur le cadre n'est pas nulle ?
2. Calculez cette force.

### 6.2 Oscillations d'un dipôle dans le champ d'une spire

Un dipôle magnétique est mobile sur l'axe  $Oz$  d'une spire circulaire (centre  $O$ , rayon  $R$ ) parcourue par un courant  $I$ . On donne le champ magnétique rayonné par une spire en tout point de son axe de révolution

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin(\alpha)^3 \vec{u}_z$$

avec  $\alpha$  le rayon angulaire de la spire vue de  $M$  et le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  normal à la spire, son sens étant fixé par celui du courant.

1. Discutez les positions d'équilibre du dipôle et leur stabilité.
2. Dans le cas des positions d'équilibre stable, calculez la période des petites oscillations.

### 6.3 Équilibre d'une barre

Figure 2 : Une barre conductrice est fixée par son extrémité supérieure  $O$  où se trouve une liaison pivot d'axe  $Oz$ . L'autre extrémité est en contact avec un bain de mercure qui permet la circulation d'un courant  $I$  continu. Le dispositif est plongé dans un champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

L'inclinaison de la barre est repérée par son angle  $\theta$  avec la verticale.

1. Exprimez la force de Laplace subie par la barre.
2. En admettant que la force de Laplace s'applique au centre d'inertie de la barre, déterminez la valeur de  $\theta$  à l'équilibre.
3. Expliquez qualitativement ce qui se passe quand, à l'équilibre, la barre ne touche plus le mercure.

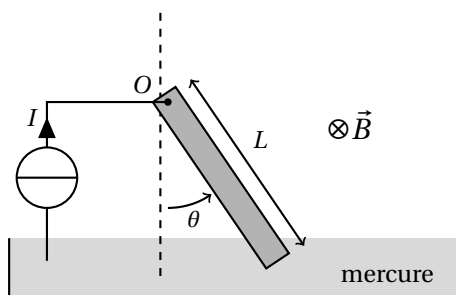


FIGURE 6.2 – Équilibre d'une barre

## 6.4 Compression magnétique d'un plasma

Un plasma est un état de la matière présentant des similarités avec l'état gazeux, mais suffisamment chaud pour que certains électrons se soient détachés de leurs atomes : c'est un gaz d'électrons et de cations.

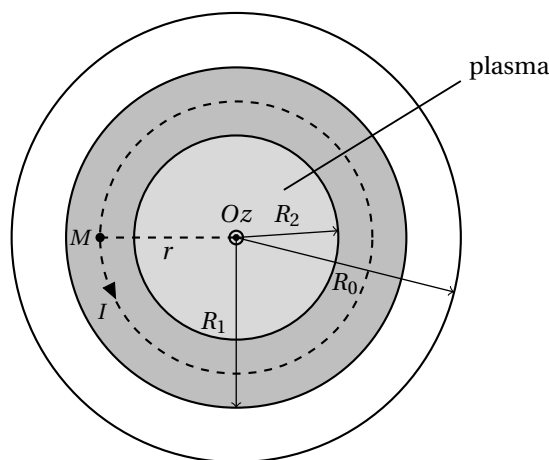


FIGURE 6.3 – Compression magnétique d'un plasma

La figure 3 montre un système de cylindre de même axe  $Oz$  :

- $r < R_2$  : un plasma y circule le long de l'axe  $Oz$ . On supposera que les courants électriques des électrons et des cations se compensent, de sorte qu'ils ne seront pas étudiés.
- $R_2 < r < R_1$  : matériau conducteur parcouru par un courant  $I$  le long de l'axe  $Oz$  de densité volumique constante.
- $R_1 < r < R_2$  : espace vide.

On se propose d'étudier l'effet du champ magnétique rayonné par le courant  $I$  sur le plasma. Le rayonnement du plasma, lui, ne sera pas étudié.

1. Exprimez la densité de courant  $\vec{j}$  dans chaque région du système.
2. Déterminez le champ magnétique pour  $r < R_0$ .
3. Écrivez l'équilibre mécanique d'un volume mésoscopique  $dV$  en négligeant son poids et en admettant que :

- la force de Laplace qu'il subit a pour densité volumique  $\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B}$   
la force de pression qu'il subit a pour densité volumique  $-\vec{\text{grad}}(P)$ , avec  $P$  la pression.

Établissez alors l'expression de  $dP/dr$  pour  $r < R_1$ .

4. Exprimez la pression pour  $r < R_2$ . Puis, en supposant que  $R_2 \approx R_1$ , simplifiez son expression en fonction de  $\mu_0$ ,  $I$  et  $R_1$ .  
*Indication* : Au voisinage de 1, on a

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} \left( \frac{1-u^2}{2} - u^2 \ln\left(\frac{1}{u}\right) \right) \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{6}(u-1)$$

5. Le plasma étant constitué d'électrons et de cations avec la même densité volumique  $N$  et des agitations thermiques correspondant à la même température  $T$ . En l'assimilant à un gaz parfait, calculez cette température.  
On donne  $I = 1\mu\text{A}$ ,  $R_1 = 10\text{cm}$ ,  $N = 1.10^{21} \text{ m}^{-3}$ ,  $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  et  $\mu_0 = 1,26.10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$ .

## Liste des corrigés

- **Corrigé du TD1**
- **Corrigé du TD2**
- **Corrigé du TD3**
- **Corrigé du TD4**
- **Corrigé du TD5**
- **Corrigé du TD6**



