Khôlles : Fin de la Réduction

- 16 - 20 Octobre 2023 -

Sommaire

1 Questions de Cours - Tout groupe

1.1 Si deux endomorphismes commutent, le noyau, l'image et les s.e.p. de l'un sont stables par l'autre. (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

Alors, $\mathrm{Ker}(u),\ \mathrm{Im}(u),\ E_\lambda(u)$ sont stables par v (pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$).

Preuve :

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = 0$ par hypothèse, ainsi, $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors $\exists x \in E,\ y = u(x)$.
Alors, $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$.

Soit enfin $\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

Les espaces $\mathrm{Ker}(u),\ \mathrm{Im}(u)$ et $E_\lambda(u)$ sont stables par v. La symétrie des rôles assure que $\mathrm{Ker}(v),\ \mathrm{Im}(v)$ et $E_\lambda(v)$ sont stables par u.

1.2 En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul. (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0$

Preuve :

Soit A la matrice de u dans une base de E.

Il suffit de remarquer qu'en dimension n^2, la famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée (car est de taille n^2+1). Ainsi, il existe une combinaison linéaire non nulle qui annule cette famille, i.e $\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K},\ \sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0$.

En posant P, le polynôme $\sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$, nous avons $P(u) = 0$ par définition. Ainsi, il existe bien un polynôme annulateur non nul. (si u est l'endomorphisme nul, tout polynôme non nul est annulateur, on peut alors supposer u non nul dans cette démonstration)

1.3 Définition du polynôme minimal, en dimension finie.

Définition: Polynôme minimal

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors il existe un unique polynôme annulateur Π_u de degré minimal et unitaire (et non nul). On appelle ce polynôme le polynôme minimal de u

1.4 Lien entre spectre et polynôme annulateur (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit P, polynôme annulateur de u.

Alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Rac}(P)$

Preuve :

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Par définition de P, ce polynôme est polynôme annulateur de u. Soit x_0, vecteur propre (non nul par définition) associé à la valeur propre λ.

Alors, $\forall x \in E, \ \ P(u)(x) = 0 \Rightarrow \ P(u)(x_0) = 0$.

Or, x_0 est vecteur propre associé à λ, en notant $P = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$, nous avons :

$$\begin{aligned} P(u)(x_0) &= \sum_{i=0}^{r} a_i u^i(x_0) \\ &= \sum_{i=0}^{r} a_i \lambda^i x_0 \\ &= P(\lambda) x_0 \end{aligned}$$

Or, P est un polynôme annulateur, donc $\forall x \in E, \ \ P(u)(x) = 0$, donc $P(u)(x_0) = P(\lambda)x_0 = 0$.
Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Rac}(P)$ car x_0 est non nul par définition.

1.5 Théorème de Cayley Hamilton (démo pour n=2)

Théorème de Cayley - Hamilton

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors χ_u est un polynôme annulateur de u. i.e, $\chi_u(u) = 0$

Preuve* Cas $n = 2$ *:

Si $n = 2$, alors posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base canonique de E. Dès lors, $\chi_u(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$. En calculant $\chi_u(u)$, nous obtenons :

$\chi_u(u) = u^2 - au - du + adI_d - bcI_d$.

Par définition de la représentation matricielle de u, en évaluant sur la base canonique de E, nous obtenons $u(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $u(e_2) = be_1 + de_2$.

Évaluons $\chi_u(u)$ sur la base canonique : $\chi_u(u)(e_1) = u^2(e_1) - (a+d)u(e_1) + (ad - bc)e_1 = 0$

Idem, $\chi_u(u)(e_2) = u^2(e_2) - (a+d)u(e_2) + (ad - bc)e_2 = 0$

Or, l'image d'une base par une A.L détermine de manière unique cette A.L, donc $\chi_u(u) = 0$

1.6 Lemme de décomposition des noyaux.

Lemme Décomposition des Noyaux

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$, **PREMIERS ENTRE EUX DEUX A DEUX**.

Alors, $\text{Ker}[(P_1 \times \cdots \times P_n)(u)] = \bigoplus_{k=1}^{n} \text{Ker}(P_k(u))$

1.7 Si u est diagonalisable, tout endo induit sur un sous-espace stable l'est. (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $u_{|E_\lambda(u)}$ est également diagonalisable.

Preuve :

Nous avons par définition que u diagonalisable $\Rightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Soit $\mathcal{B}$, base adaptée à cette décomposition (i.e $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_{\lambda_i}$). Alors, dans cette base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{matrix} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\lambda_i}}(u_{|E_{\lambda_i}(u)}) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$ donc $u_{|E_{\lambda_i}(u)}$ est diagonalisable.

1.8 Caractérisation des endo trigonalisables par le polynôme minimal ou un polynôme annulateur.

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $[u \text{ Trigonalisable}] \iff \begin{cases} \Pi_u \text{ est Scindé} \\ \text{Il existe un polynôme annulateur scindé} \end{cases}$

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Existence et unicité du polynôme minimal en dimension finie (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors il existe un unique polynôme annulateur Π_u de degré minimal et unitaire (et non nul). On appelle ce polynôme le polynôme minimal de u

Preuve :

Posons $D_u = \{\deg(P) \mid P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$ l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de u.

Alors D_u est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément. Soit P_0 réalisant le minimum de D_n (i.e un polynôme annulateur de plus petit degré).

Posons alors $\Pi_u = \dfrac{P_0}{a_0}$ (On divise P_0 par son coefficient dominant, de cette manière Π_u est bien un polynôme annulateur unitaire de degré minimal de u).

Pour l'unicité, montrons que l'ensemble des polynômes annulateurs est de la forme $\Pi_u\mathbb{K}[X]$ (i.e tout polynôme annulateur est divisible par Π_u) :

Soit P, polynôme annulateur de u. D'après le théorème de division euclidienne, $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X],\ P = Q\Pi_u + R$ avec $\deg(R) < \deg(\Pi_u)$.

Or, nous avons $P(u) = 0 = \Pi_u(u) \circ Q(u) + R(u)$. De plus, $\Pi_u(u) = 0 \Rightarrow R(u) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de u de degré strictement inférieur au degré de Π_u (si $R \neq 0$), ce qui est absurde par définition de Π_u. Ainsi, $R = 0$, donc tout polynôme annulateur est divisé par Π_u.

S'il existe Q_u, un autre polynôme annulateur unitaire de degré minimal, d'après ce qui précède, nous avons $\Pi_u \mid Q_u$ et $Q_u \mid \Pi_u$, donc Π_u et Q_u diffèrent d'une constante multiplicative non nulle, or ces polynômes sont tous deux unitaires, donc $\Pi_u = Q_u$

2.2 Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, $\forall P \in \mathbb{K}[X], \ P(u) = 0 \Rightarrow \Pi_u \mid P$

Preuve :

Soit P, polynôme annulateur de u. Appliquons le théorème de division euclidienne par Π_u à P :

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X], \ P = Q\Pi_u + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(\Pi_u)$$

.

Or, nous avons $P(u) = 0 = \Pi_u(u)Q(u) + R(u)$. De plus, $\Pi_u(u) = 0 \Rightarrow R(u) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de u de degré strictement inférieur au degré de Π_u (si $R \neq 0$), ce qui est absurde par définition de Π_u. Ainsi, $R = 0$, donc tout polynôme annulateur est divisé par Π_u.

2.3 Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul

Exemple

Posons D, l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$. S'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, annulateur de D, alors $\forall Q \in \mathbb{R}[X], \ P(D)(Q) = 0$.

Nous avons en posant $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, $P(D)(Q) = \sum_{k=0}^{r} a_k D^k(Q)$.

En évaluant en le polynôme constant égal à 1, nous avons $P(D)(\tilde{1}) = a_0 = 0$, puis en évaluant en X, il vient de même que $a_1 = 0$, plus généralement, l'évaluation successive sur les $\left(\frac{X^k}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ donne que tous les coefficients de P sont nuls, donc P est le polynôme nul.

D ne possède pas de polynôme annulateur non nul, l'hypothèse de dimension finie est alors primordiale pour pouvoir affirmer l'existence d'un polynôme annulateur!

2.4 Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Rac}(\Pi_u)$

Preuve :

Π_u est un polynôme annulateur, nous avons donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Rac}(\Pi_u)$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Rac}(\Pi_u)$. Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, l'application $(u - \lambda I_d)$ est inversible. Alors $(X-\lambda)|\Pi_u$, et $\dfrac{\Pi_u}{(X-\lambda)}(u) = 0$, car en notant $\Pi_u = \left(\prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\mu)\right) \times (X-\lambda) \times Q$, nous avons $\left(\left[\prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\mu)\right] \times Q\right)(u) = 0$ car $(u - \lambda I_d)$ est inversible.

Ainsi, nous exhibons un polynôme annulateur de degré inférieur au degré de Π_u, ceci est absurde, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

2.5 Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $[u \text{ Diagonalisable}] \iff \begin{cases} \Pi_u \text{ est Scindé Simple} \\ \text{Il existe un polynôme annulateur Scindé Simple} \end{cases}$

Preuve :

Si u est diagonalisable, alors Π_u est scindé.

Posons $P_0 = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$. Alors P_0 est produit de polynômes premiers entre eux, nous pouvons appliquer le lemme de décomposition des noyaux : $\mathrm{Ker}(P_0(u)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda I_d) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

Or, u est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(P_0(u)) = E$, donc P_0 est un polynôme annulateur, le polynôme minimal le divise donc. Π_u est alors scindé et à racines simples car divise un polynôme scindé à racines simples.

Réciproquement, si Π_u est scindé à racines simples, utilisons encore le lemme de décomposition des noyaux : Posons $\Pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$.

Alors, les polynômes $(X-\lambda)$ sont premiers entre eux deux-à-deux, et Π_u correspond à leur produit. Ainsi, d'après le lemme de décomposition des noyaux :

$$E = \mathrm{Ker}(\Pi_u(u)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda I_d) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Ainsi, u est diagonalisable car il existe une base de E composée de vecteurs propres de u.

2.6 Si F est un sous-espace stable par u, le polynôme minimal de l'endo induit divise celui de u (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F, SEV stable par u

Alors, en posant $\tilde{u} = u_{|F}$, nous avons $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$

Preuve :

Le polynôme minimal de u est un polynôme annulateur de $\tilde{u}$, car $\forall x \in F,\ x \in E \Rightarrow \Pi_u(\tilde{u})(x) = \Pi_u(u)(x) = 0 \Rightarrow \Pi_u$ est un polynôme annulateur de $\tilde{u}$.

Donc Π_u est un multiple de $\Pi_{\tilde{u}}$

2.7 Définition des sous-espaces caractéristiques et traduction matricielle associée.

Définition: Sous-espaces caractéristiques

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace caractéristique associé à λ et on note N_λ le sous-espace

$$N_\lambda = \mathrm{Ker}[(u - \lambda I_d)^{m_\lambda}]$$

où m_λ correspond à la multiplicité de λ comme valeur propre de u (remarquons que prendre $n \geqslant m$ ne change pas l'espace considéré).

Si le corps de départ est algébriquement clos, il est possible de trigonaliser une matrice de manière à avoir des "blocs stables", car les sous-espaces caractéristiques sont stables par u. Nous verrons plus tard que nous avons toujours $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda$, ainsi, avec une base $\mathcal{B}$ associée à cette décomposition :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda_p & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_p \end{matrix} \end{array}\right)$$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent (démo HP)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. On suppose que u et v sont diagonalisables toutes deux.

Alors, il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales. (Il existe une base de diagonalisation commune)

Preuve **:**

u est diagonalisable, posons donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Or, u et v commutent, donc les sous-espaces propres de u sont stables par v. Posons dès lors $v_\lambda = v_{|E_\lambda(u)}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Les v_λ sont tous diagonalisables, car v l'est (Donc Π_v est scindé simple, donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\Pi_{v_\lambda} | \Pi_v \Rightarrow \Pi_{v_\lambda}$ scindé simple). Ainsi, nous pouvons trouver une base de vecteurs propres de v_λ dans chaque $E_\lambda(u)$. On pose $\mathcal{B}_\lambda$ une telle base de vecteurs propres de v_λ dans $E_\lambda(u)$.

De plus, les $E_\lambda(u)$ sont composés par définition de vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ. Les vecteurs des $\mathcal{B}_\lambda$ sont vecteurs propres de v mais également de u. Ainsi, nous pouvons poser $\mathcal{B} = \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$ une base de E.

Auquel cas, dans une telle base, les matrices de u et v ont la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\lambda_1} & \cdots & \mathcal{B}_{\lambda_p} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{array}\right) \end{array}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\lambda_1} & \cdots & \mathcal{B}_{\lambda_p} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \mu_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mu_q & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \tau_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \tau_r \end{array}\right) \end{array}$$

3.2 Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul. (démo)

C.F cette question : Exemple d'endo sans polynôme annulateur non nul

3.3 Lemme de décomposition des noyaux (démo, avec le théorème de Bézout admis).

Lemme Décomposition des Noyaux

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$, **PREMIERS ENTRE EUX DEUX A DEUX**.

Alors, $\text{Ker}(P_1 \times \cdots \times P_n(u)) = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} \text{Ker}(P_k(u))$

Preuve :

Rappelons le théorème de Bézout (version Polynôme) :

Théorème de Bézout

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. $P \wedge Q = 1 \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X],\ PU + QV = 1$
2. On note $R = P \wedge Q$. Alors, $\exists U, V \in \mathbb{K}[X],\ PU + QV = R$

Procédons par récurrence sur n (le nombre de polynômes dans le produit) : Vérifions le cas $n = 2$:

D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_1U + P_2V = 1$. Montrons la double inclusion voulue :

Montrons tout d'abord que la somme des noyaux est directe : Soit $x \in \text{Ker}(P_1(u)) \cap \text{Ker}(P_2(u))$. Alors, par la relation de Bézout, nous avons $P_1U(u) + P_2V(u) = I_d$.

Or, $P_1U(u) = UP_1(u)$ par morphisme d'algèbre (le produit de polynômes commute). Donc, en appliquant la relation précédente avec x, cela donne :

$UP_1(u)(x) + VP_2(u)(x) = x$, avec $P_1(u)(x) = 0 = P_2(u)(x)$ par choix de x.

Ainsi, $0 = x$: La somme est directe.

Montrons premièrement l'inclusion réciproque :
Par définition, nous avons $P = P_1 \times P_2 \Rightarrow\ P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$.

Soit $x \in \text{Ker}(P_1(u))$, alors $P(u)(x) = P_2(u)(0) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(P(u))$. Idem pour $x \in \text{Ker}(P_2(u))$, donc $\text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u)) \subset \text{Ker}(P)$.

Réciproquement, Soit $x \in \text{Ker}(P(u))$. Alors, $(P_1(u) \circ P_2(u))(x) = 0$.

Posons $x_1 = P_1(u) \circ U(u)(x)$ et $x_2 = P_2(u) \circ V(u)(x)$. Par l'identité de Bézout : $x_1 + x_2 = x$.

Or, $P_2(u)(x_1) = P_2(u) \circ P_1(u) \circ U(u)(x)$. Nous avons $P_2(u) \circ P_1(u) \circ U(u)(x) = 0 \iff P(u) \circ U(u)(x) = 0 = U(u) \circ P(u)(x)$. Dès lors, $x_1 \in \text{Ker}(P_2(u))$, car x est par hypothèse dans $\text{Ker}(P(u))$, donc $U(u) \circ P(u)(x) = 0 \Rightarrow$

$P_2(u)(x_1) = 0$.

De même, $x_2 \in \mathrm{Ker}(P_1(u))$. Donc, $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$

Nous venons dès lors de montrer que pour le produit de deux polynômes premiers entre eux, l'égalité est vérifiée.

Pour vérifier l'hérédité, il suffit de vérifier que si $P_1, \dots, P_{n+1}$ sont premiers entre eux deux-à-deux, alors P_{n+1} est premier avec $P_1 \times \cdots \times P_n$, ce qui est immédiat.

Nous pouvons dès lors appliquer la même démarche (on copie-colle quoi) afin de démontrer le résultat pour n arbitraire.

3.4 Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles. (démo HP)

Proposition Densité des matrices inversibles
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Alors $\exists (M_n)_n \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}},\ M_n \to A$

Preuve :

Il suffit de poser $A_n = A - \frac{1}{n} I_n$. Alors, cette suite est une suite de matrice inversible définie pour n assez grand :

Observons pour $n \in \mathbb{N},\ \det(A_n) = \det\left(A - \frac{1}{n} I_n\right) = (-1)^n \times \chi_A\left(\frac{1}{n}\right)$.

Or, A possède un nombre fini de valeurs propres (nous sommes en dimension finie). Ainsi, la suite (A_n) se trouve dans $GL_n(\mathbb{K})$ pour n assez grand.

De plus, nous remarquons que $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$

D'où la densité des matrices inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

3.5 Si une matrice est inversible son inverse est un polynôme en cette matrice.(démo HP)

Proposition

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Alors $\exists P \in \mathbb{K}[X],\ \ A^{-1} = P(A)$

Preuve :

Considérons χ_A, le polynôme caractéristique de A (qui est également un polynôme annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

A étant inversible, son coefficient constant se trouve être non nul (il vaut $(-1)^n \times \det(A)$). Remarquons que $I_n = A \times A^{-1}$.

Nous avons la relation $\chi_A(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = 0 \Rightarrow\ I_n = \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i A^i$

Donc, en factorisant A dans les deux membres, et en simplifiant, il vient :

$$A^{-1} \times A = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}\right) \times A$$
$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}\right)$$

(A étant inversible, on multiplie à droite par A^{-1} dans les deux membres).

Ainsi, l'inverse d'une matrice est bien polynomiale en cette matrice.

3.6 Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est limite d'une suite de matrices diagonalisables. (démo HP)

Proposition Densité des matrices inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors A est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Preuve :

A étant dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable. Ramenons nous au cas où A est triangulaire supérieure.

A est alors de la forme $\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & \mathbb{X} & & \mathbb{X} & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ \hline & 0 & & \ddots & & \mathbb{X} & \\ \hline & & & & \lambda_p & & \\ & 0 & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{array}\right)$.

Posons la suite de matrice $T_n = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \lambda_1 + \frac{1}{n} & & & & & & \\ & \ddots & & \mathbb{X} & & \mathbb{X} & \\ & & \lambda_1 + \frac{m_{\lambda_1}}{n} & & & & \\ \hline & 0 & & \ddots & & \mathbb{X} & \\ \hline & & & & \lambda_p + \frac{1}{n} & & \\ & 0 & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p + \frac{m_{\lambda_p}}{n} \end{array}\right)$.

Alors ces matrices sont diagonalisables pour n assez grand. En effet, on vérifie aisément que les éléments diagonaux reliés à une même valeur propre sont distincts pour tout n $\left(\lambda_i + \frac{a}{n} - \lambda_i + \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \neq 0\right)$

De plus, par hypothèse, si $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. En posant $d = \max\limits_{i,j \in [\![1;p]\!]}(\|\lambda_i - \lambda_j\|)$, pour n assez grand, les $\lambda_i + \frac{k}{n}$ sont contenus dans la boule fermée de centre λ_i, de rayon $\frac{d}{3}$.

Dès lors, tous les éléments diagonaux (valeurs propres) des T_n sont distincts pour n assez grand. Les T_n sont donc diagonalisables pour n assez grand.

De plus, nous observons que $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$, ce qui permet de conclure dans le cas général par changement de base car toute matrice est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3.7 Décomposition de Dunford (HP ?), avec démonstration de l'unicité. (démo HP)

Théorème Décomposition de Dunford

Soit E, $\mathbb{K}-$E.V de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tels que :

- d est Diagonalisable, n est nilpotente
- $u = d + n$
- d et n commutent
- d et n sont polynomiaux en u

Preuve :

Toute l'idée de la preuve part des sous-espaces caractéristiques.

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on pose $N_\lambda(u) = \text{Ker}[(u - \lambda I_d)^{m_\lambda}]$ le sous-espace caractéristique associé à la valeur λ.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$, donc $\text{Ker}(\chi_u(u)) = E$.

Or, $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$, et tout ces termes sont premiers entre eux (car les λ sont distincts).

Ainsi, d'après le lemme de décomposition des noyaux :

$$\text{Ker}(\chi_u(u)) = E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}[(u - \lambda I_d)^{m_\lambda}]$$

Pour chaque λ, posons $d_\lambda = \lambda \cdot \text{Id}_{|N_\lambda(u)}$, alors les d_λ sont biens définis car sont des endomorphismes sur les $N_\lambda(u)$.

Ces endomorphismes sont évidemment diagonalisables sur chaque $N_\lambda(u)$. Il suffit alors de poser $d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} d_i$ afin d'obtenir un endomorphisme diagonalisable. (observer la matrice de d dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u)$.

Posons alors $n = u - d$. Alors nous avons bien $n + d = u$ par définition. Montrons que n est nilpotente.

Les sous-espaces caractéristiques étant stables par u (et évidemment par l'identité donc par d), ils le restent par n, il suffit alors de montrer que chaque $n_\lambda = n_{|N_\lambda(u)}$ est nilpotente.

Or ce fait se vérifie par la définition des $N_\lambda(u) = \text{Ker}[(u - d_\lambda)^{m_\lambda}]$, ce qui donne m_λ comme indice de nilpotence pour chaque n_λ.

Nous avons alors $u = n + d$ avec d diagonalisable et n nilpotente.

Pour montrer l'unicité et le fait que ces endomorphismes commutent, montrons que d et n sont polynomiales en u : Posons pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, p_λ la projection sur $N_\lambda(u)$ parallèlement à la somme directe des autres sous-espaces caractéristiques.

Alors, $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$. De plus, les projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques sont polynomiaux en u d'après le théorème de Bézout :

Lemme

Posons $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ Q_\lambda = \prod_{\substack{\mu \in \mathrm{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} (X-\mu)^{m_\mu}$.

Alors ces Q_λ sont premiers entre eux **DANS LEUR ENSEMBLE**, donc, d'après le théorème de Bézout, $\exists (U_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)},\ \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} Q_\lambda U_\lambda = 1$.

On pose alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ p_\lambda = Q_\lambda U_\lambda(u)$. Alors les p_λ sont des projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques et sont polynomiaux en u.

Preuve :

Par la relation de Bézout, nous avons alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} p_\lambda = I_d$. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \left(\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} p_\mu\right) \circ p_\lambda = p_\lambda$.

Or, pour tout $\lambda \neq \mu,\ p_\mu \circ p_\lambda = 0$, car $p_\mu \circ p_\lambda = U_\mu U_\lambda(u) \circ Q_\mu Q_\lambda(u) = 0$, car $P \mid Q_\lambda Q_\mu$ (par définition des Q_λ, le produit comble les trous de Q_λ), or $P(u) = 0 \Rightarrow\ Q_\lambda Q_\mu(u) = 0$.

Dès lors, $(p_\lambda)^2 = p_\lambda$ par linéarité de l'évaluation. Ainsi, les p_λ sont des projecteurs.

Montrons ensuite que $\mathrm{Im}(p_\lambda) = N_\lambda(u)$:

Soit $y \in \mathrm{Im}(p_\lambda)$, alors $\exists x \in E,\ y = p_\lambda(x)$. Montrons que $(u - \lambda I_d)^{m_\lambda}(y) = 0$:

$$\begin{aligned}
(u-\lambda I_d)^{m_\lambda}(y) &= (u-\lambda I_d)^{m_\lambda}(p_\lambda(x)) \\
&= (X-\lambda)^{m_\lambda} \times U_\lambda \times Q_\lambda(u)(x) \\
&= 0 \quad \text{Car } P \mid (X-\lambda)^{m_\lambda} \times U_\lambda \text{ (Par définition des } Q_\lambda)
\end{aligned}$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}[(u-\lambda I_d)^{m_\lambda}] = N_\lambda(u)$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}[(u-\lambda I_d)^{m_\lambda}]$.
Or, par Bézout, $x = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} p_\mu(x) = p_\lambda(x)$ car par définition de p_λ, Q_λ est le seul polynôme Q qui ne contient pas $(X-\lambda)$ par définition, donc p_λ est bien le seul projecteur dont l'image est non-nulle.

Finalement, les projecteurs sur $N_\lambda(u)$ sont polynomiaux en u.

Ainsi, d et n sont polynomiaux en u, ces deux endomorphismes commutent donc. Il ne reste plus qu'à montrer l'unicité :

Soit (d', n'), un autre couple qui convient. Alors, $d + n = d' + n' \Rightarrow\ d - d' = n - n'$.

Or, $d - d'$ est diagonalisable (car d et d' sont polynomiaux en u, donc commutent et sont alors codiagonalisables). De plus, $n - n'$ reste nilpotente.

Dès lors, la seule matrice diagonalisable nilpotente étant la matrice nulle, $d - d' = n - n' = 0 \Rightarrow\ d = d'$ et $n = n'$. D'où l'unicité.

3.8 Deux matrices réelles semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. (démo HP)

Proposition

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B soient semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ($\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ PAP^{-1} = B$).

Alors A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ PAP^{-1} = B$

Preuve :

Nous avons par hypothèse $PA = BP$. Posons $P = C + iD$, avec $C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

Dès lors, nous avons $(C + iD)A = B(C + iD) \Rightarrow CA = BC$ et $DA = BD$. Posons pour $t \in \mathbb{C}$, $P_t = C + tD$.

Alors, $\det(P_t) = \det(C + tD) = Q(t)$ (un polynôme en t).

Or, $Q(i) = \det(P) \neq 0 \Rightarrow Q \neq 0 \Rightarrow Q$ possède un nombre fini de racines, or $\mathbb{R}$ est infini (Woah), il existe alors $t_0 \in \mathbb{R},\ \det(P_t) \neq 0$. Dès lors $C + t_0 D$ est inversible.

Dès lors, $P_{t_0} A (P_{t_0})^{-1} = B$ avec $P_{t_0} \in GL_n(\mathbb{R})$, donc A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Soit $P(X) := X^3 + 1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)$. Alors P est un polynôme annulateur de A, scindé simple, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Or, la trace est un invariant de Similitude, donc $\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda \times \lambda = -1 - j - j^2 = 0$

4.2 Exercice 2

Question 1. A est une matrice symétrique Réelle, donc est à ce titre Diagonalisable.

Question 2. Nous voyons que A est de rang 2, car les vecteurs colonnes $C_2, \ldots, C_n$ sont tous colinéaires. Le vecteur C_1 est quant à lui non-colinéaire à C_2, donc la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs colonnes est exactement deux (du fait que les a_i sont non tous nuls). Nous en déduisons que le spectre de A comporte 0, et ne peut comporter plus de deux valeurs propres non-nulles.

Question 3. Un calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} \sum_i a_i^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1^2 & & a_1 a_n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_n a_1 & & a_n^2 \end{pmatrix}$

Nous remarquons que la sous-matrice est de rang 1, car chaque vecteur colonne de cette sous-matrice correspond exactement à $a_i \times \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Ceci nous apporte l'information supplémentaire selon laquelle $\sum_i a_i^2$ est une valeur propre de A^2. Or, A est diagonalisable, donc A^2 l'est aussi, et ses valeurs propres correspondent aux valeurs propres de A, élevées au carré. Nous savons néanmoins que $\text{Tr}(A) = 0$, donc A comporte à la fois $\sqrt{\sum_i a_i^2}$ et $-\sqrt{\sum_i a_i^2}$ comme valeurs propres, car la trace de A correspond à la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité).

Dès lors, $\text{Sp}(A) = \{\sqrt{\sum_i a_i^2}, -\sqrt{\sum_i a_i^2}, 0\}$ et $\chi_A(X) = X^{n-1}\left(X - \sqrt{\sum_i a_i^2}\right)\left(X + \sqrt{\sum_i a_i^2}\right)$.

4.3 Exercice 3

Question 1. Si f admettait une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$, dont on dénote x_λ un vecteur propre associé, nous aurions $f^2(x_\lambda) = \begin{cases} -x_\lambda \\ \lambda^2 x_\lambda \end{cases}$

Ceci est absurde avec $\lambda \in \mathbb{R}$, donc f ne comporte aucune valeur propre réelle.

De plus, $\det(f^2) = \det(f)^2 = (-1)^n \det(I_n) \Rightarrow \det(f) \neq 0$, donc f est bien bijective.

Question 2. Il vient de plus que $n = \dim(E)$ est pair, car $\det(f)$ est un réel, donc lorsque ce dernier est élevé au carré, nous devons avoir un réel positif, ce qui est impossible si $n \equiv 1[2]$, donc $n \equiv 0[2]$

Question 3. Par définition de l'espace fourni, $f(u) \in \mathrm{Vect}(u, f(u))$. De plus, $f(f(u)) = -u$ par définition de f, donc $f(f(u)) \in \mathrm{Vect}(u, f(u))$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable par f, car tout vecteur de cet espace s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs u et $f(u)$, dont l'image appartient bien à $\mathrm{Vect}(u, f(u))$.

Question 4. Soit $u \in E$. Nous savons $f(u) \notin \mathrm{Vect}(u)$, car f n'admet pas de valeur propre réelle. Or, d'après ce qui précède, l'espace $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable sous l'action de f. Ainsi, la famille $(u, f(u))$ est libre, et stable sous l'action de f. Nous savons que f est bijective, et que f ne comporte aucune valeur propre. Considérons l'espace $\mathcal{G}$, supplémentaire de $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ dans E. Alors cet espace $\mathcal{G}$ est de dimension deux. Par bijectivité de f, nous savons qu'il existe $v \in \mathcal{G}$ tel que $f(v) \in \mathcal{G}$, car un tel vecteur ne peut se trouver dans $\mathcal{F}$ (clos sous l'action de f). Or, de par le fait que f ne possède aucune valeur propre réelle, nous savons que $(v, f(v))$ est libre, de bon cardinal pour former une base de $\mathcal{G}$. D'où l'existence de $u, v \in E$ tels que $(u, f(u), v, f(v))$ forme une base de E. (Nous pouvions également nous intéresser à $f_{|\mathcal{G}}$, qui respecte les même propriétés que f, donc la question précédente s'applique).

Question 5. Opérons par récurrence sur la dimension de E. Remarquons que les cas $n = 2$, $n = 4$ viennent d'être traités.

Soit donc $n \geqslant 2$. Supposons que pour E de dimension n, tout endomorphisme f tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ offre une base de la forme $(u_1, f(u_1), \ldots, u_p, f(u_p))$. Alors en dimension $n+2$, intéressons nous à un tel endomorphisme f :

Soit $u \in E \setminus \{0\}$. f étant bijective, et ne possédant aucune valeur propre réelle, il vient que $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est un espace vectoriel de dimension deux, stable par f. Posons $\mathcal{F}$ supplémentaire de cet espace. Alors f induit un endomorphisme $f_{|\mathcal{F}}$ (la bijectivité de f le garantit), qui nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Soit $(u_1, f(u_1), \ldots, u_p, f(u_p))$, base de $\mathcal{F}$. Par théorème de concaténation des bases, il vient que $(u, f(u), u_1, f(u_1), \ldots, u_p, f(u_p))$ est une base de E.

4.4 Exercice 4

Question 1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors $u(x) = 0$ et $\exists z \in E,\ x = u(z)$.

Or, nous avons $u^3 + u = 0$, donc $u^3(z) + u(z) = u^2(x) + x = 0$. Avec $u(x) = 0 \Rightarrow\ u^2(x) = 0$, nous obtenons $x = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Question 2. Utilisons le Lemme de décomposition des noyaux : Nous avons $E = \mathrm{Ker}(u^3 + u) = \mathrm{Ker}(u \circ (u^2 + I_d))$

Or, X et $X^2 + 1$ sont deux polynômes premiers entre eux, donc $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + I_d)$. En particulier, ces espaces sont en somme directe.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors $x = u(z)$, donc $u^3(z) + u(z) = u^2(x) + I_d(x) = 0 \Rightarrow\ x \in \mathrm{Ker}(u^2 + I_d)$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + I_d)$, alors $u^2(x) + x = 0 \ \Rightarrow\ x = u(-u(x))$, supposons de plus x non nul (sinon $x = u(0)$ convient). Alors d'après la décomposition des noyaux, $x \notin \mathrm{Ker}(u)$, donc $u(x) \neq 0$, et en particulier, $x \in \mathrm{Im}(u)$ avec $x = u(-u(x))$.

Question 3. Supposons que u soit injective. Alors, en dimension finie, ceci équivaut à u surjective et u bijective. En particulier, $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. En particulier, $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$. Dès lors, du fait que $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ soit un polynôme annulateur de u par définition de u, il vient que $\Pi_u \mid X(X^2+1)$: Nous avons donc $\Pi_u = X$, $\Pi_u = (X^2+1)$ ou $\Pi_u = X(X^2+1)$ comme possibilités. Or, du fait que $\mathrm{Rac}(\Pi_u) = \mathrm{Sp}(u)$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$, nous devons donc avoir $\Pi_u = X^2 + 1$.

Ainsi, notre application u ne possède aucune valeur propre réelle, ce qui est absurde car χ_u est de degré 3 et possède à ce titre une racine réelle : u n'est pas injective.

Question 4. Nous venons donc d'éliminer le cas $\text{rg}(u) = 3$. Nous savons de plus que $\text{rg}(u)>0$ car $u \neq 0$. Ainsi, $\text{rg}(u) \in \{1, 2\}$.

Or, si $\text{rg}(u) = 1$, du fait que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$, il vient que $\text{Im}(u)$ est une droite stable, donc u possède une valeur propre non-nulle (en effet, si $x \in \text{Im}(u) \setminus \{0\}$, $u(x) \in \text{Im}(u) \Rightarrow u(x) = \lambda x$ et $u(x) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ car $x \notin \text{Ker}(x)$. Or, avec $\text{Sp}(u) \subset \text{Rac}(X(X^2+1))$, ceci est impossible, car ce polynôme ne possède que 0 pour racine réelle. Dès lors, nous devons avoir $\text{rg}(u) = 2$

4.5 Exercice 5

Question 1. Nous trouvons $\chi_A(X) = (X-5)(X-3) - (-3)(-1) = X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X-6)$.

De plus, $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_2) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(e_1 - e_2)$, et $E_6(A) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{Vect}(3e_1 + e_2)$.

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, nous obtenons $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Question 2.a Nous remarquons que si λ est une valeur propre de M associée à x_λ, nous avons :
$M^2x_\lambda + Mx_\lambda = (\lambda^2 + \lambda)x_\lambda = Ax_\lambda$: x_λ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $(\lambda^2 + \lambda)$

Alors $(\lambda^2 + \lambda) \in \text{Sp}(A) = \{2, 6\}$. Nous remarquons donc que les valeurs proposées conviennent, et qu'il s'agit là des uniques possibilités (nous avons deux polynômes réels de degré 2 : $X^2 + X - 2$ et $X^2 + X - 6$ dont il faut trouver les racines, qui sont au plus au nombre de 4).

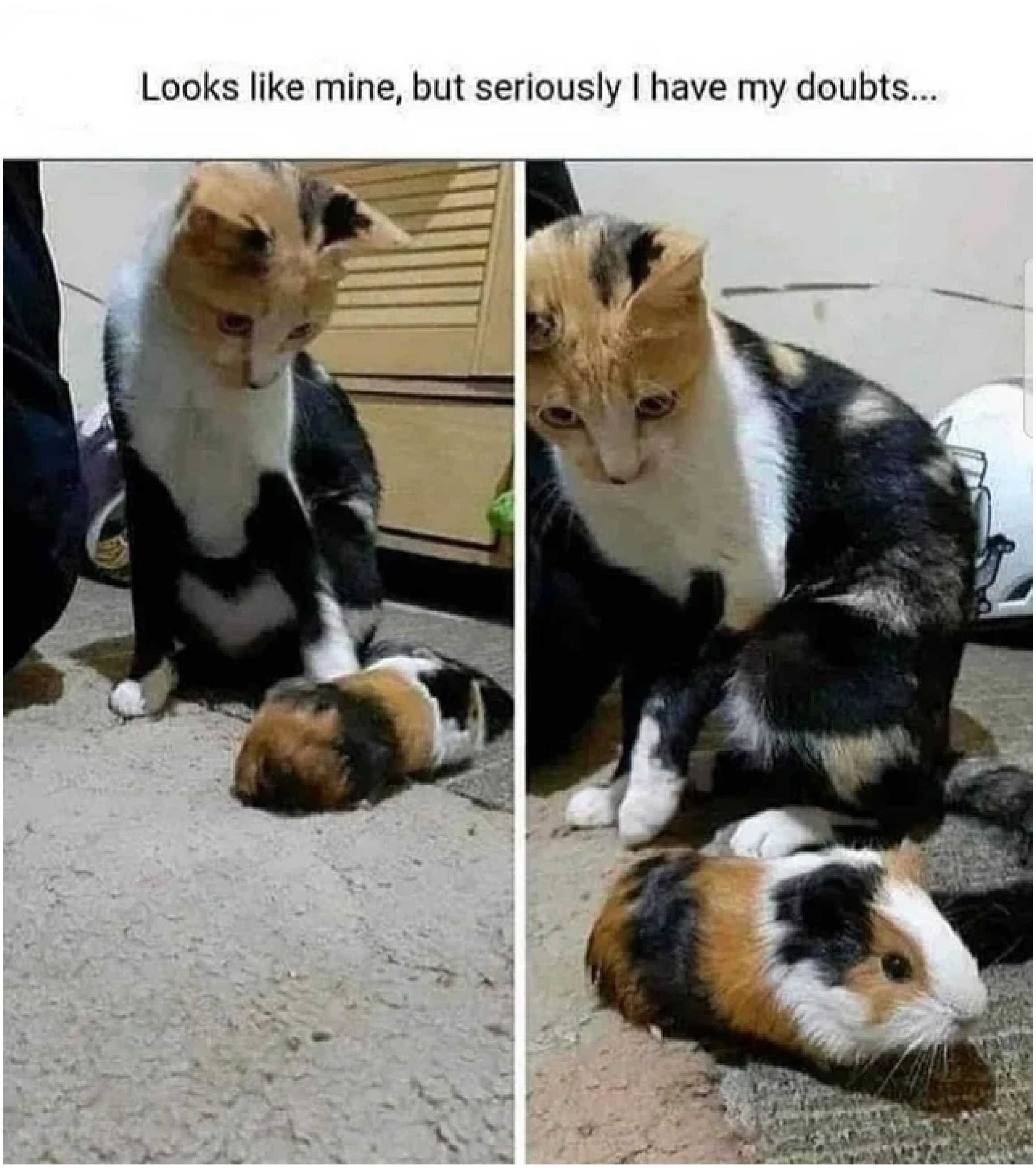
Question 2.b Notons que $\Pi_A(A) = \Pi_A(M^2 + M) = 0$. Ainsi, en notant $\Pi_A = (X-2)(X-6)$ (scindé simple, dont les racines sont exactement le spectre de A), nous obtenons un polynôme annulateur pour M : $(X^2 + X - 2)(X^2 + X - 6)$ est annulateur pour M.

Or, ce polynôme se décompose comme $(X-1)(X+2)(X-2)(X+3)$, qui est scindé simple, donc M est diagonalisable car admet un polynôme annulateur scindé simple.

Question 3. A est un polynôme en M, donc commute avec M. Dès lors, ces deux matrices sont codiagonalisables. Or, les seules matrices de passage diagonalisant A sont les matrices P, et la matrice obtenue en échangeant la première et la deuxième colonne de P. Dès lors, les seules matrices convenant sont semblables à :

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & \\ & -3 \end{pmatrix}$$

Il faut ajouter l'échange de ces deux valeurs propres, et adapter à la base de diagonalisation adaptée (P ou P').


Looks like mine, but seriously I have my doubts...