MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 11

Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Définition - Convergence simple (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
On dit que $(f_n)_n$ *converge simplement* (CVS) vers f sur I si :

$$\forall x \in I, \lim_{n \to +\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0$$

i.e pour tout $x \in I$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Définition - Convergence uniforme (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
On dit que $(f_n)_n$ *converge uniformément* (CVU) vers f sur I si :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

A.2 La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple. Contre-exemple pour la réciproque

Proposition - CVU ⇒ CVS

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Alors,

$$(f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \implies (f_n)_n \text{ CVS vers } f \text{ sur } I$$

⚠ **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!** (Prendre $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0;1]$)

↳ CVS vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0;1]$, qui est $\mathcal{C}^{pm}$ et non $\mathcal{C}^0$

DÉMONSTRATION.

Supposons donc que $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $\quad 0 \leq \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_E \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a donc bien la convergence simple.

A.3 Théorème de continuité pour les suites de fonctions

Théorème de continuité (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H$_2$ $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C$_1$ f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in I$, mq g est $\mathcal{C}^0$ sur I.

Soit $\varepsilon > 0$,

comme $\underbrace{(f_n) \text{ CVU vers } f}_{H_2.}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$

i.e $\forall x \in I, \forall n \geq N$, $\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Choisissons donc en particulier cette fonction f_N, $\underbrace{\text{supposée continue en } a}_{H_1.}$.

$\Rightarrow \exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(a)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ainsi, pour $x \in I$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\|_E = \|f(x) - f(a) + f_N(x) - f_N(x) + f_N(a) - f_N(a)\|_E$$

$$\overset{I.T}{\leq} \underbrace{\|f(x) - f_N(x)\|_E}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_N(a) - f(a)\|_E}_{\leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_N(x) - f_N(a)\|_E}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |x-a| \leq \eta}$$

Finalement, si $|x-a| \leq \eta$: $\|f(x) - f(a)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

DONC

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_E \leq \varepsilon$

i.e f est $\mathcal{C}^0$ en a, pour tout $a \in I$.

D'où f continue sur I.

A.4 Théorème de la double limite pour les suites de fonctions

Théorème de la double limite (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Soit $a \in I$.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H$_2$ $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C$_1$ $(l_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$

C$_2$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n = l$

i.e $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

Rmq : On échange les limites !

A.5 Théorème d'intégration sur un segment des suites de fonctions

Théorème d'intégration sur un segment (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H$_2$ $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C$_1$ f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C$_2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

DÉMONSTRATION. La première conclusion provient du th. de continuité. (C$_1$ ✓)

et C$_1$ ⇒ $\int_a^b f(t)\,dt$ existe.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt \right\|_E = \left\| \int_a^b f(t) - f_n(t)\,dt \right\|_E$$
$$\leq \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_E\,dt$$
$$\leq \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} (b-a)$$

d'après (H$_2$)

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ (C$_2$ ✓)

A.6 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H$_2$ $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H$_3$ $(f_n')_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C$_1$ f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C$_2$ $f' = g$

C$_3$ $\forall [a;b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a;b]$

A.7 Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions

Définition - Convergence simple (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $\sum_n f_n$ *converge simplement* sur I (CVS) si :

$$\forall x \in I \ \underline{\text{fixé}}, \ \sum_n f_n \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ On revient aux séries numériques/vectorielles.

Définition - Convergence uniforme (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$.

Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$ et $S_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. On dit que $\sum_n f_n$ *converge uniformément* sur I (CVU) si :

$$(S_N)_N \text{ CVU vers } S \text{ sur } I.$$

et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $\|S(x) - S_N(x)\|_E = \|R_N(x)\|_E$, on a que :

$$\sum_n f_n \text{ CVU sur } I \Leftrightarrow (S_N)_N \text{ CVU vers } S \text{ sur } I$$

$$\Leftrightarrow (R_N)_N \text{ CVU vers } \tilde{0} \text{ sur } I.$$

Définition - Convergence normale

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $\sum_n f_n$ *converge normalement* sur I (CVN) si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I.
- $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge (série numérique).

A.8 Théorème de continuité pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de continuité (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H$_2$ $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C$_1$ S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

EXEMPLE. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n : x \mapsto \sum_{0 \leq k \leq n} f_n(x)$

Appliquons le th. de continuité des suites de fonctions à (S_n) :

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est $\mathcal{C}^0$ sur I : oui car C.L <u>finie</u> de fcts $\mathcal{C}^0$ sur I (H$_1$)

H$_2$ (S_n) CVU vers S sur I : oui par déf. de la supposée convergence uniforme (H$_2$)

Th. $\Rightarrow$ S est $\mathcal{C}^0$ sur I (C$_1$ ✓)

A.9 Théorème de la double limite pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

H₁ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \underset{E}{\cancel{\mathbb{R}}}$).

H₂ $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C₁ $\sum_n l_n$ converge

C₂ $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x\to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right)$

EXEMPLE. Considérons $\zeta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Alors

H₁ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ admet une limite finie en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$; $\forall n \geq 2$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ $\Big\}$ $l_1 = 1$; $\forall n \geq 2$, $l_n = 0$

H₂ $\sum_n f_n$ CVU sur $J = [2; +\infty[$: oui car CVN donc CVU

Donc, d'après le th. de la double limite, $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

$= \underline{1}$

A.10 Théorème d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème d'intégration termes à termes sur un segment (Série de fonctions)

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 S est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C_2 $\displaystyle\int_a^b S(x)dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx$

EXEMPLE. Calculons l'int. $I_{2,3} = \int_2^3 \zeta(x)\,dx$

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[2;3]$: oui

H_2 $\sum_n f_n$ CVU sur $[2;3]$: oui car CVN (cf. ci-dessus)

Donc, d'après le thm : <u>$I_{2,3}$ existe</u> et $I_{2,3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 n^{-x}dx$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 e^{-x\ln(n)}dx$

$= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{e^{-x\ln(n)}}{-\ln(n)} \right]_2^3$

$= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$

...

A.11 Théorème de « dérivation » pour les séries de fonctions et application à zêta

Théorème de « dérivation » (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

- H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.
- H_2 $\sum_n f_n$ CVS sur I.
- H_3 $\sum_n f_n'$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

- C_1 S est $\mathcal{C}^1$ sur I.
- C_2 $\forall x \in I, S'(x) = \sum_n f_n'(x)$

EXEMPLE. Soit $a>1$, considérons $I_a = [a ; +\infty[$

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I_a : ✓

H_2 $\sum_n f_n$ CVS sur I_a : oui car CVN (cf. ci-dessous)

H_3 $\sum_n f_n'$ CVU sur I_a : on a, $\forall x \in I_a$, $f_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x}$

$\Rightarrow \|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ avec $c = \frac{a+1}{2}$

↳ car $n^c \frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par c.c avec $\frac{a-1}{2} > 0$

$\overset{\text{Th. comp.}}{\Rightarrow} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ CV

$\overset{\text{Th. comp.}}{\Rightarrow} \sum_{n \geqslant 1} \|f_n'\|_\infty$ CV

$\Rightarrow \sum_{n \geqslant 1} f_n'$ CVN

$\Rightarrow \sum_{n \geqslant 1} f_n'$ CVU

Donc, d'après le thm, ζ est $\mathcal{C}^1$ sur I_a et $\forall x \in I_a$, $\zeta'(x) = \sum_{n \geqslant 1} -\frac{\ln(n)}{n^x}$

et ceci est vrai pour tout $a > 1$, donc ζ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1 ; +\infty[$
et $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\zeta'(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{-\ln(n)}{n^x}$

A.12 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment

Théorème d'approx uniforme d'une fonction continue sur un segment par fonctions en escalier

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier. "

i.e, en considérant $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists (g_n) \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_{\mathrm{esc}} \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{K}) \text{ tq. } \|f - g_{\mathrm{esc}}\|_\infty \leq \varepsilon$$

A.13 Théorème de Weierstrass

Théorème de Weierstrass

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiales. "

i.e, en considérant $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists (P_n)_n \in \tilde{\mathbb{K}}[X]^{\mathbb{N}} \text{ tq. } (P_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I.}$$

Rmq : Ceci est l'écriture séquentielle. Maintenant, on peut aussi écrire ce théorème de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), \exists P_\varepsilon \in \tilde{K}[X] \text{ tq. } \|f - P_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$$

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Théorème de « dérivation » des suites de fonctions

Théorème de « dérivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVS vers f sur I.

H_3 $(f_n')_n$ CVU vers g sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

C_2 $f' = g$

C_3 $\forall [a;b] \subset I, (f_n)_n$ CVU vers f sur $[a;b]$

DÉMONSTRATION.

$H_1 \wedge H_3 \Rightarrow g$ est $\mathcal{C}^0$ sur I (th. continuité)

Sur $[a;b] \subset I$, notons $F_n : x \longmapsto \int_a^x f_n'(t)\,dt$ et $G : x \longmapsto \int_a^x g(t)\,dt$

Ainsi, $H_3 \Rightarrow (F_n)$ CVU vers G pour tout $[a;b] \subset I$

or $\forall x \in [a;b] \subset I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = f_n(x) - f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVS}} f(x) - f(a)$

$F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G(x)$

donc, par unicité de la limite, $\forall x \in [a;b] \subset I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$

Th. fond. de l'analyse $\Rightarrow$ (car g $\mathcal{C}^0$) f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ (C_1 ✓)

et $\forall x \in [a;b]$, $f'(x) = g(x)$ $\Rightarrow$ $f' = g$ sur $[a;b] \subset I$ (C_2 ✓)

et ceci est vrai pour tout $[a;b] \subset I$ donc valable sur I tout entier.

Enfin, $(H_3) \Rightarrow (f_n)$ CVU vers $G + f(a)$ (th. de primitivation)

or on sait que pour tout $x \in [a;b]$, $G(x) = f(x) - f(a)$

$\Rightarrow (f_n)$ CVU vers f sur tout $[a;b] \subset I$ (C_3 ✓)

B.2 Théorème de « primitivation » des suites de fonctions sur un segment

Théorème de « primitivation » (Suites de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$ où $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ est un segment.
Soit $c \in [a;b]$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

H_2 $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C_1 f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

C_2 $(F_n)_n$ CVU vers F sur I.

avec $F_n : x \mapsto \int_c^x f_n(t)dt$ et $F : x \mapsto \int_c^x f(t)dt$.

DÉMONSTRATION. La première conclusion s'obtient à l'aide du thm. de cté $(C_1 \checkmark)$

$\Rightarrow \forall x \in I,\ F(x) = \int_c^x f(t)dt$ existe.

D'autre part, $\forall x \in I,\ \|F_n(x) - F(x)\|_E = \|\int_c^x f_n(t) - f(t)dt\|_E$

$$\leq \int_c^x \|f_n(t) - f(t)\|_E\, dt$$

$$\leq \int_c^x \|f_n - f\|_\infty\, dt = \|f_n - f\|_\infty (x-c)$$

$$\leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} (b-c)$$

$\Rightarrow \|F_n - F\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow (F_n)$ CVU vers F sur $[a;b]$ $(C_2 \checkmark)$

B.3 Pour une série de fonctions, CVN ⇒ CVU ⇒ CVS

Proposition - Une propriété sacrément importante

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Alors,

$$\left[\sum_n f_n \text{ CVN sur } I\right] \Longrightarrow \left[\sum_n f_n \text{ CVU sur } I\right] \Longrightarrow \left[\sum_n f_n \text{ CVS sur } I\right]$$

⚠ Réciproques Fausses !

DÉMONSTRATION. (uniquement CVN => CVU)

Supposons que $\sum_n f_n$ CVN sur I i.e $\sum_n \|f_n\|_\infty$ CV

Ainsi, soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$,
Soit $N \geq n+1$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_\infty$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty := \widetilde{R_n}$$

$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \leq \widetilde{R_n}$ avec $\widetilde{R_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sum f_n$ CVN par hyp.

DONC la fonction R_n est bornée sur I

DONC $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq \widetilde{R_n}$

i.e $\|R_n\|_\infty \leq \underset{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}{\widetilde{R_n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$

i.e (R_n) CVU vers $\tilde{0}$ sur I

i.e $\sum_n f_n$ CVU sur I

D'où l'implication recherchée

B.4 Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement

Une série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement

Prenons $I = [0;1]$, considérons $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$
Alors,

$\sum f_n$ CVU sur I mais ne CVN pas sur I.

DÉMONSTRATION.

Ici, $\sum_n f_n$ CVU sur $[0;1]$ (CCSA) ← ABSL

MAIS $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^{[0;1]} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty^{[0;1]}$ $\underline{\underline{DV}}$

DONC $\sum f_n$ CVU sur $[0;1]$

mais ne CVN pas !!

ABSL : Au Bon Soin du Lecteur

B.5 Extension $\mathcal{C}^k$ du théorème de « dérivation » et application à zêta

Théorème de « dérivation » -> extension $\mathcal{C}^k$ (Série de fonctions)

Soit $I\mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^k$ sur I.

H_2 $\forall p \in [\![0; k-1]\!] \sum_n f_n^{(p)}$ CVS sur I.

H_3 $\sum_n f_n^{(k)}$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

C_1 S est $\mathcal{C}^k$ sur I.

C_2 $\forall p \in [\![0; p]\!], \forall x \in I, S^{(p)}(x) = \sum_n f_n^{(p)}(x)$

EXEMPLE. Soit $a > 1$, considérons $I_a = [a; +\infty[$

H_1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_a : ✓ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I_a$, $f_n^{(p)} = (-1)^p \frac{\ln(n)^p}{n^x}$

H_2 $\sum f_n$ CVS sur I_a

ET

H_3 $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CVN sur I_a car $\forall n \geq 1, \forall x \in I_a$, $|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{\ln(n)^p}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ avec $c = \frac{a+1}{2} > 1$

(cf. démo A.11)

... $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CVN sur I_a

Donc, d'après le thm, ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_a pour tout $a > 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\zeta \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]1; +\infty[}$

B.6 Équivalent de zêta au voisinage de 1^+ à l'aide d'une comparaison intégrale

Proposition - Équivalent de zêta au voisinage de 1^+

On a, avec $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$,

$$\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$$

DÉMONSTRATION. On pose $D =]1;+\infty[$

Pour tout $x \in D$ fixé, on pose $f : t \longmapsto \frac{1}{t^x}$

comme $x > 1$, f est strictement décroissante

DONC, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n;n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$

croissance de l'int. $\Rightarrow$ $\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leqslant \frac{1}{n^x}$

AINSI, pour $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\forall N \geq 1, \quad \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}}$

D'où $$\frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{N^{x-1}}\right)$$

Ainsi, quand $N \to +\infty$, on a $$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

or $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty}$ et $\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$

D'où l'équivalent recherché.

B.7 Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale

Théorème de la double limite (Série de fonctions)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Notons $S : x \mapsto \sum_n f_n(x)$.

Soit $a \in \overline{I}$.

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a (qu'on note $l_n \in \cancel{\mathbb{R}}$ E).

(H2) $\sum_n f_n$ CVU (ou CVN) sur I.

ALORS

(C1) $\sum_n l_n$ converge

(C2) $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_n l_n$

i.e $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$

DÉMONSTRATION. Supposons que (H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admette une limite finie en a $:= \ell_n \in \mathbb{R}$

(H2) $\sum_n f_n$ CVN sur I

∘ C_1 : Soit $x \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\| f_n(x) \|_E \leqslant \| f_n \|_\infty$$ ← existe car $\sum_n f_n$ CVN !

or $\|.\|_E$ est $\mathcal{C}^0$ (car 1-lip.) donc, par passage à la lim :

$$\| \ell_n \|_E \leqslant \| f_n \|_\infty$$

Th. comp. $\Rightarrow$ $\sum_n \|\ell_n\|_E$ i.e $\sum_n \ell_n$ CV ABS

$\Rightarrow$ $\sum_n \ell_n$ CV CAR E est de dim. finie

(C_1 ✓)

∘ C_2 : Notons alors $L = \sum_n \ell_n \in E$

Pour $N \in \mathbb{N}$, $\| S(x) - L \|_E \leqslant \| \sum_{k=0}^{N} (f_k(x) - \ell_k) \|_E + \| \sum_{k=N+1}^{+\infty} f_k(x) - \ell_k \|_E$

or, pour tout $p \geqslant N+1$,

$$\| \sum_{k=N+1}^{p} f_k(x) - \ell_k \|_E \leqslant \sum_{k=N+1}^{p} \| f_k(x) - \ell_k \|_E$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{p} \| f_k \|_\infty + \sum_{k=N+1}^{p} \| \ell_k \|_E$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{k=N+1}^{p} \| f_k \|_\infty}_{\tilde{R}_N} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} \| \ell_k \|_E}_{\tilde{\tilde{R}}_N}$$

AINSI, pour tout $x \in I$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\| S(x) - L \|_E \leqslant \| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \ell_k \|_E + \tilde{R}_N + \tilde{\tilde{R}}_N$$

Comme $\sum_k \| f_k \|_\infty$ et $\sum_k \| \ell_k \|_E$ CV, on peut dire que $\tilde{R}_N \longrightarrow 0$, $\tilde{\tilde{R}}_N \longrightarrow 0$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \geqslant N_0$, $\| \tilde{R}_N \|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $\| \tilde{\tilde{R}}_N \|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

et donc, $\forall x \in I$,

$$\| S(x) - L \|_E \leqslant \| \sum_{k=0}^{N_0} f_k(x) - \ell_k \|_E + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_k(x) - \ell_k = 0$

(somme finie)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{N_0} f_k(x) - \ell_k = 0$$

donc, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow \| \sum_{k=0}^{N_0} f_k(x) - \ell_k \|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

donc $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow \| S(x) - L \| \leqslant \frac{\cancel{3}\varepsilon}{\cancel{3}} = \varepsilon$

Finalement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow \| S(x) - L \|_E \leqslant \varepsilon$$

i.e $\lim_{x\to a} S(x) = L$

(C_2 ✓)

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Limite de zêta en 1^+ en « epsilon »

Proposition - Limite de zêta en 1^+

$$\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$$

DÉMONSTRATION.

C.2 La fonction zêta est log-convexe

Proposition - Log-convexité de zêta

"La fonction zêta est log-convexe."

i.e

$$\log \circ \zeta \text{ est une fonction convexe.}$$

DÉMONSTRATION.

C.3 Démonstration du théorème de la double limite

Théorème de la double limite (Suite de fonctions)

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,E)$où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.
Soit $a \in I$.

H$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie en a (qu'on note $l_n \in \mathbb{R}$).

H$_2$ $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

ALORS

C$_1$ $(l_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$

C$_2$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n = l$

i.e $\lim\limits_{x \to a} \big(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\big) = \lim\limits_{n \to +\infty} \big(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\big)$

DÉMONSTRATION.

C.4 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment

Théorème d'approx uniforme d'une fonction continue sur un segment par fonctions en escalier

"Toute fonction continue **sur un segment** peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier. "

i.e, en considérant $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un segment quelconque :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_{\text{esc}} \in \text{Esc}(I, \mathbb{K}) \text{ tq. } \|f - g_{\text{esc}}\|_\infty \leq \varepsilon$$

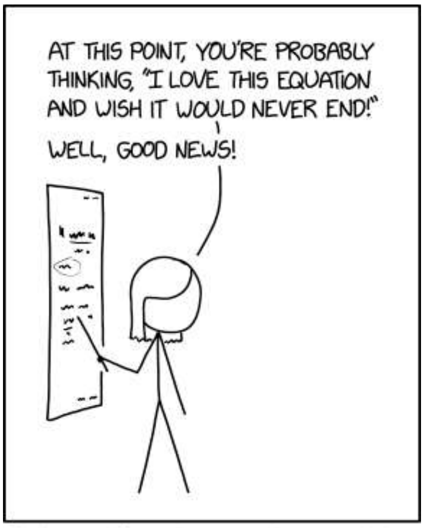
DÉMONSTRATION.

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.