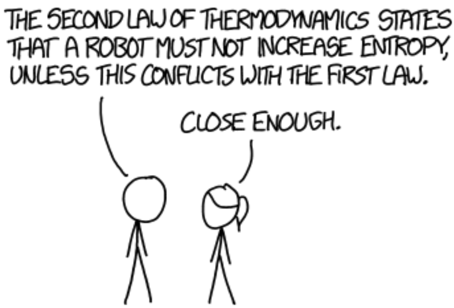
MPI* Physique

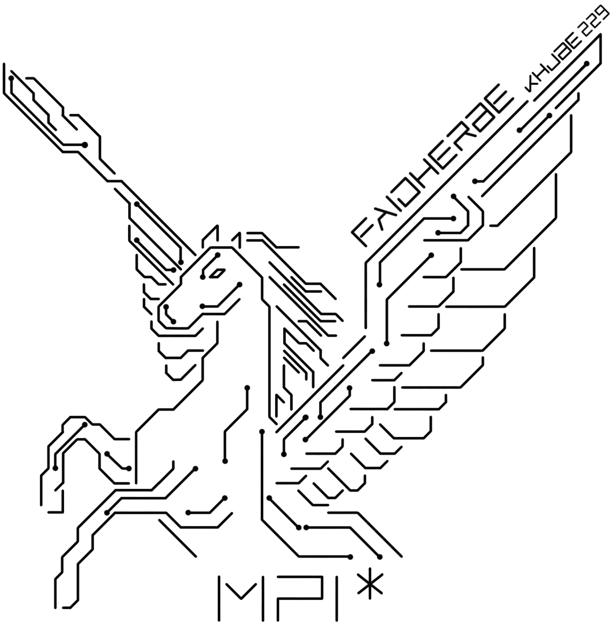
TD Thermodynamique

Conduction thermique - Régime variable



Olivier Caffier

Table des matières



Ce que Faidherbe enseigne, ailleurs ne s'apprend pas.

1 Solides reliés par un isolant

(Centrale PC 2021) Soit deux solides S_1 et S_2 de même capacité thermique C et reliés par un tube de polystyrène P, de section S, de longueur l, de conductivité thermique λ et de capacité thermique négligeable. Au temps $t = 0$, S_1 et S_2 sont aux températures respectives $T_1^0 > T_2^0$.

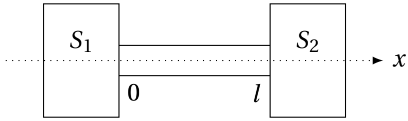


FIGURE 1 – Nos deux solides reliés par le tube P

La résolution sera menée en supposant les échanges thermiques très lents.

1. Pourquoi la température peut-elle être considérée comme uniforme dans les deux solides ?
2. Montrez que la température est une fonction affine dans P.
3. Trouvez $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
4. Calculez la variation d'entropie entre l'état initial et l'état final où l'équilibre thermique est établi.

Corrigé :

1. Les échanges thermiques étant très lents et le polystyrène étant un très mauvais conducteur (c'est d'ailleurs pour cela qu'on le choisit), on peut dire qu'il y a très peu de variations thermiques entre les différentes parties d'un même solide, tant l'uniformisation se fait rapidement par rapport au transfert avec le polystyrène.
2. Comme les échanges thermiques sont très lents, *on se situe dans le cadre de l'ARQS* ! On retrouve alors l'équation de la chaleur en ARQS :

   $$\Delta T = 0$$

   i.e

   $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

   On a alors [1] :

   $$T(x, t) = A(t)x + B(t)$$

   Enfin, on a les conditions aux limites suivantes :

   $$\begin{cases} T(0, t) & = T_1(t) \\ T(l, t) & = T_2(t) \end{cases}$$

1. Je mets la notation de dépendance avec t pour bien insister qu'effectivement on va avoir une loi affine mais cela va évidemment dépendre du temps !

On en déduit alors que :

$$\boxed{\forall x \in [0,l],\ T(x,t) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{l} x + T_1(t)}$$

on retrouve donc bien une fonction affine dans P.

3. Appliquons le premier principe aux deux solides :
   - **Solide 1** : on a
     $$\begin{cases} dU_1 = C dT_1 \\ \delta Q_1 = -\Phi(0,t) dt \end{cases}$$
     or Φ est continu donc $\Phi(0,t) = \Phi(0^+,t) = j_Q(0,t)S$.
     Or, d'après la loi de Fourier, $j_Q(0,t) = -\lambda \dfrac{dT}{dx}(0,t) = -\lambda \dfrac{T_2(t) - T_1(t)}{l}$.
     Donc : $\delta Q_1 = \lambda \dfrac{T_2(t) - T_1(t)}{l} dtS$
     Ainsi, d'après le premier principe :
     $$C \frac{dT_1}{dt}(t) = \frac{\lambda S}{l} \left(T_2(t) - T_1(t)\right) \tag{1}$$
   - **Solide 2** : De même, on trouve :
     $$C \frac{dT_2}{dt}(t) = \frac{\lambda S}{l} \left(T_1(t) - T_2(t)\right) \tag{2}$$

   On se retrouve donc à la fin avec ce couple d'équations différentielles :

   $$\begin{cases} T_1'(t) + \frac{\lambda S}{lC} \left(T_1(t) - T_2(t)\right) = 0 \\ T_2'(t) - \frac{\lambda S}{lC} \left(T_1(t) - T_2(t)\right) = 0 \end{cases}$$

   Réalisons une combinaison linéaire de ces équations : si on fait (2) − (1), et qu'on pose $\tau = \frac{Cl}{2\lambda S}$, il vient :

   $$T_2(t) - T_1(t) = \left(T_2^0 - T_1^0\right) \exp(-t/\tau)$$

   Et en faisant (1) + (2), on a que

   $$T_1(t) + T_2(t) = T_1^0 + T_2^0$$

   Finalement, on a :

   $$\boxed{\begin{cases} T_1(t) = \frac{T_1^0 - T_2^0}{2} \exp(-t/\tau) + \frac{T_1^0 + T_2^0}{2} \\ T_2(t) = -\frac{T_1^0 - T_2^0}{2} \exp(-t/\tau) + \frac{T_1^0 + T_2^0}{2} \end{cases}}$$

4. Comme S est une *fonction d'état extensive*, elle est donc *additive* :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_p + \Delta S_2$$

Or, on sait que pour une phase condensée :

$$\Delta S = C \ln(\frac{T_f}{T_i})$$

Ainsi, en posant $T_f = \frac{T_1^0 + T_2^0}{2}$ pour les deux solides, on a :

$$\Delta S_1 = C \ln(\frac{T_f}{T_1^0})$$
$$\Delta S_2 = C \ln(\frac{T_f}{T_2^0})$$

et comme la capacité thermique du polystyrène est négligeable, on a bien ΔS_p négligeable devant les autres quantités, d'où :

$$\boxed{\Delta S = C \ln\left(\frac{T_f^2}{T_1^0 T_2^0}\right)}$$

Cela vérifie-t-il le second principe ? (i.e $S_c \geq 0$)
En réalisant un bilan entropique (le système est isolé) on a :

$$\Delta S = \underbrace{S_e}_{=0} + S_c$$

D'où :

$$S_c = \Delta S = C \ln\left(\frac{(T_1^0 + T_2^0)^2}{4 T_1^0 T_2^0}\right)$$
$$\geq 0$$

d'après l'inégalité arithmético-géométrique.

Le second principe est donc bien vérifié !

2 Sensation de chaud et de froid

(Mines MP 2017) Deux barres de très grandes longueur et de même section S ont des conductivités λ_1 et λ_2, des masses volumiques μ_1 et μ_2 et des capacités thermiques massiques c_1 et c_2.

Initialement aux températures T_1 et T_2, elles sont mises en contact en $x = 0$. Leurs surfaces latérales sont parfaitement calorifugées.

1. Écrivez l'équation de diffusion thermique pour $x < 0$ et $x > 0$, et exprimez les diffusivités thermiques D_1 et D_2 des deux barres.
2. Il est très fréquent, dans certains domaines comme les mathématiques statistiques, d'introduire la *fonction erf*, aussi appelée *fonction erreur*, possédant le graph illustré en Figure 2. et les caractéristiques suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{erf}(x) = \pm 1$$

On admet que $f(x,t) = \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{Dt}})$ est solution de l'équation précédente.

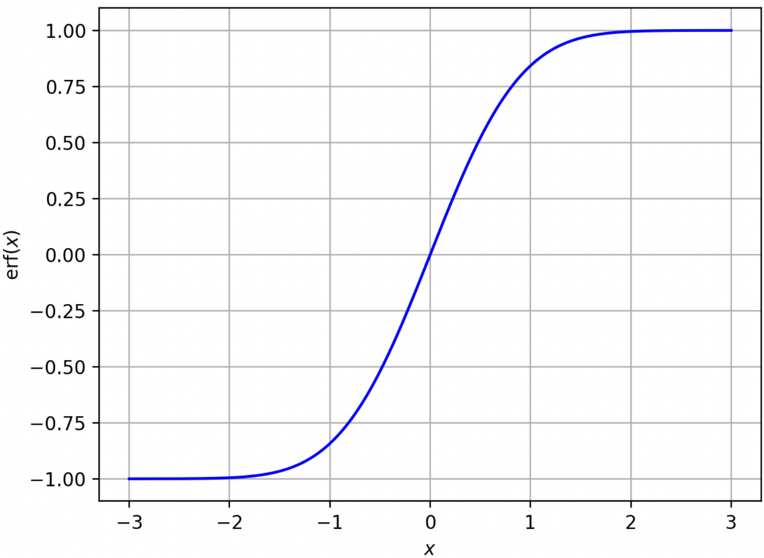


FIGURE 2 – Tracé de $\mathrm{erf}(x)$

Calculez $f(0,t)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)$.

3. On cherche un champ de température tel que :

$$T_1(x<0,t) = A_1 + B_1 f(x,t) \quad \text{et} \quad T_2(x>0,t) = A_2 + B_2 f(x,t)$$

   Calculez la température T_J à la jonction des deux barres en fonction de T_1, T_2 et des effusivités thermiques $E_i = \sqrt{\mu_i c_i \lambda_i}$.
4. Calculez la température de contact entre la main à 37°C et le bois ou l'acier à 20°C.

Données : $E_{\text{main}} = 1800$ S.I, $E_{\text{bois}} = 400$ S.I et $E_{\text{acier}} = 14\,000$ S.I.

Corrigé :

1. L'équation de la chaleur étant valable dans les deux barres, on trouve comme dans le cours :
   - Pour $x<0$:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) - D_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{3}$$

   - Pour $x>0$:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) - D_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{4}$$

   Avec :

$$\boxed{D_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 C_1}} \qquad \boxed{D_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2 C_2}}$$

2. Il est immédiat que :

$$\boxed{f(0,t) = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{\sqrt{D\pi t}}}$$

3. Étudions nos conditions aux limites :

$$\lim_{x\to-\infty} T_1(x,t) = T_1 \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} T_2(x,t) = T_2$$

   Or, en considérant les limites en $\pm\infty$ de la fonction erf, il vient :

$$\boxed{A_1 - B_1 = T_1} \ \text{ et } \ \boxed{A_2 + B_2 = T_2}$$

   De plus, en $x=0$, la température est continue et égale à T_J, et on sait d'après la question précédente que $f(0,t)=0$, d'où :

$$\boxed{A_1 = B_1 = T_J}$$

Enfin, en $x = 0$, la continuité du flux thermique (donné par la *loi de Fourier*) s'écrit :

$$j_{Q_1}(0,t) = j_{Q_2}(0,t) \implies -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)$$
$$\implies \boxed{E_1 B_1 = E_2 B_2}$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} A_1 & = B_1 + T_1 \\ A_2 & = T_2 - B_2 \\ A_1 & = B_1 = T_J \\ B_1 & = \frac{E_2}{E_1} B_2 \end{cases}$$

On arrive finalement à :

$$\boxed{T_J = \frac{E_2 T_2 + E_1 T_1}{E_1 + E_2}}$$

Ainsi, la température de contact est la moyenne pondérée des températures des deux corps, les « poids » étant leurs effusivités.

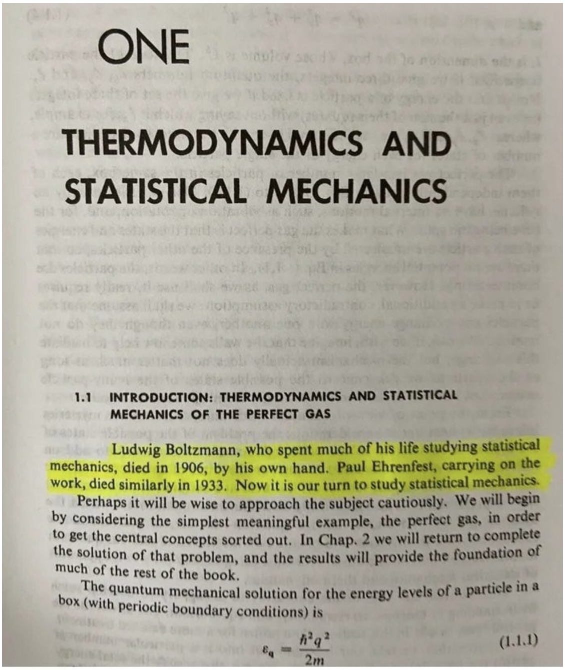
4. On trouve :

$$\boxed{T_{\text{main-bois}} = 33,9\ °\text{C}}$$

et

$$\boxed{T_{\text{main-acier}} = 21,9\ °\text{C}}$$

ce qui est conforme à l'expérience de la vie courante !



ONE

THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS

1.1 INTRODUCTION: THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS OF THE PERFECT GAS

Ludwig Boltzmann, who spent much of his life studying statistical mechanics, died in 1906, by his own hand. Paul Ehrenfest, carrying on the work, died similarly in 1933. Now it is our turn to study statistical mechanics.

Perhaps it will be wise to approach the subject cautiously. We will begin by considering the simplest meaningful example, the perfect gas, in order to get the central concepts sorted out. In Chap. 2 we will return to complete the solution of that problem, and the results will provide the foundation of much of the rest of the book.

The quantum mechanical solution for the energy levels of a particle in a box (with periodic boundary conditions) is

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \qquad (1.1.1)$$

The people studying it: