Colles MPi* Semaine n°21 du 19/02/2024 au 23/02/2024 (Programme n°15)

Vallaeys Pascal

4 février 2024

Thème : Intégrales à paramètre.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Citer le théorème de continuité des intégrales à paramètre et l'appliquer sur Γ.

- Citer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre et l'appliquer sur Γ.
- Citer la version continue du théorème de convergence dominée.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Théorème de continuité des intégrales à paramètre. (démo)
- Théorème de dérivation des intégrales à paramètre. (démo)
- Version continue du théorème de convergence dominée. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

-

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan u| \leqslant |u|$.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
a) Domaine de définition de F ?
b) Domaine de continuité de F ?
c) Domaine de dérivabilité de F ?
d) Déterminer F'.
e) En déduire F.

Exercice 2 :
Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Donner pour tout $k \in \mathbb{N}, F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.

Exercice 3 :
On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Calculer F' sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Calculer F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 :
$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \end{array} \quad \text{et} \quad G: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$
1) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Exprimer $G'(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F'(x)$.
3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 5 :
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
1. a) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. a) Montrer que f est solution de $(E) : y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
b) Déterminer la fonction f.
On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6 :
a) Montrer que $f\left(x\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{Arc\tan(tx)}{t(1+t^2)}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et exprimer f'.
c) Exprimer f' sans signe $\int$.
d) Calculer alors $f(x)$ pour tout réel x.
e) En déduire la valeur de $\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{Arc\tan(t)}{t}\right)^2dt$.

Exercice 7 :
On pose $f:x\to\int\limits_{0}^{1}\frac{t-1}{\ln(t)}t^x dt$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
c) En déduire que $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.
d) En déduire $\int\limits_{0}^{1}\frac{t-1}{\ln(t)}dt$, après avoir justifier la convergence.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 8 :
Soit $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner Γ'.
3. Montrer que : $\forall x>1$, $\forall\lambda\in\,]-1,1[$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n\Gamma(x)}{(n+1)^x}$$

.

Exercice 9 :
(avec préparation)
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 10 :
Soit $f:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$.
1) Déterminer D, domaine de définition de f.
2) Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3) Montrer que f satisfait une équation différentielle que l'on résoudra.

Exercice 11 :
On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ et $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(1+\mathrm{e}^{-t})}\,\mathrm{d}t$.
1) Déterminer les ensembles de définition de f et F.
2) Montrer que f et F sont continues sur leurs ensembles de définition.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Donner un équivalent de f en 0.
4) Comparer f et F. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12 :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telle que $f(0)=0$.
1. Montrer que $\forall x\neq 0$, $\displaystyle\frac{f(x)}{x}=\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{(k)} = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$.

Exercice 13 :
On considère l'application $F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(xt)}{1+x^2}dx$. On cherche à montrer que $F(t)=\pi\exp(-|t|)$.
1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F coïncide bien avec la fonction voulue en 0.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(u)(u^2-t^2)}{(u^2+t^2)^2}du$.
3) Montrer que $F''=F$ puis en déduire F.

Exercice 14 :
Soit $f : x \mapsto \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\arctan(x+t)}{1+t^2}dt$. Calculer f.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 15 : Complément sur la fonction Γ.
a) Montrer que Γ est convexe.
b) Montrer qu'en 0^+, $\Gamma(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$.
c) Montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $]0,+\infty[$.
d) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)\,t^{x-1}.\ln(t)dt=\Gamma(x)$.
e) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t}dt=\Gamma(x)$

Exercice 16 :
a) Montrer que $f(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2dt}$ et $g(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}dt$ sont de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
b) Montrer qu'elles vérifient toutes deux l'équation différentielle $y''+y=\frac{1}{x}$.
c) Montrer que f et g sont continues en 0.
d) Montrer que $g(0)=\frac{\pi}{2}$.
e) Montrer que f=g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 17 :
a) Déterminer le domaine de définition, et calculer $f(x)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Arctan}(x.\tan(t))}{\tan(t)}dt$.
b) En déduire $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\tan(t)}dt$ et $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt$.

Exercice 18 :
Etudier $f : x \to \int\limits_x^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\cos(x)-\cos(t)}}$.

Exercice 19 :
Pour x>0, on pose $f(x)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-xt}\sin\left(\sqrt{t}\right)dt$.
a) Montrer que f est de classe C^1.
b) Donner la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
d) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 20 :
a) Déterminer I l'ensemble des réels t tels que $x\to e^{-xt}\frac{\sin x}{x}$ est intégrable.
b) Pour $t\in I$, calculer $\int\limits_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx$.
c) En déduire $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 29,30,50.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : intégrales à paramètre. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°15
- Groupe 2 : Programme n°15
- Groupe 3 : Programme n°15
- Groupe 4 : Programme n°15
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 9 : Programme n°14
- Groupe 10 :Programme n°14
- Groupe 11 : Programme n°14
- Groupe 12 : Programme n°14
- Groupe 13 : Programme n°14
- Groupe 14 : Programme n°14
- Groupe 15 : Programme n°14
- Groupe 16 : Programme n°14