Colle 2 : Series
exercices groupe C
MPI(*) Faidherbe

BURGHGRAEVE Marc

28 Septembre 2024

Exercice 19 :

Soit E un K-espace vectoriel normé. On dit d'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qu'elle est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \geq n_0, |u_n - u_p| \leq \varepsilon$.

a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
Réponse : Soit (U_n) une suite convergente, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|Un - l| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $p, q \geq n_0$, on a $|U_p - U_q| = |(U_p - l) + (l - U_q)| \leq |U_p - l| + |U_q - l| \leq 2\varepsilon$ ce qui donne bien le résultat voulu.

b) Montrer que si $E = K = \mathbb{Q}$, il existe des suites de Cauchy non convergentes.
Réponse : Considérons la suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n}$. Il s'agit d'une suite de rationnels qui converge dans $\mathbb{R}$, donc est de Cauchy d'après la question précédente, or sa limite $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

c) Montrer que si $E = K = \mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.
Réponse : On applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$. On sait qu'il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $p, q \geq N$ on a $|u_p - u_q| \leq 1$. En particulier en fixant $q = N$ on a pour $p \geq N$: $|u_p| \leq |u_n| + 1$. Il est clair que $|U_n$ est majoré par $max(|u_0|, ..., |u_{N-1}|, |u_N|)$. On sait de plus que u_n admet une sous suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit a la limite de la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) est une suite de Cauchy, il existe $N \geq 1$ tel que, pour $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$. De plus, puisque $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a, on sait qu'il existe un entier n tel que $\varphi(n) \geq N$ et $|u_{\varphi(n)} - a| \leq \varepsilon$.

Maintenant, si $p \geq \varphi(n)$, alors

$$|u_p - a| = |u_p - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - a| \leq |u_p - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - a| \leq 2\varepsilon.$$

d) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.
Réponse : Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E et soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x_0 \in E$,

$$d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Puisque $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$n, p \geq N \Rightarrow d(x_n, x_p) \leq \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x_p)) \leq \varepsilon.$$

Donc $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F.

e) Que dire si l'application est juste supposée continue ?
Réponse : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, continue sur $]0;1]$. Or, si on prend $U_n = \frac{1}{n}$, qui est de Cauchy car convergente, son image par f est $f(U_n) = n$ qui diverge donc en particulier n'est pas de Cauchy.

Exercice 20 :

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que si x et y sont réels positifs, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
Réponse : On peut donc appliquer l'inégalité de Jensen. Il vient que :

$$\ln(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q).$$

Le résultat est immédiat en utilisant les propriétés du log puis en appliquant l'exponentielle.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$.
Réponse : Supposons que la somme des $|x_k|^p$ et des $|y_k|^q$ soit égale à 1. On ne perd pas de généralité car si par exemple la somme des $|x_k|^p$ vaut l alors on retrouve le résultat avec $x'_k = \frac{x_k}{\sqrt[p]{l}}$. Dès lors en sommant l'inégalité précédente, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cela termine la preuve, puisque

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

c) En déduire que $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Réponse : A titre culturel, on vient de prouver l'inégalité de Hölder, et pour la suite, il faut en fait démontrer l'inégalité de Minkowski (l'inégalité triangulaire étant le seul point complexe de la question, les autres éléments étant triviaux). On décompose $(x_i + y_i)^p$ en

$$(x_i + y_i)^{p-1}x_i + (x_i + y_i)^{p-1}y_i.$$

Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire que $pq - q = p$. En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des termes, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat.

Exercice 21 :

Étudier suivant le paramètre α la sommabilité des familles $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$,$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$, et $\left(\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$

Réponse : On va donner les lignes directrices permettant de résoudre l'exercice.

- Il faut poser $I_p = \{(m,n)\in\mathbb{N}^* | m+n=p\}$
  Alors I_p est une partition de l'ensemble et est de cardinal $p-1$.
  La somme est donc égale à
  $$\sum_p \frac{(p-1)}{p^\alpha}$$
  qui converge si et seulement si $\alpha > 2$
- Ici il faut voir que
  $$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}$$
  La deuxième inégalité se remarque en voyant que $p^2+q^2 \geq \frac{(p+q)^2}{2}$ car $\frac{p^2}{2}+\frac{q^2}{2} \geq pq$ en utilisant $(p-q)^2$. Il suffit alors de mettre à la puissance α, poser le même ensemble que précédemment et par encadrement on trouve $\alpha > 1$
- En utilisant que $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, on a :
  $$\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha} \leq \frac{1}{2(mn)^{\frac{\alpha}{2}}}$$
  La troisième famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$

Exercice 22 :

a) Montrer que pour tout réel $x\in[-1,1]$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.
Réponse : On a :
$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} x^{kl} = \sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{1-x^k}$$

D'autre part, posons, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \{(k,l);\ k \cdot l = n\}.$$

Alors, nous avons aussi :

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{n\geq 1} \sum_{(k,l)\in I_n} x^{kl} = \sum_{n\geq 1} \mathrm{card}(I_n) \cdot x^n.$$

Mais le cardinal de I_n est justement le nombre de diviseurs de n.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$.
Réponse : Si p et q existent, alors p est la valuation dyadique (ou 2-adique) de n, c'est-à-dire la puissance de 2 dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Ainsi, $2m+1$ est le produit des autres termes dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, ces termes étant impairs, car on a enlevé le facteur 2. Ces termes sont donc uniques. Réciproquement, si on note p la valuation dyadique de n et $2m+1$ le produit restant, alors on a l'égalité voulue, d'où l'existence et l'unicité de p et m.

Toujours sous réserve de sommabilité, si on note $h(z)$ la somme de gauche :

$$h(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^p} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{2^{p+1}}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^{p+1}n+2^p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^p(2n+1)}$$

Or, d'après la première partie de la question, la somme double ci-dessus n'est rien d'autre qu'un regroupement par paquets de $\mathbb{N}^*$: tout entier peut s'écrire de façon unique sous la forme vue précédemment, donc

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{p=0}^{+\infty}\{2^p(2n+1)\}.$$

Dès lors, d'après le théorème de regroupement par paquets (toujours sous réserve de sommabilité) :

$$h(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k = \frac{z}{1-z}$$

Il suffit pour conclure de prouver la sommabilité de la famille $(z^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, ce qui est immédiat puisque la série $\sum z^k$ converge absolument pour $|z| < 1$.

c) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
Réponse :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^{2*}} x^{p(2n-1)} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^{2*}} x^{2pn-p} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{x^p} x^{2p} \frac{1}{1-x^{2p}}$$

Exercice 23 : (Mines MP 2022)

(Sans préparation)

Soit $f \in C^1([R^+, \mathbb{R}^+])$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1) Montrer que $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge.
Réponse : L'idée est qu'une fonction vérifiant une telle propriété décroît très vite vers 0 en $+\infty$, plus vite que n'importe quelle fonction e^{-Mz}. Concrètement, avec des quantificateurs, cela se traduit comme suit. Soit $M > 0$. Alors il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -M.$$
Pour $A \leq x \leq y$, en intégrant puis en passant à l'exponentielle, que $f(y) \leq f(x)e^{-M(y-x)}$. Si on fixe $x = A$ et si $y = n$ est un entier, on obtient que $0 \leq f(n) \leq Ce^{-Mn}$, où C est une constante. Ceci prouve que la série est convergente.

2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.
Réponse : Cherchons désormais un équivalent du reste. Pour $n \geq A$ et $p \geq 0$, on a
$$f(n+p) \leq f(n)e^{-Mp}.$$
Si on somme ceci pour p de 0 à $+\infty$, on trouve
$$f(n) \leq R_n \leq f(n)\sum_{p=0}^{+\infty} e^{pM} = \frac{f(n)}{1-e^{-M}}.$$
Fixons désormais $\varepsilon > 0$. Si M est choisi de sorte que $\frac{1}{1-e^{-M}} \leq 1+\varepsilon$, alors on peut trouver A tel que, pour tout $n \geq A$, on a
$$f(n) \leq R_n \leq (1+\varepsilon)f(n).$$
Ceci prouve que $f(n) \sim R_n$ à l'infini.

Exercice 24 :

Soit $p > 1$ un entier naturel. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{p=1\\p\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \frac{1}{n^2-p^2}$

Que cela signifie-t-il en termes de sommabilité ?

Réponse : Vous pouvez calculer la somme partielle sur m jusque $N \geq n+1$ avec n fixé. Il faut casser la somme en n+1, décomposer $\frac{1}{n^2-m^2}$ en éléments simples, puis arriver au résultat $\frac{3}{4n^2}$ donc la somme double vaut $\frac{\pi^2}{8}$.
On pose $u_{n,m} = \frac{1}{m^2-n^2}$ si $m \neq n$ et 0 sinon. Les indices étant muets :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-m^2} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{+\infty} \frac{-1}{m^2-n^2} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-u_{m,n}).$$

Or, en passant par les sommes partielles (ou en utilisant la linéarité des sommes infinies de séries convergentes), on trouve que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-u_{m,n}) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n} = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

En particulier, ces deux sommes doubles sont distinctes, et donc la famille n'est pas sommable.

Exercice 25 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Pour cela, considérer $J(n) = \left\{x \in [a,b] / \frac{f(x^+)-f(x^-)}{f(x^+)-f(x^-)} > \frac{1}{n}\right\}$.

Réponse : Démontrons d'abord que $J(n)$ est fini. Soient $x_1 < \cdots < x_p$ des éléments distincts de $J(n)$ et prenons $y_0, \dots, y_p$ des réels vérifiant

$$a \leq y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_p < y_p \leq b.$$

Alors, par définition de $J(n)$, et puisque la fonction f est croissante, on sait que

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) \geq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, p.$$

On en déduit que

$$f(b) - f(a) \geq f(y_p) - f(y_0) = \sum_{i=1}^{p} \left(f(y_i) - f(y_{i-1})\right) \geq \frac{p}{n}.$$

On a donc

$$p \leq n\left(f(b) - f(a)\right)$$

ce qui prouve que le cardinal de $J(n)$ est fini.

L'ensemble des points de discontinuité de f est contenu dans la réunion des $J(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, plus éventuellement a et/ou b. S'écrivant comme réunion dénombrable d'ensembles finis, cet ensemble est au plus dénombrable.