Colle 3 : Réduction (1)
exercices groupe C
MPI(*) Faidherbe

BURGHGRAEVE Marc

5 Octobre 2024

Exercice 11 :

a) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes diagonalisables ?

Réponse : Oui. Considérons les $(E_{i,i})_{i\in[\![1,n]\!]}$. Ces derniers étant diagonales sont donc diagonalisables. Cependant les autres matrices de la base canoniques sont nilpotentes non nulles et ne sont donc pas diagonalisables. Considérons dès lors, pour tout $i \neq j$ la matrice

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} + \text{un 1 en position } (i,j).$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\chi_{b_{i,j}}(X) = (X-1)\dots(X-n)$ qui est scindé simple : $B_{i,j}$ est donc diagonalisable.
On a donc une famille à $n + n(n-1) = n^2$ éléments.
On finit par montrer que cette famille est génératrice car les $E_{i,j} aveci \neq j$ s'expriment comme $B_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} kE_{k,k}$ et les $E_{i,i}$ font partis de la famille, qui est donc génératrice, et puisqu'à n^2 éléments, une base.
b) Existe-t-il une base de $L(\mathbb{R}^n)$ constituée d'endomorphismes non diagonalisables ?
Réponse : Encore oui. Cette fois-ci les $E_{i,j}, i \neq j$ peuvent faire partie de la base. Pour les n vecteurs restants, on pose, pour $i \in [\![2, n-1]\!]$:

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{où le 1 est en position } i, i$$

On construit C_1 et C_n de la même façon mais le 1 en haut à droite doit être déplacé : le but est d'avoir une matrice de rang 2 :
La dimension du sous-espace propre E_0 qui est aussi le noyau de la matrice est $n-2$ et la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique est $n-1$, donc Les C_i ne sont pas diagonalisable. On vérifie de même qu'on a bien une base.

Exercice 12 (X MP) :

Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $\exists q \in \mathbb{N}^*/u^q = \mathrm{Id}$. Montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} \mathrm{Tr}(u^k).$$

Réponse : On va plutôt voir le problème d'un œil matriciel : Soit donc $a \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ et tq $\exists q \in \mathbb{N}^*, A^q = Id$. Dès lors, $P(X) = X^q - 1$ est annulateur de A. Dans $\mathbb{C}[X]$, P est scindé simple, A est diagonalisable :
$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ tel que $A = P\Delta P^{-1}$. Alors $Sp(A) \subset \mathbb{U}_q$.
Soit donc

$$\alpha = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} tr(A^k) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} tr(\Delta^k) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^k = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{q}\lambda_i^k = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}(q\delta_{\lambda_i,1}) \text{ car } \sum_{k=0}^{q}\lambda_i^k = 0$$

si $\lambda_i \neq 1 (\lambda_i^q = 1)$ d'où $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i,1} = m_1 = dim(E_1(A)) = dim(Ker(A - I_n))$

Exercice 13 (X MP 2013) :

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On note (P) la propriété suivante : u admet n valeurs propres distinctes deux à deux. Pour tout $k \in [1, n]$, on note Q_k : u admet $\binom{n}{k}$ sous-espaces stables de dimension k.
a) Montrer que $(P) \iff (Q_1)$.
Réponse : Si P admet n sous espaces stables de dimension 1, alors il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $Vect(x_1), \dots, Vect(x_n)$ soient stables. D'où l'existence de n valeurs-propres distinctes si $(v = \lambda_i x_i \in Vect(x_i), u(v) = \nu_i x_i = \frac{\nu_i}{\lambda_i} v)$ La réciproque est immédiate.
b) Montrer que $\forall k \in [1, n], (P) \Rightarrow (Q_k)$.
Réponse : D'après l'hypothèse, u est diagonalisable (à prouver ?) donc u est semblable à une matrice Δ diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale. Un sous-espace stable de dimension k est entièrement déterminé par : sa base constituée de k vecteurs propres, que l'on peut donc choisir parmi les n vecteurs propres de la base de la matrice associés aux valeurs propres. Alors $Vect(x_{i1}, .., x_{ik})$ est un sous-espace stable de dimension k.
c) Montrer que $(P) \iff (Q_{n-1})$.
Réponse : Supposons donc que n admette n sous-espaces stables de dimension $n - 1$. Soit H_i un de ces sous-espaces. Soit v_i tq $E = H_i \oplus v_i$ (qui existe car en dim finie). Or si $u(v_i) \in H_i$ Alors une base de H_i est une base de l'image donc on a un seul hyperplan d'où l'absurdité ainsi $u(v_i) \in Vect(v_i)$: on a donc n vecteurs qui génèrent n sous-espaces stables de dimension 1, on peut conclure d'après la question 1.

Exercice 14 (ENS MP 2023) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P = \chi_A$, $P_i = (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ et α_i la multiplicité de λ_i.
Soient les $F_i = \ker P_i(A)$.
1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus F_i$.
Réponse : D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(u) = 0 \implies ker(\chi_A(u)) = \mathbb{C}^n$. D'après le théorème de décomposition des noyaux on a bien le résultat voulu.
2. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de A restreint à F_i.
Réponse : Dans les conditions de la question précédente, $P_f(X) = (X-\lambda)^\alpha Q$, où Q est un polynôme dont λ n'est pas racine et donc Q et $(X-\lambda)^\alpha$ sont premiers entre eux. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $P_f(f) = 0$ et le théorème de décomposition des noyaux affirme que

$$E = N_\lambda \oplus \ker Q(f).$$

Les deux sous-espaces N_λ et $\ker Q(f)$ sont invariants par f, nous pouvons donc considérer les restrictions f_λ et g de f à N_λ et $\ker Q(f)$ respectivement. $(X-\lambda)^\alpha$ est un polynôme annulateur de f_λ et donc f_λ n'a qu'une seule valeur propre λ et est triangonalisable ; son polynôme caractéristique est $(X-\lambda)^\beta$ où β est la dimension de N_λ. De même Q est un polynôme annulateur de g et donc λ n'est pas une valeur propre de g, $(X-\lambda)$ ne divise donc pas le polynôme caractéristique P_g de g et P_g et $(X-\lambda)^\alpha$ sont premiers entre eux.

Les polynômes caractéristiques de f, f_λ et g sont liés par la relation

$$P_f = P_{f_\lambda} P_g$$

(car si nous choisissons une base B_λ de N_λ et une base B' de $\ker Q(f)$, alors leur réunion $B = B_\lambda \cup B'$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$[f]_B = \begin{pmatrix} [f_\lambda]_{B_\lambda} & 0 \\ 0 & [g]_{B'} \end{pmatrix}.$$

) De cette égalité nous déduisons

$$(X-\lambda)^\alpha Q = (X-\lambda)^\beta P_g$$

et comme Q et P_g sont premiers à $(X-\lambda)$,

$$\alpha = \beta.$$

3. Montrer que $A = D + N$ avec D matrice diagonalisable et N nilpotente, telles que $DN = ND$.
Réponse :

- Soit χ_f le polynôme caractéristique de f qui, par hypothèse, est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons λ_i une valeur propre de f, et m_i sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = \pm \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}.$$

- Soient $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_r}$, les sous-espaces caractéristiques de f. Pour $1 \leq i \leq r$, on a

$$N_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \quad \text{et} \quad E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}.$$

- Nous allons définir l'endomorphisme d sur chaque N_{λ_i} de la manière suivante : pour tout $x \in N_{\lambda_i}$, on pose

$$d(x) = \lambda_i x.$$

L'espace vectoriel E étant somme directe des N_{λ_i}, d est défini sur E tout entier. En effet, si $x \in E$ est décomposé en $x = x_1 + \cdots + x_r$, avec $x_i \in N_{\lambda_i}$ (pour $1 \leq i \leq r$), alors

$$d(x) = d(x_1 + \cdots + x_r) = d(x_1) + \cdots + d(x_r) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r.$$

- Pour $1 \leq i \leq r$, on a $d_i = d|_{N_{\lambda_i}} = \lambda_i \,\mathrm{id}_{N_{\lambda_i}}$.

On pose enfin

$$n(x) = f(x) - d(x).$$

Il nous reste à vérifier que n et d conviennent.

1. Par construction, d est diagonalisable. En effet, fixons une base pour chaque sous-espace N_{λ_i}. Pour chaque vecteur x de cette base, $d(x) = \lambda_i x$. Comme E est somme directe des N_{λ_i}, alors, dans la base de E formée de l'union des bases des N_{λ_i} (pour $1 \leq i \leq r$), la matrice de d est diagonale.

2. On a défini $n = f - d$. N_{λ_i} est stable par n (car c'est vrai pour f et d). On pose $n_i = n|_{N_{\lambda_i}} = f|_{N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{id}_{N_{\lambda_i}}$. Alors, par définition, $N_{\lambda_i} = \ker(n_i^{m_i})$, et donc $n_i^{m_i} = 0$. Ainsi, en posant $m = \max(m_i)$ (pour $1 \leq i \leq r$), puisque n^m s'annule sur chaque N_{λ_i}, alors $n^m = 0$, ce qui prouve que n est nilpotent.

3. On va vérifier que $d \circ n = n \circ d$. Si $x \in E$, il se décompose en $x = x_1 + \cdots + x_r$, avec $x_i \in N_{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq r$. Sur chaque N_{λ_i}, $d|_{N_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathrm{id}_{N_{\lambda_i}}$, donc d commute avec tout endomorphisme. En particulier, $d \circ n(x_i) = n \circ d(x_i)$ puisque N_{λ_i} est stable par n. On a donc

$$d \circ n(x) = d \circ n(x_1 + \cdots + x_r) = d \circ n(x_1) + \cdots + d \circ n(x_r) = n \circ d(x_1) + \cdots + n \circ d(x_r) = n \circ d(x).$$

Ainsi, d et n commutent.

4. Soit $\varphi_A : M \mapsto AM - MA$. Exprimer la décomposition $N + D$ de φ_A en fonction de celle de A.
Réponse : Si $A = n + d, alors \Phi_A(M) = (n+d)M - M(n+d) = (nM - Mn) + (dM - Md) = \Phi_n + \Phi_d$. Pour montrer la nilpotence : appliquer le binôme de Newton pour k = 2 fois l'indice de nilpotence de n ?