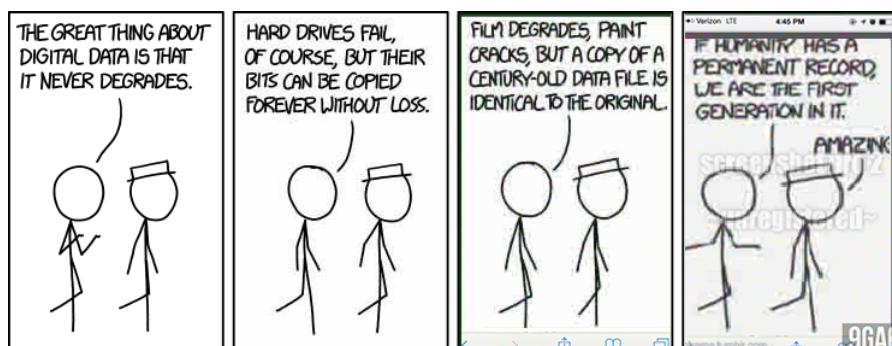


MPI* Physique
TD Traitement du signal

Filtrage numérique



Olivier Caffier



1 Spectres d'un signal échantillonné

Les figures A et B montrer les spectres d'un même signal après échantillonage, la seule différence venant de la fréquence d'échantillonage f_e .

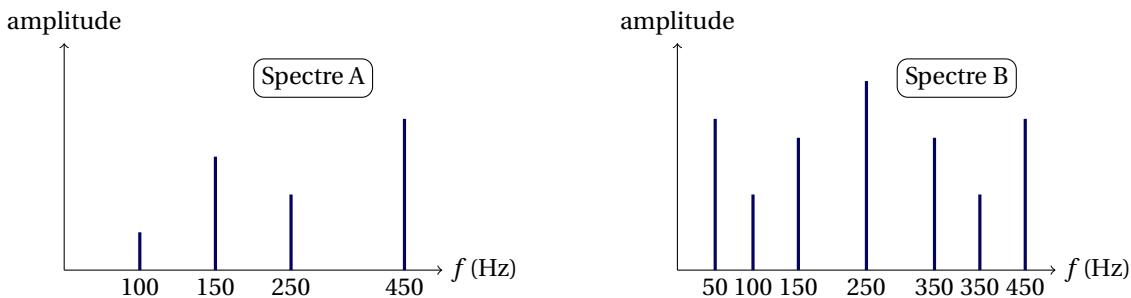


FIGURE 1 – Échantillonage avec A : $f_e = 1\text{kHz}$, B : $f_e = 500\text{Hz}$.

1. Rappelez le critère de Shannon-Nyquist. Supposant qu'il est vérifié pour A, qu'en est-il pour B?
2. Expliquez l'allure du spectre B.
3. Peut-on améliorer le spectre B?

Corrigé :

① On veut que $f_e > 2f_{\max}$, ce qui permettra ensuite d'enlever les parasites via un passe-bas et donc d'avoir un signal échantillonné fidèle au signal analogique de départ.

Ainsi, pour la Fig. A, vu qu'on a supposé le critère respecté : $f_{\max} = 450\text{ Hz}$

Pour la Fig. B : $f_e = 500\text{ Hz}$ donc $f_e < \frac{2f_{\max}}{= 500\text{ Hz}}$

↳ Le critère n'est pas respecté par B.

② ⇒ Détremplément du spectre

Pic signal d'origine	Pics parasites : $f_e - f$; $f_e + f$
100	400 ; 600
150	350 ; 650
250	250 ; 750
450	50 ; 950

↑ pics parasites restitués

③ ⇒ Détérioration du signal irrémédiable

↳ Il aurait fallu faire attention au moment de l'échantillonage avec une meilleure valeur de f_e .

2 Électrocardiogramme

(CCINP MP 2019) On se propose de traiter un enregistrement d'électrocardiogramme.

1. (a) À partir de la figure 2, déterminez la fréquence du signal en Hz, puis en battements par minute.

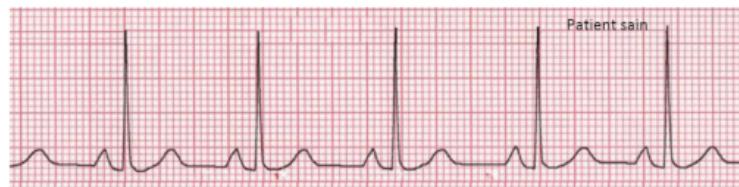


FIGURE 2 – Enregistrement des battements de cœur. Échelle horizontale : 0,2s par division.

- (b) Justifiez le spectre du signal (figure 3).
 (c) Déterminez la fréquence f_m minimale d'échantillonage à choisir pour ce signal.
2. Concentrons-nous sur la Figure 4 : à gauche se trouve le spectre d'origine, et à droite le spectre du signal numérisé à la fréquence $f_s = 440$ Hz.
 (a) Qu'observe-t-on ? Comment s'appelle ce phénomène ?
 (b) Proposez un type de filtre permettant d'atténuer ce phénomène et précisez sa fréquence de coupure f_c .
 (c) Précisez sa réalisation pratique.

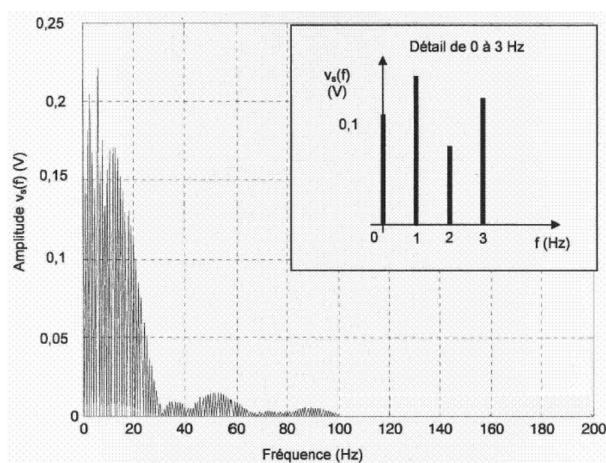


FIGURE 3 – Spectre de l'enregistrement

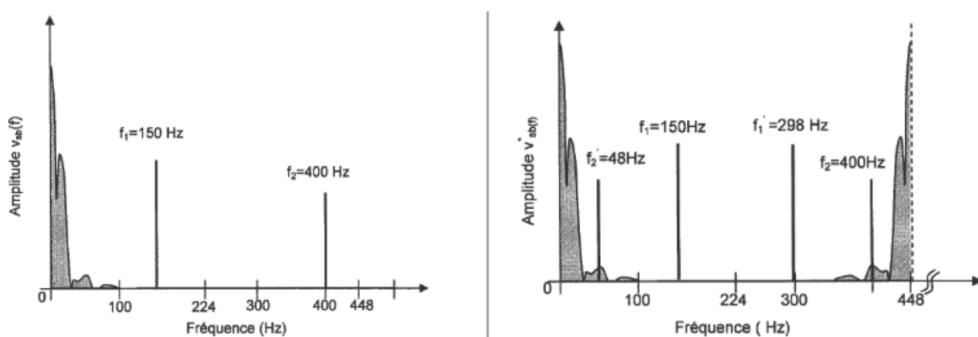


FIGURE 4 – Spectre du signal d'origine (à gauche), spectre du signal échantillonné (à droite)

Corrigé :

1 a) 1 battement pour 4 grands carrés $\Rightarrow T = 0,8 \text{ s}$
 $\Rightarrow f = \frac{1}{T} = 1,25 \text{ Hz}$
 \downarrow
 1 battement / 0,8 sec
 $\Rightarrow \frac{75}{2} \text{ bpm}$

b) \sim Valeur moyenne à 0.1

\sim Fondamental à 4 Hz

\sim les harmoniques sont bien de fréquences mult. du fond.

\sim composante continue pas.

Imprécisions :

o Le fond n'est pas vraiment à 1.

c) On veut $f_m > 2f_{max}$ et ici $f_{max} \approx 100 \text{ Hz} \Rightarrow f_m \approx 200 \text{ Hz}$

2 a) On a \rightarrow 2 fréquences en \oplus : parasites non expliqués

\rightarrow Critère de Shannon non respecté car $f_{max} = 100 \text{ Hz}$: phénomène d'Aliasing.

b) On pourrait penser à un filtre passe-bas anti-aliasing. \rightarrow avec $f_c = \frac{f_e}{2}$ pour isoler le signal et filtrer les parasites
MAIS insuffisant ici car Shannon pas respecté !

Il faut donc un filtre passe-bas avant échantillonnage avec $f_c \approx 125 \text{ Hz}$:

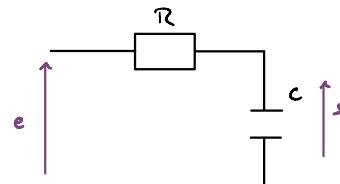
\sim On élimine alors les parasites non expliqués (150 Hz et 400 Hz)

\Rightarrow 48 et 298 Hz n'apparaîtront plus !

\sim f_{max} vaudra alors $f_{max} = 100 \text{ Hz}$, ce qui respectera le critère de Shannon.

POIS filtre passe-bas anti-aliasing après échantillonnage avec $f_c \approx 220 \text{ Hz}$

c) Circuit RC du premier ordre :



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

... \Rightarrow Proposer des valeurs pour R et C ...

3 Convertisseur numérique-analogique à résistances pondérées

Afin d'écouter la musique d'un CD audio, on envoie la sortie numérique donnée par le lecteur CD (ou l'ordinateur) à l'entrée d'un haut-parleur. Le haut-parleur fonctionnant avec un signal analogique, un DAC 4 bits à résistances pondérées (cf. figure 5) : il est constitué d'une tension E constante de référence, de 4 résistances notées n (avec $0 \leq n \leq 3$) avec $R_n = R/2^n$ et de 4 interrupteurs K_n .

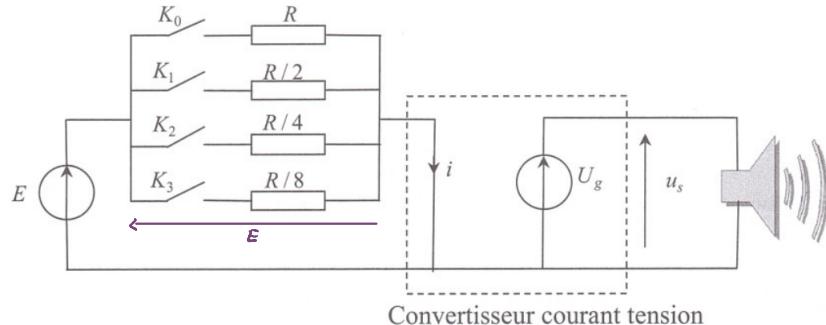


FIGURE 5 – Convertisseur numérique-analogique à résistances pondérées sur 4 bits

Un interrupteur ouvert est l'état 0 et un interrupteur fermé est l'état 1. Par exemple, 1101 signifie que $K_0 = 1, K_1 = 1, K_2 = 0$ et $K_3 = 1$.

Un convertisseur courant-tension (bloc en pointillés) donne une tension U_g . La caractéristique entrée-sortie du convertisseur est donnée en figure 6 : elle comporte une partie linéaire $U_g = R'i$, et une partie de saturation où $U_g = V_{\text{sat}} = 15V$.

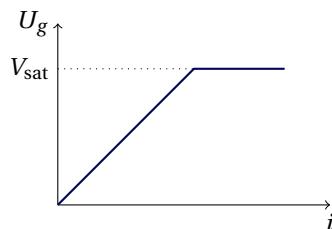


FIGURE 6 – Courbe caractéristique du signal U_g en fonction de i .

- Déterminez l'intensité du courant circulant dans la résistance R_n en fonction de K_n, E et R . Déduisez-en le courant total sortant du premier étage du dispositif.
- On prend $R = R'$ et $E = 1V$. Calculez la tension correspondant à 0000, 0001, 0010, 0011, 0100 et 1111. Commentez.
- Dans un CD réel, l'échantillonage a été fait sur 16 bits et non sur 4. On place donc en parallèle 16 résistances. Calculez la nouvelle tension maximale. Commentez.
- Quelle condition sur E, R et R' doit être imposée pour éviter ce problème?

Corrigé :

① D'après la loi d'Ohm, $U = R_n i_n$ d'où $i_n = \frac{K_n E}{R_n}$

et on a d'après la loi des noeuds : $i = \sum_{n=0}^3 i_n$
 $= \sum_{n=0}^3 \frac{K_n E}{R_n}$

d'où $i = \frac{E}{R} \left(\sum_{n=0}^3 K_n 2^n \right)$

2

Signal numérique	i	U_g (en V)
0000	0	0
0001	i_0	1
0010	i_1	2
0011	$i_2 + i_0$	3
0100	i_2	4
1111	$i_3 + i_2 + i_1 + i_0$	15V

(3) La nouvelle tension max est alors $U_{max} = \sum_{0 \leq n \leq 15} 2^n = 1 \times \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2}$

$$= 2^{16} - 1$$

$$\gg V_{sat} = 15V.$$

On va donc essayer d'éviter ce genre de débordement.

(4) On veut donc que $U_g = R'i_{max} = R' \frac{E}{R} \sum_{n=0}^{15} 2^n \leq 16V$

$$\text{i.e. } \frac{R'}{R} E (2^{16} - 1) \leq 16 \Rightarrow \frac{R'E}{R} \leq \frac{16}{2^{16} - 1}$$

Essentiellement :

On prendra R élevée \Rightarrow fait baisser V_{max}
 \Rightarrow cela évite de diminuer R' (diminuerait U_g et rendrait sa lecture moins précise)
 \hookrightarrow augmenterait le courant dans la branche, DANGER

