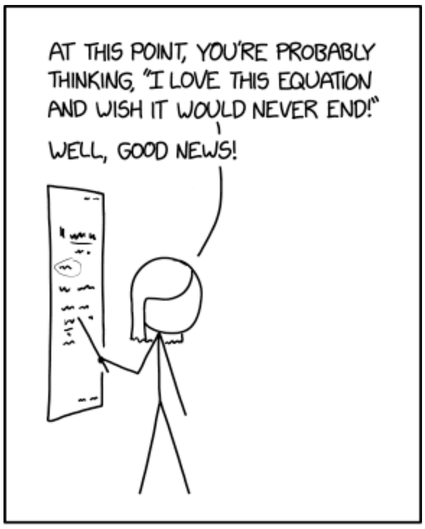
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 4



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.

Olivier Caffier

Colles MPi* Semaine n°4 du 23 au 27/09/2024 (Programme n°2)

Vallaeys Pascal

11 septembre 2024

Thème : Notion de norme et séries numériques ou à valeurs vectorielles

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Bodet
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Caffier
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- BISKUPSKI
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

Notions de norme :

- Définition d'une norme.
- Montrer que les normes usuelles sont des normes. (pas de norme euclidienne) (démo)
- Deuxième inégalité triangulaire. (démo)

- Montrer qu'une boule est convexe. (démo)
- Unicité de la limite d'une suite si elle existe. (démo).
- Exemple de deux normes non équivalentes.

Séries numériques et sommabilité :

- Définition d'une série convergente. Montrer que le reste tend vers 0 (démo)
- Séries de Riemann par comparaison à une intégrale « à la main » (démo)
- Une série absolument convergente est convergente. (démo pour le cas réel)
- Critère de convergence des séries alternées (démo)
- Exemple de suites équivalentes telles que les séries associées ne soient pas de même nature. (démo)
- Citer précisément la règle de D'Alembert.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

Notions de norme :

- Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes. (démo)

Séries numériques et sommabilité :

- Citer complètement les théorèmes de sommation des relations de comparaison.
- Critères de convergence (démo pour $\leq$, on en déduit pour o,O,équivalent)
- Principe de transformation suite-série, exemple : la constante d'Euler (démo)
- Règle de d'Alembert (démo)
- Définition d'une famille sommable, de réels positifs, puis de complexes.
- Citer le théorème de sommation par paquets (version réelle positive + version complexe)
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

Notions de norme :

- Deux définitions équivalentes d'une valeur d'adhérence d'une suite. (démo de l'équivalence, non fait en classe)

Séries numériques et sommabilité :

- Démonstration des deux théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent, cas divergent). (démo) Application au Th de Césaro.
- Démonstration de la formule de Stirling. (démo)
- Résultats sur les séries de Bertrand (HP) (démo)
- Transformation d'Abel (HP), montrer que $\sum \frac{sin(nx)}{n}$ converge. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 :
a) Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toutes matrices A et B de E, on ait $N(AB) = N(A).N(B)$?
b) Même question avec $N(AB) \leq N(A).N(B)$

Exercice 3 :
Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum\limits_{k=0}^{n} |P(k)| \leq \alpha. \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-X^2}. |P(X)|.dX$.

b) Si r est un entier naturel, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum\limits_{k=0}^{r} |P(k)| \leq \alpha. \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-X^2}. |P(X)|.dX$.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2022)
Nature de $\sum \cos\left(n^2\pi \ln(1-\frac{1}{n})\right)$

Exercice 5 : (CCINP MPi 2023)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.
1. Montrer que la suite (S_n) converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de (S_n).

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2023)
1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées. Que peut-on dire du reste ?
2. Étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}$.
3. Comment peut-on donner une valeur à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$?
4. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{3^n\ n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{2/3}}$.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \dfrac{C}{n^a}$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2021)
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1+\sin n}$ converge.
a) A l'aide d'un développement limité.
b) En caractérisant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{n+1+\sin n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ (principe de l'éclatement).
c) En montrant que le critère spécial des séries alternées s'applique.

Exercice 10 :
a) Trouver deux réels α et β tels que $\int\limits_0^\pi \left(\alpha t + \beta t^2\right).\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$, pour tout entier naturel strictement positif n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos(nt)$.

c) Montrer que si ϕ est une fonction de classe C^1, $\underset{N\to+\infty}{Lim} \int\limits_0^{\pi} \phi(t).\sin(Nt).dt = 0$.

d) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 11 :

Soient $(u_n)_{n\in\aleph}$ et $(v_n)_{n\in\aleph}$ deux suites strictement positives telles que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

a) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 12 : (Mines MP 2022)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$: $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$ et :

$N_1(f) = \|f\|_1 + \ \|f'\|_1$ et $N_2(f) = |f(0)| + \ \|f'\|_1$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 13 : (Mines MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 : (Mines MP 2021)

Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k\, x^{2^k}}{1 + x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2021)

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

Exercice 16 :

On pose $u_0 = 1$ et pose tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

b) On pose $v_n = {u_n}^{\alpha}$. Déterminer un réel α tel que $\underset{n\to+\infty}{Lim} (v_{n+1} - v_n)$ soit finie et non nulle.

c) Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 17 :

On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{1}{n.n!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

En déduire que e est irrationnel.

Exercice 18 : Règle de Raabe Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ une suite réelle telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ avec $\beta > 1$.

Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge. (On posera $w_n = \ln(n^{\alpha} u_n)$ et on montrera que la suite (w_n) converge).

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 19 :
Soit E un K-espace vectoriel normé. On dit d'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qu'elle est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$tq $\forall n, p \geq n_0, |u_n - u_p| \leq \varepsilon$.
a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
b) Montrer que si $E = K = \mathbb{Q}$, il existe des suites de Cauchy non convergentes.
c) Montrer que si $E = K = \mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.
d) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.
e) Que dire si l'application est juste supposée continue ?

Exercice 20 :
Soient p>1 et q>1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
a) Montrer que si x et y sont des réels positifs, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k . y_k| \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
c) En déduire que $\|X\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 21 : Etudier suivant le paramètre α la sommabilité des familles $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 22 :
a) Montrer que pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$ où d(n) désigne le nombre de diviseurs de n.
b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.
c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$.

Exercice 23 : (Mines MP 2022)
(Sans préparation)
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$
1) Montrer que $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge.
2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 24 : Soit p>1 un entier naturel. Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$.

Que cela signifie-t-il en termes de sommabilité ?

Exercice 25 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Pour cela, considérer :$J(n) = \left\{x \in [a, b] \,/\, f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n}\right\}$

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 1,5,6,7,43,46,40,61.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : notions de norme et séries numériques et vectorielles. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

Connaissances de cours et démonstrations exigibles

Groupe A

Définition d'une norme

Def. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v

On appelle norme sur E une forme, absolument homogène, définie positive, respectant la 1ère I.T

- **forme** $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$
- **ABS homogénéité** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- **définie positive** $\forall x \in E, \quad \|x\| \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0_E$
- **I.T** $\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Montrer que les normes usuelles sont des normes

Prop.

- Sur $\mathbb{R}^n$:
  - (1) $\|\cdot\|_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - (2) $\|\cdot\|_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
  - (3) $\|\cdot\|_\infty : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \max_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i|$

- Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
  - (4) $\|\cdot\|_1 : f \longmapsto \int_0^1 |f(t)| dt$
  - (5) $\|\cdot\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$
  - (6) $\|\cdot\|_p : f \longmapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ pour $p \geq 1$

- Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
  - (7) $\|\cdot\|_1 : M = (m_{i,j}) \longmapsto \sum_{i,j} |m_{i,j}|$
  - (8) $\|\cdot\|_2 : M \longmapsto \sqrt{tr(M^T M)}$
  - (9) $\|\cdot\|_\infty : \max_{i,j} |m_{i,j}|$

- Sur $\mathbb{R}[X]$
  - (10) $\|\cdot\|_1 : P = \sum_k a_k X^k \longmapsto \sum_k |a_k|$
  - (11) $\|\cdot\|_\infty : P \longmapsto \max_k |a_k|$

sont des normes

Démo

(1)
- **forme** : bien définie, renvoie bien dans $\mathbb{K}$
- **ABS homogénéité** Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\|\lambda x\|_1 = \sum |\lambda x_i|$
  $= |\lambda| \, \|x_i\|_1 \longrightarrow$ ok
- **définie positive** Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 \geq 0$ car $\forall i \in [\![1;n]\!], |x_i| \geq 0$
  et $\|x\|_1 = 0 \iff \forall i \in [\![1;n]\!], |x_i| = 0 \iff \underline{x = 0_{\mathbb{R}^n}}$ d'où la définie positivité

- **I.T** Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x+y\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|$

I.T de la valeur ABS $\rightarrow \leqslant \sum_{i=0}^{n} |x_i| + |y_i|$

$\leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$

(2)

- **forme** —

- **ABS homogénéité** Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \|x\|_2$ $\rightarrow$ OK

- **définie positive** Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\sqrt{} \geqslant 0 \Rightarrow \|x\|_2 \geqslant 0$ et $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_i x_i^2}_{\geqslant 0} = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!], x_i^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ — $x_i = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ $\longrightarrow$ OK

- **I.T** Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2}$

$= \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{a} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{b} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{c}}$

$\rightsquigarrow$ Mq $\sqrt{a+b+c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

i.e, en mettant au carré, mq $\cancel{a} + \cancel{b} + c \leqslant \cancel{a} + \cancel{b} + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

i.e mq $\cancel{2}\sum_i x_i y_i \leqslant \cancel{2}\sqrt{\sum_i x_i}\sqrt{\sum_i y_i}$

⚠ or, l'inégalité de Cauchy - Swarz (SANTÉ) nous garantit ce résultat.

d'où $\|x+y\|_2 \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} = \|x\|_2 + \|y\|_2$

d'où l'I.T

(3)

- **forme** $\rightarrow$ OK

- **ABS homogénéité** Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|\lambda x_i| = |\lambda||x_i| \leqslant |\lambda| \|x\|_\infty$

$\Rightarrow \|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$

- **définie positive** $\rightarrow$ OK

- **I.T** Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, pour $i \in [\![1;n]\!]$ on a : $|x_i + y_i| \underset{\text{I.T valeur abs.}}{\leqslant} |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\Rightarrow \|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ $\longrightarrow$ OK

$\rightsquigarrow$ le reste : ABSL

- **Deuxième inégalité triangulaire**

Prop. Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n

Alors

$$\forall x,y \in E, \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x+y\|$$

Démo

Soient $x,y \in E$, alors d'après la 1ère I.T : $\|(x+y) + (-y)\| \leqslant \|x+y\| + \underbrace{\|-y\|}_{=\|y\|}$

i.e $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$

puis par symétrie des rôles

$\longrightarrow$ OK

- Montrer qu'une boule est convexe

Soient $a \in E$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et $r \in \mathbb{R}_+$

$\leadsto$ Soient $x, y \in B_F(a,r)$ et $\lambda \in [0,1]$, $\underline{\text{mq} \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in B_F(a,r)}$

On a
$$\|\lambda x + (1-\lambda)y - a\| = \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\|$$
$$\overset{\text{I.T}}{\leqslant} |\lambda| \|x-a\| + |1-\lambda| \|y-a\|$$
$$\overset{\text{+ ABS hom}, \lambda \geqslant 0}{\leqslant} \lambda \|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\|$$

or $x, y \in B_F(a,r)$
$\Rightarrow \|x-a\|, \|y-a\| \leqslant r$

$$\leqslant (\lambda + 1 - \lambda) r$$
$$\leqslant r$$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in B_F(a,r)$

$\Rightarrow B_F(a,r)$ est convexe $\hookrightarrow$ idem pour $B_o(a,r)$

- Unicité de la limite d'une suite si elle existe

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n

Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, supposons qu'il existe $\ell, \ell' \in E$ tq $\begin{cases} x_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \\ x_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell' \end{cases}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\ell - \ell'\| = \|\ell - x_n + x_n - \ell'\|$
$$\overset{\text{I.T}}{\leqslant} \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\|$$
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, $\|\ell - \ell'\| = 0 \Rightarrow \underline{\ell = \ell'}$ d'où l'unicité de la limite

- Exemple de deux normes non équivalentes

⚠ $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes !

En effet, pour $(x_n)_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x \mapsto x^n\|_1 = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\|x \mapsto x^n\|_\infty = 1 \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ces deux normes ne définissent pas la même limite pour une même suite, elles ne peuvent être équivalentes.

- Définition d'une série convergente. Montrer que le reste tend vers 0.

Def. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$

On dit que
$$\sum_n u_n \text{ CV si } \left(S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n\right)_N \text{ converge}$$

on note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite

Prop. (mm notations)

$$\sum u_n \text{ CV} \Rightarrow R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Démo On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$ et $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \Rightarrow R_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

- Série de riemann par comparaison à une intégrale

Prop. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ cv } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Démo

$\underline{\alpha = 1}$: posons $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, ainsi pour $t \in [n-1 ; n]$ (avec $n \geq 2$), on a :

$$\frac{1}{n} \leq f(t) \leq \frac{1}{n-1} \Rightarrow f(t+1) \leq \frac{1}{n} \leq f(t)$$

$$\Rightarrow \int_{n-1}^{n} f(t+1)dt \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \quad \text{par croissance de l'int.}$$

$$\text{i.e} \quad \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}dt$$

$$\Rightarrow \text{pour } n \geq 2, \quad \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$$

Télescopage !

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) \leq S_N - 1 \leq \sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \ln(n-1)$$

$$\Rightarrow \ln(N+1) - \ln(2) \leq S_N - 1 \leq \ln(N) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln(N+1) - \ln(2) + 1}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty} \leq S_N \leq \underbrace{\ln(N) + 1}_{\to +\infty}$$

$$\Rightarrow \underline{(S_N)_N \text{ Dv}} \quad \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ DV}$$

$\underline{\alpha < 1}$: alors $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ DV

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ DV !}$$

$\underline{\alpha > 1}$: on reprend $\displaystyle\int_{n}^{n+1} t^{-\alpha}dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-\alpha}dt$

$$\Rightarrow \left[\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n}^{n+1} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \left[\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n-1}^{n}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(n-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

par télescopage :

$$\underbrace{\underbrace{\frac{(N+1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \text{ car } \alpha > 1} - \frac{2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + 1}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} \text{cte}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \underbrace{\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} \text{cte}_2} + 1$$

or $(S_N)_N$ est croissante et majorée $\Rightarrow (S_N)_N$ CV $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV

d'où $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$

∘ Une série absolument convergente est convergente

Prop. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n de dim. finie et $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$

Alors
$$\sum_n u_n \text{ CV ABS} \Rightarrow \sum_n u_n \text{ CV}$$

Démo pour $E = \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\begin{cases} u_n^+ = \max(u_n, 0) \\ u_n^- = \min(u_n, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n^+ + u_n^- = u_n \\ u_n^+ - u_n^- = |u_n| \end{cases}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \Rightarrow S_N^+ = \sum_{n=0}^{N} u_n^+ \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}_{\text{qui converge}}$

or S_N^+ est croissante et donc majorée $\Rightarrow (S_n^+)$ CV

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+$ CV

De mm, on trouve que $(S_N^-)_N$ CV $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$ CV

$\Rightarrow (S_N = S_N^+ + S_N^-)_N$ CV par somme

$\Rightarrow \sum_n u_n$ CV

d'où le résultat recherché

∘ Critère de convergence des séries alternées

Prop. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est du signe de $(-1)^n$

(H2) $(|u_n|)_n$ est décroissante

(H3) $|u_n| \longrightarrow 0$

ALORS

(C1) $\sum_n u_n$ CV

(C2) R_n est du signe de u_{n+1} et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démo D'après (H1), $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

⇝ Montrons que $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes

∘ $S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+2} + u_{2N+1}$ or $|u_{2N+2}| \leqslant |u_{2N+1}|$ d'après (H2)

$= |u_{2N+2}| - |u_{2N+1}|$

$\leqslant 0$ $\Rightarrow$ $(S_{2N})_N$ décroissante

∘ De mm, $(S_{2N+1})_N$ est croissante

∘ Enfin, pour $N \in \mathbb{N}$, on a $S_{2N+1} - S_{2N} = u_{2N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ d'après (H3)

$\Rightarrow (S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes : $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $S_{2N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell \wedge S_{2N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell \Rightarrow S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell \Rightarrow \sum_n u_n$ CV

De plus, $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_{2N+1} \leqslant \overbrace{\sum_n u_n}^{=\ell} \leqslant S_{2N}$

$\Rightarrow R_{2N} = \ell - S_{2N} \leqslant 0 \wedge R_{2N+1} = \ell - S_{2N+1} \geqslant 0$.

et $|R_{2N}| = |S - S_{2N}| = S_{2N} - S \leqslant S_{2N} - S_{2N+1} = -V_{2N+1}$ → OK (De mm pour R_{2N+1})

- Exemple de suites équivalentes tq. les séries associées ne soient pas de même nature

Prenons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\substack{CV \\ \text{par CCSA}}} \underbrace{- \frac{1}{n}}_{DV} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{CV}$$

$$\Rightarrow \sum u_n \ DV$$

or $u_n \sim \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{CV \text{ par CCSA}}$

- Citer précisément la règle de d'Alembert

Prop. Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

1. Si $\ell < 1$, alors $\sum_n u_n$ CV
2. Si $\ell > 1$, $\sum_n u_n$ DV
3. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire

Groupe B

- Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soient $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ 2 normes équivalentes sur E.
Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \longrightarrow \ell \in E$. Alors

$$x_n \longrightarrow \ell \text{ pour } \|\cdot\|_a \iff x_n \longrightarrow \ell \text{ pour } \|\cdot\|_b$$

Démo $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes donc $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in E$, $\alpha \|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant \beta \|x\|_a$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|x_n - \ell\|_b \leqslant \beta \|x_n - \ell\|_a$: Si $x_n \longrightarrow \ell$ pour $\|\cdot\|_a$ alors $\|x_n - \ell\|_a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et donc, par th. d'encadrement, $\|x_n - \ell\|_b \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ pour $\|\cdot\|_b$

De même pour la réciproque
(symétrie des rôles)

D'où l'équivalence voulue

- Citer complètement les théorèmes de sommation des relations de comparaison

Th. (Sommation des relations de comparaison, cas convergent)
Soient $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

(1) Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge ALORS $\begin{cases} \sum u_n \text{ CV} \\ R_n(u) = O(R_n(v)) \end{cases}$

(2) Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge ALORS $\begin{cases} \sum u_n \text{ CV} \\ R_n(u) = o(R_n(v)) \end{cases}$

(3) Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge ALORS $\begin{cases} \sum u_n \text{ CV} \\ R_n(u) \sim R_n(v) \end{cases}$

Th. (Sommation des relations de comparaison, cas divergent)
Soient $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

(1) Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge ALORS $\begin{cases} \sum u_n \text{ DV} \\ S_n(u) = O(S_n(v)) \end{cases}$

(2) Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge ALORS $\begin{cases} \sum u_n \text{ DV} \\ S_n(u) = o(S_n(v)) \end{cases}$

(3) Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge ALORS $\begin{cases} \sum u_n \text{ DV} \\ S_n(u) \sim S_n(v) \end{cases}$

Critères de convergence

Prop. (Boîte à outils) Soient $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

(1) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ CV ALORS $\sum u_n$ CV

(2) Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ CV ALORS $\sum u_n$ CV

(3) Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ CV ALORS $\sum v_n$ CV

(4) Si $u_n \sim v_n$ ALORS $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Démo

(1) Considérons $\left(S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n\right)_N$.

$S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geqslant 0$

On sait que S_N est croissante et majorée $\hookrightarrow S_N \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n}_{=cte}$ donc $(S_N)_N$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ CV

(2) Par définition, $u_n = O(v_n) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant K v_n$

or $\sum v_n$ converge donc $\sum K v_n$ converge également

↖ la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes

donc d'après (1), $\sum u_n$ converge

(3) $u_n = o(v_n) \overset{\text{déf.}}{\Rightarrow} u_n = O(v_n)$ donc d'après (2), $\sum u_n$ converge

(4) $\underbrace{u_n \sim v_n}_{u_n = v_n + o(v_n)} \Rightarrow \underbrace{v_n \sim u_n}_{v_n = u_n + o(u_n)}$ D'où la nature identique des 2 séries

Principe de transformation suite-série, exemple : la constante d'Euler

Prop. Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$

$$(u_n \text{ converge}) \Leftrightarrow \sum_n u_{n+1} - u_n$$

Démo

$\Rightarrow$: Prenons en considération $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n$

$= u_{N+1} - u_0$

$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell - u_0$ avec $\ell = \lim_{N \to +\infty} u_N$

donc $(S_N)_N$ converge $\Rightarrow \sum_n u_{n+1} - u_n$ CONVERGE

$\Leftarrow$: Supposons que $\sum_n u_{n+1} - u_n$ converge, ainsi (S_N) converge vers $\tilde{\ell}$

or $S_N = u_{N+1} - u_0 \Rightarrow u_{N+1} - u_0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} \hat{\ell}$

$\Rightarrow \lim_{N \to +\infty} u_N = \hat{\ell} - u_0 = \ell$

$\longrightarrow$ OK

Application : la constante d'Euler Posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et montrons que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

Exo 16 ✓

1. Mq $H_n \sim \ln(n)$ soit $n \geq 2$, on prend $t \in [n-1 ; n]$

alors $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{t}$

croissance de l'intégrale $\Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}$

chgt de var

$\Rightarrow \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$

par somme $\Rightarrow \ln(N+1) - \ln(2) \leq H_N - 1 \leq \ln(N) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$

$\Rightarrow \underbrace{\ln(N+1)}_{\to +\infty} - \ln(2) + 1 \leq H_N \leq \underbrace{\ln(N)}_{\to +\infty} + 1$

$\Rightarrow H_N \sim \ln(N)$

2. Considérons $U_N = H_N - \ln(N)$, mq $(U_N)_N$ converge vers $\gamma \in \mathbb{R}$

On a $U_{N+1} - U_N = \frac{1}{N+1} - \ln(N+1) + \ln(N)$

$= \frac{1}{N+1} + \ln(\frac{N}{N+1})$

$= \frac{1}{N+1} + \ln(\frac{N+1-1}{N+1})$

$= \frac{1}{N+1} + \ln(1 - \frac{1}{N+1})$

$= \cancel{\frac{1}{N+1}} - \cancel{\frac{1}{N+1}} - (\frac{1}{N+1})^2 \times \frac{1}{2} + o(\frac{1}{N^2})$

$= O(\frac{1}{n^2})$ Th. comp. $\Rightarrow \sum_n U_{n+1} - U_n$ CV

$\Rightarrow (U_N)_N$ CV

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}$ tq $U_N \longrightarrow \gamma$

3. Donner un équivalent de $w_n = U_n - \gamma$

On a $w_{n+1} - w_n = U_{n+1} - U_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ les séries $\sum w_{n+1} - w_n$ et $\sum -\frac{1}{2n^2}$ étant convergentes, on a l'équivalence entre les restes :

le montrer avec une comp. série - int. !

$-w_n + \underbrace{\lim_{n \to +\infty} w_{n+1}}_{=0} \sim R_n = -\frac{1}{2n}$

car $w_n \to \gamma$

$\Rightarrow w_n \sim \frac{1}{2n}$

Finalement, $w_n = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \Rightarrow H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

Règle de d'Alembert

Prop. Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

1. Si $\ell < 1$, alors $\sum_n u_n$ CV
2. Si $\ell > 1$, $\sum_n u_n$ DV
3. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire

Démo

1. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ avec $\ell + \varepsilon < 1$ (ex: $\varepsilon = \frac{\ell+1}{2}$)

or $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$

i.e — $(\ell - \varepsilon) \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq (\ell + \varepsilon)$

i.e — $(\ell - \varepsilon) u_n \leq u_{n+1} \leq (\ell + \varepsilon) u_n$

en part. pour $n = n_0$, $(\ell - \varepsilon) u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq (\ell + \varepsilon) u_{n_0}$

par rec imm., pour $p \in \mathbb{N}$, on a $(\ell - \varepsilon)^p u_{n_0} \leq u_{n_0+p} \leq (\ell + \varepsilon)^p u_{n_0}$

ainsi, pour $N \gg 1$, on a $S_N = \sum_{n=0}^{n_0} u_n + \sum_{n=n_0+1}^{N} u_n$

$$\leq \sum_{n=0}^{n_0} u_n + u_{n_0} \underbrace{\sum_{n=1}^{N-n_0} (1+\varepsilon)^n}_{\text{CV car } (1+\varepsilon) < 1 \text{ (série géométrique)}} := \widehat{S_N}$$

et comme la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes $\Rightarrow (\widehat{S_N})$ CV

$\Rightarrow (S_N)$ croissante et majorée $\Rightarrow \underline{(S_N) \text{ CV}}$ $\Rightarrow \sum_n u_n$ CV

2. $\ell > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_n \not\to 0$ car à termes strict pos.

$\Rightarrow \sum_n u_n$ DVG

3. Pour $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

et ceci est valable pour tout α, or on connait très bien la condition sur α pour que $\sum u_n$ CV

Définition d'une famille sommable de réels positifs, de complexes

Def.

⇝ Soient I fini ou dénombrable et $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$

On pose
$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \left(\sum_{j \in J} u_j\right) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$

⇝ Avec $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ ou $\mathbb{C}^I$, $\sum_{i \in I} u_i$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable

⇝ Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_n v_n$ converge absolument.

- Citer le théorème de sommation par paquets (version positive et complexe)

Th. Soit $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ avec J fini ou dénombrable et $\forall j \in J$, I_j est fini ou dénombrable.

1. Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ ALORS $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$

2. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ ou $\mathbb{C}^I$. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable ALORS $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$

- Produit de cauchy de deux séries absolument convergentes

Prop. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $(u_n), (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites avec $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ cv ABS.

ALORS

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

Exercices de référence

Groupe A

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

a) Sur $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on a $\|.\|_1 : f \longmapsto \int_a^b |f(t)|dt$

$$\|.\|_\infty : f \longmapsto \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|$$

b) $\longrightarrow$ redonner la def

c) Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $f \in E$ au sens de $\|.\|_\infty$

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$

i.e $\forall t \in [a;b]$, $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$

Ainsi, prenons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$, $\exists N' \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N'$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon'$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt$$

$$\leqslant \int_a^b \varepsilon' dt = \varepsilon'(b-a)$$

$$= \varepsilon$$

$$\leqslant \varepsilon$$

donc $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d) Considérons $f_n : x \longmapsto x^n$, ainsi $\underbrace{\|f_n\|_\infty = 1}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ alors que $\underbrace{\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ elles ne définissent pas la mm limite

$\Rightarrow$ elles ne peuvent être équivalentes

Exercice 2 :

a) Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toutes matrices A et B de E, on ait $N(AB) = N(A).N(B)$?

b) Même question avec $N(AB) \leq N(A).N(B)$

genre les $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

a) Non car $\exists A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$\Downarrow$

$N(AB) = 0 \not\Rightarrow N(A) = 0$ ou $N(B) \neq 0$

par déf. pos

Ainsi, $N(E_{i,j} E_{k,\ell}) = N(E_{i,\ell} \underbrace{\delta_{jk}}_{=0 \text{ pour } j \neq k}) = N(E_{i,j}) \times N(E_{j,k})$ par hyp

$\neq 0$

ABS

b) $A \longmapsto \sqrt{Tr(A^T A)}$ (norme associée à un produit scalaire, utiliser Cauchy-Schwarz)

$A \longmapsto n \times \|A\|_\infty$ (plus facile de montrer qu'elle est sous-m)

Exercice 3 :
Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^{n} |P(k)| \leq \alpha. \int_{-1}^{1} \sqrt{1-X^2}.|P(X)|.dX$.

b) Si r est un entier naturel, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^{r} |P(k)| \leq \alpha. \int_{-1}^{1} \sqrt{1-X^2}.|P(X)|.dX$.

a) Notons $\|.\|_1 : P \longmapsto \sum_{k=0}^{n} |P(k)|$

$\|.\|_2 : P \longmapsto \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,|P(x)|\,dX$

- $\|.\|_1$ est évidemment une norme
- Quant à $\|.\|_2$, un seul point mérite d'être détaillé, le caractère défini :

Ainsi, pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tq $\|P\|_2 = 0$, on a $\int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{1-x^2}\,|P(x)|}_{\geq 0}\,dx$

$\Rightarrow \forall x \in [-1;1],\ \sqrt{1-x^2}\ |P(x)| = 0$

i.e $\forall x \in]-1;1[,\ \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\neq 0}\ |P(x)| = 0$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[,\ P(x) = 0$

∞té de racines $\Rightarrow P = \tilde{0}$

d'où $\|.\|_2$ déf. pos.

$\Rightarrow \|.\|_2$ est bien une norme

Ainsi, comme nous travaillons en dim. finie, toutes les normes sont équivalentes

D'où l'existence d'un tel α.

b) Soit $r \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a :

ce α étant valable sur tout $\mathbb{R}_n[x]$

$$\sum_{k=0}^{r} |P(k)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(k)| \leqslant \alpha \|P\|_2$$

si $r \leq n$

si $r > n$, cela reste une norme $\longrightarrow$ OK

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2022)
Nature de $\sum \cos\left(n^2\pi \ln(1-\frac{1}{n})\right)$

On a $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= \cos\left(n^2\pi\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$= \cos\left(-n\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (-1)^n\times\cancel{(-1)}\times\sin\left(\cancel{-}\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^n\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\pi}{3}\times\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{cv d'après CCSA}}+\underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{cv}}$$

$\longrightarrow$ OK

Exercice 5 : (CCINP MPi 2023)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. $U_0 = \frac{\pi}{2}$, $U_1 = \sin(U_0) = 1$, $U_2 = \sin(1)$ ...

Comme sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, $f : x \mapsto \sin(x)$ est stmt croissante, on a $U_1 < U_2$ $\xrightarrow{\sin(\cdot)}$ $U_2 < U_3$

↳ $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0;\frac{\pi}{2}]$ (le montrer par rec.)

... par rec imm. $U_{k+1} < U_k$

$\Rightarrow$ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stmt décroissante. (1)

Enfin, $f : x \mapsto \sin(x)$ est une fonction bornée : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq 1$
$\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$

Ainsi, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (2)

DONC, (1) ∧ (2) $\Rightarrow$ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$

or $\sin(\ell) = \ell$ $\Rightarrow$ $\ell = 0$ car 0 est le seul point fixe dans $[0;\frac{\pi}{2}]$

fonction $\mathcal{C}^0$

donc $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. $V_n = \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(U_n)}{U_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{U_n}\left(U_n - \frac{U_n^3}{6} + O(U_n^5)\right)\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{U_n^2}{6} + O(U_n^4)\right)$

$\sim -\frac{1}{6} U_n^2$

de tps ≥ 0

Ces 2 séries sont donc de mm nature

$V_n = \ln(U_{n+1}) - U_n \Rightarrow S_N = \underbrace{\ln(U_{N+1})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty} - \ln(U_0)$

$\Rightarrow S_N$ DV
$\Rightarrow \sum U_n^2$ DV

3. Posons $W_n = U_{n+1} - U_n$
$= \sin(U_n) - U_n$
$= \cancel{U_n} - \frac{U_n^3}{6} + O(U_n^5) - \cancel{U_n}$

$\sim -\frac{U_n^3}{6}$

$\Rightarrow$ D'où les mm nature

OR $S_N = \sum^N W_n = U_{N+1} - U_0$
$\xrightarrow[N\to+\infty]{} -U_0 = -\frac{\pi}{2}$

D'où la convergence de $\sum U_n^3$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in [0;1]$, ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_n^{k+1} \leq U_n^k$

$\Rightarrow \forall k \geq 3$, $U_n^k \leq U_n^3$ et $U_n^2 \leq U_n \longrightarrow$ OK

Exercice 6 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.

1. Montrer que la suite (S_n) converge.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de (S_n).

(1) Posons $u_k = \frac{1}{(k+1)(2k+1)} \sim \underbrace{\frac{1}{2k^2}}_{\text{TG série } \underline{\underline{CV}} \text{ (Riemann, } \alpha > 1)}$

Par th. de Comparaison, $\sum_k u_k$ CV

$\Rightarrow (S_n)_n$ admet une limite, donc converge

(2) $\rightarrow$ cf. cours

(3) On a pour tout k, $u_k = \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{2k+1}$ $\qquad \alpha = -1$

$$= \frac{-1}{k+1} + \frac{2}{2k+1}$$

Ainsi, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} -\frac{1}{k+1} + \frac{2}{2k+1}$

$$= -\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{H_n} + 2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}}_{H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n}$$

$$= -H_{n+1} + 2H_{2n+1} - \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} H_n$$

$$= 2(H_{2n+1} - H_n) - \frac{1}{n+1}$$

$$= 2(\ln(2n+1) + \cancel{\gamma} + o(1) - \ln(n) - \cancel{\gamma} - o(1)) - \frac{1}{n+1}$$

$$= 2 \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + o(1) - \frac{1}{n+1}$$

$$= 2\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + o(1) - \frac{1}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\ln(2)$$

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2023)

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées. Que peut-on dire du reste ?
2. Étudier la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}$.
3. Comment peut-on donner une valeur à 10^{-3} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$?
4. Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Prop. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est du signe de $(-1)^n$

H2 $(|u_n|)_n$ est décroissante

H3 $|u_n| \longrightarrow 0$

ALORS

C1 $\sum_n u_n$ CV

C2 R_n est du signe de u_{n-1} et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n-1}|$

2. Si $\alpha \leqslant 0$: $u_n \not\to 0$ donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ Diverge grossièrement

Si $\alpha > 0$: le théorème s'applique, $\sum u_n$ CV
← le justifier à l'oral ;)

3. On attend que $\frac{1}{n^3} < 10^{-3}$ puis on calcule la somme partielle (le reste étant borné par $\frac{1}{n^3}$) ⇒ Calculer S_9

4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ ← supposons $\alpha > 0$, sinon ça n'a pas de sens (cela diverge de toute façon)

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\text{CV par CCSA}} - \underbrace{\frac{1}{2n^{2\alpha}}}_{\substack{\text{CV} \\ \Leftrightarrow 2\alpha > 1 \\ \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$: OK

Si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$: $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ ⇒ $\sum_n v_n$ DV

$$\Rightarrow \sum_n \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{DV} + \sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ CV}$$

$$\Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$$

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{3^n\, n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{2/3}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \dfrac{C}{n^a}$.

$\boxed{B}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(n+1)}(3n+1) = \dfrac{3n+1}{3n+3}$

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{2/3}$

stricte croissance de $x \mapsto x^3$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3n+1}{3(n+1)}\right)^3 \geqslant \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$

$\Leftrightarrow (3n+1)^3 \geqslant 27.(n+1)n^2 = 27n^3 + 27n^2$

$\Leftrightarrow \cancel{27n^3} + \cancel{27n^2} + 9n + 1 \geqslant \cancel{27n^3} + \cancel{27n^2}$

$\Leftrightarrow 9n + 1 \geqslant 0$

toujours vrai

$\longrightarrow$ OK

2. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geqslant \dfrac{u_n}{v_n}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante (A)

or $u_1 = \dfrac{1}{3 \times 1} \times (3-2)$ et $v_1 = \dfrac{1}{1^{2/3}} = 1$

$= \dfrac{1}{3}$

(A) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{1}{3}$

i.e $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \dfrac{1}{3} v_n$ or v_n est le TG d'une série DV $(\alpha < 1)$

Donc par théorème de comparaison, $\underline{\sum u_n \text{ DV}}$

3. $w_n = \dfrac{2}{3}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{3n+1}{3n+3}\right)$

$= \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right] + \ln\left(\dfrac{1 + \frac{1}{3n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)$

$= -\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right] + \left[\dfrac{1}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$

$= O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \sum w_n$ CV

④ On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} w_n$

$$= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] + \sum_{k=1}^{n} [\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)]$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{2}{3} \ln(n+1) + \ln(v_{n+1}) \underbrace{- \ln(3)}_{= +\ln(3)}$$

Or, d'après la question précédente, $\sum w_n$ cv $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$

i.e $S_{n-1} = \alpha + o(1) \Rightarrow \frac{2}{3} \ln(n) + \ln(v_n) + \ln(3) = \alpha + o(1)$

par souci d'écriture

$$\Rightarrow \ln(v_n) = -\frac{2}{3} \ln(n) + \alpha - \ln(3) + o(1)$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{1}{n^{2/3}} e^{\alpha - \ln(3)} \underbrace{e^{o(1)}}_{\to 1}$$

D'où $v_n \sim \dfrac{e^{\alpha - \ln(3)}}{n^{2/3}}$

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2021)

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1+\sin n}$ converge.

a) A l'aide d'un développement limité.

b) En caractérisant $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{n+1+\sin n}-\frac{(-1)^n}{n}\right)$ (principe de l'éclatement).

c) En montrant que le critère spécial des séries alternées s'applique.

1

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n+1+\sin(n)} = \frac{(-1)^n}{n+1} \times \frac{1}{1+\frac{\sin(n)}{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \times \left(1 - \frac{\sin(n)}{n+1} + O\left(\frac{\sin(n)}{n+1}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n+1}}_{\text{CCSA}} - \underbrace{\frac{(-1)^n \sin(n)}{(n+1)^2}}_{\text{CV ABS donc CV}} + \underbrace{O\left(\frac{\sin(n)}{(n+1)^2}\right)}_{\text{de même}}$$

2 Posons $S_n = \frac{(-1)^n}{n+1+\sin(n)} - \frac{(-1)^n}{n}$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\sin(n)}{n}} - 1\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{-\frac{1}{n}-\frac{\sin(n)}{n}}{\underbrace{1+\frac{1}{n}+\frac{\sin(n)}{n}}_{\sim 1}}\right)$$

$$\sim \frac{(-1)^n}{n}\left(-\frac{1}{n}-\frac{\sin(n)}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ donc $\sum S_n$ cv

Ainsi, $S_n = U_n - \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow U_n = \underbrace{S_n}_{\text{TG d'une série CV}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{TG d'une série CV}} \Rightarrow \sum U_n$ cv

3

(H1) $\forall n\in\mathbb{N}$, U_n est du signe de $(-1)^n$ ✓

(H2) $(|U_n|)_n$ est décroissante ✓ → $|U_{n+1}|\leq|U_n| \Leftrightarrow n+1+\sin(n) \leq n+2+\sin(n+1)$

i.e $\sin(n)-\sin(n+1)\leq 1$

OK par IAF

(H3) $|U_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $(U_n)\sim\frac{1}{n+1}$ ✓

le CCSA s'applique, d'où la convergence de $\sum U_n$

Exercice 10

1. Trouver deux réels α, β tels que $\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^N \cos(nt)$.
3. Montrer que si ϕ est une fonction de classe C^1, alors $\lim_{N\to+\infty} \int_0^\pi \phi(t)\sin(Nt)\,dt = 0$.
4. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq. $I_n = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$

or $I_n = \alpha \int_0^\pi t\cos(nt)\,dt + \beta \int_0^\pi t^2 \cos(nt)\,dt$

$$= \alpha\left(\left[t\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt \right) + \beta\left(\left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,t\,dt \right)$$

$$= \alpha\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi + \frac{2\beta}{n}\left(\left[t\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n}\,dt \right)$$

$$= \alpha\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2\beta}{n}\left(\frac{\pi(-1)^n}{n} - \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi \right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\alpha(-1)^n - \alpha + 2\beta\pi(-1)^n \right)$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha(-1)^n - \alpha + 2\beta\pi(-1)^n = 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n(\alpha + 2\beta\pi) - \alpha = 1$

En particulier, $\begin{cases} \alpha + 2\beta\pi = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$ car cela doit rester vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

2 Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

si $t = 0$: $\sum_{n=1}^N \cos(nt) = \sum_{n=1}^N 1$ d'où $S = N$

Sinon : $\sum_{n=1}^N \cos(nt) = \sum_{n=0}^N \cos(nt) - 1$

i.e $S = \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1$

3 Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $N \in \mathbb{N}$,

$$J_N = \int_0^\pi \phi(t)\sin(Nt)\,dt = \left[\phi(t)\frac{\cos(Nt)}{N}\right]_0^\pi - \frac{1}{N}\int_0^\pi \phi'(t)\cos(Nt)\,dt$$

$$\Rightarrow |J_N| \leq \frac{1}{N}\left|\phi(\pi)(-1)^N - \phi(0)\right| + \frac{1}{N}\int_0^\pi |\phi'(t)\cos(Nt)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{N}|\phi(\pi)| + \frac{1}{N}|\phi(0)| + \frac{1}{N}\int_0^\pi |\phi'(t)|\,dt$$

or ϕ' est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;\pi]$ donc est bornée et atteint ses bornes, notons $\|\phi'\|_\infty$ son sup'

$$\leq \underbrace{\frac{1}{N}\left(|\phi(\pi)| + |\phi(0)|\right)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{N}\|\phi'\|_\infty \pi}_{\to 0}$$

d'où $\lim_{N\to+\infty} J_N = 0$

4 Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N I_n = \int_0^\pi \sum_{n=1}^N (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt$$

somme finie ! $= \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\sum_{n=1}^N \cos(nt)\,dt$

Q2. $\longrightarrow = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\left(\cos\left(\frac{Nt}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1\right)dt$

$$= \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(N\frac{t}{2}\right)dt - \int_0^\pi \alpha t + \beta t^2\,dt$$

or $\sin(a)\cos(b) = \frac{(\sin(a+b) + \sin(a-b))}{2}$

$$= \int_0^\pi \frac{\alpha t + \beta t^2}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt - \int_0^\pi \alpha t + \beta t^2\,dt$$

$$= \int_0^\pi \underbrace{\frac{\alpha t + \beta t^2}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}_{\phi}\sin\big(\underbrace{\tfrac{2N+1}{2}}_{\hat{N}}t\big)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi \alpha t + \beta t^2\,dt$$

et on montre de la même manière (cf. Q3) que $\int_0^\pi \phi(t)\sin(\hat{N}t)\,dt \xrightarrow[\hat{N}\to+\infty]{} 0$ avec ϕ $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$

et $\hat{N} > N$ donc $\hat{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \alpha t + \beta t^2\,dt$$

avec $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2\pi}$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 11 :

Soient $(u_n)_{n\in\aleph}$ et $(v_n)_{n\in\aleph}$ deux suites strictement positives telles que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

a) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

1 On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ décroissante

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_0}{v_0}$

$\Rightarrow u_n \leq \underbrace{\frac{u_0}{v_0}}_{cte} v_n$ et $\sum v_n$ CV donc par th. de comp.

$\Rightarrow \sum u_n$ CV

2 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \frac{v_n}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{u_n}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ croissante

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_n}{u_n} \geq \frac{v_0}{u_0} \Leftrightarrow v_n \geq \frac{v_0}{u_0} u_n$ et $\sum u_n$ DV

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \sum v_n$ DV

Groupe B

Exercice 12 : (Mines MP 2022)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ et :

$N_1(f) = \|f\|_1 + \|f'\|_1$ et $N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_1$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

(1) → OK

(2) Soit $f \in E$, soit $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt$$

I,T

croissance de l'intégrale

$$\leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_1 \leqslant N_2(f)$$

et $\|f'\|_1 = N_2(f) - \underbrace{|f(0)|}_{\geqslant 0} \leqslant N_2(f)$

D'où $N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$

D'autre part,

- $\|f'\|_1 = N_1(f) - \underbrace{\|f\|_1}_{\geqslant 0}$

$\boxed{\|f'\|_1 \leqslant N_1(f)}$

- Soit $\alpha \in [0;1]$ tq $|f(\alpha)| = \inf_{t \in [0;1]} |f(t)|$ (= min d'ailleurs, th. bornes atteintes)

Ainsi, $f(\alpha) - f(0) = \int_0^\alpha f'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \quad |f(0)| \leqslant |f(\alpha)| + \int_0^\alpha |f'(t)|\,dt$$

$$\leqslant |f(\alpha)| + \underbrace{\int_0^1 |f'(t)|\,dt}_{\|f'\|_1}$$

et $\forall t \in [0;1]$, $|f(\alpha)| \leqslant |f(t)| \Rightarrow \underbrace{|f(\alpha)|}_{\text{cte !!}} \leqslant \underbrace{\int_0^1 |f(t)|\,dt}_{= \|f\|_1}$

$$\Rightarrow \quad |f(0)| \leqslant \|f\|_1 + \|f'\|_1$$

donc $\boxed{|f(0)| \leqslant N_1(f)}$

D'où $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$

Finalement, $\forall f \in E$, on a $\frac{1}{2} N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$

↳ D'où l'équivalence recherchée

Exercice 13 : (Mines MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \longmapsto S_n(x) - 1 = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$

f_n est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} > 0$

$\Rightarrow$ f_n est stmt croissante sur $\mathbb{R}_+$

D'autre part, $f_n(0) = -1$

$f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$

Ainsi

f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

f_n est stmt croissante sur $\mathbb{R}_+$

$f_n(0) = -1$

$f_n(1) = n - 1$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists ! u_n \in \mathbb{R}_+$ tq $f_n(u_n) = 0$

$[0;n]$ en réalité mais la croissance nous permet d'étendre

i.e $\exists u_n \in \mathbb{R}_+$ tq $\sum_{k=1}^{n} u_n^k = 1$

D'où l'unique solution, notée u_n

2 On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(u_n) = S_{n+1}(u_{n+1}) = 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_n^k = \sum_{k=1}^{n+1} u_{n+1}^k = 1$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$ sinon on arriverait à une ABS

égalité : ABS car $u_{n+1}^{n+1} > 0$

supériorité stricte : $\Rightarrow S_{n+1}(u_{n+1}) > S_n(u_n)$: ABS

$\Rightarrow (u_n)_n$ strictement décroissante (A)

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$

$\Rightarrow (u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$

(A) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_2 < 1$ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n^n \leqslant u_2^n < 1$

$\Rightarrow u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, $f_n(u_n) = u_n \dfrac{1-u_n^n}{1-u_n} \longrightarrow \dfrac{\ell}{1-\ell}$

$\overset{\shortparallel}{1}$ par hyp.

donc $\dfrac{\ell}{1-\ell} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\ell = \dfrac{1}{2}}$

Exercice 14 : (Mines MP 2021)
Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$

On a dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x^{2^k} \times \frac{1}{1+x^{2^k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x^{2^k} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{p 2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} 2^k x^{(p+1)2^k} (-1)^p$$

Th. sommation par paquets

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} x^q \alpha_q$$

Th. sommation par paquets :
- $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $(u_{p,k})_{(p,k)\in S_q}$ sommable ✓ car S_q fini
- $S_q = \sum_{(p,k)\in S_q} |u_{p,k}|$ et $\sum_q S_q$ CV
 Gflem.

avec $\begin{cases} \alpha_q = \sum_{(p,k)\in S_q} 2^k (-1)^p \\ S_q = \{(p,k)\in \mathbb{N}^2 \mid q = (p+1)2^k\} \end{cases}$

Considérons la valuation en 2 de q, i.e $q = 2^a t$ avec t impair

Ainsi : les éléments de S_q peuvent être construits de 2 manières différentes : $2^a t = (p+1)2^k$

⇝ $\underline{k=a}$: ⇒ $p+1$ impair
⇒ p impair
⇒ p pair
} une seule config possible

⇝ $\underline{k<a}$: ⇒ $p+1$ pair (car on doit compenser en termes de puissances de 2)
⇒ p impaire
⇒ $(-1)^p = -1$
} les termes possibles sont
$k=0$
$k=1$
$\vdots$
$k=a-1$

DONC $\alpha_q = \sum_{(p,k)\in S_q} 2^k (-1)^p$

$$= 2^a + \sum_{\substack{(p,k)\in S_q \\ k<a}} 2^k \underbrace{(-1)^p}_{=-1}$$

$$= 2^a - \sum_{k=0}^{a-1} 2^k$$

$$= 2^a - \left(\frac{1-2^a}{1-2}\right)$$

$$= 2^a - \left(\frac{1-2^a}{-1}\right)$$

$$= \cancel{2^a} - \cancel{2^a} + 1$$

$$= 1$$

Donc $\alpha_q = 1 \longrightarrow$ OK

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2021)

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle S_N = \sum_{\substack{p\geq 0\\ q\geq 1}}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$

$$= \sum_{q=1}^{N}\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(p+1+q^2)}$$

or $\displaystyle \frac{1}{(p+q^2)(p+1+q)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$

d'où $\displaystyle S_N = \sum_{q=1}^{N}\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{q^2+p} - \frac{1}{q^2+p+1}$

$$= \sum_{q=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2+N+1}}_{u_q}$$

et on a $|u_q| \leq \dfrac{1}{q^2}$ TG d'une série cv !

... $\Rightarrow S_N$ converge, d'où l'existence !

Enfin,

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{q=1}^{N} \overbrace{\underbrace{\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(q^2+p+1)}}_{= \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2+N+1}}}^{T_q^N}$$

$$= \sum_{q=1}^{+\infty} T_q \qquad \text{avec } T_q = \lim_{N\to+\infty} T_q^N = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2+N+1} = \frac{1}{q^2}$$

$$= \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^2}$$

d'où $\boxed{S = \dfrac{\pi^2}{6}}$

Exercice 16 :

On pose $u_0 = 1$ et pose tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

b) On pose $v_n = {u_n}^{\alpha}$. Déterminer un réel α tel que $\underset{n\to+\infty}{Lim}(v_{n+1} - v_n)$ soit finie et non nulle.

c) Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

1) cf. exo 5 - Q1

2) Posons $V_n = {U_n}^{\alpha}$

On veut $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $V_{n+1} - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \in \mathbb{R}^*$

$$V_{n+1} - V_n = {U_{n+1}}^{\alpha} - {U_n}^{\alpha}$$
$$= (\sin(U_n))^{\alpha} - {U_n}^{\alpha}$$
$$= \left(U_n - \frac{{U_n}^3}{3!} + o({U_n}^4)\right)^{\alpha} - {U_n}^{\alpha}$$
$$= {U_n}^{\alpha}\left(1 - \frac{{U_n}^2}{3!} + o({U_n}^3)\right)^{\alpha} - {U_n}^{\alpha}$$
$$= {U_n}^{\alpha}\left(\cancel{1} + -\alpha\frac{{U_n}^2}{3!} + O({U_n}^3)\right) - \cancel{{U_n}^{\alpha}}$$
$$= -\alpha\frac{{U_n}^{\alpha+2}}{3!} + O({U_n}^{3+\alpha})$$

Ainsi, $\alpha = -2 \Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{2}{3!} + O(U_n)$

$$= \frac{1}{3} + O(U_n)$$
$$\longrightarrow \frac{1}{3}$$

$\boxed{\alpha = -2 \text{ convient}}$

3) $V_{n+1} - V_n \sim \frac{1}{3}$

Th. de sommation partielle des relations d'équiv.

$$\Rightarrow S_N = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} V_{n+1} - V_n}_{{U_{N+1}}^{-2} - {U_0}^{-2}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3} = \frac{N}{3}$$

$$\Rightarrow {U_{N+1}}^{-2} = \frac{N}{3} + {U_0}^{-2}$$

$$\Rightarrow U_{N+1} = \left(\frac{N}{3} + {U_0}^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{D'où } U_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{N}}}$

$U_N \sim \frac{\sqrt{3}}{N^{\frac{1}{2}}}$ or $\frac{1}{2} < 1$, Série de Riemann DV

Donc par th. de comp : $\boxed{\sum U_n \text{ DV !}}$

Exercice 17 :

On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{1}{n.n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

En déduire que e est irrationnel.

- $u_n \nearrow$
- $u_n - v_n = \frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 n}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!.(n+1).n} \times \left(\cancel{n} + \cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{(n+1)!.(n+1)n}$$

≤ 0

Ces 2 suites sont bien adjacentes.

Ainsi, ces 2 suites possèdent la mm limite, or $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$

DONC $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

Supposons que e soit irrationnel

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad U_n < e < V_n$ car ces suites sont adja.

$$\Rightarrow n!\,U_n < n!\,e < \underbrace{n!\,V_n}_{= n!\,U_n} + \frac{1}{U_n}$$

$$\Rightarrow n!\,U_n < n!\,e < n!\,U_n + \frac{1}{n}$$

Ainsi, prenons $n = q$, $\quad \underbrace{q!\,U_q}_{\in \mathbb{N}} < q!\,e < \underbrace{q!\,U_q}_{\in \mathbb{N}} + \frac{1}{q}$

$m = q!\,U_q$: $\quad m < q!\,e < m + \frac{1}{q} \leq m + 1$

$$\Rightarrow m < q!\,e < m+1$$

Donc $q!\,e \notin \mathbb{N}$ or $q!\,e = (q-1)!\,p \in \mathbb{N}$ ABS

Exercice 18 : Règle de Raabe Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$.

Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge. (On posera $w_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et on montrera que la suite (w_n) converge).

Supposons donc $\alpha > 1$, posons donc $w_n = \ln(n^\alpha u_n)$

Ainsi, $w_{n+1} - w_n = \ln\left(\left(\frac{1+n}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \ln\left(\left[1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right]\right)$

$= \ln\left(1 \cancel{+\frac{\alpha}{n}} \cancel{-\frac{\alpha}{n}} + \frac{\alpha^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Ainsi, $\sum w_{n+1} - w_n$ cv $\Rightarrow (w_n)$ cv vers $\ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $\ln(n^\alpha u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

exp e^0 $\longrightarrow \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $n^\alpha u_n \longrightarrow \exp(\ell)$

$\Rightarrow$ —— $u_n \frac{n^\alpha}{e^\ell} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow$ —— $u_n \sim \frac{e^\ell}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

or $\left(\frac{e^\ell}{n^\alpha}\right)_n$ est le TG d'une série CV (Riemann, $\alpha > 1$)

Donc par th. de comparaison, $\sum u_n$ CV


Dire que
cet exo se
fait sans astuce
OR
draw
25
you know who
imgflip.com