Colles MPi* Semaine n°3 du 18 au 22/09/2023 (Programme n°1)

Vallaeys Pascal

5 septembre 2024

Thème : Révisions d'algèbre linéaire

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

-

Liste des élèves du groupe B :

-

Liste des élèves du groupe C :

-

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'une projection et décomposition de l'espace associée.(démo)
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.(démo, pas refait en spé)
- Théorème du rang. (démo)
- Si une application linéaire est bijective, sa réciproque est linéaire. (démo, pas refait en spé)
- Si une somme de n sous-espaces est directe, la décomposition d'un vecteur est unique (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base. (démo, pas refait en spé)
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. (démo, dim finie puis quelconque)
- L'image directe et l'image réciproque de sev par une application linéaire sont des sev. (démo, pas refait en spé)
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. (démo)
- Existence et expression du polynôme interpolateur (avec les bonnes hypothèses). (démo)
- Majoration de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (en dimension finie) par la somme des dimensions. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.(démo, pas refait en spé)
- Formule de changement de base pour les matrices (démo, pas refait en spé)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $E = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

(ii) $Ker(f) = Ker(f^2)$

(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

(iv) $Ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(v) $E = Ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

Exercice 2 : (Mines MP 2023) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E.

Montrer que : $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Exercice 3 : (Mines MP 2022)

Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ nilpotent. Montrer que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

Exercice 5 : (CCINP MP 2023)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus Im(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $Im(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = Im(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 6 : (Mines MP 2022)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = \mathrm{O}_n$ si et seulement si A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ où $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Exercice 7 :

a) Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et f(x) soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

b) En déduire les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec tous les autres.

c) Proposer une solution matricielle de la question précédente.

Exercice 8 : (IMT MP 2017)

Montrer par récurrence sur n que tout matrice de $M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad rg(A) < n$. Soit $G = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid ABA = 0\}$.

Montrer que G est un espace vectoriel, puis déterminer sa dimension.

Exercice 10 : (CCINP MP 2022)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \end{cases}$$

Exercice 11 :

Quelles sont les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on ait $Dét(A+M) = Dét(A) + Dét(M)$.

Exercice 12 : (Centrale)

Soient $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Montrer qu'il existe n+1 réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int\limits_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P(x_k)$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 13 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Si on pose $d_n = \dim(Ker(f^{n+1})) - \dim(Ker(f^n))$, montrer que la suite $(d_n)_{n\in\aleph}$ est décroissante.

Exercice 14 : (Mines-Ponts 2019)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que B est de rang 1. Comparer $\det(A+B).\det(A-B)$ et $\det(A^2)$.

Exercice 15 : (Centrale MP)
Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme multiplicative, c'est à dire telle que : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $f(A.B) = f(A).f(B)$. On suppose f non constante.
a) Que vaut $f(I_n)$? $f(0)$?
b) Montrer que deux matrices semblables ont même image par f.
c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A) \neq 0$ si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la notion de matrices équivalentes).
d) Pouvez-vous proposer deux applications f possibles ?
e) Existe-t-il de telles applications qui soient en outre linéaires ?

Exercice 16 : (X MP 2021)
Déterminer les matrices qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes.
(pour occuper les 5 dernières minutes)

Exercice 17 :

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ n réels. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et M la matrice de terme général $w^{(i-1).(j-1)}$.
a) Calculer le produit A.M.
b) En déduire le déterminant de A. (On utilisera un polynôme dont les coefficients sont les a_i)

Exercice 18 : (Centrale MP)

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\Phi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ X \to A^T.X.B \end{matrix}$.

Déterminer le déterminant de Φ.

Exercice 19 : (X 2001 42)
Soient $0 < t_1 < ... < t_n$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$. Montrer que le déterminant de la matrice de terme général $\left(t_i^{\alpha_j}\right)$ est strictement positif.

Exercice 20 : (X)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que A-B soient inversibles et $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$. Montrer que n est un multiple de 6.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 55,60,64,65,87,90.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Révisions d'algèbre linéaire. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°1
- Groupe 5 à 7 : Programme n°1
- Groupe 8 à 10 : Programme n°1
- Groupe 11 à 13 : Pas de colle de math cette semaine