MPI* Physique

TD Physique Quantique

Notion de quanton

Olivier Caffier

1 Ordres de grandeur

1. Calculez le nombre de photons émis par seconde par un émetteur radio (105,5 MHz et 100 kW).
2. De quelle couleur est un laser dont le mécanisme d'émission est une transition entre deux niveaux d'énergie distants de 2,28 eV ?
3. (a) Calculez la longueur d'onde de De Broglie d'un homme de 75 kg marchant à 5 km.h^{-1} et comparez à la largeur de la porte de sa chambre.
   (b) Calculez les longueurs d'onde de De Broglie d'un électron et d'un proton lorsqu'ils ont tout deux une énergie cinétique de 100 eV.
4. (a) Quelle sont les valeurs de la vitesse d'un adénovirus ($m = 2{,}4.10^{-16}$ g) dont l'extension spatiale est de 10 nm ?
   (b) Un radar flashe une voiture ($m = 1{,}3t$, $v = 150$ km.h^{-1}). Sachant que l'éclair du flash dure 0,01 s, quelle est l'indétermination sur la position de la voiture ? Déduisez-en une minoration de l'indétermination quantique de la vitesse et concluez.

Données : $m_e = 9{,}11e-31kg$; $m_p = 1{,}67e-27kg$.

Corrigé :

1. La formule de Planck-Einstein nous dit que l'énergie pour un photon est

$$E = h\nu$$

Or, on sait que l'énergie totale pendant une seconde (donc une puissance totale) est $\mathcal{P}_{\text{tot}} = 100$ kJ.s^{-1} : cette puissance est produite par N photons, d'énergie E mentionnée précédemment. On en déduit alors la relation :

$$\boxed{N = \frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{h\nu} \simeq 1{,}4.10^{30} \text{ photons/seconde.}}$$

2. On parle bien de deux niveaux d'énergie des électrons. La formule de Planck-Einstein nous donne :

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ &= \frac{hc}{\lambda} \end{aligned}$$

Avec $E = 2{,}28$ eV, on a finalement :

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{E} \simeq 545 \text{ nm} \implies \text{vert!}}$$

3. (a) La formule de De Broglie nous donne :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} \\ &= \frac{h}{\|m\vec{v}\|}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lambda = 6.10^{-36}\ \mathrm{m}}$$

C'est une épaisseur un peu fine… : on ne peut pas avoir de diffraction sur des objets à l'échelle macroscopique comme une porte ! [1]

(b) On a $E_c = \frac{p^2}{2m}$ (on rappelle que $p = mv$), donc

1. La diffraction n'est possible que si l'obstacle est de taille comparable ou plus petite que la longueur d'onde…

2 Quanton dans un potentiel harmonique

On donne la fonction d'onde d'un quanton de masse m se trouvant sur un axe Ox :

$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0 t}{2}} \tag{1}$$

où A et ω_0 sont deux constantes.

1. Donnez les dimensions de A et ω_0.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour A ?
3. Quel type d'état représente cette fonction d'onde ? Quelle est l'énergie du quanton ?
4. Dans quel potentiel se trouve le quanton ?
5. Rappelez la probabilité que le quanton se manifeste comme corpuscule dans l'intervalle $[x, x+dx]$ et déduisez-en sa position moyenne $\langle x \rangle$.
6. Calculez sa dispersion en position Δx et commentez la dispersion en quantité de mouvement.

Données pour $\alpha > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}} \tag{2}$$

Corrigé :

1. $dP = |\psi|^2 dx$ est sans dimension. Comment l'exponentielle est sans dimension, on trouve :

$$\begin{aligned}[A] &= [\psi] \\ &= L^{-1/2}\end{aligned}$$

Et comme ce qui est dans l'exponentielle doit être sans dimension, on a bien $[\omega_0] = T^{-1}$.
Finalement,

$$\boxed{[A] = L^{-1/2} \text{ et } [\omega_0] = T^{-1}}$$

2. ψ définit une loi de proba, elle est donc normalisée :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\psi(x,t)|^2 dx &= |A|^2 \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{\hbar}} \right|^2 \underbrace{\left| e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \right|^2}_{=1} dx \\ &= |A|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha u^2} du\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{m\omega_0^2}{\hbar}$ et $u = x$, on peut appliquer notre formulaire :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x,t)|^2 dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0^2}}$$

Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow |A|^2 = \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{\pi\hbar}}$$

Finalement, on a plus qu'a choisir le module de A mais on a :

$$\boxed{|A| = \left(\frac{m\omega_0^2}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

3. On a affaire à un **état stationnaire** : $\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, avec :

$$\varphi(x) = Ae^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{2\hbar}}$$

   Et d'après la formule de Planck-Einstein, $E = \hbar\frac{\omega_0}{2}$, on a donc un **état stationnaire d'énergie** E.

4. Comme il s'agit d'un état stationnaire, φ doit vérifier l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

   Après quelques calculs, on trouve :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2}$$

   Ce qui a très exactement l'allure d'une énergie potentielle d'oscillateur harmonique ! **On se trouve bel et bien dans un potentiel harmonique !**

5. Par définition :

$$\boxed{dP = |\psi(x,t)|^2 dx}$$

   et donc :

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{\mathbb{R}} x dP \\ &= |A|^2 \int_{\mathbb{R}} \underbrace{xe^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{\hbar}}}_{\text{fonction impaire !}} dx \\ &= 0\end{aligned}$$

   Donc on trouve :

$$\boxed{\langle x\rangle = 0}$$

6. On a par définition :

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \underbrace{\langle x\rangle^2}_{=0}$$

On mène alors la suite du calcul avec le formulaire fourni par l'énoncé :

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 dP \\ &= |A|^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{\hbar}} dx\end{aligned}$$

et donc avec le formulaire, on arrive à :

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0^2}}}$$

La relation d'indétermination de Heisenberg nous donne :

$$\Delta p_x \gtrsim \frac{\hbar}{2\Delta x} = \sqrt{\frac{m\omega_0^2 \hbar}{2}}$$

On a alors un minorant <u>non-nul</u> de l'écart type de la quantité de mouvement, l'écart à la moyenne est donc nécessairement non-nul, autrement dit : **$\mathbf{p_x}$ ne peut pas avoir une seule valeur possible.**
On arrive alors à la conclusion suivante :

$\boxed{\psi \text{ n'est pas un état de quantité de mouvement définie.}}$

3 Superposition de deux états stationnaires

Un quanton de masse m est confiné dans un espace unidimensionnel de largeur a (puits de potentiel infini). On montre que les états stationnaires ont les propriétés suivantes :

$$\text{Fonction d'onde radiale :} \quad \varphi_n(x) = A_n \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \tag{3}$$

$$\text{Énergie :} \quad E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

On introduit ω définie par $E_1 = \hbar\omega$.

1. Écrivez une fonction d'onde stationnaire $\psi_n(x,t)$ et calculez les A_n en supposant que ce sont des réels positifs.
2. À titre d'exemple, on envisage que ce quanton est dans une superposition des états $n = 1$ et $n = 2$:

$$\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \tag{5}$$

   Par simplicité, α_1 et α_2 seront prises réelles positives. Calculez la densité de probabilité de présence et interprétez le résultat.
3. Déterminez une relation entre α_1 et α_2, puis vérifiez que :

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \tag{6}$$

   satisfait cette relation.
4. Utilisez ses valeurs pour représenter la dpp aux instants $t = 0$, $T/4$ et $T/2$ avec $T = 2\pi/\omega$. Commentez.

Corrigé :

1. On propose la fonction d'onde stationnaire suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \psi_n(x,t) = \varphi_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}}$$

   Dès lors,

$$\int_0^a |\psi_n(x,t)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow A_n^2 \int_0^a \sin^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow A_n^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(2n\frac{\pi x}{a}\right)}{\frac{2n\pi}{a}}\right]_{\cancel{0}}^{\cancel{a}}\right) = 1$$

   Finalement, on trouve en supposant les $A_n > 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}}$$

2. On pose $\Delta E = E_2 - E_1$, alors

$$\psi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 = e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\left(\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t}\right)$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\alpha_1^2\varphi_1^2(x) + \alpha_2^2\varphi_2^2(x) + 2\alpha_1\alpha_2\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cos\left(\frac{\Delta E}{\hbar}t\right)}$$

On retrouve une formule d'interférence de Fresnel! La dpp oscille donc dans le temps à une fréquence proportionnelle à l'écart en énergie : **cet état n'est pas stationnaire**.

3. Il faut que $\int_0^a |\psi|^2 dx = 1$. Après quelques calculs pour les enfants de bas âge, il vient :

$$\boxed{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1}$$

4. On obtient tout simplement :

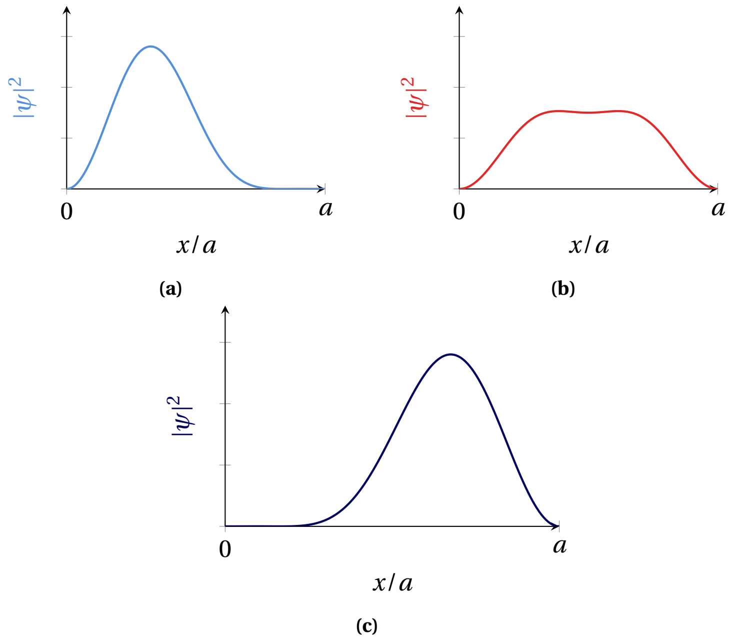
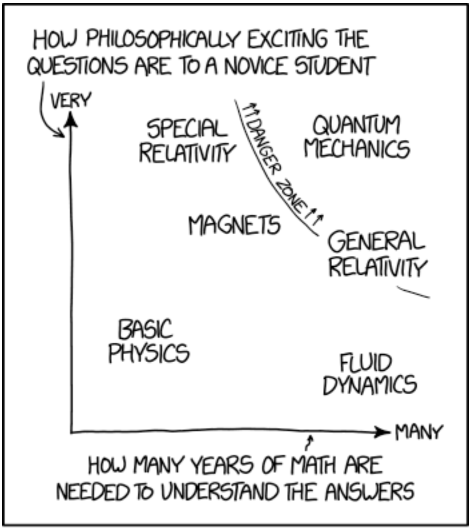


FIGURE 1 – Allure de la dpp : a) pour $t = 0$, b) pour $t = T/4$, c) pour $t = T/2$.

Conclusion : On a un état localisé à gauche ($t = 0$), un état localisé à droite ($t = T/2$) et un état non localisé : on a donc affaire à une oscillation entre les côtés gauche et droit. Cette oscillation est d'ailleurs proportionnelle à l'écart en énergie.



WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS