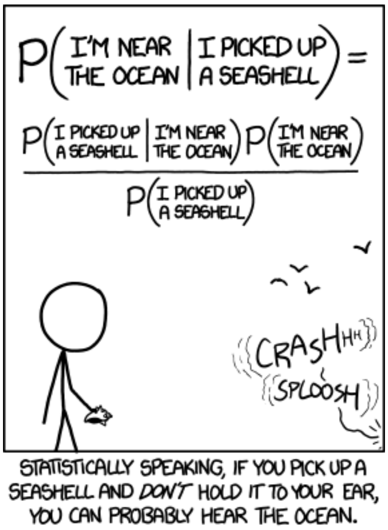
Programme de khôlles

Semaine 15



Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie. Le faire sur des exemples simples

Définition - Image directe et image réciproque

Soient A, B deux ensembles. On considère $f : A \to B$, $I \subset A$ et $I' \subset B$.
On définit l'image directe de I par :

$$\begin{aligned} f(I) &= \{f(x) \mid x \in I\} \\ &= \{y \in B \mid \exists x \in I, y = f(x)\} \end{aligned}$$

et l'image réciproque de I' par :

$$f^{-1}(I') = \{x \in A \mid f(x) \in I'\}$$

EXEMPLE. On considère $I = [0,1]$ et la fonction indicatrice $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$ Alors :

$$\begin{aligned} f(I) &= \{0,1\} \\ f^{-1}(\{1\}) &= \{0\} \end{aligned}$$

A.2 Définition d'une variable aléatoire discrète, image réciproque d'une partie $X(\Omega)$ est un élément de la tribu

Définition - Variable Aléatoire Discrète

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to X(\Omega)$ une application.
On dit que X est une *variable aléatoire discrète* si :

1. $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable ;
2. $\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in T$, i.e $(X = x) \in T$.

Proposition

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \to X(\Omega)$ une v.a.d sur (Ω, T, P).
Alors, pour tout $A \subset X(\Omega)$,

$$\begin{aligned} X^{-1}(A) &\in T \\ \text{i.e } (X \in A) &\in T \end{aligned}$$

donc $P(X \in A)$ est bien définie.

DÉMONSTRATION.

On note $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$

donc $X^{-1}(A) = X^{-1}\left(\bigcup_{x \in A} \{x\}\right) = \bigcup_{x \in A} \underbrace{X^{-1}(\{x\})}_{\in T}$ par def.

et $A \subset X(\Omega)$ avec $X(\Omega)$ fini ou dénombrable

$\Rightarrow$ union finie ou dénombrable d'elts de T

$\wedge$ T est une tribu $\Rightarrow X^{-1}(A) \in T$

D'où le résultat voulu

A.3 Si X est une variable aléatoire, $f(X)$ est une variable aléatoire

Proposition - "Transfert" d'une v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \to X(\Omega)$ une V.A.D sur (Ω, T, P).
Soit $f : X(\Omega) \to A$ une application **quelconque**.
Alors,

$$f(X) = f \circ X \text{ est une v.a.d sur } (\Omega, T, P).$$

DÉMONSTRATION.

1 $f(X(\Omega))$ est fini ou dénombrable

On a $X(\Omega) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{x\}$

$\Rightarrow f(X(\Omega)) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} f(\{x\})$ et $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ est un singleton

$= \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{f(x)\}$ et $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable

$\Rightarrow f(X(\Omega))$ est fini ou dénombrable

2 Soit $a \in f(X(\Omega))$, alors

$[f(X) = a] = \{\omega \in \Omega \mid f \circ X(\omega) = a\}$

$= \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = a\}$

$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(\{a\})\}$

$= [X \in f^{-1}(\{a\})] \in T$ d'après la démo A.2

donc $f \circ X$ est bien une v.a.d sur (Ω, T, P)

A.4 Définition de deux variables aléatoires indépendantes, et de n variables mutuellement indépendantes

Définition - Indépendance de deux v.a

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \to X(\Omega)$ et $Y : \Omega \to Y(\Omega)$ deux V.A.D sur (Ω, T, P).
On dit que X et Y sont *indépendants* si :
$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

i.e

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

on notera alors $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition - Famille de v.a.d mutuellement indépendantes

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a.d sur (Ω, T, P).
On dit que les $(X_i)_{i \in I}$ sont *mutuellement indépendantes* si :

$\forall J = (i_1, \ldots, i_p) \subset I$ **fini**, $\forall (a_1, \ldots, a_p) \in X_{i_1}(\Omega) \times \cdots \times X_{i_p}(\Omega)$, on a :

$$P(X_{i_1} = a_1, \ldots, X_{i_p} = a_p) = \prod_{k=1}^{p} P(X_{i_k} = a_k)$$

A.5 $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Proposition - Indépendance de "transferts" de deux v.a indépendantes

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \to X(\Omega)$ et $Y : \Omega \to Y(\Omega)$ deux V.A.D sur (Ω, T, P).
Soient $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$ 2 applications.
Alors,

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

DÉMONSTRATION. Supposons donc que $X \perp\!\!\!\perp Y$

Soient $a \in E$ et $b \in F$, on a $[f(X) = a] = [X \in f^{-1}(\{a\})]$
$[g(Y) = b] = [Y \in g^{-1}(\{b\})]$

Alors,

$$P(f(X) = a, g(Y) = b) = P([X \in f^{-1}(\{a\})] \cap [Y \in g^{-1}(\{b\})])$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(X \in f^{-1}(\{a\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{b\}))$$

$$= P(f(X) = a) \times P(g(Y) = b)$$

d'où $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

A.6 Calcul de l'espérance des lois usuelles à l'aide de la définition

Définition - Espérance d'une v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{K}$.
On dit que X est d'espérance finie [a] si $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
Alors,

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

a. ou admet une espérance, ou admet un moment d'ordre 1, ou $X \in L^1$

LE mémo

	Paramètre	$X(\Omega)$	Formule	$E(X)$	Var(X)	Symbole
Bernoulli	$p \in [0;1]$	$\{0;1\}$	$P(X=1) = p$	p	$p(1-p)$	$B(p)$
Binomiale	$n \in \mathbb{N}, p \in [0;1]$	$[\![0;n]\!]$	$\forall k \in [\![0;n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$B(n,p)$
Géométrique	$p \in]0;1]$	$\mathbb{N}^*$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = (1-p)^{n-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\mathcal{G}(p)$
Poisson	λ	$\mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$	λ	λ	$\mathcal{P}(\lambda)$

DÉMONSTRATION.

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1)$ d'où $E(X) = p$

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{= (1-p+p)^n}$$ par binôme de N.

i.e $E(X) = np$

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X=k)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1} p$$

$$= p \sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1}$$

or $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$

$$= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2}$$

$$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

D'où $E(X) = \frac{1}{p}$

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ On a

$$E(X) = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{+\infty} k\; P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda}}$$

$$= \lambda\, \cancel{e^{-\lambda} e^{\lambda}}$$

$\Rightarrow E(X) = \lambda$

D'où le résultat voulu.

A.7 Une loi géométrique est une loi sans mémoire

Proposition - La loi sans mémoire

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.
Soient $p \in]0;1]$ et X une v.a.d sur (Ω, T, P) telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Alors,

$$\mathcal{G}(p) \text{ est } \textbf{une loi sans mémoire}.$$

i.e $\forall k, n \in \mathbb{N}$

$$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k)$$

DÉMONSTRATION.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $[X > k] = \bigsqcup_{q=k+1}^{+\infty} (X = q)$

$$\text{donc } P(X>k) = \sum_{q=k+1}^{+\infty} P(X=q)$$
$$= \sum_{q=k+1}^{+\infty} (1-p)^{q-1} p$$
$$= p \sum_{q=k}^{+\infty} (1-p)^{q}$$
$$= (1-p)^{k}$$

or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{[X>n]}(X>n+k) = \frac{P(X>n, X>n+k)}{P(X>n)}$$
$$= \frac{P(X>n+k)}{P(X>n)}$$
$$= \frac{(1-p)^{\cancel{n}+k}}{(1-p)^{\cancel{n}}}$$
$$= (1-p)^{k}$$

d'où $P(X>n+k \mid X>n) = P(X>k)$

A.8 Propriétés de l'espérance

Proposition - Quelques propriétés sur l'espérance

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, Y deux v.a.d sur (Ω, T, P) à valeurs réelles en complexes.
On suppose X, Y d'espérance finie.

1. **L'espérance est linéaire :** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda X + \mu Y \in L^1$ et $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$
2. E **est "positive" :** pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $X \geq 0 \implies E(X) \geq 0$
3. **Une affaire de valeur absolue** : on a $|E(X+Y)| \leq E(|X|) + E(|Y|)$ **ET** $|E(X)| \leq E(|X|)$

DÉMONSTRATION.(juste le point **2.**)

$X \geq 0 \Rightarrow \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$

$\Rightarrow X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

et donc $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \overbrace{x}^{\geq 0} \underbrace{P(X=x)}_{\geq 0}$

≥ 0

$\rightarrow$ OK

A.9 Énoncé du théorème de transfert

Théorème de transfert

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Soit X une v.a.d sur (Ω, T, P) telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{C}$.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction. Alors, $f(X) \in L^1 \iff (f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sommable

$$f(\cancel{x}\,X) \in L^1 \implies \boxed{E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)}$$

A.10 Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Proposition - Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, Y 2 v.a.d sur (Ω, T, P) à valeurs dans $\mathbb{C}$ tq. $X, Y \in L^1$.
Alors,

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies XY \in L^1 \text{ et } E(XY) = E(X)E(Y)$$

A.11 Variance d'une somme de variables aléatoires

Définition - Variance d'une v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.
On dit que X admet une *variance*[a] si X^2 admet une espérance.
Le cas échéant, on a :

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

a. ou X admet un moment d'ordre 2, ou $X \in L^2$

Proposition - Variance d'une somme de v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des v.a.d sur (Ω, T, P) à valeurs réelles.
On suppose que $X_1, \dots, X_n \in L^2$, alors :

1. $X_1 + \dots + X_n$
2. $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
3. $(X_i)_{1 \le i \le n}$ 2 à 2 indépendantes $\implies V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

A.12 Inégalité de Markov

Théorème - Inégalité de Markov

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $X \in L^1$.
Alors, pour tout $a > 0$, on a

$$\boxed{P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}}$$

Démonstration. Soit $a > 0$, considérons $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ge a\}$
Alors $1\!\!1_A$ est une v.a.d sur (Ω, T, P) tq $1\!\!1_A(\Omega) = \{0, 1\}$. On a alors $E(X) = P(A) = P(X \ge a)$

D'autre part, pour $\omega \in \Omega$, on a $a 1\!\!1_A(\omega) \le X(\omega)$ → car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

$$\implies E(a 1\!\!1_A) \le E(X)$$

$$\implies E(1\!\!1_A) \le \frac{E(X)}{a}$$

$$\implies P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$$

A.13 Si X admet un moment d'ordre 2, X est d'espérance finie

Proposition - $L^2 \subset L^2$

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P).
Alors,

$$X \in L^2 \implies X \in L^1$$

DÉMONSTRATION. Supposons donc que $(x^2 P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ soit sommable.

$\rightsquigarrow$ Mq. $(x P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Soit $x \in X(\omega)$

- Si $x \geq 1$: $|x| \leqslant x^2 \Rightarrow |x| P(X=x) \leqslant x^2 P(X=x)$
- Si $x \leqslant 1$: $|x| P(X=x) \leqslant P(X=x)$

donc $|x| P(X=x) \leqslant x^2 P(X=x) + P(X=x)$

et $(x^2 P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$, $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sont sommables

$\Rightarrow (x P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sommable

$\Rightarrow X \in \mathcal{L}^1$

$\longrightarrow$ OK

A.14 Inégalité de Bienaymé Tchebychev

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $X \in L^2$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\boxed{P\big(|X - E(X)| \geq \alpha\big) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}}$$

et donc on a également

$$\boxed{P\big(|X - E(X)| \geq \alpha\big) \leq \frac{\sigma(X)^2}{\alpha^2}}$$

A.15 Lien entre l'existence de l'espérance, la variance et la dérivabilité de G_X en 1

Proposition

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Alors,

$$X \in L^1 \iff G_X \text{ est dérivable en } 1$$

et dans ce cas :

$$\boxed{E(X) = G_X'(1)}$$

Proposition

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Alors,

$$X \in L^2 \iff G_X \text{ est 2 fois dérivable en } 1$$

et dans ce cas :

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2}$$

A.16 Espérance et variance des lois usuelles à l'aide de G_X

Définition - Fonction génératrice d'une v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
On appelle *fonction génératice* de X la fonction G_X définie par :
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

LE mémo

	Paramètre	$X(\Omega)$	Formule	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	Symbole
Bernoulli	$p \in [0;1]$	$\{0;1\}$	$P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$	$B(p)$
Binomiale	$n \in \mathbb{N}, p \in [0;1]$	$[\![0;n]\!]$	$\forall k \in [\![0;n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$B(n,p)$
Géométrique	$p \in]0;1]$	$\mathbb{N}^*$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\mathcal{G}(p)$
Poisson	λ	$\mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$	λ	λ	$\mathcal{P}(\lambda)$

DÉMONSTRATION.

- $X \hookrightarrow B(p) \Rightarrow G_X(t) = (1-p) + pt$

  $E(X) = G_X'(1)$ et $V(X) = \cancel{G_X''(1)} + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

  $\Rightarrow E(X) = p$ $\quad\Rightarrow V(X) = p(1-p)$

- $X \hookrightarrow B(n,p) \Rightarrow G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  $= (1-p+pt)^n$

  $E(X) = G_X'(1)$ $\Rightarrow E(X) = np$

  $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$ $\Rightarrow V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

  $= \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2}$

  $\Rightarrow V(X) = np(1-p)$

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \Rightarrow G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k (1-p)^{k-1} p$

  $= \frac{p}{1-p} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (t(1-p))^k}_{= \frac{1}{1-t(1-p)}}$

  $\Rightarrow G_X'(t) = p(1-t(1-p))^{-2}$

  $\Rightarrow G_X''(t) = 2p(1-p)(1-t(1-p))^{-3}$

  $E(X) = G_X'(1) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$

  $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

  $\Rightarrow V(X) = \frac{2\cancel{p}(1-p)}{p^{\cancel{3}2}} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$

  $= \frac{2-2p+p-1}{p^2}$

  $\Rightarrow V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

∘ $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ On a $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda(t-1)}$$

$\Rightarrow G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$

$G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$

donc $E(X) = G_X'(1) \Rightarrow E(X) = \lambda$

$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 \Rightarrow V(X) = \lambda$

$\longrightarrow$ OK

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Loi de Poisson comme limite (simple) d'une loi binomiale

Proposition - La loi des évènements rares

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(p_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tq. $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$.
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \hookrightarrow B(n, p_n)$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

DÉMONSTRATION. Soit $k \in \mathbb{N}$,
Soit $n \geq k$, alors

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}_{\sim \frac{n^k}{k!}} \underbrace{p_n^k}_{\sim \frac{\lambda^k}{n^k}} \underbrace{e^{(n-k)\ln(1-p_n)}}_{\sim e^{-\lambda}} \qquad = e^{-np_n + kp_n + o(1)}$$

$$\sim \frac{\cancel{n^k}}{k!} \times \frac{\lambda^k}{\cancel{n^k}} \times e^{-\lambda}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

B.2 Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n\geq 1} P(X \geq n)$

Proposition

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Alors,

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

DÉMONSTRATION.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[X \geq n] = \bigsqcup_{k=n}^{+\infty} [X = k]$

$$\Rightarrow P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)$$

$$\underset{\text{Fubini's Th.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(X=k)$$

$$= E(X)$$

d'où $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

B.3 Variance d'une somme de variables aléatoires

Proposition - Variance d'une somme de v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des v.a.d sur (Ω, T, P) à valeurs réelles.
On suppose que $X_1, \dots, X_n \in L^2$, alors :

1. $X_1 + \ldots + X_n \in L^2$
2. $V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
3. $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ 2 à 2 indépendantes $\implies V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

DÉMONSTRATION. Montrons ce résultat par récurrence sur le nombre de v.a.d.

□ $n = 2$

∘ $(X_1 + X_2)^2 = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2$ et $X_1, X_2 \in L^2 \Rightarrow X_1^2, X_2^2, X_1X_2 \in L^1$ donc $(X_1+X_2)^2 \in L^1$

ce qui vient d'être check !

d'où $(X_1+X_2)^2 \in L^1 \iff X_1 + X_2 \in L^2$

∘ $V(X_1 + X_2) = E((X_1+X_2)^2) - E(X_1+X_2)^2$

$= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2E(X_1X_2) - [E(X_1)^2 + 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2)^2]$

$= V(X_1) + V(X_2) + 2\underbrace{(E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2))}_{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}$

d'où $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$

□ $H_n \Rightarrow H_{n+1}$

∘ $(X_1 + \dots + X_n + X_{n+1})^2 = \underbrace{(X_1 + \dots + X_n)^2}_{\in L^1 \text{ par H.R}} + \underbrace{2\underbrace{(X_1+\dots+X_n)}_{\in L^2 \text{ par H.R}}\underbrace{X_{n+1}}_{\in L^2}}_{\in L^1} + \underbrace{X_{n+1}^2}_{\in L^1}$

d'où $X_1 + \dots + X_{n+1} \in L^2$

∘ Enfin, $V(X_1 + \dots + X_{n+1}) = E((X_1 + \dots + X_{n+1})^2) - E(X_1 + \dots + X_{n+1})^2$

$= E((X_1 + \dots + X_n)^2) + 2E((X_1+\dots+X_n)X_{n+1}) + E(X_{n+1}^2) - [E(X_1+\dots+X_n)^2 + 2E(X_1+\dots+X_n)E(X_{n+1}) + E(X_{n+1})^2]$

$= V(X_1 + \dots + X_n) + V(X_{n+1}) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1 + \dots + X_n, X_{n+1})$

immédiat avec la formule $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$\overset{(*)}{=}$ ________ $+ 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_{n+1})$

H.R $\rightarrow = \sum_{i=1}^{n+1} V(X_i) + 2\sum_{1 \leq j < i \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

H_{n+1} vraie

Ce qui clôt la récurrence

D'où le résultat voulu !

B.4 Inégalité de Markov

Théorème - Inégalité de Markov

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $X \in L^1$.
Alors, pour tout $a > 0$, on a

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

DÉMONSTRATIONS.

1. Soit $a > 0$, considérons $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$
Alors $\mathbb{1}_A$ est une v.a.d sur (Ω, T, P) tq $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$. On a alors $E(X) = P(A) = P(X \geq a)$

D'autre part, pour $\omega \in \Omega$, on a $a \mathbb{1}_A(\omega) \leqslant X(\omega)$ → car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow E(a\mathbb{1}_A) \leqslant E(X)$$

$$\Rightarrow E(\mathbb{1}_A) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X \geq a) \leqslant \frac{E(X)}{a}}$$

2. Notons $X^+ = \{x \in X(\Omega) \mid x \geq a\}$
$X^- = \{x \in X(\Omega) \mid x < a\}$

Alors $E(X) = \sum_{x \in X^+} x P(X = x) + \sum_{x \in X^-} x P(X = x)$

$X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ ∧ $X \in L^1$

$$\geqslant \sum_{x \in X^+} x P(X = x)$$

$$\geqslant a \underbrace{\sum_{x \in X^+} P(X = x)}_{= P(X \geq a)}$$ car $[X \geq a] = \bigsqcup_{x \in X^+} [X = x]$

$$\geqslant P(X \geq a)$$

donc $E(X) \geqslant a P(X \geq a)$

→ OK

B.5 Inégalité de Cauchy Schwarz pour l'espérance

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Soient X, Y deux v.a.d sur (Ω, T, P) telle que $X(\Omega), Y(\Omega) \subset \mathbb{R}$.
Alors, si $X, Y \in L^2$, on a :

1. $XY \in L^1$
2. On a :

$$\boxed{E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)}$$

DÉMONSTRATION.

(1) On se souvient du petit lemme : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

DONC $|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ et $X, Y \in L^2$, i.e $X^2, Y^2 \in L^1$

$\Rightarrow$ $|XY| \in L^1$

$\Rightarrow$ $XY \in L^1$

(2) D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}$, posons $P(t) = E((X - tY)^2) = E(X^2) - 2E(XY)t + E(Y^2)t^2$

- $P(t)$ existe car X^2, XY et $Y^2 \in L^1$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$ (par pos. de l'esp.)
- P est un pol. de degré 2 tjr pos. $\Rightarrow$ $\Delta \leqslant 0$
  $\Rightarrow$ $\cancel{4} E(XY)^2 - \cancel{4} E(X^2)E(Y^2) \leqslant 0$

d'où $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$

B.6 Calcul de variance des lois usuelles à l'aide de la définition

Définition - Variance d'une v.a.d

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.
On dit que X admet une *variance*[a] si X^2 admet une espérance.
Le cas échéant, on a :

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

a. ou X admet un moment d'ordre 2, ou $X \in L^2$

Proposition - Une autre formule pour la variance

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.
Alors, si $X \in L^2$, on a :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

LES VARIANCES DES LOIS USUELLES.

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \times p - p^2 = p(1-p) \Rightarrow V(X) = p(1-p)$$

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^k - (np)^2 = np + n(n-1)p^2 - \cancel{(np)^2} = np - np^2$$

$$\Rightarrow V(X) = np(1-p)$$

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p - \frac{1}{p^2} = p\,\frac{1+(1-p)}{(1-(1-p))^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

or $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $\downarrow \frac{d}{dx}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\times x \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\downarrow \frac{d}{dx}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}}_{\lambda e^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} \right) - \lambda^2$$

$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\downarrow \frac{d}{d\lambda}$

$e^{\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{k!}$

$$\Rightarrow V(X) = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$$

B.7 Inégalité de Bienaymé Tchebychev

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une v.a.d sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $X \in L^2$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\boxed{P\big(|X - E(X)| \geq \alpha\big) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}}$$

et donc on a également

$$\boxed{P\big(|X - E(X)| \geq \alpha\big) \leq \frac{\sigma(X)^2}{\alpha^2}}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha > 0$.

On a $[\,|X - E(X)| \geq \alpha\,] = [\,(X - E(X))^2 \geq \alpha^2\,]$

$\{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - E(X)| \geq \alpha\}$ $\quad = \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega) - E(X))^2 \geq \alpha^2\}$

$(X - E(X))^2$ est bien une v.a.d sur (Ω, T, P) et :

- $(X - E(X))^2(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$
- $(X - E(X))^2 \in L^2$ car $X \in L^2$

donc d'après l'inégalité de Markov : $P(\,|X - E(X)| \geq \alpha\,) = P(\,(X - E(X))^2 \geq \alpha^2) \leq \dfrac{\overbrace{E((X - E(X))^2)}^{= V(X)}}{\alpha^2}$

d'où $P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

B.8 Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes

Proposition

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, Y deux v.a.d **indépendantes** sur (Ω, T, P) tq. $X(\Omega), Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tq. les séries convergent :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

DÉMONSTRATIONS.

1 On a, pour tout $t \in]-1,1[$, $G_X(t) \times G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)$

produit de Cauchy de séries entières de rayons $R \geq 1$

or, $\Omega = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} [X=k]$

donc pour $n \in \mathbb{N}$, $[X+Y=n] = [X+Y=n] \cap \Omega$

$$= \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} [X+Y=n, X=k]$$

$$= \bigsqcup_{k=0}^{\cancel{+\infty}\ n} [X=k, Y=n-k]$$

$$\Rightarrow P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) = c_n$$

DONC

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)t^n = G_{X+Y}(t)$$

ces deux séries entières coïncident sur $]-1,1[$ tout entier :

$(*) \Rightarrow G_X \times G_Y = G_{X+Y}$

2 On a pour $t \in]-1,1[$, $G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y})$

$$= E(t^X)E(t^Y) \quad \rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow t^X \perp\!\!\!\perp t^Y$$

$$= G_X(t) \times G_Y(t)$$

$\rightarrow$ OK

B.9 Loi faible des grands nombres

Théorème - Loi Faible des grands nombres

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.d i.i.d (donc mut. ind.) à valeurs réelles et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n \in L^2$.
Notons $m = E(X_1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \alpha\right) = 0}$$

DÉMONSTRATION. On note $T_n = \frac{S_n}{n}$ qui est une v.a.d sur (Ω, T, P), et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \in L^2 \Rightarrow \underline{T_n \in L^2}$

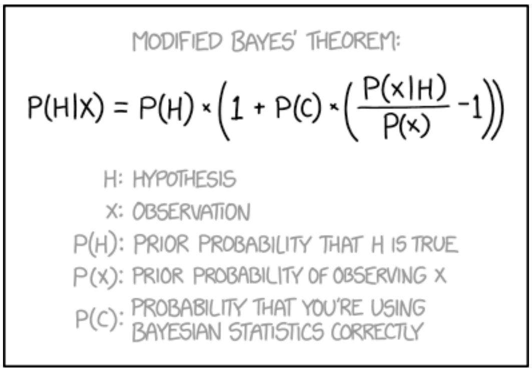
- $E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{\cancel{n} E(X_1)}{\cancel{n}} \Rightarrow E(T_n) = E(X_1) = m$

- $V(T_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\substack{X_i \text{ 2 à 2} \\ \perp\!\!\!\perp}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\cancel{n} V(X_1)}{n^{\cancel{2}}} \Rightarrow V(T_n) = \frac{V(X_1)}{n}$

D'après l'inégalité de B.T : $P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leqslant \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$

i.e $P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) \leqslant \underbrace{\frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) = 0$


MODIFIED BAYES' THEOREM:
P(H|X) = P(H) × (1 + P(C) × (P(x|H) / P(x) − 1))
H: HYPOTHESIS
X: OBSERVATION
P(H): PRIOR PROBABILITY THAT H IS TRUE
P(X): PRIOR PROBABILITY OF OBSERVING X
P(C): PROBABILITY THAT YOU'RE USING BAYESIAN STATISTICS CORRECTLY