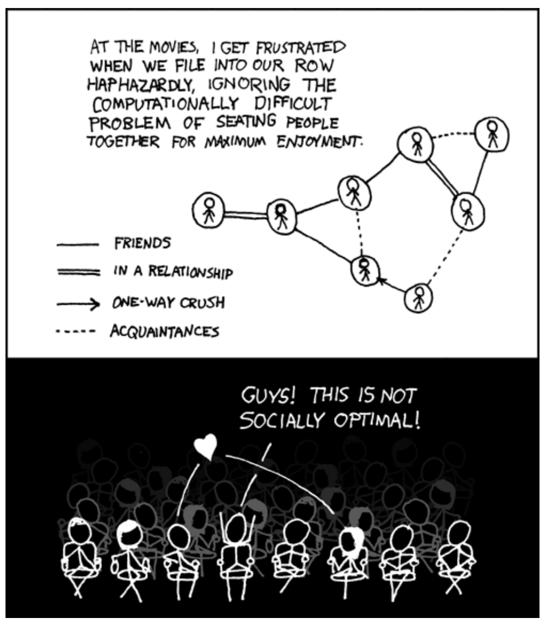
MPI* Info

Graphes de flots

TD17



Olivier Caffier

1 Introduction aux graphes de flots

Définition - Graphe de flot

Un *graphe de flot* est un quintuplet $G = (S, A, c, s, t)$ où :

- (S, A) est un graphe orienté et sans boucle (sans arc de la forme (v, v)) ;
- $s \in S$ est une source de (S, A) (degré entrant nul) et $t \in S$ est un puit de (S, A) (degré sortant nul) ;
- $c : A \to \mathbb{R}_+$ est une fonction dite de *capacité*.

On étend d'ailleurs c à tous les couples (u, v) de sommets en posant $c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin A$.

La figure 1 représente un graphe de flot G_0. Les capacités sont représentées sur les arcs.

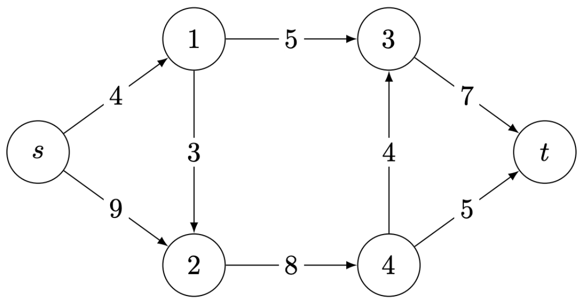


FIGURE 1 – Le graphe de flot G_0.

Définition - flot et débit

Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot.
On appelle *flot* sur G une fonction $f : S^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **Antisymétrie** : $\forall u, v \in S, f(u, v) = -f(v, u)$;
- **Respect de la capacité** : $\forall u, v \in S, f(u, v) \leq c(u, v)$;
- **Conservation** : $\forall u \in S \backslash \{s, t\}, \sum_{v \in S} f(u, v) = 0$

On appelle *débit* du flot f la valeur :

$$|f| = \sum_{u \in S} f(s, u)$$

La figure 2 représente le graphe de flot G_0 et un flot f compatible avec G. Pour chaque arc (u, v) on représente sur l'arc $f(u, v)/c(u, v)$. Les autres valeurs nulles et négatives de f peuvent se déduire des valeurs positives.

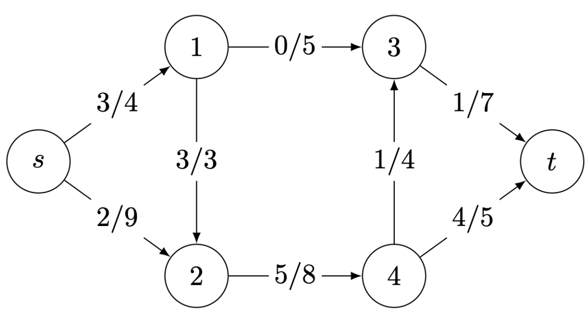


FIGURE 2 – Le graphe de flot G_0 et un flot f.

Dans la suite du sujet, G désignera toujours un graphe de flot et f un flot sur G.

Question 1. Justifier que $f(u,v)>0$ implique que $(u,v)\in A$ et $f(u,v)<0$ implique que $(v,u)\in A$.

Corrigé : Soient $u,v\in S$,

- Si $f(u,v)>0$: alors, par **respect de la capacité** :

$$c(u,v)\geq f(u,v)>0$$

  Donc $c(u,v)>0$, on a donc nécessairement que $(u,v)\in A$ (sinon on aurait $c(u,v)=0$ et ce serait absurde).
- Si $f(u,v)<0$: alors, par **antisymétrie**, $f(v,u)>0$ donc d'après le cas précédent, on a bien $(v,u)\in A$.

Définition - flux sortant / entrant / net

On reprend les mêmes notations. Pour $u\in S$, on appelle :

- *flux sortant* de u la quantité :
$$\phi_+(u)=\sum_{v\in S, f(u,v)>0} f(u,v)$$
- *flux entrant* de u la quantité :
$$\phi_-(u)=\sum_{v\in S, f(u,v)<0} f(v,u)$$
- *flux net* de u la quantité :
$$\phi(u)=\phi_+(u)-\phi_-(u)$$

Question 2. Montrer que la condition **conservation** est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall u\in S\backslash\{s,t\}, \phi(u)=0$$

Corrigé : Soit $u\in S\backslash\{s,t\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(u)&=\phi_+(u)-\phi_-(u)\\
&=\sum_{v\in S, f(u,v)>0} f(u,v) \;-\; \sum_{v\in S, f(u,v)<0} f(v,u)\\
&=\sum_{v\in S, f(u,v)>0} f(u,v) \;+\; \sum_{v\in S, f(u,v)<0} f(u,v) &&\textbf{(antisymétrie)}\\
&=\sum_{v\in S} f(u,v)
\end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence recherchée :

$$\phi(u)=0 \Longleftrightarrow \sum_{v\in S} f(u,v)=0$$

Question 3. Montrer que $|f|=\phi(s)=-\phi(t)$.

Corrigé : Comme s est une source et t est un puit, on a :

$$\phi_-(s)=0 \text{ et } \phi_+(t)=0$$

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_+(s)&=\phi_+(s)-\phi_-(s)\\
&=\sum_{u\in S} f(s,u)\\
&=|f|
\end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$\boxed{|f|=\phi_+(s)}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{u\in S}\phi(u) &= \sum_{u\in S}\phi_+(u) - \sum_{u\in S}\phi_-(u)\\
&= \sum_{u\in S}\sum_{v\in S, f(u,v)>0} f(u,v) \; - \sum_{u\in S}\sum_{v\in S, f(u,v)<0} f(v,u)\\
&= \sum_{u\in S}\sum_{v\in S, f(u,v)>0} f(u,v) \; - \sum_{u\in S}\sum_{v\in S, f(v,u)>0} f(v,u)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Or, d'après la **Q2.**, on a que :

$$\sum_{u\in S\setminus\{s,t\}} \phi(u) = 0$$

donc

$$\sum_{u\in S}\phi(u) = \phi(s) + \phi(t)$$

on trouve alors, en mêlant les deux égalités :

$$\phi(s) = -\phi(t)$$

Finalement, on trouve bien :

$$\boxed{|f| = \phi(s) = -\phi(t)}$$

Le problème MAXFLOW, auquel on s'intéresse dans le reste du sujet, est défini comme suit.

MAXFLOW

- **Entrée** : un graphe de flot G;
- **Sortie** : un flot f maximal, c'est-à-dire un flot tel que $|f|$ soit maximal.

Question 4. Représenter graphiquement une solution à MAXFLOW pour l'instance précédente représentée sur la figure 1. On justifiera que le flot proposé est maximal.

Corrigé : On considère la solution suivante :

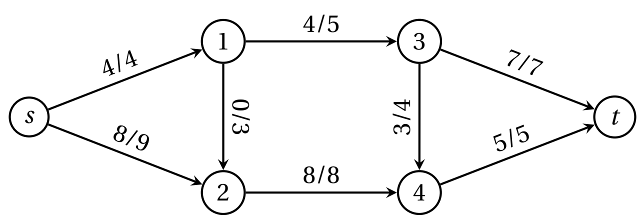


FIGURE 3 – Solution à MAXFLOW pour l'instance demandée, avec $|f| = 12$.

Ici, le flot est maximal car la somme des débits entrants en t vaut 12 et est une borne supérieur sur la valeur cherchée (on ne peut pas mettre plus dans les tuyaux entrants en 7).

2 Algorithme de Ford-Fulkerson

Définition - Capacité et saturation

Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot.
On définit les termes suivants :

- La *capacité disponible d'un arc* $(u, v) \in A$ est la quantité $c(u, v) - f(u, v)$;
- Un arc est dit *saturé* si sa capacité disponible vaut zéro ;
- La *capacité disponible d'un chemin* γ de s à t est le minimum des capacités disponibles de ses arcs ;
- Un chemin de s à t est dit *saturé* si sa capacité disponible vaut zéro.

Si un chemin γ de s à t n'est pas saturé, il dispose d'une capacité disponible $m > 0$. On définit alors l'action de *saturation* du chemin γ comme la modification suivante de f :

---

for each (u, v) **of** γ **do**
  $f(u, v) \longleftarrow f(u, v) + m$
  $f(v, u) \longleftarrow f(v, u) - m$

On remarquera que, après saturation du chemin γ, f est toujours un flot sur G et que γ est désormais saturé.

La figure 4 montre le résultat de la saturation du chemin $(S, 2, 3, 4, t)$ dans le graphe G_0 à partir du flot f de la figure 2. On a augmenté le débit de 3 le long du chemin. Les nouveaux arcs saturés sont $(2, 4)$ et $(4, 3)$.

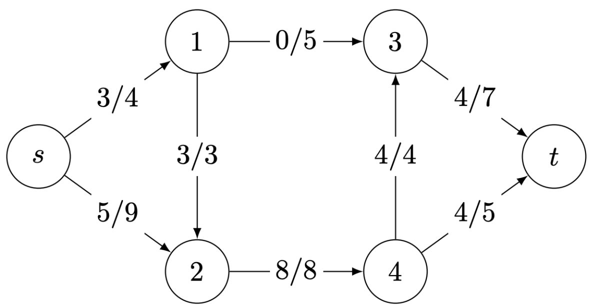


FIGURE 4 – Le graphe de flot G_0 et le flot f après saturation du chemin $(s, 2, 4, 3, t)$.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithm 1 Algorithme glouton pour MAXFLOW

Require: Un graphe de flot $G = (S, A, c, s, t)$
  $\forall (u, v) \in S^2, f(u, v) \leftarrow 0$
  while il existe un chemin non saturé de s à t **do**
    saturer ce chemin
  return f

Question 5. Expliquer comment trouver un chemin non saturé de s à t dans un graphe de flot, étant donné un flot f.

Corrigé : Il suffit de construire un graphe avec les mêmes sommets où on ne garde que les arêtes non saturées.

Si dans ce graphe, on trouve un chemin de s à t à l'aide d'un parcours, alors ce chemin est un chemin non saturé. Dans le cas contraire, il n'existe pas de chemin saturé.

Question 6. Terminer l'exécution de l'algorithme 1 sur le graphe G_0 à partir du flot f de la figure 4 et représenter graphiquement le résultat.

Corrigé : Le seul chemin non saturé est $(s, 1, 3, t)$ que l'on peut augmenter de 1. Ceci termine l'algo et le débit obtenu ne vaut que 9, il n'est donc pas maximal.

La question précédente et la **Q4.** montrent que l'algorithme 1 ne renvoie pas toujours un flot maximal. Pour corriger ce problème, il faut s'autoriser à faire « refluer » le flot en arrière le long d'un arc.

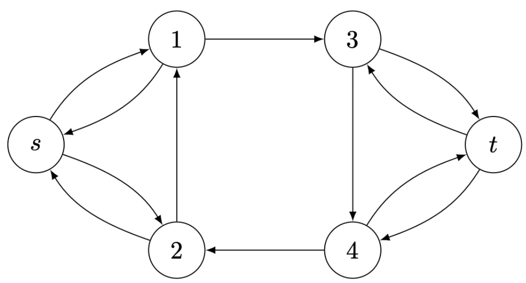
Définition - Graphe élémentaire et chemin améliorant

Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot.
On définit le *graphe résiduel* $G_f = (S, A_f)$ où

$$A_f = \{(u, v) \in S^2 \mid c(u, v) - f(u, v) > 0\}$$

Un *chemin améliorant pour* f est un chemin de s à t dans G_f.

On a représenté ci-dessous le graphe résiduel associé au flot de la figure 4 :



Question 7. Justifier que si $(u, v) \in A_f$, alors $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$.

Corrigé : Soient $u, v \in S$. Supposons que $(u, v) \in A_f$, alors par construction :

$$c(u, v) - f(u, v) > 0$$

i.e

$$f(u, v) < 0 \text{ OU } c(u, v) > f(u, v) \geq 0$$

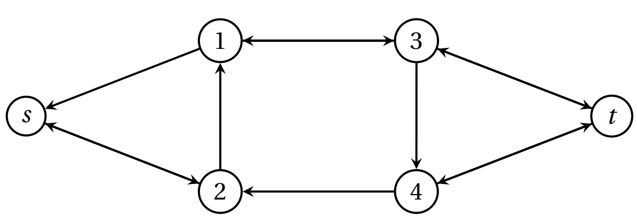
et donc,

$$\begin{cases} (v, u) \in A \text{ (dans le 1er cas)} \\ (u, v) \in A \text{ (dans le second)} \end{cases}$$

⚠ On fera bien attention à ne pas oublier dans la suite que le graphe résiduel peut contenir des arcs qui n'étaient pas dans le graphe G initial.

Question 8. Représenter graphiquement le graphe résiduel de G_0 pour le flot obtenu à la **Q6.**

Corrigé :



L'algorithme de Ford-Fulkerson est alors le suivant :

Algorithm 2 Ford-Fulkerson

Require: $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot
  $\forall (u, v) \in A, f(u, v) \leftarrow 0$
  while il existe un chemin améliorant pour f **do**
    saturer ce chemin
  return f

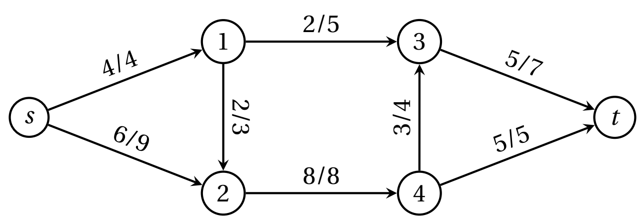
où f est un flot maximal sur G.

Question 9. Terminer l'exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le graphe G_0 avec le flot obtenu à la **Q6.**

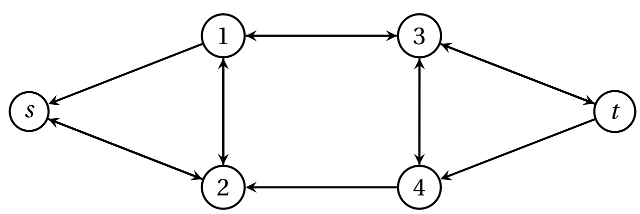
Corrigé : Il y a deux chemins améliorants :

$$(s, 2, 1, 3, t) \text{ et } (s, 2, 1, 3, 4, t)$$

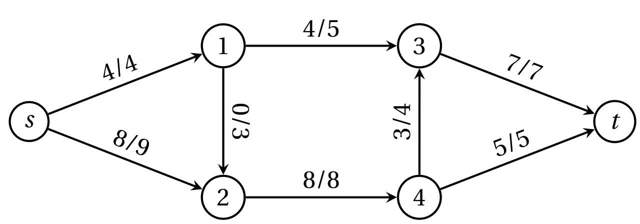
➢ Saturons le 2ème :



On obtient le graphe résiduel suivant :



$(S, 2, 1, 3, t)$ est un chemin augmentant : on peut l'augmenter de 2 tout du long et on obtient :



et le graphe résiduel serait : Dans lequel il n'y a pas de chemin de s à t : l'algo est terminé.