semaine 9 groupe C

Julien GERY, Marc BURGHGRAEVE et Olivier CAFFIER

Novembre 2024

Exercice 16 : (Centrale MP 2021)

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Réponse : On pose

$$\begin{aligned}\phi : c \to \int_a^b f(x)g(x)dx - f(c)\int_a^b g(x)dx \\ = \int_a^b g(x)(f(x) - f(c))dx.\end{aligned}$$

ϕ est continue sur $[a; b]$. D'autre part, d'après le théorème des bornes atteintes, $\exists \alpha, \beta \in [a; b], f(\alpha) = \underset{x\in[a;b]}{max} f(x), f(\beta) = \underset{x\in[a;b]}{min} f(x)$. Ainsi $\phi(\alpha) \leq 0, \phi(\beta) \geq 0$ (car $g \geq 0$)
Donc d'après le TVI, $\exists c \in [a; b], \phi(c) = 0$, d'où le résultat.

2) Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx.$$

Réponse (longue comme un lundi) :
Pour $n \in \mathbb{N}, x \in [0; \pi]$, $sin(nx) = 0 \iff nx = k\pi x \iff x = \frac{k\pi}{n}$

Dès lors,

$$\int_0^\pi f(x)|sin(nx)|dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int {\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|sin(nx)|dx (= J_k)$$

$$\begin{aligned}
J_k &= \int {\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|sin(nx)|dx \\
&= \frac{1}{n} \int k\pi^{(k+1)\pi} f(\frac{t}{n})|sin(t)|dt \\
&= \frac{1}{n} \int_0^\pi f(\frac{u}{n} + \frac{k\pi}{n})|sin(u+k\pi)|du = \frac{1}{n} \int_0^\pi f(\frac{u}{n} + \frac{k\pi}{n})|sin(u)|du
\end{aligned}$$

Or $g : u \to |sin(u)|$ positive et C^{pm} sur $\mathbb{R}$ et f est C^0 sur $[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n}]$ donc d'après la question 1), $\exists c_{k,n} \in [\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n}]$, $J_k = \frac{1}{n} f(c_{k,n}) \int_0^\pi |sin(u)|du = \frac{2}{n} f(c_{k,n})$.Ainsi,

$$I_n = \int_0^\pi f(x)|sin(nx)|dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f(c_{k,n})$$

Posons alors

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\pi f(x)dx$$

(somme de Riemann).
Montrons donc que $\lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{S_n} = \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \frac{\pi}{\mathbf{2}} \mathbf{I_n}$ ie $|S_n - \frac{\pi}{2} I_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Soit $\varepsilon > 0. \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|S_n - \frac{\pi}{2} I_n| &= \frac{\pi}{n} | \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{k,n}) - f(\frac{k\pi}{n})| \\
&\leq \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(c_{k,n}) - f(\frac{k\pi}{n})|
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0; \pi]$, ie $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [0; \pi], |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.
Posons donc $\epsilon = \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$ et considérons un α qui convient.
$\forall k \in [\![0, n-1]\!], c_{k,n} \in [\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n}] \implies |c_{k,n} - \frac{k\pi}{n}| \leq \frac{\pi}{n}$
Donc si $\frac{\pi}{n} \leq \alpha$ ie $n \geq \frac{\pi}{\alpha}, |c_{k,n} - \frac{k\pi}{n}| \leq \alpha \implies |f(c_{k,n}) - f(\frac{k\pi}{n})| \leq \epsilon$.

Finalement,

$$\begin{aligned}|S_n - \frac{\pi}{2}I_n| &= \frac{\pi}{n}|\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{k,n}) - f(\frac{k\pi}{n})| \\ &\leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(c_{k,n}) - f(\frac{k\pi}{n})| \\ &\leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon \\ &\leq \frac{\pi}{n}n\epsilon = \pi\frac{\varepsilon}{\pi} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat voulu (ouf)

Exercice 17 : (Mines-Ponts 2019)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\forall\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, Pn(\frac{1}{tan^2\theta}) = \frac{sin((2n+1)\theta)}{sin^{2n+1}\theta}$
Réponse : d'après la **formule de moivre** :

$$cos((2n+1)\theta) + isin((2n+1)\theta) = (cos(\theta) + isin(\theta))^{2n+1}$$

En utilisant le **binôme de Newton**:

$$(cos(\theta) + isin(\theta))^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k sin^k cos^{2n+1-k}$$

On ne garde que les imaginaire:

$$\sum_{\substack{k=0,\\ k\ impair}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k sin^k cos^{2n+1-k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}i^j sin^j cos^{2n+1-j}$$

On pose $k = n - j$, $j = n - k$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2(n-k)+1}(-1)^{n-k} sin^{2(n-k)+1} cos^{2n-2(n-k)}$$

On divise par sin^{2n+1}, et par symétrie des coef binomiaux :

$$\frac{sin(2n+1)}{sin^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}(\frac{cos}{sin})^{2k}$$

Donc $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2k}}(-\mathbf{1})^{\mathbf{n-k}}\mathbf{X}^{\mathbf{k}}$

b) Préciser le degré et les racines de P_n. Etudier la somme des racines.
Réponse : P_n est de degré n.
$P_n(\frac{1}{tan^2(\theta)}) = \frac{sin((2n+1)\theta)}{sin^{2n+1}(\theta)} = 0$

$$\iff sin((2n+1)\theta) = 0$$

$$\iff (2n+1)\theta \equiv 0[\pi]$$

$$\iff \theta \equiv 0[\frac{\pi}{2n+1}]$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\theta_k = \frac{\pi k}{2n+1}$. Ainsi, $\theta_k \in]0, \frac{\pi}{2}[$ or la tangente est injective (et strictement positive) sur cette intervalle donc tout les $tan^2(\theta_k)$ sont 2 à 2 distincts. On a donc n racines distinctes, et le polynôme est de degré n donc les $\frac{1}{tan^2(\theta_k)}$ sont exactement les racines de P_n.
La somme des racines nous est donné par les formules de Viète: $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+1}{2(n-1)}}{\binom{2n+1}{2n}} = \frac{1}{3}n(2n-1)$.

c) Montrer que $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, \frac{1}{tan^2\theta} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq 1 + \frac{1}{tan^2\theta}$
Réponse : l'inégalité de gauche vient du fait que $tan(x) \geq x \geq 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, sur $]0, \frac{\pi}{2}[, 0 < sin(x) \leq x$ d'où :

$$\frac{1}{sin^2\theta} = \frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{tan^2\theta} \geq \frac{1}{\theta^2}$$

ce qui permet de conclure.

d) En déduire la valeur de $\sum_n^{+\infty} \frac{1}{n^2}$:
Réponse : Soit donc $S_n = \sum_{k=1}^n cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{1}{3}n(2n-1)$.
On pose $T_n = \sum_{k=1}^n 1 + cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = n + S_n = \frac{2}{3}n(n+1)$.
D'après l'inégalité précédente, on a alors, $\forall k \in [\![1, n]\!]$:

$$cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1 + cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1})$$
$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2 T_n}{(2n+1)^2}$$

Or $\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} = \pi^2 \frac{2n^2-n}{12n^2+12n+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$,
et $\frac{\pi^2 T_n}{(2n+1)^2} = \pi^2 \frac{2n^2+2n}{12n^2+12n+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$,
Ce qui donne bien le résultat voulu par encadrement.

Exercice 18 : (Mines-Ponts 2019)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et E l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$ Pour $f \in E$, on note $\phi(f) = \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$. Déterminer $\phi(E)$.

Réponse : Soient $f, g \in E$. L'application $\langle f, g\rangle \longmapsto \int_a^b f \cdot g$ définit un produit scalaire sur E. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\int_a^b f * g)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$$

On pose donc "$f^2 = f$" et $g^2 = \frac{1}{f}$. il vient donc:

$$(\int_a^b 1)^2 \leq \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$$

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$$

De plus, si on prend la fonction constante égale à 1, on a le cas d'égalité. D'où $\phi(E) \subseteq [(b-a)^2; 1+\infty[$.
Soit $c \geq 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $f(x) = e^{cx}$. Si $c = 0$, alors f est la fonction constante égale à 1. Supposons $c > 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{e^{cb} - e^{ca}}{c}$$

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \frac{e^{-cb} - e^{-ca}}{-c}$$

Donc:

$$\int_a^b f(x)dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \frac{e^{cb} - e^{ca}}{c} \times \frac{e^{-cb} - e^{-ca}}{-c} = \frac{e^{c(b-a)} + e^{-c(b-a)} - 2}{c^2}$$

$$= 2\frac{ch(c(b-a)) - 1}{c^2}$$

Un rapide calcul de limite et un argument de continuité permettent de conclure : $\phi(E) = [(b-a)^2, +\infty[$.

Exercice 19 : (Mines PC)

On suppose que le graphe de f admet deux centres de symétrie. Montrer que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Démo 1 :

Soit f une fonction qui convient. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ deux centres de symétrie tels que $x_1 \neq x_2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$f(x_1 + x) + f(x_1 - x) = 2y_1$$

$$f(x_2 + x) + f(x_2 - x) = 2y_2$$

En posant le changement de variable $u = x_1 + x$ et $v = x_2 + x$:

$$f(u) = 2y_1 - f(2x_1 - u)$$

$$f(v) = 2y_2 - f(2x_2 - v)$$

La variable est muette on pose "$x = v = u$":

$$0 = 2(y_1 - y_2) - f(2x_1 - x) + f(2x_2 - x)$$

i.e

$$f(2x_1 - x) = 2(y_1 - y_2) + f(2x_2 - x)$$

On pose $u = 2x_1 - x$:

$$f(u) = 2(y_1 - y_2) + f(2(x_2 - x_1) + u)$$

Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose $g(x) = cx$ et $h(x) = f(x) - g(x)$. Montrons que h est périodique (pour un c bien choisi) :

$$f(2(x_2 - x_1) + x) - g(2(x_2 - x_1) + x) = f(2(x_2 - x_1) + x) - c * (2(x_2 - x_1) + x)$$

$$f(2(x_2 - x_1) + x) - g(2(x_2 - x_1) + x) = f(x) - 2(y_1 - y_2) - c2(x_2 - x_1) - cx$$

i.e

$$f(x) - cx = f(2(x_2 - x_1) + x) - g(2(x_2 - x_1) + x) + c2(x_2 - x_1) + 2(y_1 - y_2)$$

i.e

$$h(x) = h(2(x_2 - x_1) + x) + c2(x_2 - x_1) + 2(y_1 - y_2)$$

On choisit c tel que $c \cdot 2(x_2 - x_1) + 2(y_1 - y_2) = 0$, donc $c = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$. Ainsi, h est périodique de période $2(x_2 - x_1)$ et $f(x) = h(x) + g(x)$, ce qui est le résultat voulu.

Démo 2 :

On peut supposer sans perdre de généralité qu'un de ces centres de symétrie est $(0, 0)$ — quitte à considérer la fonction $g(x) = f(x - a) - b$ pour un centre (a, b), ce qui n'a pas d'impact sur ce que l'on veut montrer.

f admet $(0, 0)$ comme centre de symétrie revient à dire que f est impaire, soit

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ensuite, si l'on appelle (T, S) l'autre centre de symétrie (avec $T \neq 0$), on a donc

$$f(x - T) - S = -f(-x - T) + S \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Donc, de (1) on déduit

$$-f(-x - T) + S = f(x + T) + S,$$

et grâce à (2) on obtient

$$f(x+T)+S=f(x-T)-S. \tag{3}$$

Maintenant, considérons la fonction

$$h(x)=f(x)-\frac{S}{T}x.$$

Il suffit de montrer que h est $(2T-)$ périodique et on aura gagné — puisqu'on aura écrit f comme la somme de h et de la fonction linéaire $x \mapsto \frac{S}{T}x$.

Et en effet, grâce à (3),

$$h(x)-h(x+2T)=f(x)-\frac{S}{T}x-\left(f(x+2T)+x\frac{S}{T}+2S\right)=0.$$

Exercice 20 : (Classique écrits X-ENS)

Montrer qu'une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique, est uniformément continue.

Soit f une fonction continue de période $T>0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-T,2T]$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \mu>0, \forall x,y\in[-T,2T], |x-y|\leq \mu \implies |f(x)-f(y)|\leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon>0$. Soit μ qui convient. Quitte à le prendre plus petit, on peut le supposer $\leq T$. Soit $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $|x-y|\leq\mu$. Soit $k\in\mathbb{Z}$ tel que $0\leq x-kT<T$. Un rapide calcul nous donne que $k=\left\lfloor \frac{x}{T}\right\rfloor$. Ainsi, $y-kT\in[-T,2T]$.

$$|f(x)-f(y)|=|f(x-kT)-f(y-kT)|\leq\varepsilon$$

d'où le résultat.

Exercice 21 :

Soit f une fonction de classe C^3 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''+O(\frac{1}{n^3})$$

En déduire un développement limité à l'ordre 3 de

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k}$$

En utilisant la formule de Taylor-Young, f étant C^3:

$$f(u) = f(\frac{k}{n}) + f'(\frac{k}{n})(u - \frac{k}{n}) + f''(\frac{k}{n})\frac{(u - \frac{k}{n})^2}{2} + f'''(\frac{k}{n})\frac{(u - \frac{k}{n})^3}{3!} + O(\frac{1}{n^4})$$

En intégrant de $\frac{k}{n}$ a $\frac{k+1}{n}$:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})+f'(\frac{k}{n})(u-\frac{k}{n})+f''(\frac{k}{n})\frac{(u - \frac{k}{n})^2}{2}+f'''(\frac{k}{n})\frac{(u - \frac{k}{n})^3}{3!}+O(\frac{1}{n^4})du$$

$$= \frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) + f'(\frac{k}{n})\frac{1}{2n^2} + f''(\frac{k}{n})\frac{1}{6n^3} + f'''(\frac{k}{n})\frac{1}{24n^4} + O(\frac{1}{n^5})$$

En sommant de 0 a $n-1$:

$$\int_0^1 f(u)du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})+\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'(\frac{k}{n})+\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\frac{k}{n})+\frac{1}{24n^4}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n})+O(\frac{1}{n^4})$$

Soit:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(u)du-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'(\frac{k}{n})-\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\frac{k}{n})-\frac{1}{24n^4}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n})+O(\frac{1}{n^4})$$

En tronquant ce résultat pour f', f'', on trouve :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f'(u)du - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\frac{k}{n}) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n}) + O(\frac{1}{n^3})$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f''(u)du - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n}) + O(\frac{1}{n^2})$$

En remplacant dans la première égalité:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(u)du-\frac{1}{2n}(\int_0^1 f'(u)du-\frac{1}{2n}(\int_0^1 f''(u)du-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n})+O(\frac{1}{n^2}))-\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n})+O(\frac{1}{n^3}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(u)du - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(u)du + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(u)du + O(\frac{1}{n^3})$$

Car $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f'''(u)du + o(1)$. Il sera donc absorbé par le $O(\frac{1}{n^3})$.
Pour donner le DL de la somme de Riemann, il suffit de poser le changement d'indice $j = k - n$, $k = j + n$ pour obtenir:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+j}$$

On pose $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ qui est C^∞ sur $[0,1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f - \frac{1}{2n}\int_0^1 f' + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f'' + O(\frac{1}{n^3})$$

Tout calcul fait on trouve:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + O(\frac{1}{n^3})$$

Exercice 22 :(X 2006 142)

On note $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ Déterminer $\inf \int_0^1 |f - f'|$. (On posera $g(x) = f(x)e^{-x}$)

Soit $f \in E$. Calculons $\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))dt$. En faisant une I.P.P(*):

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))dt &= \left[e^{-t}f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)(-e^{-t})\,dt - \int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Ainsi, soit $t \in [0,1]$:

$$\left|\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\,dt\right| = \frac{1}{e}$$

I.T

$$\int_0^1 e^{-t}\,|f'(t) - f(t)|\;dt \geq \frac{1}{e}$$

Or, $e^{-t} \leq 1$, donc $e^{-t}|f'(t) - f(t)| \leq |f'(t) - f(t)|$. Par croissance de l'intégrale, on a $\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,dt \geq \frac{1}{e}$. Ce minorant n'est jamais atteint (exo). Donnons une suite de fonctions qui converge vers ce minorant.
Soit $n \geq 1$, on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} n(2t - nt^2)e^{t-1} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}[\\ e^{t-1} & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Montrons que $f_n \in E$. f_n est C^1 sur $[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}$. f_n est C^0 en $\frac{1}{n}$ et, en utilisant le théorème de la limite de la dérivée, on trouve que f_n est C^1 sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
On pose

$$I_n = \int_0^1 |f_n'(t) - f_n(t)|\;dt$$

On montre que $I_n \to \frac{1}{e}$.

Exercice 23 :

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que si x et y sont réels positifs, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
Réponse : On peut donc appliquer l'inégalité de Jensen. Il vient que :

$$\ln(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q).$$

Le résultat est immédiat en utilisant les propriétés du log puis en appliquant l'exponentielle.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
Réponse : Supposons que la somme des $|x_k|^p$ et des $|y_k|^q$ soit égale à 1. On ne perd pas de généralité car si par exemple la somme des $|x_k|^p$ vaut l alors on retrouve le résultat avec $x'_k = \frac{x_k}{\sqrt[p]{l}}$. Dès lors en sommant l'inégalité précédente, il vient :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cela termine la preuve, puisque

$$1 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

c) En déduire que $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Réponse : A titre culturel, on vient de prouver l'inégalité de Hölder, et pour la suite, il faut en fait démontrer l'inégalité de Minkowski (l'inégalité triangulaire étant le seul point complexe de la question, les autres éléments étant triviaux). On décompose $(x_i + y_i)^p$ en

$$(x_i + y_i)^{p-1}x_i + (x_i + y_i)^{p-1}y_i.$$

Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire que $pq - q = p$. En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des termes, on a :

$$\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \times \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat.

d) Montrer que si f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$, on a

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Réponse :

(i) Si $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = \int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1$, d'après l'inégalité de Young, on a : pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$$

par suite

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(ii) Si $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ ou $\int_a^b |g(x)|\,dx = 0$, alors $\int_a^b |fg|\,dx = 0$ et l'égalité.

(iii) Si $\int_a^b |f(x)|^p\,dx > 0$ et $\int_a^b |g(x)|^q\,dx > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{1/p}}$ et $g_1 = \frac{g}{\left(\int_a^b |g|^q\,dx\right)^{1/q}}$. Alors

$$\left(\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_a^b |g_1(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = 1$$

et d'après (i) on a $\int_a^b |f_1(x)g_1(x)|\,dx \le 1$, d'où

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$