Algèbre linéaire

Vallaeys Pascal

4 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 55,60,64,65,87,90

Méthodes de base :

- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Appliquer le théorème du rang.
- Montrer que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- Écrire la matrice d'une application dans une base donnée.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
(i) $E = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
(ii) $Ker(f) = Ker(f^2)$
(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
(iv) $Ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
(v) $E = Ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

Exercice 2 :
Soient u et v deux endomorphismes de l'espace vectoriel E. Montrer que $u \circ v = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,(v) \subset Ker\,(u)$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel réel et f une forme linéaire sur E, ie $f \in L\,(E, \mathbb{R})$, supposée non nulle. Montrer que le noyau de f est un hyperplan de E (c'est-à-dire qu'il possède un supplémentaire de dimension 1), dans les deux cas suivants :
a) Si E est de dimension finie.
b) Dans le cas général.

Exercice 4 : (Mines MP 2023)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E.
Montrer que : $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Exercice 5 : (Mines MP 2022)
Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6 : (Mines MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = \mathrm{O}_n$ si et seulement si A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ où $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Exercice 7 : Dans quels cas l'union de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace ?

Exercice 8 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(f^n)$.

b) En déduire qu'il existe un rang N tel que $Ker(f^N) = Ker(f^{N+1})$.
c) Montrer alors que $\text{Im}(f^{N+1}) = \text{Im}(f^N)$.
d) Montrer alors que pour tout entier naturel p, on a : $Ker(f^{N+p}) = Ker(f^{N+p+1})$ et $\text{Im}(f^{N+p+1}) = \text{Im}(f^{N+p})$.
e) Montrer que $Ker(f^N)$ et $\text{Im}(f^N)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
f) Si on pose $d_n = \dim(Ker(f^{n+1})) - \dim(Ker(f^n))$, montrer que la suite $(d_n)_{n\in\aleph}$ est décroissante.

Exercice 9 : (Centrale PSI) Montrer que toute matrice carré de rang 1 peut s'écrire $X.Y^T$ où X et Y sont des vecteurs .

Exercice 10 :
a) Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et f(x) soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie vectorielle.
b) En déduire les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec tous les autres.
c) Proposer une solution matricielle de la question précédente.

Exercice 11 : Déterminant de VanderMonde
Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n réels.
On pose $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{x-1} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.
a) Montrer que si les réels $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas deux à deux distincts, alors $V(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Dans la suite, on les suppose deux à deux distincts.
b) On pose $P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, X)$. Montrer que P est un polynômes de degré n-1 en la variable X.
c) Déterminer le coefficient dominant de P.
d) Déterminer les racines de P, puis son expression.
e) En déduire $V(x_1, x_2, ..., x_n)$. .
f) Retrouver le résultat procédant par opérations sur les lignes et les colonnes.
g) En déduire le résultat sur l'existence d'un polynôme d'interpolation en $x_1, x_2, ..., x_n$.

Exercice 12 : Trigonalisation par blocs
Soient A,B,C et D quatre matrices carrées de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si AC=CA et que A est inversible, $Dét \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = Dét\,(BC - DA)$.

Exercice 13 : (IMT MP 2017)
Montrer par récurrence sur n que tout matrice de $M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 14 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ nilpotent. Montrer que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2023)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$.
1. Montrer que $\text{Ker}\, f \oplus Imf = E$. Interpréter géométriquement.
2. Si E est de dimension finie, que dire de la matrice dans une base bien choisie ?
3. Donner un exemple d'un endomorphisme f de E tel que $\text{Ker}\, f \oplus Imf = E$.

Exercice 16 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad rg(A) < n$. Soit $G = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid ABA = 0\}$.
Montrer que G est un espace vectoriel, puis déterminer sa dimension.

Exercice 17 : (CCINP MP 2023)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \text{Id}_E$.
1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus Im(f - \text{Id}_E)$.

2. Montrer que $Im(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = Im(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 18 : (CCINP MP 2023)
Soit E un espace vectoriel.
Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
1. Montrer que $\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 19 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.
1) Quelle est la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$?
2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
3) On pose $\varphi : M \mapsto M^T$. Déterminer $\det \varphi$.

Exercice 20 : (CCINP MP 2022)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \end{cases}$$

Exercice 21 : (CCINP MP 2021)
Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(u + v) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$.

Exercice 22 : (Centrale PSI 2021)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Sa matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -8 & \frac{13}{3} & -\frac{14}{3} \\ -4 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}$ la famille composée des trois vecteurs précédents.
1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Exprimer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 : (Mines télécom MP 2021)
$$\text{Soit } \phi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & M \mapsto \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$$
Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Exercice 24 : (Mines PSI 2021)
Soit $M \in M_3(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1) Calculer $(M^n)_{n \geq 1}$.
2) Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(M^n)_{n \geq 1}$.
3) Montrer que le commutant de M est exactement F.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 25 : (Mines MP 2023)
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.
2. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$; $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$ et $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 26 : (CCINP MP 2022)
Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\ker(u+v) \leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Regarder la restriction de u à $\ker(u+v)$.
Commentaires divers : interrogatrice sympathique mais très pointilleuse sur certains détails .

Exercice 27 : (Mines MP 2022)
Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \geqslant 2$, calculer le déterminant $n \times n$,

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} z-\frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z-\frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z-\frac{1}{z} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z-\frac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

Exercice 28 : (Mines MP 2021)
Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_{A,B} = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMB = 0\}$.
Déterminer la dimension de $E_{A,B}$ en fonction du rang des matrices A et B.

Exercice 29 : (Mines MP 2021)
1. Montrer que si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E, alors il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}\, \varphi$.
2. Soit H un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il contient au moins une matrice inversible.

Exercice 30 : (Mines-Ponts 2019)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que B est de rang 1. Comparer $\det(A+B) . \det(A-B)$ et $\det\left(A^2\right)$.

Exercice 31 : (Mines-Ponts 2017)
Trouver les matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $(AB = 0) \Rightarrow (BA = 0)$.

Exercice 32 :
Quelles sont les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on ait $Dét(A+M) = Dét(A) + Dét(M)$.

Exercice 33 : (Centrale MP)
Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme multiplicative, c'est à dire telle que : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $f(A.B) = f(A) . f(B)$. On suppose f non constante.
a) Que vaut $f(I_n)$? $f(0)$?
b) Montrer que deux matrices semblables ont même image par f.
c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A) \neq 0$ si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la notion de matrices équivalentes).
d) Pouvez-vous proposer deux applications f possibles ?
e) Existe-t-il de telles applications qui soient en outre linéaires ?

Exercice 34 :
Soient a et b deux réels distincts. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(1) = 1$, $f(X) = X$ et pour tout autre polynôme P, $(P(a) = P(b) = 0) \Rightarrow (f(P) = 0)$.

Exercice 35 : (Centrale)
Soient $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Montrer qu'il existe n+1 réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int\limits_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P(x_k)$.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 36 : (Mines MP 2022)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Montrer que : $u^2 = 0_E \iff$ Il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

Exercice 37 : (Mines MP 2021)
On note :
- $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n de trace nulle.
- $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

1. $\mathcal{N}$ est-il l'ensemble des matrices nilpotentes ?
2. Montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$.
3. A-t-on $\mathcal{N} = \mathcal{H}$?

Exercice 38 : (X MP 2021)
Déterminer les matrices qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes.
(pour occuper les 5 dernières minutes)

Exercice 39 :
Soit A une matrice de $M_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et A est de rang 2n. Montrer que A est semblable à la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 40 :
Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ n réels. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et M la matrice de terme général $w^{(i-1).(j-1)}$.
a) Calculer le produit A.M.
b) En déduire le déterminant de A. (On utilisera un polynôme dont les coefficients sont les a_i)

Exercice 41 : (Centrale MP)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\Phi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ X \to A^T.X.B \end{matrix}$.
Déterminer le déterminant de Φ.

Exercice 42 : (X 2001 42)
Soient $0 < t_1 < ... < t_n$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$. Montrer que le déterminant de la matrice de terme général $\left(t_i^{\alpha_j}\right)$ est strictement positif.

Exercice 43 : (X)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que A-B soient inversibles et $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$. Montrer que n est un multiple de 6.