Khôlles : Intégration

- 11 - 15 Décembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de cours - Tout groupe

1.1 Définition d'une intégrale convergente et définition d'une fonction intégrable sur un intervalle.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $I = [a, +\infty[$, $f : I \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^0$ ou $\mathscr{C}^{PM}$.

On dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)dt$ existe et est finie.

On note alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)dt$.

On dit qu'il s'agit d'une intégrale impropre / généralisée.

Définition

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction $\mathscr{C}^0$ ou $\mathscr{C}^{PM}$.
On dit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

(i.e $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \quad$ CVA)

On étend de même ces définitions lorsque $I = [a, b]$, $]-\infty, a] \cdots$

1.2 L'absolue convergence implique la convergence (Démo)

Proposition

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{PM}$.

Alors, f intégrable sur $[a, +\infty[\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ CV.

i.e $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ABS CV $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ CV

Preuve :

$\forall t \in [a, +\infty[$, on note $f^+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f^-(t) = \min(f(t), 0)$.

Ainsi, $\forall t \in [a, \infty[$, $\begin{cases} f^+(t) + f^-(t) = f(t) \\ f^+(t) - f^-(t) = |f(t)| \end{cases}$.

$\forall t \in [a, \infty[, 0 \leqslant f^+(t) \leqslant |f(t)|$. Or, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ CV, donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^+(t)dt$ CV.

Idem, $\forall t \in [a, \infty[, 0 \leqslant -f^-(t) \leqslant |f(t)|$. Or, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ CV, donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^-(t)dt$ CV.

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f^+(t) + f^-(t)dt$ CV : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ CV.

1.3 Intégrales de Riemann en 0 et $+\infty$ (Démo)

Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ CV si et seulement si $\alpha > 1$.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ CV $\iff \alpha < 1$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de $0 \iff \alpha < 1$
3. $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \left|\left(\dfrac{1}{t-a}\right)^\alpha\right|$ est intégrable au voisinage de $a \iff \alpha < 1$

Preuve :

En $+\infty$:

Soit $A > 1$, $\alpha \neq 1$. $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^A t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^A = \frac{1}{1-\alpha}\left[A^{1-\alpha} - 1\right]$

$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$. Donc, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Au voisinage de 0 / d'un point a :

Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} \text{ si } & \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Dans les deux cas, $\displaystyle\int_a^b t^{-1} dt = \ln(b) - \ln(a)$, qui diverge dans les deux cas présentés.

1.4 Théorèmes de comparaison pour justifier l'intégrabilité (Démo)

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$, $f, g \in \mathscr{C}^{PM}(I, \mathbb{R})$. On suppose f et g positives. Alors :

1. • $\forall x \in I, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
   • g Intégrable sur I

   $\Rightarrow$ f Intégrable sur I

2. • $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$
   • g Intégrable sur I

   $\Rightarrow$ f Intégrable sur I

3. • $f(x) = o(g(x))$
   • g Intégrable sur I

   $\Rightarrow$ f Intégrable sur I

4. • $f(x) \sim g(x)$

   $\Rightarrow$ [f Intégrable sur I] $\Longleftrightarrow$ [g Intégrable sur I]

Preuve :

1. Hypothèses : $\forall x \in I, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et g Intégrable sur I.
   Soit $A > a$. On pose $K(A) = \displaystyle\int_a^A f(t)dt$ et $J(A) = \displaystyle\int_a^A g(t)dt$
   - K et J existent car f et g sont $\mathscr{C}^{PM}$ sur I
   - $A \mapsto K(A)$ est $A \mapsto J(A)$ sont croissantes car $f, g \geqslant 0$
   - g Intégrable $\Rightarrow \displaystyle\lim_{A \to +\infty} J(A)$ existe et est finie
   - J Croissante $\Rightarrow \forall A \in [a, +\infty[, J(A) \leqslant \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt.$

   On a pour tout A : $K(A) \leqslant J(A) \leqslant \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt.$
   Donc, $A \mapsto K(A)$ est croissante et majorée donc converge : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} K(A)$ existe et est finie.
   $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ CV $\Rightarrow$ f est intégrable sur I, car $f \geqslant 0$.

2. Si $f(t) = \mathcal{O}(g(t)) \Rightarrow \exists \alpha > 0, \exists B > 0, \forall t \geqslant B, 0 \leqslant f(t) \leqslant \alpha g(t)$.
   Or, g est intégrable sur I. D'après 1., $\Rightarrow$ f est intégrable sur I.

3. $f(t) = o(g(t)) \Rightarrow f(t) = \mathcal{O}(g(t)) \Rightarrow$ f intégrable sur I

4. $f(t) \sim g(t) \Rightarrow f(t) = g(t) + o(g(t))$ et $g(t) = f(t) + o(f(t))$.
   Nous avons donc [f Intégrable sur I] $\Longleftrightarrow$ [g Intégrable sur I]

1.5 Théorème de changement de variable

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application $\mathscr{C}^{PM}$. Soit $\varphi : J \to I$, bijection $\mathscr{C}^1$ croissante.

Alors, $\int_I f(x)dt$ et $\int_J \varphi'(t)f(\varphi(t))dt$ sont de même nature.

Si elles convergent : $\int_I f(x)dt = \int_J \varphi'(t) \times (f \circ \varphi)(t)dt$

1.6 Théorème d'intégration par parties

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I.

Si deux des trois quantités : $\int_a^b u'v$, $[uv]_a^b$, $\int_a^b uv'$ convergent, alors la troisième également.

De plus, nous avons $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

où $[u(t)v(t)]_a^b = \lim\limits_{t\to b^-} u(t)v(t) - \lim\limits_{t\to a^+} u(t)v(t)$

1.7 Théorème de convergence dominée

Théorème de Convergence dominée

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. $(f_n)_n \in \mathbb{F}(I, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$.

Hypothèses :

H.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^{PM}$ sur I

H.2) $(f_n)_n$ Converge Simplement vers g sur I, avec g $\mathscr{C}^{PM}$ sur I.

H.3) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^{PM}$ et Intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$

Conclusions :

C.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n intégrable sur I, et g intégrable sur I

C.2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_I g(t)dt$

1.8 Théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions (ATTENTION : il y a un nouveau théorème pour lequel les fonctions doivent être positives, ainsi que l'ancienne version).

Théorème Intégration Terme à Terme des séries de fonctions (ANCIENNE VERSION)

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. $(f_n)_n \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Hypothèses :

H.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^{PM}$ et Intégrable sur I.

H.2) $\sum_n f_n$ Converge Simplement sur I avec S qui est $\mathscr{C}^{PM}$ sur I

H.3) $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ Converge.

Conclusions :

C.1) S est intégrable sur I

C.2) $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$

Théorème Intégration Terme à Terme des séries de fonctions (NOUVELLE VERSION)

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. $(f_n)_n \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Hypothèses :

H.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^{PM}$ et Intégrable sur I.

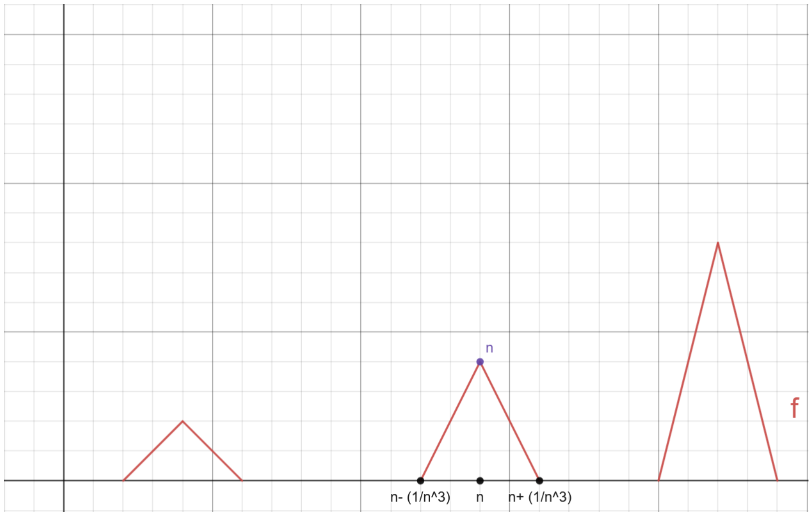
H.2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$

H.3) $\sum_n f_n$ Converge Simplement sur I avec S qui est $\mathscr{C}^{PM}$ sur I

C.1) $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Justifier que l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ n'implique pas que la fonction tende vers 0



Exemple

Soit $A \geqslant 1$. $\exists n \in \mathbb{N},\ a \leqslant n + \dfrac{1}{n^3}$.

$I_A = \displaystyle\int_0^A f(t)dt \leqslant \int_0^{n+1} f(t)dt$ car $f \geqslant 0$

$\Rightarrow\ I_A \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi, I_A est croissante et majorée, donc converge. $\Rightarrow \lim\limits_{A \to +\infty} I_A$ existe et est finie, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$, mais $f(t) \underset{t \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

2.2 Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente, non absolument convergente

Exemple

On pose $J_n = \displaystyle\int_{2\pi}^{(2+n)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{(2+k)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t}_{u_k}$.

Montrons que $\displaystyle\sum_n u_k$ DV.

Posons $v = t-(2+k)\pi : u_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\sin(v+(2+k)\pi)|}{v+(2+k)\pi}\mathrm{d}v = \int_0^{\pi} \frac{\left|(-1)^k \sin(v)\right|}{v+(2+k)\pi}\mathrm{d}t$

Alors, $u_\geqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{(2+k+1)\pi}\mathrm{d}v = \frac{1}{(3+k)\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{(3+k)\pi}$

Or, $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \geqslant \dfrac{2}{(3+k)\pi} \sim \dfrac{2}{k\pi}$, ce qui est le terme général d'une série divergente. Donc $\displaystyle\sum_n u_n$ DV.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty$ (car les $u_k>0$).

Dès lors, en posant $x_n = (2+n)\pi$, $I_{x_n} \to +\infty$, donc ne tend pas vers une limite finie. $\displaystyle\int_{2\pi}^{(2+n)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t$ DV.

Montrons ensuite la convergence de l'intégrale :

Posons $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. Alors, f est $\mathscr{C}^0$ sur $]0,+\infty[$.
Cependant, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$. i.e $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$, on prolonge ainsi par continuité en 0.

f est alors $\mathscr{C}^0$ sur $[0,1] \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ CV.

Montrons alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ CV :

$\forall A \geqslant 1, I(A) = \displaystyle\int_1^A f(t)\mathrm{d}t$. $\dfrac{1}{t}$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[1,A]$, et $\sin(t)$ est $\mathscr{C}^{+\infty}$.
Par IPP :

$$\begin{aligned} I(A) &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A + \int_1^A -\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - J(A) \end{aligned}$$

$\forall t \in]1,+\infty], \left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Or, $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty \Rightarrow \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ CV $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} J(x)$ existe et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{A\to+\infty} I(A) = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV.

2.3 Théorème de changement de variable (Démo)

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application $\mathscr{C}^{PM}$. Soit $\varphi : J \to I$, bijection $\mathscr{C}^1$ croissante.

Alors, $\int_I f(x)dt$ et $\int_J \varphi'(t)f(\varphi(t))dt$ sont de même nature.

Si elles convergent : $\int_I f(x)dt = \int_J \varphi'(t) \times (f \circ \varphi)(t)dt$

Preuve :

$I = [a, b[$, $J = [c, d[$

Soit $\varepsilon > 0$. $\int_c^{d-\varepsilon} \varphi'(t) \times f \circ \varphi(t)dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(d-\varepsilon} f(x)dx$ (changement de variable sur un segment).

Or, φ est une bijection $\mathscr{C}^1$ croissante, $\varphi(c) = a$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varphi(d-\varepsilon) = b$.

Si $\int_a^b f(x)dx$ converge, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_c^{d-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

$\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_c^{d-\varepsilon} \varphi'(t) \times f \circ \varphi(t)dt$ existe et est finie : $\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_c^{d-\varepsilon} \varphi'(t) \times f \circ \varphi(t)dt$ CV + égalité.

Idem sur $]a, b]$ et $]a, b[$. Idem si φ est décroissante en inversant les bornes.

2.4 Théorème d'intégration par parties (Démo)

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I.

Si deux des trois quantités : $\int_a^b u'v$, $[uv]_a^b$, $\int_a^b uv'$ convergent, alors la troisième également.

De plus, nous avons $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

où $[u(t)v(t)]_a^b = \lim\limits_{t \to b^-} u(t)v(t) - \lim\limits_{t \to a^+} u(t)v(t)$

Preuve :

Soit $I = [a, b[$, soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^{b-\varepsilon} u(t)v'(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^{b-\varepsilon} - \int_a^{b-\varepsilon} u'(t)v(t)dt \\
&= u(b-\varepsilon)v(b-\varepsilon) - \int_a^{b-\varepsilon} u'(t)v(t)dt \\
(\varepsilon \to 0^+) \quad &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt
\end{aligned}$$

2.5 Théorème d'intégration des relations de comparaisons (cas convergent et divergent)

Proposition Cas Divergent

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions $\mathscr{C}^{PM}$ avec g positive.
$I = [a, +\infty[$

1.
   - g non intégrable au voisinage de $+\infty$
   - $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

   $$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

2.
   - g non intégrable au voisinage de $+\infty$
   - $f(x) = o(g(x))$

   $$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

3.
   - g non intégrable au voisinage de $+\infty$
   - $f(x) \sim g(x)$

   $$\Rightarrow \begin{cases} \text{f non intégrable au voisinage de } +\infty \\ \int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt \end{cases}$$

Proposition Cas Convergent

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions $\mathscr{C}^{PM}$ avec g positive.
$I = [a, +\infty[$

1.
   - g intégrable au voisinage de $+\infty$
   - $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

   $$\Rightarrow \begin{cases} \text{f intégrable au voisinage de } +\infty \\ \int_x^{+\infty} f(t)dt = \mathcal{O}\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right) \end{cases}$$

2.
   - g intégrable au voisinage de $+\infty$
   - $f(x) = o(g(x))$

   $$\Rightarrow \begin{cases} \text{f intégrable au voisinage de } +\infty \\ \int_x^{+\infty} f(t)dt = \wr\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right) \end{cases}$$

3.
   - g intégrable au voisinage de $+\infty$
   - $f(x) \sim g(x)$

   $$\Rightarrow \begin{cases} \text{f intégrable au voisinage de } +\infty \iff \text{g intégrable au voisinage de } +\infty \\ \int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \int_x^{+\infty} g(t)dt \end{cases}$$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Démonstration des théorèmes d'intégration des relations de comparaison

Preuve **: Cas divergent, 1 Uniquement** ***:***

$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \Rightarrow \exists K>0, \exists A \in [a, +\infty[, \forall x \geqslant A, |f(x)| \leqslant K|g(x)|$.
Donc, $\forall x \geqslant A$:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f(t)dt\right| &= \left|\int_a^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt\right| \\ &\leqslant \underbrace{\left|\int_a^A f(t)dt\right|}_{\text{cte} = \alpha} + \left|\int_A^x f(t)dt\right| \\ &\leqslant \alpha + \int_A^x |f(t)|\,dt \\ &\leqslant \alpha + K\int_A^x g(t)dt\end{aligned}$$

On a également $\alpha = \mathcal{O}(\int_A^x g(t)dt)$ car g n'est pas intégrable ($\rightarrow +\infty$).
Donc, $\int_a^x f(t)dt = \mathcal{O}(\int_a^x g(t)dt)$

Direct pour les o et $\sim$. De même pour le cas convergent.

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$.

Du fait que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ces deux quantités possèdent la même limite, d'où $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par somme de limites.

Question 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle xf(2x) = \int_0^x 1dt \times f(2x) = \int_0^x f(2x)dt = \int_x^{2x} f(2x)dt$.

Or, par décroissance de f : $\forall t \leqslant x,\ f(t) \geqslant f(x) \Rightarrow \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \geqslant \int_x^{2x} f(2x)dt = xf(2x)$.

Or, de même que précédemment, $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \to 0$, donc $xf(2x) \to 0$ (il est assez immédiat que f est positive car intégrable alors que décroissante). En multipliant par deux, il vient $2xf(2x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow uf(u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$.

4.2 Exercice 2

Montrons la convergence de ces deux intégrales :

1. L'intégrande constitue bien une application continue sur $]0,1]$ (pas de problèmes en 1). Or, en $x=0$, $-e^{-x}\ln(x)$ se comporte comme $\ln(x)$ car l'exponentielle vaut exactement 1 en $x=0$. Ainsi, $-e^{-x}\ln(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, par théorème des croissances comparées. Or, l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est bien intégrable au voisinage de zéro, car est de Riemann avec $\alpha<1$. Ainsi, l'intégrale de gauche converge.
2. Idem, aucun problème en $x=1$, et l'intégrande réalise bien une application continue sur $]0,1]$. Montrons qu'il est possible de prolonger l'application $x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ en $x=0$: $e^{-x} = 1-x+\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)$, donc $\dfrac{1-e^{-x}}{x} = 1+\dfrac{x}{2}+\mathcal{O}(x^2)$ au voisinage de zéro, donc cette application est prolongeable par continuité en $x=0$ en lui assignant la valeur 1 : Ceci garantit l'existence de l'intégrale de droite.

Notons qu'une intégration par parties dans l'intégrale de gauche semble être une première étape pertinente : Les deux fonctions proposées sont bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$, et la dérivée de log donnera le $^1/_x$:

Sous réserve d'existence, notons $\displaystyle\int_0^1 -e^{-x}\ln(x)dx = -\left[(1-e^{-x})\ln(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$

(nous intégrons e^{-x} en $1-e^{-x}$). En particulier, l'existence des deux intégrales assure la légitimité de l'application du théorème d'intégration par parties. Ceci nous donne bien l'égalité :

$$\int_0^1 -e^{-x}\ln(x)dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$$

4.3 Exercice 3

Appliquons le théorème de Convergence Dominée : Notons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}$.

- Chaque f_n est bien continue (par Morceaux) sur $\mathbb{R}$
- Notons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ ($x/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ à x fixé). Or, cette application reste bien Continue (par Morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- La domination est évidente : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(t) \leqslant 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{e}{1+x^2}$.

  Ainsi, en posant $\varphi : x \mapsto \dfrac{e}{1+x^2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant |\varphi(x)|$, et φ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$

Nous pouvons ainsi inverser limite et intégrale : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

4.4 Exercice 4

De même que l'exercice précédent : Appliquons le théorème de Convergence Dominée : Notons seulement cette fois que la fonction limite de l'intégrande correspond à l'application $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \pi/2 \text{ si } x \in]0,1[\\ \pi/2e \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Posons $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \pi/2 \text{ sur } [0,1] \\ \pi/2 e^{-x} \text{ sur }]1,+\infty[\end{cases}$. Alors φ est bien $\mathscr{C}^{PM}$, Intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et domine bien chaque fonction f_n.

Le théorème de Convergence dominée donne donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx = \int_0^1 \pi/2 dx = \frac{\pi}{2}$ (La valeur d'une intégrale n'est pas affecté par des valeurs ponctuelles de son intégrande, donc les cas $x = 0$ et $x = 1$ n'ont ici aucune importance).

4.5 Exercice 5

Le fait que f soit bien définie sur $\mathbb{R}_+$ est immédiat : Le terme exponentiel est dépendant de t uniquement, donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{-t} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+t^2}$.

De plus, le terme général se trouve être positif et inférieur à $\dfrac{1}{n^2}$, or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge vers $\pi^2/6$. Ainsi, notre série définie par $f(t)$ existe bien pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Cette majoration nous permet de plus d'affirmer que $f(t) \leqslant e^{-t}\pi^2/6$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or, $t \mapsto e^{-t}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f est bien définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4.6 Exercice 6

Un changement de variable semble ici adapté : Montrons tout d'abord l'existence de ces intégrales :

Soit $x \geqslant 1$. Alors $x^n \geqslant x \Rightarrow \ e^{-x^n} \leqslant e^{-x}$. Or, $x \mapsto e^{-x}$ est bien intégrable sur $[1, +\infty[$ (est de plus bien continue). Il en va de même pour $\dfrac{e^{-u}}{u} \leqslant e^{-u}$.

Ainsi, ces intégrales sont bien définies : Nous pouvons appliquer le changement de variables $u = x^n,\ x = u^{1/n},\ dx = \dfrac{du}{n} u^{1/n-1}$.

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n} du$. Or, notre équivalent doit faire disparaître le terme en $u^{1/n}$. Nous devons donc montrer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} du \sim \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ afin d'avoir $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

Or, la quantité $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = J$ est une constante réelle (indépendante de n). Montrer l'équivalent revient alors à démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} du \xrightarrow[n \to +\infty]{} J$.

Pour ce faire, nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée :

H.1) Les $f_n : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}}$ sont bien des applications continues sur $[1, +\infty[$

H.2) Nous avons bien convergence simple de (f_n) vers $f : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$, application Continue

H.3) En prenant $n = 1$, nous obtenons une dominatrice grâce à la majoration $\forall u \in [1, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u^{\frac{1}{n}} \leqslant u$. Posons donc $\varphi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u} u = e^{-u}$, qui est bien Continue et Intégrable sur $[1, +\infty[$.

Le théorème de Convergence dominée s'applique alors et donne bien $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} du \xrightarrow[n \to +\infty]{} J$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} du \sim J$. Finalement

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

4.7 Exercice 7

Nous remarquons que la fonction Γ d'Euler apparaît facilement après une interversion série-intégrale : Montrons que cette inversion est licite :

Nous pouvons appliquer l'ancien théorème d'interversion :

H.1) Les $f_n : x \mapsto e^{-x} a_n x^n$ Sont bien des applications Continues et Intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

H.2) Nous avons bien convergence simple de $\displaystyle\sum_n f_n$: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour n assez grand, $n! \geqslant x^n$. Nous avons donc convergence absolue de $\displaystyle\sum_n f_n(x)$, d'où la convergence simple de la série de fonctions associée.

H.3) Ceci nous permet de plus de conclure que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |e^{-x} x^n a_n| dx$ converge bien, car vaut exactement $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n n!$.

En utilisant donc l'ancien théorème d'intégration terme-à-terme des séries de fonctions, il vient $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n dx = \sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} a_n x^n e^{-x} dx = \sum_{n \geqslant 0} a_n n!$ (en utilisant la défintion de la fonction Γ, et sa propriété factorielle).

4.8 Exercice 8

Utilisons le théorème fondamental de l'Analyse : $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, donc $f(x) \to f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt$ (qui est donc une constante du fait de l'intégrabilité de f'). f admet donc une limite en $+\infty$.

Or, f est intégrable, si $f(x) \not\to 0$, alors f ne serait pas intégrable, donc $f(x) \to 0$.

4.9 Exercice 9

Question a. Les intégrandes de ces deux intégrales constituent bien des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, en $x = 0$, les intégrandes sont de l'ordre de $\ln(x)$. Nous pouvons de ce fait affirmer que les intégrandes sont toutes deux des $o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, or cette quantité se trouve intégrable au voisinage de zéro, car est de Riemann avec $\alpha<1$, d'où l'intégrabilité de ces deux fonctions au voisinage de zéro.

En $+\infty$, nous pouvons montrer que ces quantités sont toutes deux des $o(x^{-3/2})$, et cette quantité reste bien intégrable au voisinage de l'infini car est de Riemann avec $\alpha>1$.

Question b. Afin d'avoir $I = 0$, il faut que la partie négative de l'intégrale compense la partie positive : Ceci nous invite à découper l'intégrale en 1, point de changement de signe pour l'intégrande.

Ainsi, $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.
Le changement autoréciproque $u = \frac{1}{x}$ nous permet de nous ramener au même interval : $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$.

Dès lors,

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx + \int_1^0 \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{-du}{u^2} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u^2+1} du = 0$$

Question c. Le carré au dénominateur s'obtient probablement en dérivant le terme au dénominateur. Intégrons donc ln en $x \mapsto x\ln(x) - x$:
$I = \left[\frac{x\ln(x) - x}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2x^2(\ln(x)-1)}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2x^2\ln(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2\ln(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{2\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$.
L'intégration-par-parties est de ce fait licite par la convergence du crochet (valant exactement zéro par croissances comparées).

L'ajout de ce terme supplémentaire permet de simplifier le dénominateur du premier terme. Nous obtenons donc :

$$I = -2\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx \int_0^{+\infty} + \frac{2\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx = -2I + 2J + \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

Ainsi, du fait que $I = 0$, nous obtenons l'égalité : $2J = \int_0^{+\infty} x \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$.

Cette écriture nous permet de facilement mener une deuxième intégration par parties, en intégrant le terme de droite, et dérivant le terme en x : $J = \left[x \frac{1}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, $J = -\frac{\pi}{4}$

4.10 Exercice 10

Question 1. L'intégrande réalise bien une fonction continue sur $]0,1[$. Nous pouvons néanmoins l'étendre par continuité sur les bords 0 et 1 : En $x = 0$, nous avons $\ln(1-x) \sim x$, donc $\ln(x)\ln(1-x) \sim x\ln(x) \to 0$, donc nous pouvons étendre le domaine de cette fonction à $[0,1]$ (nous pouvons procéder de même sur le bord 1 avec le changement $x = 1-u$). L'intégrale I est alors bien définie.

Question 2. Rappelons que nous pouvons obtenir ce DSE à partir du DSE de $\frac{1}{1-x}$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geqslant 0} x^n$, donc en intégrant (terme-à-terme sur les séries entières), il vient $-\ln(1-x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc $\ln(1-x) = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$. Le rayon de ce développement est égal au rayon de la série originale, c'est-à-dire $R = 1$.

Question 3. L'intégrabilité de ces fonctions est immédiat par croissances comparées : Ces fonctions sont bien continues sur $]0,1]$, et le théorème des croissances comparées nous donne une limite nulle en $x = 0$, donc nous pouvons étendre par continuité ces fonctions en posant $f_n(0) = 0$. D'où l'intégrabilité de ces fonctions.

Le calcul explicite de ces intégrales se fait via une Intégration Par Parties (dériver du log donne du $^1/_x$, ce qui se compensera avec les puissances de x déjà présentes).

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^1 x^n \ln(x) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx$. L'intégration par parties est dès lors bien licite par convergence du crochet et de l'intégrale de gauche.

Ainsi, $\int_0^1 x^n \ln(x) dx = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

Question 4. En combinant ce qui précède, il vient

$$I = \int_0^1 \sum_{n \geqslant 1} \frac{-x^n \ln(x)}{n} dx$$

Nous pouvons bien inverser somme et intégrale, par convergence simple de la série de fonctions, et par positivité des fonctions considérées. Dès lors, $I = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Une décomposition en éléments simples donne $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi, du fait que $\sum_n \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ convergent individuellement, nous pouvons séparer la série originale :

$$I = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - (\frac{\pi^2}{6} - 1) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$


dearly beloved, we gather here
today to join these two in holy
quackrimony