MPI* Physique

TD Électromagnétisme

Dipôle électrostatique

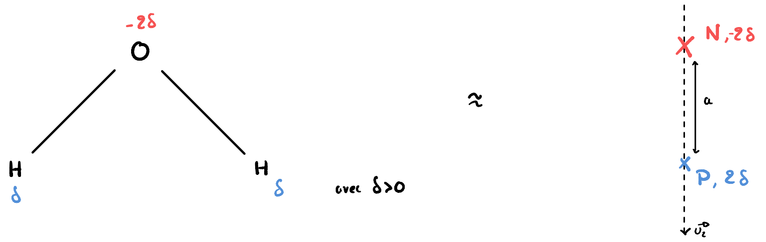
Olivier Caffier

1 Moment dipolaire de l'eau

Le moment dipolaire de la molécule d'eau vaut $1,86\text{D}$. Calculez la charge -2δ portée par l'oxygène, sachant que l'angle $\widehat{HOH}$ est de $104,5°$ et la longueur de la liaison $H-O$ est de 96pm.

Corrigé :

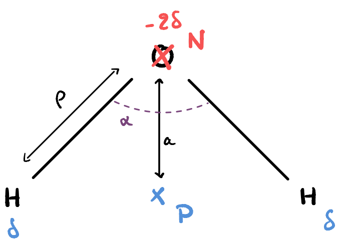
Pour rappel, la molécule d'eau peut être approximée <u>à grande distance</u> par un doublet de charges opposées (N, P)



et donc $\vec{p} = 2\delta\,\vec{NP}$

$= 2\delta\, a\, \vec{u_z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{2\delta = \dfrac{\|\vec{p}\|}{a}}$

Or, en reproduisant les barycentres sur la figure, ($\alpha = 104.5°$),



on trouve $a = \ell \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\boxed{\text{D'où} \quad 2\delta = \frac{\|\vec{p}\|}{\ell\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

et d'après l'énoncé, $\|\vec{p}\| = 1.86\ \text{D}$

$\approx \dfrac{1,86}{3} \cdot 10^{-29}\ \text{C.m}$

$a = 96\ \text{pm}$

$= 96 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$

$\alpha = 104.5°$

$\boxed{\underline{\text{A.N}}: \quad -2\delta \approx -1,055 \times 10^{-19}\ \text{C}}$

2 Dipôle dans le champ d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plans uniformément chargés, l'un de charge surfacique $-\sigma < 0$ et d'abscisse $x = -a < 0$, l'autre de charge σ et d'abscisse $x = a$ sur un axe Ox perpendiculaire aux plans.

Rappelons que le champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan est uniforme et donné par :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

Un dipôle électrostatique $\vec{p}$ est placé sur l'axe Ox en $x = 0$. L'angle qu'il fait avec $\vec{e}_x$ est noté α (voir figure 1).

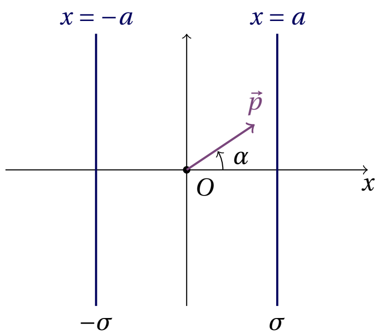


FIGURE 1 – Dipôle dans le champ d'un condensateur plan.

1. Déterminez son énergie potentielle E_p, pour α quelconque, en fonction de $p = \|\vec{p}\|, \sigma, \alpha$ et ε_0.
2. Discutez les positions d'équilibre de ce dipôle.
3. Modélisons ce dipôle comme constitué de deux charges ponctuelles, N de charges $-q < 0$ placées en $x = -b$ et P de charge $q > 0$ en $x = b$. Elles sont de même masse m.
   (a) Pourquoi le dipôle ne quitte-t-il pas sa position ?
   (b) Étudiez les petites oscillations du dipôle autour de sa position d'équilibre stable. Vous poserez $\beta = \alpha - \alpha_{\text{éq}}$, où $\alpha_{\text{éq}}$ est la valeur de α à l'équilibre stable. Donnez la période de ses oscillations.
4. Le dipôle est maintenant supposé au repos sur sa position d'équilibre stable. Rappelons que le potentiel rayonné en un point M par un dipôle $\vec{p}$ placé en O est :

$$V_d(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $r = \|\vec{r}\|$

   (a) Déterminez le potentiel $V_c(M)$ rayonné par les armatures en un point M d'abscisse $x \in]-a, a[$. Le potentiel de l'armature positive sera noté U et celui de l'armature négative choisi nul.
   (b) Déduisez-en le potentiel total $V(M)$ en fonction de θ, angle repérant M défini précédemment.
   (c) Après avoir factorisé la partie angulaire dans le potentiel, montrez qu'il existe deux équipotentielles particulières $V = U/2$ que vous caractériserez.
   (d) Tracez l'allure de quelques lignes de champ.

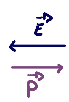
Corrigé :

1 D'après le cours, $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$

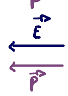
$= -p\,E\cos(\alpha)$

D'où $E_p = \frac{p\sigma}{\varepsilon_0}\cos(\alpha)$

2 Position stable $\Rightarrow$ E_p min. $\Rightarrow$ $\alpha = 0$:



Position instable $\Rightarrow$ E_p max. $\Rightarrow$ $\alpha = \pi$:

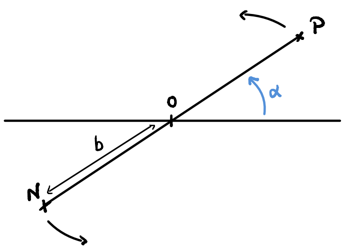


③

3.a $\vec{E}$ uniforme $\Rightarrow$ la force électrostatique est un couple (sa résultante est, en effet, nulle)

$\Rightarrow$ le dipôle ne peut que tourner sur lui-même

3.b



$\Rightarrow$ P et N possèdent un mouvement circulaire de centre O, de rayon b, de vitesse angulaire $\dot{\alpha}$

$\Rightarrow \vec{v}(P) = b\dot{\alpha}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{v}(N) = b\dot{\alpha}\,\vec{u_\theta}$

et $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}(P)^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}(N)^2$ d'où $\boxed{E_c = m(b\dot{\alpha})^2}$

et $E_m = E_c + E_p$

$\Rightarrow \boxed{E_m = m(b\dot{\alpha})^2 + \frac{p\sigma}{\varepsilon_0}\cos\alpha}$

Or, d'après le théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow 2mb^2\cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} - \frac{p\sigma}{\varepsilon_0}\cancel{\dot{\alpha}}\sin(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} - \frac{p\sigma}{2mb^2\varepsilon_0}\sin(\alpha) = 0}$ (A)

On pose alors $\beta = \alpha - \alpha_{eq}$, avec $\alpha_{eq} = 0$

Ainsi, (A) devient (en effectuant un DL1 avec $\beta \ll 0$), on obtient :

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} + \omega^2\beta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \left(\frac{p\sigma}{2mb^2\varepsilon_0}\right)^{1/2}}$$

④

4.a On a $\vec{E_c} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_c \Rightarrow -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -V_c'(x)$

$\Rightarrow V_c(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + A$

or $\begin{cases} V_c(a) = U \\ V_c(-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \wedge \frac{U}{2} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$

Finalement, pour $x \in]-a,a[$:

$$\boxed{V_c(x) = \frac{U}{2}\left(\frac{x}{a} + 1\right)}$$

4.b On a alors $V = V_c + V_D \Rightarrow V(x) = \frac{U}{2}\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ ← on va travailler dans une base polaire !

Ainsi, en polaires,
- $x = r\cos(\theta)$
- $\vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos(\pi - \theta)$
  $= -pr\cos(\theta)$

$$\boxed{\text{Finalement,} \quad V(M) = \frac{U}{2}\left(\frac{r\cos(\theta)}{a} + 1\right) - \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

4.c On cherche donc les couples (r,θ) tq. $V(r,\theta) = \frac{U}{2}$

$$\text{i.e} \quad \cancel{\frac{U}{2}} + \cos(\theta)\left(\frac{r}{2a} - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \cancel{\frac{U}{2}}$$

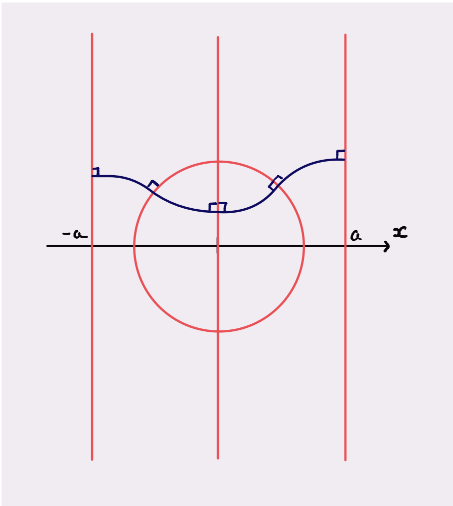
$$\text{i.e} \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{r^3}{2a} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\text{i.e} \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ r = \text{cte} \end{cases}$$

droite $(x = 0)$ = plan médiateur des 2 armatures

→ sphère de centre

4.d ⚠ Rappel : Les lignes de champs doivent être ⊥ aux équipotentielles.



3 Champ inconnu

Un champ électrostatique $\vec{E}$ est invariant par rotation autour d'un axe Oz. Sa divergence est nulle, sauf au voisinage de O où elle peut tendre vers l'infini.

1. Écrivez l'équation différentielle gouvernant le potentiel scalaire V.
2. Résolution de l'équation. Le laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

La résolution va être faite *par séparation*, en cherchant une solution de la forme $V(r,\theta) = f(r)g(\theta)$.

(a) Déterminez les équations différentielles vérifiées par f et g.

(b) Vérifiez que $g(\theta) = \cos(\theta)$ est solution et cherchez f sous la forme $f(r) = Ar^\alpha$

(c) Déduisez-en le champ électrostatique associé. Que remarquez-vous ?

Corrigé :

1 On a, en dehors du voisinage de O : $\operatorname{div}\vec{E} = 0 \overset{M.G}{\Rightarrow} \rho = 0$ en dehors de ce voisinage.

Ainsi, en dehors du voisinage de O, d'après l'équation de Poisson : $\boxed{\Delta V = 0}$

2

2.a V hérite des mêmes invariances que $\vec{E}$ (car $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$) donc V invariant par rotation autour de Oz

$\Rightarrow V(r,\theta,\cancel{\varphi}) = V(r,\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0$

Ainsi, $\Delta V = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{1}{r}}\dfrac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^{\cancel{2}}\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0} \quad (A)$$

Considérons f et g deux fcts (resp. de r et θ) tq $V(r,\theta) = f(r)g(\theta)$

Et donc (A) devient :

$$g(\theta)\frac{d^2}{dr^2}\left(rf(r)\right) + \frac{f(r)}{r\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{dg}{d\theta}(\theta)\right) = 0$$

et dans les mesures où ces fonctions ne s'annulent pas :

$$\frac{r}{f(r)}\frac{d^2}{dr^2}(rf(r)) + \frac{1}{g(\theta)\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{dg}{d\theta}(\theta)\right) = 0$$

et ceci étant vérifié pour tout r et θ, on peut dire (les 2 membres sont indep. l'un de l'autre) que $\exists\beta\in\mathbb{R}$ tq :

$$\boxed{\frac{r}{f(r)}\frac{d^2}{dr^2}(rf(r)) = \beta} \ (A) \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{g(\theta)\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{dg}{d\theta}(\theta)\right) = -\beta} \ (B)$$

2.b Si $g = \Theta \mapsto \cos(\Theta)$, montrons que cette fonction est sol. de (B) : $\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta \frac{dg}{d\Theta}(\Theta)\right) = \frac{d}{d\Theta}\left(-\sin^2(\Theta)\right)$

$$= -2\sin\Theta\cos\Theta$$
$$= -2\sin\Theta\, g(\Theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\Theta\, g(\Theta)} \frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta \frac{dg}{d\Theta}(\Theta)\right) = -2$$

$\boxed{\beta = 2}$

$\longrightarrow$ OK

Ainsi, si on prend $f : r \longmapsto Ar^{\alpha}$, on veut que f respecte (A), i.e

$$\frac{r}{Ar^{\alpha}} \frac{d^2}{dr^2}\left(rAr^{\alpha}\right) = 2 \iff \frac{1}{\cancel{A}r^{\alpha-1}} \frac{d^2}{dr^2}\left(\cancel{A}r^{\alpha+1}\right) = 2$$

$$\iff \frac{1}{\cancel{r^{\alpha-1}}} \alpha(\alpha-1)\cancel{r^{\alpha-1}} = 2$$

$$\iff \alpha(\alpha-1) = 2$$

...

$$\iff \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

on veut $\alpha < 0$ sinon à l'∞ c'est mauvais plan !

$$\iff \alpha = -1 \ ?$$

4 Modèle de solvation d'un ion

On peut modéliser la molécule d'eau comme un dipôle électrostatique de moment $p = 6,2.10^{-30}$C.m.

Soit quatre molécules d'eau situées aux sommets G_1 et G_4 d'un tétraèdre régulier (voir figure 2). La distance séparant le centre du tétraèdre d'un sommet est $d = CG_i = 0,3$nm. On impose que l'axe des dipôles est colinéaire à $\overrightarrow{CG_i}$ mais pas forcément de même sens. Pour un couple quelconque de points, $\widehat{G_i C G_k} = \beta = 109°28'$.

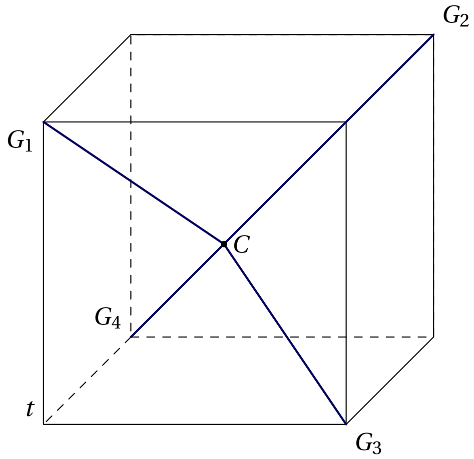
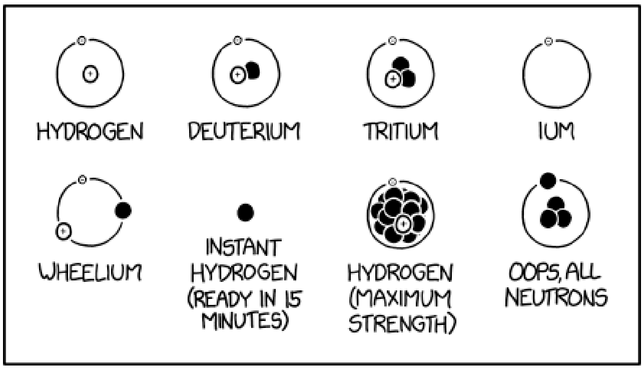


FIGURE 2 – Modèle de solvatation d'un ion

1. Établissez l'expression de l'énergie d'interaction de deux dipôles en fonction de p, d et β. Mettez en évidence trois cas possibles.
2. Déduisez-en l'énergie potentielle d'interaction de ces quatres molécules d'eau en fonction de d, p et β pour les cinq arrangement des quatres dipôles respectant les conditions imposées.
   Indication : l'énergie potentielle étant associée à une interaction, il faut faire attention à ne pas compter plusieurs fois la même interaction ! Ainsi les forces $\vec{F}_{i\to k}$ et $\vec{F}_{k\to i}$ correspondent à une seule et même interaction (voir principe des actions réciproques).
3. Un cation de charge $e = 1,6.10^{-19}$C est placé en C, ce qui modélise sa solvatation. Exprimez de nouveau les énergies potentielles d'interaction correspondant aux cinq arrangements précédents. Applications numériques en eV.
4. Quel est l'arrangement le plus stable des quatre molécules autour de l'ion ?
5. Que pensez-vous de ce modèle, sachant que l'énergie de solvatation d'un ion de cette taille est d'environ -240 kJ.mol^{-1} ?

Corrigé :


HYDROGEN
DEUTERIUM
TRITIUM
IUM
WHEELIUM
INSTANT HYDROGEN (READY IN 15 MINUTES)
HYDROGEN (MAXIMUM STRENGTH)
OOPS, ALL NEUTRONS