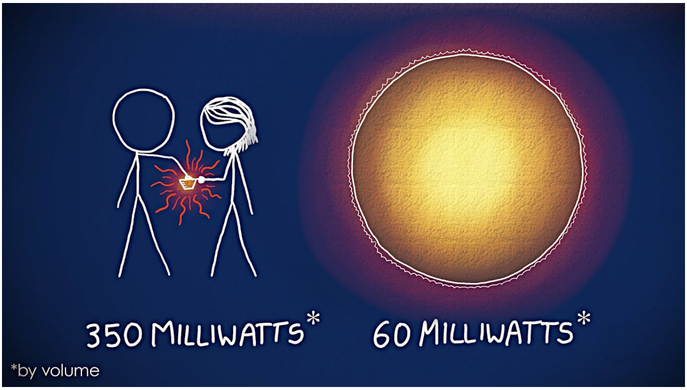
MPI* Physique

# TD Thermodynamique

Rayonnement thermique




Olivier Caffier

# Table des matières



*Ce que Faidherbe enseigne, ailleurs ne s'apprend pas.*

# 1 Échange entre deux corps noirs proches

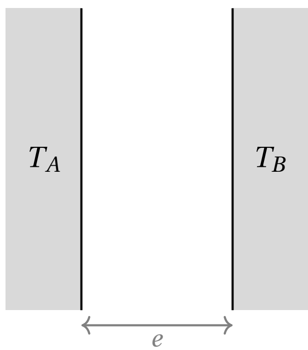
Deux solides $A$ et $B$, de températures $T_A$ et $T_B$ et qui se comportent comme des corps noirs, sont placés face-à-face. La distance mutuelle $e$ est petite devant les dimensions des deux solides, de sorte que les deux solides sont modélisables comme deux plans face-à-face.

1. Déterminez le flux $\phi$ qui transite de $A$ à $B$. Vous en donnerez une approximation linéaire dans le cas d'un faible écart de température.
2. Définissez la résistance thermique associée à ce rayonnement.
3. L'espace entre $A$ et $B$ contient de l'air de conductivité thermique $K$. Comparez les résistances thermiques de rayonnement et de conduction en notant $S_0$ la «section utile» des deux solides.

Données : $e = 5$ mm ; $T_A \simeq T_B = 300$ K ; $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W.m$^{-2}$.K$^{-4}$ ; $K = 0,03$ W.m$^{-1}$.K$^{-1}$ ; $S_0 = 5 \times 10^{-3}$ m$^2$.

**Corrigé :**

1. Suivant la modélisation de l'énoncé, on arrive à la situation suivante :




Comme les deux plans sont placés face à face dans le vide, on a affaire à du rayonnement pur (il n'y a notamment pas de conducto-convection) !

Dès lors, en notant $S_0$ la surface de l'énoncé (mentionnée en Q3.) :

$$\Phi_{A \to B} = \varphi_{A \to B} S_0$$

avec, d'après la loi de Stefan :

$$\begin{aligned} \varphi_{A \to B} &= \varphi_A - \varphi_B \\ &= \sigma T_A^4 - \sigma T_B^4 \end{aligned}$$

Or, si on maintient l'hypothèse que $T_B = T_A + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll T_A$, il vient :

$$\begin{aligned}\varphi_{A\to B} &= \sigma T_A^4 \left(1-(1+\frac{\varepsilon}{T_A})^4\right) \\ &\simeq -4\sigma\varepsilon T_A^3\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\phi \simeq 4\sigma T_A^3 \left(T_A - T_B\right) S_0}$$

2. Dans ce cas, on a :

$$\phi = \underbrace{4\sigma T_A^3 S_0}_{=1/R_r} \left(T_A - T_B\right)$$

par identification.

D'où :

$$\boxed{R_r = \frac{1}{4\sigma T_A^3 S_0}}$$

3. On a, par définition de la résistance thermique :

$$\boxed{R_{th} = \frac{e}{K S_0}}$$

Donc, en faisant leur rapport :

$$\boxed{\frac{K}{4\sigma e T_A^3} \simeq 0.98}$$

Ainsi, leur rapport étant proche de 1 : **on ne peut pas en négliger une par rapport à l'autre!**
Ça reste surprenant mais n'oublions pas que la conductivité $K$ reste très faible : la conduction est alors tellement faible qu'elle peut être comparée au rayonnement.

# 2 Dioxyde de carbone et effet de serre

L'objectif de cet exercice est de modéliser l'effet de serre et son amplification causé par l'augmentation de la quantité de $CO_2$ dans l'atmosphère.

1. **Modèle mono-couche.**

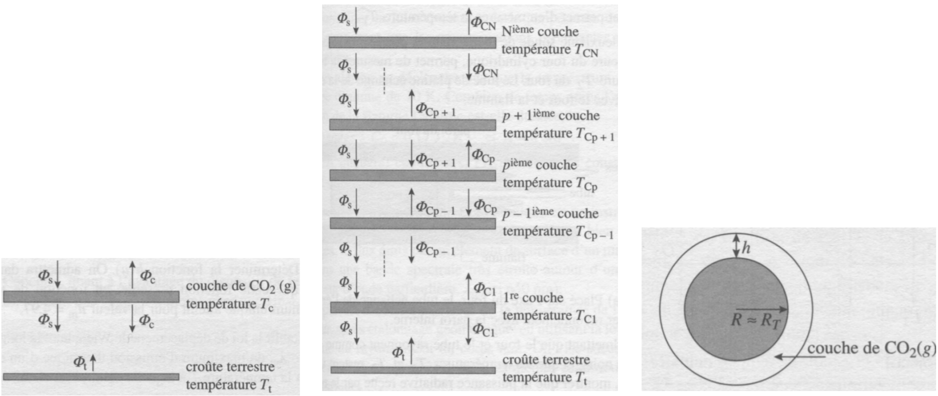
   La figure 1a montre le modèle. La croûte terrestre est assimilée à un corps noir de température $T_t$ rayonnant un flux thermique $\Phi_t$ vers l'atmosphère. La Terre est entourée d'une couche de $CO_2$ gazeux en concentration volumique $C_0$ fixée, de température $T_c$ et rayonnant un flux $\Phi_c$ vers la Terre et vers l'espace. Le flux solaire est noté $\Phi_s$ et supposé non affecté par la traversée de la couche de $CO_2$.

   (a) On rappelle que le soleil rayonne (température externe moyenne $T_s \simeq 6000K$) rayonne à peu près comme un corps noir avec un maximum dans le visible à $\lambda_m \simeq 0,5\mu m$.

   En utilisant des ordres de grandeur raisonnables pour les températures, déterminez l'ordre de grandeur de la longueur d'onde radiative maximale de la croûte terrestre et de la couche de $CO_2$.

   La couche de $CO_2$ absorbe totalement le rayonnement $\Phi_t$. Vous admettrez dans la suite qu'elle est donc assimilable à un corps noir dans la gamme spectrale du rayonnement terrestre, mais transparente pour le flux solaire.

   (b) Écrivez l'équilibre radiatif pour l'ensemble couche+croûte terrestre en supposant que les deux ont sensiblement le même rayon, puis pour la croûte seule. Déduisez-en $T_t$ en fonction de $\Phi_s$. Comparez ce résultat à celui obtenu en l'absence de couche de $CO_2$.




(a) (b) (c)

**FIGURE 1 –** Effet de serre : a) modèle mono-couche, b) modèle multi-couches, c) modèle continu.

2. **Modèle multi-couches.**

   L'augmentation de la quantité de $CO_2$ est modélisée en considérant la superposition de $N$ couches, comme indiqué 1b. Chaque couche contient la même concentration volumique $C_0$ de $CO_2$. Notons $\Phi_{cp}$ le rayonnement émis vers le haut et vers le bas par la couche $p$ de température $T_{cp}$. Le rayonnement émis par une couche est totalement absorbée par les autres.

   (a) Écrivez l'équilibre radiatif pour les systèmes suivants : ensemble couches+croûte, $p^{\text{eme}}$ couche, première couche, croûte.

   (b) Déduisez-en $\Phi_{cp}$ et $\Phi_t$ en fonction de $\Phi_s$, $N$ et $p$.

   (c) Calculez $T_t$ en fonction de $\Phi_s$, $N$ et $\sigma$.

3. **Modèle continu.**

   Passons à la limite de couches infiniment fines, de sorte que la Terre est entourée d'une couche gazeuse sphérique de rayon proche du rayon $R_T$ de la Terre et d'épaisseur $h \ll R_T$ (figure 1c). La concentration volumique $C_0$ est toujours supposée constante, mais $h$ peut varier avec la quantité de $CO_2$.

   Initialement $h = 5km$ et $T_t = 288K$. Le flux solaire est $\Phi_s = 342W.m^{-2}$.

   (a) Soit $N_0$ le nombre total de molécules de $CO_2$ dans l'atmosphère. Dans le modèle multi-couches, $N_0$ est proportionnel au nombre $N$ de couches : $N_0 = \gamma N$. Montrez alors que $N = \alpha h$ où $\alpha$ est une constante positive que vous exprimerez en fonction de $C_0$, $\gamma$ et $R_T$. Déduisez-en que :

   $$T_t = \left(\frac{\Phi_s(1+\alpha h)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

   Déduisez-en la valeur de $\alpha$.

   (b) Déterminez la variation $\Delta h$ de l'épaisseur de la couche de $CO_2$ si la quantité de $CO_2$ augmente de 10 %. Déduisez-en l'augmentation de température $T_t$.

**Corrigé :**

1. (a) On utise essentiellement la loi de Wien :

   $$\lambda_m T_S = \lambda_{\text{croûte}} T_{\text{croûte}} = \lambda_{\text{couche}} T_{\text{couche}}$$

   Soyons raisonnables et disons que :

   $$\begin{cases} T_{\text{croûte}} & = 290 \text{ K} \\ T_{\text{couche}} & = 250 \text{ K} \end{cases}$$

   Alors :

   $$\boxed{\lambda_{\text{croûte}} = \lambda_m \frac{T_S}{T_{\text{croûte}}} \simeq 10{,}34 \mu\text{m}}$$

$$\boxed{\lambda_{\text{couche}} = \lambda_m \frac{T_S}{T_{\text{couche}}} \simeq 12\mu\text{m}}$$

Ceci justifie l'hypothèse faite sur la différence entre transparence de la couche de $CO_2$ pour le rayonnement solaire et son opacité pour le rayonnement terrestre.

(b) Si on admet que les deux ont sensiblement le même rayon, les surfaces sont alors sensiblement identiques : on va donc écrire l'équilibre radiatif en termes de flux surfaciques (qui sont écrits $\Phi$ sur la figure) !

- Pour la croûte terrestre :
$$\Phi_t = \Phi_s + \Phi_c$$
- Pour l'ensemble couche-croûte terrestre :
$$\Phi_c = \Phi_s$$

On en déduit alors que
$$\Phi_t = 2\Phi_s$$

En utilisant la loi de Stefan :
$$\boxed{T_t = \left(\frac{2\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

Sans la couche de $CO_2$, on aurait :
$$\Phi_t = \Phi_s$$

et donc, en utilisant encore la loi de Stefan :
$$\boxed{T_{t,0} = \left(\frac{\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

et on arrive donc à :
$$\boxed{T_t = 2^{1/4} T_{t,0} \simeq 1,2 T_{t,0}}$$

2. (a) On a un bilan radiatif similaire à celui du premier modèle :

- Ensemble couches + croûtes :
$$\Phi_s = \Phi_{C,N} \tag{2}$$
- $p^{\text{ème}}$ couche (avec $p \in ]\!]1, N[\![$) :
$$2\Phi_{C,p} = \Phi_{C,p-1} + \Phi_{C,p+1} \tag{3}$$

- $1^{\text{ère}}$ couche :

$$\Phi_t + \Phi_{C,2} = 2\Phi_{C,1} \tag{4}$$

- Pour la croûte :

$$\Phi_{C,1} + \Phi_s = \Phi_t \tag{5}$$

— On remarque, avec ces équations, que pour $p \in ]\!]1, N[\![$ :

$$\Phi_{C,p} - \Phi_{C,p-1} = \Phi_{C,p+1} - \Phi_{C,p}$$

(b) La différence $\Phi_{C,p} - \Phi_{C,p-1}$ est donc indépendante de $p$ pour $p > 1$. Posons alors :

$$\alpha = \Phi_{C,p} - \Phi_{C,p-1}$$

Ainsi, comme il s'agit d'une suite arithmétique :

$$\Phi_{C,p} = \alpha p + \beta$$

Dès lors, pour $p = 1$ et en regardant attentivement (4) et (5) :

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta) = \Phi_t + 2\alpha + \beta \\ \alpha + \beta = \Phi_t - \Phi_s \end{cases}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{cases} \alpha = -\Phi_s \\ \beta = \Phi_t \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\Phi_{C,p} = -\Phi_s p + \Phi_t}$$

Enfin, (2) nous permet de dire :

$$N\alpha + \beta = \Phi_s$$

D'où :

$$\boxed{\Phi_t = (N+1)\Phi_s}$$

(c) La loi de Stefan nous donne directement :

$$\boxed{T_t = \left((N+1)\frac{\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4} = (N+1)^{1/4} T_{t,0}}$$

Ainsi, la température de la croûte est sensiblement proportionnelle à la racine quatrième du nombre de couches pour $N$ grand.

3. (a) Comme $h \ll R_t$, le nombre de molécules de $CO_2$ est :

$$N = 4\pi R_t^2 h C_0$$

D'où :

$$\boxed{N = \alpha h \text{ avec } \alpha = \frac{4\pi R_t^2 h C_0}{\gamma}}$$

Enfin, d'après la 2.($c$) :

$$T_t = \left(\frac{(N+1)\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4}$$

D'où :

$$\boxed{T_t = \left(\frac{(1+\alpha h)\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

Avec les valeurs données par l'énoncé, il vient [1] :

$$\boxed{\alpha = 2{,}8.10^{-5}\ \mathrm{m}^{-1}}$$

(b) En différenciant notre expression logarithmique de $T_t$, il vient :

$$\frac{dT_t}{T_t} = \frac{1}{4}\frac{\alpha dh}{1+\alpha h}$$

Dans l'hypothèse où $\alpha\Delta h$ est petit :

$$\frac{\Delta T_t}{T_t} = \frac{1}{4}\frac{\alpha \Delta h}{1+\alpha h}$$

to be continued…

1. $\alpha h$ étant sans dimension, $\alpha$ est bien l'inverse d'une longueur.

# 3 Température d'une planète

*(Mines MP 2014)* Admettons que le rayonnement thermique reçu par une planète vient essentiellement du soleil, assimilable à un corps noir sphérique de rayon $R_S$ et de température $T_S = 5800K$.

1. Estimez le flux thermique intercepté par une planète de rayon $R_P$ située à une distance $D$ du soleil.
2. Montrez que, si la planète est assimilée à un corps noir de température $T_P$ en équilibre radiatif, il est possible d'en déterminer la température.
3. Appliquez ce modèle à la Terre avec $R_P = 6400$ km ; $R_S = 7 \times 10^8$ m; $D = 1{,}5 \times 10^{11}$ m. Corrigez ensuite le résultat en tenant compte du coefficient de réflexion en énergie de la Terre, appelé albédo et valant $A_T = 35\%$. Commentez.

**Corrigé :**

1. Considérons la situation suivante :

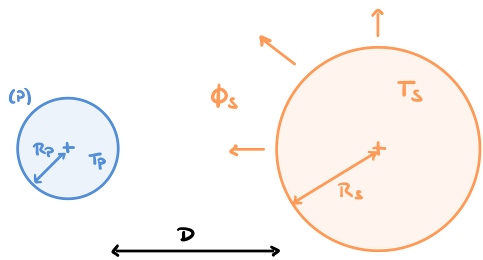



**FIGURE 2** – Rayonnement du Soleil sur une planète $(P)$

Le *flux intercepté* mentionné par l'exercice est alors un rapport entre le flux intercepté par toute la sphère de rayon $D$ et celle du disque de rayon $R_P$ (cf. figure 3).

Alors, d'après la loi de Stefan :

$$\Phi_S = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

et le rapport mentionné précédemment est donc :

$$\Phi_{S,(P)} = \Phi_S \times \frac{\pi R_P^2}{4\pi D^2}$$

Finalement,

$$\boxed{\Phi_{S,(P)} = \pi\sigma T_S^4 \left(\frac{R_S R_P}{D}\right)^2}$$

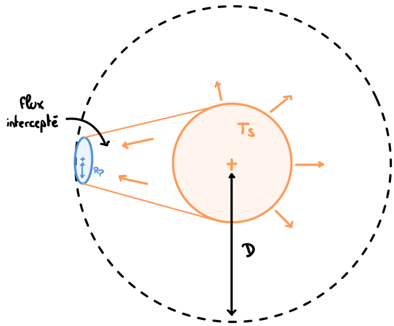



**FIGURE 3 –** Représentation du *flux intercepté* de l'énoncé

2. Si la planète est un corps noir, on peut assumer qu'il y a l'*équilibre radiatif* :

$$\Phi_{S,(P)} = \Phi_{E,(P)}$$

Or, d'après la loi de Stefan :

$$\Phi_{E,(P)} = \sigma T_P^4 4\pi R_P^2$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{T_P = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2D}}}$$

3. On a, avec les valeurs de l'énoncé :

$$\boxed{T_P \simeq 280 \text{ K}}$$

Il faut ensuite reprendre notre calcul de $\Phi_{S,(P)}$, dans le cas où la Terre absorbe une partie de ce rayonnement, on notera alors $\tilde{\Phi}_{S,(P)}$ cette nouvelle variable :

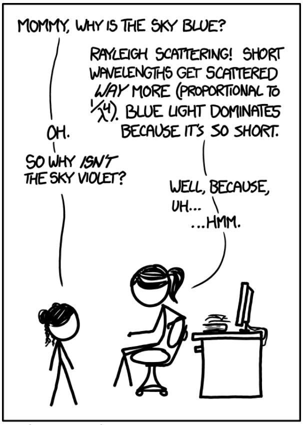
$$\tilde{\Phi}_{S,(P)} = \Phi_{S,(P)} \times (1 - A_T)$$

On revient alors à notre équilibre radiatif, et on trouve :

$$\boxed{T_P = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2D}} (1 - A_T)^{1/4} \simeq 252 \text{ K}}$$

De là, on peut tirer quelques conclusions :

- Sans tenir compte de l'albédo, la valeur de $T_P$ est proche de la température moyenne sur Terre : en fait, c'est même trop bon pour un modèle aussi simple ;
- Avec l'albédo, on obtient une valeur bien plus basse : on voit bien l'importance du rôle que joue la réflexion de l'énergie solaire ;
- Une telle différence de valeur peut s'expliquer par l'oubli du phénomène d'*effet de serre*, qui réchauffe bien la Terre et permet à $T_P$ de se rapprocher des 280 K tout en prenant en compte l'albédo.




MY HOBBY: TEACHING TRICKY QUESTIONS TO THE CHILDREN OF MY SCIENTIST FRIENDS.