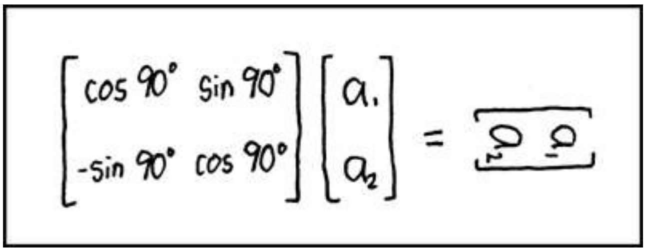
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 8



Olivier Caffier

Colles MPi* Semaine n°8 du 4/11/2024 au 8/11/2024 (Programme n°4)

Vallaeys Pascal

7 octobre 2024

Thème : Fin de la réduction, orienté vers le polynôme minimal.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Si deux endomorphismes commutent, le noyau, l'image et les s.e.p. de l'un sont stables par l'autre.(démo)
- En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul (démo)
- Définition du polynôme minimal, en dimension finie.

- Lien entre spectre et polynôme annulateur (démo)
- Théorème de Cayley Hamilton (démo pour n=2)
- Lemme de décomposition des noyaux.
- Si u est diagonalisable, tout endo induit sur un sous-espace stable l'est. (démo)
- Caractérisation des endo trigonalisables par le polynôme minimal ou un polynôme annulateur.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Existence et unicité du polynôme minimal en dimension finie (démo)
- Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur (démo)
- Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul (démo)
- Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal (démo)
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple (démo)
- Si F est un sous-espace stable par u, le polynôme minimal de l'endo induit divise celui de u (démo)
- Définition des sous-espaces caractéristiques et traduction matricielle associée.

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent (démo HP)
- Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul. (démo)
- Lemme de décomposition des noyaux (démo, avec le théorème de Bézout admis).
- Dans $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles. (démo HP)
- Si une matrice est inversible son inverse est un polynôme en cette matrice.(démo HP)
- Dans $M_n(\mathbb{C})$, toute matrice est limite d'une suite de matrices diagonalisables. (démo HP)
- Décomposition de Dunford (HP ?), avec démonstration de l'unicité. (démo HP)
- Deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$. (démo HP)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.
1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A)$. Montrer que A est la matrice d'une projection.

Exercice 2 : (CCINP MP 2023)
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2, puis un polynôme annulateur de M de degré 4.
3. Montrer que M est diagonalisable, et préciser les valeurs possibles de son spectre.
4. Donner les différentes formes possibles de M.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la dernière question, il faut d'abord montrer que M et A sont diagonalisables pour une même base de vecteurs propres.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2023)
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = O_n$.
1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Exercice 4 : (CCINP MP 2023)
Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
1. Calculer A^2 et A^3. En déduire un polynôme annulateur de A.
2. Donner les éléments propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
4. A est-elle trigonalisable ? Si oui, la trigonaliser.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

Exercice 5 : (CCINP MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
3. On suppose que $A^3 - 3A - 4\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
4. On suppose que $A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair.

Exercice 6 : (CCINP MP 2022)
1. Énoncer sans démonstration le lemme des noyaux.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.
2. On suppose $\det f^2 \neq 0$ et f^2 diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.
3. On suppose $\det f^2 = 0$, f^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que f est diagonalisable.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f n'est pas nécessairement diagonalisable.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.
1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$.
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$
1. Déterminer le spectre de A de trois façons :
.En utilisant la définition des valeurs propres et des vecteurs propres.
.En calculant son polynôme caractéristique χ_A.
.En calculant son polynôme minimal μ_A.
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$?
4. Dans ce cas, déterminer $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 9 : (CCINP MP 2023)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
On souhaite montrer de trois façons différentes que f est nilpotent.
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
2. Soit $u : h \in \mathcal{L}(E) \longmapsto h \circ g - g \circ h$. En étudiant u, montrer que f est nilpotent.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que : $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$. En déduire que f est nilpotent.
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr} f^k = 0$. On suppose que f admet p valeurs propres distinctes. Montrer que $p = 1$. En déduire que f est nilpotent.

Exercice 10 : (Mines MP 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère l'application u définie, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $u(M) = A.M.A$
1) Montrer que u est un endomorphisme. Montrer que u est nilpotente si, et seulement si, A est nilpotente.
2) Montrer que u est diagonalisable si A l'est. Puis montrer la réciproque dans le cas où A est inversible.

Exercice 11 : (Centrale MP 2021)
1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0_n\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n$. Montrer que $\operatorname{Tr}(A) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

Exercice 12 :

a) Montrer que le commutant d'une matrice A donnée est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ (ensemble des matrices qui commutent avec A).

b) Montrer que si deux matrices sont semblables, leurs commutants ont même dimension.

c) Que dire de la dimension de ce commutant, si A est diagonalisable.

Exercice 13 : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n) / u^3 = u + Id$. Montrer que $Det(u) > 0$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 14 : (Mines MP 2023)
On considère ϕ telle que pour $P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.
1. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
2. Montrer de plusieurs manières que ϕ est diagonalisable.
3. Expliciter une base de vecteurs propres.

Exercice 15 : (Mines MP 2022)
Un endomorphisme f est dit cyclique dans E tel que $\dim E = n$, si :
$\exists\, x_0 \in E : \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)) = E$.
1. Soit g un endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathbb{R}^3$ soit :
$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
Montrer que g est cyclique et diagonalisable.
2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 16 : (Mines MP 2022)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe P polynôme annulateur de f vérifiant : $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Après avoir écrit $P = XQ$, remarquer que X et Q sont premiers entre eux.

Exercice 17 : (Mines MP 2022) (15 min de préparation, 15 min de passage)
Soit $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$, On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par :
$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b \end{cases}$
1. Étudier la convergence de la suite. 2. On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ l'application telle que :
$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = f(ax + b)$
a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
b) Montrer que ϕ est bijective.
c) Soit λ une valeur propre de ϕ différente de 1 et f_λ un vecteur propre associé.
(i) Montrer que $f_\lambda\left(\frac{b}{1-a}\right) = 0$ et que $\lambda \in]-1,1[\setminus \{0\}$.
(ii) Montrer que f'_λ est aussi un vecteur propre.
d) Déterminer les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 18 : (ENS MP 2023)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), P = \chi_A, P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ et α_i la multiplicité de λ_i.
Soient les $F_i = \mathrm{Ker} P_i(A)$.
1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i F_i$.
2. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de A restreinte à F_i.
3. Montrer que $A = D + N$ avec D matrice diagonalisable et N nilpotente, telles que $DN = ND$.
4. Soit $\phi_A : M \mapsto AM - MA$. Exprimer la décomposition $N + D$ de ϕ_A en fonction de celle de A.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 62,72,88,91,93.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : réduction. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°4
- Groupe 5 à 7 : Programme n°4
- Groupe 8 à 11 : Programme n°4
- Groupe 12 à 14 : Pas de colle de math cette semaine

Connaissances de cours et démonstrations exigibles

Groupe A

- ### Si 2 endos commutent, le noyau, l'image et les s.e.p de l'un sont stables par l'autre

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient $u,v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$

ALORS

$\text{Ker}(u)$, $\text{Im}(u)$ et $E_\lambda(u)$ $(\lambda \in Sp(u))$ sont stables par v.

$\text{Ker}(v)$, $\text{Im}(v)$ et $E_\lambda(v)$ $(\lambda \in Sp(v))$ sont stables par u.

Démo

⤳ Soit $x \in \text{Ker}(u)$, alors $u(v(x)) \underset{u \,\&\, v \text{ commutent}}{=} v(u(x)) \underset{x \in \text{Ker}(u)}{=} v(0) = 0$ $\Rightarrow$ $v(x) \in \text{Ker}(u)$

⤳ Soit $y \in \text{Im}(u)$ alors $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$, donc $v(y) = v \circ u(x) \underset{\text{commutent}}{=} u(v(x))$ $\Rightarrow$ $v(y) \in \text{Im}(u)$

⤳ Soit $\lambda \in Sp(u)$, soit $x \in E_\lambda(u)$, i.e $u(x) = \lambda x$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ $\Rightarrow$ $v(x) \in E_\lambda(u)$

D'où la stabilité recherchée, on conclut par la symétrie des rôles.

- ### En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

ALORS

$$\exists P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) = 0$$

Démo Passons à un aspect matriciel, notons A la matrice de u dans une base de E.

⚠ Ici, on travaille en dim n^2

Ainsi, la famille $\underbrace{(I_n, A, \dots, A^{n^2})}_{:=\mathcal{F}}$ est liée (car de taille n^2+1)

et donc il existe une C.L non-nulle des elts de $\mathcal{F}$ qui annule cette famille, i.e $\exists a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tq $\sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0$.

On pose alors $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$, on a bien $P(A) = 0$

et donc $P(u) = 0$

D'où l'existence d'un tel pol. annulateur non-nul de u

- ### Lien entre spectre et polynôme annulateur

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0$

Alors

$$Sp(u) \subset \text{Rac}(P)$$

Démo Notons $P = \sum_i a_i X^i$

Soit $\lambda \in Sp(u)$, soit donc $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x_0) = \lambda x_0$

D'une part, $P(u) = \tilde{0} \Rightarrow \forall x \in E,\ P(u)(x) = 0 \Rightarrow P(u)(x_0) = 0$

D'autre part, $P(u)(x_0) = \sum_i a_i u^i(x_0)$

$= \sum_i a_i \lambda^i x_0$

$0 = \underbrace{x_0}_{\neq 0} P(\lambda) \quad \Rightarrow \quad P(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda \in \text{Rac}(P)$

Définition du polynôme minimal, en dimension finie

Def. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

ALORS

il existe un unique polynôme annulateur de u, noté Π_u, de degré minimal, unitaire et non-nul

:= polynôme minimal de u

Théorème de Cayley Hamilton

Th. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

ALORS

$$\chi_u(u) = 0$$

Démo (pour $n=2$)

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base canonique de E. $u(e_1) = ae_1 + ce_2$, $u(e_2) = be_1 + de_2$

Dès lors, $\chi_u(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$

et $\chi_u(u) = u^2 - (a+d)u + (ad-bc)Id$

Ainsi, $\chi_u(u)(e_1) = u^2(e_1) - (a+d)u(e_1) + (ad-bc)e_1$ et de mm, $\chi_u(u)(e_2) = 0$

$= \dots$

$= 0$

DONC $\chi_u(u)$ envoie $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ sur $\{0\}$

$\Rightarrow$ $\underline{\chi_u(u) = 0}$ (l'image d'une base détermine entièrement une A.L)

Lemme de décomposition des noyaux

Lemme. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux 2 à 2

ALORS

$$\mathrm{Ker}((P_1 \times \dots \times P_n)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_k(u))$$

Si u est diagonalisable, tout endo induit sur un sous-espace stable l'est

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable

Alors pour tout $F \subset E$ u-stable, on a que

$$u_{|F} \text{ est diagonalisable}$$

Démo

u diag $\Leftrightarrow$ Π_u scindé simple
F u-stable $\Rightarrow$ $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$

$\Rightarrow$ $\Pi_{\tilde{u}}$ scindé simple

$\Rightarrow$ $\tilde{u} = u_{|F}$ diagonalisable

Caractérisation des endos trigonalisables par le polynôme minimal ou un polynôme annulateur

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

ALORS

u trigonalisable $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Pi_u \text{ scindé} \\ \text{ou} \\ \text{Il existe un polynôme annulateur scindé} \end{cases}$

Groupe B

Existence et unicité du polynôme minimal en dimension finie

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Alors

il existe un unique polynôme annulateur de u, noté Π_u, de degré minimal, unitaire et non-nul

:= polynôme minimal de u

Démo

EXISTENCE Posons $D_u = \{ d°P \mid P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0 \}$ l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de u.

Alors D_u est une partie non-vide de $\mathbb{N}$ (u admet en effet un pol. annulateur, cf. démo gp. A)

$\Rightarrow$ D_u admet un plus petit elt, noté d_0, i.e u admet un pol. annulateur de degré minimal d_0 : P_0

On pose $\Pi_u = \dfrac{P_0}{cd(P_0)}$ et on a bien le polynôme recherché.

coeff. dominant

D'où l'existence.

UNICITÉ Soit P un polynôme annulateur de u.

Alors, d'après le th. de la division euclidienne : $\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $P = Q\Pi_u + R$ avec $d°R < d°\Pi_u$

or $\begin{cases} P(u) = 0 \\ \Pi_u(u) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $R(u) = 0$ or $\begin{cases} \Pi_u \text{ est de degré minimal pour annuler } u \\ d°R < d°\Pi_u \end{cases}$

$\Rightarrow R = 0$

$\Rightarrow P$ est divisible par Π_u

Ainsi, s'il existe un autre pol. minimal Q_u, on aurait $Q_u \mid \Pi_u \wedge \Pi_u \mid Q_u$

et ces 2 polynômes sont unitaires par définition.

$\Rightarrow \underline{Q_u = \Pi_u}$

D'où l'unicité

Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Ainsi, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0$, on a

$$\Pi_u \mid P$$

Démo Soit P un polynôme annulateur de u.

Alors, d'après le th. de la division euclidienne : $\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $P = Q\Pi_u + R$ avec $d°R < d°\Pi_u$

or $\begin{cases} P(u) = 0 \\ \Pi_u(u) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $R(u) = 0$ or $\begin{cases} \Pi_u \text{ est de degré minimal pour annuler } u \\ d°R < d°\Pi_u \end{cases}$

$\Rightarrow R = 0$

$\Rightarrow P$ est divisible par Π_u

Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul

On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et on prend $\varphi : P \mapsto P'$

Ainsi, si φ admettait un polynôme annulateur $\mathbb{P}$ non-nul! on aurait que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{P}(\varphi)(P) = 0$

notons alors $\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ donc $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi^k(P) = 0$

i.e $\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)} = 0$

or, en evaluant cette égalité en $P = 1$ $\Rightarrow a_0 = 0$

$P = X$ $\Rightarrow a_1 = 0$

$\vdots$

$P = \frac{X^d}{d!}$ $\Rightarrow a_d = 0$

donc $\mathbb{P} = 0$, ABS

Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

ALORS

$$Sp(u) = Rac(\Pi_u)$$

Démo

- D'une part, Π_u est un pol. annulateur de u donc $Sp(u) \subset Rac(\Pi_u)$ (cf. démo gp. A)

- D'autre part, soit $r \in Rac(\Pi_u)$.

  Si $r \notin Sp(u)$ alors l'application $(u - r\,Id) \in GL(E)$

  or $r \in Rac(\Pi_u) \Rightarrow (X - r) \mid \Pi_u$

  et $\frac{\Pi_u}{(X-r)}(u) = 0$

  Car $\Pi_u = \left(\prod_{\mu \in Sp(u)} (X - \mu)\right)(X - r) \times Q(X)$ on a bien $\left(\left(\prod_{\mu \in Sp(u)} (X-\mu)\right) \times Q\right)(u) = 0$

  car $u - r\,Id$ est inversible

  Or, on vient de trouver un polynôme annulateur de degré strict inf. à Π_u, et qui est non-constant

  ce qui est ABS

  $\Rightarrow$ $r \in Sp(u)$

- Un endomorphisme est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé simple

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

ALORS

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_u \text{ scindé simple} \\ \text{ou} \\ \text{Il existe un polynôme annulateur scindé simple} \end{cases}$$

Demo

$\Rightarrow$: u diag. $\Rightarrow$ Π_u scindé

Posons $P_0 = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ qui est un produit de polynômes premiers entre eux

D'après le lemme de décomposition des noyaux : $\operatorname{Ker}(P_0(u)) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \operatorname{Ker}(u - \lambda Id)$

$= \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

$= E$ car u est diagonalisable

$\Rightarrow$ P_0 est annulateur de u

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\Pi_u \mid P_0$

et P_0 est scindé simple

D'où Π_u scindé simple

$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons Π_u scindé simple

Posons $\Pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ et donc d'après le lemme de décomposition des noyaux :

$$\operatorname{Ker}(\underbrace{\Pi_u(u)}_{=\tilde{0}}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \underbrace{\operatorname{Ker}(u - \lambda Id)}_{= E_\lambda(u)}$$

d'où $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

d'où u diagonalisable

- Si F est un sous-espace stable par u, le polynôme minimal de l'endo induit divise celui de u

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim. finie n. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un s.e.v u-stable

ALORS

$$\Pi_{u_{|F}} \mid \Pi_u$$

Démo

Le polynôme minimal de u est annulateur de $\hat{u}$ car $\forall x \in F$, $x \in E$ donc $\Pi_u(\hat{u})(x) = \Pi_u(u)(x)$
$= 0$

$\Rightarrow$ Π_u est annulateur de $\hat{u}$

$\Rightarrow$ $\Pi_{\hat{u}} \mid \Pi_u$

Définition des sous-espaces caractéristiques et traduction matricielle associée

Def. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Pour tout $\lambda \in Sp(u)$, on appelle sous-espace caractéristique à λ le sous-espace :

$$N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda Id)^{m_\lambda} \right)$$

avec m_λ la multiplicité de λ

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \chi_A$ scindé

On note alors $\chi_A = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ avec u l'endo associé à A.

Cayley-Hamilton + lemme de décomp. des noyaux $\Rightarrow$ $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} (u - \lambda Id)^{m_\lambda}$

d'où $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u)$

On peut alors construire une base de E, notée B, tq

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_1\end{matrix}}^{m_{\lambda_1}} & & (0) \\ & \ddots \;(*) & \\ (0) & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_p & (*) \\ & \lambda_p\end{matrix}}_{m_{\lambda_p}} \end{pmatrix}$$

avec $Sp(u) = [\lambda_1, \dots, \lambda_p]$

où u est trigo. sur chaque $N_\lambda(u)$

Groupe C

- **Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent**

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$ et u, v diagonalisables

Alors

$\exists \mathcal{B}$ une base de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient diagonales

Démo u est diag donc $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

Or u et v commutent donc les $(E_\lambda(u))_\lambda$ sont stables par v.

Dès lors, posons pour $\lambda \in Sp(u)$, $v_\lambda = v_{|E_\lambda(u)}$

Comme v est diagonalisable : les (v_λ) sont diagonalisables

$\left(\begin{array}{l} v \text{ diag} \Leftrightarrow \Pi_v \text{ scindé simple} \\ \text{et } \Pi_{v_\lambda} \mid \Pi_v \Rightarrow \Pi_{v_\lambda} \text{ scindé simple} \\ \qquad \Rightarrow v_\lambda \text{ diag} \end{array} \right)$

Ainsi, nous pouvons trouver une base de vecteurs propres de v_λ pour tout $\lambda \in Sp(u)$.

On pose alors $\mathcal{B}_\lambda$ une base de vecteurs propres de v_λ, donc une base de $E_\lambda(u)$.

De plus, les $(E_\lambda(u))$ sont par définition constitués de vect. propres de u associé à $\lambda \in Sp(u)$

Ainsi, $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de vect. propres de v, mais également de u !

On pose alors $\mathcal{B} = \bigsqcup_{\lambda \in Sp(u)} \mathcal{B}_\lambda$ une base de E et le tour est joué :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(\mathcal{B}_{\lambda_1}) & \cdots\cdots & u(\mathcal{B}_{\lambda_p}) \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & (0)\\ (0) & \ddots \; \lambda_1\end{matrix} & & (0) \\ \hline & \ddots & \\ \hline (0) & & \begin{matrix}\lambda_p & \\ & \ddots \; \lambda_p\end{matrix}\end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \mathcal{B}_{\lambda_1} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{\lambda_p}\end{matrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{array}{c} \begin{matrix} v(\mathcal{B}_{\lambda_1}) & \cdots\cdots & v(\mathcal{B}_{\lambda_p}) \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\mu_{1,1} & (0)\\ (0) & \ddots \; \mu_{1,q}\end{matrix} & & (0) \\ \hline & \ddots & \\ \hline (0) & & \begin{matrix}\mu_{p,1} & \\ & \ddots \; \mu_{p,r}\end{matrix}\end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \mathcal{B}_{\lambda_1} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{\lambda_p}\end{matrix}$$

D'où le résultat voulu

Lemme de décomposition des noyaux

Lemme. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux 2 à 2

ALORS

$$\mathrm{Ker}((P_1 \times \dots \times P_n)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_k(u))$$

Démo (avec Th. de Bézout admis)

Procédons par rec. sur n (nombre de polynômes dans le produit) :

$n=2$: D'après le th. de Bézout, $\exists\, U, V \in \mathbb{K}[X]$ tq $P_1 U + P_2 V = 1$ (A)

Montrons que la somme est directe : Soit $x \in \mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(u))$

Alors $((P_1 \times Q)(u))(x) = ((Q \times P_1)(u))(x)$
$= (Q \circ P_1(u))(x)$
$= Q(u) \circ \underbrace{P_1(u)(x)}_{=0}$
$= 0$

De mm, $(P_2 V)(u)(x) = 0$

or (A) $\Rightarrow (P_1 U)(u) + (P_2 V)(u) = \mathrm{Id}$

$\Rightarrow x = 0$

d'où la somme directe.

Montrons l'inclusion réciproque On a $P = P_1 \times P_2$

$\Rightarrow P(u) = P_1(u) \circ P_2(u)$
$= P_2(u) \circ P_1(u)$

d'où $\mathrm{Ker}(P_1(u)), \mathrm{Ker}(P_2(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) = \mathrm{Ker}(P(u))$

Montrons l'inclusion directe Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$ (B)

Posons $x_1 = P_1(u) \circ U(u)(x)$ et $x_2 = P_2(u) \circ V(u)(x)$

(A) $\Rightarrow x_1 + x_2 = x$

Ainsi,

$P_2(u)(x_1) = \underbrace{P_2(u) \circ P_1(u)}_{=P(u)} \circ U(u)(x) = 0 \iff P(u) \circ U(u)(x) = 0$

$\iff U(u) \circ P(u)(x) = 0$

ce qui est vérifié par (B)

$\Rightarrow x_1 \in \mathrm{Ker}(P_2)(u)$

Et de même, $x_2 \in \mathrm{Ker}(P_1)(u)$ on a alors bien $x = x_2 + x_1$
$\in \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$

D'où l'inclusion directe

D'où l'initialisation

$H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Nous venons de montrer que pour le produit de 2 pol. premiers entre eux, l'égalité est vérifiée. (C)

Or, $P_1, \dots, P_{n+1}$ sont premiers entre eux $\Rightarrow$ P_{n+1} est premier avec $P_1 \times \dots \times P_n$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Ker}((P_1 \times \dots \times P_{n+1})(u)) \overset{(C)}{=} \mathrm{Ker}(P_{n+1}(u)) \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}((P_1 \times \dots \times P_n)(u))}_{= \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_i(u)) \text{ par H.R}}$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

H_{n+1} vraie. Ce qui clôt la récurrence.

D'où le résultat voulu

Toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles

Prop. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

ALORS

$$\exists (M_p)_p \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \text{ tq } M_n \longrightarrow A$$

Démo

Posons pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$

Ainsi, $\mathrm{Det}(A_p) = \mathrm{Det}(A - \frac{1}{p} I_n)$

$= (-1)^n \mathrm{Det}(\frac{1}{p} I_n - A)$

$= (-1) \chi_A(\frac{1}{p})$

et χ_A dispose d'un nombre fini de racines ! A dispose d'un nbre fini de val. propres (dim. finie)

DONC $\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0$, $\chi_A(\frac{1}{p}) \neq 0$

i.e — , $\mathrm{Det}(A_p) \neq 0$

i.e — $A_p \in GL_n(\mathbb{R})$

On construit alors $(M_p)_p$ tq $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_p = \begin{cases} I_n & \text{si } p < p_0 \\ A_p & \text{sinon} \end{cases}$

On a bien $\begin{cases} (M_p)_p \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \\ M_p \longrightarrow A \end{cases}$

D'où le résultat voulu.

Si une matrice est inversible, son inverse est un polynôme en cette matrice

Prop. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$

Alors $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tq $A^{-1} = P(A)$

Démo

On a, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, que $\chi_A(A) = 0$ (A)

Notons $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

Ainsi, (A) $\Rightarrow$ $-a_0 I_n = \sum_{k=1}^{n} a_k A^k$ avec $a_0 = (-1)^n \underbrace{\mathrm{Det}(A)}_{\neq 0 \text{ par hyp}}$ cf. demo semaine d'avant

$\neq 0$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}$$

i.e $A^{-1} = P(A)$ avec $P = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k$

D'où le résultat voulu

Toute matrice est limite d'une suite de matrices diagonalisables

Prop. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Alors

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}} \text{ tq } A_n \longrightarrow A \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \text{ est diag.}$$

Démo

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow A$ trigonalisable

i.e $\quad A \approx \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_1 \end{matrix}}^{m_{\lambda_1}} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_p & (*) \\ (*) & \lambda_p \end{matrix}}_{m_{\lambda_p}} \end{pmatrix}$

Posons alors

$$B_n = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 + \frac{1}{n} & (*) \\ & \lambda_1 + \frac{m_{\lambda_1}}{n} \end{matrix} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{matrix} \lambda_p + \frac{1}{n} & (*) \\ & \lambda_p + \frac{m_{\lambda_p}}{n} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $n \gg 1$, $\forall \lambda, \mu \in Sp(A)$, $\forall (K_1, K_2) \in [\![1 ; m_\lambda]\!] \times [\![1 ; m_\mu]\!]$, $\quad \lambda + \frac{K_1}{n} \neq \mu + \frac{K_2}{n}$ ↳ raisonner avec des boules fermées sinon

$\Rightarrow$ pour $n \gg 1$, χ_{B_n} scindé simple

$\Rightarrow$ pour $n \gg 1$, B_n diagonalisable (notons $p_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall p \geq p_0$, B_p diag)

On pose alors $\quad A_p = \begin{cases} I_n & \text{si } p < p_0 \\ B_p & \text{sinon} \end{cases}$

On a bien que chaque A_p est diag. et $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$

D'où le résultat voulu.

Décomposition de Dunford avec démonstration de l'unicité

Th. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de <u>dim. finie</u> et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u scindé.

Alors

$\exists! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq
- $u = d + n$
- d diagonalisable
- n nilpotent
- d et n commutent

Démo

Pour $\lambda \in Sp(u)$, posons $N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id})^{m_\lambda} \right)$ le sous-espace caractéristique associé à λ.

EXISTENCE

Tout d'abord, d'après le th. de <u>Cayley-Hamilton</u> : $\chi_u(u) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = E$

or, par hypothèse, χ_u est scindé i.e $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ avec les $\left((X-\lambda)^{m_\lambda}\right)_{\lambda \in Sp(u)}$ sont premiers entre eux

donc, d'après le <u>lemme de décomposition des noyaux</u> :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u)$$

Dès lors, pour chaque $\lambda \in Sp(u)$, posons $d_\lambda = \lambda\, Id_{|N_\lambda(u)}$ qui sont bien déf., et évidemment diagonalisables sur $N_\lambda(u)$

Posons alors $d = \sum_{\lambda \in Sp(u)} d_\lambda$ afin d'obtenir un endo diagonalisable

et posons également $n = u - d$

→ Montrons que n est nilpotent : les $(N_\lambda(u))_\lambda$ étant stables par u et d, montrons que n est nilpotente sur chaque $(N_\lambda(u))_\lambda$

On a $N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda Id)^{m_\lambda}\right)$

$= \mathrm{Ker}\left((u - d_\lambda)^{m_\lambda}\right)$

$= \mathrm{Ker}\left((n_{|N_\lambda(u)})^{m_\lambda}\right)$

$\Rightarrow n_{|N_\lambda(u)}$ est nilpotent de nilindice m_λ

$\Rightarrow n = \sum_\lambda n_{|N_\lambda(u)}$ est bien nilpotent.

On a donc bien : $u = d + n$ ✓

d diagonalisable ✓

n nilpotent ✓

Montrons que d et n commutent bien. Pour cela, nous avons besoin d'un lemme

Lemme. Notons, pour $\lambda \in Sp(u)$, $Q_\lambda = \prod_{\substack{\mu \in Sp(u) \\ \mu \neq \lambda}} (X - \mu)^{m_\mu}$

Alors les $(Q_\lambda)_\lambda$ sont premiers entre eux dans leur ensemble donc, d'après le th. de Bézout :

$$\exists (U_\lambda)_{\lambda \in Sp(u)} \text{ tq } \sum_\lambda Q_\lambda U_\lambda = 1$$

On pose alors pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $p_\lambda = Q_\lambda U_\lambda(u)$

ALORS les (p_λ) sont des projecteurs sur les s.e.c et sont polynomiaux en u.

Démo → cf. fin de la démo principale

Ainsi, pour $\lambda \in Sp(u)$, $Q_\lambda U_\lambda(u)$ est polynomial en u $\Rightarrow Q_\lambda(u)$ est polynomial en u

$\Rightarrow \forall \mu \in Sp(u) \setminus \{\lambda\}$, $n_\mu = n_{|N_\mu(u)} = (u - \mu Id)^{m_\mu}$ est pol. en u.

$\Rightarrow n = \sum_\lambda n_\lambda$ est pol. en u

et $d = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda Id_{|N_\lambda(u)}$ est une homothétie → évidemment polynomial en u.

Ainsi, d et n sont polynomiaux en u, d'où le fait que d et n commutent.

D'où l'existence

UNICITÉ Soit (d', n') un autre couple qui convient.

Alors $d + n = d' + n' \iff d - d' = n' - n$

et
- $d - d'$ est diag. (car sont pol. en u, donc commutent, donc co-diagonalisables)
- $n - n'$ est nilpotent (commutent et sont tous les deux nilp)

Dès lors, la seule matrice diagonalisable et nilpotente étant la matrice nulle, on a $d - d' = n - n' = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = d' \\ n = n' \end{cases}$$

D'où l'unicité

Preuve du lemme

D'après le th. de Bézout donc, on a $\sum_{\lambda \in Sp(u)} p_\lambda = Id$

DONC, $\forall \lambda \in Sp(u)$, on a $\left(\sum_{\mu \in Sp(u)} p_\mu\right) \circ p_\lambda = p_\lambda$

or, $\forall \lambda \neq \mu \in Sp(u)$, on a $p_\mu \circ p_\lambda = 0$ car $p_\mu \circ p_\lambda = U_\mu U_\lambda \circ Q_\mu Q_\lambda(u)$

et $\begin{cases} \chi_u \mid Q_\mu Q_\lambda \\ \chi_u(u) = 0 \end{cases} \Rightarrow Q_\mu Q_\lambda(u) = 0$

Dès lors, on a $p_\lambda^2 = p_\lambda$. Il s'agit donc bien de projecteurs.

Enfin, <u>montrons que $Im(p_\lambda) = N_\lambda(u)$</u>

<u>$\subset$</u>: Soit $y \in Im(p_\lambda)$ i.e $\exists x \in E$ tq $y = p_\lambda(x)$

Alors, $(u - \lambda Id)^{m_\lambda}(y) = (u - \lambda Id)^{m_\lambda}(p_\lambda(x))$

$= \left((X-\lambda)^{m_\lambda} U_\lambda \times Q_\lambda(u)\right)(x)$

$= \left(U_\lambda \underbrace{(X-\lambda)^{m_\lambda} Q_\lambda}_{= \chi_u}(u)\right)(x)$

or $\chi_u(u) = 0$

$\Rightarrow y \in N_\lambda$

<u>$\supset$</u>: Réciproquement, soit $x \in N_\lambda(u)$

or, d'après le théorème de Bézout, $x = \sum_{\mu \in Sp(u)} p_\mu(x)$

or pour $\mu \neq \lambda$, on a $p_\mu(x) = U_\mu Q_\mu(u)(x)$

$= U_\mu(u) \circ \left(\prod_{\substack{\eta \in Sp(u) \\ \eta \neq \mu}} (u - \eta Id)^{m_\eta}\right)(x)$

$= U_\mu(u) \circ \left(\prod_{\substack{\eta \in Sp(u) \\ \eta \neq \mu, \lambda}} (u - \eta Id)^{m_\eta}\right) \underbrace{(u - \lambda Id)^{m_\lambda}(x)}_{= 0 \text{ car } x \in N_\lambda(u)}$

$= 0$

D'où, $x = p_\lambda(x)$
$\in Im(p_\lambda)$

Finalement, on a bien que les (p_λ) sont bien des projecteurs polynomiaux en u.

D'où le résultat voulu

- **Deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

Prop. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Alors

$$A \underset{\mathbb{C}}{\approx} B \quad \Rightarrow \quad A \underset{\mathbb{R}}{\approx} B$$

Démo Supposons donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = P^{-1} B P$

Notons $P = M + iN$ avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a $PA = BP \Rightarrow (M + iN)A = B(M + iN)$

$$\Rightarrow \begin{cases} MA = BM \\ NA = BN \end{cases}$$

(si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, c'est ciao)

Notons $Q(t) = M + tN \quad (t \in \mathbb{C})$

Ainsi, $Q(t) A = (M + tN) A$

$= MA + tNA$

$= BM + tBN$

$= B Q(t)$

donc $\forall t \in \mathbb{C}, \; Q(t) A = B Q(t)$

Posons $\varphi : t \longmapsto \mathrm{Det}(Q(t))$ (φ est pol. en t)

et $\varphi(i) = \mathrm{Det}(M + iN)$

$= \mathrm{Det}(P)$

$\neq 0$ car $P \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \varphi \neq \tilde{0}$

$\Rightarrow \varphi$ admet un nb fini de 0

$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq $\varphi(t_0) \neq 0$

i.e $Q(t_0) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Q(t_0) A = B Q(t_0)$ $\Rightarrow A = (Q(t_0))^{-1} B \, Q(t_0)$

$\Rightarrow A \underset{\mathbb{R}}{\approx} B$

D'où le résultat voulu.


RARE FOOTAGE OF ME
CROYANT QUE JE RELIRAI CE QUE
JE PRENDS EN PHOTO AU TABLEAU
imgflip.com