Espaces probabilisés

Vallaeys Pascal

5 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 105,107,112

Méthodes standard des exercices :

- Définition d'une mesure de probabilité.
- Définition d'une tribu.
- Savoir appliquer la formule des probabilités totales.
- Savoir utiliser les probabilités conditionnelles.
- Savoir appliquer le théorème de continuité croissante ou décroissante.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (Mines MP 2021)

1. Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \subset Y$?

2. Dans une urne contenant n boule numérotées de 1 à n, on tire une poignée de boules, que l'on remet ensuite dans l'urne. On tire une deuxième poignée de boules. Quelle est la probabilité de tirer deux poignées de boules distinctes, i.e, aucune boule de la deuxième poignée n'a été tirée à la première ?

Exercice 2 :

Démontrer les formules suivantes à l'aide de modélisation par une expérience, ou autre méthode :

1. $\binom{m+n}{r} = \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$
2. $\binom{n}{r} = \sum\limits_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}$
4. $2^p \binom{n}{p} = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n\_k}{p-k}$
5. $0 = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$
6. $\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - ....\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + ...\right)^2 = 2^n$. (Utiliser $(1+i)^n$)
7. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
8. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$
9. $\sum\limits_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$
10. $\prod\limits_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod\limits_{k=n+1}^{2n} k$
11. $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$ avec $2 + p + q \leq n$
12. $\binom{n}{q} . \binom{n-q}{p-q} = \binom{p}{q} \binom{n}{p}$ avec $q \leq p \leq n$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k} . \binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 3 :
On souhaite ranger sur une étagère 14 livres de mathématiques (distincts), 3 livres de physique, et 11 d'informatique. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 4 : Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

Exercice 5 : Combien les mots ABCDEF et AAABBCDE possèdent-ils d'anagrammes ?

Exercice 6 : Soit A un ensemble fini. Déterminer $\sum\limits_{X\subset A} Card\,(X)$.

Exercice 7 : On dispose de n boites numérotées de 1 à n et de k balles indiscernables. On range les balles dans les boites et on se demande quel est le nombre de façons possibles de le faire.

Exercice 8 : Montrer que si des évènements sont indépendants, il en va de même de leurs complémentaires.

Exercice 9 : On note S_n^k le nombre de surjections existant entre un ensemble à n éléments et un ensemble à k éléments.

1. Préciser les valeur de S_n^1 et S_n^n.
2. Montrer que $S_n^2 = 2^n - 2$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \binom{k}{j} S_n^j = k^n$.
4. Montrer que $S_n^j = j\left(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1}\right)$.
5. Implémenter un programme python permettant de calculer les S_n^k
6. Soit $f(x) = e^x - 1$. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, il existe des constantes $a_1(k), ..., a_k(k)$ telles que $\frac{d^n}{dx^n}\left[f^n(x)\right] = \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} a_j(k)\, f^{n-j}(x)\,(f')^j(x)\right)$.
7. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k} = n!$.
8. Montrer que $S_n^j = \sum\limits_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} k^n \binom{j}{k}$.

Exercice 10 :
Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention, on pose $D_0 = 1$.
Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention, on pose $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .D_{n-k}$?
3. Calculer $\sum\limits_{k=i}^{n} (-1)^{n-k}.\binom{n}{k}.\binom{k}{i}$ pour $0 \leq i \leq n$.
4. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles, telle que pour tout entier naturel n, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$.
5. En déduire que $D_n = n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$.
6. Montrer, (éventuellement de deux manières), que $D_{n+1} = n\left(D_n + D_{n-1}\right)$.
7. On note δ_n la densité des dérangements parmi l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Déterminer la limite de δ_n quand n tend vers $+\infty$.

8. Montrer, de deux manières, que $D_{n+1} = n\left(D_n + D_{n-1}\right)$.
9. Retrouver la formule de la question d) à l'aide de f).

Exercice 11 : On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ et s un réel strictement supérieur à un. On muni Ω de la tribu $T = P(\Omega)$. On note $\varsigma(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On munit T de la loi telle que : $p(\{n\}) = \frac{1}{\varsigma(s).n^s}$.

1. Montrer que c'est bien une probabilité.
2. Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, sont indépendants dans leur ensemble.
3. Exprimer l'évènement « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction des $\overline{A_p}$.
4. On numérote les nombres premiers dans l'ordre croissant : $2 = p_1 < p_2 < .... < p_k < ...$, et on note $E_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}$. Montrer que $p(\{1\}) = \prod\limits_{p\ premier} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.
5. En déduire $\varsigma(s) = \prod\limits_{p\ premier} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}$.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 12 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $k \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que : $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
2. Soit $p \in]0,1[$. On pose : $\forall n \geqslant k, P(n) = \displaystyle\binom{n-1}{k-1} p^n (1-p)^{n-k}$.
Montrer que P définit bien une loi de probabilité.

Exercice 13 : (Centrale TSI 2021)
Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'un match de badminton selon les règles suivantes : A commence à servir ; le joueur qui gagne le point sert pour le point suivant ; le joueur qui sert a probabilité 2/3 de gagner le point et 1/3 de le perdre. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n) l'événement « A (resp. B) gagne le n-ème point » ainsi que $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. A gagne le deuxième point, quelle est la probabilité qu'il ait gagné le premier ?
3. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
4. Montrer que M est diagonalisable puis expliquer la méthode pour déterminer M^n. Les suites (a_n) et (b_n) convergent-elles ?
5. Grâce à python, représenter graphiquement les dix premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 14 : (CCINP PC 2021)
Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant ou non être correcte) avec la probabilité p, ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $1-p$.

On note A_n l'événement "la n-ième personne reçoit correctement l'information initiale", et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, puis exprimer p_n en fonction de n.

Exercice 15 :
De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes qui comporte exactement 2 dames et 2 coeurs ?

Exercice 16 :
Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun « 1 ». Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. A.

2. B, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
3. C, ensemble des nombres pairs de A.
4. D, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 17 : Dans une loterie, avec 49 numéros, dont 6 sont tirés au sort, un joueur choisi au départ 6 numéros. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. Les 6 bons numéros.
2. 5 bons numéros au moins.
3. Au moins 3 bons numéros.
4. Exactement 3 bons numéros.
5. Mêmes questions si le joueur choisit 7 puis 8 numéros.

Exercice 18 : Pour réussir un QCM, il faut répondre correctement à 7 questions sur les 10. Quelle est la probabilité de réussite en choisissant des réponses au hasard.

Exercice 19 :
Dans une urne on a 4 boules rouges, 5 boules noires et 6 boules vertes. On tire 6 boules (sans remise). Calcule la probabilité de tirer :
a) les 6 boules vertes.
b) 3 boules rouges et 3 boules noires.
c) 2 boules de chaque couleur.
d) Pas de boule verte.
e) au moins une boule rouge.

Exercice 20 : Quel est le plus probable ?
a) Obtenir au moins un as en lançant 4 dés ?
b) Obtenir au moins deux as en lançant 10 dés ?
c) Obtenir au moins une paire d'as en lançant 25 paires de dés ?
d) Obtenir au moins deux as en lançant 50 dés ?

Exercice 21 : On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $\mathrm{N}-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 22 : On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A, B et C les événements A={Le chiffre du premier dé est pair}, B={Le chiffre du deuxième dé est pair} et C={Les deux chiffres ont même parité}.
1. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 23 : (Mines MP 2023)
On pose $p_n = a\dfrac{2^n}{n!}$ et on suppose que c'est la probabilité pour une famille d'avoir n enfants.
1. Déterminer a pour pour $(p_n)_{n\geqslant 0}$ soit une distribution de probabilité.
2. La probabilité d'avoir une fille (resp un garçon) vaut 1/2. Déterminer la probabilité d'avoir au moins un garçon.
3. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un garçon ?

Exercice 24 : (Mines MP 2021)
Soit p $\in]0,1[$ et $\alpha \in \left]0, \frac{1}{p} - \ 1\right[$. Pour $n \geqslant 1$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est αp^n.
1) Quelle est la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant ?
2) Quelle est la probabilité qu'une famille ait k garçons ?
3) Quelle est la probabilité qu'une la famille avec au moins un garçon ait au moins deux garçons ?

Exercice 25 : Soit (Ω, A, p) un espace probabilisé. On note $B = \{X \in A/p(X) \in \{0,1\}\}$. Montrer que B est une tribu.

Exercice 26 : Soit Ω une ensemble et T l'ensemble des parties de Ω finies ou dénombrables ou de complémentaire fini ou dénombrable.
a) Montrer que T est une tribu.
b) Montrer que c'est la plus petite tribu contenant les singletons.
c) Que dire si Ω est dénombrable ?
d) Montrer alors qu'il existe sur cet univers une mesure de probabilité caractérisant les ensembles dénombrables.

Exercice 27 :
Dans les p boîtes à lettres d'un immeuble, un facteur est chargé de distribuer n lettres dont r1 sont pour la boîte 1, . . . ,rp pour la boîte p. Peu consciencieux, il les distribue au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour que la distribution soit correcte ?
2. Quelle est la probabilité pour que la boîte 1 soit correctement remplie ?
3. Quelle est la probabilité pour que dans la boîte 1 il n'y ait aucune lettre destinée à un voisin ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait dans chaque boîte exactement le nombre de lettres qui lui était destiné ?

Exercice 28 :
Un vigile a, dans sa poche, dix clefs toutes différentes mais indiscernables au toucher. Il doit ouvrir, dans la quasi-obscurité, une des portes de l'entrepôt qu'il surveille et, pour ce faire, il essaie les clefs l'une après l'autre, au hasard. Certaines nuits, il remet dans une autre poche toute clef essayée et qui n'a pas ouvert le porte. Les autres nuits, il remet dans la même poche toute clef essayée sans succès.
Un cambrioleur probabiliste a remarqué que le vigile emploie la seconde méthode quand, et seulement quand, il a trop copieusement arrosé son repas, ce qui se produit de façon aléatoire avec une probabilité 1/10 (et le rend inoffensif).
Déterminer la probabilité p_k que le voleur, arrivé sur les lieux après le repas du vigile et très pressé d'en finir, puisse agir sans risque quand il a constaté que la porte n'est pas encore ouverte après la k−ième tentative.

Exercice 29 : Un train se compose de 10 wagons citernes contenant un produit dangereux. Chacun des wagons peut avec une probabilité 0.1 (et indépendamment des autres) avoir un défaut. Avant le départ, les wagons sont examinés par deux contrôleurs. Chacun d'eux vérifie tous les wagons, sans échanger d'information avec son collègue pendant le contrôle. On admet que chaque contrôleur peut déceler le défaut (s'il y en a un) d'un wagon donné avec une probabilité égale à 0.7. Un seul défaut suffit pour que le train soit retardé. Trouver les probabilités des événements suivants :

1. Le train est retardé.
2. Le train part avec au moins un wagon défectueux.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 30 : Si E est un ensemble, on appelle singletons les ensembles $\{e\}$ avec $e \in E$.
a) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E ?
b) A supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire des ensembles à deux éléments) de E ?
c) Une partie A de E étant fixée, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A ?
d) Soient G et F deux tribus de E. Décrire simplement la tribu engendrée par $F \cap G$, puis de la tribu engendrée par $F \cup G$.
e) Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $A = \{[0,2], [1,3]\}$? Quel est son cardinal ?

Exercice 31 : Montrer qu'une tribu infinie est toujours non dénombrable.

Exercice 32 :
Soit (Ω, A, p) un espace probabilisé. Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements.

1. Montrer que $p\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} p\left(B_k\right)$ (Inégalité de Boole)
2. Montrer que $p\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \leq 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} p\left(B_k\right)$ (Inégalité de Bonferroni)
3. Montrer que $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p\left(B_i\right) - \sum_{1\leq i<j\leq n} p\left(B_i \cap B_j\right)$ (Inégalité de Bonferroni aussi)
4. Montrer que $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \min_{k\in[\![1,n]\!]} \left[\sum_{i=1}^{n} p\left(B_i\right) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p\left(B_i \cap B_k\right)\right]$ (Inégalité de Kounias)