Colles MPi* Semaine n°4 du 23 au 27/09/2024 (Programme n°2)

Vallaeys Pascal

11 septembre 2024

Thème : Notion de norme et séries numériques ou à valeurs vectorielles

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Dutilleul
- Mabillotte
- Bodet
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Caffier
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- BISKUPSKI
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

<u>Notions de norme :</u>

- Définition d'une norme.
- Montrer que les normes usuelles sont des normes. (pas de norme euclidienne) (démo)
- Deuxième inégalité triangulaire. (démo)

- Montrer qu'une boule est convexe. (démo)
- Unicité de la limite d'une suite si elle existe. (démo).
- Exemple de deux normes non équivalentes.

Séries numériques et sommabilité :

- Définition d'une série convergente. Montrer que le reste tend vers 0 (démo)
- Séries de Riemann par comparaison à une intégrale « à la main » (démo)
- Une série absolument convergente est convergente. (démo pour le cas réel)
- Critère de convergence des séries alternées (démo)
- Exemple de suites équivalentes telles que les séries associées ne soient pas de même nature. (démo)
- Citer précisément la règle de D'Alembert.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

Notions de norme :

- Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes. (démo)

Séries numériques et sommabilité :

- Citer complètement les théorèmes de sommation des relations de comparaison.
- Critères de convergence (démo pour $\leq$, on en déduit pour o,O,équivalent)
- Principe de transformation suite-série, exemple : la constante d'Euler (démo)
- Règle de d'Alembert (démo)
- Définition d'une famille sommable, de réels positifs, puis de complexes.
- Citer le théorème de sommation par paquets (version réelle positive + version complexe)
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

Notions de norme :

- Deux définitions équivalentes d'une valeur d'adhérence d'une suite. (démo de l'équivalence, non fait en classe)

Séries numériques et sommabilité :

- Démonstration des deux théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent, cas divergent). (démo) Application au Th de Césaro.
- Démonstration de la formule de Stirling. (démo)
- Résultats sur les séries de Bertrand (HP) (démo)
- Transformation d'Abel (HP), montrer que $\sum \frac{sin(nx)}{n}$ converge. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 :
a) Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toutes matrices A et B de E, on ait $N(AB) = N(A).N(B)$?
b) Même question avec $N(AB) \leq N(A).N(B)$

Exercice 3 :
Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum\limits_{k=0}^{n} |P(k)| \leq \alpha. \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-X^2}. |P(X)|.dX$.

b) Si r est un entier naturel, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum\limits_{k=0}^{r} |P(k)| \leq \alpha. \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-X^2}. |P(X)|.dX$.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2022)
Nature de $\sum \cos\left(n^2\pi \ln(1-\frac{1}{n})\right)$

Exercice 5 : (CCINP MPi 2023)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 : (ENSEA/ENSIIE MPi 2023)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.
1. Montrer que la suite (S_n) converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de (S_n).

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2023)
1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées. Que peut-on dire du reste ?
2. Étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}$.
3. Comment peut-on donner une valeur à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$?
4. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\frac{1}{3^n\ n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{2/3}}$.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \dfrac{C}{n^a}$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2021)
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1+\sin n}$ converge.
a) A l'aide d'un développement limité.
b) En caractérisant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{n+1+\sin n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ (principe de l'éclatement).
c) En montrant que le critère spécial des séries alternées s'applique.

Exercice 10 :
a) Trouver deux réels α et β tels que $\int\limits_0^{\pi} \left(\alpha t + \beta t^2\right).\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$, pour tout entier naturel strictement positif n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos(nt)$.

c) Montrer que si ϕ est une fonction de classe C^1, $\underset{N\to+\infty}{Lim} \int\limits_0^{\pi} \phi(t).\sin(Nt).dt = 0$.

d) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 11 :

Soient $(u_n)_{n\in\aleph}$ et $(v_n)_{n\in\aleph}$ deux suites strictement positives telles que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

a) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 12 : (Mines MP 2022)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$: $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ et :

$N_1(f) = \|f\|_1 + \ \|f'\|_1$ et $N_2(f) = |f(0)| + \ \|f'\|_1$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 13 : (Mines MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 : (Mines MP 2021)

Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k\, x^{2^k}}{1 + x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$

Exercice 15 : (Mines télécom MP 2021)

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

Exercice 16 :

On pose $u_0 = 1$ et pose tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

b) On pose $v_n = {u_n}^{\alpha}$. Déterminer un réel α tel que $\underset{n\to+\infty}{Lim} (v_{n+1} - v_n)$ soit finie et non nulle.

c) Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 17 :

On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{1}{n.n!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

En déduire que e est irrationnel.

Exercice 18 : Règle de Raabe Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\aleph}$ une suite réelle telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$.

Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge. (On posera $w_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et on montrera que la suite (w_n) converge).

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 19 :

Soit E un K-espace vectoriel normé. On dit d'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qu'elle est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$tq $\forall n, p \geq n_0, |u_n - u_p| \leq \varepsilon$.

a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

b) Montrer que si $E = K = \mathbb{Q}$, il existe des suites de Cauchy non convergentes.

c) Montrer que si $E = K = \mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.

d) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.

e) Que dire si l'application est juste supposée continue ?

Exercice 20 :

Soient p>1 et q>1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que si x et y sont des réels positifs, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k.y_k| \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

c) En déduire que $\|X\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 21 : Etudier suivant le paramètre α la sommabilité des familles $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 22 :

a) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)\, x^n$ où d(n) désigne le nombre de diviseurs de n.

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$.

Exercice 23 : (Mines MP 2022)

(Sans préparation)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge.

2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 24 : Soit p>1 un entier naturel. Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$.

Que cela signifie-t-il en termes de sommabilité ?

Exercice 25 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Pour cela, considérer :$J(n) = \left\{x \in [a,b] \,/\, f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n}\right\}$

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 1,5,6,7,43,46,40,61.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : notions de norme et séries numériques et vectorielles. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°2
- Groupe 5 à 7 : Programme n°2
- Groupe 8 à 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 à 14 : Programme n°1