Colles MPi* Semaine n°13 du 11/12/2023 au 15/12/2023 (Programme n°9)

Vallaeys Pascal

30 novembre 2023

Thème : Intégration (pas d'intégrales à paramètre).

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'une intégrale convergente et définition d'une fonction intégrable sur un intervalle.

- L'absolue convergence implique la convergence (démo).
- Intégrales de Riemann en 0 et en $+\infty$ (démo).
- Théorèmes de comparaison pour justifier l'intégrabilité (démos).
- Théorème de changement de variable.
- Théorème d'intégration par parties.
- Théorème de convergence dominée, avec un exemple simple.
- Théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions (ATTENTION : il y a un nouveau théorème pour lequel les fonctions doivent être positives, ainsi que l'ancienne version).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Justifier que l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ n'implique pas que la fonction tende vers 0.
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente, non absolument convergente (démo).
- Théorème de changement de variable (démo).
- Théorème d'intégration par parties (démo).
- Théorème d'intégration des relations de comparaison (cas convergeant et cas divergeant).

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Démonstration des deux théorèmes d'intégration des relations de comparaison (cas convergent et cas divergent).

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
a) Montrer que $\underset{x \to +\infty}{Lim} \int\limits_x^{x+1} f(t)\, dt = 0$.
b) Montrer que si de plus f est décroissante, $\underset{x \to +\infty}{Lim} xf(x) = 0$.

Exercice 2 : Après avoir justifier la convergence de ces deux intégrales, montrer que

$$\int\limits_0^1 -e^{-x}.\ln(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$$

.

Exercice 3 : Déterminer $\underset{n \to +\infty}{Lim} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\sin \frac{x}{n}}}{1+x^2}dx$.

Exercice 4 :
Déterminer $\underset{n \to +\infty}{Lim} \int\limits_0^{+\infty} \text{Arctan}(nx).e^{-x^n} dx$

Exercice 5 : (CCINP PC)
Montrer que $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2+t^2}$ est définie et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6 :
Après avoir justifié la convergence des intégrales, montrer que quand n tend vers $+\infty$, on a $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^n} dx \sim \frac{1}{n} \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

Exercice 7 :
Soit $(a_n)_{n\in\aleph}$ une suite complexe telle que $\sum a_n.n!$ converge absolument. Montrer que

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.n!$$

.

Exercice 8 :
Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}+$. Montrer que $\underset{x\to+\infty}{Lim} f(x) = 0$.

Exercice 9 :
On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ et $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$.
a) Justifier la convergence de ces deux intégrales.
b) Montrer que I=0.
c) En déduire J.

Exercice 10 : (CCINP MP 2021)
On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.
1. Montrer que I est bien définie.
2. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$. Quel est le rayon de convergence ?
3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x \mapsto x^n \ln x$ est intégrable et calculer son intégrale.
4. Calculer I en admettant la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 11 :
On pose $I = \int\limits_0^{\pi} x.\ln(\sin(x))\,dx$, $J = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x).\ln(\sin(x))\,dx$ et $K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$.
a) Montrer que I, J et K convergent.
b) Exprimer I+J en fonction de K.
c) Montrer que $\frac{2I}{\pi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx$.
d) En déduire I.

Exercice 12 : (CCINP MP 2022)
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
1) Justifiez l'existence de ces intégrales
2) Montrer que I_n est constante.
3) Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$
4) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
5) En déduire la valeur d'une intégrale célèbre. (ajouté)

Exercice 13 : (CCINP MP 2022)
Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(\ln(x))^q\,\mathrm{d}x$.
1. a) Étudier la convergence de cette intégrale.
b) Calculer cette intégrale.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \exp(x\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14 : (Mines MP 2021)
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2021)
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 16 : (Mines télécom MP 2022)
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 17 : (Mines télécom MP 2022)
On pose $u_n = \int_n^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
1) Pour quels $n \in \mathbb{N}$ u_n est-elle correctement définie ?
2) Nature de $\sum u_n$?

Exercice 18 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)
Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.
1) Montrer que
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$
avec P_n polynôme réel dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
2) Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t)P_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $I_{m,n}$, sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 19 : (Mines PSI 2021)
Soit $a, b > 0$. Calculer, après avoir justifié la convergence, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 20 : (Navale MP 2021)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge pour un certain $a > 0$.
1. On suppose $f \geq 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $x > a$.
2. Montrer ce résultat pour f de signe quelconque.

Exercice 21 : (Mines MP 2022)
Domaine de définition de $\displaystyle f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22 : (Mines MP 2021)
Montrer la convergence puis calculer : $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \arcsin(\frac{1}{t})\right) \mathrm{d}t$

Exercice 23 : (Centrale MP 2021)
On considère $\displaystyle c = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x$.
1. Montrer l'existence de c.
2. Montrer $c < 0$.

Exercice 24 : (ENS MP 2021)
1) On pose $\displaystyle I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} x^n(\pi-x)^n \sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg P_n = n$ et $I_n = P_n(\pi)$.
2) Montrer que : $\displaystyle 0 < I_n \leqslant \frac{\pi^{2n+1}}{n!}$.
3) En déduire que π est irrationnel.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
1) Il m'a conseillé de poser $\forall x, f(x) = x^n(\pi - x)^n$ et d'étudier $J_k = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} f^{(k)}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 25 : (X 2007 134)
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.

Exercice 26 :

On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} x.e^{-x^6.\sin^2 x} dx$ et $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} x.e^{-x^6.\sin^2 x} dx$.
a) Montrer que pour tout réel t de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin^2 t \geq \frac{4.t^2}{\pi^2}$.
b) En déduire la convergence de la série de terme général u_n.
c) En déduire la convergence de I.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 19,25,26,28,49.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : intégration, théorème de convergence dominée, intégration terme à terme des séries de fonctions. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°9
- Groupe 2 : Programme n°9
- Groupe 3 : Programme n°9
- Groupe 4 : Programme n°9
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 9 : Programme n°8
- Groupe 10 :Programme n°8
- Groupe 11 : Programme n°8
- Groupe 12 : Programme n°8
- Groupe 13 : Programme n°8
- Groupe 14 : Programme n°8
- Groupe 15 : Programme n°8
- Groupe 16 : Programme n°8