Fonctions à valeurs vectorielles

Vallaeys Pascal

6 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 3,4,84,85,89

Méthodes de base :

- Définition de la dérivabilité.
- Utilisation des développements limités.
- Caractérisation de la convexité.
- Utilisation de l'égalité et de l'inégalité des accroissements finis.
- Formules de Taylor.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 :
Montrer chacune des inégalités suivantes sur l'intervalle demandé :
a) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ sur $\mathbb{R}^*+$
b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :
a) On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
b) Procéder de même avec $u_n = \frac{1}{n}.\left[\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n})\right]$, puis $u_n = \frac{1}{n.\sqrt{n}}.\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}$.

Exercice 3 : (d'après ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes $P_1(X) = X^4 + 1$ et $P_2(X) = X^6 + 1$.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2023)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $\cos x = nx$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette équation a une et une seule solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la monotonie et la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre trois en $1/n$ de x_n.
4. La série $\sum \ln(\cos x_n)$ converge-t-elle ?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \sim \frac{c}{n!}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 5 : (Mines MP 2023)
Soit $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$? il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = x^{-3n}P_n(x)f(x)$ pour tout $x \neq 0$ et donner le degré de P_n.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a toutes ses racines réelles.

Exercice 6 : (CCINP MP 2023)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. On suppose P non constant et on note a une racine de P dans $\mathbb{C}$.
1. Montrer que $a = 0$ ou $|a| = 1$.

2. Montrer que $a = 1$ ou $|a - 1| = 1$.
3. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la propriété énoncée plus haut.

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$.
1) Montrer que f admet un unique point fixe.
2) Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Exercice 8 : (CCINP MP 2022)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :
1) Énoncer le théorème de Rolle.
2) Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?
3) Montrer le résultat voulu.

Exercice 9 : (Mines MP 2022)
Quels sont les polynômes complexes P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ (en notant $\mathbb{U}$ le cercle unité) ?

Exercice 10 : (Centrale MP 2021)
1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x)\,|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11 : (Mines-Ponts 2019)
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$.
b) Préciser le degré et les racines de P_n. Etudier la somme des racines.
c) Montrer que $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2\theta} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$.
d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 12 :
a) Calculer le coefficient de x^n dans la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $f : x \to x^n(1 - x)^n$.
b) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
c) Démontrer le même résultat à l'aide d'un dénombrement.

Exercice 13 : Calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k.x)$.

Exercice 14 :
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int\limits_a^b \cos(nt)\,f(t)dt = 0$.

Exercice 15 : (ENS MP)
On pose $T_n(x) = \cos(n.Arc\cos(x))$.

1. Montrer que T_n est un polynôme.
2. Trouver une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.
3. Déterminer les extrema de T_n.
4. Montrer que pour tout polynôme P de même degré et de même coefficient dominant que T_n, on a $\|P\| \geq \|T_n\|$.

Exercice 16 : Soit f la fonction $x \to \left(x^2 - 1\right)^n$. Montrer que $f^{(n)}$ admet n zéros distincts deux à deux, entre –1 et 1.

Exercice 17 :
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x et y, on ait f(x+y)=f(x)+f(y).
a) Déterminer la fonction f.
b) Répondre ensuite à la même question avec $f(x^2) = f(x)$ sur [0 ;1].

Exercice 18 :
Soient $a_1,...,a_n$ et $x_1,...,x_n$ des réels strictement positifs.
a) Montrer que $\sqrt[n]{a_1...a_n} \leq \frac{a_1+...+a_n}{n}$.
b) Montrer que $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}....+\frac{x_n}{x_1} \geq n$.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 19 : (ENSEA ENSIIE MP 2023)
Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\mathrm{e}^{\cos x}$.

Exercice 20 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.
1) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et l'argument de $z^k - 1$.
2) On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 21 : (CCINP MP 2019)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq |P(t)|$.
a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.
b) Montrer que f est la fonction nulle.
c) Le résultat subsiste-t-il si P est supposé être de degré pair ?

Exercice 22 :
On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}.\sin\frac{k}{n^2}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.\sin\frac{k}{n}$.
a) Montrer que pour tout réel x, on a $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
b) En déduire que $\underset{n\to+\infty}{Lim} |u_n - v_n| = 0$.
c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\aleph}$.

Exercice 23 : Déterminer $\underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{Lim} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$. (X PC 2014)

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 24 : (Centrale MP 2023)
Soit $\lambda \in]0,1[$ et $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continues telles que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$.
1. Rappeler la définition d'une fonction concave sur un intervalle et établir :
$\forall (a,b)\ (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^\lambda b^{1-\lambda}$.
2. On pose $\alpha = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\beta = \int_0^1 g(x) \ \ dx$. Vérifier que les fonctions suivantes réalisent des bijections de $[0,1]$ dans $[0,1]$:
$$\Phi : \theta \mapsto \frac{1}{\alpha}\int_0^\theta f(x) \ \ dx \quad \text{et} \quad \Psi : \theta \mapsto \frac{1}{\beta}\int_0^\theta g(x) \ \ dx$$
et montrer que la fonction $u = \lambda\Phi^{-1} + (1-\lambda)\Psi^{-1}$ est une bijection de classe C^1 de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
3. En déduire l'inégalité :
$$\int_0^1 h(x) \ \ dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^\lambda \cdot \left(\int_0^1 g(x) \ \ dx\right)^{1-\lambda}.$$

Exercice 25 : (Mines MP 2023)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et admettant une limite nulle à l'infini.
1. Montrer l'existence de $x_1 > 0$ tel que $f'(x_1) = 0$.
2. Montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs, vérifiant : $f^{(n)}(x_n) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la question 2, après avoir validé l'usage d'une récurrence l'examinateur m'a conseillé de raisonner par l'absurde.

Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ on pourra utiliser un développement de Taylor à l'ordre n pour trouver une contradiction sur la limite de f en l'infini.

Exercice 26 : (Mines MP 2021)
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f tend vers une limite l en $+\infty$.
Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$

Exercice 27 : (Mines-Ponts 2019) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que pour tout réel x de $[0,1]$, $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

Exercice 28 : (Mines-Ponts 2019) Soient a et b deux réels tels que a<b, et E l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in E$, on note $\varphi(f) = \int\limits_a^b f \times \int\limits_a^b \frac{1}{f}$. Déterminer $\varphi(E)$.

Exercice 29 :
On considère la fonction $f : x \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de f est de la forme $\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+0,5}}$ où P_n est un polynôme de degré n.
3. Montrer que $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P'_n(X) - (2n+1)XP_n(X)$.
4. Montrer que $P_{n+1}(X) + (2n+1)X.P_n(X) + n^2(1+X^2)P_{n-1}(X) = 0$.
5. Montrer que $P'_n(X) = -n^2P_{n-1}(X)$.
6. Calculer $P_n(0)$ pour tout entier n.

Exercice 30 :
On pose $f(x) = \int\limits_x^{x^2} (\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t.\ln t})dt$.
a) Montrer que f(x) tend vers 0 quand x tend vers 1.
b) En déduire la limite quand x tend vers 1 de $\int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Exercice 31 : Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $[0;+\infty[$, telle que f(0)=f'(0)=0. On suppose que f s'annule en une autre valeur a strictement positive. Montrer qu'il existe un point sur la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine. (Point autre que (0 ;0)).

Exercice 32 : (Mines PC)
On suppose que le graph de f admet deux centres de symétrie. Montrer que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 33 : (ENS MPi 2022 ???)
Soit f une fonction convexe à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide. On note J l'intérieur de I.
1. Montrer que f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de J.
On note $f'_+(t)$ la dérivée à droite de f en t.
2. Soit $t \in I$. Montrer que $\sup_{\tau\in J}(f'_+(\tau)(t-\tau) + f(\tau)) = f(t)$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve
Question 1. Appliquer l'inégalité des pentes avec t, $t-h$ et $t+h$.

Exercice 34 : (ENS MP 2023)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

$$\forall s \in \mathbb{R}, f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{sx - f(x)\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{**}(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{sx - f^*(s)\}$$

1. Montrer que $f^{**}(x) = \sup\{a(x), a$ fonction affine telle que $a \leq f\}$.
2. Comment adapter les définitions pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

3. Est-il possible de calculer f^{**} pour $f : x \mapsto (1-x^2)^2$? Représenter f et f^{**}. (Indication : montrer que f^{**} est convexe)

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

$$f(x_0) = min_{\mathbb{R}} f \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \text{ et } f^{**}(x_0) = f(x_0)$$

5. Question de cours : donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'une fonction infiniment dérivable admette un minimum en un point.

Exercice 35 : (ENS MP 2022)
Densité des fonctions étagées, ENS Lyon
Soit f définie sur $[-\pi, \pi]$, monotone et bornée. On note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $c_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Commentaires divers :
Construire une suite de fonction en escalier telle que $\|f - f_n\| = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Examinateur très sympathique.

Exercice 36 : (X MP 2022)
Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, au moins dérivables en un point, vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
On peut supposer, dans un premier temps, que f est dérivable en 0 et l'étudier sur un voisinage de 0.

Exercice 37 : (X MP 2022)
Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = f(b)$.
a. Pour n entier supérieur à 2, montrer qu'il existe $(a', b') \in [a,b]^2$ tel que $f(a') = f(b')$ et $b' - a' = \frac{b-a}{n}$.
b. En supposant de plus f dérivable sur $]a,b[$, en déduire le théorème de Rolle.
c. *Application :* soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Déterminer le nombre de points d'annulation de $f^{(n)}$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Regarder la fonction $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{b-a}{n}\right)$.

Exercice 38 : (Classique écrits X-ENS)
Montrer qu'une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique, est uniformément continue.

Exercice 39 : (X MP 2021)
Déterminer $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X)P(X+1) = P(X^2+X+1)\}$.

Exercice 40 :
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}+$, telle que f et f'' soient bornées. On note respectivement $M_0 = \underset{\mathbb{R}+}{Sup}\,\|f\|$ et $M_2 = \underset{\mathbb{R}+}{Sup}\,\|f''\|$.
a) Montrer que pour tout réel h strictement positif, et pour tout réel x positif, $||f'|| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h.M_2}{2}$.
b) En déduire que f' est bornée et que $M_1 = \underset{\mathbb{R}+}{Sup}\,\|f'\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 41 :
Soit f une fonction de classe C^3 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f - \frac{1}{2n}\int\limits_0^1 f' + \frac{1}{12n^2}\int\limits_0^1 f'' + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
En déduire un développement limité à l'ordre 3 de $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Exercice 42 : On note $E = \left\{f \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}\right) \text{ tq } f(0) = 0\right\}$. Déterminer $\underset{f \in E}{Inf}\int\limits_0^1 |f - f'|$. (On posera $g(x) = f(x)\,e^{-x}$) (X 2006 142)

Exercice 43 : Soit g une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :
g convexe $\Leftrightarrow \forall f \in C^0\left([0;1], \mathbb{R}\right)$ on a $g\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right) \leq \int\limits_0^1 g \circ f(x)dx$.

Exercice 44 :

Soient u et v deux nombres strictement positifs. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. n désigne un entier strictement positif.

a) Montrer que $uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$.

b) Montrer que si $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux familles de nombres strictement positifs, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i.b_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

d) En déduire que $\|X\|=\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

e) Montrer que si f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$ on a $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$.