Khôlles : Suites et Séries de Fonctions

- 27 Novembre - 01 Décembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de cours - Tout groupe

1.1 Définition de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonction.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge Simplement (CVS) vers $g \in \mathcal{F}(I, E)$ sur I si

$$\forall x \in I, \ \ \|f_n(x) - g(x)\|_E \to 0$$

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge Uniformément (CVU) vers $g \in \mathcal{F}(I, E)$ sur I si

$$\|f_n - g\|_\infty \to 0$$

.

Ceci est équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \ \ (f_n - g)$ est bornée sur I par ε pour n assez grand

1.2 La convergence uniforme implique la convergence simple (« démo »). Contre-exemple pour la réciproque

Preuve :

Si $(f_n)_n$ Converge uniformément vers g, alors $\|f_n - g\|_\infty \to 0$.

Ainsi, pour tout $x \in I, \ \ \|f_n(x) - g(x)\|_E \leqslant \|f_n - g\|_\infty \to 0$, par théorème d'encadrement : $\|f_n(x) - g(x)\|_E \to 0$.

Ainsi, $(f_n)_n$ Converge Simplement vers g

Exemple

Il suffit de prendre $f_n : x \mapsto x^n$ pour avoir une convergence simple vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0, 1]$, mais non-uniforme.

1.3 Th de continuité pour les suites de fonctions (démo)

Théorème de Continuité

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I, E)$.

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^0$ sur I
2. (f_n) CVU vers g sur I

Conclusions :

1. g est $\mathscr{C}^0$ sur I

Preuve :

Soit $a \in I$. Montrons que g est continue en a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|f_n - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Alors, $\forall x \in I,\ |g(x) - g(a)| = |g(x) - f_N(x) + f_N(x) - g(a)|$

$$\begin{aligned}|g(x)-f_N(x)+f_N(x)-g(a)| &= |g(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(a)+f_N(a)-g(a)| \\ &\leqslant |g(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-g(a)| \\ &\leqslant \|g-f_N\|_\infty + |f_N(x)-f_N(a)| + \|f_N-g\|_\infty\end{aligned}$$

Or, par continuité de f_N : pour $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ |g(x)-g(a)| \leqslant 3\varepsilon$.

Ainsi, g est $\mathscr{C}^0$ en a, donc g est $\mathscr{C}^0$ sur I

1.4 Th de la double limite pour les suites de fonctions.

Théorème de la Double limite

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I, E)$. Soit $a \in I$.

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$
2. (f_n) CVU vers g sur I

Conclusions :

1. (l_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

   i.e : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n$

1.5 Th d'intégration sur un segment des suites de fonctions (démo)

Théorème d'Intégration

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I, E)$.

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^0$ sur $[a, b]$
2. (f_n) CVU vers g sur $[a, b]$

Conclusions :

1. g est $\mathscr{C}^0$ sur $[a, b]$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b g(t)dt$

Preuve **:**

La première conclusion correspond au théorème de Continuité.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \|\displaystyle\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\|_E = \|\int_a^b g(t) - f_n(t)dt\|_E \leqslant \int_a^b \|g(t) - f_n(t)\|_E dt.$

Or, nous avons la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$. Ainsi, $\forall t \in [a, b],\ \|g(t) - f_n(t)\|_E \leqslant \|g - f_n\|_\infty$

Ainsi, $\|\displaystyle\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\|_E \leqslant (b-a)\|g - f_n\|_\infty \to 0.$

Finalement, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b g(t)dt$

1.6 Th de « dérivation » des suites de fonctions.

Théorème de Dérivation

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I, E)$.

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^1$ sur I
2. (f_n) CVS vers f sur I
3. (f'_n) CVU vers g sur I

Conclusions :

1. $\forall [a, b] \subset I,\ (f_n)$ CVU vers f sur $[a, b]$
2. f est $\mathscr{C}^1$ sur I
3. $f' = g$

1.7 Définition de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions.

Définition: Convergence Simple d'une Série de Fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un Intervalle. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ Converge simplement sur I si $\forall x \in I$, $\sum\limits_n f_n(x)$ Converge (Série numérique).

On note alors $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, S_N les sommes partielles et R_N le reste d'ordre N.

Définition: Convergence Uniforme d'une Série de Fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un Intervalle. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ Converge Uniformément sur I si la suite des sommes partielles (S_N) Converge Uniformément sur I

(où $\forall x \in I,\ S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x)$).

Définition: Convergence Normale d'une Série de Fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un Intervalle. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ Converge Normalement sur I si :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est bornée sur I
- $\sum\limits_n \|f_n\|_\infty$ Converge (Série Numérique)

1.8 Th de continuité pour les séries de fonctions + application à zéta

Théorème Continuité

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^0$ sur I
2. $\sum_n f_n$ CVU sur I

Conclusions :

1. $\sum_n f_n$ est $\mathscr{C}^0$ sur I

Exemple

Montrons que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est Continue sur $I =]1;+\infty[$.

Soit $[a,b] \subset I$, un segment non vide. On a vu que $\|f_n\|_\infty^I = \frac{1}{n^a}$.

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ Converge, Il y a donc Convergence normale sur ce segment I (Attention, pas de Convergence Normale sur I).

Dès lors, en appliquant le théorème de Continuité sur ce segment (CVN $\Rightarrow$ CVU) : ζ est Continue sur $[a,b]$ pour tout segment $[a,b] \subset I$.

Dès lors, ζ est Continue sur $\bigcup_{[a,b]\subset I} [a,b] = I$

1.9 Th de la double limite pour les séries de fonctions + application à zéta au voisinage de $+\infty$.

Théorème de la Double limite

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$
2. $\sum_n f_n$ CVU sur I

Conclusions :

1. $\sum_n l_n$ converge.
2. $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_n l_n$

Exemple

Posons $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

Posons $J = [2;+\infty[$. Alors $\|f_n\|_\infty^J = \frac{1}{n^2}$.

Or, la série des $\frac{1}{n^2}$ est Convergente : ζ Converge Normalement, donc uniformément sur J.

Posons $l_n = \delta_{n,1}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n$. Alors, $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 1$

1.10 Th d'intégration sur un segment pour les séries de fonctions + application à zéta.

Théorème d'Intégration

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^0$ sur $[a,b]$
2. $\sum_n f_n$ CVU sur $[a,b]$

Conclusions :

1. $\sum_n f_n$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[a,b]$ (et existe...)
2. $\sum_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_n f_n(t)dt$

Exemple

Les hypothèses du théorème sont respectées (C.F Exemples Précédents).

Alors, $\int_2^3 \zeta(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 \frac{dx}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 e^{-x\ln(n)}dx$

Donc $\int_2^3 \zeta(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) + 1$

1.11 Th de « dérivation » pour les séries de fonctions + application à zéta.

Théorème de Dérivation

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^1$ sur I
2. $\sum_n f_n$ CVS sur I
3. $\sum_n f'_n$ CVU sur I

Conclusions :

1. $\sum_n f_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur I
2. $S'(x) = \sum_n f'_n(x)$

Note:-
On localise souvent le théorème : On montre que ceci est vrai sur tout segment inclus dans l'ensemble de définition.

Exemple

Les hypothèses 1 et 2 sont immédiates, et l'on note $\forall n \in \mathbb{N},\ f'_n : x \mapsto -\ln(n)e^{-x\ln(n)} = -\frac{\ln(n)}{n^x}$.

Localisons donc : Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$. Alors $\|f'_n\|_\infty^{[a,b]} = \frac{1}{n^a}\ln(n)$, avec $a>1$.

Nous obtenons alors une Série de Bertrand Convergente, donc la série $\sum_n f'_n(x)$ Converge Normalement donc uniformément sur $[a,b]$.

D'après le théorème, ζ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x}$.

Ainsi, ζ est $\mathscr{C}^1$ sur l'union de ces segments : ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

1.12 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment.

Théorème
Toute fonction $\mathscr{C}^0$ sur un segment peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier :

$\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],E)$ avec E un $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi_E \in \mathscr{E}\mathrm{sc}([a,b],E),\ \forall x \in [a,b],\ \|f(x) - \varphi_E(x)\|_E \leqslant \varepsilon.$

Ce qui peut s'écrire comme $\|f - \varphi_E\|_\infty \leqslant \varepsilon$

Théorème (Version Séquentielle)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Alors $\exists \varphi_n \in \mathscr{E}\mathrm{sc}([a,b],E),\ \|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$.

Ainsi, $\exists (\varphi_n)_n \in \mathscr{E}\mathrm{sc}([a,b],E)^{\mathbb{N}},\ (\varphi_n)_n$ Converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

1.13 Théorème de Weierstrass.

Théorème de Weierstraß
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, un segment. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

- Version ε : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in [a,b],\ |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon$: i.e $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$
- Version Séquentielle : $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n+1}$. Alors $\exists (P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}},\ (P_n)$ CVU vers f sur $[a,b]$.

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Th de « dérivation » des suites de fonctions. (démo)

Théorème de Dérivation

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I,E)$.

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^1$ sur I
2. (f_n) CVS vers f sur I
3. (f'_n) CVU vers g sur I

Conclusions :

1. $\forall [a,b] \subset I,\ (f_n)$ CVU vers f sur $[a,b]$
2. f est $\mathscr{C}^1$ sur I
3. $f' = g$

Preuve :

Soit $[a,b] \subset I$. Nous avons pour tout $x \in [a,b],\ f_n(x) = \int_a^x f'_n(t)dt + f(a)$.

D'après (H_1) et (H_3), g est continue d'après le théorème de continuité des suites de fonctions. Notons alors $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Grâce à l'hypothèse (H_3), nous pouvons de plus affirmer que f_n Converge Uniformément vers $G+f(a)$ (primitivation de la convergence uniforme), et en particulier que f_n Converge Simplement vers $G+f(a)$.

Or, si g est de classe $\mathscr{C}^0$, alors G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Or, (f_n) Converge simplement vers f.
Ainsi, $\forall x \in [a,b],\ f(x) = G(x) + f(a)$, ce qui donne en particulier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$,
et $\forall x \in [a,b],\ f'(x) = G'(x) = g(x)$. De plus, (f_n) converge uniformément vers f.

2.2 Th de « primitivation » des suites de fonctions sur des segments. (démo)

Corollaire

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I,E)$. Soit $c \in [a,b]$

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^0$ sur $[a,b]$
2. (f_n) CVU vers g sur $[a,b]$

Conclusions :

1. g est $\mathscr{C}^0$ sur $[a,b]$
2. On note $\forall x \in [a,b],\ G(x) = \int_c^x g(t)dt.$ et pour $n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt.$
   Alors G et F_n existent et $(F_n)_n$ CVU vers G sur $[a,b]$

Preuve :

Idem, la première conclusion correspond au théorème de Continuité.

$\forall x \in [a,b],\ \|G(x)-F_n(x)\|_E = \left\|\int_c^x g(t)-f_n(t)dt\right\|_E \leqslant \left|\int_c^x \|g-f_n\|_\infty dt\right| \to 0$. Donc $\|G-F_n\|_\infty \to 0$: (F_n) CVU vers G sur $[a,b]$

2.3 Pour une série de fonctions, CVN ⇒ CVU ⇒ CVS (démo de la première implication)

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un Intervalle. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

$\sum_n f_n$ CVN sur I $\Rightarrow \sum_n f_n$ CVU sur I $\Rightarrow \sum_n f_n$ CVS sur I

Preuve :

Supposons que $(f_n)_n$ CVN sur I. Montrons que R_N CVU vers 0.

$\forall n,p \in \mathbb{N},\ n \leqslant p,\ \forall x \in I,\ \left\|\sum_{k=n+1}^{p} f_k(x)\right\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|f_k(x)\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|f_k\|_\infty$

Or, $\sum_{k=n+1}^{p} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. On note $\tilde{R_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$, qui existe par hypothèse.

$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_n \|f_n(x)\|_E$ Converge car chaque terme est inférieur à $\|f_n\|_\infty$ et cette série converge par hypothèse.

Alors, $\sum_n f_n(x)$ CVA, donc $\sum_n f_n(x)$ Converge (E de dimension finie). Alors $\sum_n f_n$ Converge Simplement sur I.

En faisant tendre $p \to +\infty$, $\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right\|_E \leqslant \tilde{R_n}$.

Donc, $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|R_n(x)\| \leqslant \tilde{R_n}$. Donc R_n est bornée et $\|R_n\|_\infty \leqslant \tilde{R_n}$.

Or, $\tilde{R_n}$ est le reste d'ordre n d'une série convergente, donc tend vers 0. Ainsi, $\|R_n\|_\infty \to 0$: R_n CVU vers 0 sur I :

$\sum_n f_n$ CVU sur I.

2.4 Exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement.

Exemple

Montrons que la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ Converge Uniformément sans converger Normalement :

Nous remarquons que S ne converge pas Normalement sur $I = [0;1]$.

Nous avons $\forall n, p \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \left|\sum_{k=n+1}^{p} f_k(x)\right| \leqslant |f_{k+1}|$ par le CSA.

Lorsque $p \to +\infty,\ |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi, R_n est Bornée sur I et $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1} \to 0$: R_n CVU sur I, donc S CVU sur I.

2.5 Extension $\mathscr{C}^k$ du théorème de "Dérivation" + application à la fonction zéta.

Théorème extension $\mathscr{C}^k$

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ \mathscr{C}^k$ sur I
2. $\forall p \in [\![0, k-1]\!],\ \sum_n (f_n)^{(p)}$ CVS sur I
3. $\sum_n (f_n)^{(k)}$ CVU sur I

Conclusions :

1. S est $\mathscr{C}^k$ sur I
2. $\forall p \in [\![0, k-1]\!],\ S^{(p)} = \sum_n (f_n)^{(p)}$

Exemple

Montrons que ζ est $\mathscr{C}^\infty$ sur I : Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \zeta$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

De même que pour la version $\mathscr{C}^1$, on Localise : Soit $[a, b] \subset I$.

Nous trouvons par récurrence immédiate que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \times \ln(n)^k \times \dfrac{1}{n^x}$: La première Hypothèse est Vérifiée.

$\forall p \in [\![0; k-1]\!],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a, b],\ \left|f_n^{(p)}(x)\right| = \dfrac{|\ln(n)|^p}{n^x}$. Or, $x \geqslant a > 1$. Ceci donne donc une série de Bertrand Convergente.
Alors, $\forall p \in [\![0; k-1]\!],\ \sum_n f_n^{(p)}$ CVS sur $[a, b]$.

Idem, $\|f_n^{(k)}\|_\infty = \dfrac{|\ln(n)|^k}{n^a}$, et la série associée converge, D'où la convergence Normale donc Uniforme de $\sum_n f_n^{(k)}$.

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \zeta$ est $\mathscr{C}^k$ sur $[a, b]$, donc sur I : ζ est $\mathscr{C}^\infty$ sur I

2.6 Equivalent de zéta au voisinage de 1^+ à l'aide d'une comparaison Série-Intégrale

Par comparaison Série-Intégrale : (Attention, on encadre une série a x donné : Le paramètre est alors le n !).

Soit $x \in]1;+\infty[$, $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$. Alors f est Continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\frac{1}{t^x} \geqslant \frac{1}{n^x} \geqslant \frac{1}{w^x} \Rightarrow \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \frac{1}{n^x} \geqslant \int_{n}^{n+1} \frac{dw}{w^x}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{N} \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \geqslant \int_{2}^{N+1} \frac{dw}{w^x}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^N + 1 \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \geqslant \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^{N+1} + 1$$

Donc $\dfrac{1}{x-1}\left(1 - \dfrac{1}{(N+1)^{x-1}}\right) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{N^{x-1}}\right)$

Ainsi, lorsque $N \to +\infty$: $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$

D'où $\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$ et $\zeta \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

2.7 Démonstration du théorème de la double limite pour les séries de fonctions dans le cas de la convergence normale de cette série de fonctions.

Preuve **:**

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.
- $\sum\limits_{n} f_n$ CVN sur I

  Alors $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} \|f_n(x)\|_E \Rightarrow \forall x \in I,\ \|f_n(x)\|_E \leqslant \|f_n\|_\infty \Rightarrow \|l_n\|_E \leqslant \|f_n\|_\infty$ Par passage à la limite.

  Or, $\sum\limits_{n} \|f_n\|_\infty$ Converge par Hypothèse. Ainsi, $\sum\limits_{n} l_n$ CVA Donc CV.

  On pose $L = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$. Montrons que $S(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$.

  $\forall x \in I,\ \|S(x) - L\|_E = \|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - l_n\|_E$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence Normale donne la convergence Uniforme, donc $R_n \to 0 \Rightarrow$

  $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n_1,\ \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

  Or, $\sum\limits_{n} l_n$ Converge, donc $\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n_2,\ \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \|l_n\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

  Posons alors $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Soit $N \geqslant n_3$.

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - l_n\|_E &= \|\sum_{n=0}^{n_3-1} f_n(x) - l_n + \sum_{n=n_3}^{N} f_n(x) - l_n\|_E \\
&\leqslant \|\sum_{n=0}^{n_3-1} f_n(x) - l_n\|_E + \sum_{n=n_3}^{N} \|f_n\|_\infty - \|l_n\|_E \\
&\leqslant \|\sum_{n=0}^{n_3-1} f_n(x) - l_n\|_E + \frac{2\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

  $\forall n \in [\![0, n_3 - 1]\!],\ \lim\limits_{x \to +\infty} (f_n(x) - l_n) \to 0 \Rightarrow$ Pour x assez proche de a, nous avons $\|\sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x) - l_n\|_E \leqslant \varepsilon$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Limite de zéta en 1+ en « epsilon ». (non fait en cours)

Montrons que $\lim\limits_{x\to 1}\zeta(x)=+\infty$. i.e, $\forall A\geqslant 0,\ \exists \eta>0,\ \forall x\in]1,+\infty[,\ |x-1|\leqslant \eta \Rightarrow \zeta(x)\geqslant A$.

Soit $A>0$. Posons pour tout $x\in]1,+\infty[,\ S_N(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^x}$.

Soit $x=1+\varepsilon$. Alors $\forall N\in\mathbb{N}^*,\ S_N(1+\varepsilon)=\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}=\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n^{\varepsilon}}\geqslant\left(\dfrac{1}{N}\right)^{\varepsilon}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}$.

Premièrement, par la divergence de la série Harmonique, il existe $N_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{n=1}^{N_0}\dfrac{1}{n}\geqslant 2A$.

Dès lors, d'une part, $\left(\dfrac{1}{N_0}\right)^0=1$, et par continuité et décroissance de l'application $x\mapsto\left(\dfrac{1}{N_0}\right)^x$, il existe un $\varepsilon_0>0$ tel que $\forall\varepsilon<\varepsilon_0,\ \left(\dfrac{1}{N_0}\right)^{\varepsilon}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

Dès lors, nous avons $\forall\varepsilon<\varepsilon_0,\ \zeta(1+\varepsilon)\geqslant S_{N_0}(1+\varepsilon)\geqslant\left(\dfrac{1}{N_0}\right)^{\varepsilon}\sum\limits_{n=1}^{N_0}\dfrac{1}{n}\geqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{N_0}\dfrac{1}{n}\geqslant A$

D'où l'existence d'un $\varepsilon>0$ tel que $\forall x\in]1,+\infty[,\ |x-1|\leqslant\varepsilon\Rightarrow\zeta(x)\geqslant A$

3.2 La fonction zêta est log-convexe. (démo)

Preuve :

Rappelons que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I=]1,+\infty[$.

De plus, pour tout $x\in I,\ \zeta'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{-\ln(n)}{n^x}$ et $\zeta''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln^2(n)}{n^x}$

Montrons que $(\ln\circ\zeta)^{(2)}$ est positive : $\ln(\zeta)'=\dfrac{\zeta'}{\zeta}$, et $\ln(\zeta)''=\dfrac{\zeta''\zeta-\zeta'^2}{\zeta^2}$.

Donnons alors le signe de $\zeta''\zeta-\zeta'^2$: Remarquons ici une inégalité de Cauchy-schwarz.

Rappelons (mais vous vous en souveniez) qu'avec un produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ sur E, pour tout vecteurs $x,y\in E$:

$$\begin{aligned}&|\langle x\mid y\rangle|\leqslant\|a\|\|b\|\\ \iff&|\langle x\mid y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x\mid x\rangle}\sqrt{\langle y\mid y\rangle}\\ \iff&\langle x\mid y\rangle^2\leqslant\langle x\mid x\rangle\langle y\mid y\rangle\end{aligned}$$

Rappelons de plus que, pour tout $N\in\mathbb{N}$, nous définissons un produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$ (qui est le produit scalaire canonique de cet espace) par :

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)^\top,y=(y_1,\dots,y_n)^\top\in\mathbb{R}^N,\ \langle x\mid y\rangle=\sum_{k=1}^{N}x_ky_k$$

Ainsi, pour tout $N\in\mathbb{N}$, en posant $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^x}}$ et $y_n=\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n^x}}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n^x}\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln^2(n)}{n^x}\right)$$

Par passage à la limite sur $N \to +\infty$, nous obtenons l'inégalité montrant que ζ est bien Log-Convexe.

3.3 (Prérequis) Complétude de $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Définition: Suites de Cauchy

Soit E, un $\mathbb{K}$-E.V.N. Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

On dit que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy / Vérifie le Critère de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant n_0,\ \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$$

Notons qu'une suite de Cauchy n'est pas nécéssairement convergente (Voir une suite de Rationnels tendant vers e : Une telle suite serait de Cauchy sans converger dans $\mathbb{Q}$)

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un espace complet. i.e toute suite de Cauchy y est convergente.

Preuve :

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, suite de Cauchy.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N,\ \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $C = u_N$ avec N induit par la propriété précédente. Alors, $\forall p \geqslant N,\ u_p \in B_f(C, \varepsilon)$:

Tout élément de la suite u_n d'indice supérieur à N se trouve dans une boule fermée. La suite u_n se trouve alors dans un fermé borné en dimension finie : La suite est définie dans un Compact K.

Note:-

La notion de Compacité sera vue lors du Chapitre Topologie, Notez simplement que la définition Prépa d'un Compact est un ensemble vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstraß. De plus, en dimension finie, les seuls compacts sont les fermés bornés.

Dès lors, d'après la propriété de Bolzano-Weierstraß, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $\exists l \in K,\ u_{\varphi(n)} \to l$.

Montrons que $u_n \to l$: Par définition, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N',\ \|u_{\varphi(n)} - l\| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ (nous allons travailler avec $\frac{\varepsilon}{2}$), posons alors $n_0 = \max(N, N')$ avec N l'indice induit par le critère de Cauchy et N' induit par la convergence de $(u_{\varphi(n)})_n$.

Alors, $\forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - l\| \leqslant \|u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - l\| \leqslant \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - l\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon$.

(la majoration de $\|u_n - u_{\varphi(n)}\|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$ vient du fait que φ est strictement croissante, donc $\varphi(n) \geqslant n$)

3.4 Démonstration du Théorème de la Double Limite (démo HP)

Théorème de la Double limite

Soit $(E, \|\cdot\|)_E$, $\mathbb{K}$-EVN de dimension Finie. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $g \in \mathcal{F}(I,E)$. Soit $a \in I$.

Hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$
2. (f_n) CVU vers g sur I

Conclusions :

1. (l_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

   i.e : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n$

Preuve :

Montrons que la suite $(l_n)_n$ est une suite de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$, Par convergence uniforme de (f_n) vers f :
$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, $\forall p, q \geqslant N,\ \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \|f_p - f\|_\infty + \|f - f_q\|_\infty \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Soit $x \in I,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Avec $x \to a$, l'inégalité large passe à la limite : $|l_p - l_q| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, la suite $(l_n)_n$ est de Cauchy dans un Espace Complet. Dès lors, cette suite converge : $\exists l \in \mathbb{R},\ l_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Soit $x \in I$. La suite de fonctions (f_n) CVU vers f sur I : Dès lors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

En particulier : $|f(x) - l| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$.

Or, nous avons successivement pour $n \geqslant \max\{N_0, N_1, N_2\}$ avec :

- N_0 tel que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$
- N_1 tel que $|f_n(x) - l_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$
- N_2 tel que $|l_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

3.5 Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier sur un segment. (démo)

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}-$EVN de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],E)$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \varphi_\varepsilon \in \mathscr{E}sc([a,b],E)$ telle que $\|f-\varphi_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$

Théorème Version Séquentielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, \varphi_n \in \mathscr{E}sc([a,b],E)$ telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$.

Ainsi, $\exists\,(\varphi_n)_n \in \mathscr{E}sc([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ telle que $(\varphi_n)_n$ Converge Uniformément vers f

Preuve :

Utilisons le théorème de Heine : Par continuité de f sur le segment $[a,b]$, f y est Uniformément Continue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x,y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Posons η le module d'uniforme continuité associé.

Posons dès lors $x_k = a + k\eta$. Ainsi, nous formons la subdivision $(a, x_1, \ldots, x_n, b)$ de $[a,b]$. (On pose n tel que x_n soit le plus grand des x_i avant b)

Définissons φ par $\forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\ \varphi(x) = f(x_i)$, et $\varphi(b) = f(b)$.

Donc, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\ x - x_i \leqslant \dfrac{b-a}{n} \Rightarrow \|f(x)-\varphi(x)\| \leqslant \varepsilon$.

D'où $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$, avec $\varphi \in \mathscr{E}sc([a,b],E)$

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1. Nous remarquons que la série Numérique $f(x)$ converge dès que $x \in \mathbb{R}_+$, car $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^{-nx} \leqslant e^0 = 1$. Ainsi, $\left|\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$. De plus, la série $\sum_n \frac{1}{1+n^2}$ converge, car le terme sommé est de signe constant et est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, dont la série est une série de Riemann Convergente.

En revanche, si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées. Ainsi, la série numérique $f(x)$ diverge grossièrement.

Dès lors, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

Question 2. Utilisons le théorème de Continuité des Séries de Fonctions : Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

- H.1) Nous avons bien $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ de classe $\mathscr{C}^0$
- H.2) Afin de montrer la convergence uniforme, montrons qu'il y a convergence normale : Par décroissance de $\exp(-nx)$, il vient que $\|f_n\|_\infty^{\mathcal{D}_f} = f_n(0) = \frac{1}{1+n^2}$.

  Or, du fait que cette majoration soit atteinte au même point pour toute fonction f_n, nous avons déjà montré que cette série est convergente, car correspond à $f(0)$. Dès lors, nous avons Convergence Normale de la série de Fonctions, et donc Convergence Uniforme.

Le théorème de continuité des Séries de Fonctions nous donne alors la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$.

Question 3. Afin de montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, montrons que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur tout intervalle ouvert $I \subset \mathcal{D}_f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $I = [a, b] \subset \mathcal{D}_f,\ a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot n^k \cdot e^{-nx}}{1+n^2}$. Ainsi :

- H.1) Nous avons bien $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ de classe $\mathscr{C}^k$
- H.2) Notons que $\forall p \leqslant k$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)^{(p)}(x)$ converge normalement donc a fortiori Simplement (et uniformément pour $p = k$). En effet, toujours par décroissance de $\exp(-nx)$, $\|(f_n)^{(p)}\|_\infty^I = |(f_n)^{(p)}(a)|$. Or, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$ converge, car par croissances comparées, le terme général se trouve être du $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Dès lors, nous pouvons appliquer le théorème portant sur le caractère $\mathscr{C}^k$ des séries de fonctions afin d'affirmer que f est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\bigcup_{\substack{[a,b]\subset\mathcal{D}_f \\ a\neq 0}} [a, b] = \mathbb{R}_+^*$.

Nous savons de plus que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$

Question 4. Nous noterons que la dérivée k−ième de f est du signe de $(-1)^k$, et ne s'annule jamais. Ainsi, f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$

Question 5. Il nous est possible de deviner que cette limite sera 1 : En effet, nous pourrions utiliser le théorème de la double limite, mais nous pouvons faire sans :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+n^2} = 1 + e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ car la série est constante par rapport à x.

Ainsi, $|f(x)-1| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, d'où $f(x) \to 1$.

4.2 Exercice 2

Question 1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors la série Numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est une série respectant le critère des séries alternées. Ainsi, S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

S est de plus de classe $\mathscr{C}^1$: Appliquons le théorème correspondant :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- La convergence simple de S sur $\mathbb{R}_+^*$ a déjà été établie
- Nous avons $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Ainsi, soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors $\|f_n'\|_\infty^I = \frac{1}{(n+a)^2}$. Or, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+a)^2}$ est une série convergente (comparer avec $\sum \frac{1}{n^2}$). Alors la série $\sum_n f_n'$ converge normalement sur I, donc converge uniformément sur I

Ainsi, S est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+^*$, donc par union, S est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous avons de plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ S'(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$

Question 2. Nous remarquons que S' conserve le caractère alterné pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, le corollaire du CCSA nous dit que S' est du signe de son premier terme (négatif ici). Ainsi S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Question 3. Un changement d'indice se profile : $S(x+1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = -S(x) + \frac{1}{x}$.

Ainsi, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$. Ceci nous permet de donner $S(x) \sim \frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$, car $S(1)$ est une valeur finie connue ($\ln(2)$).

4.3 Exercice 3

Question 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la série numérique $S(x)$ est bien convergente, car le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$. Dès lors, S converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Question 2. S est également continue, il suffit d'appliquer le théorème :

- Les f_n sont bien continues
- Nous noterons qu'il semble compliqué de s'intéresser à une convergence normale sur $\mathbb{R}$ ici, car pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(n) = \dfrac{1}{n}$, donc la norme infinie de f_n sera plus grande que $\dfrac{1}{n}$, ce qui est problématique.

  Localisons donc : Soit $I = [-a, a] \subset \mathbb{R}$. Une étude de fonctions rapide sur f_n montre que ses maxima se situent en $x = n$, et a fortiori en $x = a$ si $n \geqslant a$ (d'où l'intérêt de localiser).

  Or, du fait qu'une série ne dépend pas de ses premiers termes, nous pouvons dire que $\sum\limits_{n \geqslant 0} \|f_n\|_\infty^I$ converge, car est absolument convergente pour $n \geqslant a$. Nous avons donc convergence normale sur I, donc convergence Uniforme.

Ainsi S est bien continue sur tout $I \subset \mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ entier par union.

Question 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $h_x : t \mapsto \dfrac{2x}{t^2 + x^2}$ (Attention, afin de comparer à l'intégrale, la fonction doit dépendre de l'indice de sommation, et non de x!)

Cette application h_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (la dérivée est négative sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\int_{n-1}^{n} h_x(t)dt \geqslant h_x(n) \geqslant \int_{n}^{n+1} h_x(t)dt$$
$$\int_{0}^{N} h_x(t)dt \geqslant \sum_{n=1}^{N} h_x(n) \geqslant \int_{1}^{N+1} h_x(t)dt$$
$$\frac{2x}{x^2}\int_{0}^{N} \frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}}dt \geqslant \sum_{n=1}^{N} h_x(n) \geqslant \frac{2x}{x^2}\int_{1}^{N+1} \frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}}dt$$

Le changement de variables $u = \dfrac{t}{x}$, $t = ux$, $dt = xdu$ nous permet d'avoir l'encadrement suivant

$$2\arctan\frac{N}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} h_x(n) \geqslant 2\left[\arctan\frac{N+1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right]$$

Avec $N \to +\infty$:

$$\pi \geqslant S(x) \geqslant \pi - 2\arctan\frac{1}{x}$$

Or, avec $x \to +\infty$, le théorème d'encadrement donne bien $S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi$.

4.4 Exercice 4

Montrons tout d'abord que ψ est bien de classe $\mathscr{C}^2$:

La convergence de ψ sur $\mathbb{R}$ est garantie sur $\mathbb{R}_-$ grâce au CCSA. (Le langage des séries entières permettra de directement affirmer la convergence de ψ sur $\mathbb{R}$).

Il nous est également possible d'appliquer le CCSA sur $\mathbb{R}_+$, avec une analyse plus fine : Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé. Montrons que la suite $(u_n)_n = \left(\dfrac{e^{nt}}{(n!)^2}\right)_n$ décroit vers 0 pour n assez grand (la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes) :

La formule de Stirling donne $u_n \sim \dfrac{1}{2\pi} n^{-2n-1} e^{n(t+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où la limite nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{e^{nt}e^t}{(n+1)^2 \times (n!)^2} - \dfrac{e^{nt}}{(n!)^2} = \dfrac{e^{nt}}{(n!)^2}\left(\dfrac{e^t}{(n+1)^2} - 1\right)$.

Or, pour n assez grand, ce terme devient négatif : D'où la décroissance de $(u_n)_n$ pour n assez grand : Le CCSA s'applique ici aussi : ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

En notant $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}$, il vient que f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $f_n'(t) = n\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}$, de plus $f_n''(t) = \dfrac{(-1)^n}{((n-1)!)^2} e^{nt}$. (excepté pour $n = 0$, où la dérivée s'annule)

Remarquons que les séries associées restent simplement convergentes. De plus, en localisant, nous obtenons la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_n f_n''(t)$ (le CCSA permet de majorer le reste par le premier terme compris dans ce reste, et cette quantité tend biens vers 0). Nous pouvons donc affirmer que ψ est bien de classe $\mathscr{C}^2$.

De plus, nous avons $\psi''(t) = \displaystyle\sum_n f_n''(t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{((n-1)!)^2} e^{nt} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{((n)!)^2} e^{nt} e^t = -e^t \psi(t)$.

Dès lors, ψ vérifie bien $y'' + e^t y = 0$


10 Pranks That Went Way
Too Far
3,677,806 views