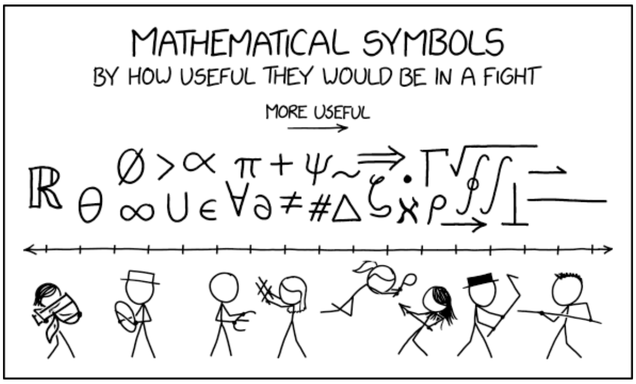
MPI* Maths-Info

Nombres de Catalan

(démonstration)



Lucas Valemberg

Définition - Mot bien parenthésé

Un mot est dit *bien parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une unique parenthèse fermante qui lui est postérieure.

Remarquons qu'avec une telle définition, les mots de longueur impaire ne sont jamais bien parenthésés.

EXEMPLE

$$(\,(\,(\,)\,)\,)\,(\,)$$

est bien parenthésé.

$$(\,(\,(\,)\,)\,(\,)$$

ne l'est pas.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note alors C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. Par convention, on prendra $C_0 = 1$. C_n est appelé *nombre de Catalan d'indice n*.

On se propose de démontrer, de manière analytique, le résultat suivant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}}$$

On note f la série entière associée à $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ de rayon de convergence R.

L'idée est de montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$ de sorte que, si on arrive à montrer que $R > 0$, l'unicité du développement en série entière nous assurera que : $C_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$.

Questions intermédiaires

On montrera les résultats suivants :

1. Montrer que $R > 0$
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$

$\boxed{1}$ Montrons le résultat suivant :

Lemme 1

$$R > 0$$

DÉMONSTRATION.

On veut simplement montrer que $R > 0$ et non donner sa valeur.
Ainsi, si l'on arrive à montrer qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $C_n \leq a_n$ pour tout n alors on aura $R \geq R_a$ où R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Si $R_a > 0$ alors, par suite, $R > 0$ et c'est gagné.

Notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des mots bien parenthésés de longueur $2n$ (ainsi : $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) = C_n$) et $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des mots de longueur $2n$ bien parenthésés ou non. Remarquons que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{B}_n$ et ces deux ensembles étant de cardinal fini : $C_n \leq \mathrm{card}(\mathcal{B}_n)$.

Or, un mot de $\mathcal{B}_n$ est entièrement déterminé par :

— Sa première lettre : 2 choix possible (une parenthèse ouvrante ou une parenthèse fermante).

— Sa deuxième lettre : toujours 2 choix possible.

...

— Sa $(2n)$-ième lettre : 2 choix possible.

Par principe multiplicatif : $\mathrm{card}(\mathcal{B}_n) = 2^{2n}$ donc $C_n \leq a_n$ où $a_n = 2^{2n}$.

Il est clair que $a_n > 0$ pour tout n. Ainsi :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{2n+2}}{2^{2n}} = 4$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières : $R_a = \frac{1}{4}$. On

en déduit que $R \geq \frac{1}{4}$ et donc $R > 0$.

$\boxed{2}$ On veut montrer le lemme suivant :

Lemme 2

$$\forall n \geq 1,\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

DÉMONSTRATION. Utilisons un raisonnement combinatoire, on cherche à caractériser les mots bien parenthésés de longueur $2n$. Pour cela, essayons de partitionner $\mathcal{A}_n$ en n ensembles disjoints.

Soit $m = m_1 \cdots m_{2n} \in \mathcal{A}_n$. Considérons une suite $(u_0, u_1, ..., u_{2n})$ définie comme suit :

$$u_0 = 0 \text{ et} : \forall i \in [\![1;2n]\!],\ u_i = u_{i-1} + \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est une parenthèse ouvrante.} \\ -1 & \text{si } m_i \text{ est une parenthèse fermante.} \end{cases}$$

Le mot m étant bien parenthésé, les u_i sont positifs et le nombre de parenthèses fermantes est égal au nombre de parenthèses ouvrantes donc $u_{2n} = 0$.

Notons $\mathcal{I} = \{ i \in [\![1;2n]\!] \mid u_i = 0 \}$. $\mathcal{I}$ est un ensemble d'entiers naturels non vide (car $2n \in \mathcal{I}$) donc possède un minimum qu'on note p_m. On peut interpréter p_m comme la position de la parenthèse fermante formant le premier préfixe de m bien parenthésé.

Étant donné que p_m correspond à la position d'une parenthèse fermante, p_m est pair. Notons alors $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des mots $m \in \mathcal{A}_n$ tels que $p_m = 2k$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. Les éléments de cet ensemble sont exactement les mots qui s'écrivent $(m)m'$ avec m bien parenthésé de taille $2k-2 = 2(k-1)$ et m' bien parenthésé de taille $2n-2k = 2(n-k)$. On en déduit que : $\text{card}(\mathcal{A}_{n,k}) = C_{k-1}C_{n-k}$.

Or, $\mathcal{A}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{A}_{n,k}$ et cette union est disjointe donc par prise de cardinal :

$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$.

En effectuant le changement d'indice $i = k-1$ on a : $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$.

$\boxed{3}$ On veut en déduire le théorème suivant

Théorème

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

DÉMONSTRATION. L'expression de C_n trouvée au lemme précédent nous fait immédiatement penser au c_n dans le produit de Cauchy de $f(x)$ par lui-même.

En effet, pour tout x tel que $|x| < R$, on peut faire le produit de Cauchy de $f(x)$ par lui-même car f est une série entière de rayon de convergence R :

$f(x) \times f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1}$ d'après le lemme 2.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
xf(x)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} C_k x^k && (k = n+1) \\
&= f(x) - C_0 x^0 \\
&= f(x) - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $|x| < R$, $f(x)$ est solution de $(\mathcal{E}_x) : xr^2 - r + 1$ d'inconnue r.

— Si $x = 0$ alors $f(0) = C_0 = 1$.
— Supposons $x \neq 0$:

$\Delta = 1 - 4x > 0$ donc on a deux solutions : $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$ i.e. $f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$ et donc $2xf(x) - 1 = \pm\sqrt{1-4x}$.

On trouve le signe à l'aide d'un passage à la limite. En effet, ces deux quantité doivent avoir même limite quand x tend vers 0.

$2xf(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} -1$ donc pour que $\pm\sqrt{1-4x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$ il faut que $2xf(x) - 1 = -\sqrt{1-4x}$. Par conséquent, pour tout $x \in]-R\,;R[$,

$$f(x) = g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On commence à voir le bout du tunnel : il ne reste plus qu'à développer g en série entière et prier pour que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{x^n}{n+1}$.

On sait que :

$$\forall u \in]-1\,;1[, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$$

Dans notre cas, on prends $u = -4x \in]-1;1[$ pour $x \in]-R\,;R[$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4x)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (-1) \times \left(\frac{2k-1}{2}\right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n!\,2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k-1) \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n!\,2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)
\end{aligned}$$

Le calcul de $\prod(2k-1)$ étant très classique, il faut absolument savoir le faire :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n!\,2^n} \frac{\overbrace{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \prod_{k=1}^{n-1} (2k)}^{=(2n-2)!}}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k)} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n!\,2^n} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\,(n-1)!} \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!} x^n
\end{aligned}$$

Si $x \neq 0$, on peut diviser l'égalité ci-dessus par x et obtenir :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}\, x^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{k!\,(k+1)!}\, x^k && (k = n-1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}\, x^n \end{aligned}$$

On remarque que cette égalité reste vraie si $x = 0$ donc l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in]-R\,;R[$ avec $R > 0$ donc par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$$

d'où le résultat tant recherché.