Colles MPi* Semaine n°20 du 12/02/2024 au 16/02/2024 (Programme n°14)

Vallaeys Pascal

1er février 2024

Thème : Structures algébriques, arithmétique.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définitions de sous-groupe, sous-anneau, sous-algèbre.

- Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe. (démo)
- Produit cartésien de deux groupes. C'est un groupe. (démo)
- Définitions de morphisme de groupe, morphisme d'anneau, d'algèbre.
- L'image directe et l'image réciproques de sous-groupes par un morphisme de groupe sont des sous-groupes. (démo)
- Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont les $n\mathbb{Z}$. (démo)
- Sous-groupe engendré par une partie, sous-groupe engendré par un élément.
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes par le noyau. (démo)
- Définition d'un idéal et lien avec les noyaux des morphismes d'anneau. (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- L'ordre d'un élément, dans un groupe fini, divise le cardinal du groupe. (démo dans le cas cyclique)
- Somme de deux idéaux, c'est un idéal. (démo)
- Dans $(\mathbb{Z},+)$, lien entre pgcd et somme d'idéaux. (démo)
- Éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$. (démo)
- Générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. (démo)
- Théorème des restes chinois. (démo)
- Définition de l'indicatrice d'Euler, propriétés et calcul. (démo)
- Théorème d'Euler. (démo)
- Définition du pgcd dans $\mathbb{R}[X]$.
- Théorèmes de Gauss et de Bezout dans $\mathbb{R}[X]$. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Un groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. (démo)
- Un groupe cyclique de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. (démo)
- L'ordre d'un élément, dans un groupe fini, divise le cardinal du groupe. (démo dans le cas général, non faite en classe)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Résoudre $\begin{cases} x \equiv 3\,[11] \\ x \equiv 2\,[19] \end{cases}$, puis $\begin{cases} 3x \equiv 1\,[5] \\ 5x \equiv 2\,[6] \end{cases}$.

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2022)
On pose $f : z \in \mathbb{U}_n \to z^2 \in \mathbb{U}_n$ où $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité.
1) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ $\;f$ est-elle bijective ?
2) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ $f \circ f = Id$?

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1$.
Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n.
Dans les cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2021)
1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 10 = 1$. Montrer que $n^4 \equiv 1 \;\; [10]$.
b) On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^{4\times 10^k} \equiv 1 \;\; [10^{k+1}]$.

Exercice 5 : (IMT MP 2019)
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que si m divise n, $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.
b) Étudier la réciproque.

Exercice 6 : Soit G un groupe. A quelle condition sur G l'application $x \to x^{-1}$ est-elle un morphisme de groupe ?

Exercice 7 :

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et x un élément de A nilpotent. Montrer que 1-x est inversible.

Exercice 8 :
Soit $n>2$ un entier naturel et a un entier premier avec n. Montrer que $a^{n!}\equiv 1\,[n]$

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 9 :
Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si :
$\forall (x,y)\in A^2, xy\in I \implies x\in I$ ou $y\in I$.
Soit A un anneau abélien dont tous les idéaux sont premiers, montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

Exercice 10 :
Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle "radical" de I et l'on note $\sqrt{I}$, l'ensemble : $\sqrt{I}=\{x\in A\,|\,\exists n\in\mathbb{N}^*, x^n\in I\}$.
1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
2) Donner le radical de deux exemples simples d'idéaux de A.
3) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que :
a) $I\subset J\Longrightarrow \sqrt{I}\subset\sqrt{J}$;
b) $\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$;
c) $\sqrt{I}=\sqrt{\sqrt{I}}$.
4) Application dans $\mathbb{Z}$: on donne $m=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i$ et $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ où $k\in\mathbb{N}^*$ et, pour tout i de 1 à k, $p_i\in\mathbb{P}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $p_1<p_2<\cdots<p_k$.
Montrer que $m\mathbb{Z}=\sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 11 : A quelle condition l'union de deux sous-groupes est-elle un sous-groupe ?

Exercice 12 : On désigne par a et p des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
a) Montrer que si a^p-1 est premier alors a=2 et p est premier.
b) Montrer que si 2^n+1 est premier alors n est une puissance de 2.
c) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que $P(n)$ soit premier pour tout entier naturel n. (On montrera que si P(n) est premier, P(n) divise P(n+P(n)))
d) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme 6k-1, où k est un nombre entier naturel.

Exercice 13 :
Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $n=\sum\limits_{d/n}\varphi(d)$.

Exercice 14 : Théorème de Wilson.
Soit p un nombre premier autre que 2.
a) Quels sont les éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ égaux à leur inverse ?
b) En déduire que $(p-1)!\equiv -1\,[p]$.
c) Etudier le problème réciproque : cette congruence entraine-t-elle que p est premier ?

Exercice 15 : (Mines MP 2022)
Montrer qu'aucun des nombres de la forme $10001, 100010001\dots$ n'est premier.

Exercice 16 :
Soit G un groupe fini tel que $\forall x\in G, g^2=e$.
Question 1. Montrer que G est abélien et qu'il est de cardinal une puissance de 2.
Indications. S'intéresser à xy avec $x,y\in G$. S'intéresser au plus grand sous-groupe de G de cardinal une puissance de 2 en le supposant plus petit que G.

Exercice 17 :
Soit G un groupe. Montrer l'équivalence suivante : G est fini $\Leftrightarrow$ G admet un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 18 :

Exprimer $\sin 3x$ comme polynôme de $\sin x$. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

Exercice 19 : Montrer qu'il y a un nombre de la forme 111. . .1 (c'est à dire que tous les chiffres décimaux sont 1) qui est divisible par 19.

Exercice 20 : (Mines-Ponts 2017 et tous les ans)
Soit $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.
a) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$.
b) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) = U$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 21 :
a) Quel est le plus petit entier n pour lequel il existe deux groupes de cardinal n non isomorphes.
b) Quel est le plus petit groupe non commutatif ?

Exercice 22 :
Soit m un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier naturel. On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + i.b \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}\}$, et $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + \sqrt{m}.b \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.
b) Déterminer les éléments inversibles de cet anneau ainsi que la structure algébrique de l'ensemble des ces éléments inversibles.
c) Montrer que $A = (\mathbb{Z}[\sqrt{m}], +, \times)$ est un anneau.
d) On pose sur A : $N(a + b.\sqrt{m}) = a^2 - b^2.m$. Montrer que l'image par N du produit de deux éléments de A est égale au produit des images de ces éléments.
e) En utilisant N, déterminer les éléments inversibles de A.
f) Si m=13, montrer que 2, $3 - \sqrt{13}$ et $-3 - \sqrt{13}$ sont irréductibles (Ils ne peuvent s'écrire sous la forme du produit de deux éléments non inversibles).
g) Toujours pour m=13, donner un exemple de nombre pouvant se décomposer de plusieurs manière en produit d'irréductibles.
h) Démontrer que sur $\mathbb{R}[X]$, la décomposition en produits d'irréductibles est unique.

Exercice 23 :
Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note P_σ la matrice de permutation associée (ie en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice de l'application linéaire qui à e_i associe $e_{\sigma(i)}$). Montrer qu'il y a équivalence entre :

- σ et τ sont conjuguées
- P_σ et P_τ sont semblables

Exercice 24 : (Mines MP 2021)
Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 25 :
On note $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, avec a<b deux réels fixés. Soit $f \in E$ une fonction non constante.
a) Montrer que la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre. (attention au sens de l'écriture f^n)
b) En déduire les sous-algèbres de dimension finies (en tant qu'espace vectoriel) de E.
c) Soit $c \in [a, b]$. On note $I_c = \{f \in E \text{ telle que } f(c) = 0\}$. Montrer que I_c est un idéal de E.
d) Montrer que I_c vérifie la propriété (*) : $\forall J$, idéal de E, tel que $I_c \subset J \subset E$, on a soit $I_c = J$, soit $J = E$.
e) Montrer que tout idéal de E vérifiant la propriété (*) est de la forme I_c.

Exercice 26 : Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 86,94.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : structures algébriques, arithmétique. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°14
- Groupe 2 : Programme n°14
- Groupe 3 : Programme n°14
- Groupe 4 : Programme n°14
- Groupe 5 : Programme n°14
- Groupe 6 : Programme n°14
- Groupe 7 : Programme n°14
- Groupe 8 : Programme n°14
- Groupe 9 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 10 :Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 13 : Programme n°13
- Groupe 14 : Programme n°13
- Groupe 15 : Programme n°13
- Groupe 16 : Programme n°13