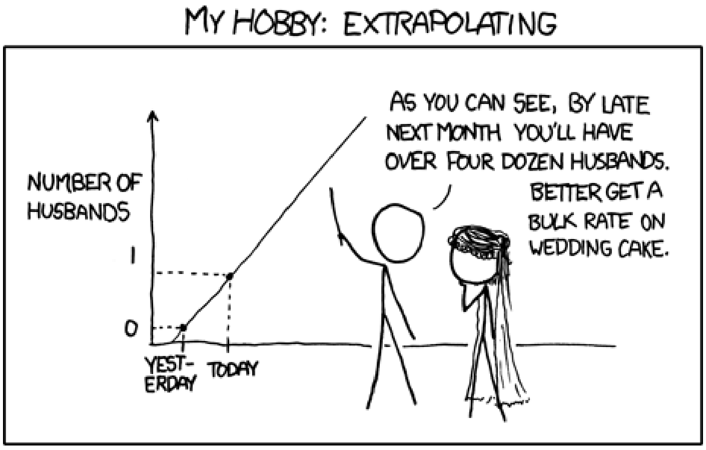
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 9



Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites.

Définition - Limite d'une application

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f : \begin{array}{ll} A & \to F \\ \vec{x} & \mapsto \vec{f(x)} \end{array}$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On dit que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists r > 0, \forall x \in B_f(a, r) \cap A, ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon \\ \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f : \begin{array}{ll} A & \to F \\ \vec{x} & \mapsto \vec{f(x)} \end{array}$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

DÉMONSTRATION.

Définition - Continuité d'une application

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

(1) Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(2) On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Soit $a \in A$
Alors :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$$

DÉMONSTRATION.

A.2 Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse.

Définition - Application lipschitzienne

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

(1) Soit $K \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est K-lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$

(2) On dit que f est lipschitzienne si $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-lipschitzienne.

Proposition

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.
Alors

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f\ \mathcal{C}^0 \text{ sur } A$$

⚠ La réciproque est fausse !!

En effet, en prenant la fonction $f : x \mapsto x^2$, qui est bien $\mathbb{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ mais s'il existait un tel $K \in \mathbb{R}_+$:

on aurait pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |(x+1)^2 - x^2| \leq K$, i.e $|2x+1| \leq K$.

ce qui est absurde car on ne peut borner cette quantité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration.

A.3 Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordre supérieurs.

Définition - Application dérivable

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

(1) On dit que f est dérivable en a si :

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

On note $f'(a)$ cette limite.

(2) On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout point $a \in I$.

Proposition - Une équivalence pratique

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

On suppose f $\mathcal{C}^0$ sur I. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1 \text{ en } a.$$

Dans ce cas, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

⚠ FAUX AUX ORDRES SUPÉRIEURS!!

Il suffit de prendre la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui n'est pas 2 fois dérivable en 0 mais admet un DL_2 en ce point.

DÉMONSTRATION.

A.4 Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

La fonction
$$f : x \mapsto x^2 \sin(\tfrac{1}{x})$$
est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas $\mathcal{C}^1$.

DÉMONSTRATION.

A.5 Somme de Riemann et théorème associé (proposer un exemple)

Définition - Somme de Riemann

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application **continue ou continue par morceaux**.
Soient $[a;b] \subset I$ et $n \in \mathbb{N}$.

(1) On appelle Somme de Riemann (à gauche) la quantité :
$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

(2) Généralement, on aura $a = 0$ et $b = 1$, d'où
$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :
$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

EXEMPLE.

A.6 Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq. $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$$

DÉMONSTRATION.

Théorème - Égalité des Accroissements Finis

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]a;b[$.
Alors :

$$\text{Il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉMONSTRATION.

Théorème - Inégalité des Accroissements Finis

(mm notations). On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+$ tels que $m \leq f' \leq M$.
Alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \geq y \Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$$

DÉMONSTRATION.

A.7 Formules de Taylor (Young + reste intégral), démo uniquement de la formule reste intégral

Proposition - Formule de Taylor-Young

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, alors : $\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|b-a|^n)$$

Proposition - Formule de Taylor Reste Intégral

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors : $\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

DÉMONSTRATION.

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

Définition - Point adhérent à une partie

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$.
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\forall r > 0, B_f(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

Proposition - Caractérisation séquentielle d'un point adhérent à une partie

(mm notations)
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a$$

DÉMONSTRATION.

B.2 Dérivée de $L(f)$ où L est une application linéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie. Soit $f : I \to F$ une application et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ (qui se trouve être continue car nous travaillons en dimension finie!).
Soit $a \in I$, on suppose f dérivable en a.
Alors $L(f)$ est dérivable en a et

$$L(f)'(a) = L(f'(a))$$

DÉMONSTRATION.

B.3 Dérivée de $B(f,g)$ où B est une application bilinéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F), (G, \|.\|_G)$ 3 $\mathbb{R}$-e.v.n.
Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Soit $a \in I$, supposons E et F de dimension finie ou f $\mathcal{C}^0$.
Si f et g sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ l'est également et :

$$B(f,g)'(a) = B(f',g)(a) + B(f,g')(a)$$

DÉMONSTRATION.

B.4 Continuité de la fonction “distance à une partie A”

Définition - Fonction "distance à une partie A”

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$. On définit d la fonction distance à A par :

$$d : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf\limits_{a \in A} \|x - a\| \end{array}$$

On note généralement $d(x) = d(x, A)$

Proposition - Continuité de la fonction “distance à une partie A"

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$. On note d la fonction distance à A par . Alors

d est continue.

DÉMONSTRATION.

B.5 Inégalité arithmético-géométrique.

Proposition - Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$(x_1 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

DÉMONSTRATION.

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

DÉMONSTRATION.

C.2 Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ avec $I = [a; b]$, $a < b$. On prend $(a_k)_{k \in [\![0; n-1]\!]}$ une subdivision régulière de I d'ordre n.
Alors, en posant $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k)$, on a

$$R_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

DÉMONSTRATION.

C.3 Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soient $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$.
On prend $(a_k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ une subdivision régulière de I d'ordre n.
Alors, en posant $T_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$, on a :

$$T_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

DÉMONSTRATION.

C.4 Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$. Soit $a \in I$.
Alors, l'application

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$.

DÉMONSTRATION.

C.5 Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition

$$\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION.

C.6 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes

Proposition - Inégalité de Jensen

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ t.q $\sum_i \lambda_i = 1$.
Alors,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

DÉMONSTRATION.

C.7 Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Proposition - Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On a :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in I^3, x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

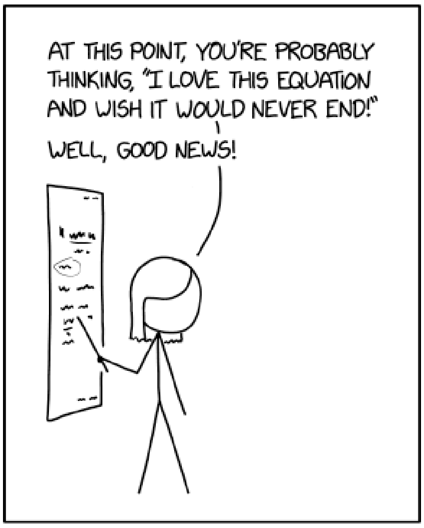
DÉMONSTRATION.

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.