MPI* Physique

TD Électromagnétisme

Électrostatique

Olivier Caffier

1 Action d'un fil sur une charge ponctuelle

On considère un fil rectiligne, de longueur supposée infinie, et porteur d'une densité linéique de charges $\lambda > 0$. Une charge électrique ponctuelle $q > 0$ se trouve initialement à une distance r_0 du fil, sans vitesse.

1. Calculez le champ électrique électrostatique rayonné par le fil.
2. Déduisez-en la vitesse de la charge ponctuelle quand elle se trouve à une distance r du fil.

Corrigé :

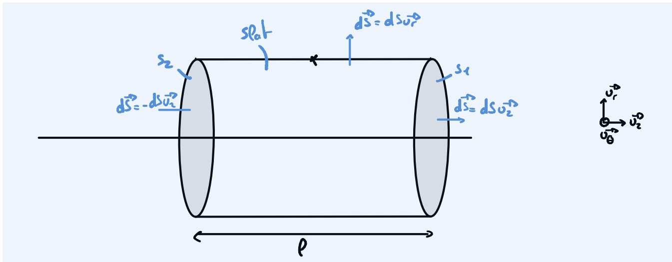
1 **Source** fil rectiligne selon Oz, de longueur infinie, de densité lin. $\lambda > 0$

Invariances par translation le long de Oz / par rotation autour de Oz $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

Symétries $Vect_M(\vec{u_r}, \vec{u_z})$ et $Vect_M(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ sont plans de symétrie / $\vec{E}$ est un vecteur vrai $\Rightarrow$ $\vec{E}$ est compris dans l'intersection de ces plans

$\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u_r}$

Surface de Gauss On considère un cylindre de rayon r, centré sur Oz, de longueur ℓ



On pose ainsi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$

Calcul du flux à travers S On a $\displaystyle\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \oiint_{S_{lat}} \vec{E}.\vec{dS} + \cancel{\oiint_{S_1 \cup S_2} \vec{E}.\vec{dS}}$ car $\vec{E} \perp \vec{dS}$ sur S_1 & S_2 $= \underbrace{E(r)}_{r = cte \text{ sur } S_{lat}} \oiint_{S_{lat}} dS$

d'où $\displaystyle\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = E(r)\, 2\pi r \ell$

Calcul de Q_{int} On a $Q_{int} = \lambda \times \ell$

Th. de Gauss On a $E(r)\,2\pi r \cancel{\ell} = \dfrac{\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0}$ donc $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{r}$

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{r}\,\vec{u_r}}$

↳ on retrouve bien la disc. de 2^e espèce en 0.

2 On a donc $\vec{F} = q\,\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{r}\,\vec{u_r}$

Initialement, la charge est sans vitesse et tout au long de notre étude, elle ne subit que l'action de $\vec{F}$ (qui est selon $\vec{u_r}$)
On peut donc considérer que le mouvement est rectiligne selon $\vec{u_r}$.

$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r}$

Ainsi, d'après la 2^e loi de Newton :

$m\vec{a} = \vec{F}$ $\xRightarrow{\text{proj. sur } \vec{u_r}}$ $m\ddot{r} - \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{r} = 0$

$\times \dot{r}$

$m\dot{r}\ddot{r} - \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{\dot{r}}{r} = 0$

intégration

$\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 - \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \times \ln(r) = cte$ et initialement, $\dot{r}(0) = 0$, $r(0) = r_0$ $\Rightarrow cte = -\dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_0)$

Finalement,

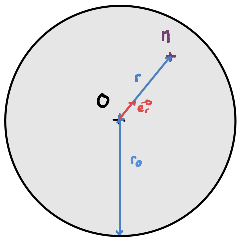
$$\dot{r}(t) = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\pi m \varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \Rightarrow \vec{v}(t) = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\pi m \varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}\,\vec{u_r}$$

2 Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson

J.J. Thomson, qui a découvert l'électron en 1897, avait proposé une conception de l'atome. Bien qu'il se soit révélé faux, son modèle est instructif et met en jeu des raisonnements qui rentrent dans le cadre du programme.

Dans l'atome d'hydrogène, Thomson a supposé que la charge positive était uniformément répartie en volume, tandis que la charge négative était assimilable à une particule ponctuelle chargée se déplaçant dans ce volume.

La charge positive totale est notée e, la charge de l'électron $-e$. La sphère délimitant l'atome est de centre O et de rayon r_0. L'électron est de masse m_e et repéré par le point M (cf. figure ci-dessous).



1. **Étude du champ de l'ion H^+**
   (a) Calculez ρ, la densité volumique de charge associée à la charge positive.
   (b) Étudiez les symétries et invariances du champ électrique rayonné en tout point.
   (c) Calculez le champ électrique rayonné par l'ion en tout point M de l'espace, en fonction de $e, r_0, r = \|\overrightarrow{OM}\|, \varepsilon_0$ et $\overrightarrow{OM}$. Commentaire ? Tracez l'allure de sa norme $E(r)$.
2. **Étude du mouvement de l'électron**
   Son poids est négligé, il n'est donc soumis qu'à l'attraction électrostatique de la charge positive. Vous supposerez qu'il n'y a pas d'ionisation : r reste inférieur à r_0.
   (a) Démontrer que l'équation du mouvement peut s'écrire :
   $$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2\overrightarrow{OM}$$
   Exprimer la fréquence propre de cet oscillateur harmonique en fonction de e, r_0, ε_0 et m_e.
   (b) La plus petite fréquence observée à l'époque de Thomson dans le spectre de l'hydrogène était $f_{\min} = 460\text{THz}$. Déduisez-en une valeur numérique d'un majorant de r_0. C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau. Commentez.

Corrigé :

1

1.a On a $\boxed{\rho = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}}$

1.b Invariances par toute rotation autour du centre O

Symétries $\text{Vect}_M(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ & $\text{Vect}_M(\vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u_r}}$

1.c Surface de Gauss Sphère de centre O, de rayon r, passant par M.

Calcul du flux On a $\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = E(r)\,4\pi r^2$

Calcul de Qint si $r > r_0$: $Q_{int} = e$

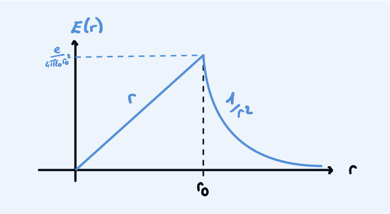
si $r < r_0$: $Q_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = e \times \left(\frac{r}{r_0}\right)^3$

Th. de Gauss
- $E(r<r_0)\,4\pi \cancel{r^2} = \dfrac{e}{\varepsilon_0 r_0^3} \times r^{\cancel{3}}$ $\Rightarrow$ $E(r<r_0) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} \times r$
- $E(r>r_0)\,4\pi r^2 = \dfrac{e}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $E(r>r_0) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{r^2}$

↳ on a bien une fct C^0 ! (distrib. vol)

$$\text{D'où} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\,\overrightarrow{OM} & \text{si } r < r_0 \\[2ex] \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{r^3}\,\overrightarrow{OM} & \text{si } r > r_0 \end{cases}}$$

Tracé de $E(r)$



2

2.a Comme $\vec{F} = -e\vec{E}(M)$ avec $r < r_0$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\vec{OM}$

Ainsi, d'après la 2ème loi de Newton : $m_e \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\vec{OM}$

d'où $\dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{OM}$

avec $\omega_0 = \left(\dfrac{e^2}{4\pi m_e\varepsilon_0 r_0^3}\right)^{1/2}$

2.b On a pour tout r_0 $\dfrac{\omega_0}{2\pi} \geq f_{c\,min}$ $\overset{...}{\Longleftrightarrow}$ $r_0 \leq \left(\dfrac{e^2}{16\pi^3 m_e \varepsilon_0 f_{c\,min}^2}\right)^{1/3} := r_{max}$

$\approx$
0.31 nm

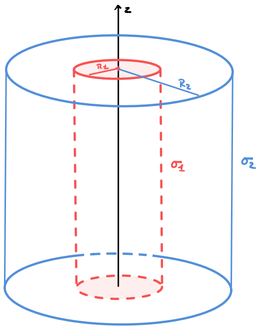
Ordre de grandeur réel $\sim 10^{-12}$ m (atome)
$\sim 10^{-15}$ m (noyau)

ici, on est sur du 10^{-10}, c'est pas fou...

3 Condensateur cylindrique

Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques séparées par un isolant, de sorte que les armatures portent toujours des charges électriques opposées mais qu'aucun courant ne circule de l'une à l'autre.

On se propose d'étudier le rayonnement électrostatique d'un condensateur cylindrique, tel que représenté. Sa longueur L sera supposée grande devant les rayons R_1 et R_2 (cf. figure ci-dessous).



1. Question préliminaire : calculez le champ électrique rayonné dans tout l'espace par un cylindre uniformément chargé en surface, de rayon R, de longueur $L \gg R$ et de densité surfacique de charge σ.
2. Revenons au condensateur cylindrique. On rappelle que les armatures d'un condensateur portent à tout instant des charges opposées.
   (a) Soient $\sigma_1 > 0$ la densité surfacique de charge de l'armature de R_1, et $\sigma_2 < 0$ celle de l'armature de rayon R_2. Exprimez σ_2 en fonction de R_1, R_2 et σ_1.
   (b) Calculez le champ électrostatique rayonné dans tout l'espace par ce condensateur. Commentez.

Corrigé :

1 Cf. cours, on a

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{r}\,\vec{u_r} & \text{si } r > R \\ \vec{0} & \text{si } r < R \end{cases}$$

2

2.a Notons $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$ les charges totales contenues dans ces armatures.
On a alors

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{2\pi R_1 L} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{2\pi R_2 L}$$

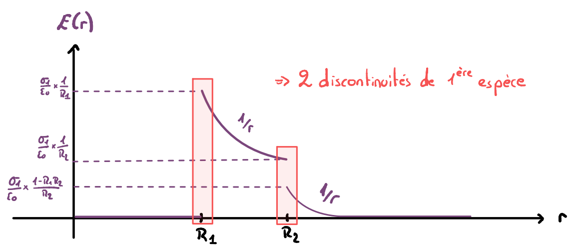
or, comme précisé par l'énoncé : $Q_1 = -Q_2 \Rightarrow \sigma_1 \cancel{2\pi} R_1 \cancel{L} = -\sigma_2 \cancel{2\pi} R_2 \cancel{L}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -\sigma_1 \times \frac{R_1}{R_2}}$$

2.b Le champ $\vec{E}$ étant additif, on a :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{r}\,\vec{u_r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \left(\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{r} + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{r}\right)\vec{u_r} & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

Si on trace $E(r)$,



or $\sigma_2 = -\sigma_1 \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r > R_2) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \times \frac{1}{r}\,\vec{u_r}}$

4 Plan épais chargé

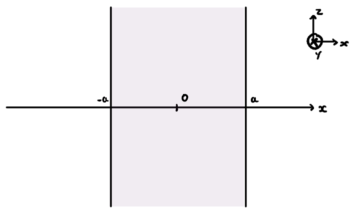
Soit une distribution de charge uniforme en volume égale à ρ entre les deux plans $x = -a$ et $x = a$, nulle ailleurs.

1. Calculez le champ rayonné par cette distribution en tout point de l'espace.
2. Réduisez l'épaisseur de la distribution tout en maintenant sa charge constante : $a \to 0$ avec $\rho a =$cst. Que retrouvez-vous ?

Corrigé :

1 Invariances par translation le long des axes O_y et O_z

Symétries $\text{Vect}_M(\vec{u_x}, \vec{u_y})$ et $\text{Vect}_M(\vec{u_x}, \vec{u_z})$ sont plans de symétrie



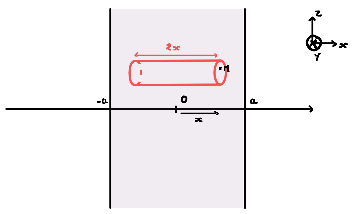
$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x)\vec{u_x}$

Parité ou Imparité de E(x) comme $\vec{E}$ est un vecteur vrai et que ce plan chargé est lui-même plan de symétrie, on a

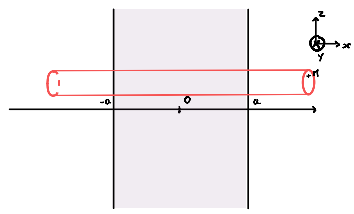
$$\vec{E}(sM) = -\vec{E}(M) \Rightarrow E(-x) = -E(x)$$

$\Rightarrow$ E est impaire, on ne s'intéressera donc qu'aux $x > 0$ et on conclura
imparité de E.

Surface de Gauss On considère un cylindre de longueur $2x$, de section S, contenant M dans son disque droit :



$0 < x < a$



$x > a$

Calcul du flux Comme $\vec{E} \perp \vec{u_r}$, on a que $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2S\,E(x)$

Calcul de Qint $0 < x < a$: $Q_{int} = 2xS \times \rho$

$x > a$: $Q_{int} = 2aS \times \rho$

Th. de Gauss

$$E(0<x<a)\,\cancel{2S} = \cancel{2S}\,\frac{\rho}{\varepsilon_0} \times x \qquad \text{et} \qquad E(x>a)\,\cancel{2S} = \cancel{2S}\,\frac{a\rho}{\varepsilon_0}$$

donc, par imparité de E, on a :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} -\dfrac{a\rho}{\varepsilon_0}\vec{u_x} & \text{si } x < -a \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} x\,\vec{u_x} & \text{si } -a < x < a \\ \dfrac{a\rho}{\varepsilon_0}\vec{u_x} & \text{si } x > a \end{cases}}$$

On retrouve bien la continuité liée à la distrib. vol. !

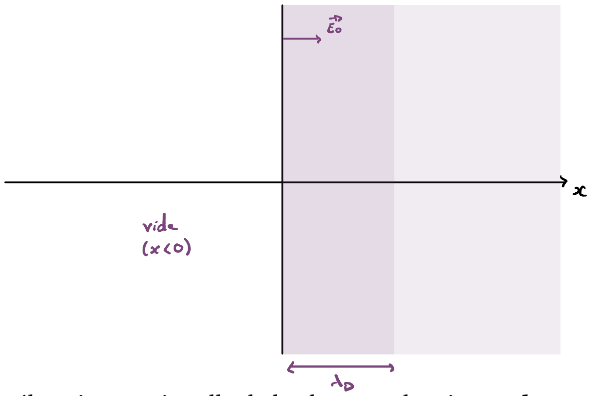
2 On retrouve l'exemple du cours "plan uniformément chargé" sans épaisseur ;)

5 Conducteur en régime stationnaire, charge surfacique

Considérons un conducteur dont le champ électrique satisfait, en régime permanent, l'équation :

$$\Delta\vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$$

On considère $\lambda_D > 0$. Le paramétrage est précisé par la figure ci-dessous. La surface du conducteur est supposée plane et l'axe O_x est choisi selon sa normale.



1. Trouvez l'expression du champ électrique puis celle de la charge volumique ρ **lorsque le champ extérieur dans le vide au voisinage de cette surface vaut** $E_0\vec{e}_x$. Vous admettrez que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers zéro.
2. Quelle est l'unité de λ_D ? Donnez une interprétation physique de cette constante.
3. Déterminez la charge volumique ρ_0 au niveau de la surface du conducteur en fonction de E_0, λ_D et ε_0.
4. λ_D est de l'ordre de quelques nm pour un conducteur usuel. Pour un échantillon de taille macroscopique il est donc plus commode d'introduire la charge surfacique σ du conducteur.
   Exprimer σ en fonction de ρ_0 et λ_D, puis en fonction de E_0 et ε_0, par deux méthodes.

Corrigé :

1 • Le champ $\vec{E}$ s'exprime alors $\vec{E} = E(x)\,\vec{u_x}$

DONC (1) ⇒ À l'intérieur de la surface, on a $E(x) = A e^{\frac{x}{\lambda_D}} + B e^{-\frac{x}{\lambda_D}}$

or, distribution volumique ⇒ cte en 0

⇒ $A + B = E_0$

et, en $+\infty$, on veut que $E(x) = 0$ ⇒ $A = 0$

• On travaille dans le vide, donc $\boxed{\rho = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{E(x>0) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)}$$

2 (1) ⇒ $[E][L^{-2}] = \frac{[E]}{[\lambda_D]^2}$

⇒ $[\lambda_D] = L$ donc λ_D est une longueur représentant l'intervalle $[0;\lambda_D]$ où l'on ne peut pas négliger $\vec{E}(x>0)$

↳ on rappelle que $E(x>0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

on l'appelle « l'épaisseur de peau »

↳ cf. chapitres suivants

3 On a, d'après l'équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\,(\vec{E}(x>0)) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

i.e $\frac{\partial E(x>0)}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \quad -\frac{E_0}{\lambda_D} \underbrace{\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)}_{\approx 1 \text{ au voisinage du conducteur}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = -\frac{E_0 \varepsilon_0}{\lambda_D}}$

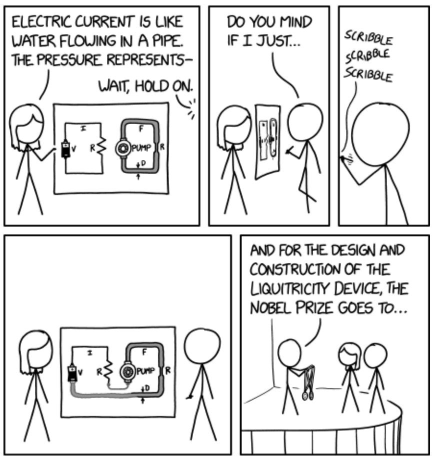
4 ◦ On pose $\boxed{\sigma = \rho_0 \times \lambda_D}$ et donc la relation précédente nous donne : $\boxed{\sigma = -E_0 \varepsilon_0}$

◦ Ce résultat peut se retrouver avec la relation de passage : $\vec{E}(x>0) - \vec{E}(x<0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_x}$

on a supposé la distrib surfacique !

$\Rightarrow \quad 0 - E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

D'où $\boxed{\sigma = -E_0 \varepsilon_0}$


ELECTRIC CURRENT IS LIKE WATER FLOWING IN A PIPE. THE PRESSURE REPRESENTS–
WAIT, HOLD ON.
DO YOU MIND IF I JUST...
SCRIBBLE
SCRIBBLE
SCRIBBLE
AND FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF THE LIQUITRICITY DEVICE, THE NOBEL PRIZE GOES TO...