Programme de khôlle

Semaine 12
Groupe C
Suites et séries de fonctions

Pierre BODET

Exercice 7 :

On note $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour tout réel $x \in D$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2}.$$

1. Montrer que f est correctement définie, continue et 1-périodique sur D.
2. On pose, pour tout réel $x \in D$,
$$g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$
Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer alors que, pour tout réel x,
$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x).$$
En déduire la valeur de $f(x)$, pour tout réel $x \in D$.
4. Montrer alors que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2}$. Or, $\frac{1}{(n-x)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{(n+x)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $\forall x \in D$, $f(x+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-1-x)^2} \underset{n'=n-1}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n'-x)^2} = f(x)$: f est 1-périodique.

Montrons que f est C^0 sur $]0,1[$ (ce qui est équivalent à f C^0 sur D par 1-périodicité). Soit $\epsilon \in]0,1/2[$. Posons $I_\epsilon = [\epsilon, 1-\epsilon]$. H1 : $\forall n \in \mathbb{Z}$, f_n est C^0 sur I_ϵ (car est une fraction rationnelle). H2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^{I_\epsilon} = \frac{1}{(n-1+\epsilon)^2} \sim \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CVN donc CVU sur I_ϵ.

$\forall n \in \mathbb{Z}^*\setminus\mathbb{N}, \forall x \in I_\epsilon$, $|f_n(x)| \underset{n'=n\in\mathbb{N}}{=} \frac{1}{(n'+x)^2} \leq \frac{1}{(n'+\epsilon)^2}$ donc $\|f_n\|_\infty^{I_\epsilon} = \frac{1}{(-n+\epsilon)^2} = \frac{1}{(n-\epsilon)^2} \sim \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} f_n$ CVN donc CVU sur I_ϵ.

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, f est continue sur I_ϵ. Or, c'est vrai pour tout $\epsilon \in]0,1/2[$ donc f est continue sur $]0,1[$ donc, par 1-périodicité, est continue sur D.

2) g est définie et continue sur D. g est 1-périodique ($h(x+1) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x+\pi)} = \frac{\pi^2}{(-1)^2\sin^2(\pi x)} = h(x)$).

$\forall x \in D$, $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} f_n(x)$. Posons $J = [-1/2, 1/2]$. H1 : $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, f_n est continue sur J. H2 : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} f_n(x)$ CVN donc CVU sur J. Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} f_n(x)$ est continue sur J et $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = S(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$.

Au voisinage de 0, $\frac{\sin^2(\pi x) - \pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)} = \frac{(\pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + O(x^5))^2 - \pi^2 x^2}{x^2\sin^2(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\pi^2}{3}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{-\pi^2}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{3} + 2\zeta(2)$.

g est prolongeable par continuité en 0 donc g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

3) $\forall x \in D$, $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-\frac{x}{2})^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-\frac{x+1}{2})^2} = 4\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n-x)^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{((2n-1)-x)^2} = 4f(x)$.

$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\frac{x}{2})} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\frac{x+1}{2})} = \pi^2 \frac{\cos^2(\pi x/2) + \sin^2(\pi x/2)}{\sin^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2)} \underset{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}{=} \frac{\pi^2}{\left(\frac{\sin(\pi x)}{2}\right)^2} = 4h(x)$.

L'égalité est vraie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Or, g est continue sur $\mathbb{R}$: l'égalité est vraie sur $\mathbb{R}$.

4) g est continue sur $[0,1]$ donc g est bornée sur $[0,1]$ et atteint ses bornes.

$\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $|g(x_0)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

$g\left(\frac{x_0}{2}\right) + g\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 4g(x_0)$. De plus, $|g\left(\frac{x_0}{2}\right) + g\left(\frac{x_0+1}{2}\right)| \leq |g\left(\frac{x_0}{2}\right)| + |g\left(\frac{x_0+1}{2}\right)| \leq 2|g(x_0)|$. On a donc $g(x_0) = 0$ donc $g = 0$ sur $[0,1]$. Or, comme g est 1-périodique, g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0) = \frac{-\pi^2}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{3} + 2\zeta(2)$. On a donc $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 8 : (Magistère MP 2022)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions K-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction u. Montrer que la convergence est uniforme.

Si u n'est pas C^0, alors posons

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1/2], \\ n(x-1/2) & \text{si } x \in [1/2, 1/2+1/n], \\ 1 & \text{si } x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

et posons $u(x) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1/2], \\ 1 & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

On a alors bien une convergence simple vers u, mais pour tout x,

$$|u(x) - u_n(x)| \leq |u(1/2) - u_n(1/2)| = 1 \to 0.$$

Donc, u doit être continue pour que la propriété soit vraie.

Soit $\varepsilon > 0$. u est C^0 sur un segment, donc est uniformément continue. Il existe η' tel que pour tous $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| < \eta$, alors $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Posons $\eta = \min(\eta', \varepsilon/K)$.

Soit $x \in [0,1]$. Soit $y \in [0,1]$ tel que $|x-y| < \eta$,

$$|u_n(x) - u(x)| \leq |u_n(x) - u_n(y) + u_n(y) - u(y) + u(y) - u(x)|$$

$$\leq |u_n(x) - u_n(y)| + |u_n(y) - u(y)| + |u(y) - u(x)|$$

$$\leq K|x-y| + \varepsilon + |u(y) - u(x)| \quad \text{(car } u_n \text{ converge vers } u\text{)}$$

$$\leq K\eta + \varepsilon + \varepsilon \quad \text{(car } u \text{ est uniformément continue et } |x-y| < \eta \leq \eta'\text{)}$$

$$\leq K\frac{\varepsilon}{K} + 2\varepsilon$$

$$\leq 3\varepsilon.$$

On a alors bien (u_n) qui converge uniformément vers u.

Exercice 9 : Théorème de Weierstrass : preuve par convolution

Soit n un entier naturel. On pose $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$, et on considère la fonction $\varphi_n : x \mapsto \frac{1}{a_n}(1-x^2)^n$.

1. Calculer $\int_0^1 t(1-t^2)^n dt$ et en déduire que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.
2. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,1]$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$. Montrer que f est uniformément continue. On pose $f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t)dt$ pour tout réel x.
4. Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$.
5. Montrer que
$$f(x) - f_n(x) = \int_{-1}^{1} \big(f(\cancel{t}x) - f(x-t)\big)\varphi_n(t)dt. \qquad \text{ATTENTION, erreur dans l'énoncé ici}$$
6. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
7. Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de $[-a,a]$. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.
8. Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

1. $$\int_0^1 t(1-t^2)^n\,dt = \left[\frac{-(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
Or, $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt \geq 2\int_0^1 |(1-t^2)^n|\,dt \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n\,dt \geq \frac{2}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$.
2. Soit $x \in [a,1]$. On a
$$|\varphi_n(x) - 0| \leq (n+1)(1-x^2)^n \leq (n+1)(1-a^2)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
Ainsi, (φ_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,1]$.
3. f est continue sur le segment $[-1/2, 1/2]$, donc, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur ce segment. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $|x-y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Prenons $\eta < 1/2$.

   Supposons x et y positifs, le raisonnement sera le même dans l'autre cas. Soient $x, y \in]1/2, +\infty[$ tels que $|x-y| \leq \eta$. Alors
$$|f(x) - f(y)| = |0-0| \leq \epsilon.$$
   Soit $x \in]1/2, 1/2+\eta]$ et $y \in [0, 1/2]$ tels que $|x-y| \leq \eta$. On a alors
$$|f(x) - f(y)| = |0 - f(y)| = |f(1/2) - f(y)|.$$
   Or, comme $x > 1/2$ et $|x-y| \leq \eta$, alors $|1/2 - y| \leq \eta$. Par uniforme continuité sur $[-1/2, 1/2]$, on a $|f(1/2) - f(y)| \leq \epsilon$. Ainsi, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in [-1/2, 1/2]$. On a
$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_{-1/2}^{1/2} f(u)\frac{(1-(x-u)^2)^n}{a_n}\,du.$$
   En appliquant un binôme de Newton, on a
$$f_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(u)P_{x,n}(u)}{a_n}\,du,$$
   où $P_{x,n}$ est un polynôme. En intégrant, comme f est continue, on obtient bien une fonction polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$.
5. On a
$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)\,dt = \frac{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt} = 1.$$
   Donc
$$f(x) - f_n(x) = f(x)\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\,dt - \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1}(f(x) - f(x-t))\varphi_n(t)\,dt.$$

6. Soit $\epsilon > 0$. D'après la question précédente :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x) - f(x-t)||\varphi_n(t)|\,dt.$$

Or, pour n assez grand, d'après la question 2, $|\varphi_n(t) - 0| \leq \epsilon$. Donc

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x) - f(x-t)|\epsilon\,dt \leq \int_{-1}^{1} 2\|f\|_\infty \epsilon\,dt \leq 4\|f\|_\infty \epsilon.$$

On a donc bien (f_n) qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

7. Posons $g(x) = f(2ax)$. On a alors g nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$. D'après les questions précédentes, g est limite uniforme d'une suite de polynômes (g_n). En posant $f_n(x) = g_n\left(\frac{x}{2a}\right)$, on obtient une suite de polynômes qui converge uniformément vers f.

8. Posons $g(x) = f\left(x + \frac{a+b}{2}\right)$. g est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$. D'après la question précédente, on a une suite de polynômes (g_n) qui converge uniformément vers g. En posant $f_n(x) = g_n\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$, on obtient une suite de polynômes qui converge uniformément vers f.

Exercice 10 : Polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \quad \sum_{k=0}^{n} k \cdot B_{n,k}(x), \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot B_{n,k}(x).$$
2. En déduire :
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \cdot B_{n,k}(x).$$
3. Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0, 1]$. On note :
$$A = \left\{ k \in [\![0, n]\!] \,\middle|\, \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha \right\}, \quad B = \left\{ k \in [\![0, n]\!] \,\middle|\, \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha \right\}.$$
Montrer que :
$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$
4. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note :
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$
Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
5. Conclusion ?

1)

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$ (d'après le binôme de Newton).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$
$$= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= nx \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$
$$= nx \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$
$$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k}$$
$$= n(n-1)x^2.$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx.$

2)

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}B_{n,k}(x)+\sum_{k=0}^{n}x^2B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{2kx}{n}B_{n,k}(x)$$
$$=\frac{n(n-1)x^2+nx}{n^2}+x^2-\frac{2nx^2}{n}=2x^2-\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}-2x^2=\frac{x-x^2}{n}.$$

3) Si $k\in A$, on a $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\geq \alpha^2$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^2 B_{n,k}(x)\leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x)=\frac{x-x^2}{n}.$$

Or, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}(x-x^2)=\frac{1}{4}$ (atteint en $x=\frac{1}{2}$). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)\leq\frac{1}{4n\alpha^2}.$$

4) f est continue sur le segment $[0,1]$ donc est uniformément continue : soit $\epsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|\leq\eta\implies|f(x)-f(y)|\leq\epsilon$. Posons alors $\alpha=\eta$ pour définir les ensembles A et B de la question précédente. Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)-f(x)\right|$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|$$
$$\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)$$
$$\leq\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)+\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x).$$
$$\leq 2\|f\|_\infty\sum_{k\in A}B_{n,k}(x)+\epsilon\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)$$
$$\leq\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}+\epsilon(\text{car la somme des } B_{n,k} \text{ vaut } 1)$$

Pour n assez grand, $\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}\leq\epsilon$. On a alors $|f_n(x)-f(x)|\leq 2\epsilon$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5) On a donc prouvé que toute fonction continue sur un segment peut être approximée par des fonctions polynomiales : on a prouvé le théorème de Weierstraß en construisant une suite de polynômes qui convient.

Exercice 11 : (Mines MP 2023)

Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^2 de S dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si, et seulement si, il existe une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f.

Soit $S = [a, b]$ (avec $a \neq b$).

<= Supposons qu'il existe une suite (P_n) de polynômes convexes qui convergent uniformément vers f.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$. Comme P_n est convexe, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que

$$P_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda P_n(x) + (1-\lambda)P_n(y).$$

Pour n assez grand, on a, par uniforme continuité qui implique la convergence simple :

$$f(x) - \varepsilon \leq P_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \cancel{\varepsilon} \leq P_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda P_n(x) + (1-\lambda)P_n(y) \leq \lambda f(x) + \cancel{\lambda\varepsilon} + (1-\lambda)f(y) + (\cancel{1} - \cancel{\lambda})\varepsilon.$$

Donc, on a bien :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

ce qui montre que f est convexe.

=> Supposons maintenant que f soit convexe. Alors, pour tout $x \in S$, $f''(x) \geq 0$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, comme f'' est C^0 (donc continue), il existe une suite (W_n) de polynômes tels que (W_n) converge uniformément vers $\sqrt{f''}$.

Pour tout $n \geq 0$, notons $P_n = W_n^2 \geq 0$ (car on veut une suite de polynômes convexes à la fin).

Soit $x \in S$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que les P_n convergent uniformément vers f''. Comme $\sqrt{f''}(x)$ est continue sur un segment, elle est bornée, donc $\sqrt{f''}(x) \leq \|\sqrt{f''}\|_\infty$.

On a donc également $\sqrt{P_n(x)} \leq \|\sqrt{f''}\|_\infty + \varepsilon$.

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned}|f''(x) - P_n(x)| &= |\sqrt{f''(x)} - \sqrt{P_n(x)}| \cdot |\sqrt{f''(x)} + \sqrt{P_n(x)}| \\ &\leq \varepsilon + 2f''(x) \leq \varepsilon\left(2\|\sqrt{f''}\|_\infty + \varepsilon\right).\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$|f''(x) - P_n(x)| \to 0,$$

ce qui montre que (P_n) converge uniformément vers f''.

Les P_n sont C^0 et convergent uniformément vers f''. D'après le théorème d'intégration sur le segment $[a, x]$, on a :

$$\int_a^x P_n(t)\,dt = \int_a^x f''(t)\,dt.$$

Posons donc la suite de polynômes (Q_n) telle que $Q_n(x) = xP_n(x) + f'(0)$.

Montrons que (Q_n) converge uniformément vers f'. En intégrant sur S, on obtient :

$$\left|\int_a^b f''(x) - \int_a^b P_n(x)\right| \leq \int_a^b |f''(x) - P_n(x)| \leq \int_a^b \varepsilon \leq \varepsilon(b-a),$$

ce qui montre que $\int_a^b P_n(x)$ converge uniformément vers $\int_a^b f'(x)$, c'est-à-dire que Q_n converge uniformément vers f'.

On réapplique alors le théorème d'intégration sur le segment $[a, x]$ à (Q_n) et f', et on a :

$$\int_a^x Q_n(t)\,dt = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Posons donc la suite de polynômes (R_n) telle que $R_n(x) = xQ_n(x) + f(0)$.

On montre de même que (R_n) converge uniformément vers f. Par construction, pour tout $n > 0$, $R_n''(x) \geq 0$, donc R_n est convexe. On a donc une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f.

Exercice 12 : (ENS MP 2022)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bornée.
2. On pose $\alpha = \frac{-\ln(a)}{\ln(b)}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x).$$

3. Montrer que $f_{a,b}$ est α-höldérienne, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

1. — $|a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n$. Or, $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge donc la fonction est bien définie.
   — $|a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n$, donc $f_{a,b}(x)$ converge normalement et donc uniformément. De plus, $f : x \to a^n \cos(b^n \pi x)$ est continue, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $f_{a,b}$ est continue.

— $|a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n$. Or, $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$
et ses termes sont positifs donc la suite de ses sommes partielles est croissante donc $f_{a,b}$ est bornée.

2. Il suffit de montrer que $b^{-n\alpha} = a^n$.
   $b^{-n\alpha} = e^{n \cdot \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \cdot \ln(b)} = e^{n\ln(a)} = a^n$
3. Soit $\eta > 0$.
   — Si $|x-y| \leq \eta$, comme d'après la question 1, $f_{a,b}$ est continue et bornée, on a $|f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq 2\|f_{a,b}\|_\infty$. Donc $C \geq \frac{2\|f_{a,b}\|_\infty}{\eta^\alpha}$ convient.
   — Si $|x-y| > \eta$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{|f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x) - \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi y)\right|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b^{-n\alpha}|(|\cos(b^n \pi x)| - |\cos(b^n \pi y)|)}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|b^{-n\alpha}|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \frac{2b^{-\alpha}}{(1-b^{-\alpha})|x-y|^\alpha} \\
&\leq \frac{2b^{-\alpha}}{(1-b^{-\alpha})\eta^\alpha} \quad \text{qui tend vers une constante.}
\end{aligned}$$

   Posons donc $C = \max\left(\frac{2b^{-\alpha}}{(1-b^{-\alpha})\eta^\alpha}, \frac{2\|f_{a,b}\|_\infty}{\eta^\alpha}\right)$. On a dans les deux cas

$$|f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

   Donc $f_{a,b}$ est bien α-hölderienne.

   (PS : l'hypothèse b>1 autorise l'hypothèse qui la suit, et celle-ci permet d'empêcher de dériver la fonction)