Khôlles : Fonctions à Valeurs Vectorielles

- 06 - 10 Novembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de Cours - Tout groupe

1.1 Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites. (démo non refaite en spé)

Définition: Limite d'une application

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux $\mathbb{K}$-EVN. Soit $A \subset E$, soit $f : A \to F$ une application.

Soit $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. On dit que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition Caractérisation Séquentielle

$$\left[\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l\right] \iff \left[\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to l\right]$$

Preuve **:**

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$, alors soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que $x_n \to a$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ \|x_n - a\| \leqslant \varepsilon$.
Soit donc $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ \|f(x_n) - l\|_F \leqslant \varepsilon$:
Par hypothèse, il existe η tel que $\forall x \in A, \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon$. Il suffit alors de prendre n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \ \|x_n - a\|_E \leqslant \eta$, ce qui existe car $x_n \to a$.

Réciproquement, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$, alors $\exists \varepsilon > 0, \ \forall \eta > 0, \ \exists x \in A, \ \|x - a\|_E \leqslant \eta$ et $\|f(x) - l\|_F \geqslant \varepsilon$.
En posant $\eta_n = \dfrac{1}{n+1}$, nous exhibons une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que $x_n \to a$ et avec $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|f(x_n) - l\|_F \geqslant \varepsilon$, donc $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \ x_n \to a$ et $f(x_n) \not\to l$.

Proposition
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}), \dots, (F_p, \|\cdot\|_{F_p})$, des $\mathbb{K}$-EVN. Soit $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$.

Soit $f : \begin{cases} A \to F_1 \times \cdot \times F_p = G \\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$. On munit G de la norme Produit (i.e $\|(x_1, \dots, x_n)\|_G = \max\limits_{i \in [\![1;p]\!]} \|x_i\|_{F_i}$.
Soit $l = (l_1, \dots, l_p) \in G$. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l \iff \forall i \in [\![1;p]\!], \ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_i(x) = l_i$

Définition: Continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux $\mathbb{K}$-EVN. Soit $A \subset E$, soit $f : A \to F$ une application.

1. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. On dit que f est continue sur A si $\forall a \in A, \ f$ est continue en a

Proposition Caractérisation Séquentielle

$$[f \text{ est continue en } a] \iff \left[\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)\right]$$

Preuve :

Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$. Alors, nous avons $\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\| \leqslant \varepsilon$.

Dès lors, la continuité de f s'écrit $\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall y \in A,\ \|y-a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(y)-f(a)\| \leqslant \varepsilon$. Donc :

Soit $\varepsilon>0$, montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \|f(x_n)-f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

Par continuité de f, il existe un η tel que $\|x_n - a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x_n)-f(a)\| \leqslant \varepsilon$. Or, pour un η donné, il existe $n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\| \leqslant \eta$, et ceci implique bien $\|f(x_n)-f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Réciproquement, si $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$, montrons que $\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x \in A,\ \|x-a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| \leqslant \varepsilon$

S'il existe un $\varepsilon>0,\ \forall \eta>0, \exists x \in A,\ \|x-a\| \leqslant \eta$ et $\|f(x)-f(a)\|>\varepsilon$. Alors, posons $\eta_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Ceci induit l'existence d'une suite (x_n) reliée aux η_n telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n - a\| \leqslant \eta_n$ et $\|f(x_n)-f(a)\|>\varepsilon$.

Or, cette suite (x_n) converge vers a par construction : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n - a\| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow x_n \to a$.

Or, par hypothèse, ceci implique que $\|f(x_n)-f(a)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et ceci est absurde car cette quantité est toujours supérieure à ε. D'où la réciproque.

1.2 Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse. (démo)

Proposition

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$, deux $\mathbb{R}$-EVN. Soit $f : E \to F$, une application Lipschitzienne.

Alors f est Uniformément Continue, et f est alors Continue

Preuve :

f est Lipschitzienne, il existe alors $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K–Lipschitzienne : $\forall x, y \in E,\ \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant K \times \|x-y\|_E$.

Montrons que f est Uniformément Continue : $\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall (x,y) \in E,\ \|x-y\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$.

Il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{K}>0$, car $\|x-y\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant K\|x-y\|_E \leqslant K \times \eta = \varepsilon$.

f est alors Uniformément Continue, et l'uniforme continuité implique la continuité : Soit $x \in E$:

Soit $\varepsilon>0$, posons η comme celui de l'uniforme continuité. Alors, $\forall y \in E,\ \|x-y\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon$ par uniforme-continuité de f.

f est alors continue en x pour tout $x \in E$. D'où :

$$f \text{ Lipschitzienne } \Rightarrow f \text{ Uniformément Continue } \Rightarrow f \text{ Continue}$$

La réciproque est cependant fausse, la racine carrée n'est Lipschitzienne sur aucun intervalle de la forme $]0, a]$.

1.3 Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordres supérieurs.(démo)

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un $\mathbb{R}$-EVN de dimension Finie. Soit $a \in I$.

Alors [f est Dérivable en a] $\iff$ [f admet un DL à l'ordre 1 en a]

i.e : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ (où $o(h)$ signifie $o(\|h\|_E)$).

Preuve :

Si f est dérivable en a. Alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0$.

Ainsi, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = o(1)$, donc $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Réciproquement, $\exists v \in F$ tel que $f(a+h) = f(a) + hv + o(h)$. Si $h \neq 0$, nous avons :

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = v + o(1)$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = v$

Note:-

Ceci est faux pour les Ordres supérieurs! Nous n'avons plus que le sens f $n-$fois dérivable en $a \Rightarrow$ f admet un DL à l'ordre n en a.

Par exemple : Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en zéro : $f(h) = 0 + h \times 0 + \dfrac{h^2}{2} \times 0 + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^3)$. Or, f n'est pas deux fois dérivable en 0

1.4 Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe C1 . (démo)

Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \times \dfrac{-1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Nous observons que cette expression ne possède pas de limite en $x = 0$. Ainsi, cette fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

1.5 Somme de Riemann et théorème associé. (proposer un exemple)

Définition: Somme de Riemann

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On appelle Somme de Riemann à pas constant la quantité $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{PM}$.

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)$$

Exemple

Posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$.

On note alors $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Alors $u_n \to \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

1.6 Révisions de sup : Th de Rolle (démo), égalité et inégalité des accroissements finis (démo)

Théorème de Rolle

Soit $a<b \in \mathbb{R}$. Soit f, fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.

$$\text{Alors } \exists c \in]a, b[, \ \ f'(c) = 0$$

Preuve **:**

f est continue sur $[a, b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes.
Soit donc $m = \min\limits_{[a,b]} f$, et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

Si $m = M$, f est constante donc tout point $c \in]a, b[$ convient. Supposons dès lors que $m \neq M$. Puisque $f(a) = f(b)$. m et M ne peuvent pas être tout deux atteints aux bornes. Supposons alors (raisonnement analogue dans l'autre cas) que m soit atteint dans $]a, b[$.

Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$. f admet en c un minimum local donc $f'(c) = 0$

Théorème Égalité des Accroissements finis

C'est Rolle en tournant la tête!
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Preuve :

Soit g, la fonction affine définie sur $[a, b]$, qui coïncide avec f en a et b.
i.e :

$$g : \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \end{cases}$$

Soit $\varphi = f - g$. φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle : $\exists\, c \in]a, b[, \varphi'(c) = 0$, i.e :

$$f'(c) - g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = g'(c).\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème Inégalité des Accroissements Finis (V.1)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe m et M tels que $m \leqslant f' \leqslant M$.

$$\forall (a, b) \in I^2,\ a \leqslant b \Rightarrow m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} m \leqslant f' \leqslant M &\Rightarrow \forall a<b \in I^2,\ m\int_a^b 1\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b 1\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow \forall a<b \in I^2,\ m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a) \end{aligned}$$

Théorème Inégalité des Accroissements Finis (V.2)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

Si $|f'| \leqslant k$. Alors, f est k-lipschitzienne. i.e :

$$\forall (a, b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|$$

Preuve :

Prendre la preuve précédente avec $m = -M$.

1.7 Formules de Taylor (Young + reste intégral) (démo de la formule avec reste intégral).

Proposition Formule de Taylor - Reste Intégral

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un Intervalle, soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un $\mathbb{K}-$EVN de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

Alors, $\forall a, x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \times \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

Preuve :

Par récurrence : Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : "Si f est C^{n+1}, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \times \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$".

• Supposons f C^1. Alors, $f(a) + \int_a^b f'(t)dt = f(a) + f(b) - f(a)$: H_0 est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n, Montrons H_{n+1} :

Supposons f C^{n+2}. f est en particulier C^{n+1}. Alors, par HR :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}{n!}$$

Faisons une Intégration Par Parties. Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t) \to u'(t) = f^{(n+2)}(t)$. Posons également $v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!} \to v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.
u et v sont C^1 car f est C^{n+2}. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \underbrace{\left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b}_{=0 \text{ en } b} + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt$$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}dt$$

Proposition Formule de Taylor - Young

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|x-a|^n)$
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{O}(|x-a|^{n+1})$

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle. (démo)

Définition: Point Adhérent à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$-EVN. Soit $A \subset E$, soit $a \in E$.

On dit que a est un point adhérent à A si $\forall r>0,\ B_f(a,r) \cap A \neq \emptyset$

Proposition Caractérisation Séquentielle

Cette définition est équivalente à : $\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to a$

Preuve :

Supposons que $\forall r>0,\ B_f(a,r) \cap A \neq \emptyset$:

Posons $r_n = \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $B_f(a,r_n) \cap A \neq \emptyset$, alors $\exists x_n \in A,\ \|x_n - a\| \leqslant r_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Nous construisons alors une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$.

Réciproquement, si $\forall r>0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\| \leqslant r$, alors en particulier, nous avons :

$\|x_{n_0} - a\| \leqslant r \Rightarrow\ x_{n_0} \in B_f(a,r) \cap A$, d'où $\forall r>0,\ B_f(a,r) \cap A \neq \emptyset$

2.2 Dérivée de $L(f)$ où L est une application linéaire continue (démo)

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux $\mathbb{K}$-EVN de dimension finie. Soit $f : I \to F$ une application et $L \in \mathcal{L}(E,F)$ (continue car E est de dimension Finie).

Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a. Alors $L(f)$ est dérivable en a et $L(f)'(a) = L(f'(a))$

Preuve :

$L \in \mathcal{L}(E,F)$ et E de dimension finie donnent la continuité de L (C.F chapitre Topologie).

Dès lors (Nous montrerons plus tard que), $\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leqslant \|x\|_E \times K$.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$. Alors $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Alors $L(f(a+h)) = L(f(a) + hf'(a) + o(h)) = L(f(a)) + hL(f'(a)) + L(o(h))$.

Or, $L(o(h)) = o(h)$ par $K-$ Lipschitzianité de L.

Ainsi, $L(f)$ admet un DL à l'ordre 1 en a, donc est dérivable en a d'après ce qui précède. De plus, $L(f)'(a) = L(f'(a))$.

Montrons donc que $L(o(h)) = o(h)$: Soit $\varphi(h)$ tel que $\varphi(h)$ soit notre $o(h)$.
Alors, $\exists \varepsilon : (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ telle que $\|\varphi(h)\|_F = |h| \times \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ainsi, $L(\varphi(h)) = L(|h| \times \varepsilon(h)) \leqslant K \times |h| \times \varepsilon(h)$.
Finalement, $L(o(h)) = o(h)$

2.3 Dérivée de $B(f,g)$ où B est une application bilinéaire continue. (démo)

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|)_G$, trois $\mathbb{K}$-EVN avec E et F de dimension finie.

Soit $B : E \times F \to G$ une application Bilinéaire. Soit $a \in I$ et $f : I \to E$, $g : I \to F$, deux applications dérivables en a.

Alors $B(f,g) : I \to G$ est dérivable en a et $B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$

Preuve :

De même que précédemment, montrons que $B(f,g)$ admet un DL à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
B(f,g)(a+h) = B(f(a+h), g(a+h)) &= B(f(a) + hf'(a) + o(h), g(a) + hg'(a) + o(h)) \\
&= B(f(a), g(a)) + B(f(a), hg'(a)) + B(f(a), o(h)) + B(hf'(a), g(a)) + B(hf'(a), hg'(a)) \\
&\quad + B(f'(a), o(h)) + B(o(h), g(a)) + B(o(h), hg'(a)) + B(o(h), o(h)) \\
&= B(f(a), g(a)) + h\left(B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))\right) + h^2 B(f'(a), g'(a)) + B(o(h), o(h)) \\
&\quad + B(f(a), o(h)) + B(o(h), g(a))
\end{aligned}$$

Montrons que les termes en h^2 et contenant un $o(h)$ sont en $o(h)$, auquel cas nous avons :
$B(f,g)(a+h) = B(f(a), g(a)) + h\left(B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))\right) + o(h)$:
$B(f,g)$ admet un DL à l'ordre 1 en a et $B(f,g)'(a) = B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))$

Nous admettons que B Bilinéaire $\Rightarrow$ B $\mathscr{C}^0 \Rightarrow$ B K$-$Lipschitzienne.

Alors, $\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in E \times F,\ \|B(x,y)\|_G \leqslant K \times \|x\|_E \times \|y\|_F$.

Dès lors, tout comme précédemment, il suffit d'écrire la définition d'un $o(h)$ pour avoir notre majoration par une constante multipliée par un $\varepsilon(h) \to 0$.

2.4 Continuité de la fonction "distance à une partie A". (démo)

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $\mathbb{K}$-EVN. Soit $A \subset E$, partie non-vide.

On appelle "Distance à la partie A" l'application $d_A : x \mapsto \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|_E$.

Cette application est une application Continue.

Preuve :

Montrons que la Distance à une partie respecte une Inégalité triangulaire :
Montrons que $\forall x, y \in E,\ \ d_A(x) \leqslant \|x-y\|_E + d_A(y)$:

Nous avons $d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|_E = \inf\limits_{a \in A} \|x - y + y - a\|_E \leqslant \inf\limits_{a \in A} \|x-y\|_E + \inf\limits_{a \in A} \|y-a\|_E$ d'après l'Inégalité Triangulaire sur $\|\cdot\|_E$.

Dès lors, l'inf d'une constante est cette constante : $d_A(x) \leqslant \|x-y\|_E + d_A(y)$.

Nous pouvons dès lors déduire une $1-$Lipschitzianité de d_A :

$\forall x, y \in E,\ \ d_A(x) \leqslant \|x-y\|_E + d_A(y)$. Donc $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x-y\|_E + d_A(y) - d_A(y) = \|x-y\|_E$.

Par symétrie des Rôles, (Absolue Homogénéité de la norme), nous avons $|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x-y\|_E$. D'où la $1-$Lipschitzianité de la Distance à une partie, et donc sa continuité.

2.5 Inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique pour des réels positifs. (démo)

Proposition

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Nous avons alors :

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Preuve :

Ceci découle de la concavité du log : D'après l'inégalité de Jensen appliqué aux x_i :

Nous avons $\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i) = \ln(\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n})$

Or, par croissance du log : $\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \geqslant \ln(\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$.

Donc, $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann. (démo)

Définition: Somme de Riemann

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On appelle Somme de Riemann à pas constant la quantité $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{PM}$.

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)$$

Preuve :

Théorème de Heine : Toute fonction Continue sur un segment y est Uniformément continue :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0, \forall (x,y) \in D_f,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons la famille $(a_k)_k$, subdivision régulière d'ordre n associée à l'intervalle $[a,b]$ (i.e, $a_0 = a$, $a_{n-1} = b$ et $\forall k \in [\![n-1;1]\!],\ a_k - a_{k-1} = \dfrac{1}{n}$).

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k)dt\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|dt
\end{aligned}$$

(On remarque l'intégrale d'un terme constant).

Ainsi, $\forall t \in [a_k, a_{k+1}],\ |t - a_k| \leqslant \dfrac{b-a}{n}$. Or, pour n assez grand, $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$.

Alors, $\forall t \in [a_k, a_{k+1}],\ |t - a_k| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$ d'après le théorème de Heine.

Donc, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon dt = \varepsilon(b-a)$.

Finalement, nous avons bien la définition de la limite. Ce qui permet de Conclure.

3.2 Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. (avec la bonne hypothèse, démo non faite)

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ avec $I = [a, b]$ un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. On pose (a_k) subdivision régulière de $[a, b]$ d'ordre n.

Alors, en posant $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k)$, nous avons $R_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

***Preuve* :**

Remarquons que $R_n - \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{b-a}{n} f(a_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt\right]$.

Or, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliqué sur chaque $t \in [a_k, a_{k+1}]$:
$|f(t) - f(a_k)| \leqslant \max_{c \in [a_k, a_{k+1}]} |f'(c)|(c - a_k)$.

Nous assurons de plus par continuité de f' sur I l'existence de $\|f'\|_\infty^I$ (f' est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes).
Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|R_n - \int_a^b f(t)dt\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_k+1} |f(a_k) - f(t)|dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_k+1} \|f'\|_\infty^{[a_k, a_{k+1}]}(a_{k+1} - a_k)dt \\
&\leqslant \|f'\|_\infty^I \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_k+1} (a_{k+1} - a_k)dt \\
&\leqslant \|f'\|_\infty^I \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{n^2} \\
&\leqslant \|f'\|_\infty^I (b-a)^2 \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi, $R_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

3.3 Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (avec la bonne hypothèse, démo non faite)

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ avec $I = [a, b]$ un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. On pose (a_k) subdivision régulière de $[a, b]$ d'ordre n.

Alors, en posant $T_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$, nous avons $T_n - \displaystyle\int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Démontrons premièrement l'égalité : $\displaystyle\int_r^s f(t)dt - (s-r)\frac{f(r)+f(s)}{2} = \frac{1}{2}\int_r^s f''(t)(t-r)(t-s)dt$

Intégrons $\displaystyle\int_r^s f(t)dt$ par parties : $f \to f'$ et $1 \to t - \dfrac{r+s}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_r^s f(t)dt &= \left[f(t)\left(t - \frac{r+s}{2}\right)\right]_r^s - \int_r^s f'(t)\left(t - \frac{r+s}{2}\right)dt \\
&= \left[(s-r)\frac{f(r)+f(s)}{2}\right] - \frac{1}{2}\int_r^s f'(t)(2t-r-s)dt
\end{aligned}$$

Avec une autre I.P.P sur $2t - r - s \to (t-r)(t-s)$:

$$\int_r^s f'(t)(2t-r-s)dt = [f'(t)(t-r)(t-s)]_r^s - \int_r^s f''(t)(t-r)(t-s)dt$$

Finalement, $\displaystyle\int_r^s f(t)dt - (s-r)\frac{f(r)+f(s)}{2} = \int_r^s f''(t)(t-r)(t-s)dt$

Ainsi, en évaluant la différence $\displaystyle\int_a^b f(t)dt - T_n$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)dt - T_n\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - (b-a)\frac{f(a_k) - f(a_{k+1})}{2}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f''(t)(t-a_k)(t-a_{k+1})dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \|f''\|_\infty \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)(a_{k+1}-t)dt \\
&\leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{6} \\
&\leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{12n^2}
\end{aligned}$$

Car $a_{k+1} - a_k = \dfrac{b-a}{n}$.

D'où finalement $T_n - \displaystyle\int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3.4 Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral. (démo du cours de sup)

Théorème Fondamental du Calcul Intégral

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^0$. Soit $a \in I$.

Alors l'application $F : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases}$ est dérivable de dérivée $F'(x) = f(x)$ en tout $x \in I$.

En particulier, F est de classe $\mathscr{C}^1$

Preuve :

Calculons la différence $\lim\limits_{b\to x} \left| \dfrac{F(b)-F(x)}{b-x} - f(x) \right|$:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to x} \left| \frac{F(b)-F(x)}{b-x} - f(x) \right| &= \lim_{b\to x} \left| \frac{1}{b-x} \left[\int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] - f(x) \right| \\
&= \lim_{b\to x} \left| \frac{1}{b-x} \times \int_x^b f(t)dt - f(x) \right| \\
&= \lim_{b\to x} \left| \frac{1}{b-x} \times \int_x^b (f(t)-f(x))dt \right|
\end{aligned}$$

Soit $b \in I$ tel que $b - x = \varepsilon_b$. Par continuité de f en x : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall y \in I,\ |y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Dès lors, si $b - x \leqslant \eta$, alors $|f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout t. Notre différence est majorée par (Inégalité triangulaire) :

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_b} \int_x^b \varepsilon = \varepsilon$$

D'où la dérivabilité de F en x et le fait que $F'(x) = f(x)$.

3.5 Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition

$\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Preuve :

Il suffit de montrer que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles. Soit donc $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Il suffit de poser $A_n = A - \dfrac{1}{n} I_n$. Alors, cette suite est une suite de matrice inversible définie pour n assez grand :

Observons pour $n \in \mathbb{N}$, $\det(A_n) = \det\left(A - \dfrac{1}{n} I_n\right) = (-1)^n \times \chi_A\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Or, A possède un nombre fini de valeurs propres (nous sommes en dimension finie). Ainsi, la suite (A_n) se trouve dans $GL_n(\mathbb{R})$ pour n assez grand.

De plus, nous remarquons que $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$

D'où la densité des matrices inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

3.6 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes. (démo de sup)

Proposition Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction Convexe. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Alors, $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Preuve :

Ceci se montre par récurrence sur n : L'inégalité est évidente (par définition d'une fonction convexe) pour $n = 2$.

Supposons que cette inégalité soit vérifiée pour $n \geqslant 2$. Montrons qu'elle reste valide pour $n+1$:

Si $\lambda_{n+1} = 0$, ceci est immédiat. Supposons alors $\lambda_{n+1} \neq 0$, et posons $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Dès lors, nous avons par convexité de f :

$$\begin{aligned}
f\left((1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) &\leqslant (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
(\text{H. R}) \quad &\leqslant (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité par récurrence sur n.

3.7 Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes. (démo de sup)

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction. Nous avons alors :

$$f \text{ est Convexe} \iff \forall (x,y,z) \in I^3,\ x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Preuve :

Supposons f convexe : Alors, $\forall x,y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

Supposons $x<y<z$. Alors, posons $t = \dfrac{y-x}{z-x} \in [0,1]$.

Nous avons alors $y = x+(y-x) = x+t(z-x) = (1-t)x+tz$.

En appliquant la convexité de f, nous obtenons :

$$f(y) \leqslant (1-t)f(x)+tf(z) = f(x)+t(f(z)-f(x))$$

$$f(y)-f(x) \leqslant t(f(z)-f(x))$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

L'autre inégalité s'obtient en manipulant $f(y) \leqslant (1-t)f(x)+tf(z)$ comme :

$$\begin{aligned}
f(y) &\leqslant (1-t)f(x)+tf(z)\\
-f(y) &\geqslant -tf(z)-f(x)+tf(x)\\
f(z)-f(y) &\geqslant f(z)-tf(z)-(f(x)-tf(x))\\
f(z)-f(y) &\geqslant (1-t)(f(z)-f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\dfrac{1-t}{t}f(z)-f(x) \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{t} \Rightarrow \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ .D'où :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Réciproquement, supposons l'inégalité des pentes vérifiée. Soient $x,z \in \mathbb{R}$ avec $x<z$ et $t \in [0;1]$.

Posons alors $y = tx+(1-t)z$. D'après ce qui précède, nous avons $f(tx+(1-t)z) = f(y)$.

Donc, $\dfrac{f(tx+(1-t)z)-f(x)}{(t-1)x+(1-t)z} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(tx+(1-t)z)}{-tx+tz}$

En particulier, $\dfrac{f(tx+(1-t)z)}{(1-t)(z-x)}+\dfrac{f(tx+(1-t)z)}{t(z-x)} \leqslant \dfrac{f(z)}{t(z-x)}+\dfrac{f(x)}{(1-t)(z-x)}$. Donc en multipliant par $(z-x)>0$:

$$f(tx+(1-t)z)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}\right) \leqslant \frac{f(z)}{t}+\frac{f(x)}{(1-t)}$$

$$f(tx+(1-t)z) \leqslant tf(x)+(1-t)f(z) \quad \text{Car } \frac{1}{t}+\frac{1}{1-t} = \frac{1}{t(1-t)}$$

Ce qui est l'inégalité attendue.

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1. Le théorème de Rolle stipule : Soient $a<b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[,\ \ f'(c)=0$

Question 2. Si a est une racine de P d'ordre k, alors cette racine sera d'ordre $k-1$ dans P' (car P comporte alors un facteur $(X-a)^k$, qui devient $k(X-a)^{k-1}$ en dérivant, ceci est d'ailleurs la définition de l'ordre d'une racine).

Question 3. Soit donc $P = \alpha \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant p} (X-a_i)^{k_i}$, polynôme scindé de $\mathbb{R}^X$. Ce polynôme possède alors $\sum\limits_i k_i$ racines réelles par définition (avec multiplicité). Montrons donc que P' possède $\left[\sum\limits_i k_i\right] - 1$ racines réelles :

Chaque pôle perd une multiplicité, nous obtenons donc $\sum\limits_i (k_i - 1) = \left[\sum\limits_i k_i\right] - p$ racines. Or, le théorème de Rolle nous indique qu'entre chaque couple successif (a_i, a_{i+1}), il existe une nouvelle racine (qui diffère donc de a_i et a_{i+1}).

Ceci nous offre donc $p-1$ racines distinctes, soit donc un nombre total de racines valant $\left[\sum\limits_i k_i\right] - 1$. Il vient de plus que P' ne peut posséder plus de racines, car doit être de degré strictement inférieur à celui de P. Dès lors, P peut s'écrire comme produit de racines réelles, d'où le fait que P' soit également scindé.

4.2 Exercice 2

Posons $f : x \mapsto \arctan(x) + x - 1$, application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous avons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + 1$. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x)>0$: f est strictement croissante.

Or, $f(0) = -1<0$, et $f(1) = \dfrac{\pi}{4} + 1 - 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous indique qu'il existe un zéro de f dans $[0,1]$. Le corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure quant à son unicité.
Ainsi, $\exists! x_0 \in [0,1],\ \ \arctan(x) + x = 1$

4.3 Exercice 3

f étant de classe $\mathscr{C}^2$, nous pouvons en donner un Développement Limité en tout point de $\mathbb{R}$. (Attention, la réciproque est fausse pour les ordres supérieurs à 1 !).

Dès lors, soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. Il vient pour $h \in \mathbb{R}$:

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + o(h^2) \quad \text{et} \quad f(t-h) = f(t) - hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + o(h^2).$$

Ainsi, $f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) = h^2 f''(t) + o(h^2)$, d'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2} = f''(t)$.

Nous prenons donc $a = c = 1$ et $b = -2$. Ce triplet est de plus l'unique triplet convenant (il suffit de faire le raisonnement à l'envers afin d'obtenir un système d'équations respecté par ces cœfficients).

4.4 Exercice 4

Question a. Par concavité du sinus sur $[0, \pi]$, il vient que sin est inférieure à ses tangentes. Or, l'application $f : x \mapsto x$ correspond à la corde de sin en $x = 0$. Au-delà de π, il vient que $x \geqslant \pi$, et $\sin(x) \leqslant 1$, d'où l'égalité $\sin(x) \leqslant x$ sur $\mathbb{R}_+$

L'inégalité de gauche utilise cette première inégalité : étudions la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. Alors f est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $f''(x) = -\sin(x) + x$: Nous savons d'après ce qui précède que f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Or, $f'(0) = 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or, $f(0) = 0$, donc f est bien positive sur $\mathbb{R}_+$. Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

Question b. Cette inégalité vient d'être démontrée sur $\mathbb{R}_+$ (voir f'). Or, les deux fonctions proposées sont paires, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $1 - \frac{(-x)^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$. Nous vérifions ainsi l'égalité sur $\mathbb{R}$.

4.5 Exercice 5

Question a. Remarquons une somme de Riemann : Divisons le numérateur et le dénominateur de l'opérande par $\frac{1}{n^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$. En posant $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, le théorème portant sur les sommes de Riemann donne $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

Question b. Idem, rappelons qu'une somme de Riemann d'ordre n, associée à f entre a et b donne :
$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$. Ainsi, par identification, nous remarquons que $\frac{\pi}{2} u_n$ est une somme de Riemann associée à cos entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (nous pouvons retirer le terme n de la somme, car vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc nous pouvons ramener la somme à $0 \leqslant k \leqslant n-1$). Dès lors, $\frac{\pi}{2} u_n \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 1$, donc $u_n \to \frac{2}{\pi}$.

La dernière somme se traite de la même façon, en ajoutant le terme $k = 0$ afin d'obtenir une somme de Riemann à gauche. Nous obtenons donc $u_n \to \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}$

4.6 Exercice 6

Question a. Posons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (1-x)^n$.

Évaluons premièrement la dérivée n—ième de f via la formule de Leibniz : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)$

(Donnons la puissance la plus simple au terme le plus compliqué)

Alors $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{n!}{(n-i)!} (-1)^i (1-x)^{n-i} \times \frac{n!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 (-1)^i \cdot n! \cdot x^i \cdot (1-x)^{n-i}$

Développons donc le terme $(1-x)^{n-i}$ pour donner le terme en x^n : $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i}^2 \cdot n! \cdot \binom{n-i}{k} (-1)^{k+i} \cdot x^{k+i}$

Effectuons le changement d'indice $k \to k+i$: $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{i}^2 \cdot n! \cdot \binom{n-i}{k-i} \cdot (-1)^k x^k$

Ces deux sommes étant finies, nous pouvons intervertir : $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}^2 \cdot n! \cdot \binom{n-i}{k-i} \cdot (-1)^k x^k$

Le coefficient de x^n intervient alors en $k = n$, et vaut exactement $n! \cdot (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Question b. Remarquons que le binôme de Newton donne $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i x^{n+i}$.

Dès lors, $f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{k} (-1)^i \times k! \times x^{n+i-k}$

Le cœfficient de x^n de $f^{(n)}$ se situe donc en $i = n$: ce cœfficient vaut $\binom{n}{n} \times (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} = (-1)^n n! \binom{2n}{n}$

D'après ce qui précède, nous avons alors $n! \cdot (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = (-1)^n \cdot n! \cdot \binom{2n}{n}$. Il vient donc $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

Question c. Nous pouvions établir ce résultat par deux dénombrements d'une même quantité : Considérons un sac comportant n billes noires et n billes blanches. Nous nous proposons de compter le nombre de groupes de n billes que l'on peut tirer d'un tel sac :

Une première manière de compter serait de brutalement prendre n billes de ce sac, soit $\binom{2n}{n}$ possibilités.

Nous pouvons également commencer par prendre k billes blanches, puis $n-k$ billes noires : Ceci nous donne $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ par symétrie des cœfficients binomiaux. D'où $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

4.7 Exercice 7

Calcul classique à connaître! $\cos(kx) = \Re(e^{ikx})$. Donc $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \Re(e^{ikx}) = \Re\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right]$

Or, cette somme est une somme géométrique, de raison e^{ix} : La somme intérieure est connue et vaut:

$$\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Ainsi, $\Re\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right] = \Re\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

4.8 Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Évaluons cette intégrale via une Intégration par Parties : Nous choisissons de dériver f, qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$, et d'intégrer cos.

Donc $\displaystyle\int_a^b \cos(nt)f(t)dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n}f(t)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b \sin(nt)f'(t)dt$.

En particulier, $\displaystyle\left|\int_a^b \cos(nt)f(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sin(nb)f(b) - \sin(na)f(a) - \int_a^b \sin(nt)f'(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b \|f\|_\infty^{[a,b]}\right]$

Or, la quantité interne est indépendante de n, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b \|f\|_\infty^{[a,b]}\right] = 0$ D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt)f(t)dt = 0$$

4.9 Exercice 9

Notons $Q(X) := (X^2+X+1)^2 = (X-j)^2(X-j^2)^2$, avec j et j^2, les deux racines cubiques de l'unité complexes. Afin de déterminer que Q divise tout polynôme $P_n(X)$ défini comme $P_n := (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$, il faut démontrer que j et j^2 sont racines double de tout polynôme P_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P_n(j) = P_n(j^2) = P_n'(j) = P_n'(j^2) = 0$: Rappelons que $1 + j + j^2 = 0$, donc $1 + j = -j^2$.

- $P_n(j) = (j+1)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = (-j^2)^{6n+1} - j - 1 = (-1)^{6n+1}j^2 - j - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$
- $P_n(j^2) = (j^2+1)^{6n+1} - (j^2)^{6n+1} - 1 = (-j)^{6n+1} - j^2 - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$
- $P_n'(X) = (6n+1)(X+1)^{6n} - (6n+1)X^{6n}$, donc $P_n'(j) = (6n+1)(j+1)^{6n} - (6n+1)j^{6n} = (6n+1) - (6n+1) = 0$
- $P_n'(j^2) = (6n+1)(j^2+1)^{6n} - (6n+1)(j^2)^{6n} = (6n+1) - (6n+1) = 0$

Du fait que j et j^2 soient des racines d'ordre deux de chaque P_n, il vient que chaque polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{C}$, et comporte un facteur $(X-j)^2(X-j^2)^2 = Q$. Donc $Q \mid P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.