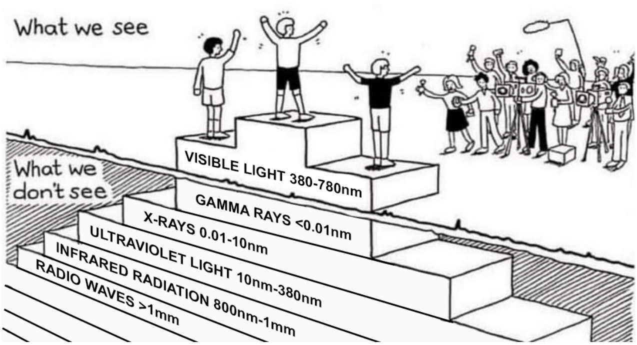
MPI* Physique

TD Ondes Électromagnétiques

Ondes électromagnétiques et conducteurs métalliques



Olivier Caffier

Table des matières

1 ARQS dans un métal

L'espace est constitué de vide pour $x < 0$ et d'un métal de conductivité γ pour $x > 0$. Une OPPM polarisée selon $\vec{u}_y$ se propage selon les x croissants.

1. À partir de l'équation locale de conservation de la charge électrique, montrez que la densité de charges ρ peut être considérée comme nulle dans le métal. Donnez alors l'équation gouvernant $\vec{E}$.
2. Si $\vec{E}$ est proportionnel à $e^{i(\omega t - kx)}$ avec ω réel positif et k complexe, donnez la relation de dispersion.
3. Pourquoi a-t-on choisi ω réelle ? Quels sont les rôles respectifs des parties réelle et imaginaire de k ?
4. À quelle condition sur ω peut-on négliger un terme dans l'équation différentielle, si le métal est du cuivre ($\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1}) ? Cette condition est-elle facilement vérifiée ? Simplifiez les équations précédentes sous cette hypothèse.
5. Exprimez le champ magnétique et le vecteur de Poynting dans ces conditions.

Corrigé :

1. L'équation locale de conservation de la charge électrique est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$

   Or, la loi d'Ohm locale nous dit que $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc $\mathrm{div}(\vec{j}) = \gamma \mathrm{div}(\vec{E}) = \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ d'après M-G. De plus, en régime sinusoïdal forcé, $\dfrac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} = i\omega \underline{\rho}$.
   On trouve alors que

$$\underline{\rho}\left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right) = 0 \Longrightarrow \underline{\rho} = 0$$

   On trouve bien :

$$\boxed{\rho = 0}$$

2. Toujours le même calcul mais cette fois on ne se situe pas encore en ARQS : il ne faut donc pas négliger tout de suite le terme en $\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$...
3. On veut une fonction sinusoïdale dans le temps donc a fortiori on ne veut pas une exponentielle + dans le game.
   La partie réelle de $\underline{k}$ restera dans la fonction sinusoïdale donc décrit la propagation de l'onde, là où la partie imaginaire génèrera une exponentielle réelle en facteur, qui correspondra donc au terme d'atténuation au cours de la propagation dans le métal.
4. M-F pour donner la relation entre $\vec{B}$ et $\vec{E}$, puis utiliser la formule $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E}.\vec{B}^*)$

2 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ. Le champ électrique est :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x \tag{1}$$

1. Trouvez l'expression de son champ magnétique.
2. Calculez la moyenne temporelle de son vecteur de Poynting.
3. Calculez la puissance volumique moyenne $\langle p \rangle$ dissipée par effet Joule.
4. Vérifiez que :

$$\mathrm{div}\left(\langle\vec{\Pi}\rangle\right) + \langle p \rangle = 0 \tag{2}$$

Interprétez cette relation.

Corrigé :

1. En repassant par M-F [1], on a $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, de fil en aiguille, on arrive à :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \langle\vec{\Pi}\rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \Re\left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right) \\ &= \frac{E_0^2}{\sqrt{2}\mu_0\delta\omega} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Re\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{u}_z}$$

3. On a $p = \vec{j}.\vec{E}$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (d'après la loi d'Ohm) donc :

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle \vec{j}.\vec{E} \rangle \\ &= \gamma \langle \vec{E}^2 \rangle \\ &= \frac{\gamma}{2} \Re\left(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\right) \end{aligned}$$

En fin de compte, on trouve :

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}}}$$

1. rien n'est dit qu'avec ce type d'ansatz, la relation de structure soit valable !

4. On rappelle, cf. cours, que :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\langle\vec{\Pi}\rangle) &= -\frac{E_0^2}{\mu_0 \delta^2 \omega} e^{-\frac{2z}{\omega}} \\
&= -\frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} \\
&= -\langle p \rangle
\end{aligned}$$

Donc on retrouve bien :

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\langle\vec{\Pi}\rangle\right) + \langle p \rangle = 0}$$

et ça ressemble fortement au théorème de Poynting :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{\Pi}\right) = -p \tag{3}$$

En passant à la moyenne, on se rend compte d'une chose : $\frac{\partial u}{\partial t}$ possède une moyenne nulle ! En effet, comme u est périodique (notons T sa période) :

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} dt \\
&= \frac{1}{T} \left(u(\dots, T) - u(\dots, 0) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc le théorème de Poynting moyen se traduit littéralement par le résultat :

$$\operatorname{div}\left(\langle\vec{\Pi}\rangle\right) + \langle p \rangle = 0$$

3 Effet de peau

Un milieu conducteur de conductivité γ_0 occupe le demi-espace $z > 0$, comme indiqué figure 1. Le domaine $z < 0$ est rempli d'air, aux propriétés similaires au vide. Une OPPM incidente arrive par la gauche avec une polarisation rectiligne :

$$\underline{\vec{E}_1} = E_{10} e^{i(\omega t - kz)}\, \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \tag{4}$$

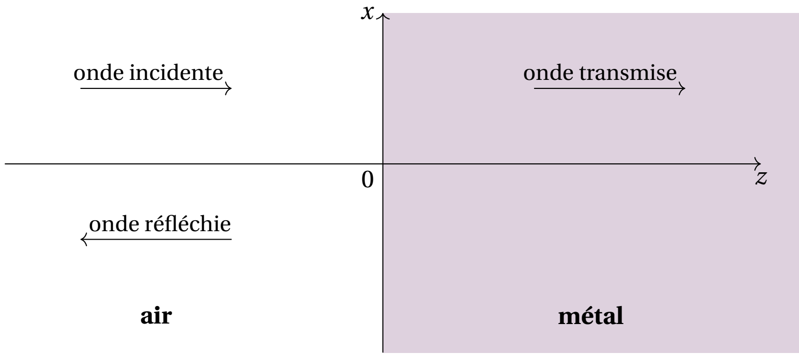


FIGURE 1 – Effet de peau.

À l'interface entre les deux milieux, elle engendre une onde réfléchie et une onde transmise de la forme :

$$\underline{\vec{E}_1'} = \underline{r}\, E_{10} e^{i(\omega t - \underline{k}' z)}\, \vec{u}_x \tag{5}$$

$$\underline{\vec{E}_2} = \underline{t}\, E_{10} e^{i(\omega t - \underline{k}'' z)}\, \vec{u}_x \tag{6}$$

où r et t sont les coefficients, respectivement, de réflexion et de transmission en amplitude.

1. Dans tout l'exercice, vous ferez l'hypothèse $\varepsilon_0 \omega \ll \gamma_0$. Quel en est le sens physique ?
2. (a) Déterminez les nombres d'onde $\underline{k}'$ et $\underline{k}''$.
   (b) Calculez les champs magnétiques des trois ondes.
   (c) Étudiez les conditions imposées aux composantes des champs sur la surface $z = 0$. Déduisez-en les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en fonction de ω et $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \gamma_0 \omega}$. Interprétez δ.
3. (a) Calculez les vecteurs de Poynting moyens des trois ondes.
   (b) Calculez les coefficients de réflexion et de transmission en puissance en fonction de δ et ω, définis comme les rapports des énergies transportées par, respectivement, l'onde réfléchie et l'onde transmise sur celle transportée par l'onde incidente.

(c) Vérifiez la conservation de l'énergie.

(d) Calculez la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans un cylindre de section S et de longueur infinie entre $z = 0$ et $z \to +\infty$. Comparez cette valeur avec le flux moyen du vecteur de Poynting de l'onde transmise à travers cette même section S en $z = 0$.

Corrigé :

1. C'est tout simplement l'ARQS.
2. (a) Pour $\underline{k}'$, il s'agit d'une OPPM dans le vide donc on a la relation

$$\underline{k}'^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2$$

comme cette onde est réfléchie, on imagine bien que $\underline{k}' < 0$, d'où :

$$\boxed{\underline{k}' = -k}$$

Pour $\underline{k}''$, on est obligé de retrouver la relation de dispersion dans le métal. Repartons alors de l'équation de M-A avec notre ARQS évoquée en Q1 :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\gamma_0\vec{E}$$

En complexe :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{B}}) - \underbrace{\cancel{i\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}}}}_{\text{ARQS}} = \mu_0\gamma_0\underline{\vec{E}} \qquad (7)$$

En appliquant ensuite le rotationnel à M-F, et en sachant que $\text{div}(\underline{\vec{E}}) = \rho/\varepsilon_0 = 0$, on a :

$$-\Delta\underline{\vec{E}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{B}})\right) = \vec{0}$$

Dès lors, en ré-injectant notre expression (7) dans celle-ci, il vient :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

En ré-injectant l'ansatz de l'énoncé, il vient :

$$(-i\underline{k}'')^2\underline{\vec{E}_1} = \mu_0\gamma_0 i\omega\underline{\vec{E}_1} \iff (\underline{k}'')^2 = \mu_0\gamma_0\omega e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\iff k'' = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Vu que l'onde transmise se propage vers les z croissants, on prend $\Re(\underline{k}'') > 0$, d'où :

$$\boxed{\underline{k}'' = \frac{1-i}{\delta}}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0\gamma_0\omega}$ l'épaisseur de peau mentionnée par l'énoncé.

(b) Les trois ondes possèdent un ansatz convenable pour la relation de structure, il nous suffit juste de l'appliquer. On trouve finalement :

$$\boxed{\underline{\vec{B}_1} = \frac{E_{10}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}_1'} = -\underline{r} \frac{E_{10}}{c} e^{i(\omega t - \underline{k}' z)} \vec{u}_y}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}_2} = \underline{t} \frac{E_{10}\underline{k}''}{\omega} e^{i(\omega t - \underline{k}'' z)} \vec{u}_y}$$

(c) Comme il s'agit d'un métal qui n'est pas parfait, tous les courants et charges sont volumiques : avec les relations de passages, on en déduit que :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} \text{ et } \underline{\vec{B}} \text{ sont continus en } z = 0}$$

Dès lors, la continuité en $z = 0$ pour les deux champs nous permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} & = \underline{t} \\ \frac{1}{c} - \frac{\underline{r}}{c} & = \frac{\underline{t}\underline{k}''}{\omega} \end{cases}$$

On tombe alors sur les deux expressions suivantes :

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2\delta\omega}{\delta\omega + c(1-i)}}$$

$$\boxed{\underline{r} = \frac{\delta\omega - c(1-i)}{\delta\omega + c(1-i)}}$$

Comme mentionné plus haut, δ est connue sous le nom d'*épaisseur de peau* : au bout de quelques δ, le champ est fortement atténué (c'est donc la profondeur de pénétration dans le métal).

3. (a) Comme les champs sont sinusoïdales dans le temps, on va pouvoir utiliser la formule :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$$

On trouve :

$$\boxed{\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \frac{E_{10}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z}$$

Pour les deux autres, c'est un peu plus (légèrement) subtil donc je détaille pour le premier :

$$\begin{aligned}\langle\vec{\Pi}_1'\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\Re\left(\underline{\vec{E}_1'}\wedge\underline{\vec{B}_1'}^*\right)\\ &= \frac{E_{10}^2}{2\mu_0 c}\Re\left(\underline{r}\,\vec{u}_x\wedge(-\underline{r}^*)\,\vec{u}_y\right)\\ &= -\frac{E_{10}^2}{2\mu_0 c}|\underline{r}|^2\vec{u}_z\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}_1'\rangle = -\frac{E_{10}^2}{2\mu_0 c}|\underline{r}|^2\vec{u}_z}$$

et de même, on trouve :

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}_2\rangle = \frac{E_{10}^2}{2\mu_0\omega\delta}|\underline{t}|^2\vec{u}_z}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}R &= \frac{\|\langle\vec{\Pi}_1'\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_1\rangle\|}\\ &= |\underline{r}|^2\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{R = \frac{1+\left(1-\frac{\omega\delta}{c}\right)^2}{1+\left(1+\frac{\omega\delta}{c}\right)^2}}$$

et

$$\begin{aligned}T &= \frac{\|\langle\vec{\Pi}_2\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_1\rangle\|}\\ &= |\underline{t}|^2\frac{c}{\omega\delta}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{T = \frac{4\omega\delta}{c}\times\frac{1}{1+\left(1+\frac{\omega\delta}{c}\right)^2}}$$

(c) On retrouve bien :

$$\boxed{R+T=1}$$

(d) On a, pour un cylindre de section S et de longueur infinie :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_J \rangle &= \iiint_V \langle p \rangle dV \\
&= S \times \int_0^{+\infty} \langle p \rangle dz \\
&= S \times \int_0^{+\infty} \langle \vec{j}.\vec{E}_2 \rangle dz \\
&= \gamma_0 S \int_0^{+\infty} \langle \vec{E}_2^2 \rangle dz
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\vec{E}_2}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \Re(\underline{\vec{E}_2}.\underline{\vec{E}_2}^*) \\
&= \frac{1}{2} |\underline{t}|^2 E_{10}^2 e^{-\frac{2z}{\delta}}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_J \rangle &= \gamma_0 S \int_0^{+\infty} \langle \vec{E}_2^2 \rangle dz \\
&= \frac{\gamma_0 S |\underline{t}|^2 E_{10}^2}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2z}{\delta}} dz \\
&= \frac{\gamma_0 S |\underline{t}|^2 E_{10}^2}{2} \left[-\frac{\delta e^{-\frac{2z}{\delta}}}{2} \right]_0^{\cancel{+\infty}}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\gamma_0 S |\underline{t}^2| E_{10}^2 \delta}{4}}$$

on trouve alors que :

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = T \| \langle \vec{\Pi}_1 \rangle \| S = \| \langle \vec{\Pi}_2 \rangle \| S}$$

Autrement dit, la fraction T de la puissance incidente, qui est la puissance pénétrant dans le métal, est entièrement dissipée par effet Joule.

4 Transparence ultraviolette des métaux

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique de haute fréquence à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N. Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin :

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} \tag{8}$$

1. Établissez l'expression de la vitesse en régime sinusoïdal forcé $\underline{\vec{v}}$ et déduisez-en que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \tag{9}$$

   où γ_0 est une constante que vous préciserez et interpréterez.
2. Écrivez l'équation de conservation locale de la charge électrique en complexe et déduisez-en que le métal reste localement neutre même à haute fréquence.
3. Trouvez la relation de dispersion pour un ansatz de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$.
4. Déduisez-en que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise dans le métal sans être absorbée.
5. Expliquez le titre de l'exercice.

Corrigé :

1. Démo de cours, sauf que maintenant on se situe en RSF et non dans l'ARQS : on a

$$\vec{j} = -en\vec{v}$$

   Or, d'après la deuxième loi de Newton (force magnétique négligeable) :

$$m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} - e\vec{E}$$

   Dès lors, en RSF et en complexe, il vient :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e\tau}{m_e} \times \frac{1}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$$

   Finalement, on a $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ avec :

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e}}$$

   avec γ_0 l'expression de la conductivité dans le cas réel!

2. L'équation de la conservation locale de la charge électrique est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$

Ainsi, en reprenant la loi d'Ohm complexe :

$$\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \underline{\gamma}\mathrm{div}(\underline{\vec{E}})$$

Or, d'après l'équation de M-G : $\mathrm{div}(\underline{\vec{E}}) = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0}$
On trouve alors :

$$\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}\underline{\rho} = 0$$

Finalement, en complexe $\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} = i\omega\underline{\rho}$, d'où :

$$\frac{\gamma_0 + (1+i\omega\tau)}{1+i\omega\tau}\underline{\rho} = 0$$

et le membre de gauche ne s'annule pour aucun ω, donc même à haute fréquence :

$$\boxed{\rho = 0}$$

3. Reprenons l'équation de M-F : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$
Comme d'habitude, on applique le rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\right) = \vec{0}$$

Or,

- M-G nous dit que $\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon = 0$ (d'après la question précédente) ;
- D'après M-A : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\underline{\vec{j}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mu_0\underline{\gamma}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$

Dès lors, en passant tout en complexe, on arrive à :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} + \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \Delta\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

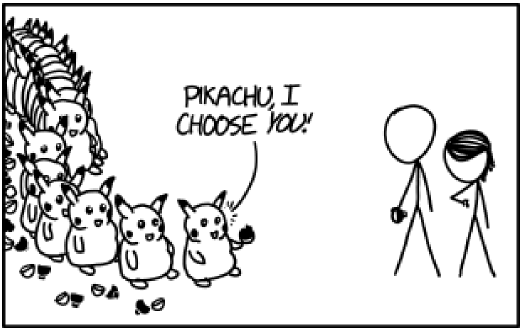
En ré-injectant l'ansatz, il vient :

$$-(-i\underline{k})^2 + \frac{(i\omega)^2}{c^2} + \mu_0\underline{\gamma}i\omega = 0$$

Finalement, on arrive à la relation de dispersion suivante :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - i\underline{\gamma}\mu_0\omega}$$

4. En fait, pour qu'elle ne soit pas absorbée, il faut que $\underline{k} \in \mathbb{R}$ pour éviter le fait qu'on ait une onde évanescente !
Or,
$$\underline{k} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underline{k}^2 \in \mathbb{R}_+$$
Alors, comme on évite les rédactions lourdes dans mes polys, on va se dire qu'on peut approximer de la manière suivante :
$$|\underline{\gamma}\mu_0\omega| \ll \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$
i.e
$$\frac{|\underline{\gamma}|\omega}{\varepsilon_0 c^2} \ll \frac{\omega^2}{c^2}$$
Donc l'approximation est valable si :
$$\omega \gg \frac{|\underline{\gamma}|}{\varepsilon_0}$$
et comme $\omega = 2\pi f$, on retrouve la condition suivante :
$$\boxed{f \gg \frac{|\underline{\gamma}|}{2\pi\varepsilon_0}}$$
5. On veut alors une fréquence assez grande pour ce type d'inégalité, typiquement des fréquences dans le domaine de l'ultraviolet.
Ainsi, notre approximation de transparence est valable pour les ondes de fréquence dans le domaine de l'ultraviolet : d'où le nom de l'exercice.


PIKACHU, I CHOOSE YOU!