

Colles MPi* Semaine n°23 du 25/02/2024 au 30/03/2024 (Programme n°16, virtuel)

Vallaëys Pascal

8 février 2024

Thème : Équations différentielles.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- | | | |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| • Dufour Caroline | • Bouiller Mathéo | • BERTHE Louison |
| • Deplacie Florent | • Tom Demagny | • RIMBAULT Simon |
| • Michaud Baptiste | • DESMIS Loan | • Hequette Perrine |
| • Vanderhaeghe Kellian | • DENNINGER Carmen | • Bennani Kenza |
| • Brulé Quentin | • Durand Antoine | |

Liste des élèves du groupe B :

- | | | |
|--------------------|-----------------------|----------------------|
| • Valemberg Lucas | • Picard Antoine | • MORILLAS Nicolas |
| • Depoorter Paul | • MARTINET Ellyas | • BOISSIERE Maxime |
| • CAELEN Baptiste | • Bayle Sei | • Grosset Loann |
| • DALLERY Pierre | • Daussin Mathieu | • Trouillet François |
| • SAULGEOT Clément | • THUILLEUR Raphaël | • Robert Xavier |
| • CAFFIER Olivier | • Lahoute Raphaël | • Rossi Alex |
| • Legros Owen | • MABILLOTTE Thibault | |
| • BRUYERE Thomas | • BAKKALI Rayane | |

Liste des élèves du groupe C :

- | | | |
|--------------------|---------------------|----------------------|
| • Hasley William | • PICQUET Augustine | • Oubninte Adil |
| • Applincourt Théo | • TAVERNIER Charles | • Drouillet Baptiste |
| • Behague Quentin | • DUTILLEUL Timéo | • Montfort Pierig |
| • Johnson Clovis | • SAFFON Maxime | • Gobron Nicolo |

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Citer le théorème de Cauchy linéaire.

- Mise en forme matricielle d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n .
- Définition de l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- Si A et B commutent, $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$. (démonstration)
- Définition du Wronskien ($n=2$).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. (démonstration)
- Convergence de la série définissant l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme. (démonstration)
- Continuité de l'exponentielle sur l'espace des matrices carrées. (démonstration)
- Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$. (démonstration)
- Dérivée du Wronskien et équation différentielle associée ($n=2$). (démonstration)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Démonstration du théorème de Cauchy linéaire (démonstration)
- Principe d'entrelacement de Sturm (HP). (démonstration)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= 3x + y - z \\ y' &= 5x + y - z \\ z' &= 6x - 6y + z \end{cases}.$$

Exercice 2 : (ENSEA/ENSIIE MP 2023)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
- 2) Calculer $\exp(A)$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)

On considère l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' - y = 0$ (E).

Trouver l'unique solution développable en série entière à l'origine respectant la condition $y(0) = 1$.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2021)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

0. Donner un exemple d'une telle norme.

1. Montrer que la série $\sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$.

Exercice 5 : (CCINP MP 2021)

Soit $(e) : (x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4$.

Trouver une solution de (E) sous la forme d'un polynôme.

Résoudre (E) sur les intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 4[$ et $]4, +\infty[$.

Trouver les solutions de (E) sur $] -\infty, 4[$, $]0, +\infty[$ et \mathbb{R} .

Exercice 6 : (CCINP MP 2019)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b, c \in \mathbb{R}_+$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

- a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- b) Si $c = 0$ et $b \neq 0$, calculer $\exp(A)$.
- c) Si $bc \neq 0$, comment calculer $\exp(A)$?

Exercice 7 : (CCINP PC)

- a) Sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, on pose $\varphi(x) = \frac{x-2}{2x-1}$. Quelles sont les images par φ de $] -\infty, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, +\infty[$?
- b) Que vaut $\varphi \circ \varphi$?
- c) Montrer que si f est solution de (E) : $f'(x) = f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)$ alors f est de classe C^2 .
- d) Trouver une équation différentielle satisfaite par f .
- e) Résoudre (E).

Exercice 8 :

Résoudre $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. On cherchera d'abord une solution polynomiale, puis une autre « guidée » par la première.

Exercice 9 :

Résoudre $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $t = x^2$.

Exercice 10 :

Résoudre $(x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$, en déterminant dans un premier temps les solutions polynômiales. Préciser ensuite la dimension de l'espace des solutions sur un intervalle I, suivant I.

Exercice 11 :

Résoudre : $y'' - 2y' - 3y = \frac{e^{3x}}{ch^2x}$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 12 : (Mines MP 2021)

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $x^3y' - 2y = 0$.

Exercice 13 : (Mines MP 2021)

1. Résoudre sur $D =]-\infty, 1[$ l'équation (E) : $xy' + y = \frac{1}{1-x}$.
2. L'équation (E) a-t-elle une solution de classe C^∞ sur D ?

Exercice 14 : (Mines MP 2021)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier l'existence d'un réel d tel que $A^3 + dA = 0$.

Déterminer d . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ exprimer A^{2n} en fonction de n , d et A^2 .

Montrer que $\exp(A) = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ où α et β sont deux réels à expliciter.

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2021)

Déterminer les fonctions $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle : $(t^2 + 1)x'' - 2x = 0$.

Exercice 16 :

1. Montrer que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique réelle est une matrice orthogonale.
2. Montrer que l'exponentielle d'une matrice est un polynôme en cette matrice.

Exercice 17 :

On cherche à résoudre l'équation différentielle-fonctionnelle suivante : $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ sur \mathbb{R}^*+ .

- a) Montrer que toute solution de cette équation est solution de $E : t^2y'' + y = 0$.
- b) Résoudre (E) en posant $t = e^x$.
- c) Résoudre (E) en cherchant les solutions de la forme $t \rightarrow t^\alpha$ avec α complexe.
- d) Conclure concernant le problème initial.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 18 : (X MP*)

- a) Résoudre l'équation différentielle : $x.f'(x) + \lambda.f(x) = \frac{1}{x+1}$.
- b) Trouver les solutions qui ont une limite finie en 0.
- c) Trouver les solutions développables en série entière.
- d) Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$.

Exercice 19 : (Centrale MP 2017)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- a) On suppose A diagonalisable. Montrer que e^A est diagonalisable.
- b) On suppose qu'il existe D diagonale et N nilpotent commutant tels que $A = D + N$. Montrer alors que si e^A est diagonalisable, alors e^N l'est également. En déduire que N=0.
- c) Prouver l'existence de D et N.
- d) Prouver l'unicité.

Exercice 20 : (Mines MP)

Soit f une fonction de classe C^1 , monotone sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R} , ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que toutes les solutions de $y'' + y = f$ sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 21 : (Mines-Ponts 2019)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = |\cos x|$. Existe-t-il des solutions positives ? bornées ? bornées positives ?

Exercice 22 : (Mines-Ponts 2019)

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, et a et b deux fonctions continues et T-périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Déterminer les solutions T-périodiques de $x' = ax + b$.

Exercice 23 : (Mines-Ponts 2019)

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $[A, B] = AB - BA$, et on suppose que A et B commutent avec $[A, B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]}$.

- a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k B - B A^k = k A^{k-1} [A, B]$.
- b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
- c) Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A, B]}{2}}$.

Exercice 24 : (X PC 2013)

Déterminer les fonctions f telles que $f^{(n)} = f$ et $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^{(k)} \neq f$.

Exercice 25 : (X(2) 103)

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ . (X(2) 103)

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 31,32,42,74,75.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : équations différentielles. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 2 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 3 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 4 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 9 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 10 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine