Colles MPi* Semaine n°24 du 01/04/2024 au 05/04/2024 (Programme n°17, virtuel)

Vallaeys Pascal

9 février 2024

Thème : Calcul différentiel.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définitions de base : notion de fonction différentiable, de dérivée directionnelle et de dérivée partielle. Lien entre ces notions. (démo des liens)

- Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles (démo).
- Théorème de représentation des formes linéaires en dimension finie (démo)
- Définition du gradient.
- Définition et caractérisation d'une fonction de classe C^1 , de classe C^k.
- Théorème de Schwarz.
- Définition d'un vecteur tangent à une partie.
- Définition de la matrice Hessienne et formule de Taylor à l'ordre 2.
- Lien entre extrema et caractère positif/défini positif de la matrice Hessienne.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Différentiabilité d'une composée (démo)
- Règle de la chaîne. (démo)
- Caractérisation des fonctions de classe C^1. (démo)
- Lien entre espace tangent et noyau de la différentielle. (démo d'une inclusion)
- Le gradient donne la direction de variation maximale d'une fonction scalaire (démo)
- Espace tangent à une partie donnée par l'équation scalaire $g(x) = 0$. (démo d'une inclusion)
- Théorème d'optimisation sous une contrainte. (démo)
- Sur un ouvert, les extrema d'une fonction scalaire différentiable sont des points critiques (démo)
- Exemples d'équations aux dérivées partielles sur un convexe.

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Différentielle de B(f,g) où B est bilinéaire en dimension finie. (démo)
- Théorème de Schwarz. (démo)
- Caractérisation des fonctions de classe C^1 sur un ouvert à l'aide des dérivées partielles. (démo)
- Lien entre extrema et caractère positif/défini positif de la matrice Hessienne. (démo)
- Formule de Taylor à l'ordre 2. (démo HP)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (CCINP TSI 2021)
Soit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les points où f admet des extrema locaux.

Exercice 2 : (CCINP MP 2021)
On considère $\mathbb{R}^n$ et son produit scalaire naturel $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives. 1. Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0,\ \langle f(h), h\rangle > 0$
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$
a) Montrer que g est différentiable et calculer son gradient.
b) Montrer que g admet un unique point critique $z_0 = f^{-1}(u)$.
c) Montrer que g admet un minimum global en z_0.
Indication : Calculer le signe de $g(z_0 + h) - g(z_0)$.

Exercice 3 : (Ecrit CCINP MP 2017)
Soit $f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to \sin\left(x^2 - y^2\right) \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \to (x + y, x - y) \end{array}$
1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en un point (x, y).
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'une vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application $d\,(f \circ g)\,(x, y)$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
a. En calculant $f \circ g$.
b. En utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Exercice 4 : (TPE MP 2019)
On définit f sur $[0, 1]^2$ par $f\,(1, 1) = 0$ et $f\,(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x, y) \neq (1, 1)$.
a) Montrer que f est continue.
b) Déterminer le maximum de f.

Exercice 5 :

On pose $f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
a) Montrer que f est continue.
b) Montrer que f est de classe C^1.
b) Montrer que f n'est pas de classe C^2 au voisinage de (0,0).

Exercice 6 :
$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$une fonction de classe C^1, et soit $(x_1,...,x_n,h_1,...,h_n)\in\mathbb{R}^{2n}$. On considère $g:t\to f(x_1+th_1,...,x_n+th_n)$. Justifier le fait que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7 :
Soient $a_1,...,a_n$ et $x_1,...,x_n$ des réels strictement positifs.
On note $X=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/x_1+...+x_n=1\}$
Montrer que $\sqrt[n]{a_1...a_n}\leq\frac{a_1+...+a_n}{n}$, à l'aide du théorème d'optimisation sous une contrainte, appliqué sur X.

Exercice 8 : (Mines PC 2014)
En quels points de la surface d'équation $x^2-y^2+z^2=7$ le plan tangent est-il parallèle au plan $\Pi : x-2y+z=1$?

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 9 : (Mines-Ponts 2019)
Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité et f une fonction différentiable sur un voisinage de S, à valeurs réelles. On suppose que la restriction de f à S admet un extremum local en x_0.
a) Que dire de $\nabla f(x_0)$?
b) Soit u un endomorphisme symétrique de E. Appliquer ce qui précède à $f:x\to\langle u(x),x\rangle$ et en déduire une démonstration du théorème spectral.

Exercice 10 : (CCINP MP 2022)
$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0 \text{ et } y>0\}$
Soit $\Phi:\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \Omega\\ (x,y) & \longmapsto & (xy,\frac{x}{y})\end{array}$
1) Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2) On pose $(u,v)=\Phi(x,y)$ et $f(x,y)=F(u,v)$.
Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3) Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-2f(x,y)+2=0$
4) Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=0$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour la question 3), il faut utiliser les résultats touvés précedemment en faisant un changement de variable dans l'équation.

Exercice 11 : (Mines MP 2018)
On pose $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+x^{2n}+y^{2n}\right)$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur D.

Exercice 12 : (Mines MP 2022) sans préparation :
Pour x et y réels convenables, on pose

$$f(x,y)=\int_0^1\ln(t^x+t^y)dt.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Etudier les extrema de f.

Exercice 13 : (Mines MP 2021)

Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère la fonction f définir sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $f(x,y) = g'(x)$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Pour l'exercice 2, il m'a demandé comme question intermédiaire d'écrire f sous la forme d'une intégrale entre 0 et 1.

Exercice 14 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $f \in S^{++}(E)$ et $u \in E$.
Pour $x \in E$, on note $F(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.
a) Montrer que F est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
b) Montrer que F atteint son minimum sur E en un point que l'on précisera.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 15 : (Centrale MP 2021)
On rappelle que le laplacien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire : $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
On pose $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| < 1\}$.
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\mathcal{B}}$ et telle que f est nulle sur $Fr(B)$.
1) Pour cette question on suppose que pour tout $x \in \mathcal{B}, f(x) > 0$.
Montrer que qu'il existe un x_0 de $\mathcal{B}$ telle que le maximum de f soit atteint en x_0.
Montrer qu'on a alors $\Delta f(x_0) \leq 0$.
2) On suppose à présent qu'il existe $x \in \mathcal{B}$ tel que $f(x) = 0$.
Montrer que le laplcien de f s'annule au moins une fois.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour montrer que $\Delta f(x_0) \leq 0$, l'examinateur m'a demandé de d'abord montrer le cas où $n = 1$
Commentaires divers :
Examinateur parlant peu et difficile à comprendre à cause de problèmes d'élocution.

Exercice 16 :
Soit $f : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \\ M \to \begin{pmatrix} Tr(M) \\ Tr(M^2) \\ \vdots \\ Tr(M^n) \end{pmatrix} \end{array}$.
a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
b) Comparer le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.
c) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17 :
Parmi les triangle de périmètre donné, lesquels sont d'aire maximale ?

Exercice 18 : (ULM MP)
Soient $x_1, x_2, ..., x_k$ des entiers naturels de somme $n \in \mathbb{N}$. Comment rendre leur produit $x_1.x_2...x_k$ maximal sous ces conditions ?

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 33,52,56,57,58.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : calcul différentiel. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 :Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 2 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 3 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 4 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 9 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 10 :Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine