Suites et séries vectorielles, sommabilité

Vallaeys Pascal

16 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 1,5,6,7,43,46,40,61

Méthodes standard des exercices :

- Montrer qu'une série est convergente.
- Calculer la somme d'une série (par exemple télescopique).
- Faire une comparaison série-intégrale.
- Montrer qu'une famille est sommable.
- Utiliser le théorème de sommation par paquets.
- Faire une produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)
Nature de $\sum \cos\left(n^2\pi \ln(1-\frac{1}{n})\right)$

Exercice 2 : (CCINP MPi 2023)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.
1. Montrer que la suite (S_n) converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de (S_n).

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2023)
1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées. Que peut-on dire du reste ?
2. Étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}$.
3. Comment peut-on donner une valeur à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$?
4. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 : (Mines MP 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 : (CCINP MP 2023)
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{3^n\ n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{2/3}}$.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \dfrac{C}{n^a}$.

Exercice 7 : (Mines MP 2022)
Quelle est la nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2022)
Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)})$

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2022)
1) Donner une condition nécessaire sur la suite (u_n) pour que la série numérique $\sum u_n$ converge.
2) Cette condition est-elle suffisante ? Justifier.
3) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ en fonction des réels a et b.

Exercice 10 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 11 : (Magistère MP 2022)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 12 : (Mines MP 2021)
Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k\, x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$
Remarque : Je n'ai aucune certitude sur l'énoncé d'origine. Celui-ci (garanti) m'a été suggéré par le modérateur.

Exercice 13 : (Mines télécom MP 2021)
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1+\sin n}$ converge.
a) A l'aide d'un développement limité.
b) En caractérisant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{n+1+\sin n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ (principe de l'éclatement).
c) En montrant que le critère spécial des séries alternées s'applique.

Exercice 14 : (Mines télécom MP 2021)
Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, P_n admet une unique racine sur $[0,1]$, notée x_n.
Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et déterminer sa limite.
Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \sim \frac{\alpha}{n}$.

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2021)
Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

Exercice 16 : (Mines télécom MP 2021)

On définit la série harmonique par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?
2. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = H_n - \ln(n).$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ.
4. On pose $w_n = u_n - \gamma$. Déterminer un équivalent de w_n.

Exercice 17 :

a) Trouver deux réels α et β tels que $\int\limits_0^\pi \left(\alpha t + \beta t^2\right).\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$, pour tout entier naturel strictement positif n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos(nt)$.

c) Montrer que si ϕ est une fonction de classe C^1, $\underset{N\to+\infty}{Lim} \int\limits_0^\pi \phi(t).\sin(Nt).dt = 0$.

d) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 18 :

Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ une suite. On pose $v_n = \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}$.
a) Montrer que si la suite (u_n) est monotone, il en va de même de la suite (v_n).
b) Montrer que si (u_n) converge, (v_n) converge vers la même limite. (Th de Césaro)
c) Procéder de même avec $v_n = \frac{1}{2^n}.\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.u_k$.

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ et $(v_n)_{n\in\aleph}$ deux suites, $(v_n)_{n\in\aleph}$ étant décroissante vers 0. On considère $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k.v_k$. On pose $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Exprimer S_n sous forme d'une somme faisant intervenir U_k et $(v_{k+1} - v_k)$.

b) En déduire que si les termes U_k sont bornés et que si la suite $(v_n)_{n\in\aleph}$ converge, la série $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k.v_k$ converge.

c) Appliquer cela pour montrer que $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ converge.

Exercice 20 :

Soient $(u_n)_{n\in\aleph}$ et $(v_n)_{n\in\aleph}$ deux suites strictement positives telles que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
a) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
b) Montrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 21 :

On pose $u_0 = 1$ et pose tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.
b) On pose $v_n = {u_n}^\alpha$. Déterminer un réel α tel que $\underset{n\to+\infty}{Lim} (v_{n+1} - v_n)$ soit finie et non nulle.
c) Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 22 :

On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{1}{n.n!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
En déduire que e est irrationnel.

Exercice 23 : Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ une suite décroissante positive telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $n.u_n$ tend vers 0. (On utilisera $S_{2n} - S_n$).

Exercice 24 : Règle de Raabe Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ une suite réelle telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$.

Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge. (On posera $w_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et on montrera que la suite (w_n) converge).

Exercice 25 : Etudier suivant le paramètre α la sommabilité des familles $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 26 :

a) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)\, x^n$ où d(n) désigne le nombre de diviseurs de n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 27 : (Mines télécom MP 2023)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$: $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

1. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{2}\ln^2 n$. On note v_n cette dernière quantité.

2. Donner un équivalent de $u_n - v_n$.

Commentaires divers : Examinateur sympathique.

Exercice 28 : (CCINP MP 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k}$.

1. Montrer que : $u_{2n} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\ell}+\sqrt{2\ell-1}}$.

2. En déduire que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}$.

3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.

5. Trouver la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 29 : (CCINP MP 2023)

Soient a et b, 2 réels strictement positifs.

1) Calculer l'intégrale suivante : $\int_a^b \frac{1}{t^{3/2}+t^{1/2}}\, dt$.

Indication : Poser $u = \sqrt{t}$.

2) Justifier l'existence de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}}$.

3) Montrer l'inégalité suivante : $2\arctan(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \leq R_n \leq 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

4) En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 30 : (Mines télécom MP 2022)

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!\, x \in \mathbb{R}_+ \ /\ \cos x = nx$.

2) On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite ainsi trouvée. Montrer une éventuelle monotonie et une éventuelle limite de cette suite.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

2) En posant $f_n(x) = \cos x - nx$, étudier $f_n(x_{n+1})$.

Commentaires divers : Il y avait deux questions supplémentaires à l'exercice 2, mais je n'ai pas eu le temps de les traiter.

Exercice 31 : (Mines télécom MP 2022)
Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n(n+1))^{\frac{1}{2}}}$.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 32 : (Mines MP 2023)
Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$.
1. Nature de $\sum u_n$.
2. Nature de $\sum f(n)$.
3. Nature de $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+i}}$ suivant la valeur du réel α.
Commentaire du modérateur : Q3 n'a pas de sens en l'état.

Exercice 33 : (Mines MP 2022) (sans préparation, 40 min)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} u_k$
1. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Vérifier la nature de $\sum u_n$ puis celle de $\sum v_n$.
2. Cas général : montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Exprimer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des sommes partielles de $\sum u_n$ et observer les sommes partielles de $\sum v_n$ en utilisant une certaine permutation.
Commentaires divers : Examinateur sympathique, donnant des pistes pour les questions de conclusion.

Exercice 34 : (Mines MP 2022)
Étude de la série de terme général : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
Commentaires divers :
Malgré l'aspect examen, le format de l'épreuve et l'examinateur étaient très sympathiques.

Exercice 35 : (Mines MP 2022)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k},\ v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k},\ w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k}$$
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \text{ et }\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$
1. Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
2.Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + O(\frac{1}{n})$.
3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, u_{2n} à l'aide de v_n et w_n.
4. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
5. Exprimer ℓ à l'aide de γ.

Exercice 36 : (Mines MP 2021)
Soient 2 suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ convergentes respectivement vers a et b.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab$.

Exercice 37 : (Mines MP 2021)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers λ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a_n + \sqrt{u_n}}$
1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
On pourra chercher une condition suffisante sur C telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant C$.

On note $\nu(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer que $\nu(u)$ est non vide et que $f(\nu(u)) = \nu(u)$, où f est définie par $f(x) = \sqrt{\lambda + \sqrt{x}}$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1.3) Considérer $\inf \nu(u)$ et $\sup \nu(u)$ après avoir justifier leur existence.

Exercice 38 : (Mines MP 2021)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\, \theta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] : u_{n+1} = \dfrac{1}{\sin\theta_n}$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{\tan\theta_{n+1}} - \frac{1}{\tan\theta_n} = \frac{1}{\sin\theta_n}.$$

2. Déterminer θ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis trouver un équivalent de u_n.

Exercice 39 : (Mines MP)
Suivant le réel α, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(ch\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1$.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 40 : (X MPi 2023)
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue strictement croissante. Montrer que :

$$\sum \frac{1}{f(n)} \text{ converge} \iff \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \text{ converge}$$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : étudier le cas où $f(x) = x^\alpha$ pour commencer, puis revenir au cas général avec une comparaison série / intégrale.
Note : il y a un problème avec cet énoncé, lequel ? Avec deux hypothèses supplémentaires, c'est Ok

Exercice 41 : Navale MP 2023
Montrez que toute suite réelle admet une sous suite monotone.

Exercice 42 : (X MP 2023)
Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} < \pi$
Indication : S'intéresser aux $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et aux r_n points d'intersection de la droite passant par 0 et x_n et du cercle de centre O de rayon $\sqrt{m}$.
2. Soient $(a_n)_n$et $(b_m)_m \in \mathbb{R}+^{\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang.
On pose $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ et $B = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m^2$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n b_m}{m+n} < \pi\sqrt{AB}$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : 1) Calculer l'aire du triangle $Ox_{n+1}x_n$ afin de déterminer celle $Or_{n+1}b_n$ où b_n point d'intersection entre la droite passant par r_{n+1} perpendiculaire à l'axe des abscisses et la droite passant par O et x_n.
Commentaires divers : L'examinateur m'a souvent laissée chercher les questions seule sans vraiment essayer de me guider quand j'en avais besoin.

Exercice 43 : (ENS MP 2023)
On admet le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer que $\gamma = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln 2} \right\rfloor$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Plutôt que passer par une comparaison série-intégrale, essayer de simplifier la partie entière. Exprimer la série harmonique alternée en fonction de la série harmonique. Calculer la somme de série intérieure jusqu'au bout à l'intérieur d'une somme double.
Commentaires divers :

Se précipiter sur la comparaison série-intégrale en voyant le sujet (parce qu'on sait que le développement vient de là) peut être malvenu : s'il est donné, rien ne sert de le remontrer.

Parfois, une somme télescopique n'est pas immédiatement télescopique. Il faut alors bien la calculer.

Dans le cas de réaliser une sommation par paquets, préciser qu'on sait que si ce n'est pas sommable ça ne marche pas ; mais si l'examinateur ne le demande pas, éviter de vérifier la sommabilité : mieux vaut vérifier que ça servira à quelque chose avant de s'embêter à le montrer...

Exercice 44 : (Mines MP 2022)
(Sans préparation)
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$
1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.
2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 45 : (Mines MP 2022)
(1) Soit (p_n) une suite croissante d'entiers avec $p_n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{p_1 ... p_n}$ converge et que sa somme appartient à $]0, 1]$.
(2) Soit $x \in]0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique suite croissante d'entiers supérieurs ou égaux à 2 tel que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 ... p_n}$
(3) Montrer que x est rationnel si, et seulement si, (p_n) est stationnaire.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
(2) : Déterminer l'expression de p_1, puis répéter le raisonnement.
Commentaires divers :
15 min de préparation pour essayer le 1er exercice, et 50 min de passage à l'oral. L'examinateur était attentif à mes propositions. Il a mis l'accent sur l'autonomie au début du 2ème exercice. Il ne m'a pas laissé sortir de la salle avec l'énoncé.

Exercice 46 : (ENS MP 2021)
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels strictement positifs, telle que sa série converge. On pose $\mathcal{E} = \{\sum_{i \geqslant 0} \varepsilon_i a_i, \text{ avec } \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$.
Montrer l'équivalence suivante :
$\mathcal{E}$ est un intervalle $\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0, \quad a_n \leqslant \sum_{k \geqslant n+1} a_k$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pas d'indications fournies, uniquement des acquiescements ou l'inverse. Il m'a dit qu'on pouvait penser à une décomposition en base.
Commentaires divers :
Déroulé : examinateur très agréable, qui a privilégié la discussion et la réflexion à voix haute avant d'écrire beaucoup de maths. Ne pas hésiter à dessiner...

Exercice 47 : (Centrale PC)
Soit $(u_n)_{n \in \aleph}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $\alpha_n = \frac{1}{n^2} . \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $\frac{n(n+1)}{2} \leq \sqrt{n^2 . \alpha_n . \sum\limits_{k=1}^{n} u_k}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k} \leq 2 \left(\alpha_n - \alpha_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$.

c) En déduire que si $\sum \frac{1}{u_n}$ converge, $\sum \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}$ converge.

Exercice 48 : (X 2007 116)
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Exercice 49 : Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 50 : Montrer que l'ensemble des parties dénombrables de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 51 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Pour cela, considérer :$J(n) = \left\{x \in [a,b] \,/\, f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n}\right\}$

Exercice 52 :

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

Exercice 53 : Théorème de Cantor-Berstein

Soient M et N deux ensembles tels qu'il existe un injection $f : M \to N$ et une injection $g : N \to M$. Montrer qu'il existe une bijection entre M et N. On considère l'application $F : A \in P(M) \to M\backslash(g(N\backslash f(A))) = \overline{g\left(\overline{f(A)}\right)}$.

a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de M. Montrer que $f\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.

b) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de M. Montrer que $f\left(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f(B_i)$.

c) On pose $F_0 = Id_M$ et pour tout entier naturel k, $F^{k+1} = F^k \circ F$. Montrer que pour tout entier k, $F^{k+1}(M) \subset F^k(M)$. On définit l'ensemble E par $E = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} F^k(M)$. Montrer que $F(E) = E$.

d) On considère $\varphi : M \to N$ définie par $\varphi(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ sinon. Montrer que φ est une bijection.

Exercice 54 : Soit p>1 un entier naturel. Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$.

Que cela signifie-t-il en termes de sommabilité ?