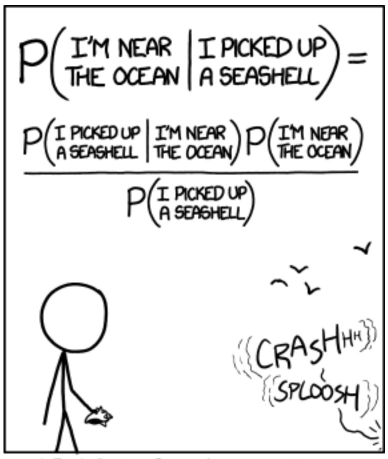
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 9



STATISTICALLY SPEAKING, IF YOU PICK UP A SEASHELL AND *DON'T* HOLD IT TO YOUR EAR, YOU CAN PROBABLY HEAR THE OCEAN.

Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition d'un ensemble dénombrable

Définition - Ensemble dénombrable

On dit d'un ensemble qu'il est *dénombrable* si il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

A.2 Définition d'une tribu

Définition - Tribu

Soit Ω un ensemble.
On appelle *tribu* sur Ω un ensemble $T \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

- $\emptyset \in T$
- $\forall A \in T, \overline{A} \in T$ (stable par complémentaire)
- $\forall (A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$, on a $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in T$ (stable par union dénombrable)

Les éléments de T sont appelés des *évènements*.

A.3 Compatibilité d'une tribu avec l'intersection finie ou dénombrable

Proposition

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'évènements.
Alors :

$$\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \in T$$

i.e T est stable par intersection dénombrable.

DÉMONSTRATION.

A.4 Définition d'une mesure de probabilité

Définition - Mesure de probabilité

Soit (Ω, T) un espace probabilisable.
On appelle *mesure de probabilité* sur (Ω, T) une application $p : T \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall A \in T, p(A) \in [0;1]$
- $p(\Omega) = 1$
- $\forall I$ ensemble dénombrable, $\forall (A_i)_{i\in I} \in T^I$ 2 à 2 disjoints, on a

$$p\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} p(A_i)$$

(σ-additivité)

A.5 La probabilité d'une union est inférieure à la somme des probabilités

Proposition

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé et soient $A, B \in T$.
Alors,

$$p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$$

DÉMONSTRATION.

A.6 Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable, idem pour "presque sûr"

Définition - Évènements négligeables et presque sûrs

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A \in T$. Alors :

- A est dit *négligeable* si $p(A) = 0$.
- A est dit *presque sûr* si $p(A) = 1$.

Proposition

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Alors :

1. Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.
2. Une intersection dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûre.

DÉMONSTRATION.

A.7 Formule des probabilités totales

Définition - Système quasi-complet d'évènements

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soient I un ensemble dénombrable et $(A_i)_{i\in I} \in T^I$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *système quasi-complet d'évènements* si :

1. Les (A_i) sont 2 à 2 disjoints : $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est presque sûre : $p\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = 1$.

Proposition - Formule des probabilités totales

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I} \in T^I$ un système quasi-complet d'évènements avec I dénombrable.
Soit $B \in T$.
Alors,

$$\boxed{p(B) = \sum_{i\in I} p(B \cap A_i)}$$

et si pour tout $i \in I, p(A_i) > 0$:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i\in I} p(A_i) \times p_{A_i}(B)}$$

DÉMONSTRATION.

A.8 Formule de Bayes

Définition - Probabilité conditionnelle

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors, on définit la probabilité conditionnelle $p_B(A)$, i.e la probabilité que l'évènement A soit réalisé sachant que B l'est, par :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$$

Proposition - Formule de Bayes

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors, si $p(B) \neq 0$, on a

$$\boxed{p_B(A) = p_A(B) \times \frac{p(A)}{p(B)}}$$

DÉMONSTRATION.

A.9 Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont également

Définition - Évènements indépendants

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
On dit que A et B sont *indépendants* si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Définition - Famille d'évènements mutuellement indépendants et 2 à 2 indépendants

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I} \in T^I$ avec I dénombrable.

- On dit que les $(A_i)_{i \in I}$ sont *mutuellement indépendants* si :

$$\forall J \subset I \text{ } \underline{\text{fini}}, \text{ on a } p\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

- On dit que les $(A_i)_{i \in I}$ sont 2 à 2 indépendants si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j)$$

- On a bien mut. ind. $\Rightarrow$ 2 à 2 ind. mais **la réciproque est fausse!!**

Proposition

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.
Alors,

$$A, B \text{ ind. } \Rightarrow A, \overline{B} \text{ ind.}$$

DÉMONSTRATION.

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}_+$ est dénombrable

Proposition

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Proposition

$\mathbb{Q}_+$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION.

B.2 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Proposition

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION.

Montrons que $[0;1[$ n'est pas dénombrable.

Représentons chaque élément de $[0;1[$ par son écriture décimale, i.e :

$$\forall x \in [0;1[, \exists! (a_n(x))_n \in [\![0;9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x = 0, a_1(x)a_2(x)\dots$$

On remarque que, dans cette écriture, pour que deux réels diffèrent, il suffit qu'il existe une seule composante de leur écriture qui diffère, i.e :

$$\forall x, y \in [0;1[, x \neq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq. } a_n(x) \neq a_n(y)$$

Supposons alors par l'absurde que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. Alors

$$\exists (x_n) \in [0;1[^{\mathbb{N}} \text{ tq. } [0;1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Exposons alors les éléments de cette suite :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1(x_1)a_2(x_1)a_3(x_3)\dots \\
x_2 &= 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_2)\dots \\
x_3 &= 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_3)\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Construisons alors un $\tilde{x} \in [0;1[$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{x} \neq x_n$.

Posons l'écriture décimale de $\tilde{x} = 0, a_1(\tilde{x})a_2(\tilde{x})a_3(\tilde{x})$

(1) On prend $a_1(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_1(\tilde{x}) \neq a_1(x_1)$

(2) De même, on prend $a_2(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_2(\tilde{x}) \neq a_2(x_1)$

...

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on prend $a_n(\tilde{x}) \in [\![0;8]\!]$ tel que $a_n(\tilde{x}) \neq a_n(x_n)$

On se retrouve alors dans cette configuration (en bleu les composantes qui diffèrent avec l'écriture décimale de $\tilde{x}$) :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1(x_1)a_2(x_1)a_3(x_3)\dots \\
x_2 &= 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_2)\dots \\
x_3 &= 0, a_1(x_2)a_2(x_2)a_3(x_3)\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

On remarque alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{x} \neq x_n$, i.e $\tilde{x} \notin [0;1[$, ce qui est absurde.

$\mathbb{R}$ n'est donc pas dénombrable.

Remarques :

- Ce procédé se prénomme : le *procédé diagonal de Cantor*
- On prend les $a_i(\tilde{x})$ dans $[\![0;8]\!]$ pour éviter le problème d'une suite stationnaire convergeant vers 1.

B.3 Théorèmes de continuité croissante et décroissante

Théorème de continuité croissante

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ croissante par l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

DÉMONSTRATION.

Théorème de continuité décroissante

Soient (Ω, T, p) un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ décroissante par l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

DÉMONSTRATION.

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Une tribu infinie n'est pas dénombrable

Proposition

Une tribu infinie n'est pas dénombrable.

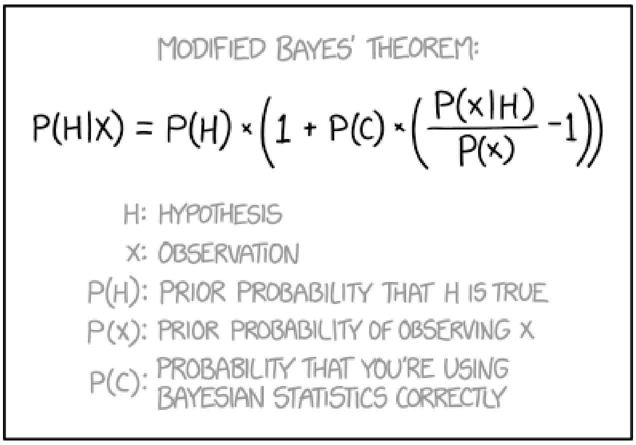
DÉMONSTRATION.

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement


MODIFIED BAYES' THEOREM:
P(H|X) = P(H) × (1 + P(C) × (P(X|H) / P(X) − 1))
H: HYPOTHESIS
X: OBSERVATION
P(H): PRIOR PROBABILITY THAT H IS TRUE
P(X): PRIOR PROBABILITY OF OBSERVING X
P(C): PROBABILITY THAT YOU'RE USING BAYESIAN STATISTICS CORRECTLY