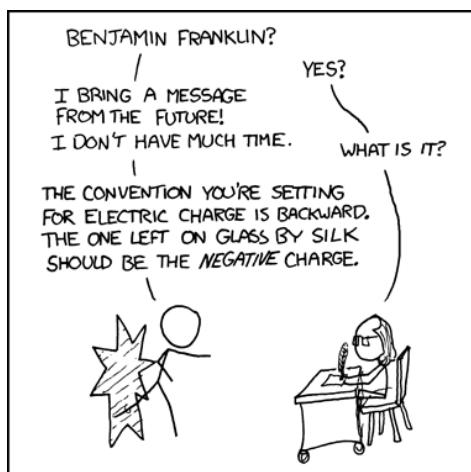


MPI\* Physique  
TD Électromagnétisme

Magnétostatique



Olivier Caffier



# 1 Champ dans un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres de même axe, de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , conducteurs, sur lesquels circulent des courants  $I$  et  $-I$  respectivement (voir figure 1). Ces courants circulent de manière uniforme sur les surfaces métalliques des cylindres.

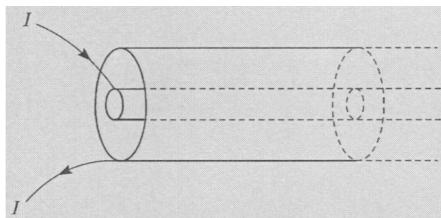


FIGURE 1 – Câble coaxial

1. Calculez le champ magnétique rayonné dans tout l'espace.
2. Déduisez-en un intérêt pratique de ce type de câble.

**Corrigé :**

① Source de  $\vec{B}$  : courants  $I$  et  $-I$

Invariances & symétries

$$\left. \begin{array}{l} \text{Invariances par translation le long de } O_z \\ \text{par rotation autour de l'axe } O_z \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}(r) = \vec{B}(r, \theta, z)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Symétries Vecteur } (\vec{v}_r, \vec{v}_z) \text{ plan de symétrie} \\ \vec{B} \text{ pseudo-vecteur} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{v}_r, \vec{v}_z$$

$$\text{DONC } \vec{B}(r) = B(r) \vec{v}_\theta$$

Choix du contour d'Ampère On prend  $\Gamma$  un cercle de rayon  $r$ , passant par  $M$ , orienté dans le sens de  $i$ .

$$\text{Circulation de } \vec{B} \quad \text{On a} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B(r) \vec{v}_\theta \cdot d\vec{l} \overset{r=dc}{=} B(r) \oint_{\Gamma} dl \quad \text{D'où} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r$$

Enroulé Trois cas se présentent à nous, en prenant  $S$  le disque délimité par  $\Gamma$

$$\text{Si } r < R_1 \quad I_{\text{enroulé}} = 0$$

$$\text{Si } R_1 < r < R_2 \quad I_{\text{enroulé}} = I$$

$$\text{Si } r > R_2 \quad I_{\text{enroulé}} = I - I = 0 \quad (\text{les courants se compensent})$$

Théorème d'Ampère magnétostatique

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enroulé}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{v}_\theta & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

② Ce type de câble ne rayonne donc pas en dehors de lui:

$\Rightarrow$  câble "blindé"

$\Rightarrow$  érite tout type de perturbation dans un câblage conséquent (Télécoms, musique)

## 2 Champ magnétique d'un éclair

La distribution de courants représentée figure 2 modélise le courant d'un éclair tombant verticalement sur le sol. Un cour-

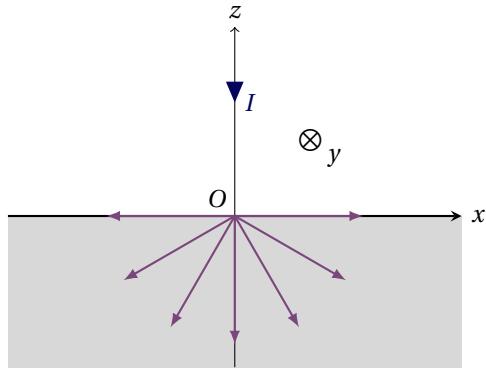


FIGURE 2 – Champ magnétique d'un éclair

rant d'intensité  $I$  descend l'axe  $Oz$  et se répand de manière isotrope dans le sol (demi-espace  $z < 0$ ).

1. Déterminez la densité volumique de courant en tout point dans le sol, en notant  $r$  sa distance à  $O$ .
2. Déduisez-en le champ magnétostatique en tout point de l'espace.

*Indication : L'aire d'une calotte sphérique de rayon  $r$  et de demi-angle au centre  $\alpha$  est  $2\pi r^2(1 - \cos(\alpha))$ .*

**Corrigé :**

- ① Plaçons-nous en coordonnées sphériques ( $z < 0$ ), de centre  $O$  et d'axe  $Oz$ .

$$\text{On voit que : } \vec{j} = j(r) \hat{u}_r$$

Ensuite, on prend  $D$  une demi-sphère de rayon  $r$ , de centre  $O$ , orientée "sortante" :  $d\vec{s} = d\Omega \hat{u}_r$   
 $\Rightarrow D$  est traversée par un courant d'intensité  $I$ .

$\Rightarrow$  on a

$$I = \iint_D j(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = j(r) \iint_{r=cte} d\Omega = j(r) 2\pi r^2$$

$$\text{D'où } \vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \hat{u}_r$$

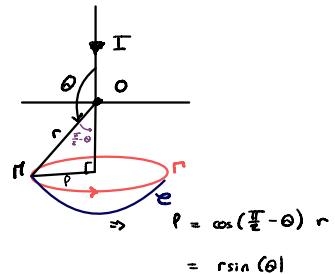
- ② Source de  $\vec{B}$  = courant  $I$

Invariances & Symétries

- Invariance de la distrib. de courant selon la rot. autour de  $(Oz)$  :  $\vec{B}(r) = \vec{B}(r, \theta)$
- Vect $\vec{r}$  ( $u_r, u_\theta$ ) est plan de sym. pour la distrib. et  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur :  $\vec{B}(r) = B(r, \theta) \hat{u}_\theta$

Choix de  $\Gamma$  On prend  $\Gamma$  le cercle d'axe  $Oz$  passant M, de rayon  $r \sin \theta$  (rf. figure)

$$\begin{aligned} \text{Circulation de } \vec{B} \quad \text{On a } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_{\Gamma} B(r, \theta) \hat{u}_\theta \cdot d\ell \hat{u}_\theta \\ &= B(r, \theta) 2\pi r \sin \theta \end{aligned}$$



### Calcul de $I_{\text{enlace}}$

> Pour  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  On considère la "calotte sphérique" décrite par  $\Gamma$ , qu'on notera  $\Sigma$

$$\Rightarrow I_{\text{enlace}} = \iint_{\Sigma} j(r) \hat{u}_r \cdot dS \hat{u}_r = j(r) \iint_{\Sigma} dS$$

*énoncé*  $\Rightarrow = j(r) \times 2\pi r^2(1 - \cos(\pi - \theta))$

$$= I (1 + \cos \theta)$$

> Pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$   $I_{\text{enlace}} = I$

**Th. d'Ampère magnétostatique**  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$

On en déduit que

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin(\theta)} \hat{u}_\theta & \text{pour } \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ \frac{\mu_0 I (1 + \cos \theta)}{2\pi r \sin \theta} \hat{u}_r & \text{pour } \theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \end{cases}$$

### 3 Bobines de Helmholtz

On donne le champ magnétique rayonné par une spire de rayon  $R$ , traversée par un courant  $I$ , en un point  $M$  de son axe  $Ox$ :

$$\vec{B}_e(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_x$$

où  $\alpha$  est le rayon angulaire de la spire vue du point M (voir figure 3.a).

1. Soit  $B = \|\vec{B}(M)\|$ . Calculez  $B$  en fonction de  $u = x/R$ , en notant  $B_0$  sa valeur au centre de la spire. Tracez son allure.
  2. Le montage des bobines de Helmholtz consiste en deux bobines plates identiques ( $N$  spires chacune, de même rayon  $R$ , même courant  $I$ , même axe) placées à la distance  $d = R$  l'une de l'autre. Ce montage est représenté en figure 3.b.
- (a) Calculez le champ magnétique en  $O$ , point situé sur l'axe au milieu des deux bobines.
- (b) Argumentez le fait que le champ magnétique peut être considéré comme constant avec un très bon degré d'approximation quand la distance entre les deux bobines est précisément égale à  $R$ .
- Vous pourrez, par exemple, tracer l'allure du champ pour diverses valeurs de cette distance pour voir ce que le cas  $d = R$  a de remarquable, ou bien discuter la nature de l'extremum du champ magnétique en  $x = 0$ .

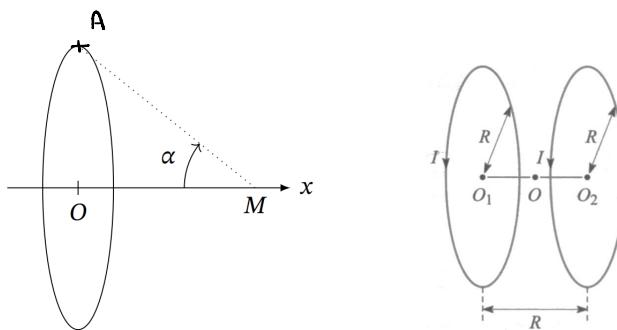


FIGURE 3 – a) (à gauche) Angle sous lequel on voit une spire. b) Dispositif de Helmholtz

**Corrigé :**

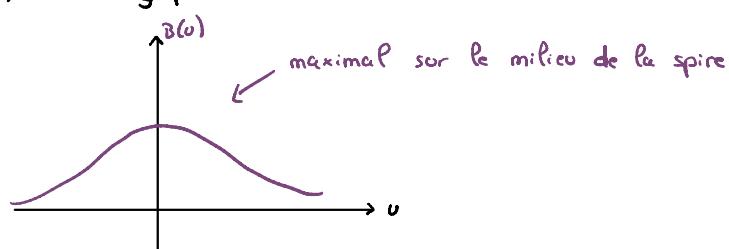
1)  $\vec{B}_e(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_x \Rightarrow B_0 = \|\vec{B}_e(\alpha = \frac{\pi}{2})\| \text{ d'où } B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Ensuite,  $\sin(\alpha) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$  (OAM rectangle en O)

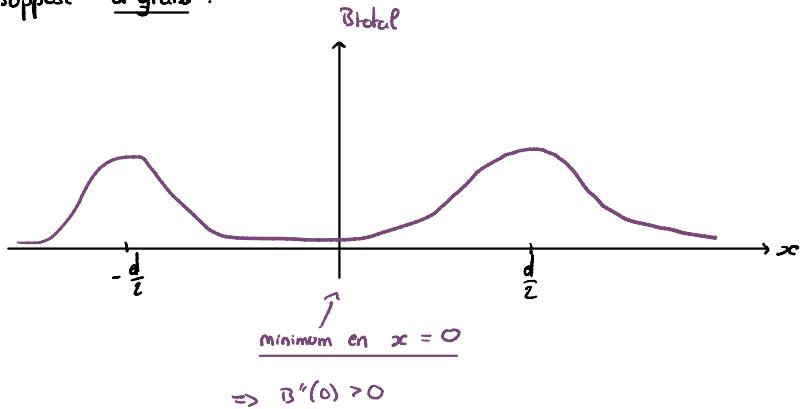
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = B_0 \times \frac{1}{\left(\frac{1}{R} (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3}$$

$$\Rightarrow B = B_0 \times \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

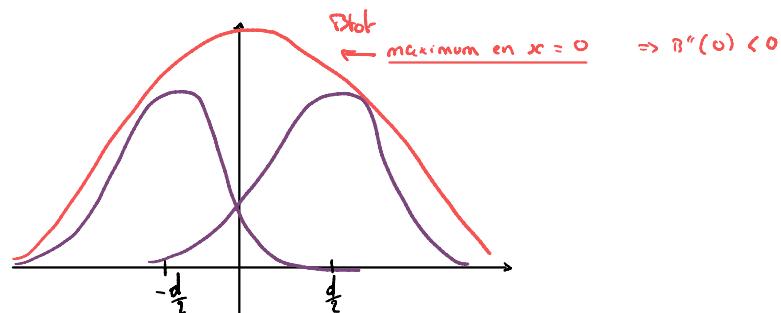
2) Pour une spire, on a le graph de B suivant :



⇒ Si on suppose  $d$  grand :



⇒ magnétostatique,  $d$  petit :

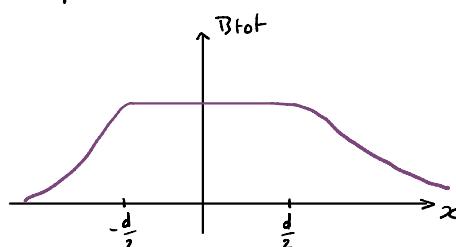


⇒ entre  $d$  petit et  $d$  grand ⇒ point d'inflexion  
 $\Rightarrow$  suggère qu'il existe un  $d$  tq  $B''(0) = 0$

et on sait que  $B'(0) = 0$  car c'est un extrema

DONC  $B''(0) = 0, B'(0) = 0 \Rightarrow B(x) \approx B(0)$  avec une très bonne approx. au vois. de  $x = 0$ .

⇒  $\vec{B}$  peut être considéré comme quasi-constant entre les 2 bobines.



## 4 Étude d'un champ magnétique

Dans un repère cartésien on donne le champ vectoriel

$$\vec{B} = B_0 \cos(2\pi \frac{x}{a}) \vec{u}_y$$

1. Ce champ peut-il être un champ magnétique dans une région vide de charge et de courant?
2. Pour compenser cette difficulté, on corrige la forme du champ :

$$\vec{B} = B_x(x, y) \vec{u}_x + B_0 f(y) \cos(2\pi \frac{x}{a}) \vec{u}_y$$

Déterminez l'équation différentielle vérifiée par  $f$  et intégrez-la en faisant l'hypothèse que  $f$  passe par un extremum égal à 1 en  $y = 0$ . Puis déterminez  $B_x$ .

**Corrigé :**

WHAT'S THAT TRICK FOR TELLING HOW  
MANY MILES AWAY LIGHTNING IS?

JUST COUNT THE SECONDS  
BETWEEN THE VISIBLE FLASH  
AND THE RADIO WAVE BURST,  
THEN MULTIPLY BY 5 BILLION.

