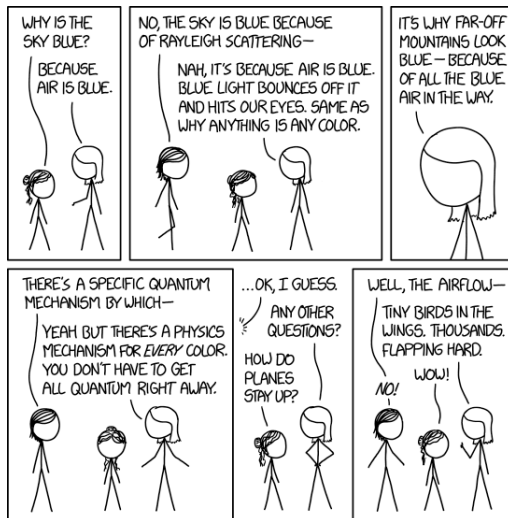


# MPI\* Physique

## TD Ondes Électromagnétiques

Rayonnement dipolaire

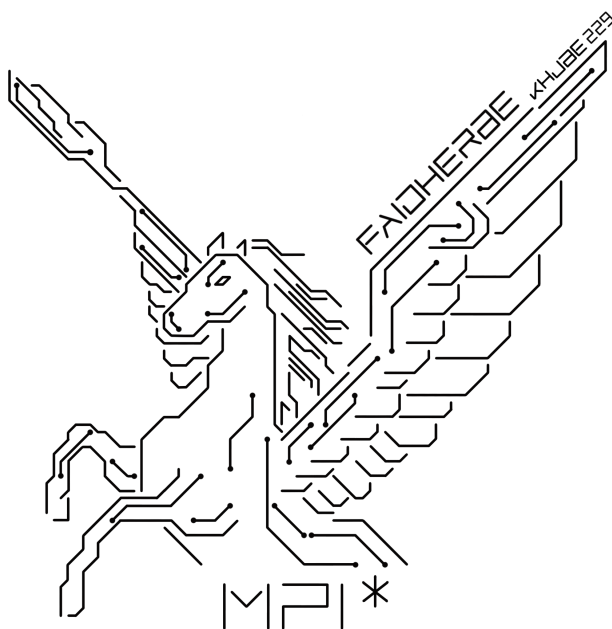


Olivier Caffier



# Table des matières

1	Directivité du rayonnement d'une antenne	3
2	Électron élastiquement lié dans un champ magnétique	5
3	Guidage d'un bateau	8



*Ce que Faidherbe enseigne, ailleurs ne s'apprend pas.*

# 1 Directivité du rayonnement d'une antenne

Une antenne courte, assimilée à un dipôle oscillant, rayonne dans l'espace vide une onde électromagnétique dans le cadre de l'approximation de la zone de rayonnement. On rappelle qu'en coordonnées sphériques le champ électrique correspondant est de la forme :

$$\vec{E} = \frac{A}{r} \sin(\theta) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta \quad (1)$$

le dipôle étant orienté suivant l'axe  $Oz$ ,  $A$  une constante et  $k = \omega/c$ . On souhaite étudier la directivité de cette antenne.

1. Déterminez le champ magnétique associé dans la zone de rayonnement.
2. Quelles sont les directions  $(\theta, \varphi)$  dans lesquelles le vecteur de Poynting  $\langle \vec{R} \rangle$  est de norme maximale  $R_M(r)$ ? Quelle signification donner à cette propriété?
3. On veut tracer un diagramme de rayonnement, c'est-à-dire une surface définie dans le plan polaire  $(\rho, \theta)$  avec :

$$\rho = \frac{\|\langle \vec{R} \rangle\|(r, \theta, \varphi)}{R_M(r)} \quad (2)$$

Proposez son allure et montrez qu'on peut se contenter de représenter son intersection avec un plan. Commentez.

4. Déterminez la fraction de puissance rayonnée dans la région de l'espace définie par  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ .

## Corrigé :

1. Comme on dispose d'une structure *localement plane*, **la relation de structure est valable localement**.

On trouve alors :

$$\vec{B} = \frac{A}{rc} \sin(\theta) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

2. On a

$$\begin{aligned} \langle \vec{R} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \Re (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) \\ &= \frac{A^2}{2\mu_0 r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{A^2}{2\mu_0 r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{u}_r$$

Ainsi,

$$R_M(r) = \frac{A^2}{2\mu_0 r^2 c}$$

On remarque que  $R_M(r)$  est atteint par  $\langle \vec{R} \rangle$  lorsque  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , on retrouve bien le fait que  $\|\langle \vec{R} \rangle\|$  est maximale dans le plan perpendiculaire au dipôle (on peut d'ailleurs aussi voir que le dipôle ne rayonne pas sur son axe!).

3. On trouve directement que :

$$\rho(\theta) = \sin^2(\theta)$$

Donc, en traçant dans le plan  $(O, x, y, z)$  le graph de cette fonction, on a :

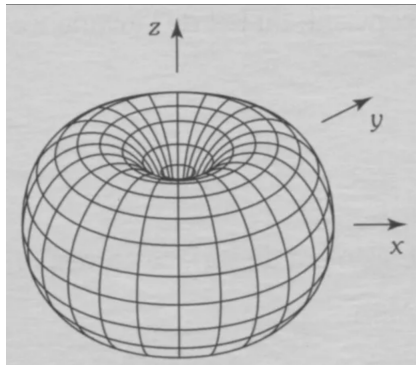


FIGURE 1 – Tracé de la fonction  $\rho(\theta) = \sin^2(\theta)$

et ça ressemble effectivement à un tore! On remarque bien qu'il n'y a rien au centre : un dipôle ne rayonne pas sur son axe. Et on retrouve bien  $R_M(r)$  quand  $\theta = \pi/2$  (ce qu'on avait trouvé en Q2.).

4. On a, en notant  $D_\theta = [\pi/4, 3\pi/4]$  et  $D_\varphi = [0, 2\pi]$  :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint_{\theta \in D_\theta, \varphi \in D_\varphi} \langle \vec{R} \rangle dS$$

avec l'expression de  $\langle \vec{R} \rangle$  trouvée en Q2. et le fait que  $dS = r d\theta r \sin(\theta) d\varphi$  :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi A^2}{c\mu_0} \int_{\theta \in D_\theta} \sin^3(\theta) d\theta$$

et faisant la fraction <sup>1</sup> entre  $\langle \mathcal{P} \rangle$  et  $\langle \mathcal{P}_{\text{tot}} \rangle$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ), on obtient :

$$\frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{tot}} \rangle} \simeq 88 \%$$

1. revoir le cours pour calculer cette intégrale, en faisant notamment un changement de variable!

## 2 Électron élastiquement lié dans un champ magnétique

On étudie le modèle de l'électron élastiquement lié à un atome par un ressort de raideur  $k$ .

1. Pourquoi le mouvement de l'électron est-il plan? Donnez, dans le cas d'un mouvement circulaire, la pulsation  $\omega_0$  du mouvement.
2. On met l'atome dans un champ  $\vec{B}$  orienté selon  $\vec{u}_z$  et on donne  $\omega_c$  la pulsation cyclotron.
  - (a) Décrivez le mouvement en donnant  $(x(t), y(t), z(t))$  en supposant  $\omega_0 \gg \omega_c$ .
  - (b) Montrez que cela équivaut à un dipôle oscillant à  $\omega_0$  selon  $\vec{u}_z$  et deux dipôles oscillants dans le plan  $xOy$  à  $\omega_0 \pm \omega_c/2$ .
  - (c) On donne le  $\vec{B}$  rayonné. Hypothèse du champ de rayonnement? Soit un point  $M$  sur un axe perpendiculaire à  $xOy$ . Quelle est la direction de  $\vec{E}$ ?

### Corrigé :

1. On considère le système suivant :

$$\Sigma = \{ \text{électron} \}$$

#### Bilan Des Forces

- Force de rappel élastique :  $\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{l}_0)$  (due au champ électrique du noyau, pas d'autres forces électriques...);
- Poids, frottements  $\Rightarrow$  négligés.

La position d'équilibre est  $\vec{r} = \vec{l}_0$ , or avec ce modèle : la position d'équilibre est au centre donc  $\vec{l}_0 = \vec{0}$ . La force de rappel élastique s'écrit alors :

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

Ainsi, **l'électron ne subit que l'action d'une force centrale : son mouvement est donc plan!**<sup>2</sup> Dès lors, d'après la deuxième loi de Newton :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

i.e

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

---

2. résultat de cours.

2. (a) On considère donc de plus la force de Lorentz magnétique dans notre bilan des forces :  $\vec{F}_L = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ .  
 Si on se place en polaire :  $\vec{F}_L = -er\dot{\theta}\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = -eB\dot{\theta}\vec{u}_r$ .  
 Donc, en divisant par  $m$  (on veut retrouver une équation comme celle de la question précédente) :

$$\vec{F}_L = -\frac{eB}{m}\dot{\theta}\vec{u}_r$$

On en déduit alors que :

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

La deuxième loi de Newton nous dit alors :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{e}{m} \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} + \omega_0^2\vec{r} = \vec{0}$$

et, en repassant en cartésiennes :  $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$  Donc en projetant sur les trois axes, on trouve :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \omega_c \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - \omega_c \dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

De là, pour résoudre les deux premières lignes de ce système, on pose la nouvelle variable

$$X = x + iy$$

Alors, on retombe sur une équation différentielle plus simple :

$$\ddot{X} - i\omega_c \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

On dresse donc l'équation caractéristique de cette dernière :

$$\lambda^2 - i\omega_c \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant étant  $\Delta = -\omega_c^2 - 4\omega_0^2 < 0$ , nos solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{i\omega_c \pm i\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}}{2} \\ &= \frac{i\omega_c \pm 2i\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{2\omega_0}\right)^2}}{2} \\ &\simeq i\left(\pm\omega_0 + \frac{\omega_c}{2}\right) \end{aligned}$$

Dès lors,  $X$  est de la forme (avec  $A, B \in \mathbb{C}$ ) :

$$\begin{aligned} X(t) &= A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t) \\ &= A \exp(i(\omega_0 + \omega_c/2)t) + B \exp(-i(\omega_0 + \omega_c/2)t) \\ &= A \exp(i\omega_+ t) + B \exp(i\omega_- t) \end{aligned}$$

avec  $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \omega_c/2$ .

Enfin, on conclut avec la prise de partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x(t) &= \Re(X(t)) \\ y(t) &= \Im(X(t)) \end{cases}$$

Pour  $z(t)$ , il s'agit simplement d'un oscillateur harmonique :

$$z(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$$

- (b) Comme on peut s'en douter : ce sont des calculs lourds, pénibles et aliénants. Néanmoins, sans sortir ces calculs, on peut intuitivement que le mouvement dans le plan  $(xOy)$  sera la combinaison de 2 mouvements oscillants de pulsations différentes  $\omega_+$  et  $\omega_-$ . Par contre, comme le dit l'énoncé, on a toujours un dipôle oscillant de pulsation  $\omega_0$  selon  $\vec{u}_z$ .
- (c) Question de cours optionnelle, il s'agit de l'approximation :

$$a \ll \lambda \ll r$$

appelée *approximation sur la zone de rayonnement*.

De plus, le dipôle ne rayonne pas sur son axe : un observateur situé sur l'axe  $(Oz)$  ne reçoit de rayonnement que de la part des dipôles selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ .

Comme il est, pour ces derniers, dans leur plan médiateur,  $\vec{E}$  reçu est colinéaire aux moments dipolaires, donc  $\vec{E}$  est parallèle au plan  $(xOy)$ .

### 3 Guidage d'un bateau

(CCP PSI 2019) Pour guider un bateau, on envoie une onde électromagnétique :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

- Déterminer son champ électromagnétique et son vecteur de Poynting.
- Le récepteur sur le bateau est un cadre carré de côté  $a = 10$  cm, sur lequel on a bobiné  $N = 100$  spires de fil conducteur. Les deux extrémités du fil sont notées  $A$  et  $B$ , et le circuit reste ouvert.
  - Pourquoi apparaît-il une tension entre  $A$  et  $B$ ?
  - Comment faut-il positionner le cadre pour optimiser la réception du signal?
  - Proposez une approximation raisonnable pour le champ magnétique au voisinage du cadre.
  - Calculez la tension  $U$  en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $E_0$ .
  - Le signal est émis avec une puissance  $P = 20$  kW et une fréquence  $f = 100$  kHz. Le bateau est situé à 30 milles marins de l'émetteur (1 mille marin = 1852 m). Calculez la valeur efficace de  $U$ .

#### Corrigé :

- Après calculs<sup>3</sup>, on trouve :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

- $\vec{B}$  induit une f.e.m dans le circuit, d'où la tension.
  - Pour maximiser le flux, on veut  $\vec{B} \perp$  aux spires : il faut donc un cadre vertical.
  - A priori,  $\vec{B}$  n'est pas uniforme dans tout l'espace MAIS on peut introduire la *distance caractéristique de variation*<sup>4</sup> :

$$\lambda = \frac{c}{f} \sim \frac{3 \times 10^8}{1 \times 10^5} = 3 \text{ km}$$

Ainsi, on sait que le champ  $\vec{B}$  fait une période sur 3 km, donc comparé à  $a \sim 10$  cm, c'est totalement dérisoire.

On peut alors considérer  $\vec{B}$  uniforme dans le cadre car ce champ varie peu sur une distance  $a$  :

$$a \ll \lambda$$

3. on utilise les mêmes formules que d'habitude...

4. joli mot pour parler de la longueur d'onde



(d)  $\vec{B}$  uniforme  $\implies \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ .

Dès lors, pour une spire :

$$\Phi_1 = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kD) a^2$$

avec  $D$  la distance caractéristique introduite précédemment<sup>5</sup>.

On a alors :

$$\Phi = \frac{NE_0 a^2}{c} \cos(\omega t - kD)$$

Enfin d'après la loi de Faraday :

$$\begin{aligned} U &= - \frac{d\Phi}{dt} \\ &= \frac{E_0 \omega a^2}{c} \sin(\omega t - kD) \end{aligned}$$

Donc :

$$U = \frac{E_0 \omega a^2}{c} \sin(\omega t - kD)$$

(e) L'antenne émettrice, située sur la côte, est modélisée comme un dipôle.

La formule de Rayleigh nous dit que :

La puissance surfacique est émise en  $\frac{1}{r^2}$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \Pi(r) \times 4\pi r^2 = \text{cst} \\ &= \frac{E(r)^2}{2\mu_0 c} 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Après une évaluation en un  $r$  bien choisi, on trouve que :

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{1}{r} \times \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{2\pi}} \\ &\simeq 19,7 \text{ mV.m}^{-1} \text{ à 50 milles marins} \end{aligned}$$

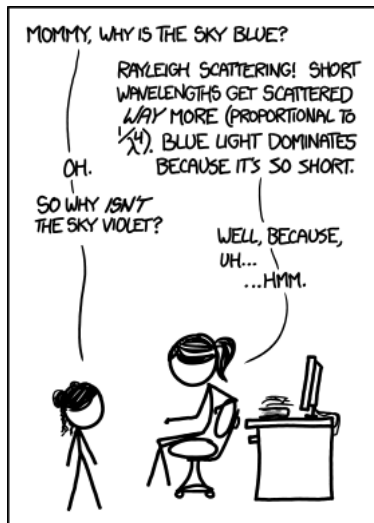
On en déduit alors que :

$$U_{\text{max}} \simeq 40 \mu\text{V}$$

Conclusion : avec une si petite valeur, on a vraiment intérêt à avoir un récepteur très sensible.

---

5. on respecte notre approximation



MY HOBBY: TEACHING TRICKY QUESTIONS TO THE CHILDREN OF MY SCIENTIST FRIENDS.