Colles MPi* Semaine n°14 du 16/12/2024 au 20/12/2024 (Programme n°9)

Vallaeys Pascal

2 décembre 2024

Thème : Intégration (pas d'intégrales à paramètre).

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier
- Martinsse

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'une intégrale convergente et définition d'une fonction intégrable sur un intervalle.
- L'absolue convergence implique la convergence (démo).
- Intégrales de Riemann en 0 et en $+\infty$ (démo).

- Théorèmes de comparaison pour justifier l'intégrabilité (démos).
- Théorème de changement de variable.
- Théorème d'intégration par parties.
- Théorème de convergence dominée, avec un exemple simple.
- Théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions (ATTENTION : il y a un nouveau théorème pour lequel les fonctions doivent être positives, ainsi que l'ancienne version).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Justifier que l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ n'implique pas que la fonction tende vers 0.
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$ est convergente, non absolument convergente (démo).
- Théorème de changement de variable (démo).
- Théorème d'intégration par parties (démo).
- Théorème d'intégration des relations de comparaison (cas convergeant et cas divergeant).

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Démonstration des deux théorèmes d'intégration des relations de comparaison (cas convergent et cas divergent).

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
a) Montrer que $\underset{x\to+\infty}{Lim} \int\limits_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$.
b) Montrer que si de plus f est décroissante, $\underset{x\to+\infty}{Lim}\, xf(x) = 0$.

Exercice 2 :
Après avoir justifié la convergence des intégrales, montrer que quand n tend vers $+\infty$, on a $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^n}dx \sim \frac{1}{n}\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2023)
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \longmapsto \dfrac{(x\ln x)^n}{n!}$.
1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme.
2. Montrer que $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer cette intégrale.
3. Montrer que $\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t$ converge et exprimer cette intégrale sous la forme d'une série.

Exercice 4 : (CCINP MP 2023)
On définit pour $n \geqslant 1$, $f_n : t \longmapsto \dfrac{t^{n-1}\ln(t)}{n}$ sur $I = [0,1]$ avec la convention $f_n(0) = 0$.
1. Déterminer $\|f_n\|_{\infty,I}$.
2. On pose $g : t \longmapsto \dfrac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}$ sur $J =]0,1[$.
a) Montrer que g est intégrable sur J.
Indication : on pourra rappeler la valeur de $\lim\limits_{t\to1^-} \dfrac{\ln(t)}{t-1}$.
b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2023)
Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que ces deux intégrales sont bien définies, et que $I = J$.

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2023)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

Exercice 7 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1) Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$

avec P_n polynôme réel dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

2) Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{m,n} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t)P_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $I_{m,n}$, sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2021)

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 9 :

On pose $I = \int\limits_0^{\pi} x.\ln(\sin(x))\,dx$, $J = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x).\ln(\sin(x))\,dx$ et $K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$.

a) Montrer que I, J et K convergent.

b) Exprimer I+J en fonction de K.

c) Montrer que $\frac{2I}{\pi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)dx$.

d) En déduire I.

Exercice 10 :

On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ et $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$.

a) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

b) Montrer que I=0.

c) En déduire J.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 11 : (CCINP MP 2023)

1. Soit $M > 0$ et $u : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall x \in [1, +\infty[,\ |u(x)| \leqslant M$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{u'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ convergent.

3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 12 : (Mines télécom MP 2023)

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

2. Soit $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Vérifier que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$.

3. Soit $a > 1$ et (u_n) une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1+a}{2}$.

   Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_{n+1} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}u_n$. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \leqslant Cv_n$ à partir d'un certain rang.

4. Étudier rapidement le cas $a < 1$.

5. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de I_n.

6. Montrer la relation de récurrence $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$. Que peut-on en déduire sur la suite (I_n) ?

Exercice 13 : (Mines télécom MP 2023)

Existence et valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 14 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $\alpha \in]-1;1[$; pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad w_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n}\cos nx$. Soit $W : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$

1) Montrer que W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; exprimer W' à l'aide des fonctions usuelles.
2) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)\mathrm{d}x$.

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2022)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 16 : (Mines PSI 2021)

1) Soit $a, b > 0$. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(t) = \mathrm{e}^{-(n+1)t}\left(1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$ pour $t > 0$.

Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f$ où f est la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 17 : (Centrale MP 2023)
1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$.
3. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 18 : (Centrale MP 2022)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$.
2. Déterminer un équivalent de a_n à l'infini et déterminer la nature de la série $\sum a_n$.
3. En calculer la somme.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Avec une intégration par parties, obtenir une relation de récurence, puis montrer que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers 1.

Exercice 19 : (Centrale MP 2021)

On considère $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$.
1. Montrer l'existence de c.
2. Montrer $c < 0$. (autres questions que je n'ai pas eu le temps de faire)

Exercice 20 :

Montrer que $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = 4.\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(8k+1)(8k+5)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$.

Exercice 21 : (X 2007 134)

Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.

Exercice 22 :
On pose $I = \int\limits_{0}^{+\infty} x.e^{-x^6.\sin^2 x} dx$ et $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} x.e^{-x^6.\sin^2 x} dx$.
a) Montrer que pour tout réel t de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin^2 t \geq \frac{4.t^2}{\pi^2}$.
b) En déduire la convergence de la série de terme général u_n.
c) En déduire la convergence de I.

Exercice 23 : (ENS MP 2021)
1) On pose $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^\pi x^n(\pi - x)^n \sin x \, \mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg P_n = n$ et $I_n = P_n(\pi)$.
2) Montrer que : $0 < I_n \leqslant \dfrac{\pi^{2n+1}}{n!}$.
3) En déduire que π est irrationnel.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1) Il m'a conseillé de poser $\forall x, f(x) = x^n(\pi - x)^n$ et d'étudier $J_k = \frac{1}{n!} \int_0^\pi f^{(k)}(x) \sin x \, \mathrm{d}x$.
Remarque : il faut aller chercher des questions intermédiaires en plus !

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 19,25,26,28,49.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : intégration, théorème de convergence dominée, intégration terme à terme des séries de fonctions. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°9
- Groupe 5 à 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 à 11 : Programme n°8
- Groupe 12 à 14 : Programme n°8