Colles MPi* Semaine n°8 du 4/11/2024 au 8/11/2024 (Programme n°4)

Vallaeys Pascal

7 octobre 2024

Thème : Fin de la réduction, orienté vers le polynôme minimal.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Si deux endomorphismes commutent, le noyau, l'image et les s.e.p. de l'un sont stables par l'autre.(démo)
- En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul (démo)
- Définition du polynôme minimal, en dimension finie.

- Lien entre spectre et polynôme annulateur (démo)
- Théorème de Cayley Hamilton (démo pour n=2)
- Lemme de décomposition des noyaux.
- Si u est diagonalisable, tout endo induit sur un sous-espace stable l'est. (démo)
- Caractérisation des endo trigonalisables par le polynôme minimal ou un polynôme annulateur.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Existence et unicité du polynôme minimal en dimension finie (démo)
- Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur (démo)
- Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul (démo)
- Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal (démo)
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple (démo)
- Si F est un sous-espace stable par u, le polynôme minimal de l'endo induit divise celui de u (démo)
- Définition des sous-espaces caractéristiques et traduction matricielle associée.

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent (démo HP)
- Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul. (démo)
- Lemme de décomposition des noyaux (démo, avec le théorème de Bézout admis).
- Dans $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles. (démo HP)
- Si une matrice est inversible son inverse est un polynôme en cette matrice.(démo HP)
- Dans $M_n(\mathbb{C})$, toute matrice est limite d'une suite de matrices diagonalisables. (démo HP)
- Décomposition de Dunford (HP ?), avec démonstration de l'unicité. (démo HP)
- Deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$. (démo HP)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.
1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A)$. Montrer que A est la matrice d'une projection.

Exercice 2 : (CCINP MP 2023)
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2, puis un polynôme annulateur de M de degré 4.
3. Montrer que M est diagonalisable, et préciser les valeurs possibles de son spectre.
4. Donner les différentes formes possibles de M.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la dernière question, il faut d'abord montrer que M et A sont diagonalisables pour une même base de vecteurs propres.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2023)
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = O_n$.
1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Exercice 4 : (CCINP MP 2023)
Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
1. Calculer A^2 et A^3. En déduire un polynôme annulateur de A.
2. Donner les éléments propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
4. A est-elle trigonalisable ? Si oui, la trigonaliser.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

Exercice 5 : (CCINP MP 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
3. On suppose que $A^3 - 3A - 4\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
4. On suppose que $A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair.

Exercice 6 : (CCINP MP 2022)

1. Énoncer sans démonstration le lemme des noyaux.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

2. On suppose $\det f^2 \neq 0$ et f^2 diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.
3. On suppose $\det f^2 = 0$, f^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que f est diagonalisable.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f n'est pas nécessairement diagonalisable.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$.
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

1. Déterminer le spectre de A de trois façons :

.En utilisant la définition des valeurs propres et des vecteurs propres.

.En calculant son polynôme caractéristique χ_A.

.En calculant son polynôme minimal μ_A.

2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$?
4. Dans ce cas, déterminer $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 9 : (CCINP MP 2023)

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

On souhaite montrer de trois façons différentes que f est nilpotent.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
2. Soit $u : h \in \mathcal{L}(E) \longmapsto h \circ g - g \circ h$. En étudiant u, montrer que f est nilpotent.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que : $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$. En déduire que f est nilpotent.
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr} f^k = 0$. On suppose que f admet p valeurs propres distinctes. Montrer que $p = 1$. En déduire que f est nilpotent.

Exercice 10 : (Mines MP 2022)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère l'application u définie, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $u(M) = A.M.A$

1) Montrer que u est un endomorphisme. Montrer que u est nilpotente si, et seulement si, A est nilpotente.

2) Montrer que u est diagonalisable si A l'est. Puis montrer la réciproque dans le cas où A est inversible.

Exercice 11 : (Centrale MP 2021)

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0_n\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n$. Montrer que $\operatorname{Tr}(A) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

Exercice 12 :

a) Montrer que le commutant d'une matrice A donnée est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ (ensemble des matrices qui commutent avec A).

b) Montrer que si deux matrices sont semblables, leurs commutants ont même dimension.

c) Que dire de la dimension de ce commutant, si A est diagonalisable.

Exercice 13 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)/u^3 = u + Id$. Montrer que $Det(u) > 0$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 14 : (Mines MP 2023)
On considère ϕ telle que pour $P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.
1. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
2. Montrer de plusieurs manières que ϕ est diagonalisable.
3. Expliciter une base de vecteurs propres.

Exercice 15 : (Mines MP 2022)
Un endomorphisme f est dit cyclique dans E tel que $\dim E = n$, si :
$\exists\, x_0 \in E : \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)) = E$.
1. Soit g un endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathbb{R}^3$ soit :
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
Montrer que g est cyclique et diagonalisable.
2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 16 : (Mines MP 2022)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe P polynôme annulateur de f vérifiant : $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Après avoir écrit $P = XQ$, remarquer que X et Q sont premiers entre eux.

Exercice 17 : (Mines MP 2022) (15 min de préparation, 15 min de passage)
Soit $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$, On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$
1. Étudier la convergence de la suite. 2. On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ l'application telle que :
$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ \phi(f)(x) = f(ax + b)$
a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
b) Montrer que ϕ est bijective.
c) Soit λ une valeur propre de ϕ différente de 1 et f_λ un vecteur propre associé.
(i) Montrer que $f_\lambda\left(\frac{b}{1-a}\right) = 0$ et que $\lambda \in]-1,1[\setminus \{0\}$.
(ii) Montrer que f_λ' est aussi un vecteur propre.
d) Déterminer les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 18 : (ENS MP 2023)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), P = \chi_A, P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ et α_i la multiplicité de λ_i.
Soient les $F_i = \mathrm{Ker}P_i(A)$.
1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i F_i$.
2. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de A restreinte à F_i.
3. Montrer que $A = D + N$ avec D matrice diagonalisable et N nilpotente, telles que $DN = ND$.
4. Soit $\phi_A : M \mapsto AM - MA$. Exprimer la décomposition $N + D$ de ϕ_A en fonction de celle de A.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 62,72,88,91,93.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : réduction. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°4
- Groupe 5 à 7 : Programme n°4
- Groupe 8 à 11 : Programme n°4
- Groupe 12 à 14 : Pas de colle de math cette semaine