Colles MPi* Semaine n°8 du 6/11/2023 au 10/11/2023 (Programme n°5)

Vallaeys Pascal

8 octobre 2023

Thème : Fonctions à valeurs vectorielles et surtout révisions de sup des fonctions numériques.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- Gobron Nicolo
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Montfort Pierig
- Robert Xavier

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites. (démo non refaite en spé)
- Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse. (démo)
- Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordres supérieurs. (démo)
- Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe C^1 . (démo)
- Somme de Riemann et théorème associé. (proposer un exemple)
- Révisions de sup : Th de Rolle (démo), égalité et inégalité des accroissements finis (démo).
- Formules de Taylor (Young + reste intégral) (démo de la formule avec reste intégral).

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle. (démo)
- Dérivée de L(f) où L est une application linéaire continue (démo)
- Dérivée de B(f,g) où B est une application bilinéaire continue. (démo)
- Continuité de la fonction "distance à une partie A". (démo)
- Inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique pour des réels positifs. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann. (démo)
- Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $O(\frac{1}{n})$. (avec la bonne hypothèse, démo non faite)
- Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $O(\frac{1}{n^2})$. (avec la bonne hypothèse, démo non faite)
- Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral. (démo du cours de sup)
- Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
- Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes. (démo de sup)
- Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes. (démo de sup)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (CCINP MP 2022)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :
1) Énoncer le théorème de Rolle.
2) Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?
3) Montrer le résultat voulu.

Commentaires divers : L'examinateur avait une méthode différente de la mienne pour aboutir au résultat : il s'intéressait à la multiplicité des racines, utilisant alors la question 2), alors que j'ai préféré étudier chaque racine individuellement, en considérant plusieurs fois les racines multiples.

Exercice 2 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)
Montrer que l'équation $\arctan x + x = 1$ admet une unique solution sur $[0, 1]$.

Exercice 3 : (Magistère MP 2022)
Déterminer l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{af(t+h) + bf(t) + cf(t-h)}{h^2} = f''(t).$

Exercice 4 :
Montrer chacune des inégalités suivantes sur l'intervalle demandé :
a) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ sur $\mathbb{R}^*+$
b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :
a) On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
b) Procéder de même avec $u_n = \frac{1}{n}.\left[\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n})\right]$, puis $u_n = \frac{1}{n.\sqrt{n}}.\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}$.

Exercice 6 :
a) Calculer le coefficient de x^n dans la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $f : x \to x^n(1-x)^n$.
b) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
c) Démontrer le même résultat à l'aide d'un dénombrement.

Exercice 7 : Calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k.x)$.

Exercice 8 :
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int\limits_a^b \cos(nt) f(t)dt = 0$.

Exercice 9 : Montrer que pour tout entier naturel n, $\left(X^2 + X + 1\right)^2$ divise $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 10 : (Magistère MP 2022)
Montrer qu'il existe une constante c telle que, pour $x, y > 0$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant c\sqrt{|x-y|}$.

Exercice 11 : (Mines MP 2022)
Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que :
$P(X^2) = P(X)P(X-1)$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Distinguer les polynômes constants des autres.
Commentaires divers : L'essentiel du travail consiste à déterminer les racines possibles d'un tel polynôme, de telle sorte qu'il n'en possède pas une infinité.

Exercice 12 : (Mines télécom MP 2022)
Quels sont les polynômes complexes P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ (en notant $\mathbb{U}$ le cercle unité) ?

Exercice 13 : (Mines MP 2021)
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f tend vers une limite l en $+\infty$.
Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t)dt$

Exercice 14 : (Mines-Ponts 2019) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que pour tout réel x de $[0, 1]$, $(f(x), f'(x)) \neq (0, 0)$. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

Exercice 15 : (ST CYR MP)
On considère la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, puis $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Montrer que pour tout entier n, $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.
2. Déterminer le degré de T_n, et son coefficient dominant.
3. Montrer que les coefficients de T_n sont des entiers relatifs.
4. Soit $z = \frac{1}{5}(3+4i)$. Que vaut $|z|$?
5. Soit t_0 tel que $z = e^{it_0}$. Que vaut $\cos(t_0)$?
6. Que vaut $\cos(nt_0)$ si $z^n = 1$?

Exercice 16 : (ENS MP)
On pose $T_n(x) = \cos(n.Arc\cos(x))$.

1. Montrer que T_n est un polynôme.
2. Trouver une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.
3. Déterminer les extrema de T_n.
4. Montrer que pour tout polynôme P de même degré et de même coefficient dominant que T_n, on a $\|P\| \geq \|T_n\|$. (groupe C uniquement)

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 17 :
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, à valeur dans un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que f(a)=f(b)=0. Montrer que : $\left\| \int\limits_a^b f \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{4} . \underset{[a,b]}{Sup} \|f'\|$.

Exercice 18 : (X MP 2022)
Soit $d \geqslant 1$ entier et $f : [0,1]^d \longrightarrow [0,1]^d$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \neq y \in [0,1]^d, \|f(x) - f(y)\| < ||x - y||$$

1) Montrer que f admet un unique point fixe.
2) Montrer que pour tout $x \in [0,1]^d$ la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

Exercice 19 : (Classique écrits X-ENS)
Montrer qu'une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique, est uniformément continue.

Exercice 20 : (Centrale MP 2021)
1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x)\,|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21 : (Mines-Ponts 2019) Soient a et b deux réels tels que a<b, et E l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in E$, on note $\varphi(f) = \int\limits_a^b f \times \int\limits_a^b \frac{1}{f}$. Déterminer $\varphi(E)$.

Exercice 22 : (Mines-Ponts 2019)
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$.
b) Préciser le degré et les racines de P_n. Etudier la somme des racines.
c) Montrer que $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\tan^2\theta} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$.
d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 23 :
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}+$, telle que f et f'' soient bornées. On note respectivement $M_0 = \underset{\mathbb{R}+}{Sup} \|f\|$ et $M_2 = \underset{\mathbb{R}+}{Sup} \|f''\|$.
a) Montrer que pour tout réel h strictement positif, et pour tout réel x positif, $||f'|| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h.M_2}{2}$.
b) En déduire que f' est bornée et que $M_1 = \underset{\mathbb{R}+}{Sup} \|f'\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 24 : (Centrale PC)
a) Trouver les racines de $P_n(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.
b) En déduire la valeur de $\prod\limits_{k=1}^{n} \left[4 + \cot an^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]$.

Exercice 25 :
Soit f une fonction de classe C^3 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f - \frac{1}{2n}\int\limits_0^1 f' + \frac{1}{12n^2}\int\limits_0^1 f'' + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
En déduire un développement limité à l'ordre 3 de $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Exercice 26 : Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $[0;+\infty[$, telle que f(0)=f'(0)=0. On suppose que f s'annule en une autre valeur a strictement positive. Montrer qu'il existe un point sur la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine. (Point autre que (0 ;0)).

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 3,4,84,85,89.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Fonction vectorielles et numériques (surtout). Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°5
- Groupe 2 : Programme n°5
- Groupe 3 : Programme n°5
- Groupe 4 : Programme n°5
- Groupe 5 : Programme n°5
- Groupe 6 : Programme n°5
- Groupe 7 : Programme n°5
- Groupe 8 : Programme n°5
- Groupe 9 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 10 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 13 : Programme n°4
- Groupe 14 : Programme n°4
- Groupe 15 : Programme n°4
- Groupe 16 : Programme n°4