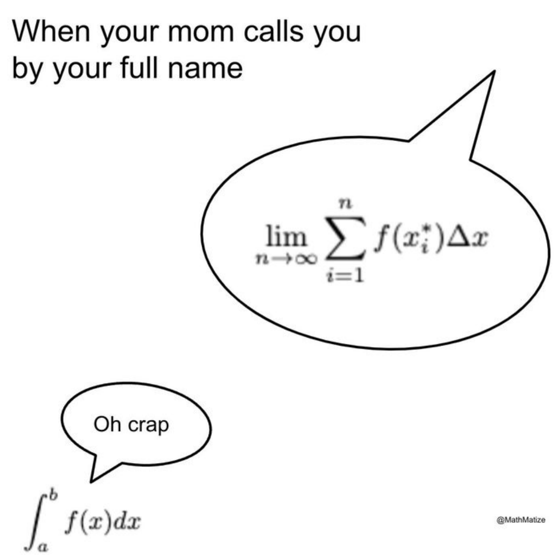
Semaine 18-19 : intégrales à paramètres

BURGHGRAEVE Marc
KRAWCZYK Victor
Avec l'aide de GERY julien

1er février 2025



Exercice 11 : (Mines-Ponts 2019)

Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' - xy + 1 = 0$.

a) Trouver les solutions de (E) développables en série entière.
Réponse : Ne présente pas de difficultés, vous arrivez à ;

$$\sum_{n=0}^{+\infty}((a_{n+1}(n+1)n + (n+1)a_{n+1} - a_{n-1})x^n) + a_1 + 1 = 0$$

$a_1 = -1, a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$
En calculant le produit de l'inverse des carrés pairs puis impairs (en vous aidant de la division de cas pairs) on trouve finalement $a_{2n+1} = \frac{-4^n(n!)^2}{(2n+1)!}, a_{2n} = \frac{a_0}{4^n(n!)^2}$

b) Montrer que $f : x \to \int\limits_0^{\pi/2} e^{-x \sin t}\, dt$ est solution de (E).
Réponse : Il faut d'abord prouver que f est C^2. Ensuite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin(t)}(x\sin(t)^2 - sin(t) - x)dt + 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin(t)}(-x\cos(t)^2 - sin(t))dt + 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x\sin(t)}x\cos(t)^2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin(t)}sin(t))dt + 1$$

$$= \underbrace{\left[\cos(t)e^{-x\sin(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin(t)}sin(t))dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin(t)}sin(t))dt + 1 = 0$$

c) En déduire $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, dt$.
Réponse : f est solution de l'équation différentielle et $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc f est développable en série entière. On a donc $f^k(0) = a_k k!$, et en reprenant les relations données au dessus (cette fois on connait a_0), on a alors $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, dt = (-1)^n f^n(0)$

Exercice 12 : Complément sur la fonction Γ

a) Montrer que Γ est convexe.
Réponse : cours.

b) Montrer qu'en 0^+, $\Gamma(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$.
Réponse : En exploitant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (se montre avec une IPP), on a donc $\Gamma(x) \sim \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x}$

c) Montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $]0,+\infty[$.
Réponse : cours.

d) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1}\ln(t)\,dt = \Gamma(x)$.
Réponse : Il suffit de faire une IPP (à justifier) et de dérouler les calculs :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{x\ln(t)-\ln(t)-t}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{x\ln(t)-t}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= \Big[e^{x\ln(t)-t}\ln(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x-t}{t}e^{x\ln(t)-t}\ln(t)\,dt \\
&= 0 - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(x-t)e^{-t}\ln(t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} (t-x)t^{x-1}e^{-t}\ln(t)\,dt
\end{aligned}$$

e) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t}\,dt = \Gamma(x)$.
Réponse : c'est consternant de simplicité :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t}\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^t)^x e^{-(e^t)}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\frac{1}{u}\,du = \Gamma(x)
\end{aligned}$$

avec $u = e^t, \ln(u) = t, dt = \frac{1}{u}du$

Exercice 13 : (ENS MP 2022)

a) Pour $u \in]-1,1[$, montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \left(\frac{u}{2}\right)^{2n}.$$

Réponse : Il faut utiliser un DL. Les grandes lignes :

$$\begin{aligned}
(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2k-1}{2}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \frac{(2k)!}{2^k k! 2^k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k
\end{aligned}$$

b) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^\pi \ln\left((\cos\phi + x)^2\right) d\phi$ est constante sur $[-1,1]$.

Réponse : Je ne vois pas le rapport avec la question précédente. On va poser $x = \cos(2u)$. On va aussi utiliser le fait que si f est π-périodique alors $\forall x$, $\int_x^{x+\pi} f$ est constante

$$\begin{aligned}
\ln((\cos(\phi) + \cos(2u))^2) &= \ln((2\cos(\frac{\phi+2u}{2})\cos(\frac{\phi-2u}{2}))^2) \\
&= \ln(4) + \ln(\frac{\cos(\phi+2u)+1}{2}) + (\frac{\cos(\phi-2u)+1}{2})
\end{aligned}$$

Alors on a, avec un changement de variable (on laisse le $\ln(4)$ qui est constant) :

$$\begin{aligned}
&\int_{2u}^{2u+\pi} \ln(\frac{\cos(\phi)+1}{2})d\phi + \int_{2u-\pi}^{2u} \ln(\frac{\cos(\phi)+1}{2})d\phi \\
&= \int_{2u}^{2u+\pi} \ln(\frac{\cos(\phi)+1}{2})d\phi + \int_{2u+\pi}^{2u+2\pi} \ln(\frac{\cos(\phi)+1}{2})d\phi \\
&= \int_{2u}^{2u+2\pi} \ln(\frac{\cos(\phi)+1}{2})d\phi = cst
\end{aligned}$$

Exercice 14 : (X 2007 143)

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} \sin\left(\sqrt{t}\right)\, dt$.

a) Montrer que f est de classe C^1.
Réponse : c'est un théorème de dérivabilité : il faut localiser. sur $[a, b]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}b := \varphi(t)$

b) Donner la limite de f en $+\infty$.
Réponse : On peut le faire à la main :

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(\sqrt(t))dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sqrt(t)dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-xu^2} u2udu \\
&\leq -\frac{1}{x}\left[ue^{-xu^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}du \\
&\leq 0 + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \qquad\qquad (x > 1) \\
&\leq \frac{cst}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Ou, plus simplement,

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(\sqrt(t))dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \\
&\leq \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

c) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
Réponse :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} -te^{-xt}\sin(\sqrt(t))dt = \int_0^{+\infty} -u^2e^{-xu^2}\sin(u)2udu \\
&= \frac{1}{x}\left[\sin(u)u^2e^{-xu^2}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}(2u\sin(u) + u^2\cos(u))du \\
&= -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x}\underbrace{\left[\cos(u)ue^{-xu^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}(\cos(u) - u\sin(u))du\right) \\
&= -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}(u\sin(u))du - \frac{1}{2x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}(\cos(u))du \\
&= -\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x)}{4x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\underbrace{\left[\sin(u)e^{-xu^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 2uxe^{-xu^2}\sin(u)du\right) \\
&= -\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x)}{4x^2} - \frac{xf(x)}{2x^2}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& y' + \frac{y}{x} - \frac{y}{4x^2} + \frac{y}{2x} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y' + \left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0
\end{aligned}$$

d) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
Réponse : On a alors $f(x) = Ae^{-\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{x}+6\ln(x)\right)}$. Pour identifier A, bon courage ... (éventuellement essayer en x=1)

Exercice 15 : (X(2) 112)

a) Déterminer I l'ensemble des réels t tels que $x \to e^{-xt\frac{|\sin x|}{x}}$ est intégrable.
Réponse : Notons $f:(x,t)\mapsto e^{-xt}\frac{sin(x)}{x}$ $\forall t\in\mathbb{R}^{+*}$, est intégrable :
Si t = 0, $f(0,t)=\frac{sin(x)}{x}$ qui n'est intégrable (considérer $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt$)
Si $t<0, f(x,t)\to+\infty$ quand $x\to+\infty$
Soit $t\in\mathbb{R}^{+*}$ Alors $f(x,t)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$Ȧinsi I = $\mathbb{R}^{+*}$

b) Pour $t\in I$, calculer $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,dx$.
Réponse : Montre d'abord qu'elle est C^1. Ensuite,

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=\int_0^{+\infty}-e^{-xt}sin(x)dx\\&=Im\left(-\int_0^{+\infty}e^{-xt+xi}dx\right)=Im\left(\left[\frac{-e^{x(i-t)}}{i-t}\right]_0^{+\infty}\right)\\&=\left[Im\left(\frac{-e^{x(i-t)}}{i-t}\right)\right]_0^{+\infty}=\left(\left[\frac{e^{-xt}(cos(x)+tsin(x))}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}\right)=-\frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

D'où $f(x)=-\arctan(x)+c$ avec $c=\frac{\pi}{2}$ (faire tendre x vers $+\infty$)

c) En déduire $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$
Réponse : Attention à la peau de banane comme dirait l'autre, il faut prouver la continuité en 0 !
Nous voulons montrer que

$$\lim_{x\to0_+}|f(x)-f(0)|=\lim_{x\to0_+}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\left(e^{-xt}-1\right)\right|dt=0.$$

Cette limite n'est pas triviale, nous allons faire une intégration par parties. Considérons pour $t>0$,

$$G(t)=\int_t^{\infty}\frac{\sin(u)}{u}du.$$

La fonction G est dérivable et $G'(t)=-\frac{\sin(t)}{t}$. De plus, la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ implique $\lim_{t\to\infty}G(t)=0$. Ainsi,

$$f(x)-f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\left(e^{-xt}-1\right)=-\int_0^{+\infty}G'(t)\left(e^{-xt}-1\right).$$

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\left[G(t)\left(e^{-xt}-1\right)\right]_0^{\infty}-\int_0^{+\infty}G(t)xe^{-xt}dt=-\int_0^{+\infty}G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}du:=-\int_0^{+\infty}H(x,u)du,$$

où la fonction $H(x,u)$ est définie par

$$H(x,u)=\begin{cases}G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u} & \text{si } x\neq0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

La fonction $H(x,u)$ est continue sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_+^*$ (la continuité en $(0,u)$ découle de $\lim_{t\to\infty}G(t)=0$) ; elle est aussi dominée par

$$|H(x,u)|\leq e^{-u}\in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Par le théorème de convergence dominée, nous avons

$$\lim_{x\to0_+}|f(x)-f(0)|=\lim_{x\to0}\left|-\int_0^{+\infty}H(x,u)du\right|=\left|-\int_0^{+\infty}\lim_{x\to0}H(x,u)du\right|=0.$$