Séries entières

Vallaeys Pascal

16 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 2,20,21,22,23,24,47,51

Méthodes standard des exercices :

- Calculer un rayon de convergence (diverses méthodes)
- Calculer le développement en série entière d'une fonction donnée (3 méthodes principales)
- Utiliser les séries entières pour calculer la somme d'une série numérique.
- Chercher une solution développable en série entière d'une équation différentielle linéaire.
- Dériver et intégrer des fonctions définies par des séries entières.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2023)
Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$
1. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)
Soit $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.
1. Décomposer f en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité du développement.
3. a) Soit $R > 0$ et g une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$. Exprimer une relation entre a_p et $g^{(p)}(0)$ en la prouvant.
b) En déduire une développement limité de f à l'ordre 3.

Exercice 4 : (CCINP MP 2017)
On considère la fonction f définie par $f(x) = (\arcsin x)^2$.
1) Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
2) Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 2$.
3) En déduire son développement en série entière.

Exercice 5 : (Mines MP 2021)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+1}{x^2 + 2x\,\text{cotan}(\alpha) - 1} \end{array}$, avec $\alpha \in]0; \pi[$.
Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.

Exercice 6 : (CCINP MP 2021)

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :

a) $\sum (n+1)3^n z^{2n}$

b) $\sum \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$

Exercice 7 : (CCINP MP 2021)

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

a) $f(z) = \dfrac{1}{6z^2 - 5z + 1}, z \in \mathbb{C}$

b) $g(x) = \ln \dfrac{2+x}{1-x}, x \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, dérivable sur $\mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

Exercice 8 : (Mines MP 2021)

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

2) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{s_n x^n}{n!}$ pour les x tels que la série converge. Montrer que $S(x)e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

Exercice 9 : (CCINP MP 2021)

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n) \quad , \quad b_n = \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n).$$

1. Montrer que $\sum b_n$ converge.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel pair.
3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum b_n x^n \quad , \quad \sum a_n b_n x^n \quad , \quad \sum (a_n + b_n) x^n$$

Exercice 10 : (Mines télécom MP 2021)

Trouver une solution à l'équation différentielle $xy'' - y' + x^3 y = 0$ sous forme de somme d'une série entière.

Exercice 11 : (Mines télécom MP 2021)

Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Exercice 12 : (CCINP MP 2021)

À l'aide de séries entières, calculer les sommes

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser a.).

Exercice 13 : (CCINP PSI 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 = 3 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

2. On note $f \colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est bien définie sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 :

Montrer que la fonction $f : x \to \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (après avoir été prolongée par continuité en 0).

Exercice 15 :

On pose pour tout réel x : $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$.

a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de f.
b) Comparer ln(f) et une fonction usuelle à déterminer.
c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $4\left(1+x^2\right)f''+4xf'-f=0$.
d) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 (et trouver le rayon).

Exercice 16 :
On pose $a_0=0$, $a_1=1$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n+(-1)^n$.
a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|a_n|\leq 2^{n+1}-1$.
b) En déduire que le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum a_n.z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
c) Calculer la somme de cette série entière sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.
d) En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 17 : (CCINP PSI ??)
Nature de la série de terme général $\sin(2\pi n!e)$.

Exercice 18 : Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim}\prod_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{2^k}}$.

Exercice 19 : (Centrale MP 2023)
On note $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On consière les fonctions définie par $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ln(n)x^n$ et $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}H_nx^n$.
1. a) Montrer que $H_n=ln(n)+O(1)$. On pourra effectuer une comparaison série intégrale.
b) En déduire que les fonctions f et g sont définies sur $]-1,1[$.
2. Calculer une expression de $g(x)$ et en déduire un équivalent de f en 1.
3. Il restait une 3ème question mais je n'ai pas eu le temps de l'aborder .
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Une fois l'expression de $g(x)$ calculée, pour trouver l'équivalent on peut essayer de se ramener à l'expression de f et utiliser le fait que $H_n-ln(n)$ est borné.

Exercice 20 : (Mines MP 2023)
On note $p(n)$ le nombre de triplets $(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$ tels que $x+2y+3z=n$. On note $G(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p(n)t^n$.
1. Montrer que G est définie pour $|t|<1$ et qu'on a
$\forall t\in\,]-1,1[\,,\ G(t)=\dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.
2. En déduire un équivalent de $p(n)$.

Exercice 21 : (Magistère MP 2022)
Soit $\alpha>0$. Notons $R>0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$, où $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z\in\mathbb{C}$.
Que vaut le rayon de convergence de $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 22 : (Centrlale MP 2021)
Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ de rayon de convergence $R>0$.
1. Calculer, pour $r\in\,]0;R[$, $\int_0^{2\pi}f(re^{it})\,\mathrm{d}t$.
2. On considère l'égalité suivante :

$$\forall r\in\,]0;R[\,,\ \forall z\in B(0,r),\ f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer l'égalité pour $f:z\mapsto z^n$, $n\in\mathbb{N}$.
b) Montrer l'égalité pour la fonction f définie dans l'introduction.

Exercice 23 :
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-a,a[$ absolument monotone : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}\geq 0$. On note $S_n(x)$ sa somme de Taylor d'indice n, et $R_n(x)$ le reste intégral de Taylor d'indice n.

1. Montrer que $\forall x\in\,]0,a[$, $S_n(x)$ est croissante et majorée.
2. En déduire que la suite $(R_n(x))_{n\in\aleph}$ converge.

3. Montrer que $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.
4. En déduire que pour tout couple (x,y) de $]0,a[$, tel que x<y, on a $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.
5. Montrer que f est développable en série entière sur $]0,a[$.
6. Conclure sur $]-a,a[$.

Exercice 24 : Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On note Ω l'ensemble de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si pour toute bijection $\sigma \in \Omega$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

b) On pose, dans la suite, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Déterminer la valeur de $\sum u_n$.

c) Etablir la convergence et calculer la somme $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right) + ...$

d) Quelles sont les valeurs possibles, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $\sum u_{\sigma(n)}$ pour $\sigma \in \Omega$?

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 25 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de f.

2. Calculer f.

Exercice 26 : (CCINP MP 2023)

On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\forall n \geq 2, \quad d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-2}{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad et \quad \left\{ \begin{array}{l} d_0 = 1 \\ d_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

1. Calculer d_2 et d_3.

Montrer que $\forall n \geq 2, (n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \leq 1$.

Que peut-on dire du rayon de convergence de $S(x) \ = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$?

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par S. Déterminer alors une autre expression de S sans le symbole somme.

4. Une ultime question non traitée.

Exercice 27 : (CCINP MP 2023)

On considère $F(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-t^2\sin^2\theta}}$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

1. Trouver le développement en série entière de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et l'exprimer en fonction des W_n.

2. Justifier que F est développable en série entière et donner son développement en série entière, ainsi que le rayon de convergence de ce dernier.

3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $(t^3-t)x'' + (3t^2-1)x' + tx = 0$ qui admettent un développpement en série entière est engendré par F.

Exercice 28 : (CCINP MP 2023)

On pose $I_0 = I_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on pose

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

On note $f\colon x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière définissant f vérifie $R \geq 1$.

2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire l'expression de f, la valeur de R et une expression de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $r > 0$. On note $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} r^{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Exercice 30 : (Mines télécom MP 2021)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
1. Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} a_n \ln n\, z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$?
2. On pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite (γ_n) converge.
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \to 1^-$.
On pensera à un produit de Cauchy de séries entières.

Exercice 31 : (CCINP MP 2019)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq |P(t)|$.
a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.
b) Montrer que f est la fonction nulle.
c) Le résultat subsiste-t-il si P est supposé être de degré pair ?

Exercice 32 :
Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2.\cos(x)} dx = 2\pi . \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2}$.

Exercice 33 :
On considère la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$, puis $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
b) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
c) Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la somme, notée f.
d) Calculer f sur le domaine $]-R, R[$.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 34 : (Mines-télécom MPi 2023)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ.
Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n>0} \frac{a_n x^n}{n!}$.
1. Donner le rayon de convergence de cette serie.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x} f(x)$.

Exercice 35 : (Mines MP 2023)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A \text{ et } |f''(x)| \leq B}$
1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$, $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}}$
2. Trouver une majoration optimale pour $|f'|$.
3. Soit $(M, k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{2n}(x)| \leq M k^{2n} (2n)!}$ Montrer que f est développable en série entière autour de 0 et donner son développement.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Question 1 : appliquer la formule pour f' en $[x, x+h]$ et $[x-h, x]$
Commentaires divers : Examinateur calme, intervenant assez souvent, me faisant remarquer des erreurs évitables avec bienveillance et en testant ma connaissance sur le cours. M'a donné des indications car "le temps presse".

Exercice 36 : (Mines MP 2023)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.
On suppose que la série entière $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence $r > 0$ et on pose
$\forall x \in \left]-r, r\right[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n x^n$.
1. Montrer que $\forall x \in \left]-r, r\right[,\ xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.
2. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que : $\forall x \in \left]-\rho, \rho\right[, f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 : (Magistère MP 2022)
(exercice préparé)
1) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum b_n$ diverge et $z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ soit de rayon 1.
Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$
2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\frac{a_n}{b_n})_n$, définie à partir d'un certain rang, possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$
Montrer que : $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \ell$
Commentaires divers : Suite à la résolution de la première question, l'examinateur m'a posé la question suivante : si on a une inégalité entre les termes généraux de suites quelconques dont on ne sait pas si elles admettent des limites (du style : $\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \leqslant b_n$), quel objet peut on invoquer pour faire « comme un passage à la limite dans l'inégalité » ?

Exercice 38 : (Mines télécom MP 2021)
On pose pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible : $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n+n^2 ix}$.
1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 39 : (Mines MPi 2023)
1. Montrez que $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière au voisinage de 0, et donnez son développement.
2. Montrez que $g :\ x \longmapsto \mathcal{R}e\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t\right)$ est développable en série entière au voisinage de 0, et donnez son développement.
3. Donnez la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 40 : (ENS MPi 2022 ???)
Soient $p = (p_n)_n \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$, $a = (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n x^n$. On suppose que $R_p = 1$ et que $\frac{a_n}{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s \in \mathbb{C}$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
1. Montrer que $R_a \geq 1$.
2. On suppose de plus que $f(r) \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $\frac{g(r)}{f(r)} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} s$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Distinguer les cas $s = 0$ et $s \neq 0$.
Montrer que, si $s \neq 0$, on peut se ramener à $s = 1$, puis au cas $s = 0$ via la transformation $\tilde{a_n} := a_n - p_n$. Revenir ensuite à la définition d'une limite.

Commentaires divers :

L'examinateur m'a expliqué à la fin de l'épreuve que le but de cet exercice est de montrer le théorème de sommation des petits o.

Exercice 41 : (ENS MP 2022)

On pose $f(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

1) Soit $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $|u| < 1, |v| < 1$ et $|u+v+uv| < 1$. Montrer que $f(1+u)+f(1+v) = f((1+u)(1+v))$.

2) Soit $h(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k) \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|h(re^{it})|\,\mathrm{d}t = \ln|h(0)| + \ln\left(\frac{r}{|a_1|\ldots|a_n|}\right)$ où $r < 3 \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

Commentaires divers :

Pour la 1), j'ai paramétré par un t réel pour pouvoir dériver les relations en considérant $g(t) = f(1+tu) + f(1+tv) - f((1+tu)(1+tv))$, elle n'a pas demandé de détails sur l'intervalle où l'on peut dériver puisque l'on se met au voisinage de 1.

Pour la 2), utiliser la 1) en faisant appaître les conjugués.

Exercice 42 : (ENS MP 2022)

On note $c(z) = \sum c_k z^k$ et $d(z) = \sum d_k z^k$.

On étudie l'affirmation $(*)$: " S'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, c(a^n) = d(a^n)$ alors $c = d$".

1) On suppose qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0, c_k = d_k$. Montrer $(*)$.

2) Trouver un contre exemple dans le cas général

3) Pour $0 < a < 1$. On suppose qu'il existe $0 < r < 1$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, c_k \leq r^{k^2}$ et $d_k \leq r^{k^2}$. Montrer $(*)$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : 2) Chercher des séries entières de rayon de convergence infini

Commentaires divers : L'examinateur n'a pas voulu que j'utilise le théorème de la double limite qu'il jugeait trop compliqué à démontrer.

Exercice 43 : (X MP 2022)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\exp(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2)}{\sqrt{1-x}}$.

On sait que f est développable en série entière et on peut écrire $f(x) = \sum c_n x^n$.

Montrer que $c_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi n}}$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour l'exercice 2, développer le dénominateur explicitement et écrire le numérateur sous la forme d'une série entière. Exploiter ensuite le rayon de convergence infini du numérateur pour déterminer l'équivalent sur les c_n.

Exercice 44 : (ENS MP 2021)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$, de somme $f(z)$.

1. Trouver une CNS simple pour que f coïncide avec une fraction rationnelle sur son disque ouvert de convergence.

2. Soit $H_{d,n} = (a_{i+j+n})_{0\leqslant i,j\leqslant d}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\det(H_{d-1,n}) \neq 0$ et $\det(H_{d,n}) = 0$. Montrer que f coïncide avec une fraction rationnelle sur son disque ouvert de convergence.

Exercice 45 : (X 2007 94)

a) Montrer que $\frac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)}$ est réel.

b) En déduire une manière d'obtenir une valeur approchée de π.

c) Comparer la vitesse de convergence à celle d'autre séries donnant π.

Exercice 46 : (X MP)

On pose $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$ et $g(x) = |\sin(\pi x)|$.

a) Montrer que $f \leq g$.

b) Si $y \notin \mathbb{Z}$, déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{|\sin(n\pi y)|}$.