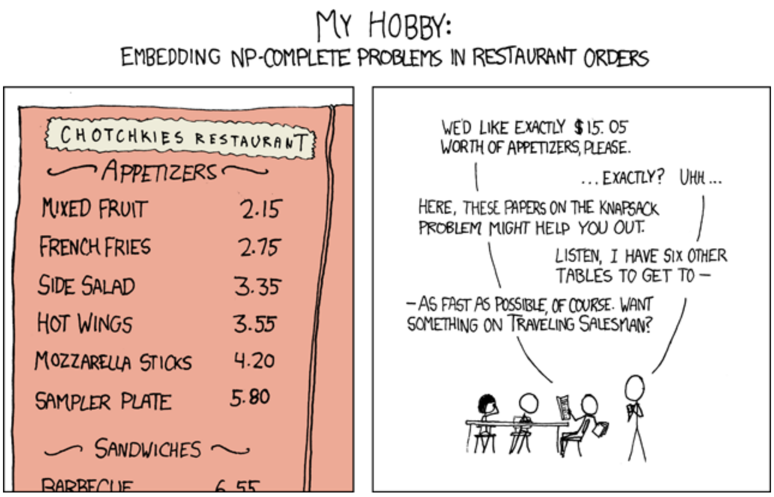
MPI* Info

TD Réductions



Olivier Caffier

On considère le problème suivant :

STABLE

- ➢ **Instance** : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.
- ➢ **Question** : existe-t-il un stable de taille au moins k, i.e une partie de S de taille au moins k tq. tous ses sommets soient deux à deux non adjacents ?

On admet que 3-SAT est NP-complet.

On suppose ici, sans perte de généralité, que dans 3-SAT touts les clauses comportent exactement 3 littéraux.

Question 1 : Justifier que STABLE est dans NP.

Corrigé :

- On prend la description d'une partie de S en guise de certificat.
- On prend alors $v : (G = (S, A), k), < S' \subset S > \to$ vrai ssi $|S'| \geq k$ et les éléments de S' sont deux à deux non adjacents.
  - Vérifier que $\#S' \geq k : \mathcal{O}(|S'|)$
  - Vérifier que tous les sommets sont 2 à 2 non adjacents : $\mathcal{O}(|S'|^2)$ si on utilise une représentation en matrice d'adjacence.
- Si G admet une partie stable, alors il existe $S' \subset S$ tel que $v((G, k), < S' >) =$ vrai. S' peut être représenté par un tableau de booléens de taille $|S| = \mathcal{O}(|G|)$.
- Si G n'admet pas de partie stable de taille au moins k, alors : $\forall c \in \{0,1\}^*$, $v((G, k), c) =$ faux.

On a bien STABLE $\in$ NP.

3-SAT $\leq_p$ STABLE

Soit φ une instance de 3-SAT comportant k clauses de 3 littéraux. On construit un graphe $G_\varphi = (S, A)$ comportant exactement $3k$ sommets, un pour chaque occurence de chaque littéral dans φ. De plus, dans ce graphe G_φ, deux sommets sont adjacents si :

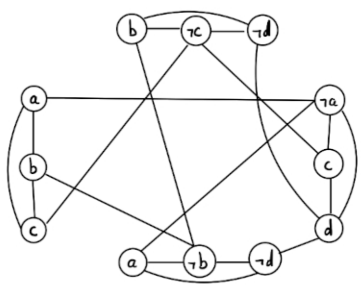
- ils correspondent à deux littéraux d'une même clause ;
- ils correspondent à un littéral et son opposé.

On considère la formule

$$\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge (b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)$$

Question 2 : Construire le graphe G_ϕ associé.

Corrigé :



Question 3 : Justifier, de manière générale, que la construction de G_φ se fait en temps polynomial.

Corrigé : On considère l'algorithme suivant, en admettant qu'on représente une formule φ de manière arborescente avec une taille $t = \mathcal{O}(|\varphi|)$

- **1er parcours de l'arbre :** on construit les triangles $\to \mathcal{O}(|\varphi|)$
- **2ème parcours de l'arbre :** on relie chaque sommet aux sommets de ses négations $\to \mathcal{O}(3k(3k-1)) = \mathcal{O}(|\varphi|^2)$

On a alors une complexité totale en $\mathcal{O}(|\varphi|^2)$, qui est bien polynomiale en $|\varphi|$.

De manière générale, le graphe G_φ est constitué de k triangles (cliques de taille 3) correspondant aux k clauses, certains somets de ces triangles étant également reliés à d'autres sommets d'autres triangles.

Question 4 : Justifier qu'un stable de cardinal maximal de G_φ contient au plus un sommet par triangle.

Corrigé : Soit S un stable de cardinal maximal de G_φ, S ne peut alors contenir strictement plus d'un sommet par triangle car sinon, par construction de G_ϕ et donc de ces triangles, au moins deux sommet de S seraient adjacents, ce qui va à l'encontre de la définition d'un stable.

Question 5 : Justifier qu'un stable de cardinal maximal est de cardinal au plus k.

Corrigé : Supposons qu'il existe un stable de cardinal strictement supérieur à k. Alors, par principe des tiroirs (il y a k triangles), on a au moins deux sommets qui se trouvent dans le même triangle, donc S n'est pas un stable d'après la question précédente, ce qui est absurde.

On veut montrer que G_φ contient un stable de cardinal exactement k ssi φ est satisfiable.

Question 6 : Supposons que φ soit satisfiable et considérons v un modèle de φ. Montrer que G_φ contient un stable S' de cardinal k.

Corrigé : Soit donc une formule φ qu'on dénote

$$\varphi = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee l_{1,3}) \wedge \ldots \wedge (l_{k,1} \vee l_{k,2} \vee l_{k,3})$$

Soit donc v un modèle de φ (qui existe car φ est supposée satisfiable).

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,k]\!], \exists x_i \in [\![1,3]\!]$ tq. $v(l_{i,x_i}) = vrai$.

Donc, ces littéraux étant dans des clauses différentes et étant tous évalués à *vrai*, **ces littéraux ne peuvent être deux à deux adjacents dans** G_φ (on ne peut pas avoir un littéral et sa négation évalués simultanément à vrai, donc les $(l_{i,x_i})_{1\leq i\leq k}$ sont deux à deux distincts, tant dans l'égalité que dans la négation).

Finalement, on obtient bien k sommets 2 à 2 non adjacents dans G_φ, i.e une clique de cardinal k.

D'où le résultat voulu.

Question 7 : Supposons que G_φ admette un stable S' de cardinal k. Montrer que φ est satisfiable.

Corrigé : En utilisant les questions 4 et 5, on sait que S' va avoir un sommet dans chacun des k triangles de G_φ. Par construction, une variable et sa négation de peuvent être dans le même stable, donc on définit une valuation v telle que pour tout sommet l de S', on met $v(l) = vrai$ (cette définition ne pose donc pas de problème car on ne tombera pas dans une situation où une variable et sa négation auraient la même valeur de vérité). On met à faux les autres variables dont on n'a pas encore défini la valeur de vérité.

Ainsi, on a bien que pour tout triangle, on a un littéral évalué à *vrai* donc pour chaque clause, on a un littéral évalué à *vrai*. On en déduit que φ est bien satisfiable.

D'où le résultat voulu.

Question 8 : Montrer que STABLE est un problème NP-complet

Corrigé :

- STABLE $\in$ NP : question 1.
- 3-SAT $\leq_p$ STABLE :
  - On considère $f : \varphi \to (G_\phi, k)$ avec $k = |\varphi|$
  - f se calcule en temps polynomial : question 3.
  - G_φ admet un stable de cardinal exactement k ssi φ est satisfiable : questions 6 & 7.
- Enfin, on a supposé que 3-SAT était NP-complet.

On a donc bien que STABLE est un problème NP-complet.

STABLE $\leq_p$ CLIQUE

CLIQUE

- **Instance :** Un graphe $G = (S, A)$ non orienté et un entier $k \in \mathbb{N}$.
- **Question :** G contient-il un sous-graphe complet d'ordre[a] au moins k ?

a. ordre d'un graphe = nombre de sommets

Question 9 : Montrer que STABLE $\leq_p$ CLIQUE et en déduire que CLIQUE est NP-complet.

Corrigé :

- STABLE $\leq_p$ CLIQUE :
  - On considère $f : (G = (S, A), k) \to (G' = (S, S^2 \setminus A), k)$.
  - f se calcule bien en temps polynomial.
  - G admet un stable de taille k ssi G' admet une clique de taille k :
    - $\Rightarrow$: Supposons que G admette un stable S' de taille k. Alors le sous graphe généré par les sommets de S' avec les arêtes de G' est bien une clique de G' d'ordre k.
    - $\Leftarrow$: Supposons que G' admette une clique de taille k, on note S' les sommets de cette clique, alors on a bien que S' est un stable de G.
- CLIQUE $\in$ NP :
  - On prend la description du sous-graphe en guise de certificat.
  - On prend alors $v : (G = (S, A), k), < \tilde{G} = (\tilde{S}, \tilde{A}) >= vrai$ ssi $\#\tilde{S} \geq k$ et que $\tilde{G}$ est complet :
    - Vérifier que $\#\tilde{S} \geq k : \mathcal{O}(|\tilde{S}|)$
    - Vérifier que tous les sommets sont bien 2 à 2 adjacents : $\mathcal{O}(|\tilde{S}|^2)$ si on utilise une représentation en matrice d'adjacence.
  - Si G admet une clique, alors il existe $\tilde{G}$ un sous-graphe de G tel que $v((G, k), < \tilde{G} >) = vrai$. $\tilde{G}$ peut être représenté de la même manière que G, i.e avec une matrice d'adjacence. D'où $|\tilde{G}| = \mathcal{O}(|G|)$
  - Si G n'en admet pas, alors on a bien que $\forall c \in \{0, 1\}^*, v((G, k), c) = faux$.
- Enfin, on a montré que STABLE était un problème NP-complet.

On a donc bien que CLIQUE est un problème NP-complet.

STABLE $\leq_p$ COUVERTURE-PAR-SOMMETS

COUVERTURE-PAR-SOMMETS

- **Instance :** un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.
- **Question :** existe-t-il une couverture des arêtes par les sommets, de taille au plus k, i.e un ensemble $S' \subseteq S$ de taille au plus k tel que toute arête $a \in A$ est incidente à au moins un sommet de S' ?

Question 10 : Montrer que STABLE $\leq_p$ COUVERTURE-PAR-SOMMETS puis en déduire que COUVERTURE-PAR-SOMMETS est NP-complet.

Corrigé :

- STABLE $\leq_p$ COUVERTURE-PAR-SOMMETS :
  - On considère $f : (G, k) \to (G, n-k)$ où n est l'ordre de G
  - f se calcule bien en temps polynomial (il suffit juste de calculer l'ordre de G).
  - G admet un stable de taille k ssi G admet une couverture par sommets de taille $n-k$:
    - $\Rightarrow$: Supposons que G admette un stable S' de taille k. Alors, pour tout $s \in S$ si il existe une arête de A contenant s, elle le relie à un sommet de $S \backslash S'$ (par définition d'un stable). De plus, les arêtes n'étant pas en contact avec les sommets de S' relient bien des sommets de $S \backslash S'$, on a donc bien prouvé que $S \backslash S'$ était une couverture par sommets de G, et cet ensemble est bien de taille $n-k$.
    - $\Leftarrow$: Supposons que G admette une couverture par sommet $\tilde{S}$ de taille $n-k$. Ainsi, pour tout $a \in A$, a contient un élément de $\tilde{S}$. Ainsi, si on prend $S' = S \backslash \tilde{S}$, on sait qu'une arête reliant deux sommets de S' ne peut exister car doit au moins contenir (par définition d'une couverture par sommets) un sommet de $\tilde{S}$. Donc les sommets de S' ne peuvent être 2 à 2 adjacents, i.e S' forme un stable de G. Enfin, $\#S' = n - (n-k) = k$. On a donc bien un stable de taille k.
- COUVERTURE-PAR-SOMMETS $\in$ NP :
  - On prend la liste des sommets en guise de certificat.
  - On prend alors $v = (G, k), < S' > \mapsto$ vrai ssi $|S'| \leq k$ et $\forall a \in A, a$ est incidente à un sommet de S' :
    - Vérifier que $|S'| \geq k : \mathcal{O}(|S|) = \mathcal{O}(|G|)$
    - Vérifier que chaque arête est bien incidente : si on prend un tableau de booléens qui dit si oui ou non $s \in S'$, on a une complexité en $\mathcal{O}(|A|) = \mathcal{O}(|G|)$
  - Si G admet une couverture par sommets S' de taille au plus k. Alors par construction de v, on aura bien $v((G,k), < S' >) =$ vrai et comme précisé ci-dessus, on représente S' par un tableau de booléens, on aura donc bien une taille linéaire en la taille de l'entrée G.
  - Si G n'en admet pas, alors on a bien que $\forall c \in \{0,1\}^*, v((G,k), c) =$ faux.
- Enfin, on a montré que STABLE était un problème NP-complet.

On a donc bien montré que COUVERTURE-PAR-SOMMETS est un problème NP-complet.

3-SAT $\leq_p$ Circuit-Hamiltonien

Circuit-Hamiltonien

- **Instance :** Un graphe orienté $G = (S, A)$
- **Question :** G contient-il un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un circuit passant une et une seule fois par chaque sommet ?

Question 11 : Adapter la preuve faite en classe.

Corrigé : "Faut se convaincre" + Cahier de Prépa

Circuit-Hamiltonien $\leq_p$ Cycle-Hamiltonien

Cycle-Hamiltonien

- ➢ **Instance :** Un graphe **non** orienté $G = (S, A)$
- ➢ **Question :** G contient-il un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet?

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On construit le graphe non orienté $G' = (S', A')$ de la manière suivante :

- $S' = \bigcup_{s \in S} \{s_1, s_2, s_3\}$
- $A' = \bigcup_{s \in S} \{\{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}\} \cup \{\{s_3, t_1\} \mid (s, t) \in A\}$

Question 12 : Montrer que Circuit-Hamiltonien $\leq_p$ Cycle-Hamiltonien et en déduire que Cycle-Hamiltonien est également NP-complet.

Corrigé :

- Circuit-Hamiltonien $\leq_p$ Cycle-Hamiltonien :
  - On considère $f : G \to G'$ avec G' défini comme ci-dessus.
  - f se calcule bien en temps polynomial : on détriple juste le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.
  - G admet un circuit hamiltonien ssi G' admet un cycle hamiltonien :
    - $\Rightarrow$: Supposons que G admette un circuit hamiltonien, qu'on notera $c = (x_0, \ldots, x_n)$ tels que $x_0 = x_n$ et pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_i = (x_i, x_{i+1}) \in A$.
      On a alors un chemin de cette forme :
      $$x_0 \xrightarrow{s_0} x_1 \xrightarrow{s_1} \cdots \xrightarrow{s_{n-2}} x_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} x_n = x_0$$
      et donc, par construction de G' (i.e ces arêtes existent bien et on couvre bien tous les sommets), le cycle c' suivant est bien un cycle hamiltonien dans G' :
      $$x_{0_1} \to x_{0_2} \to x_{0_3} \to x_{1_1} \to \cdots \to x_{(n-1)_2} \to x_{0_1}$$
    - $\Leftarrow$: Réciproquement, si G' admet un chemin hamiltonien qu'on notera c', qui est sous la forme
      $$x_{0_1} \to \alpha \to \cdots \to x_{0_1}$$
      avec $\alpha = x_{0_2}$ ou un t_2 tq. $(t, x_0) \in A$.
      En fait, si on ne commence pas par passer par x_{0_2}, alors le cycle devra y passer plus tard en passant par x_{0_3} et on se retrouverait bloqué car il s'agit bien là d'un cycle hamiltonien!
      On en déduit donc, de proche en proche, que le cycle est de la forme
      $$x_{0_1} \to x_{0_2} \to x_{0_3} \to x_{1_1} \to \cdots \to x_{(n-1)_2} \to x_{0_1}$$
      et que donc, par construction, on obtient bien un circuit hamiltonien :
      $$x_0 \xrightarrow{s_0} x_1 \xrightarrow{s_1} \cdots \xrightarrow{s_{n-2}} x_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} x_n = x_0$$
- Cycle-Hamiltonien $\in$ NP : ... (exo)
- Enfin, on a vu que Circuit-Hamiltonien était un problème NP-complet.

On a donc bien montré que Cycle-Hamiltonien est un problème NP-complet.

Cycle-Hamiltonien $\leq_p$ Voyageur-de-commerce

Voyageur-de-commerce

- ➢ **Instance :** Un graphe pondéré non orienté $G = (S, A, \omega)$ à poids entiers et $k \in \mathbb{N}$
- ➢ **Question :** G contient-il un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à k ?

Question 13 : Montrer que Cycle-Hamiltonien $\leq_p$ Voyageur-de-commerce et en déduire (vous connaissez la suite...)

Corrigé :

- Cycle-Hamiltonien $\leq_p$ Voyageur-de-commerce :
  - On considère $f : G = (S, A) \to G' = (S, A', \omega), 0$

    avec G' complet sur S, tq pour tout $(x, y) \in S^2, \omega(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in A \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Le calcul de f se fait bien en temps polynomial (compléter un graphe et définir des poids)
  - G admet un cycle hamiltonien ssi G' admet un cycle hamiltonien de poids ≤ 0 :
    - $\Rightarrow$: Si G admet un cycle hamiltonien, alors ces arêtes seront bien présentes dans G' et seront de poids 0 ; donc on aura bien un cycle hamiltonien de poids nul !
    - $\Leftarrow$: Réciproquement, supposons que G admette un cycle hamiltonien de poids ≤ 0. Les poids étant postifs, on peut donc dire que toutes les arêtes de ce cycle sont de poids nul. On a donc, par construction de G', trouvé un cycle hamiltonien pour G.
- Voyageur-de-commerce $\in$ NP : ... (exo)
- Enfin, on a vu que Cycle-Hamiltonien était NP-complet.

On a donc bien montré que Voyageur-de-commerce était un problème NP-complet.

Bientôt Décembre !