Colles MPi* Semaine n°13 du 09/12/2024 au 13/12/2024 (Programme n°8)

Vallaeys Pascal

24 novembre 2024

Thème : Séries entières.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier
- Martinsse

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Lemme d'Abel (démo).
- Définitions du rayon + définitions équivalentes.
- Convergence normale d'une série entière sur les segments inclus dans]-R,R[(démo)

- Règle de d'Alembert pour les séries entières (démo à partir de la règle pour les séries numériques).
- Continuité d'une fonction définie par une SE sur]-R,R[(démo).
- Caractère C^∞ d'une SE sur]-R,R[(démo).
- Intégration d'une SE sur un segment inclus dans]-R,R[(démo).
- Expression des coefficients à partir des dérivées de S en 0 (démo).
- Unicité des coefficients (démo).
- DSE usuels (démo).
- Obtention du DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle : exemple de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{sin(x)}{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (après avoir été prolongée par continuité en 0).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Utilisation des relations de comparaison pour comparer les rayons de deux séries entières (démo).
- Produit de Cauchy de deux séries entières + rayon. (démo à partir du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)
- Lemme : $R(\sum n.a_n x^n) = R(\sum a_n x^n)$ (démo).
- Exemple de fonction C^∞ au voisinage de 0 non DSE (démo).
- Théorème de convergence radial d'Abel (démonstration du cas simple : si $\sum a_n$ est absolument convergente)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Équivalence entre les quatre définitions du rayon de convergence (démo).
- Démonstration du théorème de convergence radial d'Abel (démo du cas général)
- Justification du produit de Cauchy à l'aide de la sommabilité. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2023)
Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$
1. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 2 : (CCINP MP 2017)
On considère la fonction f définie par $f(x) = (\arcsin x)^2$.
1) Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2) Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 2$.
3) En déduire son développement en série entière.

Exercice 3 : (CCINP MP 2021)
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :
a) $\sum (n+1)3^n z^{2n}$
b) $\sum \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2021)
Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Exercice 5 :
On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.
a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$.
b) En déduire que le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum a_n.z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
c) Calculer la somme de cette série entière sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
d) En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 6 :
Montrer que $\int\limits_0^{2\pi} e^{2.\cos(x)}dx = 2\pi.\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2}$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Exercice 8 : (Mines MP 2021)
1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

2) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{s_n x^n}{n!}$ pour les x tels que la série converge. Montrer que $S(x)e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

Exercice 9 :
Nature de la série de terme général $\sin(2\pi n!e)$.

Exercice 10 : (Centrlale MP 2021)
Soit f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
1. Calculer, pour $r \in]0;R[$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t$.
2. On considère l'égalité suivante :

$$\forall r \in]0;R[\,,\ \forall z \in B(0,r),\ f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer l'égalité pour $f : z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer l'égalité pour la fonction f définie dans l'introduction.

Exercice 11 :
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-a,a[$ absolument monotone : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. On note $S_n(x)$ sa somme de Taylor d'indice n, et $R_n(x)$ le reste intégral de Taylor d'indice n.

1. Montrer que $\forall x \in]0,a[$, $S_n(x)$ est croissante et majorée.
2. En déduire que la suite $(R_n(x))_{n\in\aleph}$ converge.
3. Montrer que $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.
4. En déduire que pour tout couple (x,y) de $]0,a[$, tel que x<y, on a $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.
5. Montrer que f est développable en série entière sur $]0,a[$.

Exercice 12 : (CCINP MP 2023)
On pose $I_0 = I_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on pose

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

On note $f\colon x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$.
1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière définissant f vérifie $R \geq 1$.
2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire l'expression de f, la valeur de R et une expression de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 13 : (Mines MP 2023)

On note $p(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$. On note $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que G est définie pour $|t| < 1$ et qu'on a
$\forall t \in \,]-1, 1[\,,\ G(t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.
2. En déduire un équivalent de $p(n)$.

Exercice 14 : Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On note Ω l'ensemble de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
a) Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si pour toute bijection $\sigma \in \Omega$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.
b) On pose, dans la suite, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Déterminer la valeur de $\sum u_n$.
c) Etablir la convergence et calculer la somme $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + ...$
d) Quelles sont les valeurs possibles, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $\sum u_{\sigma(n)}$ pour $\sigma \in \Omega$?

Exercice 15 : (Mines MPi 2023)
1. Montrez que $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière au voisinage de 0, et donnez son développement.
2. Montrez que $g :\ x \longmapsto \mathcal{R}e\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t\right)$ est développable en série entière au voisinage de 0, et donnez son développement.
3. Donnez la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 : (X 2007 94)
a) Montrer que $\frac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)}$ est réel.
b) En déduire une manière d'obtenir une valeur approchée de π.
c) Comparer la vitesse de convergence à celle d'autre séries donnant π.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 2,20,21,22,23,24,47,51.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : séries entières. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°8
- Groupe 5 à 7 : Programme n°8
- Groupe 8 à 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 à 14 : Programme n°7