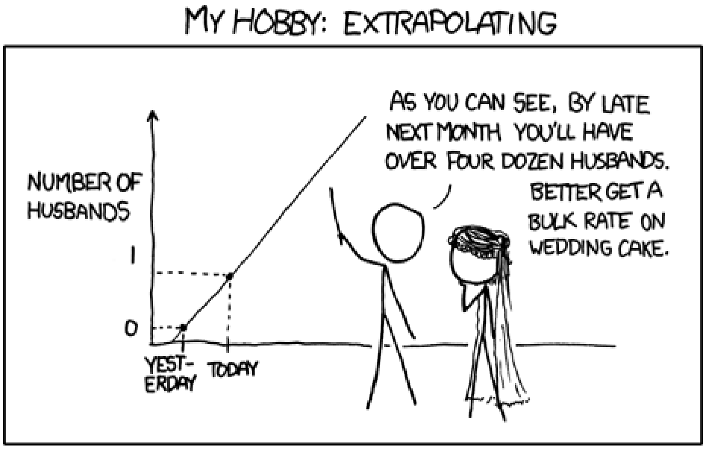
MPI* Maths

Fonctions à valeurs vectorielles

Les incontournables



Olivier Caffier

EXO 1

① o $\sin(x) \leq x$ La fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $f'(x) = \cos(x) - 1$) et $f(0) = 0$.

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \sin(x) \leq x$$

o $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

D'après l'Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| \sin(x) - \cancel{\frac{\sin(0)}{0!}} - \frac{\cos(0)}{1!}x + \cancel{\frac{\sin(0)}{2!}}x^2 \right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$$

or $x \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0$
$\Rightarrow |x|^3 = x^3$

d'où

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}$$

donc $\sin(x) \geq \frac{x^3}{6} - x$

② De même, d'après l'ITL, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\cos(x) - \frac{\cos(0)}{0!}\right| \leq \frac{x^2}{2}$$

d'où $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

EXO 2

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ ⚠ Somme de Riemann

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{Arctan}(u)]_0^1$$

D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

o De même, on a affaire à une somme de Riemann, d'où

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \underset{u = \frac{\pi}{2}x}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}[\sin(u)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{\pi}$

o On a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{n}$$

De mm

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx - 0 = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{3}$

EXO 3

Sur $\mathbb{C}$, $P_1(z) = 0 \iff z^4 = -1$

$\iff z^4 = z_0^4$ avec $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\iff z = e^{i\frac{\pi}{4}} \; ; \; \underbrace{-e^{i\frac{\pi}{4}}}_{= e^{-i\frac{3\pi}{4}}} \; ; \; e^{i\frac{3\pi}{4}} \; ; \; \underbrace{-e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{= e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, $P_1(X) = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}})$

donc, dans $\mathbb{R}[X]$, $P_1(X) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$

$\rightsquigarrow$ De même pour P_2 ...

EXO 4

① Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \longmapsto \cos(x) - nx$

Alors, $\underbrace{f_n \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+}_{(A)}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = -\sin(x) - n \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ car $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ f_n stmt décroissante (B)

or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty \\ f_n(0) = 1 \\ (A) \wedge (B) \end{cases}$ $\overset{\text{cor. T.V.I}}{\Longrightarrow}$ $\exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\cos(x) = nx$ $\longrightarrow$ OK

② Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x_{n+1}) = \cos(x_{n+1}) - nx_{n+1}$

$= (n+1)x_{n+1} - nx_{n+1}$

$= x_{n+1}$

> 0

et $(A) \wedge (B) \wedge (f_n(x_n) = 0) \Rightarrow x_{n+1} < x_n$ d'où $(x_n)_n$ stmt décroissante

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\cos(x_n)}{n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

③ On a, comme $x_n \longrightarrow 0$, $\cos(x_n) = 1 - \frac{x_n^2}{2} + O(x_n^4)$

or $\cos(x_n) = nx_n \Rightarrow x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^2}{2n} + \underbrace{O\left(\frac{\cancel{x_n^4}}{n}\right)}_{O\left(\frac{1}{n^5}\right)}$ car $x_n \leqslant \frac{1}{n}$

et donc, en réinjectant ce DL : $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}x_n^2 + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$

D'où $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$

④ On a $\ln(\cos(x_n)) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^2\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$

$= \underbrace{-\frac{1}{2n^2}}_{CV} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{CV}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} \ln(\cos(x_n))$ CV

⑤ On a $S_n = \sum\limits_{K=1}^{n} \ln(K x_K)$

$= \ln\left(\prod\limits_{K=1}^{n} K x_K\right)$

$= \ln\left(n! \prod\limits_{K=1}^{n} x_K\right)$

or $\sum\limits_{K=1}^{n} \ln(\cos(x_K)) = \sum\limits_{K=1}^{n} \ln(K x_K) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$ d'après ④

$\Rightarrow \ln\left(n! \prod\limits_{K=1}^{n} x_K\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$

exp $\mathcal{C}^0$

$n! \prod\limits_{K=1}^{n} x_K \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^\alpha \Rightarrow \prod\limits_{K=1}^{n} x_K \sim \frac{e^\alpha}{n!}$

donc en prenant $c = \exp(\alpha)$, on a $\prod\limits_{n=1}^{n} x_K \sim \frac{c}{n!}$

EXO 6 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ <u>non-constant</u> tq $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

① Soit $a \in \mathbb{C}$, alors $a \in \mathrm{Rac}(P) \Leftrightarrow a^2 \in \mathrm{Rac}(P)$

$\Leftrightarrow a^4 \in \mathrm{Rac}(P)$

(*) $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, a^{2^k} \in \mathrm{Rac}(P)$

$\Rightarrow a = 0$ ou $|a| = 1$ (sinon : ∞té de racines !!)

En effet, pour $a \in \mathrm{Rac}(P)$, on prend $k, k' \in \mathbb{N}$ tq $a^{2^k} = a^{2^{k'}}$ (on veut montrer que $a=0$ ou $|a|=1$ si il n'y a pas ∞té de racines)

i.e a est racine de $X^{2^k}\left(\underbrace{X^{2^{k'}-2^k} - 1}\right)$

$\Downarrow$ ou $\Downarrow$

$a=0$ ou $a \in \mathbb{U}_{2^{k'}-2^k} \Rightarrow |a| = 1$

D'où $a = 0$ ou $|a| = 1$

② Soit $a \in \mathrm{Rac}(P) \Rightarrow P(a) = 0$

prenons $X = a-1$, alors $P((a-1)^2) = P(a-1)P(a) \Rightarrow (a-1)^2 \in \mathrm{Rac}(P)$

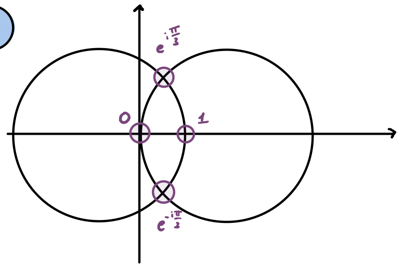
...

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, (a-1)^{2^k} \in \mathrm{Rac}(P)$

or ① $\Rightarrow (a-1)^2 = 0$ ou $|a-1|^2 = 1$

$\Rightarrow a = 1$ ou $|a-1| = 1$

③



Procédons à une synthèse, en notant $\rho = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Si P est sol. alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ et $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ tq

$$P(X) = \lambda X^a (X-1)^b (X-\rho)^c (X-\bar\rho)^d$$

$$\Rightarrow P(X^2) = \lambda X^{2a}(X^2-1)^b (X^2-\rho)^c (X^2-\bar\rho)^d$$

$$\Rightarrow P(X)P(X+1) = \lambda^2 X^a (X-1)^b (X-\rho)^c (X-\bar\rho)^d (X+1)^a X^b (X-(\rho-1))^c (X-(\bar\rho-1))^d$$

Ainsi, $P(X^2) = P(X)P(X+1) \Rightarrow \lambda^2 = \lambda \overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\lambda = 1}$

$\Rightarrow 2a = a+b \Rightarrow \boxed{a = b}$

et $(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}) = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X + e^{i\frac{\pi}{6}})$

$= (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{\frac{7i\pi}{6}})$

$\rho - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$

$= j$ et j n'est pas racine de P $\Rightarrow \boxed{c = d = 0}$

$\Rightarrow P(X) = X^a (X-1)^a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$

↳ vérifier qu'ils conviennent

EXO 7 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lip avec $k \in]0;1[$
↳ fonction "contractante"

① **Existence** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})|$$
$$\leqslant k\,|u_n - u_{n-1}|$$

$$\overset{\text{réc.}}{\Longrightarrow} \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

or, comme $\sum_n k^n$ CV, on a $\sum_n u_{n+1} - u_n$ CV ABS i.e $\sum_n u_{n+1} - u_n$ CV

$\Rightarrow (u_n)$ CV

$\Rightarrow \exists! \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u_n \longrightarrow \alpha$
↖ unicité de la lim.

Enfin, f est $\mathcal{C}^0$ (car lip) donc $\underbrace{u_{n+1}}_{\to \alpha} = f(\underbrace{u_n}_{\to \alpha}) \Rightarrow \alpha = f(\alpha)$

D'où l'existence.

Unicité Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ deux points fixes de f

Ainsi, on a

$$|\underbrace{f(\alpha_1)}_{=\alpha_1} - \underbrace{f(\alpha_2)}_{=\alpha_2}| \leqslant k\,|\alpha_1 - \alpha_2|$$

or $k \in]0;1[\quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2$

D'où l'unicité

② Considérons $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

Montrons qu'elle vérifie bien la prop. énoncée :

Soient $x \neq y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} = \frac{|x-y| \times |x+y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}$$

et $|x+y| \leqslant |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$
$< \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}$

Ainsi, $|f(x) - f(y)| < |x-y| \times \dfrac{\cancel{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}}{\cancel{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}}$ d'où, pour $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x-y|$

Enfin, $x = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{1+x^2}$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $x^2 + 1 = x^2$ $\quad$ <u>ABS</u>

Ce résultat est donc faux si la fonction ne respecte <u>que</u> cette propriété.

Exo 8

① Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ et dérivable sur $]a;b[$, tq $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$

② $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ elle est d'ordre $k-1$

③ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$, $\exists x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$

tq $P = \alpha (X - x_1)^{m_1} \dots (X - x_k)^{m_k}$ avec $\sum_{1 \leq i \leq k} m_i = n$

D'une part, on a toujours les $(b_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ racines de P' obtenues à l'aide du th. de Rolle

D'autre part, $\forall i \in [\![1;k]\!]$, x_i est racine de mult $m_i - 1$ de P'

En additionnant les mult, on a $k-1 + \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) = \cancel{k} - \cancel{k} - 1 + n$

$= n - 1$

On a donc bien trouvé $n-1$ racines mais pas nécessairement distinctes

D'où P' scindé

Exo 9

Analyse Si P convient,

alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| = 1$, $|P(z)| = 1$ DONC $\forall z \in \mathbb{U}$, $|P(z)|^2 = 1$ i.e $P(z)\overline{P(z)} = 1$ (A)

Notons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (avec $a_d \neq 0$, car $P \neq 0$)

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{U}$, on a $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc $\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} z^{-k}$

et donc $\forall z \in \mathbb{U}$, $z^d \overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} z^{d-k}$

(A) $\Rightarrow$ $z^d P(z)\overline{P(z)} = z^d$

i.e si $d \neq 0$ on a $\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} z^{d-k}\right)}_{:= G(z)} = z^d$

AINSI, $\forall z \in \mathbb{U}$, $G(z) = z^d$ $\Rightarrow$ les coeffs. de G sont égaux à 0 sauf celui de $d°d = 1$

OR, le coeff de z^{2d} ds $G(z)$ est $\underset{\neq 0}{a_d}\, \overline{a_0} = 0$ $\Rightarrow$ $a_0 = 0$

le coeff de z^{2d-1} ds $G(z)$ est $\cancel{a_{d-1} \overline{a_0}}_{=0} + \underset{\neq 0}{a_d}\, \overline{a_1} = 0$ $\Rightarrow$ $a_1 = 0$

...

$\forall k \in [\![0; d-1]\!]$, $a_k = 0$ $\Rightarrow$ $P(X) = a_d X^d$

avec $|a_d| = 1$

si $d = 0$: Alors $P = a_d$ avec $|a_d| = 1$

SYNTHÈSE Soit $d \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{U}$, $P = aX^d$ convient ✓

$\Rightarrow$ $\mathcal{S} = \{ aX^d \mid a \in \mathbb{U}, d \in \mathbb{N} \}$

Exo 10

① On note $\delta : c \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx - f(c)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\left(f(x)-f(c)\right)dx$

$\Rightarrow$ δ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a;b]$!

D'autre part, f est $\mathcal{C}^0$ sur $[a;b]$ donc est bornée et atteint ses bornes

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in [a;b]$ tq. $f(\alpha) = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $f(\beta) = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$

Ainsi, $\delta(\alpha) \leqslant 0$ et $\delta(\beta) \geqslant 0$ (car $g \geqslant 0$)

DONC, d'après le T.V.I, $\exists\, c \in [a;b]$ tq $\delta(c) = 0$ $\longrightarrow$ OK

② On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;\pi]$: $\sin(nx) = 0 \iff nx = k\pi$

$\iff x = \frac{k\pi}{n}$

Ainsi, $\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx}_{:= J_k}$ et on a $J_k = \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx$

$t = nx$; $x = \frac{t}{n}$; $dx = \frac{1}{n}dt$

$= \frac{1}{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)|\sin(t)|\,dt$

$u = t - k\pi$; $t = u + k\pi$; $dt = du$

$= \frac{1}{n}\int_0^\pi f\left(\frac{u}{n} + \frac{k\pi}{n}\right)\underbrace{|\sin(u+k\pi)|}_{=|\sin(u)|}\,du$

$= \frac{1}{n}\int_0^\pi f\left(\frac{u}{n} + \frac{k\pi}{n}\right)|\sin(u)|\,du$

or $g : u \mapsto |\sin(u)|$ est positive et $\mathcal{C}^{pm}$ sur $\mathbb{R}$,
f est $\mathcal{C}^0$ sur $[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n}]$ $\Bigg\}$ $\overset{Q1.}{\Rightarrow}$ $\exists\, c_{k,n} \in [\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n}]$

tq $J_k = \frac{1}{n} f(c_{k,n}) \underbrace{\int_0^\pi |\sin(u)|\,du}_{=2}$

$= \frac{2}{n} f(c_{k,n})$

Ainsi, $\underbrace{\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,dx}_{:= I_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f(c_{k,n})$

Somme de Riemann !!

Posons alors $S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^\pi f(x)\,dx$

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} I_n$ i.e $|S_n - \frac{\pi}{2}I_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Soit $\varepsilon > 0$, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $|S_n - \frac{\pi}{2}I_n| = \frac{\pi}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{k,n}) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$

$\leqslant \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left|f(c_{k,n}) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$

or f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;\pi]$, donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément $\mathcal{C}^0$ sur $[0;\pi]$

i.e $\forall \varepsilon'>0, \exists \alpha>0, \forall x,y \in [0;\pi], \quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon'$

Ainsi, prenons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$ et considérons un tel $\alpha > 0$:

$\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, on a $c_{k,n} \in \left[\frac{k\pi}{n};\frac{(k+1)\pi}{n}\right] \Rightarrow \left|c_{k,n} - \frac{k\pi}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{n}$

Ainsi, si $\frac{\pi}{n} \leqslant \alpha$ i.e si $n \geqslant \frac{\pi}{\alpha}$, on a $\left|c_{k,n} - \frac{k\pi}{n}\right| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|f(c_{k,n}) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon'$

DONC
$$\left|S_n - \frac{\pi}{2} I_n\right| = \frac{\pi}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{k,n}) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(c_{k,n}) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon'$$
$$\leqslant \frac{\pi}{\cancel{n}}\cancel{n}\varepsilon' = \cancel{\pi}\frac{\varepsilon}{\cancel{\pi}}$$
$$\leqslant \varepsilon$$

Ainsi, $\forall \varepsilon>0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \left(N_0 = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil\right)$ tq $\forall n \geqslant N_0, \ \left|S_n - \frac{\pi}{2}I_n\right| \leqslant \varepsilon$

i.e $\left|S_n - \frac{\pi}{2}I_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} I_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

D'où la limite recherchée.

Exo 11

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin((2n+1)\theta) = \mathrm{Im}(e^{i(2n+1)\theta})$$
$$= \mathrm{Im}((e^{i\theta})^{2n+1})$$
$$= \mathrm{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1})$$
$$= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\cos^k(\theta)(i\sin\theta)^{2n+1-k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2n+1}{2}\rfloor}\binom{2n+1}{2k}(\cos^2\theta)^k(-1)^{(n-k)}(\sin\theta)^{2n+1-2k}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2n+1}{2}\rfloor}\binom{2n+1}{2k}\underbrace{(\cos^2\theta)^k(\sin^2\theta)^{-k}}_{=\frac{1}{\tan^2\theta}}(-1)^{n-k}$$

et $\lfloor\frac{2n+1}{2}\rfloor = n$

Finalement, $P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}X^k(-1)^{n-k}$

$\binom{2n+1}{2n}$

2) Ce polynôme P_n est de degré n

Concernant ses racines, on sait que $\forall\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = 0 \Rightarrow (2n+1)\theta = k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2n+1}$

et $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0;\frac{\pi}{2}[\iff k \in]0;\frac{2n+1}{2}[$

$\iff k \in [\![1;\lfloor\frac{2n+1}{2}\rfloor]\!] = [\![1;n]\!]$ on a donc trouvé les n racines !

Finalement, $\mathrm{Rac}(P_n) = \left\{\frac{1}{\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \mid k \in [\![1;n]\!]\right\}$

et, d'après la formule de Viète : $\sum_{r\in\mathrm{Rac}(P_n)} r = -\frac{-\binom{2n+1}{2(n-1)}}{\binom{2n+1}{2n}} = \frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = \frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(2n-2)!\,3!} \times \frac{1}{2n+1}$

$= \frac{2n(2n-1)}{6}$

D'où $\sum_{r\in\mathrm{Rac}(P_n)} r = \frac{2n(2n-1)}{6}$

3) Soit $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$,

Tout d'abord, $\frac{1}{\tan^2\theta} \leq \frac{1}{\theta^2} \iff \theta^2 \leq \tan^2\theta$

$\iff \theta \leq \tan\theta$ car $\tan\theta \geq 0$, stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$

Considérons $f : x \mapsto x - \tan(x)$

ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 - (1+\tan^2(x))$

$= -\tan^2(x)$

< 0

donc f est strict décroissante et $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $f(x) \leq f(0) = 0 - \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0$ i.e $\forall\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\theta \leq \tan\theta$

≤ 0

i.e $\theta^2 \leq \tan^2\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{\theta^2} \geq \frac{1}{\tan^2\theta}$

Pour la deuxième inégalité, montrons que $\forall \theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\quad \frac{1}{\theta^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$

i.e $\quad \theta^2 \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta}}$

i.e $\quad \theta^2 \geqslant \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\longrightarrow$ flemme.

4 Ainsi, en prenant $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \frac{1}{\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}} \leqslant \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + 1$$

en sommant, on a

$$\sum_{r\in Rac(P_n)} r \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{r\in Rac(P_n)} r + 1$$

donc $$\frac{2n(2n-1)}{6} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\zeta(2)} \leqslant \frac{2n(2n-1)}{6} + \underbrace{1}_{\text{terme cst!}}$$

et tous sont des termes divergeant vers $+\infty$, on peut donc dire $\underbrace{\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}_{\sim \frac{4n^2}{\pi^2}\zeta(2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{2n(2n-1)}{6}}_{\sim \frac{4n^2}{6}}$

Ainsi, $\frac{\cancel{4n^2}}{\pi^2}\zeta(2) \sim \frac{\cancel{4n^2}}{6} \Rightarrow \zeta(2) \sim \frac{\pi^2}{6}$

Exo 12

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^n (1-x)^n$
$$= x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{2n-k}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

donc le coeff recherché est obtenu pour $k=0$,

i.e $c = \binom{n}{0} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$

d'où $\boxed{c = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}}$

(2) Notons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (1-x)^n$

Ainsi, $f = g \times h$ et d'après la formule de Leibniz : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k (1-x)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k$$
$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!}}_{=\binom{n}{k}} (-1)^k x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k} x^{n-k-j}$$
$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-j}$$

et le coeff devant x^n est $c' = n! (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

donc $c = c' \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \binom{2n}{n}$

(3) Soient 2 ensembles disjoints A, B tq $\#A = \#B = n$

$\leadsto$ Cb de partitions distinctes de $A \cup B$ à n elts pouvons-nous former ?

$\Rightarrow$ Une telle partition est entièrement déterminée par :

le nombre d'elts de A qu'on a choisi, notons le $k \in [0;n]$

ainsi on prend $n-k$ elts dans B.

Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ façons de le faire,

et comme les situations sont totalement ind., par principe multiplicatif, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$\Rightarrow$ Il y en a $\binom{2n}{n}$

$\Rightarrow$ D'où $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Exo 13

Soit $n \in \mathbb{N}$

~> Si $x = 0$: $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} 1$ d'où $\boxed{S = n+1}$

~> Sinon : $S = \mathrm{Re}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}}_{T}\Big)$

et T est une somme géométrique, donc

$$T = 1 \times \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{\cancel{(-2i)}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\cancel{(-2i)}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Donc $S = \mathrm{Re}(T)$

i.e $\boxed{S = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

Exo 14

Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$,

~> $J_N = \int_a^b \phi(t)\cos(Nt)\,dt = \left[\phi(t)\frac{\sin(Nt)}{N}\right]_a^b + \frac{1}{N}\int_a^b \phi'(t)\sin(Nt)\,dt$

$\Rightarrow |J_N| \leqslant \frac{1}{N}\left|-\phi(b)\frac{\sin(Nb)}{N} + \phi(a)\frac{\sin(Na)}{N}\right| + \frac{1}{N}\int_a^b |\phi'(t)\sin(Nt)|\,dt$

$\leqslant \frac{1}{N}|\phi(b)| + \frac{1}{N}|\phi(a)| + \frac{1}{N}\int_0^\pi |\phi'(t)|\,dt$

or ϕ' est $\mathcal{C}^0$ sur $[a;b]$ donc est bornée et atteint ses bornes, notons $\|\phi'\|_\infty$ son sup'

$\leqslant \underbrace{\frac{1}{N}\left(|\phi(b)| + |\phi(a)|\right)}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{N}\|\phi'\|_\infty \pi}_{\longrightarrow 0}$

$\boxed{\text{d'où } \lim_{N \to +\infty} J_N = 0}$

Exo 15

① Posons $\Theta = \operatorname{Arccos}(x)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(n\Theta) &= \operatorname{Re}\left(e^{in\Theta}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\left(e^{i\Theta}\right)^n\right)\\ &= \operatorname{Re}\left((\cos\Theta + i\sin\Theta)^n\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} i^k (\sin\Theta)^k(\cos\Theta)^{n-k}\right)\\ &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{\frac{k}{2}}\left(\sin^2\Theta\right)^{\frac{k}{2}}(\cos\Theta)^{n-k}\\ &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{\frac{k}{2}}\left(1-\cos^2\Theta\right)(\cos\Theta)^{n-k}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ On a donc un polynôme en $\cos\Theta = \cos(\operatorname{Arccos}(x))$
$= x$ si $x \in [-1;1]$

② On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+2)\Theta) = \cos((n+1)\Theta)\cos\Theta - \sin((n+1)\Theta)\sin\Theta$

$\cos(n\Theta) =$ ———— $+$ ————

$$\Rightarrow \cos((n+2)\Theta) + \underbrace{\cos(n\Theta)}_{=T_n(x)} = 2\underbrace{\cos((n+1)\Theta)}_{=T_{n+1}(x)}\underbrace{\cos\Theta}_{=x} \quad \text{si } x \in [-1;1]$$

D'où $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) + T_n(x)$

③ On a $T_n(x) = \cos(n\operatorname{Arccos}(x))$ avec $x \in [-1;1] \Rightarrow \operatorname{Arccos}(x) \in [0;\pi]$
$\Rightarrow n\operatorname{Arccos}(x) \in [0; n\pi]$

Ainsi, $T_n(x) = 1$ si $n\operatorname{Arccos}(x) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow \operatorname{Arccos}(x) = \frac{2k\pi}{n}$ (—) et avec $0 \leqslant \frac{2k\cancel{\pi}}{n} \leqslant \cancel{\pi}$

i.e $0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$

donc $T_n(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi \mid k \in [\![0; \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]\}$

④ On admet que $d°(T_n) = n$ & $cd(T_n) = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$

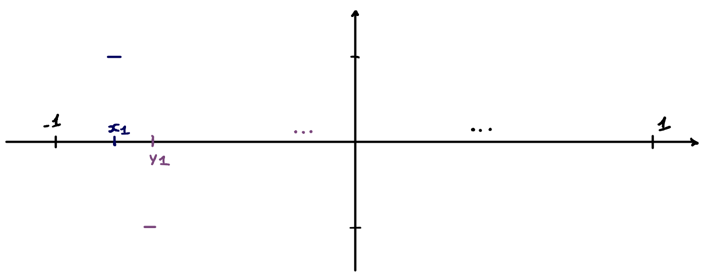
Ainsi, soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tq $d°P = d°T_n$ & $cd(P) = cd(P)$

$\underline{\text{Mq } \|P\|_\infty^{[-1;1]} \geq \|T_n\|_\infty^{[-1;1]}}$: supposons par l'absurde que $\|P\| < \|T_n\| = 1$
i.e $\forall x \in [-1;1],\ -1 < P(x) < 1 \quad (A)$

Notons $(x_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ les réels tq $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $T_n(x_k) = 1$
(y_k) — ———— $T_n(y_k) = -1$

(A) $\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $|P(x_k)| < 1$ et $T_n(x_k) = 1$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $(T_n - P)(x_k) > 0$

(A) $\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $|P(y_k)| < 1$ et $T_n(y_k) = 1$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $(T_n - P)(y_k) < 0$



or $T_n - P$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1;1]$ $\overset{\text{T.V.I}}{\Longrightarrow}$ $T_n - P$ s'annule au moins n fois

OR $d°T_n - P = n-1$ car $cdT_n = cdP$ $\Rightarrow \underline{T_n = P}$ $\Rightarrow \|T_n\| = \|P\|$ $\underline{\text{ABS}}$

D'où le résultat voulu

Exo 16

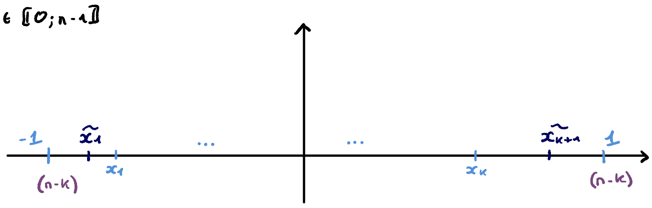
Considérons le polynôme $P = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$

Montrons par récurrence le résultat

□ Soit $k \in [\![0;n]\!]$, notons H_k : " $P^{(k)}$ admet k zéros distincts 2 à 2, notés $(x_i) \in]-1;1[$ et admet -1 et 1 comme racines de mult. $n-k$ "

□ $\underline{k=0}$: $P^{(0)} = P$ → admet 0 zéros $\in]-1;1[$ ✓ ; → admet -1 et 1 comme racines de mult $n = n-0$

□ $\underline{H_k \Rightarrow H_{k+1}}$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$



par H.R, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $P^{(k)} = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-x_1)\cdots(X-x_k)$

or P est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1;1]$ et $P(-1) = P(x_1) \underset{\uparrow n-k\neq 0}{=} 0$ $\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ $\exists \tilde{x}_1 \in]-1;x_1[$ tq $P^{(k+1)}(\tilde{x}_1) = 0$

...

$P(x_k) = P(1) = 0$ $\Rightarrow$ $\exists \tilde{x}_{k+1} \in]x_k;1[$ tq $P^{(k+1)}(\tilde{x}_{k+1}) = 0$

on a donc bien $k+1$ zéros pour $P^{(k)}$

Enfin, comme -1 et 1 sont de mult. $n-k$ pour $P^{(k)}$, elles seront de mult. $n-k-1 = n-(k+1)$ pour $P^{(k+1)}$

$\Rightarrow H_{k+1}$ vraie

Finalement, ce résultat, par principe de récurrence est vrai pour $k=n$: d'où le résultat voulu.

Exo 17

1. On a
   - $f(0) = 2f(0)$ $\Rightarrow f(0) = 0$
   - f est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\underset{f(0)}{\shortparallel}}{f(x-x)} = f(x) + f(-x)$ $\Rightarrow f(x) = -f(-x)$
   - On a, par rec. imm., que $\forall n \geq 1$, $f(n) = nf(1)$

     et comme f est impaire, on a que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = f(-|k|) = -f(|k|) = -|k|f(1) = kf(1)$ $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = kf(1)$
   - On a, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = p \times f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} \times f(1)$ et $f(1) = f\left(\frac{1}{q} \times q\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$ $\overset{q\neq 0}{\Rightarrow}$ $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(1)}{q}$

     $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = xf(1)$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\exists (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to x$ et f continue $\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

     or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} xf(1)$

     donc, par unicité de la limite $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$

$\Rightarrow$ les seules fonctions sols sont les fonctions linéaires

(2) Analyse Soit $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui convient

Soit $x_0 \in]-1;1[$, posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_0^{2n}$

Ainsi, comme $x_0 \in]-1;1[$, on a $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, par cté de f : $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$

or $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$

donc, par unicité de la limite, $f(x_0) = f(0)$

avec $x_0 \in]-1;1[$ quelconque !

Donc, $\forall x_0 \in]-1;1[$, $f(x_0) = f(0)$.

Enfin, par cté de f, on peut dire que $f(-1) = f(1) = f(0)$

$\Rightarrow$ f est donc constante !

Synthèse Les fonctions constantes conviennent.

Exo 18

(1) On a, d'après l'inégalité de Jensen appliquée au $\ln$ (version concave donc) :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(a_i)}{n} = \ln\left(\left(\prod_i a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Ainsi, par croissance de l'exp, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\rightarrow$ OK

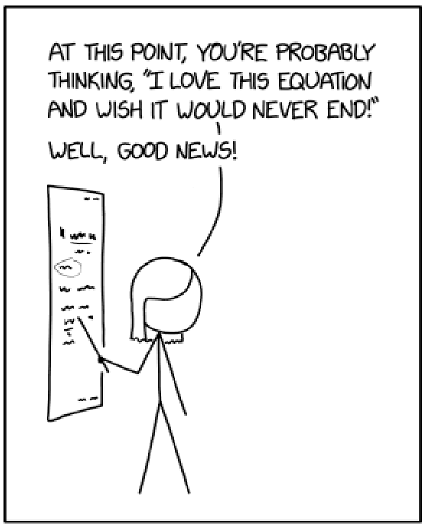
(2) On pose $a_1 = \frac{x_1}{x_2} > 0$

$\vdots$

$a_n = \frac{x_n}{x_1} > 0$ donc d'après le résultat précédent : $\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_1}\right) \geq 1$

i.e $\frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$

$\rightarrow$ OK



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.