Colles MPi* Semaine n°5 du 02 au 06/10/2023 (Programme n°3)

Vallaeys Pascal

22 septembre 2023

Thème : Début de la réduction, orienté vers le polynôme caractéristique.

Ce thème sera travaillé sur deux semaines. Cette semaine principalement les concepts de base et les résultats concernant le polynôme caractéristique.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- TROUILLET François
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- Gobron Nicolo
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Drouillet Baptiste
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Oubninte Adil
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définitions de matrices semblables, montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. (démo)
- Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
- Une droite est stable si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre (démo)
- Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. (démo)
- $Card(sp(u)) \leq dim(E)$ (2 justifications dont une avec le polynôme caractéristique)
- Définition du polynôme caractéristique et lien avec les valeurs propres (démo)
- Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre, majoration avec la multiplicité de la valeur propre (démo)
- Exemple de matrice non diagonalisable sur le corps des réels puis sur le corps des complexes (démo)
- Diagonalisation de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 (deux méthodes, démo)
- Lien entre les valeurs propres et la trace et le déterminant dans le cas d'une matrice trigonalisable.(« démo »)
- L'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Le polynôme caractéristique est un polynôme, unitaire, de degré n, dont on connait les coefficients de degré n-1 et 0 (démo)
- Si le sev F est u-stable, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u (démo)
- Théorème fondamental de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique (démo !)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Un endo est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (démo)
- Réduction de la matrice circulante : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ (exemple de fin de cours).
- Une matrice A est nilpotente si et seulement si $Tr(A^k) = 0$ pour tout entier k non nul. (non fait en classe)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : (CCINP MP 2022)

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, sur la première colonne et sur la première ligne, puis des 0 partout ailleurs.

1. Montrer que A est diagonalisable

2. Cas $n = 2$: Calculer les éléments propres de A.

3. Cas $n \neq 2$:

a) Montrer que 1 est une valeur propre de A.

b) Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que 1, alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$. Expliciter les éléments propres de A.

c) Calculer le déterminant de A en fonction de n.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2022)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2021)
On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
A et B sont-elles semblables ?

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 5 : (CCINP MP 2022)
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X-a)(X-b)P' - nXP \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Prouver que u est diagonalisable et trouver ses espaces propres.

Exercice 6 : A quelle condition sur le réel α la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 : (CCINP MP 2022)
On note E l'ensemble $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et on définit l'application u telle que :
Pour tout $f \in E$, $u(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$ si $x > 0$ et $u(f)(0) = f(0)$
1)a) Montrer que pour tout $f \in E$, $u(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$
1)b) Pour tout $f \in E$, déterminer $u(f)'$
2)a) Montrer que $u \in L(E)$
2)b) Montrer que u est injective
2)c) u est-elle surjective ?
3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de u

Exercice 8 : (CCINP MP 2021)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit M$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
1. Soit f et g deux endomorphismes de E admettant chacun n valeurs propres distinctes. Montrer que si $fog = gof$, alors leurs vecteurs propres sont identiques.
2. a- Trouver une matrice A telle que $A^2 = M$.
b- Trouver toutes les matrices A telles que $A^2 = M$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[0,1]$, telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.
1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que pour $\omega > 0$, $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$.

Exercice 10 : (Mines MP 2022) (15 min de préparation, 15 min de passage)
Soit $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$, On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

1. Étudier la convergence de la suite. 2. On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ l'application telle que :
$\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = f(ax+b)$
a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
b) Montrer que ϕ est bijective.

c) Soit λ une valeur propre de ϕ différente de 1 et f_λ un vecteur propre associé.
(i) Montrer que $f_\lambda(\frac{b}{1-a}) = 0$ et que $\lambda \in]-1, 1[\setminus \{0\}$.
(ii) Montrer que f'_λ est aussi un vecteur propre.
d) Déterminer les vecteurs propres de ϕ.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Utiliser la question 1. pour la 2.c) et observer les valeurs propres apparaissant si λ est valeur propre, et les conséquences sur les vecteurs propres (on ne peut engendrer qu'un nombre fini de valeurs propres, ce qui donne une condition sur une certaine dérivée du vecteur propre, ce qui permet de déterminer sa nature puis sa forme).

Exercice 11 : (Mines-Ponts 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
b) Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 12 : (Mines MP 2022)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
Montrer que u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ Tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 13 : (Mines MP 2022)
Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'aucune matrice de cette base ne soit diagonalisable.

Exercice 14 : (Mines MP 2021)
Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u l'application qui à f de E associe $x \mapsto f(px+q)$, avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
1) Montrer que u est un automorphisme de E.
2) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $] - 1, 1]$.
3) Montrer que si f est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
4) Trouver les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

Exercice 15 : Déterminer les matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ telles que M^2 et M soient semblables.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 59, 63 (en admettant qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable), 67, 69, 70, 73, 83, 101..

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : réduction. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°3
- Groupe 2 : Programme n°3
- Groupe 3 : Programme n°3
- Groupe 4 : Programme n°3
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine

- Groupe 9 : Programme n°2
- Groupe 10 : Programme n°2
- Groupe 11 : Programme n°2
- Groupe 12 : Programme n°2
- Groupe 13 : Programme n°2
- Groupe 14 : Programme n°2
- Groupe 15 : Programme n°2
- Groupe 16 : Programme n°2