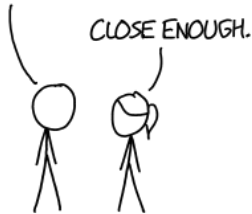


MPI\* Physique  
**TD Thermodynamique**

Conduction thermique - Régime statique

THE SECOND LAW OF THERMODYNAMICS STATES  
THAT A ROBOT MUST NOT INCREASE ENTROPY,  
UNLESS THIS CONFLICTS WITH THE FIRST LAW.

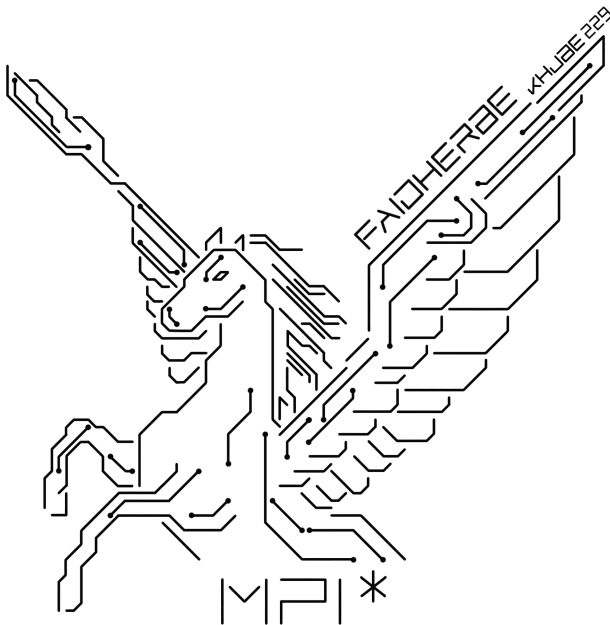


Olivier Caffier



# Table des matières

<b>1 Exercices à géométries cartésiennes</b>	<b>2</b>
1.1 Sensation de chaud ou de froid . . . . .	2
1.2 Double vitrage . . . . .	4
1.3 Création d'entropie dans une barre . . . . .	7
1.4 Accumulation de neige sur un toit . . . . .	9
<b>2 Exercices dans d'autres géométries</b>	<b>11</b>
2.1 Préliminaire : résistance thermique . . . . .	11
2.2 Barreau d'uranium . . . . .	14
2.3 Épaisseur d'un igloo . . . . .	17



*Ce que Faidherbe enseigne, ailleurs ne s'apprend pas.*

# 1 Exercices à géométries cartésiennes

## 1.1 Sensation de chaud ou de froid

(Mines Télécom MP 2022) Il est bien connu que, en général, un métal paraît plus froid au toucher que du bois. Expliquons ce phénomène par une modélisation simple.

Deux cylindres de même section, latéralement isolés, de même axe  $Ox$ , de conductivités thermiques respectives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de longueurs respectives  $L_1$  et  $L_2$ , sont mis bout à bout, l'interface se trouvant en  $x = 0$ . Les extrémités  $x = -L_1$  et  $x = L_2$  sont maintenues aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ .

1. En régime stationnaire, déterminez la température de l'interface.
2. Application numérique pour un contact main-bois ou main-acier. Commentez.

Données :  $T_1 = 37^\circ\text{C}$  (main);  $T_2 = 20^\circ\text{C}$  (bois ou acier);  $L_1 = L_2$ ;  $\lambda_1 = 10\text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$  (main);  $\lambda_2 = 1\text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$  (bois);  $\lambda_2 = 100\text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$  (acier).

Corrigé :

1. Tout d'abord, réalisons un petit schéma

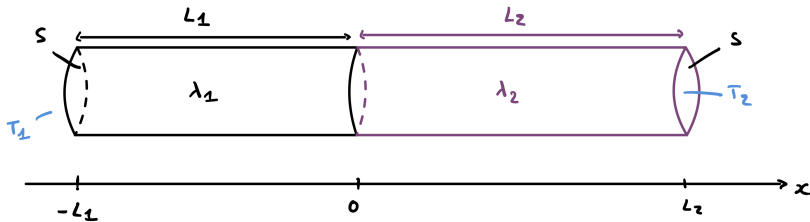


FIGURE 1 – Deux conducteurs cylindriques en contact.

On a donc affaire à un cas de *conduction pure*, et on se situe en *régime permanent* : **la loi d'Ohm thermique est donc applicable!**

On dispose du schéma électrique équivalent suivant :

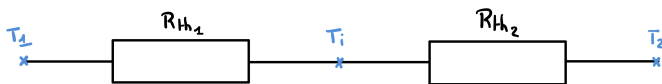


FIGURE 2 – Notre schéma « électrique » équivalent.

Alors, on obtient à l'aide d'un *pont diviseur de température* :

$$T_1 - T_i = \frac{R_{\text{th}_1}}{R_{\text{th}_1} + R_{\text{th}_2}} (T_1 - T_2)$$

$$\text{avec } R_{\text{th}_1} = \frac{L_1}{\lambda_1 S} \text{ et } R_{\text{th}_2} = \frac{L_2}{\lambda_2 S}.$$

Finalement,

$$T_i = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

2. Applications numériques :

$$T_i \approx 21,5 \text{ }^\circ\text{C (acier)}$$

et

$$T_i \approx 35,5 \text{ }^\circ\text{C (bois)}$$

On retrouve donc bien ce phénomène connu évoqué par l'énoncé.

## 1.2 Double vitrage

(CCP PC 2015) On veut comparer les performances énergétiques d'un simple vitrage et d'un double vitrage.

1. Soit une vitre d'épaisseur  $e$ , de surface  $S$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . La température est  $T_e$  à l'extérieur et  $T_i$  à l'intérieur. Calculez la résistance thermique de la vitre  $R_{th}$  et le flux thermique  $\Phi$  qui la traverse.
2. Un double vitrage est constitué de deux vitres de même épaisseur  $e$ , de même surface  $S$  et de même conductivité thermique  $\lambda$ , séparées par une couche d'air d'épaisseur  $e'$  et de conductivité  $\lambda'$ . Mêmes questions et commentaire.
3. Déterminez le champ de température dans le double vitrage en régime permanent.

Données :  $\lambda = 1,2 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ;  $\lambda' = 0,025 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ;  $e = e' = 1\text{mm}$ ;  $T_e = 7^\circ\text{C}$ ;  $T_i = 17^\circ\text{C}$  et  $S = 0,5 \text{ m}^2$ .

### Corrigé :

1. On a par définition de la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \approx 1,7 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

De plus, comme nous sommes également dans une situation de conduction pure et en régime permanent, **la loi d'Ohm est bien applicable** :

$$T_e - T_i = R_{th} \Phi_{e \rightarrow i}$$

D'où :

$$\Phi_{e \rightarrow i} = \frac{T_e - T_i}{R_{th}}$$

Finalement,

$$\Phi_{e \rightarrow i} = \frac{\lambda S}{e} (T_e - T_i) \approx 6,0 \text{ kW}$$

2. Cette situation peut être vue, électriquement parlant, comme un assemblage série, d'où le schéma suivant :



FIGURE 3 – Schéma électrique équivalent à notre double vitrage.

avec

$$R_{\text{th verre}} = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{et} \quad R_{\text{th air}} = \frac{e'}{\lambda' S}$$

La loi d'Ohm thermique est toujours applicable dans ce contexte, on a alors :

$$\Phi_{\text{ext} \rightarrow \text{int}} = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{2R_{\text{th verre}} + R_{\text{th air}}}$$

Finalement,

$$\Phi_{\text{ext} \rightarrow \text{int}} = \frac{\lambda \lambda' S}{2e\lambda + e'\lambda'} (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}})$$

3. On travaille en *régime permanent*, **l'équation de la chaleur (qui est bien valable)** nous dit que sur  $[0, e]$  (vitre) ;  $[e, e + e']$  (air) et  $[e + e', 2e + e']$  (vitre) :

$$\frac{d^2 T}{dx^2}(x) = 0$$

On dispose donc de ces trois équations :

$$\begin{cases} T(0 \leq x \leq e) = a_1 x + b_1 \\ T(e \leq x \leq e + e') = a_2 x + b_2 \\ T(e + e' \leq x \leq 2e + e') = a_3 x + b_3 \end{cases}$$

et les conditions aux limites sont les suivantes :

$$T(0) = T_{\text{ext}} ; T(e) = T_1 ; T(e + e') = T_2 \text{ et } T(2e + e') = T_{\text{int}}.$$

De plus,  $T_1$  et  $T_2$  peuvent être déterminées à l'aide d'un *pont diviseur de température*!

$$T_{\text{ext}} - T_1 = \alpha$$

$$T_2 - T_{\text{int}} = \alpha$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{R_{\text{th verre}}}{2R_{\text{th verre}} + R_{\text{th air}}} (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}})$$

D'où

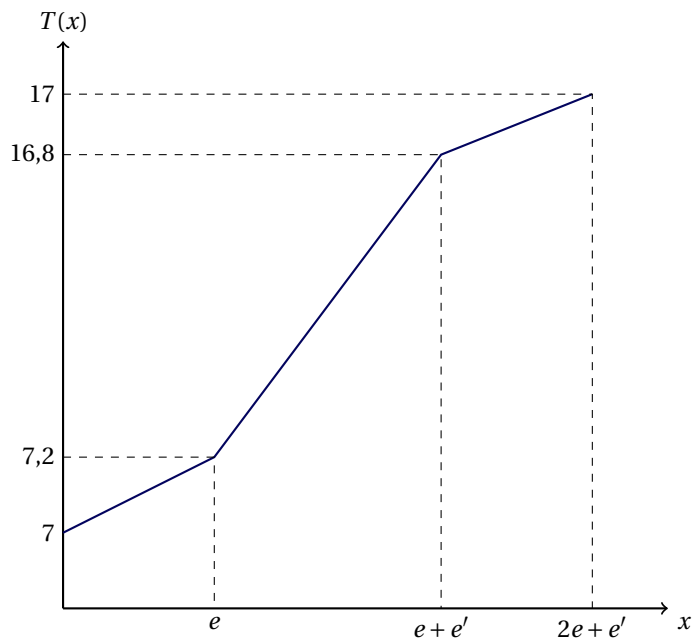
$$\begin{cases} T_1 = T_{\text{ext}} - \alpha \approx 7,2^\circ \text{C} \\ T_2 = T_{\text{int}} + \alpha \approx 16,8^\circ \text{C} \end{cases}$$

On en déduit alors que  $b_1 = T_{\text{ext}} ; a_1 = -\frac{\alpha}{e} ; \dots$ <sup>1</sup> (T est une fonction affine qui modifie sa pente sur les trois intervalles).

---

1. le reste des calculs est laissé au bon soin au lecteur :)

On obtient ainsi le tracé de  $T(x)$  suivant :



**FIGURE 4** – Tracé de  $T(x)$  dans le double vitrage

### 1.3 Création d'entropie dans une barre

(IMP MP 2019) On dispose d'une barre métallique de surface calorifugée, de longueur  $L$ , de section  $S$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On note  $T(x=0) = T_0$  et  $T(x=L) = T_1$ . On suppose le régime permanent établi.

1. Calculez  $T(x)$ .
2. Calculez l'entropie créée par unité de temps  $\dot{S}_c$ . Quelle en est la cause?

#### Corrigé :

1. Dans un milieu calorifugé, **l'équation de la chaleur est valable**. Ainsi, en régime permanent on a :

$$\frac{d^2 T}{dx^2}(x) = 0$$

avec  $T(0) = T_0$  et  $T(L) = T_1$ .

On arrive finalement à l'expression suivante, pour  $x \in [0, L]$  :

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L}x + T_0$$

2. Faisons un **bilan entropique** de la barre :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c$$

➤  $dS$  correspond à la variation d'entropie de la tranche pendant  $dt$ , or on travaille en régime permanent :  $dS = 0$ !

D'où

$$\delta S_c = -\delta S_e \quad (1)$$

#### Étude de $\delta S_e$ :

Étudions une tranche  $[x, x + dx]$  de cette barre, entre  $t$  et  $t + dt$ .

On considère  $\delta S_e$  l'entropie échangée par cette tranche pendant  $dt$ . Alors, par définition, on a

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$$

Et donc on retombe sur une étude de  $\delta Q$  comme dans l'équation de la chaleur! On peut alors dire que la tranche dispose de deux transferts thermiques (à gauche et à droite de cette dernière) :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_{\text{gauche}}}{T(x)} + \frac{\delta Q_{\text{droite}}}{T(x + dx)}$$



et donc, comme dans l'équation de la démonstration de l'équation de la chaleur, on trouve :

$$\begin{cases} \delta Q_{\text{gauche}} = -\lambda S T'(x) dt \\ \delta Q_{\text{droite}} = \lambda S T'(x + dx) dt \end{cases}$$

Ainsi,

$$\delta S_e = -\lambda S dt \left( \frac{T'(x)}{T(x)} - \frac{T'(x + dx)}{T(x + dx)} \right)$$

Et donc, d'après la formule de Taylor :

$$\delta S_e = \lambda S dt dx \frac{d}{dx} \left( \frac{T'}{T} \right)$$

Or, on sait d'après la première question que  $T'$  est une fonction constante! On obtient finalement l'équation suivante :

$$\boxed{\delta S_e = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_0) dx dt \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right)} \quad (2)$$

**Calcul final de  $S_c$  :** On a alors, depuis les équations (1) et (2) la relation suivante :

$$\delta S_c = -\frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_0) dx dt \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_c &= \int_{x=0}^{x=L} \delta S_c \\ &= \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_1) dt \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right) dx \\ &= \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_1) dt \left[ \frac{1}{T(x)} \right]_{x=0}^{x=L} \\ &= \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_1) dt \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\dot{S}_c = \frac{\lambda S}{L} \frac{(T_0 - T_1)^2}{T_0 T_1}}$$

On trouve finalement que

$$\boxed{\dot{S}_c \geq 0}$$

Le second principe de la thermodynamique est bien vérifié!

## 1.4 Accumulation de neige sur un toit

(Centrale MP 2018)

Le toit d'un chalet est incliné de  $30^\circ$  par rapport à l'horizontale. Les murs et le toit sont en bois d'épaisseur  $e = 20 \text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda = 0,15 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Il fait  $T_e = -15^\circ\text{C}$  dehors et une température  $T_i$  inconnue à l'intérieur.

Il neige, à raison de  $D = 2,1 \text{ kg.h}^{-1}.\text{m}^{-2}$ . On note  $\mu = 30 \text{ kg.m}^{-3}$  la masse volumique de la neige et  $\lambda' = 0,11 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$  sa conductivité thermique.

On admet que, lorsque la température de surface de neige au contact du toit atteint  $0^\circ\text{C}$ , la couche de neige glisse du toit. C'est ce que l'on observe au bout de 2 h.

Calculez  $T_i$ .

**Corrigé :** Réalisons un schéma de la situation :

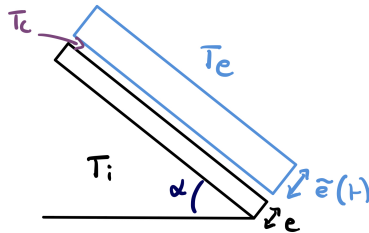


FIGURE 5 – Toit d'un chalet pas très glamour

et réalisons le schéma électrique équivalent :

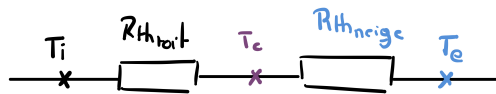


FIGURE 6 – Schéma électrique équivalent au toit + neige

Avec

$$R_{\text{th,toit}} = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{et} \quad R_{\text{th,neige}} = \frac{\tilde{e}(t)}{\lambda' S}$$

D'autre part, on a à l'aide d'un *pont diviseur de température* :

$$T_c - T_e = \frac{R_{\text{th,neige}}}{R_{\text{th,toit}} + R_{\text{th,neige}}} (T_i - T_e)$$

et après une série de calculs, on trouve que

$$T_i = T_e + \left(1 + \frac{\tilde{e}(t)\lambda}{\lambda'e}\right) (T_c - T_e) \quad (3)$$

Ensuite, on sait que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m(t)}{V(t)} \\ &= \frac{m(t)}{S\tilde{e}(t)} \end{aligned}$$

Or, on sait grâce au débit (attention, le toit est en pente!) :  $m(t) = DtS\cos(\alpha)$

On en déduit alors que

$$\tilde{e}(t) = \frac{D\cos(\alpha)t}{\mu} \simeq 12 \text{ cm}$$

pour  $t = 2 \text{ h}$  (attention notre  $t$  est en h ici).

Ainsi, en réinjectant dans (3), on arrive à :

$$T_i = T_e + \left(1 + \frac{D\cos(\alpha)t\lambda}{\mu e\lambda'}\right) (T_c - T_e)$$

Or, au bout de  $t = 2 \text{ h}$ ,  $T_c = 0 \text{ °C}$ . D'où

$$T_i \simeq 18 \text{ °C}$$

## 2 Exercices dans d'autres géométries

Dans le cas général (tridimensionnel), l'équation de la chaleur est :

$$\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0 \quad (4)$$

On se limitera le plus souvent à des cas unidimensionnels :

- en cartésiennes : deux invariances par translation, donc  $T(z, t)$
- en cylindriques : une invariance par translation et une par rotation, donc  $T(r, t)$
- en sphériques : deux invariances par rotation, donc  $T(r, t)$

### 2.1 Préliminaire : résistance thermique

L'expression de la résistance thermique  $R_{th}$  dépend de la géométrie du système. Construisez cette expression dans les trois cas unidimensionnels listés dans le paragraphe précédent.

- Géométrie cartésienne :  $\vec{j}_Q$  est de direction constante, entre deux plans distants de  $L$  (cas vu en cours).
- Géométrie cylindrique :  $\vec{j}_Q$  est selon  $\vec{u}_r$  en cylindriques, entre deux cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et de même longueur  $L$ .
- Géométrie sphérique :  $\vec{j}_Q$  est selon  $\vec{u}_r$  en sphériques, entre deux sphères de rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

Exprimer  $R_{th}$  en géométrie cylindriques et sphériques (le cas des coordonnées cartésiennes ayant déjà été traité en classe).

#### Corrigé :

##### • Géométrie cylindrique :

Considérons l'équation de la chaleur *en régime statique* :

$$\Delta T = 0$$

i.e, en coordonnées cylindriques ( $T$  est une fonction en  $r$ ) :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Donc,

$$T(r) = a \ln(r) + b$$

Notons,  $T_1 = T(R_1)$  et  $T_2 = T(R_2)$ . On en déduit alors que

$$\boxed{a = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \quad \text{et} \quad b = T_1 - a R_1 = \dots$$

Ensuite, d'après la loi de Fourier :

$$\begin{aligned}\vec{j}_Q &= -\lambda \vec{\text{grad}}(T) \\ &= j_Q(r) \vec{u}_r\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$j_Q(r) = -\lambda a \times \frac{1}{r}$$

Enfin, en considérant une surface  $S$  décrite par un cylindre de rayon  $r$  et de même axe/centre que nos deux cylindres, et en l'orientant sortante ( $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ ) :

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \\ &= -\lambda a \int_{z=0}^{z=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{r} \times r d\theta dz \\ &= -\lambda a 2\pi L \\ &= \frac{2\pi L \lambda}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (T_1 - T_2)\end{aligned}$$

La loi d'Ohm thermique nous permet donc de conclure :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

d'où

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

- **Géométrie sphérique :**

Considérons toujours l'équation de la chaleur *en régime statique* :

$$\Delta T = 0$$

i.e, en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Donc,

$$T(r) = A \times \frac{1}{r} + B$$

En notant  $T_1 = T(R_1)$  et  $T_2 = T(R_2)$ , on a :

$$A = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2) \quad \text{et} \quad B = \dots$$

Ensuite, d'après la loi de Fourier :

$$\begin{aligned}\vec{j}_Q &= -\lambda \vec{\text{grad}}(T) \\ &= j_Q(r) \vec{u}_r\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$j_Q(r) = \lambda A \times \frac{1}{r^2}$$

Considérons désormais une sphère de rayon  $r$ , de même centre que nos deux sphères.

On oriente  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \\ &= \lambda A \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{1}{r^2} \times r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= 2\lambda A \pi [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= 4\lambda A \pi\end{aligned}$$

La loi d'Ohm thermique nous permet enfin d'affirmer que

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

d'où

$$R_{\text{th}} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi \lambda R_1 R_2}$$

## 2.2 Barreau d'uranium

(CCP MP 2013) On considère un cylindre infini d'uranium de diamètre  $D = 42 \text{ mm}$ . Les réactions nucléaires engendrent une puissance volumique  $P_N = 250 \text{ MW.m}^{-3}$ . Il est plongé dans un milieu à température constante  $T_s = 200 \text{ °C}$  de sorte que l'extérieur du cylindre soit à  $T_s$ . Le barreau a une conductivité  $\lambda = 27 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ . On note le courant thermique dans le cylindre  $\vec{j}_Q$ .

1. (a) Déterminez la direction de  $\vec{j}_Q$ .  
 (b) En régime permanent, en faisant un bilan de conservation de l'énergie pour un morceau de cylindre de largeur  $dr$  et de hauteur  $h$  quelconque, déterminez  $\vec{j}_Q$ .  
 (c) Déduisez-en le profil de température dans le barreau.  
 (d) Quelle est la température maximale dans le barreau? Application numérique. Commentez, sachant que la température de fusion de l'uranium est de  $1232 \text{ °C}$ .
2. On fait maintenant un trou cylindrique de même axe dans le barreau, de diamètre  $d = 5 \text{ mm}$ . La surface interne du barreau est calorifugée.  
 (a) Quel est le nouveau profil de température?  
 (b) Quelle est la nouvelle température maximale?

### Corrigé :

1. (a) Le barreau *rayonne*<sup>2</sup> de manière radiale, un principe de Curie nous permet de dire que :

$$\vec{j}_Q = j_Q(r, t) \vec{u}_r$$

- (b) En régime permanent, on a directement  $dU = 0$ .  
 Or, d'après le premier principe :

$$dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{=0}$$

et

$$\delta Q = \delta Q_{r+dr} + \delta Q_r + \delta Q_P$$

avec  $\delta Q_P$  issu des réactions nucléaires.

comme d'habitude :

$$\begin{aligned} \delta Q_r &= \phi(r, t) dt \\ &= 2\pi r h j_Q(r, t) dt \\ \delta Q_{r+dr} &= \phi(r + dr, t) dt \\ &= -2\pi(r + dr) h j_Q(r + dr, t) \end{aligned}$$

---

2. abus de langage, il ne s'agit pas d'un transfert thermique par rayonnement

et

$$\begin{aligned}
 \delta Q_P &= P_N V_{\text{morceau}} dt \\
 &= P_N \pi ((r + dr)^2 - r^2) h dt \\
 &= P_N \pi (2r + dr) h dr dt \\
 &\simeq 2P_N h \pi r dr dt
 \end{aligned}$$

Donc, en regroupant les équations :

$$2\pi h(r j_Q(r, t) - (r + dr) j_Q(r + dr, t)) dt + 2P_N h \pi r dr dt = 0$$

et donc en reprenant la formule de Taylor :

$$-2\pi h \cancel{dr} \cancel{dt} \frac{\partial}{\partial r} (r j_Q(r, t)) + 2P_N h \pi r \cancel{dr} \cancel{dt} = 0$$

et comme on travaille en régime permanent, on obtient finalement :

$$\frac{d}{dr} (r j_Q(r)) = P_N r$$

Ainsi,

$$r j_Q(r) = \frac{P_N}{2} r^2 + \alpha$$

i.e pour  $r > 0$  :

$$j_Q(r) = \frac{P_N}{2} r + \frac{\alpha}{r}$$

or, on remarque que  $r = 0$  fait partie du domaine de définition, donc pour éviter une divergence en  $+\infty$  de la température, nous nous voyons dans l'obligation d'annuler  $\alpha$  :

$$\tilde{j}_Q(r) = \frac{P_N}{2} r \vec{u}_r$$

(c) On a, d'après la loi de Fourier :

$$\begin{aligned}
 T'(r) &= -\frac{1}{\lambda} j_Q(r) \\
 &= -\frac{P_N}{2\lambda} r
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$T(r) = -\frac{P_N}{4\lambda} r^2 + \beta$$

or, comme la température est continue (pas de conducto-convection), on a la condition que  $T(\frac{D}{2}) = T_s \implies \beta = T_s + \frac{P_N}{4\lambda} \frac{D^2}{4}$  :

$$T(r) = T_s - \frac{P_N}{4\lambda} \left( r^2 - \frac{D^2}{4} \right)$$



- (d) La température maximale dans le barreau est donc atteinte en  $r = 0$  (au centre du barreau donc), on a alors :

$$T_{\max} = T_s + \frac{P_N D^2}{16\lambda} \simeq 1221 \text{ °C}$$

Le barreau est donc très proche de fondre en son centre!

2. (a) On refait la même démarche qu'aux questions précédentes, on obtient alors que (cette fois notre constante d'intégration n'a pas à être nulle car 0 ne fait pas partie de notre domaine de définition).

On a alors :

$$j_Q(r) = \frac{P_N}{2} r + \alpha \frac{1}{r}$$

et donc la loi de Fourier nous permet de dire que :

$$T(r) = -\frac{P_N}{4\lambda} r^2 - \frac{\alpha}{\lambda} \ln(r) + \beta$$

or, comme on se situe toujours dans le cadre de la conducto-convection, on a bien  $T(\frac{d}{2}) = T(\frac{D}{2}) = T_s$ .

Un calcul fastidieux nous permet d'en déduire que :

$$T(r) = T_s - \frac{P_N}{4\lambda} (r^2 + \frac{D^2 - d^2}{4 \ln(\frac{d}{D})} \ln(\frac{2r}{d}) - d^2)$$

- (b) On trouve ainsi que :

$$r_{T_{\max}} = \sqrt{\frac{-2\alpha}{\lambda}} \simeq 10 \text{ mm}$$

donc on s'est éloigné du centre!

et en réinjectant cette valeur dans l'expression de  $T$ , on trouve :

$$T_{\max} \simeq 681 \text{ °C}$$

donc on s'est également éloigné de la température de fusion!

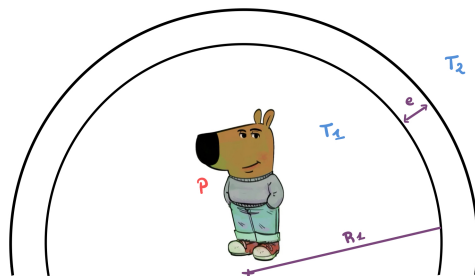
## 2.3 Épaisseur d'un igloo

Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs d'un igloo contenant un seul habitant si la température extérieure est de  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

La conductivité de la glace sera prise égale à  $\lambda = 0,05\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , la température intérieure minimale nécessaire à la survie est de  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et on considérera que le métabolisme de l'habitant dégage une puissance de  $P = 50\text{ W}$ .

**Corrigé :**

Schématisons cette situation



POV : T'es juste un mec chill dans son igloo

On se retrouve en *régime stationnaire*, et on se repère en *coordonnées sphériques*.

On remarque qu'ici aussi, il n'y a que de la conduction donc l'équation de la chaleur est applicable.

Bien heureusement, le calcul de  $R_{th}$  a été réalisé à l'exercice [2.1]. Néanmoins on travaille sur **une demi-sphère**, donc on prendra  $R'_{th} = R_{th}/2$ . On a donc juste à utiliser la loi d'Ohm thermique (qui est bien valable ici) :

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \Phi_0$$

$$\text{avec } R_2 = R_1 + e.$$

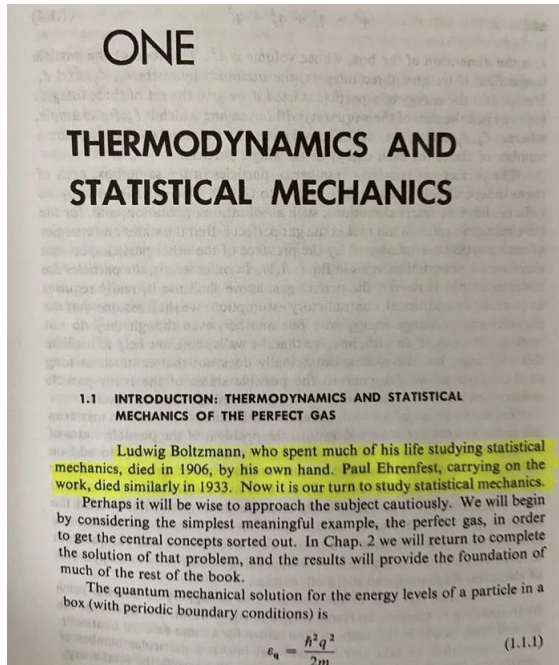
D'où

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$$

On rappelle que  $\Phi_0$  est en W. C'est en réalité une puissance, on l'assimile à  $P$ !

Ainsi, en prenant  $\Phi_0 = 50\text{ W}$ ;  $R_1 = 1\text{ m}$ ;  $R_2 = R_1 + e$ ;  $T_1 = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $T_2 = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , on a :

$$e = \frac{R_1}{\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda R_1 (T_1 - T_2)} - 1} \approx 23\text{ cm}$$



The people studying it:

