Khôlles : Séries Entières

- 04 - 08 Décembre 2023 -

Sommaire

1 Questions de cours - Tout groupe

1.1 Lemme d'Abel (démo).

Lemme d'Abel

Soit $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $(a_n {z_0}^n)_n$ soit bornée.

Alors, $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est Absolument convergente.

Preuve **:**

Par hypothèse, $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n {z_0}^n| \leqslant K$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < |z_0|$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = |a_n {z_0}^n| \times \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant K \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} K \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

Or, par hypothèse, $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, donc est le terme général d'une série géométrique convergente.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ Converge, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument.

1.2 Définitions du rayon + définitions équivalentes.

Définition

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Posons $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la série entière associée.

Nous avons quatre définitions équivalentes du rayon de convergence d'une série entière :

- $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ |z| \mid a_n z^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \}$
- $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ |z| \mid (a_n z^n) \text{ bornée} \}$
- $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ |z| \mid \Sigma a_n z^n \text{ CV Absolument} \}$
- $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ |z| \mid \Sigma a_n z^n \text{ CV} \}$

1.3 Convergence normale d'une série entière sur les segments inclus dans $]-R, R[$ (démo)

Proposition

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.

- Cas réel : $\forall [a,b] \subset]-R;R[$, $\sum_n a_n x^n$ converge Normalement sur $[a,b]$
- Cas Complexe : $\forall K \subset D_O(0,R)$ compact, $\sum_n a_n x^n$ converge Normalement sur K

Preuve :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Alors, f_n est bornée sur $[a,b]$ (car $\mathscr{C}^0$ sur un segment).

De plus, $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |a_n x^n| = a_n c^n$ où $c = \max(|a|,|b|)$.

Or, $\sum_n |a_n c^n|$ est convergente car $c<R$, donc $\sum_n \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ CV, donc $\sum_n f_n$ Converge normalement sur $[a,b]$

1.4 Règle de d'Alembert pour les séries entières (démo à partir de la règle pour les séries numériques).

Théorème

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ (ou a partir d'un certain rang.)

On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in R_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, $R = \frac{1}{L}$ (par extension, si $L = 0$ ou $+\infty$, $R = +\infty$ ou 0)

Preuve :

On utilise la règle de d'Alembert pour les séries numériques.
$\forall z \in \mathbb{C}^*, u_n = |a_n z^n|$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot z\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \cdot |z|$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- Si $L \cdot |z| < 1$, ceci équivaut à $|z| < \frac{1}{L}$, et la règle de d'Alembert affirme que $\sum_n u_n$ CV. Donc la série entière est absolument convergente.
- Si $L \cdot |z| > 1$, ceci équivaut à $|z| > \frac{1}{L}$, et la règle de d'Alembert affirme que $\sum_n u_n$ DV. Donc la série entière diverge.

Dès lors, $R = \frac{1}{L}$

1.5 Continuité d'une fonction définie par une SE sur $]-R,R[$ (démo)

Proposition

Soit $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de CV R>0.

Alors, S est continue sur $]-R,R[$ (⚠pas sur $[-R,R]$ a priori).

De même, si l'on note $S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors S est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $D_O(0,R)$

Preuve :

On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Soit $[a,b] \subset]-R,R[$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue.

De plus, la série $\sum_n f_n$ converge normalement.

D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions, alors S $\mathscr{C}^0$ sur $[a,b]$.

Or, ceci est vrai pour tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$, donc S est continue sur $]-R,R[$

1.6 Caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une SE sur $]-R,R[$ (démo).

Théorème

Une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ouvert de convergence et dérivable terme-à-terme.
On peut également l'intégrer terme-à-terme.

Soit $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de CV R>0.

- Alors S est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus, $\forall x \in]-R,R[, S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
- $\forall p \in \mathbb{N}^*, S^{(p)}(x)=\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$

Preuve :

On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Soit $[a,b] \subset]-R,R[$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^1 sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b], f_n'(x)=n a_n x^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.
- $\sum_n f_n$ CVS sur $[a,b]$ car $[a,b] \subset]-R,R[$
- $R\left(\sum_n n a_n x^{n-1}\right)=R \Rightarrow \sum_n f_n'$ CVN

$\Rightarrow$ S est C^1. Or, ceci est vrai pour tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$. Ainsi, S est $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$. Or, S' est une série entière de même rayon. Donc par récurrence immédiate, S est également de classe $\mathscr{C}^2,\ldots,\mathscr{C}^\infty$

1.7 Intégration d'une SE sur un segment inclus dans $]-R, R[$

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable.

On suppose qu'il existe $R>0$ tel qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $]-R, R[\subset I$ et $\forall x \in]-R, R[, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors, $\forall x \in]-R, R[, f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Preuve :

On note $g(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. D'après le théorème du caractère $\mathscr{C}^\infty$, g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, $\forall x \in]-R, R[$,

$g'(x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f'(x)$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-R, R[, f(x) = g(x) + \alpha$. Or, pour $x = 0$: $f(0) = g(0) + \alpha$. Donc $\alpha = 0$

$\Rightarrow f = g$ sur $]-R, R[$

1.8 Expression des coefficients à partir des dérivées de S en 0

Proposition

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R>0$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ (i.e les coefficients de Taylor)

Preuve :

S est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[$:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$\Rightarrow S^{(k)}(0) = a_k \frac{k!}{0!} \Rightarrow a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

1.9 Unicité des coefficients

Corollaire

Soit $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Soit $R = \min(R_a, R_b) > 0$.

1. $[\forall x \in]-R, R[, S_a(x) = S_b(x)] \iff [\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n]$
2. $[\forall x \in]-R, R[, S_a(x) = 0] \iff [\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0]$

Preuve :

1. $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \dfrac{S_a^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{S_b^{(k)}(0)}{k!} = b_k$ (réciproque immédiate)
2. $S_a(x) = 0 = \sum_n 0 \cdot x^n$. Donc, d'après 1), $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0$

1.10 DSE Usuels (démo)

Famille 1, Obtenus à partir du DSE de $\dfrac{1}{1-x}$

- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum_n x^n$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x} = \sum_n (-1)^n x^n$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_n \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_n \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_n (-1)^n x^{2n}$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_n \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_n \dfrac{x^n}{n}$

Famille 2, Obtenus à partir du DSE de l'exponentielle

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_n \dfrac{x^n}{n!}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \sum_n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh(x) = \sum_n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_n \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_n \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Un dernier pour la route :

• $\forall x \in]-1,1[, (1+x)^\alpha = \sum_n \dfrac{x^n}{n!} \cdot \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

Preuve :

Commençons par la famille du DSE de $\dfrac{1}{1-x}$. Donnons premièrement ce DSE :

Il suffit de démontrer la formule d'une série géométrique de raison x pour $|x|<1$:
Rappelons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.

Cette formule peut se trouver par récurrence (mais ceci est très long et très peu intéressant), ou bien en faisant apparaître une somme télescopique : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\displaystyle(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$ (par télescopage).

Dès lors, il suffit de diviser par $1-x$ (toujours en prenant $x \neq 1$) afin de retrouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

De plus, si $|x|<1$, alors cette série est convergente, et par passage à la limite sur n, nous retrouvons $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

(car $x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ avec $|x|<1$). Dès lors, nous pouvons trouver les autres DSE associés :

1. En replaçant x par $-x$, il vient que $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$
2. En intégrant terme-à-terme le DSE de $\dfrac{1}{1+x}$ (voir le théorème d'intégration pour les Séries Entières sur leur disque de Convergence), nous obtenons $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$
3. De même, en intégrant le DSE de $\dfrac{1}{1-x}$, nous obtenons $\displaystyle-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$
4. En remplaçant x par x^2 dans le DSE de $\dfrac{1}{1+x}$, nous obtenons $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$
5. Finalement, en intégrant le DSE de $\dfrac{1}{1+x^2}$, nous obtenons $\displaystyle\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Le DSE de l'exponentielle peut s'obtenir par la formule de Taylor Reste Intégral, avec le reste intégral convergeant vers 0. Donnons néanmoins la méthode de l'équation différentielle afin de déterminer le DSE de l'exponentielle :

Supposons que l'exponentielle soit développable en série Entière sur $]-R,R[$ avec $R \neq 0$. Alors l'exponentielle vérifie le problème de Cauchy suivant (par définition pour le moment) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Alors, si $\displaystyle\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, nous avons $\displaystyle\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Ainsi, $\displaystyle\exp'(z) - \exp(z) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 0$.

En effectuant un changement d'indice dans l'expression de $\exp'$ afin de revenir à z^n, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} - a_n)z^n = 0$$

Or, ce DSE est valable avec un Rayon non nul, nous avons donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} - a_n = 0$ (par unicité du DSE de 0). Ainsi, la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ avec $a_0 = \exp(0) = 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

Nous vérifions simplement que le Rayon de convergence de la série entière $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ est non nul par la Règle de D'Alembert. Nous avons en effet $\left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right| \to 0 \Rightarrow R = +\infty$.

Dès lors, S et exp sont deux fonctions solutions du même problème de Cauchy, ces deux fonctions sont alors égales : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Nous pouvons même poser pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

Nous pouvons alors trouver les DSE du cosinus et sinus hyperboliques :

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Par somme et différence de DSE, il vient que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \dfrac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n!)}$ (les termes avec n impair se sont compensés).

Idem, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (les termes avec n pair se sont compensés).

Retrouver les DSE de sin et cos se fait également par la méthode de l'équation différentielle (nous ne pouvons pas encore utiliser les formules reliant ces fonctions à exp, ceci serait tricher!).

cos est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' = -y \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

sin est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' = -y \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Nous laissons le lecteur vérifier qu'en supposant que ces fonctions soient bien développables en série entière, avec a_n la suite des coefficients et un Rayon de convergence non nul, nous arrivons à la relation de récurrence suivante pour les deux fonctions :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \iff a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

Il faut alors les deux termes a_0 et a_1 afin de déterminer uniquement cette suite (qui impose un rayon de convergence non nul).

Les conditions initiales nous donnent a_0 et a_1 : $S(0) = a_0$ et $S'(0) = a_1$.

Ainsi, pour cos : $a_0 = 1$, $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $a_{2n+1} = 0$.

Pour sin : $a_0 = 0$, $a_1 = 1 \Rightarrow a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$.

1.11 Obtention du DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle

Preuve :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Alors, f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus, $\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

Dès lors, $(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0 \quad (\mathscr{E})$

Soit $S : x \mapsto \sum_n a_n x^n$. On suppose R>0, et que S vérifie la relation $(\mathscr{E})$

$\forall x \in]-R,R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$

$\forall x \in]-R,R[,\ (1+x)S'(x) - \alpha S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n)x^n$

Dès lors, S est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} (n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n \iff a_{n+1} = \frac{(\alpha-n)}{n+1}a_n$

D'où $a_n = \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!}a_0$.

Montrons que R>0 : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim \frac{n}{n} = 1$, donc $R = \frac{1}{1} = 1>0$.

Posons alors P $\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Alors, f est solution de P, tout comme S si $a_0 = 1$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, $f = S$ sur $]-R,R[=]-1,1[$.

Dès lors, $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!}x^n$

1.12 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (après prolongement)

Preuve :

Il suffit de Donner le DSE de cette application, en posant 1 comme valeur en $x = 0$. (On remarque ici le taux d'accroissement de l'application sin au voisinage de 0, donc la valeur limite vaut $\sin'(0) = \cos(0) = 1$).

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\sin(x)}{x} = \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} := S(x)$.

Remarquons que cette égalité reste vraie avec $x = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\sin(x)}{x} = \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$. Dès lors, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que série entière de Rayon de convergence Infini.

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Utilisation des relations de comparaison pour comparer les rayons de deux séries entières (démo).

Proposition

Soit $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, R\left(\sum_n \lambda a_n z^n\right) = R_a$
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$
3. $a_n = \mathcal{O}(b_n) \Rightarrow R_a \geqslant R_b$
4. $a_n = o(b_n) \Rightarrow R_a \geqslant R_b$
5. $a_n \sim (b_n) \Rightarrow R_a = R_b$

Preuve :

1. Direct
2. $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant |b_n|$.
   $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z|<R_b$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n|$ CV. Or, $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ CV, d'où $R_a \geqslant R_b$
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall n \geqslant N, |a_n| \leqslant K|b_n|$.
   D'après 2)., $R_a \geqslant R\left(\sum_n K b_n z^n\right) = R_b$
4. $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(b_n) \Rightarrow a_n \geqslant b_n$
5. si $a_n \sim b_n$, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(a_n)$, donc $R_a \leqslant R_b$ et $R_b \leqslant R_a \Rightarrow R_a = R_b$

2.2 Produit de Cauchy de deux séries entières + Rayon. (démo à partir du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)

Proposition

Soit $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$, et notons R_c, le rayon de convergence de $\sum_n c_n z^n$.

Alors, $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)$

Preuve :

$\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| \leqslant R_a$ et $|z| \leqslant R_b$:

Les deux séries entières $S_a(z)$ et $S_b(z)$ sont absolument convergentes. Dès lors, par produit de Cauchy sur les séries numériques :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

D'où la convergence absolue au passage : $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$.

2.3 Lemme : $R(\Sigma n a_n x^n) = R(\Sigma a_n x^n)$ (démo).

Lemme

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de CV $R>0$.

Alors,

$$\left.\begin{aligned} R\left(\sum_n n a_n x^n\right) &= R \\ R\left(\sum_n \frac{a_n}{n} x^n\right) &= R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{Z}^*, R\left(\sum_n n^p a_n x^n\right) = R$$

Preuve :

On pose $b_n = n a_n$ et $R_b = R\left(\sum_n b_n x^n\right)$. Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leqslant |b_n| \Rightarrow R \geqslant R_b$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x|<R$. Posons $x' = \dfrac{|x|+R}{2}$ (Donc $|x|<|x'|<R$).

Nous avons alors que $\sum_n a_n (x')^n$ est absolument convergente.

De plus : $|b_n x^n| = |n a_n x^n| = n\left|\frac{x}{x'}\right|^n |a_n (x')^n|$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} n\left|\frac{x}{x'}\right|^n = 0 \Rightarrow |b_n x^n| = o(|a_n (x')^n|)$

Donc $\sum_n b_n x^n$ CVA. Dès lors, $\forall x \in]-R, R[, \sum_n b_n x^n$ CVA $\Rightarrow R_b \geqslant R \Rightarrow R = R_b$

2.4 Exemple de fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, mais non DSE (démo).

Exemple

Posons $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

Alors, montrons que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

- f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = \left(\dfrac{-6}{x^4} + \dfrac{4}{x^6}\right) e^{\frac{-1}{x^2}}$
- Par récurrence, posons H_n : "$\exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{\frac{-1}{x^2}}$".

  H_0, H_1, H_2 sont vraies d'après ce qui précède. Supposons H_n :

  $$f^{(n+1)}(x) = \frac{2P_n(x) + x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

  Dès lors, par principe de récurrence H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$:
On pose $u = \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = |P_n(\frac{1}{\sqrt{u}}) \cdot u^{\frac{3n}{2}} e^{-u}| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \text{ Par Croissances Comparées}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
Par théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$, appliqué à tout ordre, $f^{(n)}(0) = 0$, donc f est $\mathscr{C}^\infty$.

Enfin, si f était développable en série entière, $\exists R>0, (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, donc f est identiquement nulle sur $]-R, R[$ avec $R>0$, ce qui est absurde.
Nous avons dès lors une fonction $\mathscr{C}^\infty$ non DSE aux alentours de 0

2.5 Théorème de convergence radial d'Abel

Théorème

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R>0$

Si $\sum_n a_n R^n$ Converge, alors S est continue en R (donc sur $[0,R]$. i.e, $\lim_{x\to R} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$

Preuve **Cas "Simple"** ***:***

On suppose que $\sum_n a_n R^n$ Converge Absolument.

On note alors $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Donc $\|f_n\|_\infty^{[0,R]} = |a_n R^n|$. Or, la série associée converge absolument par hypothèse. Ainsi, $\sum_n f_n$ CVN sur $[0,R]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,R] \Rightarrow$ S est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,R]$. D'où en particulier, $\lim_{x\to R} S(x) = S(R)$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Équivalence entre les quatre définitions du rayon de convergence (démo).

Preuve :

Posons :

- $R_a = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\{\, |z| \mid a_n z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$
- $R_b = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\{\, |z| \mid (a_n z^n) \text{ bornée}\}$
- $R_c = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\{\, |z| \mid \Sigma a_n z^n \text{ CV Absolument}\}$
- $R_d = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\{\, |z| \mid \Sigma a_n z^n \text{ CV}\}$

Nous avons que [CVA] $\Rightarrow$ [CV] $\Rightarrow$ $[(a_n z^n)_n \to 0] \Rightarrow [(a_n z^n)_n$ bornée]. Donc $R_c \leqslant R_d \leqslant R_a \leqslant R_b$.

Soit $\alpha \in]0, R_b[$. Par définition de la borne sup : $\exists z_0 \in \mathbb{C}, \alpha < |z_0| \leqslant R_a$.

Or, $|z_0| \leqslant R_a \Rightarrow (a_n z_0^n)_n$ bornée, donc, d'après le théorème d'Abel, $\sum\limits_n a_n \alpha^n$ CVA. Donc, $\alpha \leqslant R_c$

Donc, $\forall \alpha \in]0, R_b[, \alpha \in]0, R_c[\Rightarrow R_c \geqslant R_b$

D'où $R_a = R_b = R_c = R_c$

3.2 Démonstration du théorème de convergence radial d'Abel (démo du cas général)

Preuve :

Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R>0$

On suppose que $S(R)$ converge. Montrons que S est continue sur $[0, R]$:

On commence par se ramener à $R = 1$, pour ce faire, il suffit de poser la série entière qui a x associe $S(Rx)$.

Travaillons dès lors sur $S(x)$ avec $R = 1$:

$\forall x \in]0, 1[, |S(x) - S(1)| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n - 1)\right|$.

On note $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = R_{n-1} - R_n$.

$$\forall x \in]0, 1[, |S_N(x) - S_N(1)| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n (x^n - 1)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} (R_{n-1} - R_n)(x^n - 1)\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{N} R_n (x^{n+1} - x^n) - R_n (x^n - 1)\right|$$

Or, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x) = S(x)$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(1) = S(1)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} R_N = 0$.

$\lim\limits_{N\to+\infty} x^N = 0$ car $|x|<1$.

Ainsi, par passage à la limite : $S(x)-S(1)=\left|\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^{n+1}-x^n)\right|=|x-1|\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, |R_n|\leqslant\varepsilon$.

$\forall x\in[0,1[, |S(x)-S(1)|\leqslant|x-1|\cdot\left|\sum_{n=0}^{N-1} R_n x^n\right|+|x-1|\left|\sum_{n=N}^{+\infty} R_n x^n\right|\leqslant 2\varepsilon$

Les majorations par ε viennent du fait que $\left|\sum_{n=0}^{n-1} R_n x^n\right|$ est un polynôme, donc est continu : $\leqslant\varepsilon$. On majore brutalement la deuxième en majorant R_n par ε et ça gicle (ça faisait longtemps!)

3.3 Justification du produit de Cauchy à l'aide de la sommabilité. (démo)

Proposition

Soit $S_a(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $S_b(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

On note pour tout $n\in\mathbb{N}, c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$, et notons R_c, le rayon de convergence de $\sum_n c_n z^n$.

Alors, $R_c\geqslant\min(R_a,R_b)$ et $\forall z\in\mathbb{C}, |z|<\min(R_a,R_b)\Rightarrow\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)$

Preuve :

Soit $z\in\mathbb{C}$, avec $|z|<\min(R_a,R_b)$. Alors les familles $(a_n z^n)_n$ et $(b_n z^n)_n$ sont sommables.

Montrons dès lors que la famille $(a_p\times b_q)_{p,q\in\mathbb{N}^2}$ est sommable :

Posons la partition de $\mathbb{N}^2$: $\mathbb{N}^2=\bigsqcup_{n=0}^{+\infty}\Delta_n$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ \Delta_n=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}$ (des diagonales du plan $\mathbb{N}^2$).

Alors, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p z^p\times\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_p b_q z^{p+q}=\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q z^{p+q}$

Or, par théorème de sommation par paquets :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_p b_q z^{p+q}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in\Delta_n} a_p b_q z^{p+q}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1 et 2. La décomposition peut se faire directement, sans invoquer de décomposition abstraite :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x+3}{(x+1)^2} + \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$.

Or, ces deux termes sont développables en série entière au voisinage de zéro (le deuxième provient d'un produit de DSE). Le développement est valable pour $x \in]-1,1[$, d'où $R = 1$.

$$f(x) = 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(3+4(n+1))(-1)^n x^n$$

Question 3. Cette relation est connue : $a_p = \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}$. (Voir au-dessus pour la preuve).

Ainsi, f peut s'approximer via ses premiers cœfficients (penser à la formule de taylor, dont le terme ressemble beaucoup à celui des cœfficient a_p).

Nous obtenons $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \mathcal{O}\left(x^3\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) = 7 - 11x + 15x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

4.2 Exercice 2

Question 1. Le terme exponentiel se réécrit comme $2\cos(nx)$. Nous majorons donc ce terme par 2. Ainsi, $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = 2r^n$. Or, la série de terme général $2r^n$ est une série convergente car multiple d'une série géométrique convergente ($|r|<1$).

Question 2. Remarquons que les séries de terme général $r^n e^{inx}$ et $r^n e^{-inx}$ convergent individuellement pour tout x.

Ainsi, $P_r(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n e^{inx} + \sum_{n\geqslant 0} r^n e^{-inx} = \sum_{n\geqslant 0}\left(re^{ix}\right)^n + \sum_{n\geqslant 0}\left(re^{-ix}\right)^n = \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{1}{1-re^{-ix}}$
(l'égalité étant valide du fait que $|r|<1$). Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ P_r(x) = \dfrac{2+2r\cos(x)}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

Question 3. Il est plus facile d'utiliser le fait que la série de fonctions P_r converge normalement, donc le théorème d'intégration (sur un segment) nous permet d'intégrer terme-à-terme :

$$\int_0^{2\pi} P_r(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_0^{2\pi} 2\cos(nx) = 2$$

(Il faut en effet conserver le terme $n = 0$).

Question 4. Nous remarquons que cette formule correspond exactement à $\dfrac{P_x(\alpha)}{2} = \dfrac{1+x\cos(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}$.

Montrons que le rayon de convergence de cette série entière est bien 1 :
Il est immédiat que la série converge normalement sur $]-1,1[$. En revanche, pour $x = 1$, la série ne converge pas (les sommes partielles sont des sommes de dirichlet, le seul cas pathologique est le cas $\alpha = 0$, or ce cas donne $\cos(n\alpha) = 1$, donc la série diverge toujours).

4.3 Exercice 3

Question 1. arcsin est bien développable en série entière, car sa dérivée ($x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) l'est. Ainsi, en intégrant terme-à-terme, nous avons bien l'existence d'un DSE pour arcsin, de rayon 1 de surcroît.

Question 2. En dérivant, nous obtenons $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)$, ainsi que $f''(x) = \dfrac{2}{1-x^2} + 2x(1-x^2)^{-1.5}\arcsin(x)$. Ainsi, $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2 + 2x\arcsin(x)(1-x^2)^{-0.5} - 2x\arcsin(x)(1-x^2)^{-0.5} = 2$. D'où le fait que f' vérifie l'équation $(\mathscr{E}) : (1-x^2)y' - xy = 2$.

Question 3. Supposons qu'il existe une solution de cette équation différentielle développable en série entière sur un domaine $]-R, R[$, avec $R>0$. Notons $y(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ce développement.

Alors $y'(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$.

Dès lors, si y est solution, y vérifie $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n - x^2\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} - x\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. En regroupant par puissance de x, il vient :

$$= a_1 + 2a_2 x - a_0 x + \sum_{n\geqslant 2}[(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1}]x^n$$

Il vient en particulier, par égalité entre deux séries entières : $a_1 = 2$, $2a_2 - a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$.

D'où la relation de récurrence : $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_{n-1}$.

Il est facile de vérifier que le rayon de la série ainsi défini vaut bien 1, et est en particulier non nul. Or, cette série entière répond au même problème de Cauchy que f' (en posant la constante à $x = 0$ comme étant 0, donc avec $a_0 = 0$).

4.4 Exercice 4

Note : Il est possible de montrer que sous des conditions particulières (Le cœfficient constant est en particulier non nul, ce qui est bien le cas ici) qu'il est possible d'inverser une série entière. Je redirige vers le sujet Maths B - 2023, et Maths C - 2022 de la banque X-ENS (MP) pour plus d'informations sur ce résultat.

Autrement, il est immédiat que $1+x^2$ est DSE (c'est un DSE). Nous pouvons de plus remarquer que $\dfrac{1}{x^2+2x\cot(\alpha)-1}$ est également DSE (car de la forme $\dfrac{1}{1-u}$) au voisinage de zéro. En effet, si $x^2+2x\cot(\alpha)<1$, nous pouvons donner un DSE de cette fonction par :

$$\frac{1}{x^2+2x\cot(\alpha)-1} = -\sum_{n\geqslant 0}(x^2+2x\cot(\alpha))^n$$

Sinon, décomposer en éléments simples, et en faire le produit de Cauchy.

4.5 Exercice 5

Question a. Remarquons premièrement la réécriture suivante : $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)(3z^2)^n$.

Or, cette série (de terme général $a_n = n+1$) possède un rayon de convergence valant 1, donc la série numérique associée converge absolument si et seulement si $|3z^2|<1 \iff |z| \leqslant {}^1/\sqrt{3}$ par croissance de l'application racine carrée, d'où $R = {}^1/\sqrt{3}$.

Autrement, le critère de d'Alembert s'appliquait (en prenant bien garde à passer le carré dans l'argument, afin d'avoir une série entière sans termes nuls).

Question b. Le rayon de convergence de cette série vaut 1, car le terme général de cette série est minoré par $\dfrac{z^n}{2n}$ et majoré par $\dfrac{2z^n}{n}$. Or, ces séries sont bien de rayon 1, car diviser le terme général par n ne modifie pas le rayon de convergence. Ainsi, par encadrement, il vient que le rayon de convergence de la série originale vaut 1.


SO MUCH TO DO,
SO LITTLE DESIRE TO DO IT...