Colles MPi* Semaine n°9 du 13/11/2023 au 17/11/2023 (Programme n°6)

Vallaeys Pascal

25 octobre 2023

Thème : Espaces probabilisés (sans variables aléatoires), dénombrement.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- Gobron Nicolo
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'un ensemble dénombrable.
- Définition d'une tribu.
- Compatibilité d'une tribu avec l'intersection finie ou dénombrable (démo)
- Définition d'une mesure de probabilité.
- La probabilité d'une union est inférieure à la somme des probabilités. (démo)
- Une union dénombrable d'évènements négligeables est négligeable. Idem pour « presque sûr » (« démo »)
- Formule des probabilités totales (démo)
- Formule de Bayes (« démo »)
- Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont également. (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Montrer que l'ensemble des entiers relatifs est dénombrable (démo). Idem pour $\mathbb{Q}+$, avec simplement une idée de démonstration (éventuellement le formalisme complet en exercice)
- Théorèmes de continuité croissante et décroissante (démo).
- Montrer que le corps des réels n'est pas dénombrable. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Une tribu infinie n'est pas dénombrable (exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable") (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :

Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'un match de badminton selon les règles suivantes : A commence à servir ; le joueur qui gagne le point sert pour le point suivant ; le joueur qui sert a probabilité 2/3 de gagner le point et 1/3 de le perdre. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n) l'événement « A (resp. B) gagne le n-ème point » ainsi que $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. A gagne le deuxième point, quelle est la probabilité qu'il ait gagné le premier ?
3. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
4. Montrer que M est diagonalisable puis expliquer la méthode pour déterminer M^n. Les suites (a_n) et (b_n) convergent-elles ?

Exercice 2 :

On souhaite ranger sur une étagère 14 livres de mathématiques (distincts), 3 livres de physique, et 11 d'informatique. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 3 : On considère deux points du plan à coordonnées entières. On veut aller de l'un à l'autre en avançant à chaque pas de 1 en abscisse ou en ordonnée. Combien y a-t-il de manières de faire (en fonction des coordonnées des points) ?

Exercice 4 : Combien les mots ABCDEF et AAABBCDE possèdent-ils d'anagrammes ?

Exercice 5 :

a) Mon voisin a deux enfants dont au moins une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon ?

b) Un autre voisin a deux enfants dont le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon ?

Exercice 6 : On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A, B et C les événements A={Le chiffre du premier dé est pair}, B={Le chiffre du deuxième dé est pair} et C={Les deux chiffres ont même parité}.

1. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 7 : Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0,1% des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 8 : Deux usines A et B fabriquent des trottinettes. L'usine A fabrique deux fois plus de trottinettes que l'usine B. Les trottinettes provenant de l'usine A ont dans 5% des cas un défaut, alors que celles provenant de l'usine B ont dans 2% des cas un défaut. Je viens d'acheter une trottinette, laquelle se révèle être défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 9 :
Démontrer les formules suivantes à l'aide de modélisation par une expérience, ou autre méthode :

1. $\binom{m+n}{r} = \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$
2. $\binom{n}{r} = \sum\limits_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}$
4. $2^p \binom{n}{p} = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n\_k}{p-k}$
5. $0 = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$
6. $\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - ....\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + ...\right)^2 = 2^n$. (Utiliser $(1+i)^n$)
7. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
8. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$
9. $\sum\limits_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$
10. $\prod\limits_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod\limits_{k=n+1}^{2n} k$
11. $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$ avec $2+p+q \leq n$
12. $\binom{n}{q} . \binom{n-q}{p-q} = \binom{p}{q} \binom{n}{p}$ avec $q \leq p \leq n$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k} . \binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 10 : (Mines MP 2021)
Soit p $\in]0,1[$ et $\alpha \in \left]0, \frac{1}{p} - \;\; 1\right[$. Pour $n \geqslant 1$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est αp^n.
1) Quelle est la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant ?
2) Quelle est la probabilité qu'une famille ait k garçons ?
3) Quelle est la probabilité qu'une la famille avec au moins un garçon ait au moins deux garçons ?

Exercice 11 : Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

Exercice 12 :
On considère un ensemble de 2n points. Combien existe-t-il de manière de les apparier deux à deux (on pourra proposer une démonstration directe et une démonstration par récurrence)

Exercice 13 : Soit A un ensemble fini. Déterminer $\sum\limits_{X\subset A} Card\left(X\right)$.

Exercice 14 : Soit E un ensemble. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 15 : On note S_n^k le nombre de surjections existant entre un ensemble à n éléments et un ensemble à k éléments.

1. Préciser les valeur de S_n^1 et S_n^n.
2. Montrer que $S_n^2 = 2^n - 2$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \binom{k}{j} S_n^j = k^n$.
4. Montrer que $S_n^j = j\left(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1}\right)$.
5. Implémenter un programme python permettant de calculer les S_n^k
6. Soit $f\left(x\right) = e^x - 1$. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, il existe des constantes $a_1\left(k\right), ..., a_k\left(k\right)$ telles que $\frac{d^n}{dx^n}\left[f^n\left(x\right)\right] = \frac{d^{n-k}}{dx^{n\_k}}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} a_j\left(k\right) f^{n-j}\left(x\right)\left(f'\right)^j\left(x\right)\right)$.
7. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{n-k} k^n \binom{n}{k} = n!$.
8. Montrer que $S_n^j = \sum\limits_{k=1}^{j} \left(-1\right)^{j-k} k^n \binom{j}{k}$.

Exercice 16 : On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ et s un réel strictement supérieur à un. On muni Ω de la tribu $T = P\left(\Omega\right)$. On note $\varsigma\left(s\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On munit T de la loi telle que : $p\left(\{n\}\right) = \frac{1}{\varsigma(s).n^s}$.

1. Montrer que c'est bien une probabilité.
2. Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, sont indépendants dans leur ensemble.
3. Exprimer l'évènement « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction des $\overline{A_p}$.
4. On numérote les nombres premiers dans l'ordre croissant : $2 = p_1 < p_2 < .... < p_k < ...$, et on note $E_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}$. Montrer que $p\left(\{1\}\right) = \prod\limits_{p\ premier} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.
5. En déduire $\varsigma\left(s\right) = \prod\limits_{p\ premier} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}$.

Exercice 17 :

Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention, on pose $D_0 = 1$.

Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ une bijection de cet ensemble dans lui-même qui n'admet aucun point fixe : aucun élément n'est égal à son image. On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$, et par convention, on pose $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .D_{n-k}$?
3. Calculer $\sum\limits_{k=i}^{n} \left(-1\right)^{n-k} . \binom{n}{k} . \binom{k}{i}$ pour $0 \leq i \leq n$.
4. Soient $\left(u_n\right), \left(v_n\right)$ deux suites réelles, telle que pour tout entier naturel n, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(-1\right)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$.
5. En déduire que $D_n = n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$.

6. Montrer, (éventuellement de deux manières), que $D_{n+1} = n\left(D_n + D_{n-1}\right)$.
7. On note δ_n la densité des dérangements parmi l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Déterminer la limite de δ_n quand n tend vers $+\infty$.
8. Montrer, de deux manières, que $D_{n+1} = n\left(D_n + D_{n-1}\right)$.
9. Retrouver la formule de la question d) à l'aide de f).

Exercice 18 :

Soit (Ω, A, p) un espace probabilisé, h une application définie sur Ω et f une application d'un ensemble E dans Ω.

1. Montrer que $\left(E, f^{-1}(A), p'\right)$, où p' est définie par $p'(B) = p(f(B))$, est un espace probabilisé.
2. Montrer que si on pose $h'(A) = \left\{B \in P(h(\Omega)) / h^{-1}(B) \in A\right\}$, $(h(\Omega), h'(A), p')$, où p' est défini par $p'(h(A)) = p(A)$, est un espace probabilisé.
3. Montrer que $(h(\Omega), h(A), p'')$ n'est pas en général un espace probabilisé. (comment définir p'' ?)

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 105,107,112.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Espaces probabilisés (sans variables aléatoires), dénombrement, exercices de sup. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°6
- Groupe 2 : Programme n°6
- Groupe 3 : Programme n°6
- Groupe 4 : Programme n°6
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 9 : Programme n°5
- Groupe 10 : Programme n°5
- Groupe 11 : Programme n°5
- Groupe 12 : Programme n°5
- Groupe 13 : Programme n°5
- Groupe 14 : Programme n°5
- Groupe 15 : Programme n°5
- Groupe 16 : Programme n°5