Colles MPi* Semaine n°7 du 16 au 20/10/2023 (Programme n°4)

Vallaeys Pascal

2 octobre 2023

Thème : Fin de la réduction, orienté vers le polynôme minimal.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- Gobron Nicolo
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Drouillet Baptiste
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Montfort Pierig
- Robert Xavier

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Si deux endomorphismes commutent, le noyau, l'image et les s.e.p. de l'un sont stables par l'autre.(démo)

- En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul (démo)
- Définition du polynôme minimal, en dimension finie.
- Lien entre spectre et polynôme annulateur (démo)
- Théorème de Cayley Hamilton (démo pour n=2)
- Lemme de décomposition des noyaux.
- Si u est diagonalisable, tout endo induit sur un sous-espace stable l'est. (démo)
- Caractérisation des endo trigonalisables par le polynôme minimal ou un polynôme annulateur.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Existence et unicité du polynôme minimal en dimension finie (démo)
- Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur (démo)
- Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul (démo)
- Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal (démo)
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple (démo)
- Si F est un sous-espace stable par u, le polynôme minimal de l'endo induit divise celui de u (démo)
- Définition des sous-espaces caractéristiques et traduction matricielle associée.

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent (démo HP)
- Exemple d'endomorphisme n'admettant pas de polynôme annulateur non nul. (démo)
- Lemme de décomposition des noyaux (démo, avec le théorème de Bézout admis).
- Dans $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles. (démo HP)
- Si une matrice est inversible son inverse est un polynôme en cette matrice.(démo HP)
- Dans $M_n(\mathbb{C})$, toute matrice est limite d'une suite de matrices diagonalisables. (démo HP)
- Décomposition de Dunford (HP ?), avec démonstration de l'unicité. (démo HP)
- Deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$. (démo HP)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + I_n = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier.

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2022)

Soit $a_1, \dots, a_n$ n réels non tous nuls. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Quel est le rang de A ? Que peut-on en déduire sur son spectre ?
3. Calculer A^2. En déduire le spectre et le polynôme caractéristique de A.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
1) Montrer que f n'admet pas de valeur propre réelle et montrer que f est bijectif.
2) En déduire que la dimension de E est paire.
3) Soit u un vecteur non nul. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable par f.
4) On prend $n = 4$. Montrer l'existence de deux vecteurs u, v tels que $(u, f(u), v, f(v))$ soit une base de E.
5) Généraliser ce résultat.

Exercice 4 : (CCINP MP 2021)
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u \neq 0$ et $u^3 + u = 0$.
1. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.
3. Montrer que u n'est pas injective.
On raisonnera par l'absurde en utilisant le polynôme minimal.
4. Montrer que $\mathrm{rg}\, u = 2$.

5. ??

Exercice 5 : (CCINP MP 2021)
On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
1) Diagonaliser A.
2) Soit M une matrice telle que $M^2 + M = A$.
a. Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont 1, 2, -2, -3.
b. Montrer que M est diagonalisable
3) Quelle est la forme de ces matrices M ?
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Pour la question 2, prendre λ une valeur propre de M et X un vecteur propre pour cette valeur propre, et les injecteur dans l'équation de M.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 6 : (Mines MP 2022)
Un endomorphisme f est dit cyclique dans E tel que $\dim E = n$, si :
$\exists\, x_0 \in E : \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)) = E$.
1. Soit g un endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathbb{R}^3$ soit :
$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
Montrer que g est cyclique et diagonalisable.
2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 7 : (Mines MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère la matrice B suivante $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
1. Compare les spectres de A et B.
2. Trouve une condition sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 8 : (Mines télécom MP 2022)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.
Montrer que A est diagonalisable.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Utiliser un polynôme annulateur de A.

Exercice 9 : (Mines MP 2022)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe P polynôme annulateur de f vérifiant : $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Après avoir écrit $P = XQ$, remarquer que X et Q sont premiers entre eux.

Exercice 10 : (Mines MP 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Soit ϕ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_A(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.
1. Étudier les sous-espaces propres et la diagonalisabilité de ϕ_A.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation $\phi_A(M) = B$.

Exercice 11 : (Centrale MP 2021)
1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0_n\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 12 : (Mines MP 2021)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que (A et B ont une valeur propre commune) $\Leftrightarrow$ ($\exists P \neq 0$, tel que $AP = PB$)

Exercice 13 : (X MP)
Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que : $\exists q \in \mathbb{N}^* / u^q = Id$. Montrer que $\dim(Ker\,(u - Id)) = \frac{1}{q} \sum\limits_{k=1}^{q} Tr\left(u^k\right)$.

Exercice 14 : (Mines MP 2022)
Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'aucune matrice de cette base ne soit diagonalisable.

Exercice 15 : (Mines MP 2021)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = -M$ et $\mathrm{rg}(M) = 2n$.
1) M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$? Préciser les valeurs propres et la dimension des espaces propres.
2) Montrer que dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R}), M \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 : (ENS MP 2021)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable, et $P'(A)$ soit inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 17 : (Mines MP 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Montrer que A et $-A$ sont semblables si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 18 : (Centrale MP 2021)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, h \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tels que $h \circ f - f \circ h = 2f$.
1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ h \circ f^k - f^k \circ h = 2kf^k$.
2. En déduire que f est nilpotent, puis qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$ et $h(x) = \lambda x$.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 62,72,88,91,93.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : réduction. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°4
- Groupe 2 : Programme n°4
- Groupe 3 : Programme n°4
- Groupe 4 : Programme n°4
- Groupe 5 : Programme n°4
- Groupe 6 : Programme n°4
- Groupe 7 : Programme n°4
- Groupe 8 : Programme n°4
- Groupe 9 : Programme n°4
- Groupe 10 : Programme n°4
- Groupe 11 : Programme n°4
- Groupe 12 : Programme n°4

- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine