Khôlles : Révisions d'Algèbre Linéaire

- Septembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de cours - Tout groupe

1.1 Projection et décomposition de l'espace associée.(démo)

Définition: Projection

Soit E, $\mathbb{K}$-EV, soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que p est une projection si $p^2 = p$.

Proposition Décomposition de l'espace associé à une projection

Soit E, $\mathbb{K}$-EV, soit p une projection de E.

$$\text{Alors } E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$$

Preuve :

Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$: Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$.

Alors $\exists z \in E,\ \ p(z) = x$. D'autre part, $p(x) = 0$, donc $p(x) = p^2(z) = 0$.
Or, par définition d'un projecteur, $p^2(z) = p(z) \Rightarrow\ x = p(z) = 0$.
D'où $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$ (car 0 est bien dans l'intersection).

Par Analyse-Synthèse, montrons que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$:

Analyse :

Soit $x \in E$, soient $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x_I \in \mathrm{Im}(p)$ qui conviennent (i.e $x = x_K + x_I$).

Alors, $p(x) = p(x_K + x_I) = p(x_K) + p(x_I)$ par linéarité de p.
Or, par définition de x_K : $p(x_K) = 0$. Donc $p(x) = p(x_I)$. Or, $x_I \in \mathrm{Im}(p) \Rightarrow\ \exists z \in E,\ \ x_I = p^2(z)$.
Donc $p(x) = p(x_I) = p^2(z) = p(z) = x_I$. Donc $x_I = p(x)$.

Nous avons alors $x_K = x - x_I = x - p(x)$.

Synthèse :

Posons alors pour tout $x \in E$: $x_I = p(x)$ et $x_K = x - p(x)$:

- $x_I \in \mathrm{Im}(p)$: Car par définition, $x_I = p(x)$.
- $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$: $p(x_K) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$
- $x = x_I + x_K$ par construction.

D'où $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$

1.2 Caractérisation de l'injectivité par le noyau.(démo)

Proposition

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-EV, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{Alors } [\varphi \text{ est Injective}] \iff [\text{Ker}(\varphi) = \{0\}]$$

Preuve **:**

Supposons premièrement φ Injective.
Alors, 0 ne possède qu'un unique antécédent, Or $\varphi(0) = 0$. Donc $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Réciproquement, si $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, alors soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Donc $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \varphi(x_1 - x_2) = 0$ par linéarité de φ.
Or, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, donc $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \varphi$ est Injective.

1.3 Théorème du rang. (démo)

Théorème du Rang

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-EV, <u>dont E de dimension FINIE</u>. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$$

Preuve **:**

Soit S, supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ (Qui existe car nous sommes en dimension finie). Posons alors l'application :

$$\tilde{u} = u_{|S} : \begin{cases} S \to \text{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

Montrons que cette application $\tilde{u}$ est une Bijection : $\tilde{u}$ reste linéaire par linéarité de u.

Soit $x \in \text{Ker}(\tilde{u})$. Alors, d'une part, $x \in S$ et d'autre part, $u(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u)$. Donc $x \in S \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$ par définition. Donc $x = 0$: $\tilde{u}$ est Injective.

Montrons que $\tilde{u}$ est surjective : (Le but étant de montrer que $\dim(S) = \text{rg}(u)$, nous ne pouvons pas affirmer que Injective $\iff$ Surjective $\iff$ Bijective en dimension finie).
Soit $y \in \text{Im}(u)$. Alors, $\exists x \in E,\ u(x) = y$. Or, S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, donc $E = \text{Ker}(u) \oplus S$: $x = x_S + x_K$ pour $x_S \in S$ et $x_K \in \text{Ker}(u)$.

Ainsi, $y = u(x) = u(x_S + x_K) = u(x_S) + u(x_K) = u(x_S) = \tilde{u}(x_S)$: Pour tout $y \in \text{Im}(u)$, $\exists x_S \in S,\ \tilde{u}(x_S) = y$: $\tilde{u}$ est Surjective.

D'où la bijectivité de $\tilde{u}$. Nous avons alors que $\dim(S) = \text{rg}(u)$. Or, S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$:

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(S) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$$

1.4 Si une application linéaire est bijective, sa réciproque est linéaire. (démo, pas refait en spé)

Preuve :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-EV. Soit $u \in GL(E, F)$.

Montrons que $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ u^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda u^{-1}(x) + \mu u^{-1}(y)$.

Soient donc $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in K$ Par bijectivité de u, $\exists a, b \in E,\ x = u(a)$ et $y = u(b)$. Donc :

$$\begin{aligned}
u^{-1}(\lambda x + \mu y) &= u^{-1}(\lambda u(a) + \mu u(b)) \\
&= u^{-1}(u(\lambda a + \mu b)) && \text{Par linéarité de } u \\
&= \lambda a + \mu b && \text{par définition de la réciproque} \\
&= \lambda u^{-1}(x) + \mu u^{-1}(y) && \text{Par définition de } a \text{ et } b
\end{aligned}$$

D'où la linéarité de la réciproque.

1.5 Si une somme de n sous-espaces est directe, la décomposition d'un vecteur est unique (démo)

Définition: Somme Directe de n sous-espaces vectoriels

Soient $E_1, \ldots, E_n$, n $\mathbb{K}$-EV.

On dit que la somme de ces espaces est directe (et on note alors $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$) si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$$

Proposition

Soient $E_1, \ldots, E_n$, n $\mathbb{K}$-EV.

Si la somme de ces espaces est directe, alors $\forall x \in E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n$

Preuve :

Soit $x \in E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$.
Nous avons $x - x = 0$, donc $x_1 - y_1 + \cdots + x_n - y_n = 0$.
Or, les vecteurs $x_i - y_i \in E_i$ car E_i est un espace vectoriel pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Ainsi, par définition de la somme directe, $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0$, d'où $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$: La décomposition est unique.

2 Questions de cours - Groupe B et C

2.1 Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base. (démo, pas refait en spé)

Preuve :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-EV. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ famille d'éléments de F (non forcément distincts).

Montrons qu'il existe une unique application linéaire u telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ u(e_i) = f_i$.

Soient u et v, deux application envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{F}$. Soit $x \in E$.
Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ la décomposition de x dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i v(e_i) \\ &= v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= v(x) \end{aligned}$$

Donc $u = v$, d'où l'unicité.
L'existence est immédiate en posant $u : \begin{cases} E \to F \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{cases}$.

Montrons que u est Linéaire et convient :

$\forall i \in [\![1;n]\!],\ e_i = 1 \cdot e_i$ et cette décomposition est unique. Ainsi : $u(e_i) = f_i$: u Convient.

Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) f_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

u est alors Linéaire et Convient : Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

2.2 Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. (démo, dim finie puis quelconque)

Preuve :

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, forme Linéaire non-nulle avec E de dimension finie.

φ étant non-nulle : $\exists x_0 \in E,\ \varphi(x_0) = \lambda \neq 0$. Posons de plus $H = \text{Ker}(\varphi)$, ainsi que $\Delta = \text{Vect}(x_0)$.

Soit $x \in H \cap \Delta$. Alors $\varphi(x) = 0$ et $x = \mu x_0$, donc $\varphi(x) = \mu\varphi(x_0)\mu\lambda = 0 \Rightarrow\ \mu = 0 \Rightarrow\ x = 0$.

Par Analyse-Synthèse : Soit $x \in E$ tel que $x = x_H + \mu x_0$ avec $x_H \in H$.

Alors $\varphi(x) = \mu\varphi(x_0)$. Nous avons alors $\mu = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ (le dénominateur est non-nul).

Ainsi, $x_H = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$.

Synthèse : Posons alors pour tout $x \in E,\ \ \mu = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ et $x_H = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$:

- $x_H \in H : \varphi(x_H) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \varphi(x_0) = 0$
- $\mu x_0 \in \Delta$ de manière immédiate
- $x = x_H + \mu x_0$ par construction.

D'où $E = H \oplus \Delta : H = \text{Ker}(\varphi)$ est bien un Hyperplan.

2.3 L'image directe et l'image réciproque de sev par une application linéaire sont des sev. (démo, pas refait en spé)

Preuve :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-EV. Soient $E' \subset E$ et $F' \subset F$, deux Sous-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Posons $D = u(E')$ et $R = u^{-1}(F')$.

Nous avons bien $D \subset F$ et $R \subset E$, avec D et R non-vides.

Soient donc $x, y \in D,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\exists a, b \in E',\ \ x = u(a)$ et $y = u(b)$:

$\lambda u(a) + \mu u(b) = u(\lambda a + \mu b) \in D$ car E' est un Espace vectoriel : ce dernier est stable par combinaison linéaire.

De même, Soient $x, y \in R,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) \in F'$ car F' est un SEV. Ainsi, $\lambda x + \mu y \in u^{-1}(F')$.

Ainsi, D et R sont stables par Combinaison Linéaire et sont non-vides : Ce sont des SEV.

2.4 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. (démo)

Proposition

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{C} \end{array}\right)$, matrice par blocs triangulaire.

Alors, $\det(M) = \det(\mathbb{A}) \times \det(\mathbb{C})$

Preuve :

- Si $\mathbb{A}$ est Inversible :

  Alors, nous pouvons décomposer M comme le produit de matrices :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{C} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & I_p \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_q & \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{C} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbb{A} & & \mathbb{O} & \\ \hline & 1 & & \\ \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbb{O} & & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

  Le déterminant de M correspond alors au produit des déterminants des deux matrices précédentes (que l'on note M_1 et M_2 respectivement : $M = M_1 \times M_2$).

  Or, $\det(M_1) = \det(\mathbb{A})$ et $\det(M_2) = \det(\mathbb{C})$:
  En développant M_1 par rapport à la dernière colonne (ou ligne), nous avons le résultat par récurrence sur p.
  Pour M_2, il suffit de développer la première colonne afin d'avoir de même le résultat par récurrence sur q.

  Ainsi, si $\mathbb{A}$ est inversible : $\det(M) = \det(\mathbb{A}) \times \det(\mathbb{C})$.

- Si $\mathbb{A}$ n'est pas inversible, nous avons $\det(\mathbb{A}) = 0$ et le fait que ses colonnes forment une famille liée.
  Or, si les colonnes de $\mathbb{A}$ forment une famille liée, alors les colonnes de M sont liées, donc M est non-inversible : $\det(M) = 0$.

  Dans tous les cas : $\det(M) = \det(\mathbb{A}) \times \det(\mathbb{C})$

2.5 Existence et expression du polynôme interpolateur (avec les bonnes hypothèses). (démo)

Proposition Polynômes Interpolateurs de Lagrange
Soient $(a_0, \dots a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Alors il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que $\forall i \in [\![0;n]\!],\ P(a_i) = b_i$

Preuve :

Exhibons un tel polynôme : L'idée est de fabriquer un polynôme s'annulant sur tous les a_i sauf un.

Posons donc pour tout $i \in [\![0;n]\!],\ L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

Alors ce polynôme s'annule en chaque a_k avec $k \neq i$ (car un terme du produit est nul). De plus, $L_i(a_i) = 1$.

En multipliant L_i par b_i, nous obtenons donc un polynôme valant 0 sur chaque a_k avec $k \neq i$, et avec $L_i(a_i) = b_i$.

En sommant ces polynômes, nous posons $P : X \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot L_k(X)$.

Alors ce polynôme convient, car $\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(a_k) = \sum_{p=0}^{n} b_p \cdot L_p(a_k) = b_k$.

L'unicité de ce polynôme est garanti en posant $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$

Alors φ est une application linéaire. De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$. Or ce polynôme possède $n+1$ racines alors qu'il est de degré n, P est alors le polynôme nul.

φ est alors une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$. φ est alors une bijection, d'où l'unicité d'un tel polynôme.

2.6 Majoration de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (en dimension finie) par la somme des dimensions. (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$ E.V. Soient $E_1, \dots, E_k$, k-S.E.V de E de dimensions finies.

Alors $\dim\left(\sum_{p=1}^{k} E_p\right) \leqslant \sum_{p=1}^{k} \dim(E_p)$

Preuve :

Par récurrence sur le nombre de sous-espaces considérés :

Ceci est naturel pour une somme de deux SEV : D'après la formule de Graßmann, $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$. Or, $\dim(E_1 \cap E_2) \geqslant 0$, donc $\dim(E_1 + E_2) \leqslant \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Supposons alors le résultat vrai pour une somme de k Sous-espaces :

Alors $\dim\left(\sum_{p=1}^{k} E_p + E_{k+1}\right) = \dim\left(\sum_{p=1}^{k} E_p\right) + \dim(E_{k+1}) - \dim\left(\sum_{p=1}^{k} E_p \cap E_{k+1}\right) \leqslant \dim\left(\sum_{p=1}^{k} E_p\right) + \dim(E_{k+1})$.

Par hypothèse de récurrence, nous obtenons finalement $\dim\left(\sum_{p=1}^{k+1} E_p\right) \leqslant \sum_{p=1}^{k+1} \dim(E_p)$

3 Questions de cours - Groupe C

3.1 Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.(démo)

Preuve :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices.
Si A et B sont équivalentes, alors $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBQ^{-1}$.

Or, la multiplication par une matrice inversible n'affecte pas le rang :

Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(AM) = \dim(\text{Im}(AM)) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(A)$.
De même, $\text{Ker}(MA) = \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(MA)$ par théorème du rang. Dans tous les cas, $\text{rg}(A) = \text{rg}(AM) = \text{rg}(MA)$.

Donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(PBQ^{-1}) = \text{rg}(B)$.

Réciproquement, si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r$, montrons que toute matrice de rang r est équivalente à $J_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbb{0} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbb{0} & & \mathbb{0} \end{array}\right)$

Soit S, supplémentaire de $\text{Ker}(A)$. Alors $E = S \oplus \text{Ker}(A)$, et $\text{rg}(A) = \dim(S) = r$. Soit u, l'application linéaire sous-jacente à A.

Soit $\mathcal{B}_S = (e_1, \ldots, e_r)$, base de S et $\mathcal{B}_K = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$, base de $\text{Ker}(A)$. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_K$ est une base de E.

Posons donc $\mathcal{F} = (u(e_1), \ldots, u(e_r))$. Montrons que $\mathcal{F}$ est une famille libre :
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_r u(e_r) = 0$.
Alors $u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r) = 0$ par linéarité de u. Donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in S \cap \text{Ker}(A) = \{0\}$.

Or, les e_i sont libres (forment une base de S), donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, d'où la liberté de la famille $\mathcal{F}$.

Nous pouvons alors compléter $\mathcal{F}$ en base de F (avec $u \in \mathcal{L}(E, F)$) avec des vecteurs $f_{r+1}, \ldots, f_p$. Dès lors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\overline{\mathcal{F}}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_r) & u(e_{r+1}) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 = u(e_1) \\ f_2 = u(e_2) \\ \vdots \\ f_r = u(e_r) \\ f_{r+1} \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

Donc A est équivalente à J_r : De même, B est équivalente à J_r, donc A est équivalente à B par transitivité.

3.2 Formule de changement de base pour les matrices (démo, pas refait en spé)

Proposition Formule de Changement de Base (Version Matricielle)

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-EV. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, deux bases de E, soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{B}_2}(u) = P_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1,\mathcal{B}_1}(u) \times P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$

(Avec $P_{A,B}$, matrice de Passage)

Preuve :

Par définition d'une matrice de passage : $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E)$ et $P_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_1}{}^{-1}(\mathrm{Id}_F)$.

Donc $P_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1,\mathcal{B}_1}(u) \times P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1,\mathcal{B}_2}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{B}_2}(u)$

4 Exercices - Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Nilpotente. Posons p l'indice de nilpotence de u. Il suffit alors de montrer que $p \leqslant n$:

Par définition de l'indice de nilpotence : $u^{p-1} \neq 0$ mais $u^p = 0$. Ainsi, posons $x_0 \in E$, tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

Montrons que la famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre : Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$$

Alors en composant par u^{p-1}, il vient que $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) + u^p(x_0) + \dots + u^{2p-2}(x_0) = 0$. Or, nous avons $u^p(x_0) = 0$. Nous obtenons donc $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, et par définition de x_0, nous obtenons $\lambda_0 = 0$.

Il suffit d'itérer le processus sur l'égalité de départ en baissant la puissance de u (Composer par u^{p-2}, u^{p-3},...).

Ceci donne finalement $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$, d'où la liberté de la famille.
Or, si cette famille est libre, son cardinal est inférieur ou égal à n, donc $p \leqslant n$, $u^n = 0$.

Question 2.a Si $u^{n-1} \neq 0$, posons $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. D'après ce qui précède, la famille $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0$ est libre, et est donc une base de E car est de cardinal n.

Or, la matrice de u dans cette base donne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} u(x_0) & u(u(x_0)) & \cdots & \cdots & u(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_0 \\ u(x_0) \\ \\ \\ u^{n-1}(x_0) \end{array} \end{array}$$

Question 2.b Si l'équation $X^2 = A$ admettait des solutions, alors $X^{2n} = A^n = 0$, mais $X^{2n-2} = A^{n-1} \neq 0$. Ainsi, l'indice de nilpotence de X serait compris entre $2n-1$ et $2n$, ce qui n'est pas possible car $2n-2 \geqslant n$ avec $n \geqslant 2$. Or, d'après la première question, si X est nilpotente, alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

L'équation $X^2 = A$ n'admet pas de solutions dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

4.2 Exercice 2

Nous avons directement (i) $\Rightarrow$ (iv), (v).

Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$:

Nous avons les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ ainsi que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ car si $f(x) = 0$, alors $f(f(x)) = 0$ (f est linéaire).
De plus, si $y = f^2(x)$, en particulier, $y = f(z)$ avec $z = f(x)$.

Or, si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x) = 0$. Il y a deux possibilités :

- Si $f(x) = 0$, $x \in \mathrm{Ker}(f)$
- Si $f(f(x)) = 0$ mais que $f(x) \neq 0$. Alors $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$: Ceci est absurde, donc $f(x) = 0$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ par double inclusion.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $\exists x \in E,\ y = f(x)$. Or, $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Donc $\exists!(x_k, x_i) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f),\ x = x_k + x_i$.

Nous avons donc $y = f(x) = f(x_k + x_i) = f(x_i)$ et $x_i \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists z \in E,\ y = f(x) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Remarquons au passage que (ii) et (iii) sont équivalentes :

- Si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, Montrons que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$, ce qui permet d'affirmer l'égalité entre ces espaces car $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$:
  D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) + \mathrm{rg}(f^2)$ (f^2 est une application de E dans $\mathrm{Im}(f^2)$).

  Donc $\mathrm{rg}(f^2) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f)$. D'où l'égalité entre les espaces.
- Idem, si $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$, nous avons $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f^2) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$.

Montrons que (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) : Si $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

Nous avons par la formule de Graßmann : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f))$.
Or, le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Ainsi, (v) $\Rightarrow$ (iv) et (v) + (iv) $\Rightarrow$ (i).

Montrons finalement que (ii) $\Rightarrow$ (iv), Supposons que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $f(x) = 0$ et $\exists z \in E,\ f(z) = x \Rightarrow f^2(z) = 0$.
Or, $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(z) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Finalement, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iv).
(i) $\Rightarrow$ (v) et (v) $\Rightarrow$ (iv). Avec (v) et (iv) $\Rightarrow$ (i).

Nous avons donc (i) $\iff$ (iv) $\iff$ (v). De plus, (i) $\Rightarrow$ (ii), avec (ii) $\iff$ (iii), et (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\iff$ (i)

D'où (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v)

4.3 Exercice 3

Soient F et G deux sous esapces vectoriels.
Montrons que l'union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace si et seulement si l'un des deux sous-espaces est inclus dans l'autre.
($F \cup G$ est un sev $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$)

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Hypothèse : $F \cup G$ est un sev et $F \not\subset G$.
Montrons donc que $G \subset F$.
Si $F \not\subset G$, alors $\exists x_0 \in F, x_0 \notin G$.
Prenons $x_1 \in G$. Alors, $x_0 + x_1 \in F \cup G$. Dans ce cas, $x_0 + x_1 \in F$ ou $x_0 + x_1 \in G$.
Supposons $x_0 + x_1 \in G$. Nous avons donc $x_1 \in G$, auquel cas $x_0 + x_1 - x_1 \in G$, car G est un SEV, donc $x_0 \in G$. Or, par définition, $x_0 \notin G$. On aboutit donc à une absurdité.
Donc, $x_1 \in F$. Ainsi, $G \subset F$.

4.4 Exercice 4

Question 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que si, pour tout $x \in E$, x et $u(x)$ sont colinéaires, alors u est une Homothétie.
Par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe λ_x tel que $u(x) = \lambda_x u(x)$. Montrons que u est une homothétie, i.e : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout x, $u(x) = \lambda x$:

Soient x et $y \in E$. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$:

Cas 1 : x et y sont libres :

u étant linéaire : $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. De plus, $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$.
Par unicité des coordonées sur une famille libre, $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. En particulier : $\lambda_x = \lambda_y$.

Cas 2 : x et y sont liés, non-nuls :

Il existe alors $\alpha \neq 0$ tel que $y = \alpha x$.
D'une part : $u(y) = \lambda_y y$, d'autre part, u étant linéaire, $u(y) = u(\alpha x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$.
Donc $\lambda_x = \lambda_y$ car $y \neq 0$.

Par conséquent, il existe λ tel que pour tout $x \neq 0$, $u(x) = \lambda x$. Ceci est aussi valable pour $x = 0$, car $u(0) = 0$. Finalement, pour tout x, $u(x) = \lambda x$: u est une Homothétie.

Question 2. Soit f, endomorphisme commutant avec tout endomorphisme. Montrons que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires :

Soit $x \in E$, posons p_x, une projection sur Vect(x). Alors par hypothèse, $f \circ p_x = p_x \circ f$. Donc $f(p_x(x)) = f(x)$ et $f(p_x(x)) = p_x(f(x))$.

Ainsi, $f(x) = p_x(f(x)) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Im}(p_x) = \mathrm{Vect}(x)$: x et $f(x)$ sont colinéaires, ainsi f est une Homothétie.

Question 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, matrice permutant avec toute autre matrice.

Étudions le produit de A par les matrices élémentaires $E_{i_j} = (\delta_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]^2}$.

Nous avons $A \times E_{i,j} = E_{i,j} \times A$.
Nous obtenons par l'égalité des coefficients (i,i) que $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Avec l'égalité des coefficients (i,j), nous obtenons que $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Donc A est une homothétie. Le fait que les homothéties commutent avec toutes les matrices est immédiat.

4.5 Exercice 5

Question 1. Si ces réels ne sont pas distincts, il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. Auquel cas, nous avons deux lignes identiques dans la matrice de Vandermonde, ce qui donne un déterminant nul.

Question 2. Nous avons $V(x_1,\dots,x_{n-1},X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & {x_{n-1}}^2 & \cdots & {x_{n-1}}^{n-1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^{n-1} \end{vmatrix}$

En développant par rapport à la dernière ligne, nous avons bien que $V(x_1,\dots,x_{n-1},X)$ est un polynôme en X de degré $n-1$: $P(X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} X^{j-1} \times \Delta_{n,j}$ avec Δ_{n_i}, le mineur obtenu en barrant la n-ième ligne et i-ème colonne.

Question 3. Le coefficient dominant de P s'obtient par le développement selon la dernière ligne : Ce coefficient est obtenu en barrant la dernière ligne et la dernière colonne. Auquel cas, nous obtenons le mineur $\Delta_{n,n}$:

$$\Delta_{n,n} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-2} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & {x_{n-1}}^2 & \cdots & {x_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix} = V(x_1,\dots,x_{n-1})$$

Question 4. Les racines de P s'obtiennent en remarquant que lorsque $X = x_i$ pour un certain x_i, nous avons deux lignes identiques, donc un déterminant nul (non inversibilité de la matrice dûe à ces deux lignes liées). Ainsi, nous obtenons bien $n-1$ racines pour P, polynôme de degré $n-1$.

P s'exprime alors comme : $P = V(x_1,\dots,x_{n-1},X) = \Delta_{n,n} \times \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i) \quad = \quad V(x_1,\dots,x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$

Question 5. Ainsi, $V(x_1,\dots,x_n) = P(x_n) = V(x_1,\dots,x_{n-1}) \times \prod_{i=1}^{n}(x_n - x_i)$.

On démontre aisément par récurrence que l'expression générale de $V(x_1,\dots,x_n)$ est $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$

Question 6. Une expression de $V(x_1,\dots,x_n)$ par des opérations élémentaires sur les colonnes est possible :

Commençons par itérer l'opération $C_i \leftarrow C_i - x_1 C_{i-1}$ en débutant à la n-ième colonne et en terminant à la colonne 2 :

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & {x_{n-1}}^2 & \cdots & {x_{n-1}}^{n-1} \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & {x_2}^2 - x_2 x_1 & \cdots & {x_2}^{n-1} - {x_2}^{n-2} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & {x_n}^2 - x_n x_1 & \cdots & {x_n}^{n-1} - {x_n}^{n-2} x_1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne :

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & {x_2}^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-2} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_3}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix}$$

D'où la relation de récurrence précédente.

Question 7. Soient $A = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $B = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{K}^n$.

Posons $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n \\ P \mapsto (P(a_1),\dots,P(a_n)) \end{cases}$, Φ est une application linéaire.

L'existence d'un polynôme interpolateur entre A et B revient à montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{K}^n$, donc que Φ est inversible (de déterminant non nul).

Remarquons que la matrice de Φ dans les bases canoniques $\mathcal{A} = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(\Phi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \Phi(1) & \Phi(X) & \Phi(X^2) & \cdots & \Phi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Nous retombons sur la matrice de Vandermonde, d'où le résultat sur l'existence d'un polynôme interpolateur.

5 Exercices - Groupe B et C

5.1 Exercice 6

Nous avons l'inégalité $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.

Supposons que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.

Nous avons de plus $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \geqslant \dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g))$ par la formule de Graßmann.

Or, $\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)) \geqslant \dim(\mathrm{Im}(f+g)) = \mathrm{rg}(f+g)$ par inclusion d'espace :
Si $\exists x \in E,\ \ y = (f+g)(x)$, alors $\exists x_f, x_g \in E,\ \ y = f(x_f)+g(x_g)$ (avec $x_f = x_g = x$), donc $y \in \mathrm{Im}(f+g) \Rightarrow\ y \in \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.

Finalement, $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \geqslant \dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)) \geqslant \mathrm{rg}(f+g)$. Donc toutes ces quantités sont égales.

En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Im}(g))$, par la formule de Graßmann, $\dim(\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)) = 0 \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g) = \{0\}$

Pour l'égalité $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g) = E$, nous avons l'inclusion $\mathrm{Ker}(f)+\ker(g) \subset E$, montrons l'égalité des dimensions :

Posons $\dim(E) = n$. Par la formule de Graßmann (oui, encore), $\dim(\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g))$.

Appliquons le théorème du rang à f, g et $f+g$:

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathrm{Ker}(f+g))+\mathrm{rg}(f+g) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(g))+\mathrm{rg}(g) \end{aligned}$$

Donc $n-2n = -n = \dim(\mathrm{Ker}(f+g) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \underbrace{(\mathrm{rg}(f+g)-\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g))}_{=0}$

Ceci se réécrit comme $n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f+g))$

Or, remarquons que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$, donc

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)) &\leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f+g) \\ \dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)) &\geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f+g)) \\ \dim\left(\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)\right) &\geqslant n \end{aligned}$$

D'où $E = \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$.

Réciproquement, si $\begin{cases} \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g) = \{0\} \\ \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g) = E \end{cases}$, montrons que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$:

Il suffit de remarquer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ car si $y \in \mathrm{Im}(f),\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.
Or, $E = \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$, donc $x = x_f + x_g$ pour $x_f \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x_g \in \mathrm{Ker}(g)$: $y = f(x) = f(x_g) = f(x_g)+g(x_g) \in \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$

Ceci reste vrai pour g par symétrie des rôles, donc la somme $\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f+g) \Rightarrow\ \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f+g)$

5.2 Exercice 7

Note:-

Erreur d'énoncé! Il s'agit de montrer l'existence de $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\underline{g \circ f = 0}$ et $f + g \in GL(E)$ ssi $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$: Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

Il existe alors $z \in E$, $f(z) = x$, et $f(x) = 0$.
Nous avons par hypothèse $g \circ f = 0$, donc $g(f(z)) = g(x) = 0$: $x \in \mathrm{Ker}(g)$.

Or, $f + g$ est inversible, donc $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Nous avons alors $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ d'après le théorème du rang.

Ainsi, nous avons l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \subset E$ et l'égalité des dimensions donne alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Réciproquement, si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, posons $g = \begin{cases} \tilde{0} \text{ sur } \mathrm{Im}(f) \\ I_d \text{ sur } \mathrm{Ker}(f) \end{cases}$ (la projection sur $\mathrm{Ker}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$)

Alors, nous avons bien $g \circ f = 0$ et $f + g$ inversible : Soit $y \in E$, alors $y = y_k + y_i$ avec $y_k \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y_i \in \mathrm{Im}(f)$.

Remarquons que $f_{|\mathrm{Im}(f)}$ est une bijection, car si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $x = 0 \Rightarrow f_{|\mathrm{Im}(f)}$ bijective car linéaire en dimension finie.

Posons $x = f^{-1}(y_i) + y_k$ (Notons que $f^{-1}(y_i) \in \mathrm{Im}(f)$).

Alors $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(f^{-1}(y_i) + y_k) + g(f^{-1}(y_i) + y_k) = y_i + y_k = y$.

Nous avons alors un unique antécédent de tout $y \in E$ par l'application $f + g$: $f + g$ est inversible.

5.3 Exercice 8

Posons $\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M^t \end{cases}$ l'endomorphisme de transposition.

Rappelons nous que toute matrice s'exprime de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et antisymétrique : Ce résultat se réécrit comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Posons alors $\mathcal{B}$, une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ adaptée à cette décomposition (donc une union de bases de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$). La matrice de φ s'exprime aisément dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} \varphi(S_1) & \cdots & \varphi(S_p) & \varphi(A_1) & \cdots & \varphi(A_q) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ \\ S_p \\ A_1 \\ \\ A_q \end{array} \end{array}$$

Il suffit alors d'estimer $p = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))$ et $q = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$:

Nous avons pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ le choix de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ coefficients : Les coefficients diagonaux et au-dessus de la diagonale (les coefficients sous la diagonale étant fixés par symétrie de la matrice). Nous avons alors une base comportant $\dfrac{n(n+1)}{2} = p$ éléments.

Idem, pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, nous avons le choix des coefficients sur-diagonaux, mais plus des coefficients diagonaux (ceux-ci valent toujours 0 pour une matrice antisymétrique). Soit $q = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Or, la Trace et le déterminant sont des invariants de similitude (car $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(A)$ et $\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(P)^{-1}\det(A) = \det(A)$).

Ainsi, $\mathrm{Tr}(\varphi) = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$, et $\det(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

5.4 Exercice 9

Si $A^2 = \mathbb{0}_n$, alors $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$. Soit donc S, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A)$. Alors $E = S \oplus \mathrm{Ker}(A)$.

Posons $(e_1, \dots, e_s)$, base de S.
Remarquons que si $A^2 = \mathbb{0}_n$, alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \frac{n}{2}$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant \frac{n}{2} \Rightarrow \dim(S) \leqslant \frac{n}{2}$.

Une formulation alternative du théorème du rang consiste à remarquer que $A_{|S}$ est une bijection de S dans $\mathrm{Im}(A)$, Ainsi, $(A(e_1), \dots, A(e_s))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(A)$ (car est une base de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$).

Complétons alors cette famille libre en base de $\mathrm{Ker}(A)$ (par le théorème de la base incomplète). Appelons $\mathcal{F}$ cette base de $\ker(A)$.

Alors, $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup (e_1, \dots, e_s)$ est une base de E (concaténation de bases). Dès lors, A est semblable à la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{0} & I_r \\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{array}\right)$$

Réciproquement, si A est semblable à une matrice de cette forme, calculons explicitement A^2 :

$(A^2)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{i,k} A_{k,j}$. Les seuls coefficients non nuls de A sont les coefficients $A_{1,n-r}, A_{2,n-r+1}, \dots$.
Ainsi, les seuls coefficients pouvant potentiellement être non-nuls sont les coefficients avec $i \in [\![1;r]\!]$ et $j \in [\![n-r;n]\!]$.

Soit donc $i \in [\![1;r]\!]$ et $j \in [\![n-r;n]\!]$. $(A^2)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{i,k} A_{k,j}$.
Or, avec $r \leqslant \frac{n}{2}$, si $k \in [\![n-r;r]\!]$, $k \notin [\![1;r]\!]$. Ainsi, tous les termes de cette somme sont nuls, $A^2 = \mathbb{0}_n$

5.5 Exercice 10

Question 1. Cette inégalité est naturelle, posons u, v, endomorphismes associés à A et B respectivement.
Nous avons $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$: Si $y \in \mathrm{Im}(u+v)$, alors il existe $x \in E$, $y = f(x) + g(x)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Dès lors, $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ d'après la formule de Graßmann.

Question 2. Tout comme pour la deuxième inégalité triangulaire, il suffit de s'intéresser à $\mathrm{rg}(u+v-v)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u+v-v) &\leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(v) \quad \text{D'après Q.1 + } \mathrm{rg}(-v) = \mathrm{rg}(v) \\ \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) &\leqslant \mathrm{rg}(u+v) \end{aligned}$$

Et par symétrie des rôles (il suffit de refaire ce même calcul avec $\mathrm{rg}(v+u-u)$), nous obtenons que $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$ et $\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Donc nous avons bien $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$

5.6 Exercice 11

Intéressons nous à $\tilde{u} = u_{|\text{Ker}(u+v)}$
Nous avons d'après le théorème du rang appliqué à $\tilde{u}$ que $\dim(\text{Ker}(u+v)) = \dim(\text{Ker}(\tilde{u})) + \text{rg}(\tilde{u})$

Évaluons $\text{Ker}(\tilde{u})$: Soit $x \in \text{Ker}(\tilde{u})$, alors $x \in \text{Ker}(u)$ et $x \in \text{Ker}(u+v)$, donc $u(x)+v(x) = 0$ et $u(x) = 0 \Rightarrow v(x) = 0$.

Ainsi, $x \in \text{Ker}(\tilde{u}) \Rightarrow x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ et si $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$, nous avons directement $\tilde{u}(x) = 0$, donc $\text{Ker}(\tilde{u}) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.

Montrons enfin que $\text{Im}(\tilde{u}) \subset \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$: Soit $y \in \text{Im}(\tilde{u})$, alors $\exists x \in \text{Ker}(u+v),\ y = \tilde{u}(x) = u(x)$.

Ainsi, x est tel que $u(x)+v(x) = 0 \Rightarrow u(x) = y = -v(x)$, nous avons alors $y \in \text{Im}(u)$ et $\in \text{Im}(v)$, donc $\text{Im}(\tilde{u}) \subset \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$.

Ainsi, $\text{rg}(\tilde{u}) \leqslant \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(u+v)) \leqslant \dim(\text{Ker}(\tilde{u})) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v))$

5.7 Exercice 12

Question 1. Soit $k \in \mathbb{N}$, Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$L_k(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a_k) = \lambda P(a_k) + \mu Q(a_k) = \lambda L_k(P) + \mu L_k(Q)$

Question 2. Donnons le rang de cette famille d'endomorphismes (i.e la dimension de l'espace engendré par cette famille) :

Montrons que cette famille engendre l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$:

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$. Alors φ est déterminée de manière unique par l'image de la base $(1, X, X^2 \ldots, X^n)$.

Notons $(b_0, \ldots, b_n) = (\varphi(1), \ldots, \varphi(X^n))$.

Or, pour les familles $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0;n]\!],\ P(a_i) = b_i$ (résultat classique!). Or, les $P(a_i)$ sont les images du vecteur P par les applications $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Ainsi, pour toute forme linéaire φ, l'image d'un vecteur Q s'écrit sous la forme $\lambda_0 b_0 + \cdots + \lambda_n b_n = \lambda_0 P(a_0) + \cdots + \lambda_n P(a_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_k(P)$.

D'où : $\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}),\ \exists (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_k$: La famille $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ engendre $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ (et le résultat sur l'existence d'un polynôme annulateur affirme également que l'espace engendré est inclus dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

Donc $\text{rg}\left((L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}\right)$

6 Exercices - Groupe C

6.1 Exercice 13

Procédons par récurrence. Montrons premièrement le résultat pour $n = 2$:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de trace nulle.

Remarquons que A n'est pas la matrice d'une homothétie (ou alors est l'endomorphisme nul, auquel cas la propriété est vraie).

Dès lors, $\exists X \in E,\ X$ et AX ne soient pas liés (c.f Exercice 4). Alors, X et AX forment une base ($= \mathcal{B}$) de E car E est de dimension $n = 2$.

A est alors semblable à, $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & g \end{pmatrix}$, et $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Rightarrow\ g = 0 \Rightarrow\ A_{\mathcal{B}}$ possède une diagonale nulle. A est alors semblable à une matrice de diagonale nulle.

Supposons alors cette propriété vérifiée pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que cette propriété reste vraie pour $n+1$: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.

Procédons de la même manière. Si A est une homothétie, alors A est l'endomorphisme nul, car sa trace est nulle, donc la propriété est vraie.

Sinon, A n'est pas une homothétie, et il existe $X \in E,\ X$ et AX ne soient pas liés. Nous pouvons donc compléter cette famille libre en base $\mathcal{B} = (e_1, A(e_1), e_3, \ldots, e_{n+1})$ de E ($e_1 = X$).

A est alors semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{L} \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A} \\ 0 & \end{array}\right)$.

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur $\mathbb{A}$ et de trouver une base de $\mathrm{Vect}(A(e_1), e_3, \ldots, e_{n+1})$ dans laquelle $\mathbb{A}$ possède une diagonale nulle.

Auquel cas, par concaténation des bases (on concatène e_1 avec cette nouvelle base), nous obtenons une base de E dans laquelle A est de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \mathbb{L} & \\ \hline & 0 & & \\ \mathbb{C} & & \ddots & \\ & & & 0 \end{array}\right)$

6.2 Exercice 14

Montrons premièrement que A^2 est de rang n :

Appliquons le théorème du rang à $A_{|\operatorname{Im}(A)}$: $\operatorname{rg}(A) = 2n = \dim(\operatorname{Ker}(A_{|\operatorname{Im}(A)})) + \operatorname{rg}(A_{\operatorname{Im}(A)})$.

Or, $\operatorname{Ker}(A_{|\operatorname{Im}(A)}) \subset \operatorname{Ker}(A)$ et $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = n$ par théorème du rang appliqué à A. Ainsi, $\dim(\operatorname{Ker}(A_{|\operatorname{Im}(A)})) \leqslant n$.

Donc $2n \leqslant n + \operatorname{rg}(A_{|\operatorname{Im}(A)}) \Rightarrow\ n \leqslant \operatorname{rg}(A_{|\operatorname{Im}(A)})$.

Or, $\operatorname{Im}(A_{|\operatorname{Im}(A)}) = \operatorname{Im}(A^2)$: Si $y \in \operatorname{Im}(A_{\operatorname{Im}(A)})$, alors $\exists X \in \operatorname{Im}(A),\ \ y = AX$ et $\exists Z \in E,\ \ X = AZ \Rightarrow\ Y = A^2 Z \Rightarrow\ A \in \operatorname{Im}(A^2)$ et idem pour la réciproque.

Donc $\operatorname{rg}(A^2) \geqslant n$. Nous avons de plus $\operatorname{Im}(A^2) \subset \operatorname{Ker}(A)$, or $\operatorname{Ker}(A)$ est de dimension n, donc $rg(A^2) \leqslant n \Rightarrow\ \operatorname{rg}(A^2) = n$
Posons alors S_1 et S_2, deux S.E.V tels que $E = S_1 \oplus \operatorname{Ker}(A) = S_2 \oplus \operatorname{Ker}(A^2)$.

Posons $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_{2n})$ base de S_1. Complétons cette famille libre avec $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$: base de $\operatorname{Ker}(A)$.

Or, A^2 est de rang n, donc nous pouvons supposer que les (e_i) sont arrangés tels que $u(e_1), \dots, u(e_n)$ forment une base de S_2. Auquel cas, dans cette base, la matrice A est bien semblable à :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \hline I_n & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & I_n & \mathbb{0} \end{array}\right)$$

6.3 Exercice 15

Remarquons que $\Phi : P \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$ est une forme linéaire.

Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, posons $\varphi_i : P \mapsto P(x_i)$.

(c.f exercice 12), cette famille forme une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$. Ainsi, $\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n,\ \ \Phi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k$.

D'où l'existence de $n+1$ réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n,\ \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(x_k)$.

Proposons néanmoins une manière alternative de montrer que les φ_i forment une base du dual : Montrons qu'il s'agit d'une famille libre :

Soient $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \mu_k \varphi_k = 0$.

Posons alors $P_k = \prod_{i \neq k} (X - x_i)$. Nous avons alors $\varphi_i(P_k) = 0$ si $i \neq k$. Ainsi, en appliquant la relation de liaison entre les φ à un P_k, nous obtenons $\mu_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) = 0 \Rightarrow\ \mu_k = 0$.

Il suffit de répéter cette opération pour avoir la liberté de la famille des (φ_i), et cette famille comporte $(n+1)$ éléments, ce qui est la dimension du dual de $\mathbb{R}_n[X]$. Les φ forment donc une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$

6.4 Exercice 17

A est bien un SEV de $\mathscr{L}(E)$

De plus $x \in A \iff \mathrm{Im}(x \circ u) \subset \mathrm{Ker}(v)$

Or $\mathrm{Im}(x \circ u) = x(\mathrm{Im}(u))$

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$

D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ tel que $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ forme une base de E

De même, soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(v)$

Que l'on peut également compléter en une base de E. On a alors $B_2 = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base de E.

On en déduit alors que $x \in A \iff \forall k \in [\![1;n]\!],\ x(e_k) \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x(e_1) & \cdots & x(e_r) & x(e_{r+1}) & \cdots & x(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X} & \mathbb{X} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{X} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_p \\ f_{p+1} \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

D'où $\dim(A) = n^2 - r(n-p) = n^2 - \mathrm{rg}(u)\,\mathrm{rg}(v)$

6.5 Exercice 18

Question 1. Non, si $n = 2$, nous avons $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2$

On généralise ce contre-exemple à n'importe-quel ordre avec les matrices ne possédant qu'un seul coefficient non-nul en bas à gauche et en haut à droite. Leur somme donne une matrice non nilpotente.

Question 2. La trace étant linéaire, il suffit de montrer le résultat pour les matrices nilpotentes (car si $A \in \mathcal{N}$, A est alors combinaison linéaire de matrices nilpotentes).

Montrons alors qu'une matrice nilpotente est de trace nulle (montrons que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte) : Procédons par récurrence.

Le résultat est évident pout $n = 1$.
Supposons que toute matrice nilpotente en dimension n est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Soit $x \neq 0 \in \mathrm{Ker}(A)$ (existe car A nilpotente). Alors nous pouvons compléter la famille (x) en base de E.

Dès lors, A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{L} \\ \hline \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{C} \end{array}\right)$. Or, $A^k = 0 \Rightarrow \mathbb{C}^k = 0$ (par un calcul explicite du bloc inférieur droit) avec k l'indice de nilpotence de A.

Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathbb{C}$ pour obtenir une base de E telle que A soit semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. D'où le résultat.

Dès lors, toute matrice nilpotente est de trace nulle, donc $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ par linéarité de la trace.

Question 3. (c.f Exercice 13), toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle. Il suffit alors de noter T^+ la matrice composée des coefficients sur-diagonaux et T^- la matrice des coefficients sous-diagonaux.

Soit donc $A \in \mathcal{H}$. Alors posons Δ de diagonale nulle telle qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A = P\Delta P^{-1}$.
Auquel cas, $\Delta = T^+ + T^-$ et ces matrices sont nilpotentes (car triangulaires strictes). Ainsi, $A = P(T^+ + T^-)P^{-1} = PT^+P^{-1} + PT^-P^{-1}$, et les matrices PT^+P^{-1}, PT^-P^{-1} sont toujours nilpotentes car si $M^k = 0$ avec $N = QMQ^{-1}$, alors $N^k = QM^kQ^{-1} = 0$.

Finalement, nous avons bien $\mathcal{N} = \mathcal{H}$

6.6 Exercice 19

Montrons le résultat par récurrence sur n :

Initliation : c'est évident

Hérédité :

Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n. Soient $0<t_1<...<t_n$ des réels.

On considère la fonction $f : T \mapsto \begin{vmatrix} t_1^{\alpha_1} & t_1^{\alpha_2} & \cdots & t_1^{\alpha_n} \\ t_2^{\alpha_1} & t_2^{\alpha_2} & \cdots & t_2^{\alpha_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{n-1}^{\alpha_1} & t_{n-1}^{\alpha_2} & \cdots & t_{n-1}^{\alpha_n} \\ T^{\alpha_1} & T^{\alpha_2} & \cdots & T^{\alpha_n} \end{vmatrix}$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient alors l'existence de n réels $a_1, \dots, a_n$ qui représentent les mineurs tel que : $f(t) = a_1 T^{\alpha_1} + ... + a_n T^{\alpha_n}$.

D'après H.R, $a_n>0$. De plus d'après le résultat (admis pour l'instant), f admet au plus $n-1$ zéros. Or $f(t_1) = \cdots = f(t_{n-1}) = 0$ (deux lignes égales dans le déterminant). De plus $f \to +\infty$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit alors que f est strictement positive sur $]t_{n-1};+\infty[$ car f est continue.

D'où le résultat par récurrence.

6.7 Exercice 20

Note:-

Erreur d'énoncé! On suppose $\underline{AB-BA}$ inversible.

On pose $M = (A+iB)$

$$\begin{aligned} M\overline{M} &= (A+iB)(A-iB) \\ &= A^2 - iAB + iBA + B^2 \\ &= (\sqrt{3}-i)(AB-BA) \end{aligned}$$

Or $\sqrt{3}-i = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}$

Donc $M\overline{M} = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}(AB-BA)$

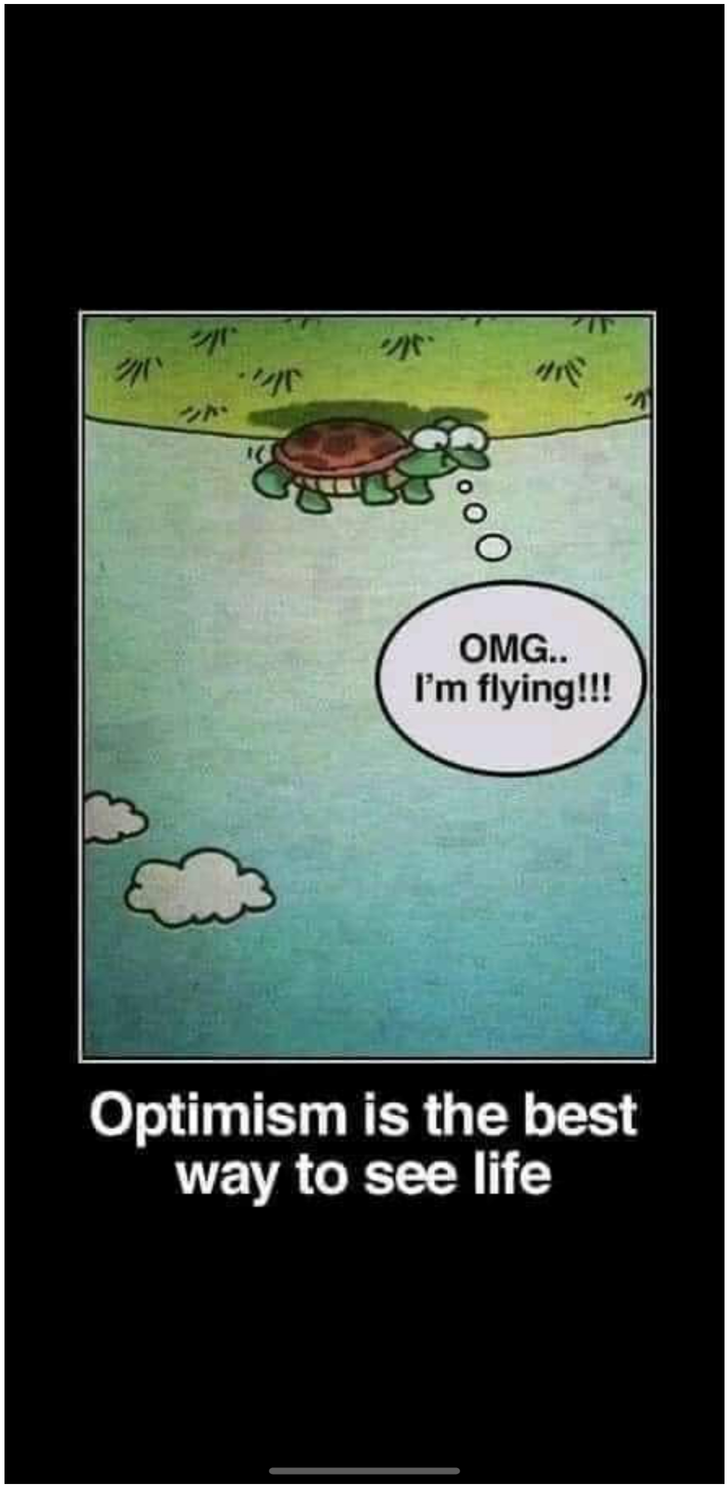
On en déduit alors en calculant le déterminant de $M\overline{M}$ de deux manière différente :

D'une part : $\det M\overline{M} = |\det(M)|^2$

D'autre part : $\det M\overline{M} = 2^n e^{\frac{-in\pi}{6}} \det(AB-BA)$

Comme $AB-BA$ est inversible alors $\det(AB-BA) \neq 0$

Et $\det M\overline{M}$ est un réel donc on en déduit que $2^n e^{\frac{-in\pi}{6}}$ doit l'être aussi et donc que n est un multiple de 6


OMG..
I'm flying!!!
Optimism is the best
way to see life