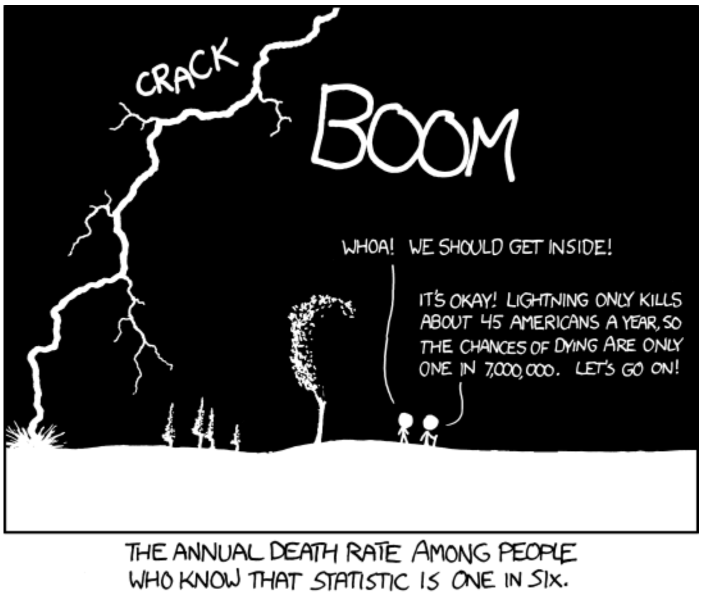
MPI* Physique

TD Électromagnétisme

Conduction électrique



Olivier Caffier

Florent Deplacie

1 Vitesse des électrons libres dans un métal

On se donne un fil de cuivre, supposé cylindrique et rectiligne :

- Section $S = 1$ mm^2
- Intensité du courant $I = 1$ A
- Conductivité du cuivre $\gamma = 5.96.10^7$ S.m^1
- Densité $d = 8,95$
- Masse molaire $M = 63,5$ g.mol^{-1}

Après avoir déterminé la densité volumique d'électrons libres, calculez la vitesse d'un électron libre participant à ce courant électrique.

Corrigé :

Théorème - Quelques formules de chimie

• En notant μ la masse volumique, on appelle densité, notée d, la quantité dans cet exercice : $d = \frac{\mu_{\text{cuivre}}}{\mu_{\text{eau}}}$.
• Soit n le nombre de moles de la solution, N le nombre de porteurs libres et N_A le nombre d'Avogadro. Alors, $nN_A = N$.
• De plus, en notant m la masse de la solution et M sa masse volumique, on obtient que $nM = m$.
• Enfin, soit $\mathcal{N}$ la densité volumique de porteurs de charges libres et $\mathcal{V}$ le volume de la solution, alors $\mathcal{N} = \frac{N}{\mathcal{V}}$

Expression de la densité volumique d'électrons libres.

Il suffit de cuisiner ces formules de chimie pour trouver le résultat :

$$\mathcal{N} = \frac{N}{\mathcal{V}} = \frac{nN_A}{\mathcal{V}} = \frac{mN_A}{M\mathcal{V}} = \frac{\mu_{\text{cuivre}} N_A}{M} = \frac{d\mu_{\text{eau}} N_A}{M}$$

Par application numérique, $\boxed{\mathcal{N} = 8,49 \cdot 10^{25} m^{-3}}$

Expression de la vitesse d'un électron libre participant à ce courant.

D'une part, $\vec{j} = -ne\vec{v}$. D'autre part, $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$. On se munit d'une section S du cylindre, dont l'expression est déjà donnée dans l'énoncé. $\vec{j}$ et $\vec{dS}$ sont colinéaires, ainsi :

$$I = j \iint_S dS = -nqvS$$

Ainsi,

$$v = -\frac{I}{neS}$$

Par application numérique, $\boxed{|v| = 7,3 cm \cdot s^{-1}}$

Remarques :

— La valeur de $||v||$ est cohérente avec la réalité. Quand vous allumez une lampe, ce ne sont pas les électrons qui ont décidé de tous se déplaçer récurssivement les uns après les autres, de la base du câble vers la base de la lampe. En réalité, on verra dans le chapitre ondes électromagnétiques qu'une OEM se déplaçant à la vitesse de la lumière s'occupe de faire déplaçer les électrons directement à la base de la lampe.

— On retrouve que $\vec{j}$ et $\vec{v}$ sont anticolinéaires dans un fil (cylindre dans le modèle volumique).

2 Courant engendré par une rotation

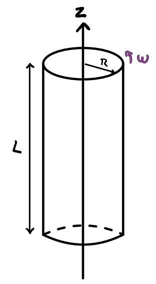
Un cylindre de rayon R et de grande longueur est mis en rotation autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire ω. Il est uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charges ρ.

Calculez la densité volumique de courant engendrée par cette rotation.

Corrigé :

donnée par l'énoncé

On a $\vec{j} = \rho \vec{v}$ inconnue au bataillon



→ Déterminons $\vec{v}$ à l'aide d'un changement de référentiel

- $\Sigma = \{\text{électron}\}$
- $\mathcal{R}'$: tournant, lié au cylindre → Référentiel NON-GALILÉEN
  - par rapport à $\mathcal{R}$ supposé galiléen
  - ↳ rot. pure uniforme...

⇒ Dans $\mathcal{R}'$, les charges sont immobiles ⇒ pas de courant
⇒ pas de champ magnétique
∧ $\vec{E}$ est électrostatique

$L \gg R$

Ainsi, d'après la loi de composition des vitesses : $\vec{v} = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}}_{\text{électrons immobiles}} + \vec{v_e}$

$= \omega \vec{u_z} \wedge r \vec{u_r}$

$= \omega r \vec{u_\theta}$

Finalement, $\vec{j} = \rho \omega r \vec{e_\theta}$

3 Action d'un éclair

(CCP PC 2019) La foudre frappe un piquet paratonnerre (figure 1). Elle est modélisée comme un flux d'électrons descendant, correspondant à un courant électrique I, et on suppose que l'intégralité de ces électrons pénètre dans le sol.

Le sol est assimilé à un milieu conducteur de conductivité électrique $\gamma = 1.10^{-2}$ S.m^{-2}.

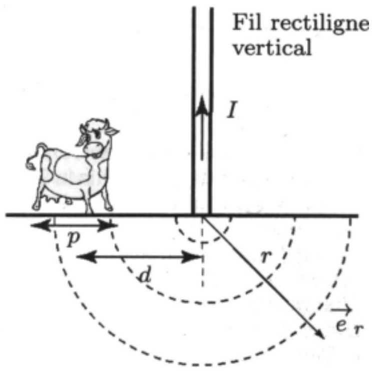


FIGURE 1 – Action d'un éclair

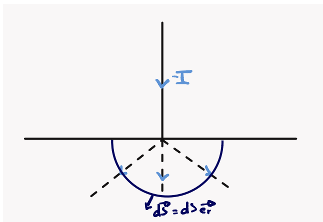
L'étude est menée sur une durée assez courte pour traiter les grandeurs électriques comme constantes.

1. Déterminez la relation entre I et $j(r)$ où $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$.
2. Déduisez-en l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ régnant dans le sol et vérifiez que le potentiel s'écrit sous la forme :
$$V(r) = -\frac{I}{\gamma 2\pi r}$$
3. Une vache se trouve à proximité du point d'impact.
   (a) Déterminez la tension U_p entre les pattes avant et arrière de la vache, distante de p.
   (b) Sachant que la vache peut être assimilée à une résistance $R = 2.5$ kΩ et qu'elle supporte au maximum une intensité $I = 25$ mA, déterminez la distance minimal d du point d'impact à laquelle elle doit se situer pour survivre.

Corrigé :

1 Le courant I est descendant d'après l'énoncé :

$\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$ → circulation isotrope dans le sol !



▹ On considère S une demi-sphère de rayon r orientée

et donc $-I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = j(r)2\pi r^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}(r) = -\frac{I}{2\pi r^2}\vec{e_r}}$$

2 On a, d'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\vec{e_r}$ avec $E(r) = -\frac{I}{2\pi\gamma r^2}$

Enfin, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Leftrightarrow V'(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{I}{2\pi\gamma r} + \underbrace{cte}_{=0}$$ car $V(r\to+\infty) = 0$

d'où $V(r) = -\frac{I}{2\pi\gamma r}$

3) 3.a On a $U = V(d + \frac{p}{2}) - V(d - \frac{p}{2})$

$$= -\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{d+\frac{p}{2}} - \frac{1}{d-\frac{p}{2}}\right)$$

$$= -\frac{I}{2\pi\gamma} \frac{\cancel{d} - \frac{p}{2} - \cancel{d} - \frac{p}{2}}{(d+\frac{p}{2})(d-\frac{p}{2})}$$

$$= \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{p}{(d^2 - \frac{p^2}{4})}$$

Finalement, on trouve $U = \dfrac{Ip}{2\pi\gamma(d^2 - \frac{p^2}{4})}$

3.b Loi d'Ohm : $U = \underbrace{R}_{R \text{ donnée}} \underbrace{I_{vache}}_{= 25\,mA}$

et $I_{éclair} = 30\ kA$

A.N: $d = 124\ m$ (avec $p = 2m$)

4 Gravure ionique

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.

Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système constitué de trois grilles métalliques, numérotées 0, 1 et 2 (voir figure 2).

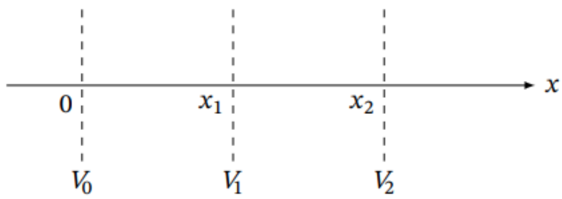


FIGURE 2 – Gravure ionique

Les trois grilles sont portées à des potentiels différents, contrôlables indépendamment les uns des autres, tels que $V_1 < V_2 < V_0 = 0$. Le potentiel est partout négatif.

Le dispositif est traversé par un flux continu de cations identiques, tous de masse m et de charge e, se propageant dans la direction x. On note $n(x)$ la densité volumique de cations. Les cations sont lâchés au niveau de la grille 0 avec une vitesse initiale négligeable.

1. Déterminez la vitesse $v(x)$ d'un cation en fonction d'un potentiel $V(x)$ et montrez qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération au sein du dispositif.
2. Montrez que le vecteur densité de courant s'écrit $\vec{j} = j_0\vec{u}_x$, avec j_0 une constante que vous ne chercherez pas à déterminer pour l'instant.
3. Montrez que le potentiel est gouverné par l'équation différentielle sur $[0, x_1]$:
$$V''(x) + \frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV(x)}} = 0$$
En admettant que sa solution est
$$V(x) = -\left(\frac{81 j_0^2 m}{32\varepsilon_0^2 e}\right)^{1/3} x^{4/3}$$
montrez que $j_0 = k|V_1|^{3/2}$ en précisant la valeur de k.
4. (Question facultative) Justifiez la forme de la solution admise ci-dessus.
5. On place un substrat de section S immédiatement après la grille 2 dans l'axe du faisceau pendant une durée Δt. Le faisceau est supposé uniforme à l'échelle du substrat.
Déterminez le nombre N de cations atteignant le substrat, ainsi que leur vitesse.
Concluez sur le bon fonctionnement du dispositif, c'est-à-dire la possibilité de contrôler séparément les deux paramètres.

Corrigé :

1 $E_c(x) = \frac{1}{2} m v(x)^2$ TEM
$E_p(x) = -eV(x)$ $\Rightarrow \Delta E_m = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(x)^2 + eV(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{v(x) = \sqrt{-\frac{2e}{m} V(x)}}$

or, on remarque que V dispose d'une certaine monotonie dans chaque région :

$V_1 < V_2 < V_0 = 0$

DONC, de par notre formule précédente, on en déduit que v hérite de cette monotonie :

on a donc bien une phase d'accélération et une phase de décélération

② On a, d'après la loi des noeuds : $\mathrm{div}(\vec{j}) = 0$

$\vec{j} = nq\vec{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{j}$ est selon $\vec{u_x}$

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

$\Rightarrow \frac{d\vec{j}}{dx} = 0\,\vec{u_x}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = j_0\,\vec{u_x}}$

③ D'après l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow V''(x) + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0$$

or $\vec{j} = \rho(x)\, v(x)\,\vec{u_x}$
$= j_0\,\vec{u_x}$

$$\Rightarrow \rho(x) = \frac{j_0}{v(x)}$$

D'où

$$V''(x) + \frac{j_0}{\varepsilon_0} \times \sqrt{\frac{-m}{2e} \times \frac{1}{V(x)}} = 0$$

En 1 :

$$V_1 = -\left(\frac{81\, j_0^2\, m}{32\,\varepsilon_0^2\, e}\right)^{1/3} x_1^{4/3}$$

$$|V_1|^3 = \frac{81\, j_0^2\, m}{32\,\varepsilon_0^2\, e}\, x_1^4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{32\,\varepsilon_0^2\, e}{81\, m\, x_1^4}\right)^{1/2} \times |V_1|^{3/2} = j_0$$

D'où $j_0 = K\,|V_1|^{3/2}$ avec $K = \left(\frac{32\,\varepsilon_0^2\, e}{81\, m\, x_1^4}\right)^{1/2}$

④ —

⑤ Calcul de N On a $I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$

d'où $I = j_0 S$

or $Q = I\,\Delta t$ et $Q = Ne$

Ainsi, $N = \frac{I\,\Delta t}{e}$

d'où $N = \frac{j_0\, S\, \Delta t}{e}$

Vitesse en sortie et conclusion

On a

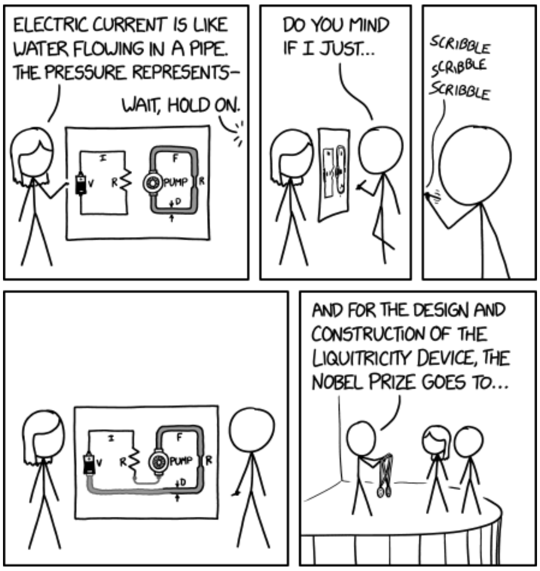
$$v_{sortie} = v(x_2) = \sqrt{-\frac{2e\,V_2}{m}}$$

Bon fctionnement = pouvoir contrôler séparément j_0 et V_2

or on contrôle V_0, V_1, V_2, x_1, x_2

or j_0 est fixé par x_1 et V_1
$v(x_2)$ est fixé par V_2

↳ mission accomplie !


ELECTRIC CURRENT IS LIKE WATER FLOWING IN A PIPE. THE PRESSURE REPRESENTS–
WAIT, HOLD ON.
I
V
R
F
PUMP
R
D
DO YOU MIND IF I JUST...
SCRIBBLE
SCRIBBLE
SCRIBBLE
I
V
R
F
PUMP
R
D
AND FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF THE LIQUITRICITY DEVICE, THE NOBEL PRIZE GOES TO...