

# TD Ondes électromagnétiques

## Rayonnement dipolaire

### 1 Directivité du rayonnement d'une antenne

Une antenne courte, assimilée à un dipôle oscillant, rayonne dans l'espace vide une onde électromagnétique dans le cadre de l'approximation de la zone de rayonnement. On rappelle qu'en coordonnées sphériques le champ électrique correspondant est de la forme :

$$\vec{E} = \frac{A}{r} \sin(\theta) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta \quad (1)$$

le dipôle étant orienté suivant l'axe  $Oz$ ,  $A$  une constante et  $k = \omega/c$ . On souhaite étudier la directivité de cette antenne.

1. Déterminez le champ magnétique associé dans la zone de rayonnement.
2. Quelles sont les directions  $(\theta, \varphi)$  dans lesquelles le vecteur de Poynting  $\langle \vec{R} \rangle$  est de norme maximale  $R_M(r)$ ? Quelle signification donner à cette propriété?
3. On veut tracer un diagramme de rayonnement, c'est-à-dire une surface définie dans le plan polaire  $(\rho, \theta)$  avec :

$$\rho = \frac{\|\langle \vec{R} \rangle\|(r, \theta, \varphi)}{R_M(r)} \quad (2)$$

Proposez son allure et montrez qu'on peut se contenter de représenter son intersection avec un plan. Commentez.

4. Déterminez la fraction de puissance rayonnée dans la région de l'espace définie par  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ .

### 2 Électron élastiquement lié dans un champ magnétique

On étudie le modèle de l'électron élastiquement lié à un atome par un ressort de raideur  $k$ .

1. Pourquoi le mouvement de l'électron est-il plan? Donnez, dans le cas d'un mouvement circulaire, la pulsation  $\omega_0$  du mouvement.
2. On met l'atome dans un champ  $\vec{B}$  orienté selon  $\vec{u}_z$  et on donne  $\omega_c$  la pulsation cyclotron.
  - (a) Décrivez le mouvement en donnant  $(x(t), y(t), z(t))$  en supposant  $\omega_0 \gg \omega_c$ .
  - (b) Montrez que cela équivaut à un dipôle oscillant à  $\omega_0$  selon  $\vec{u}_z$  et deux dipôles oscillants dans le plan  $xOy$  à  $\omega_0 \pm \omega_c/2$ .
  - (c) On donne le  $\vec{B}$  rayonné. Hypothèse du champ de rayonnement? Soit un point  $M$  sur un axe perpendiculaire à  $xOy$ . Quelle est la direction de  $\vec{E}$ ?

### 3 Guidage d'un bateau

(CCP PSI 2019) Pour guider un bateau, on envoie une onde électromagnétique  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ .

1. Déterminer son champ électromagnétique et son vecteur de Poynting.
2. Le récepteur sur le bateau est un cadre carré de côté  $a = 10$  cm, sur lequel on a bobiné  $N = 100$  spires de fil conducteur. Les deux extrémités du fil sont notées  $A$  et  $B$ , et le circuit reste ouvert.
  - (a) Pourquoi apparaît-il une tension entre  $A$  et  $B$ ?
  - (b) Comment faut-il positionner le cadre pour optimiser la réception du signal?
  - (c) Proposez une approximation raisonnable pour le champ magnétique au voisinage du cadre.
  - (d) Calculez la tension  $U$  en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $E_0$ .
  - (e) Le signal est émis avec une puissance  $P = 20$  kW et une fréquence  $f = 100$  kHz. Le bateau est situé à 30 millesmarins de l'émetteur (1 millemarin = 1852 m). Calculez la valeur efficace de  $U$ .