MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 11

Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles **1**
A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$ . . . 1
A.1 Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions . . . 1
A.2 La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple. Contre-exemple pour la réciproque . . . 1
A.3 Théorème de continuité pour les suites de fonctions . . . 2
A.4 Théorème de la double limite pour les suites de fonctions . . . 2
A.5 Théorème d'intégration sur un segment des suites de fonctions . . . 3
A.6 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions . . . 3
A.7 Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions . . . 4
A.8 Théorème de continuité pour les séries de fonctions et application à zêta . . . 4
A.9 Théorème de la double limite pour les séries de fonctions et application à zêta . . . 5
A.10 Théorème d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions et application à zêta . . . 6
A.11 Théorème de « dérivation » pour les séries de fonctions et application à zêta . . . 7
A.12 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment 8
A.13 Théorème de Weierstrass . . . 8
B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ . . . 9
B.1 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions . . . 9
B.2 Théorème de « primitivation » des suites de fonctions sur un segment . . . 10
B.3 Pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS . . . 11
B.4 Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement . . . 11
B.5 Extension $\mathcal{C}^k$ du théorème de « dérivation » et application à zêta . . . 12
B.6 Équivalent de zêta au voisinage de 1^+ à l'aide d'une comparaison intégrale . . . 13
B.7 Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale . . . 14
C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement . . . 15
C.1 Limite de zêta en 1^+ en « epsilon » . . . 15
C.2 La fonction zêta est log-convexe . . . 16
C.3 Démonstration du théorème de la double limite . . . 17
C.4 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment 18

2 Exercices de référence **19**
A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$ . . . 19
B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$ . . . 22
C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement . . . 25

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Définition - Convergence simple (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
On dit que $(f_n)_n$ *converge simplement* (CVS) vers f sur I si :

$$\forall x \in I, \lim_{n \to +\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0$$

i.e pour tout $x \in I$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Définition - Convergence uniforme (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
On dit que $(f_n)_n$ *converge uniformément* (CVU) vers f sur I si :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

A.2 La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple. Contre-exemple pour la réciproque

Proposition - CVU ⇒ CVS

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Alors,

$$(f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \implies (f_n)_n \text{ CVS vers } f \text{ sur } I$$

⚠ **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!** (Prendre $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0;1]$)

↳ CVS vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0;1]$, qui est $\mathcal{C}^{pm}$ et non $\mathcal{C}^0$

DÉMONSTRATION.

Supposons donc que $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad 0 \leq \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_E \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a donc bien la convergence simple.

A.3 Théorème de continuité pour les suites de fonctions

Théorème de continuité (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in I$, mq g est $\mathcal{C}^0$ sur I.

Soit $\varepsilon > 0$,

comme $\underbrace{(f_n) \text{ CVU vers } f}_{H_2.}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$

i.e $\forall x \in I, \forall n \geq N$, $\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Choisissons donc en particulier cette fonction f_N, $\underbrace{\text{supposée continue en } a}_{H_1.}$.

$\Rightarrow \exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(a)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ainsi, pour $x \in I$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\|_E = \|f(x) - f(a) + f_N(x) - f_N(x) + f_N(a) - f_N(a)\|_E$$

$$\overset{I.T}{\leq} \underbrace{\|f(x) - f_N(x)\|_E}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_N(a) - f(a)\|_E}_{\leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_N(x) - f_N(a)\|_E}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |x-a| \leq \eta}$$

Finalement, si $|x-a| \leq \eta$: $\|f(x) - f(a)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

DONC

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \ |x-a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_E \leq \varepsilon$$

i.e f est $\mathcal{C}^0$ en a, pour tout $a \in I$.

D'où f continue sur I.

A.4 Théorème de la double limite pour les suites de fonctions

Théorème de la double limite (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Soit $a \in I$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 $(l_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$

C_2 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} l_n = l$

i.e $\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

Rmq : On échange les limites !

A.5 Théorème d'intégration sur un segment des suites de fonctions

Théorème d'intégration sur un segment (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C_2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

DÉMONSTRATION. La première conclusion provient du th. de continuité. (C_1 ✓)

et $C_1 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ existe.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt \right\|_E = \left\| \int_a^b f(t) - f_n(t)\,dt \right\|_E$$

$$\leqslant \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_E\,dt$$

$$\leqslant \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ d'après } (H_2)} (b-a)$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ (C_2 ✓)

A.6 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H_3 $(f'_n)_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C_2 $f' = g$

C_3 $\forall [a;b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a;b]$

A.7 Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions

Définition - Convergence simple (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $\sum_n f_n$ *converge simplement* sur I (CVS) si :

$$\forall x \in I \ \underline{\text{fixé}}, \ \sum_n f_n \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ On revient aux séries numériques/vectorielles.

Définition - Convergence uniforme (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$.

Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$ et $S_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. On dit que $\sum_n f_n$ *converge uniformément* sur I (CVU) si :

$$(S_N)_N \text{ CVU vers } S \text{ sur } I.$$

et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $\|S(x) - S_N(x)\|_E = \|R_N(x)\|_E$, on a que :

$$\begin{aligned} \sum_n f_n \text{ CVU sur } I &\Leftrightarrow (S_N)_N \text{ CVU vers } S \text{ sur } I \\ &\Leftrightarrow (R_N)_N \text{ CVU vers } \tilde{0} \text{ sur } I. \end{aligned}$$

Définition - Convergence normale

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $\sum_n f_n$ *converge normalement* sur I (CVN) si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I.
- $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge (série numérique).

A.8 Théorème de continuité pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de continuité (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

EXEMPLE. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n : x \mapsto \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f_n(x)$

Appliquons le th. de continuité des suites de fonctions à (S_n) :

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est $\mathcal{C}^0$ sur I : oui car C.L $\underline{\text{finie}}$ de fcts $\mathcal{C}^0$ sur I (H_1)

Th. $\Rightarrow$ S est $\mathcal{C}^0$ sur I $(C_1 \checkmark)$

H_2 (S_n) CVU vers S sur I : oui par déf. de la supposée convergence uniforme (H_2)

A.9 Théorème de la double limite pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

(H$_1$) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \underset{E}{\cancel{\mathbb{R}}}$).

(H$_2$) $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

(C$_1$) $\sum_n l_n$ converge

(C$_2$) $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

EXEMPLE. Considérons $\zeta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Alors

(H$_1$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ admet une limite finie en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$, $\forall n \geq 2$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ $\Big\}$ $l_1 = 1$, $\forall n \geq 2$, $l_n = 0$

(H$_2$) $\sum_n f_n$ CVU sur $J = [2; +\infty[$: oui car CVN donc CVU

Donc, d'après le th. de la double limite, $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \to +\infty} f_n(x)$

$= \underline{1}$

A.10 Théorème d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème d'intégration termes à termes sur un segment (Série de fonctions)

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C1 S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C2 $\int_a^b S(x)dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx$

EXEMPLE. Calculons l'int. $I_{2,3} = \int_2^3 \zeta(x)\,dx$

H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[2;3]$: oui

H2 $\sum_n f_n$ CVU sur $[2;3]$: oui car CVN (cf. ci-dessus)

Donc, d'après le thm : $\underline{I_{2,3} \text{ existe}}$ et

$$\begin{aligned} I_{2,3} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 n^{-x}dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 e^{-x\ln(n)}dx \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{e^{-x\ln(n)}}{-\ln(n)} \right]_2^3 \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

...

A.11 Théorème de « dérivation » pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de « dérivation » (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H2 $\sum_n f_n$ CVS sur I.

H3 $\sum_n f_n'$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C1 S est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C2 $\forall x \in I, S'(x) = \sum_n f_n'(x)$

EXEMPLE. Soit $a > 1$, considérons $I_a = [a ; +\infty[$

H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I_a : ✓

H2 $\sum_n f_n$ CVS sur I_a : oui car CVN (cf. ci-dessous)

H3 $\sum_n f_n'$ CVU sur I_a : on a, $\forall x \in I_a$, $f_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x}$

$\Rightarrow \|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ avec $c = \frac{a+1}{2}$

↳ car $n^c \frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

par c.c avec $\frac{a-1}{2} > 0$

$\overset{\text{Th. comp.}}{\Rightarrow} \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ CV

$\overset{\text{Th. comp.}}{\Rightarrow} \sum_{n \geq 1} \|f_n'\|_\infty$ CV

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n'$ CVN

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n'$ CVU

Donc, d'après le thm, ζ est $\mathcal{C}^1$ sur I_a et $\forall x \in I_a$, $\zeta'(x) = \sum_{n \geq 1} -\frac{\ln(n)}{n^x}$

et ceci est vrai pour tout $a > 1$, donc ζ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1 ; +\infty[$

et $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\zeta'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln(n)}{n^x}$

A.12 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment

Théorème d'approx uniforme d'une fonction continue sur un segment par fonctions en escalier

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier. "

i.e, en considérant $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists (g_n) \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_{\text{esc}} \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{K}) \text{ tq. } \|f - g_{\text{esc}}\|_\infty \leq \varepsilon$$

A.13 Théorème de Weierstrass

Théorème de Weierstrass

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiales. "

i.e, en considérant $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists (P_n)_n \in \tilde{\mathbb{K}}[X]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (P_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists P_\varepsilon \in \tilde{K}[X] \text{ tq. } \|f - P_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$$

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H$_2$ $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H$_3$ $(f'_n)_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C$_1$ f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C$_2$ $f' = g$

C$_3$ $\forall [a;b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a;b]$

DÉMONSTRATION.

$H_1 \wedge H_3 \Rightarrow g$ est $\mathcal{C}^0$ sur I (Th. continuité)

Sur $[a;b] \subset I$, notons $F_n : x \longmapsto \int_a^x f_n'(t)\,dt$ et $G : x \longmapsto \int_a^x g(t)\,dt$

Ainsi, $H_3 \Rightarrow (F_n)$ CVU vers G pour tout $[a;b] \subset I$

or $\forall x \in [a;b] \subset I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = f_n(x) - f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVS}} f(x) - f(a)$

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G(x)$$

donc, par unicité de la limite, $\forall x \in [a;b] \subset I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$

Th. fond. de l'analyse, car g $\mathcal{C}^0$ $\Rightarrow$ f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ (C_1 ✓)

et $\forall x \in [a;b]$, $f'(x) = g(x)$ $\Rightarrow f' = g$ sur $[a;b] \subset I$ (C_2 ✓)

et ceci est vrai pour tout $[a;b] \subset I$
donc valable sur I tout entier.

Enfin, $(H_3) \Rightarrow (F_n)$ CVU vers $G + f(a)$ (Th. de primitivation)

or on sait que pour tout $x \in [a;b]$, $G(x) = f(x) - f(a)$

$\Rightarrow (f_n)$ CVU vers f sur tout $[a;b] \subset I$ (C_3 ✓)

B.2 Théorème de « primitivation » des suites de fonctions sur un segment

Théorème de « primitivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$ où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.
Soit $c \in [a;b]$.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C2 $(F_n)_n$ CVU vers F sur I.

avec $F_n : x \mapsto \int_c^x f_n(t)dt$ et $F : x \mapsto \int_c^x f(t)dt$.

DÉMONSTRATION. La première conclusion s'obtient à l'aide du thm. de cté (C1 ✓)

$\Rightarrow \forall x \in I,\ F(x) = \int_c^x f(t)dt$ existe.

D'autre part, $\forall x \in I,\ \| F_n(x) - F(x) \|_E = \| \int_c^x f_n(t) - f(t) dt \|_E$

$\leq \int_c^x \| f_n(t) - f(t) \|_E \, dt$

$\leq \int_c^x \| f_n - f \|_\infty \, dt = \| f_n - f \|_\infty (x - c)$

$\leq \underbrace{\| f_n - f \|_\infty}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} (b - c)$

$\Rightarrow \| F_n - F \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow (F_n)$ CVU vers F sur $[a;b]$ (C2 ✓)

B.3 Pour une série de fonctions, CVN ⇒ CVU ⇒ CVS

Proposition - Une propriété sacrément importante

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Alors,

$$[\sum_n f_n \text{ CVN sur } I] \implies [\sum_n f_n \text{ CVU sur } I] \implies [\sum_n f_n \text{ CVS sur } I]$$

⚠ Réciproques fausses !

DÉMONSTRATION. (uniquement CVN => CVU)

Supposons que $\sum_n f_n$ CVN sur I i.e $\sum_n \|f_n\|_\infty$ CV

Ainsi, soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$,
Soit $N \geq n+1$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_\infty$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty := \tilde{R}_n$$

$\Rightarrow$ $|R_n(x)| \leq \tilde{R}_n$ avec $\tilde{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sum f_n$ CVN par hyp.

DONC la fonction R_n est bornée sur I

DONC $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq \tilde{R}_n$

i.e $\|R_n\|_\infty \leq \underbrace{\tilde{R}_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$

i.e (R_n) CVU vers $\tilde{0}$ sur I

i.e $\sum_n f_n$ CVU sur I

D'où l'implication recherchée

B.4 Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement

Une série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement

Prenons $I = [0;1]$, considérons $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$
Alors,

$$\sum f_n \text{ CVU sur } I \text{ mais ne CVN pas sur } I.$$

DÉMONSTRATION.

Ici, $\sum_n f_n$ CVU sur $[0;1]$ (CCSA)
ABSL

MAIS $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^{[0;1]} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty^{[0;1]}$ $\underline{\underline{\text{DV}}}$

DONC $\sum f_n$ CVU sur $[0;1]$
mais ne CVN pas !!

ABSL : Au Bon Soin du Lecteur

B.5 Extension $\mathcal{C}^k$ du théorème de « dérivation » et application à zêta

Théorème de « dérivation » -> extension $\mathcal{C}^k$ (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^k$ sur I.

H_2 $\forall p \in [\![0; k-1]\!] \sum_n f_n^{(p)}$ CVS sur I.

H_3 $\sum_n f_n^{(k)}$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 S est $\mathcal{C}^k$ sur I.

C_2 $\forall p \in [\![0; p]\!], \forall x \in I, S^{(p)}(x) = \sum_n f_n^{(p)}(x)$

EXEMPLE. Soit $\alpha > 1$, considérons $I_\alpha = [\alpha; +\infty[$

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_α : ✓ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I_\alpha$, $f_n^{(p)} = (-1)^p \frac{\ln(n)^p}{n^x}$

H_2, H_3 $\left\}\begin{array}{l} \sum f_n \text{ CVS sur } I_\alpha \\ \text{ET} \\ \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n\geq 1} f_n^{(p)} \text{ CVN sur } I_\alpha \text{ car } \forall n \geq 1, \forall x \in I_\alpha,\ |f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{\ln(n)^p}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^c}\right) \quad \text{avec } c = \frac{\alpha+1}{2} > 1 \end{array}\right.$

(cf. démo A.11)

$\ldots \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CVN sur I_α

Donc, d'après le thm, ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_α pour tout $\alpha > 1$

$\Rightarrow$ ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$

B.6 Équivalent de zêta au voisinage de 1^+ à l'aide d'une comparaison intégrale

Proposition - Équivalent de zêta au voisinage de 1^+

On a, avec $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$,

$$\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$$

DÉMONSTRATION. On pose $D =]1\,;+\infty[$

Pour tout $x \in D$ fixé, on pose $f : t \longmapsto \frac{1}{t^x}$

comme $x > 1$, f est strictement décroissante

DONC, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n\,; n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$

croissance de l'int. $\Rightarrow$ $\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leqslant \frac{1}{n^x}$

AINSI, pour $n \geqslant 2$, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\forall N \geqslant 1, \quad \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}}$

D'où $\frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{N^{x-1}}\right)$

Ainsi, quand $N \longrightarrow +\infty$, on a $\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$

or $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty}$ et $\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$

D'où l'équivalent recherché.

B.7 Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \cancel{\mathbb{R}}$ E).

H2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C1 $\sum_n l_n$ converge

C2 $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x\to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right)$

DÉMONSTRATION. Supposons que H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admette une limite finie en a $:= l_n \in \mathbb{R}$

H2 $\sum_n f_n$ CVN sur I

○ $\underline{C_1}$: Soit $x \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n(x)\|_E \leqslant \|f_n\|_\infty$$

existe car $\sum_n f_n$ CVN !

or $\|.\|_E$ est $\mathcal{C}^0$ (car 1-lip.) donc, par passage à la lim :

$$\|l_n\|_E \leqslant \|f_n\|_\infty$$

Th. comp. $\Rightarrow$ $\sum_n \|l_n\|_E$ i.e $\sum_n l_n$ CV $\underline{\text{ABS}}$

$\Rightarrow$ $\sum_n l_n$ CV CAR E est de dim. $\underline{\text{Finie}}$

(C_1 ✓)

○ $\underline{C_2}$: Notons alors $L = \sum_n l_n \in E$

Pour $N \in \mathbb{N}$, $\|S(x) - L\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{N} (f_k(x) - l_k)\right\|_E + \left\|\sum_{k=N+1}^{+\infty} f_k(x) - l_k\right\|_E$

or, pour tout $p \geqslant N+1$,

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{p} f_k(x) - l_k\right\|_E \leqslant \sum_{k=N+1}^{p} \|f_k(x) - l_k\|_E$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{p} \|f_k\|_\infty + \sum_{k=N+1}^{p} \|l_k\|_E$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{k=N+1}^{p} \|f_k\|_\infty}_{\tilde{R}_N} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|l_k\|_E}_{\tilde{\tilde{R}}_N}$$

AINSI, pour tout $x \in I$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\|S(x) - L\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - l_k\right\|_E + \tilde{R}_N + \tilde{\tilde{R}}_N$$

Comme $\sum_k \|f_k\|_\infty$ et $\sum_k \|l_k\|_E$ CV, on peut dire que $\tilde{R}_N \longrightarrow 0$
$\tilde{\tilde{R}}_N \longrightarrow 0$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \geqslant N_0$, $\|\tilde{R}_N\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $\|\tilde{\tilde{R}}_N\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

et donc, $\forall x \in I$,

$$\|S(x) - L\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{N_0} f_k(x) - l_k\right\|_E + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_k(x) - l_k = 0$

(somme finie)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{N_0} f_k(x) - l_k = 0$$

donc, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow \left\|\sum_{k=0}^{N_0} f_k(x) - l_k\right\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

donc $|x-a| \leqslant \eta \Rightarrow \|S(x) - L\| \leqslant \frac{\cancel{3}\varepsilon}{\cancel{3}} = \varepsilon$

Finalement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow \|S(x) - L\|_E \leqslant \varepsilon$$

i.e $\lim_{x\to a} S(x) = L$

(C_2 ✓)

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 1 (Mines Télécom MP 2022) On pose

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Montrer que f est continue sur son domaine.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Donner la limite de f en $+\infty$.

Corrigé :

1 Pour $x \geq 0$, $u_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2} \overset{(*)}{\Rightarrow} \sum u_n(x)$ CV

Pour $x < 0$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum u_n(x)$ DVG

$\Big\}$ $D_{cvs} = \mathbb{R}_+$

2 Th. de continuité sur $\mathbb{R}_+$ (pas besoin de localiser !!)

3 Th. de dérivation version $\mathcal{C}^k$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

$\Rightarrow f_n^{(k)} : x \longmapsto \frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}$ ⇝ besoin pressant de localiser sur $I_a = [a ; +\infty[$ avec $a>0$

↳ majorer par $\frac{n^k e^{-na}}{1+n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par C.C ⟶ OK

$\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

4 En particulier, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $f' : x \longmapsto (-1) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n e^{-nx}}{1+n^2}}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) \leq 0$

$\Rightarrow f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow f$ est décroissante sur D_{cvs} (elle est $\mathcal{C}^0$ sur D_{cvs})

5 Th. de la double limite ⇝ pas besoin de localiser !!

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)}_{\substack{=0 \text{ si } n\neq 0 \\ =1 \text{ sinon}}}$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

Exercice 2 Soit α un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^{\alpha} x^n (1-x) \end{array}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite $(f_n)_n$.
2. Pour quelles valeurs du paramètre α cette convergence est-elle uniforme ?

Corrigé :

① Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $x \in [0,1]$,

si $x = 0,1$: $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

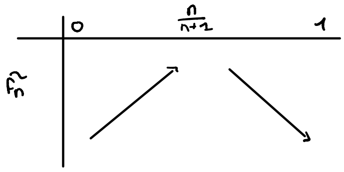
sinon : $f_n(x) = n^{\alpha} x^n (1-x)$

$= \underbrace{e^{\alpha \ln(n)} e^{n \underbrace{\ln(x)}_{<0}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} (1-x)$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ (f_n) CVS vers $\tilde{0}$ sur $[0,1]$

② Pour $n \in \mathbb{N}$,

$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |n^{\alpha} \underbrace{x^n (1-x)}_{:= \tilde{f}_n}|$ ↳ étude de fct :



$= \tilde{f}_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$= n^{\alpha} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$

$= n^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1}$

$\sim n^{\alpha - 1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\longrightarrow \exp(-1)}$

$\sim n^{\alpha - 1} e^{-1}$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff \alpha > 1$

Exercice 3 Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$
2. Montrer que $\lim_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$
3. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et calculer ses dérivées successives.
4. Étudier les variations de ζ.
5. Montrer que ζ est convexe.
6. Montrer que ζ est log-convexe.

Corrigé :

On pose $D =]1\,;+\infty[$

① (cf. démo page 13), on a $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

d'où $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$

② Th. de la double limite (cf. démo page 5)

d'où $\lim_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$

③ Soit $k \in \mathbb{N}^*$, application du th. $\mathcal{C}^k$ (cf. démo page 12)

Et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in D$,

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x}$$

④ En particulier, pour tout $x \in D$,

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

$$= \underbrace{-\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\ln(n)}_{\geq 0}\, \underbrace{\exp(-\ln(n)x)}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow$ ζ est décroissante sur D

⑤ De même, $\forall x \in D$, $\zeta''(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ ζ est convexe sur D

⑥ (cf. démo page 16)

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 4 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n(1-x) \end{array}$$

1. Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ ssi la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Corrigé :

1 Soit $x \in [0,1]$

$$u_n(x) \leqslant a_n x^n \leqslant a_0 x^n \quad (a_n)\searrow$$

et $\sum a_0 x^n$ CV (Série géom.)

$$\overset{\text{Th. comp}}{\Rightarrow} \sum u_n(x) \text{ CV}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum u_n \text{ CVS sur } [0,1]}$$

2
- $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n est bornée sur $[0,1]$ ($\mathcal{C}^0$ sur un segment)
- $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (étude de fcts)

$$= a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{1}{n+1}$$

$$\sim \frac{a_n}{n}\times e^{-1}$$

et deux séries dont les termes généraux sont équivalents possèdent la mm nature :

D'où $\sum \|u_n\|_\infty$ CV $\Leftrightarrow \sum \frac{a_n}{n}$ cv

i.e $\boxed{\sum u_n \text{ CVN sur } [0,1] \Leftrightarrow \sum \frac{a_n}{n} \text{ cv}}$

3 Tout d'abord, $\sum u_n$ CVU sur $[0,1]$

$\Leftrightarrow (R_n)_n$ CVU vers $\tilde{0}$ sur $[0,1]$

avec $R_n : x \mapsto \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

$\Leftarrow$: Supposons que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Soit $n\in\mathbb{N}$, pour $N>n$, on définit

$$R_{n,N} : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} R_n(x)$$

Ainsi, pour $x\in[0,1]$,

$$|R_{n,N}(x)| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{N} u_k(x)\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |u_k(x)|$$

$$|R_{n,N}(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=n+1}^{N} a_k x^k$$
$$\leqslant (1-x)\, a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$$
$$\leqslant \cancel{(1-x)}\, a_{n+1}\, x^{n+1} \times \frac{1}{\cancel{1-x}}$$
$$\leqslant a_{n+1}\, x^{n+1}$$

$$\overset{N\to+\infty}{\Rightarrow} 0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant a_{n+1}\underbrace{x^{n+1}}_{\leqslant 1} \leqslant a_{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \|R_n\|_\infty \leqslant \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0}$$

d'où $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow$: Réciproquement, supposons que $\sum_n u_n$ CVU sur $[0,1]$

Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k(1-x) \geqslant a_{2n}(1-x)\sum_{k=n+1}^{2n} x^k$$
$$\geqslant a_{2n}\,\cancel{(1-x)}\,x^{n+1}\times\frac{1-x^n}{\cancel{1-x}}$$
$$\geqslant a_{2n}\underbrace{x^{n+1}(1-x^n)}_{:=g_n(x)}$$

$$g_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \underbrace{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}}_{:=x_n}$$

$$g_n(x_n) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}\frac{n}{2n+1}$$
$$= \alpha_n$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}$$

et donc, en passant au sup' sur $[0,1]$,

$$0 \leqslant a_{2n}\, g(x_{2n}) \leqslant \|R_n\|_\infty$$

i.e $$0 \leqslant a_{2n}\underbrace{\alpha_n}_{\to\frac{1}{4}} \leqslant \underbrace{\|R_n\|_\infty}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\underbrace{a_{2n}}_{\to 0} \geqslant a_{2n+1}$ par hyp. sur les (a_n)

$$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 5 (Mines Télécom MP 2021) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^k f(x)\,dx = 0$$

1. Rappeler le théorème de Weierstrass.
2. Montrer que f est nulle.

Corrigé :

1. $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $\exists (P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ tq (P_n) CVU vers f sur $[a,b]$

2. Il est immédiat que de par l'hyp sur les moments nuls de f, on a que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(x) f(x)\,dx = 0$
Considérons la suite $(P_n)_n$ qui converge unif. vers f (qui existe d'après le th. de W.)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b P_n(x) f(x)\,dx = 0$

⚠ Réflexion au brouillon

Maintenant, on peut "intuitivement" se dire $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \overset{\text{on manip des CVU}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_a^b P_n(x) f(x)\,dx}_{=0} \longrightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow f^2 = \tilde{0} \Rightarrow f = \tilde{0}$

Étudions donc la lim. de $I_n = \int_a^b P_n(x) f(x)\,dx$

On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| I_n - \int_a^b f^2(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b (P_n(x) - f(x))\, f(x)\,dx \right| \\
&\leq \int_a^b |P_n(x) - f(x)|\,|f(x)|\,dx \\
&\leq \int_a^b \|P_n - f\|_\infty |f(x)|\,dx \\
&\leq \|P_n - f\|_\infty \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{:= I \text{, valeur finie ne dépendant pas de } n\ !!} \\
&\leq \underbrace{\|P_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par hyp.}} \times I
\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{I_n}_{=0} = \int_a^b f^2(x)\,dx$

unic. lim. $\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow f^2 = \tilde{0}$

$\Rightarrow f = \tilde{0}$

D'où le résultat voulu.

Exercice 5 (Mines Télécom MP 2019) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et $(P'_n)_n$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

Corrigé :

Soit donc $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \Rightarrow f' \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Ainsi, d'après le théorème de Weierstrass, $\exists (Q_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ tq (Q_n) CVU vers f' sur $[0,1]$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $P_n(x) = \int_0^x Q_n(t)\,dt + f(0)$ $\longrightarrow$ On a bien $P_n' = Q_n$ et $P_n \in \mathbb{R}[X]$

Montrons (P_n) CVU vers f sur $[0,1]$

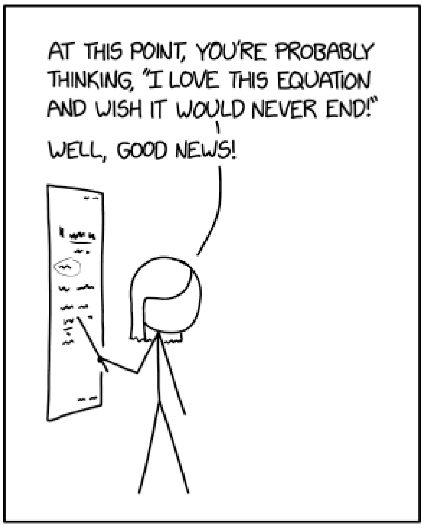
Soit $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_0^x Q_n(t)\,dt + \cancel{f(0)} - \int_0^x f'(t)\,dt - \cancel{f(0)} \right| \\
&\leqslant \int_0^x |Q_n(t) - f'(t)|\,dt \\
&\leqslant \|Q_n - f'\|_\infty \int_0^x dt \\
&\leqslant \|Q_n - f'\|_\infty \underbrace{x}_{\leqslant 1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \|P_n - f\|_\infty \leqslant \underbrace{\|Q_n - f'\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \text{ par hyp.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (P_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } [0,1] \\ (P_n' = Q_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } [0,1] \end{cases}$$

D'où le résultat voulu.



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.