Espaces euclidiens

Vallaeys Pascal

4 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 39,63,66,68,71,76,77,78,79,80,81,82,92

Méthodes de base :

- Orthonormaliser une base.
- Justifier qu'une forme est un produit scalaire.
- Déterminer le projeté d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
- Caractériser une matrice orthogonale.
- Déterminer un adjoint.
- Appliquer le théorème spectral.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (CCINP MPi 2023)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique.
1. Montrer que
$f \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$
$f \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. Soit f symétrique positive, montrer qu'il existe un endomorphisme g symétrique et positif tel que $f = g^2$. Que dire si f est défini positif ?
3. Soit f défini positif et g positif, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Exercice 2 : (CCINP MP 2023)
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes sur (a, b, c) pour que M soit dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
On donne l'identité : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ac + ab + cb)$.
2. On pose $\alpha = a + b + c$ et $\beta = ac + ab + cb$. D'après la question précédente, pour quelles valeurs de (α, β), M est-elle dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.
4. Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $a = b$ et $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : (Centrale MP 2023)
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$.
1. Établir l'égalité du parallélogramme.
2. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
(i) : $\exists c \in \mathbb{R} : \forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x), s(y) \rangle = c\langle x, y \rangle$.
(ii) : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle s(x), s(y) \rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : pour tout sous-espace V de E, $u(V^\perp) \subset u(V)^\perp$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour la dernière question, il faut bien établir une analyse-synthèse en commençant par obtenir des conditions nécessaires sur des sous-espaces simples.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2023)
Soit E un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^* \circ f$.
1. Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, f^*$.

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2023)

Considérons le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.

Exercice 6 : (CCINP MP 2022)

1) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

2) Soit p un projecteur orthogonal de rang r, montrer que $\operatorname{tr} p = r$.

3) Montrer que pour tout vecteur x, $\langle x, p(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle$.

Exercice 7 : (CCINP MP 2022)

On note $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et φ définie sur E^2 par $\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} fg$. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

1. Montrez $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrez que φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrez $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{I}$.
4. Exprimez $\hat{f}$ l'image de $f \in E$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 8 : (Mines MP 2022) (avec préparation)

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que :

$\forall (x,y) \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$

Montrer qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k.\|x\|$.

Exercice 9 : (CCINP MP 2021)

Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique (=auto-adjoint) de E.

1. Soit $\alpha = \min(\operatorname{Sp}(u))$, $\beta = \max(\operatorname{Sp}(u))$. Montrer que $\forall x \in E,\ \alpha\|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \beta\|x\|^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$,

puis que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in E\backslash\{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$.

3. On suppose que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x \in E,\ u(x) = 0 \iff \langle u(x), x\rangle = 0$.
4. Soit v un autre endomorphisme symétrique de E. On suppose $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\operatorname{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que $\operatorname{Sp}(u+v) \subset \mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

c) Montrer que $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.

Exercice 10 : (CCINP MP 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une application ϕ par :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \phi(M,N) = \operatorname{tr}(M^\top N)$$

Montrer que ϕ définit un produit scalaire.

Pour $(M,N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\phi(M,N) \leq n$.

Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\operatorname{tr}((AB)^2) \leq \operatorname{tr}(A^2B^2)$

Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\operatorname{tr}((AB+BA)^2) \leq 4\operatorname{tr}(A^2B^2)$.

Exercice 11 : (Mines PSI 2021)

On pose $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\ /\ \operatorname{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+\}$.

1. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.
2. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ S = {}^tAA$.
4. Montrer que : $\forall S, T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ S + T \in S_n^+(\mathbb{R})$.
5. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
6. Montrer que : $\forall (U,V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \chi_{UV} = \chi_{VU}$.
7. On suppose seulement $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (U_k) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $U_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} U$.

En déduire que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

Exercice 12 : (Mines télécom MP 2021)

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in\ S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 13 : (Mines-Ponts 2019)

Soit E un espace euclidien et $p \in L(E)$ une projection. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) p est un endomorphisme symétrique.
b) p est une projection orthogonale.
c) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 14 : (Mines-Ponts 2019)
Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.
Que dire de ses valeurs propres réelles ? Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à spectre imaginaire pur.

Exercice 15 : (CCINP MP 2019)
1. Soit $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer qu'en posant $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} fg$ on définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer $\inf \left\{ \int\limits_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 16 :
On travaille dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P/Q) = \int\limits_{-1}^{1} PQ$. Pour tout entier naturel n, on pose $P_n(X) = \frac{1}{2^n.n!} \cdot \frac{d^n}{dX^n}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$, avec $P_0(X) = 1$.
1) Donner les degré et coefficient dominant de P_n.
2) Quelle est la parité éventuelle du polynôme P_n ?
3) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
4) Montrer que P_n admet n racines distinctes entre -1 et 1.
5) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6) La famille $(P_n)_{n\in\aleph}$ est-elle orthogonale ?
7) Calculer $\|P_n\|$.
8) Montrer que $\frac{d}{dX}\left(\left(X^2-1\right).\frac{dP_n}{dX}(X)\right)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
9) En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle : $\left(x^2-1\right)y'' + 2x.y' - n(n+1)y = 0$

Exercice 17 :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $Ker\left(A^T.A\right) = Ker(A)$ et que $Ker\left(A.A^T\right) = Ker\left(A^T\right)$.
b) Montrer la même genre de relation pour les images.

Exercice 18 :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :
a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k.\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.
b) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2$.

Exercice 19 : Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormée d'un espace préhilbertien réel E, telle que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x/e_i)^2$. Montrer que E est un espace euclidien (Mines-Ponts PC amélioré)

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 20 : (Mines télécom MP 2023)
1. Rappeler le théorème spectral.
2. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $(A + A^T)$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 21 : (CCINP MP 2023)
Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose : $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Soit $F = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = x_n\}$.
1. Montrer que F est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de F.

3. Déterminer $F^{\perp}$.
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 22 : (Mines télécom MP 2023)
1. Définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel et formule de la distance avec le projeté orthogonal (démonstration)
Soit $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
On donne le produit scalaire dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base orthonormé de F.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $d(A, F)$.

Exercice 23 : (ENSEA ENSIIE MP 2023)
Soit E un espace euclidien de dimension $d > 0$. Soient a et b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(x) = (a|x)a + (b|x)b$ pour tout x.
1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
2. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 24 : (CCINP MP 2023)
On considère le produit scalaire suivant : $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Calculer $\langle X^p|X^q\rangle$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 25 : (CCINP MP 2022)
Soient $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Soit p la projection orthogonale sur F.
1. (a) Montrer que $F = \{x \in E \mid \|x\| = \|p(x)\|\}$.
(b) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
(c) Montrer que $\forall x, y \in E,\ < p(x), y >=< x, p(y) >$. Qu'en déduire ?
2. Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de E. On note p_F, p_G et p_H les projections orthogonales sur ces sous-espaces. On suppose que $p_F \circ p_G = p_H$.
(a) Montrer que $F \cap G = H$.
(b) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
(c) On suppose réciproquement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$. Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

Exercice 26 : (CCINP MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr(M)} = 0\}$.
a) Montrer que H est un espace vectoriel de dimension à déterminer.
b) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de J à H.

Exercice 27 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^TX = -\mathrm{I}_n$.
Montrer que X est symétrique.
Déterminer X.

Exercice 28 : (CCINP MP 2022)
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle.
Soit p un projecteur orthogonal.

1) Montrer que p est symétrique.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.

2) Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

3) Montrer que l'on a : $(\operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} q)^{\perp} = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$.

4) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Question 3 de l'exercice 2 : Rappelé car utilisé dans la première inclusion : pour p projecteur orthogonal, on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus^{\perp} \operatorname{Im} p$

Exercice 29 : (Mines télécom MP 2022)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $a \in E$ un vecteur normé.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle a, x \rangle a$, endomorphisme de E.

a) Monter que : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

b) Déterminer les α tels que f_α soit bijectif.

c) Trouver les valeurs propres de f_α.

Exercice 30 : (Mines télécom PSI 2021)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non nulle.

Montrer que $\dfrac{\operatorname{tr}(A)^2}{\operatorname{tr}(A^2)} \leqslant \operatorname{rg}(A)$.

Exercice 31 :

Soit a un réel et M=$\frac{1}{a^2+a+1} \begin{pmatrix} a & a(a+1) & a+1 \\ a+1 & a & -a(a+1) \\ a(a+1) & -a-1 & a \end{pmatrix}$.

A quelle condition sur a cette matrice appartient-elle à $O_3(\mathbb{R})$, puis $SO_3(\mathbb{R})$?

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 32 : (Navale MP 2023)

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 PQ$.

1. Montrer que l'application u définie sur E par :

$\forall P \in E,\ u(P) = \displaystyle\int_0^1 (X+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$

est un endomorphisme autoadjoint de E.

2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ formée de vecteurs propres de u. On note $\lambda_0 \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.

En déduire la valeur de $\operatorname{tr}(u)$.

Exercice 33 : (Centrale MP 2023)

Soit $\varepsilon = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A \text{ symétrique positive de trace } 1\}$

1. Rappeler la définition d'un ensemble convexe et montrer que ε est convexe.
2. Montrer que ($A \in \varepsilon$ et $rg(A) = 1$) $\Leftrightarrow$ (A est la matrice, dans une base orthonormée, d'une projection orthogonale sur u
3. Autre question non traitée

Exercice 34 : (Mines MP 2023)

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $a < b$ des réels tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \leqslant \langle X, AX \rangle \leqslant b\|X\|^2$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [a,b],\ P(x) > 0$.

Montrer que $P(A)$ est symétrique définie positive.

Commentaires divers : l'examinateur m'a demandé de redémontrer qu'une matrice est symétrique définie positive ssi ses valeurs propres sont strictement positives.

Exercice 35 : (Mines MP 2022) (donné à l'oral)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à la norme $\| \cdot \|$. On note N une norme quelconque sur E.

1. Soit $x \in E$ Après avoir justifié l'existence de ces nombres, montrer que
$\sup\limits_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle x,y \rangle}{N(y)} = \sup\limits_{y \in E,\, N(y)=1} \langle x, y \rangle \ \in \mathbb{R}_+$.
On note dorénavant cette quantité $N^*(x)$.
2. Montrer que N^* définit une norme sur E (l'examinateur m'explique qu'on l'appelle « norme duale » de N).
3. Donner N^* dans les cas où $N = \| \cdot \|$, $N = \| \cdot \|_\infty$ et $N = \| \cdot \|_1$.
On rappelle que si $\alpha > 0$ alors $\| (x_1, \ldots, x_n)^T \|_\alpha = (\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Exercice 36 : (Mines télécom MP)
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant des valeurs propres positives. Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 37 : (Centrale MP 2022)
On se place dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour $x_1, \ldots, x_d$ vecteurs de E, on pose $G(x_1, \ldots, x_d) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ la matrice de Gram associée.
1. a) Justifier que $G(x_1, \ldots, x_d)$ est diagonalisable.
b) Montrer que si $(x_1, \ldots, x_d)$ est lié, alors $G(x_1, \ldots, x_d)$ n'est pas inversible.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On fixe $(x_1, \ldots, x_d)$ une base de F. Après avoir justifier que $G(x_1, \ldots, x_d)$ est inversible, montrer que pour tout $x \in E$,
$d(x, F)^2 = \dfrac{\det(G(x, x_1, \ldots, x_d))}{\det(G(x_1, \ldots, x_d))}$
3. On se place dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ munit du produit scalaire
$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\phi_r : x \mapsto x^r$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $r_1, \ldots, r_d$ des réels distincts strictement positifs, on note $F = \mathrm{Vect}(\phi_{r_1}, \ldots, \phi_{r_d})$. Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $d(\phi_r, F)$.

Exercice 38 : (Mines télécom MP 2022)
On considère $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que S admet n valeurs propres strictement positives deux à deux distinctes. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne.
Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*, Y_k = \dfrac{S^k X}{\| S^k X \|}$.
Montrer que la suite $(Y_k)_{k \geqslant 1}$ converge vers un vecteur propre de S.

Exercice 39 : (Mines PSI 2021)
Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.

Exercice 40 : (Mines PSI 2021)
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\alpha \geqslant 0$.
1. Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique ?
2. Montrer que $I_n + \alpha A$ est inversible.
3. Montrer que $M = (I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1}$ est symétrique.

Exercice 41 :
Donner un exemple d'une matrice symétrique non diagonalisable.

Exercice 42 : (Centrale MP)
Soit n un entier naturel. On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-espace constitué des matrices symétriques. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
On pose $\varphi_A : \begin{array}{c} S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ M \to {}^tA.M.A \end{array}$.
a) Justifier rapidement le fait que $S_n(\mathbb{R})$, muni de $(A/B) = Tr\,(A.B)$ est un espace euclidien.
b) Montrer que si A est diagonale $D\acute{e}t\,(\varphi_A) = D\acute{e}t(A)^{n+1}$.
c) Montrer le même résultat si $A \in S_n(\mathbb{R})$.
d) Dans le cas général :
(i) Déterminer l'adjoint de φ_A .
(ii) Montrer que $(D\acute{e}t\,(\varphi_A))^2 = D\acute{e}t\,(\varphi_{A.{}^tA})$.
(iii) Calculer le déterminant de φ_A pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 43 : (Mines-Ponts MP)
Soit n un entier naturel.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{A(t).P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

b) Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 44 : (Mines MP 2022)
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A, dans $M_n(\mathbb{R})$, puisse s'écrire $A = S^2 + S + I_n$, avec S matrice symétrique réelle. Puis, lorsque A vérifie cette condition, condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de S.

Exercice 45 : (Mines MP 2021)
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité telles que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Montrer que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{k} a_{j,j} \leq \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j$.

Indications :

- Montrer que pour toutes bases orthonormées $(u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $(v_j)_{j\in[\![1;n]\!]}$ de $\mathbb{R}^n$, $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{n} \langle u_i, v_j\rangle^2 = 1$.

- Montrer que $\forall j \in [\![1;n]\!],\ a_{j,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{i,j}^2$ où $p_{i,j}$ est le produit scalaire entre deux vecteurs appartenant à des bases orthonormées.

Exercice 46 : (X-ENS PSI 2021)
Soit $E = \mathcal{L}^2([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ et de la norme associée.
On dit que la suite converge fortement vers f si la suite $[\|f_n - f\|)$ converge vers 0.
On dit que la suite converge faiblement vers f si $\forall \varphi \in C^1([-1,1],\mathbb{R}),\ < f_n, \varphi > \underset{n\to+\infty}{\to} < f, \varphi >$.

1. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge fortement vers f. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si (f_n) converge fortement vers f, alors (f_n) converge faiblement vers f.
3. Montrer que si (f_n) converge faiblement vers f de classe C^1 et si la suite $(\|f_n\|)$ converge vers $\|f\|$ alors (f_n) converge fortement vers f.
4. Montrer que si (φ_n) est une suite de fonctions C^1 qui converge uniformément vers φ et si (φ_n') converge aussi uniformément et si (f_n) est une suite bornée qui converge faiblement vers f, alors $< f_n, \varphi_n > \longrightarrow < f, \varphi >$.
5. On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que (f_n) converge faiblement vers la fonction nulle.

Exercice 47 : (X-ENS PSI 2021)
Soit E euclidien de dimension n.
Soit $x_1, ..., x_k \in E$ tels que $\forall i \neq j,\ < x_i, x_j > < 0$. Montrer que k ne peut pas être trop grand et trouver cette limite.

Exercice 48 : (ENS MP 2021)

$\boxed{\textbf{Question de cours}}$

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $P, Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|PBQ\| = \|B\|$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à valeurs propres positives tels que $B = PDQ$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Cas particulier : B inversible

Exercice 49 : (ENS MP 2022)
1. A une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on associe le n-uplet $(\lambda_1(M), \lambda_2(M), \dots, \lambda_n(M))$ les valeurs propres de M vérifiant
$\lambda_1(M) \geqslant \lambda_2(M) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(M)$.
Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$\forall i \leqslant j,\ \ i+j-1 \leqslant n \Rightarrow \lambda_{i+j-1}(A+B) \leqslant \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'application ψ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \psi(A) = \lambda_i(A)$
est continue.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve1 :
Affiner l'encadrement de $\frac{\langle AX|X\rangle}{||X||^2}$ en restreignant X à un certain espace.