TD quantique

Quanton dans un potentiel

1 Marche de potentiel

(CCINP MP 2021) On étudie un quanton de masse m et d'énergie $E > 0$, qui rencontre une marche de potentiel en $x = 0$ en venant de $-\infty$. La hauteur de la marche est $V_0 > 0$.

1. Donnez l'équation vérifiée par la fonction d'onde spatiale φ.
2. Résolvez-la dans les milieux $x < 0$ et $x > 0$.
3. Déterminez r et t, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.
4. Par analogie avec les ondes électromagnétiques, vous admettrez qu'il existe un *coefficient de réflexion en probabilité* $R = |r|^2$ et un *coefficient de transmission en probabilité* T tel que $R + T = 1$. Application numérique pour $V_0 = 8E$. Commentez.

Données : $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J s ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $E = 1$ eV.

2 Niveaux d'énergie du puits infini

On considère un quanton de masse m confiné dans un puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie et de largeur a.

1. Sans calcul, représentez l'allure de la fonction d'onde pour les trois premiers niveaux d'énergie du quanton.
2. Déduisez-en, dans chaque cas, l'expression de la longueur d'onde de de Broglie du quanton en fonction de a, $\hbar$ et m, puis la valeur de l'énergie E correspondante.
3. En généralisant, retrouvez l'expression de l'énergie E_n du n^{e} niveau en fonction de n, a, $\hbar$ et m.
4. Une couche de semi-conducteur GaAs est prise en sandwich entre deux couches de GaAlAs. Un électron du semi-conducteur est alors modélisé comme se trouvant dans le potentiel des questions précédentes.
   Déterminez la longueur d'onde du rayonnement émis lorsqu'il se désexcite du premier état excité vers le fondamental avec $a = 3$ nm. Vous prendrez pour masse la valeur $m^* = 0{,}067m$, avec $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg, cette valeur prenant en compte les interactions de l'électrons avec le milieu.

3 Rebond quantique

(TPE EIVP MP 2016) Un quanton d'énergie $E > 0$ arrive sur une « falaise de potentiel » $0 \to V_0$, avec $V_0 < 0$.

1. Donnez le signe de son énergie. Que prévoit la mécanique classique ?
2. Donnez la forme générale de la solution en état stationnaire ainsi que les conditions de raccordement.
3. Calculez la probabilité qu'un quanton d'énergie $-V_0/2$ fasse demi-tour (« rebond quantique »).

4 États non stationnaires du puits infini

Un quanton de masse m est confiné dans un puits de potentiel infini localisé sur l'intervalle $x \in [0, a]$. On rappelle l'expression de la fonction d'onde spatiale associée à un état stationnaire d'énergie E_n donnée :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

1. Description d'un état stationnaire.

(a) Exprimez E_n. En posant $E_1 = \hbar\omega_0$, exprimez ω_0. Déduisez-en E_n fonction de n, $\hbar$ et ω_0.
(b) Donnez l'expression de la fonction d'onde $\psi_n(x,t)$ du quanton avec la convention $\psi(x, t=0) = \varphi_n(x)$.

2. Description d'un état non stationnaire. Le quanton est maintenant dans un état de superposition décrit par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ telle que :

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\big) \tag{2}$$

(a) Donnez l'expression de $\psi(x,t)$ pour $t > 0$.
(b) On définit les deux états suivants :

$$\varphi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\big) \tag{3}$$

$$\varphi_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\big) \tag{4}$$

Tracez les densités de probabilité de présence associées aux états φ_1, φ_2, φ_g et φ_d. Commentez.
(c) Exprimez $\psi(x,t)$ en fonction de $\varphi_g(x)$ et $\varphi_d(x)$. Déduisez-en l'expression de la densité de probabilité de présence du quanton dans cet état. Montrez qu'elle oscille à une fréquence ν que vous exprimerez en fonction de h et ω_0 puis en fonction de E_1, E_2 et h.