Khôlles : Semaine 23

- 25 - 30 Février 2024 -

Sommaire

1 Questions de cours - Groupes A, B, C

1.1 Citer le théorème de Cauchy linéaire.

Théorème de Cauchy Linéaire

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. Soit E, un $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie.
Soient $x : I \longrightarrow E$ dérivable, $b : I \longrightarrow E$ et $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ continues.
Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

Alors, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

1.2 Mise en forme Matricielle d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. Soit E, un $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie. Posons $(\mathscr{E}) : y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t) y^{(k)} + b(t)$.

Alors $(\mathscr{E})$ peut se réécrire sous la forme $\mathbf{Y}'(t) = A(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}(t)$, avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^n$

Preuve **:**

Il suffit de poser $\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$ et $A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdots & & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$

Dès lors, par produit matriciel, il vient $\mathbf{Y}'(t) = A(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}(t)$

1.3 Définition de l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Définition: Exponentielle de matrice et d'endomorphisme

Soit E, un $\mathbb{K}$-E.V.N. de dimension n. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, que l'on munit d'une norme d'algèbre (sous-multiplicative, prendre par exemple $n \times \|\cdot\|_\infty$).

Nous définissons l'exponentielle de la matrice A comme :

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

De même, en notant u, un endomorphisme associé à A, nous définissons l'exponentielle de u :

$$\exp(u) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$$

(Attention, u^k désigne ici la composition!)

1.4 Si A et B commutent, $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$. (démo)

Preuve :

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices telles que $AB = BA$.

Alors $\exp(A+B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$.

Or, nous pouvons appliquer le binôme de Newton, car A et B commutent. Ainsi :

$$\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$$

Or, la série définissant l'exponentielle est absolument convergente, donc les séries $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont également absolument convergentes. En appliquant le produit de Cauchy, il vient :

$$\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \exp(A+B)$$

1.5 Définition du Wronskien (n=2).

Définition: Wronskien

Rappel : S_0, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_0)$ est un SEV de dimension 2 (nous travaillons ici sur une équation d'ordre 2). Soient y_1, y_2, deux solutions de $(\mathscr{E}_0)$.

On appelle Wronskien de y_1, y_2 la fonction $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$

2 Questions de cours, groupes B et C

2.1 Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. (démo)

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. Soit E, un $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie.
Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ continue.

On considère $(\mathscr{E}_0) : x' = a(t)(x)$.

Alors, S_0, ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_0)$ est un $\mathbb{R}$—EVN de dimension $n = \dim(E)$

Preuve :

$\forall x_1, x_2 \in S_0,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in I.$

Nous avons $a(t)(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda a(t)(x_1) + \mu a(t)(x_2)$ par linéarité de $a(t)$. Or, par définition de l'équation différentielle homogène :

$\lambda a(t)(x_1) + \mu a(t)(x_2) = \lambda x_1' + \mu x_2' = (\lambda x_1 + \mu x_2)'.$

Dès lors, $(\lambda x_1 + \mu x_2) \in S_0$ et $0 \in S_0 \Rightarrow$ c'est un Sous-Espace vectoriel.

Fixons $t_0 \in I$. Notons $\varphi : \begin{cases} S_0 \to E \\ x \mapsto x(t_0) \end{cases}$, correctement définie.

φ est linéaire par linéarité de l'évaluation. Par théorème de Cauchy, $\forall x_0 \in E,\ \exists! x \in S_0,\ x(t_0) = x_0$.
Ainsi, $\varphi(x) = x_0$: donc φ est bijective, c'est donc un isomorphisme d'espace vectoriels.

Finalement : $\dim(S_0) = \dim(E)$ car S_0 est de dimension finie.

2.2 Convergence de la série définissant l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme. (démo)

Preuve :

On rapelle la définition de l'exponentielle d'une matrice

$$\exp : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{cases}$$

Montrons que cette série converge. Nous sommes en dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes. Considérons ainsi une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative (exemple : $n\|\cdot\|_\infty$).

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|\dfrac{A^n}{n!}\| \leqslant \dfrac{\|A\|^k}{k!}$. Or, la série de terme général $\dfrac{\|A\|^k}{k!}$ est Absolument convergente (c'est la série de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$).

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_n \|\frac{A^n}{n!}\|$ Converge, donc la série $\exp(A)$ est absolument convergente, donc converge car nous sommes en dimension finie.

La définition de l'exponentielle d'un endomorphisme est identique. Soit $\|\cdot\|$, norme sur E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On pose $|||u||| = \displaystyle\sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Alors, $|||u|||$ existe car u est continue sur E de dimension finie.

$|||\cdot|||$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{L}(E)$. La démonstration est alors identique.

2.3 Continuité de $A \mapsto \exp(A)$. (démo)

Proposition

Soit $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, muni de $\|\cdot\|$, une norme sous-multiplicative.

Alors, exp : $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{cases}$ est $\mathscr{C}^0$

Preuve :

Il faut le faire à la main : Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : A \mapsto \dfrac{A^n}{n!}$.

Ainsi, $\forall A \in E,\ \exp(A) = \displaystyle\sum_n f_n(A)$. Donc $\exp = \displaystyle\sum_n f_n$.

Soit $R>0$. On pose $B = B_f(0, R)$. Alors B est un Compact car est un fermé borné en dimension finie.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur B car est polynomiale en A, et E est de dimension finie.
2. On note $\|f_n\|_\infty^B = \sup\limits_{A \in B} \|f_n(A)\|$
   - $\|f_n\|_\infty^B$ existe, car f_n est continue sur un compact, donc est bornée et atteint ses bornes.
   - $\forall A \in B,\ \|f_n(A)\| = \dfrac{1}{n!}\|A^n\| \leqslant \dfrac{1}{n!}\|A\|^n \leqslant \dfrac{R^n}{n!}$
     $\Rightarrow \displaystyle\sum_n \|f_n\|_\infty^B$ Converge (vaut e^R)
     $\Rightarrow \displaystyle\sum_n f_n$ Converge Normalement, donc Converge Uniformément sur B.

Dès lors, exp est Continue sur B d'après le théorème de Continuité des Séries de fonctions. Ainsi, exp est Continue car cette propriété est vraie pour tout $R>0$, donc sur $\displaystyle\bigcup_{R \in \mathbb{R}_+^*} B_f(0, R)$

2.4 Dérivée de $t \mapsto \exp(tA)$. (démo)

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Posons $f : t \mapsto \exp(tA)$.

Alors f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = A\exp(tA) = Af(t)$

Preuve :

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : t \mapsto \dfrac{A^n t^n}{n!}$.

Soit $\|\cdot\|$, une norme sous-multiplicative de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $I_a = [-a, a]$ (avec $a>0$) compact de $\mathbb{R}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons f_n $\mathscr{C}^1$ avec $f_n'(t) = \dfrac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = Af_{n-1}(t)$.
2. $\displaystyle\sum_n f_n$ CVS par définition de exp
3. $\displaystyle\sum_n f_n'$ Converge normalement : $\forall t \in I_a,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n'(t)\| = \|\dfrac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!}\| \leqslant \dfrac{a^{n-1}\|A\|^n}{(n-1)!} = \|A\|\dfrac{(\|A\|a)^{n-1}}{(n-1)!}$.

   Or, la série de terme général $\|A\|\dfrac{(\|A\|a)^{n-1}}{(n-1)!}$ converge : $\displaystyle\sum_n f_n'$ Converge normalement donc uniformément sur I_a

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, $t \mapsto \exp(tA)$ est $\mathscr{C}^1$ sur I_a pour tout $a>0$. De plus, $f'(t) = A\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(At)^{n-1}}{(n-1)!} = Af(t)$

2.5 Dérivée du Wronskien et équation différentielle associée (n=2). (démo)

Proposition

Soient y_1, y_2, deux solutions de $(\mathscr{E}_0) : y'' - ay' - by = 0$.

Alors $W'_{y_1,y_2}(t) = aW_{y_1,y_2}(t)$

Preuve :

Soit $t \in I$. Alors $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$. Or, l'application $t \mapsto y_1y_2' + y_2y_1'$ est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables.

Ainsi, $W'(t)$ existe et vaut $W'(t) = y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_2'(t)y_1'(t) - y_2(t)y_1''(t)$.

Or, les applications y_1 et y_2 vérifient $y'' = ay' + by$. Donc $W' = y_1\,[ay_2' + by_2] - y_2\,[ay_1' + by_1]$

D'où $W'(t) = aW(t)$

3 Questions de Cours du groupe C

3.1 Démonstration du théorème de Cauchy linéaire (démo)

Théorème de Cauchy Linéaire

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. Soit E, un $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie.

Considérons l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $\mathbf{Y}'(t) = A(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}(t)$ (sous forme Matricielle)

Alors, le problème de Cauchy (P) : $\begin{cases} \mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{B} \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

Preuve :

La preuve de ce théorème revient à montrer que l'opérateur intégration admet un point fixe :

Notons que si $\mathbf{Y}$ vérifie (P), alors $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{B}(x)]\,dx$.

Notons la suite $(\mathbf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathbf{Y}_0 := \mathbf{Y}_0$ et $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(x)\mathbf{Y}_n(x) + \mathbf{B}(x)]\,dx$

Alors cette suite est bien définie, car $A(t)$ est supposée être définie sur $\mathbb{K}^n$ pour tout $t \in I$.

Supposons premièrement I compact. Montrons alors que $(\mathbf{Y}_n)$ vérifie pour tout $t \geqslant t_0$:

$$\|\mathbf{Y}_{n+1}(t) - \mathbf{Y}_n(t)\| \leqslant (\alpha\|\mathbf{Y}_0\| + \beta) \times \frac{\alpha^n}{(n+1)!}|t - t_0|^{n+1}$$

Avec $\alpha = \sup_{t\in I} |||A(t)|||$ et $\beta = \sup_{t\in I} |||B(t)|||$.

Par récurrence, le cas $n = 0$ est immédiat (il s'agit d'une majoration brutale de l'intégrale). Supposons que cette inégalité soit réalisée au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Y}_{n+2}(t) - \mathbf{Y}_{n+1}(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t} A(x)(\mathbf{Y}_{n+1}(x) - \mathbf{Y}_n(x))dx\| \\
&\leqslant \alpha \int_{t_0}^{t} (\alpha\|\mathbf{Y}_0\| + \beta) \times \frac{\alpha^n}{(n+1)!}|x - t_0|^{n+1}dx \\
&\leqslant (\alpha\|\mathbf{Y}_0\| + \beta) \times \frac{\alpha^{n+1}}{(n+2)!}|t - t_0|^{n+2}
\end{aligned}$$

(On intègre $(x - t_0)^{n+1}$ pour obtenir le $(n+2)!$ au dénominateur, d'où l'hypothèse $t > t_0$).

Ainsi, par principe de récurrence, nous obtenons bien l'égalité souhaitée. Remarquons qu'il en va de même si $t < t_0$.

Il vient alors que $\|\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n\|_\infty \leqslant (\alpha\|\mathbf{Y}_0\| + \beta) \times \dfrac{\alpha^n}{(n+1)!}|L^{n+1}$ avec L une majoration de la longueur de I (compact donc borné).

Dès lors, nous remarquons que la série $\sum_n \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n$ converge normalement, donc uniformément. Ainsi, en notant $\mathbf{Y}$ la fonction limite de cette série, il vient que $\mathbf{Y}_n$ converge vers $\mathbf{Z} := \mathbf{Y} + \mathbf{Y}_0$. Or, cette application $\mathbf{Z}$ vérifie $\mathscr{E}$, car en prenant la définition de $\mathbf{Y}_n(t)$, il est possible par convergence uniforme de passer la limite dans l'intégrale, donc $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(x)\mathbf{Z}(x) + \mathbf{B}(x)]\,dx$. D'où l'existence.

Si I est un Intervalle quelconque, alors tout point intérieur de I est compris dans un Compact, nous pouvons alors nous ramener au cas précédent.

L'unicité se démontre d'une manière similaire : Soient $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$, deux solutions de (P), où l'on suppose I compact.

Alors nous avons $\forall t \in I,\ \|\mathbf{Y}(t)-\mathbf{Z}(t)\| = \|\int_{t_0}^{t} A(x)\,[\mathbf{Y}(x)-\mathbf{Z}(x)]\,dx\|\ \ \frac{\alpha}{1}|t-t_0|\|\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\|_\infty$.

Or, ce procédé peut être répété autant de fois que souhaité, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|\mathbf{Y}(t)-\mathbf{Z}(t)\|\ \ \frac{\alpha^n}{n!}|t-t_0|\|\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où $\mathbf{Y}=\mathbf{Z}$

3.2 Principe d'entrelacement de Sturm. (démo HP, cf exercices groupe C)

Proposition Principe d'Entrelacement de Sturm

Posons $(\mathscr{E})\ :\ y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ et p, q de classe $\mathscr{C}^0$ sur I).

Soit (y_1, y_2) système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_0)$. Soient a, b : deux zéros consécutifs de y_1 (s'ils existent). Alors y_2 s'annule entre a et b.

Lemme Intermédiaire

Soit y, solution non-nulle de $(\mathscr{E}_0)$. Alors, $\forall [a,b] \subset I,\ \ y$ possède un nombre fini de zéros dans $[a,b]$.

***Preuve* (du Lemme) :**

Supposons que y s'annule une infinité de fois sur $[a,b]$. Alors, $\exists (x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ deux-à-deux distincts tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ y(x_n)=0$.

Or, $[a,b]$ est compact, Par la propriété de Bolzano-Weierstraß, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\exists \alpha \in [a,b]$, tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Or, y est $\mathscr{C}^0$ sur I. Donc $y(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y(\alpha)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ y(x_{\varphi(n)})=0 \Rightarrow y(\alpha=0)$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{y(x_{\varphi(n)})-y(\alpha)}{x_{\varphi(n)}-\alpha} = \delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y'(\alpha)$ car y dérivable.

Or, de même, cette suite de δ_n est constamment nulle par construction. Donc $y'(\alpha)=0$ car y' est $\mathscr{C}^0$.

Les δ_n existent pour n assez grand car les x_n sont supposés deux-à-deux distincts.

Finalement, y est solution de : $\begin{cases} (\mathscr{E}_0) \\ y(\alpha)=0 \\ y'(\alpha)=0 \end{cases}$: Par unicité de la solution au problème de Cauchy, $y=0$ car 0 convient : Ce qui est absurde.

Alors, y s'annule un nombre fini de fois sur $[a,b]$.

Preuve **Principe d'entrelacement de Sturm** ***:***

$\forall t \in [a,b]$, nous avons $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$ car (y_1, y_2) est un Système fondamental de solutions.

Or, $W(y_1,y_2)$ est Continue, donc $W(y_1,y_2)$ est de signe constant sur $[a,b]$. Quitte à remplacer y_2 par $-y_2$, supposons que $\forall t \in [a,b],\ W(t)>0$.

Soient a et b, deux zéros consécutifs de y_1. Nous avons y_1 de classe $\mathscr{C}^0$ sur $[a,b] \Rightarrow\ y_1$ de signe constant (on suppose positif. i.e : $\forall t \in]a,b[,\ y_1(t)>0$).

Alors, $W(y_1,y_2)(a) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = -y_1'(a)y_2(a) \Rightarrow\ -y_1'(a)y_2(a)>0$.

Or, $y_1'(a) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{y_1(a+h)-y_1(a)}{h} = \dfrac{y(a+h)}{h}>0 \Rightarrow\ y_1'(a) \geqslant 0$.

De plus, nous avons $y_1'(a) \neq 0$, sans quoi, par unicité de la solution au problème de Cauchy, $y_1 = 0$ ce qui est exclu. Donc $y_2(a)<0$.

Idem sur b : $W(y_1,y_2)(b)>0 \Rightarrow\ -y_2(b)y_1'(b)>0$. Or, $y_1'(b)<0 \Rightarrow\ y_2(b)>0$.

Or, y_2 est continue sur $[a,b]$: D'après le TVI : $\exists c \in]a,b[,\ y_2(c) = 0$