

TD mécanique

Référentiels non galiléens

1 Attention au colis !

(Mines Télécom MP 2017) Un véhicule de livraison freine avec une décélération γ . À quelle condition un colis chargé se met-il en mouvement ? Proposez des valeurs numériques raisonnables.

2 Inclinaison d'un pendule dans un virage

Un pendule (longueur l , masse m) est suspendu au plafond d'un train. Ce dernier négocie un virage de courbure constante (rayon R) à vitesse constante v . Déterminez l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale.

3 Gravitation artificielle

(Centrale MP 2017) L'apesanteur ayant, à terme, des conséquences physiologiques graves, on essaie de reproduire un effet de gravité dans une navette spatiale de forme torique à section rectangulaire, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 . Il tourne autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire ω .

1. Expliquez qualitativement en quoi ce dispositif peut simuler la gravité.
2. Calculez la valeur de ω permettant de simuler la gravité terrestre avec $r_1 = 15 \text{ m}$; $r_2 = 20 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.
3. L'astronaute fait un jogging dans le vaisseau en tournant dans la couronne dans le sens de ω . Pourquoi est-ce plus difficile ?

4 Pendule suspendu à un point oscillant

(CCP MP 2017) Un pendule constitué d'un fil inextensible de longueur l relie une masse m à un point I (figure 1).

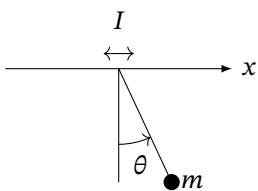


FIG. 1 : Double oscillation d'un pendule.

I est animé d'un mouvement $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. Que pouvez-vous dire du référentiel lié à I ?
2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par θ .
3. Résolvez-la pour les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

5 Fermeture d'une portière

(Centrale PC 2017) On étudie le mouvement de la portière d'une voiture en accélération constante $\vec{a} = a_0 \vec{u}_x$. On la modélise comme une plaque de largeur $2L$, de hauteur h , de masse m uniformément répartie et de moment $J = \frac{4}{3} mL^2$ par rapport à son axe de rotation. On note θ l'angle qu'elle fait avec la position fermée. Initialement $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et la voiture a une vitesse nulle.

1. Donnez l'équation vérifiée par θ .
2. Dans le cas d'une Porsche, qui peut passer de 0 à 100 km h^{-1} en 3,1 s, calculez la distance parcourue par la voiture à l'instant où la portière se ferme.
3. Donnez l'expression, puis la valeur numérique, de la distance totale parcourue par la voiture si, au moment où la portière se ferme, le conducteur décélère avec une intensité égale à celle de la phase d'accélération.

Donnée : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}} = 2,62$

6 Point matériel dans un tube en rotation

Un tube cylindrique, de faible section, est rigidement lié en un point O à une tige verticale de direction Oz . Le point O est fixe dans \mathcal{R} galiléen. Le système est mis en rotation avec une vitesse angulaire constante ω (figure 2).

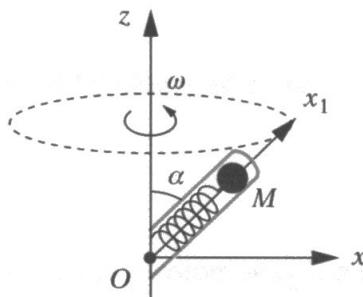


FIG. 2 : Tube en rotation.

L'angle constant entre Ox_1 du tube et l'axe Oz est noté α . Le référentiel tournant lié au tube est noté \mathcal{R}_1 .

1. Le tube comporte un ressort (k, l_0) accroché en O . À l'autre extrémité, un point matériel M de masse m est susceptible de glisser sans frottement à l'intérieur du tube.
 - (a) Établissez l'équation différentielle du mouvement de M dans \mathcal{R}_1 . Vous prendre x_1 comme degré de liberté.
 - (b) Quelle est la relation entre k, m, ω et α pour que M décrive un mouvement oscillatoire dans le tube ? Exprimez alors la période du mouvement.
2. Supprimons le ressort. À l'instant $t = 0$, le point matériel précédent est abandonné dans le tube, sans vitesse initiale, en M_0 tel que $\overline{OM_0} = l_0$. Donnez l'expression de $x_1(t)$.

7 Sismographe

(Centrale MP 2015) Le dispositif de la figure 3a est un sismographe, appareil destiné à l'étude des mouvements du sol. Il est constitué d'un boîtier posé au sol et muni d'une pointe P , de sorte que la pointe suit les déplacements verticaux du sol, repérés dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O'X, O'Y, O'Z)$ par leur altitude $Z_P(t)$. La verticale ascendante est munie d'un vecteur directeur \vec{u}_z .

Les extrémités Q et M d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t)$ sont fixées respectivement au boîtier et à un point matériel de masse m .

Le mouvement vertical de la masse m est amorti par une force de frottement fluide linéaire, de constante de frottement f .

1. En l'absence d'activité sismique, P est fixe et confondu avec O' . La masse m occupe alors une position d'équilibre qui se confond avec l'origine O de l'axe ascendant Oz du référentiel \mathcal{R} lié au boîtier. Calculez la longueur l_1 du ressort quand il est à l'équilibre.
2. Hors équilibre, exprimez $z(t)$ en fonction de $l(t)$.

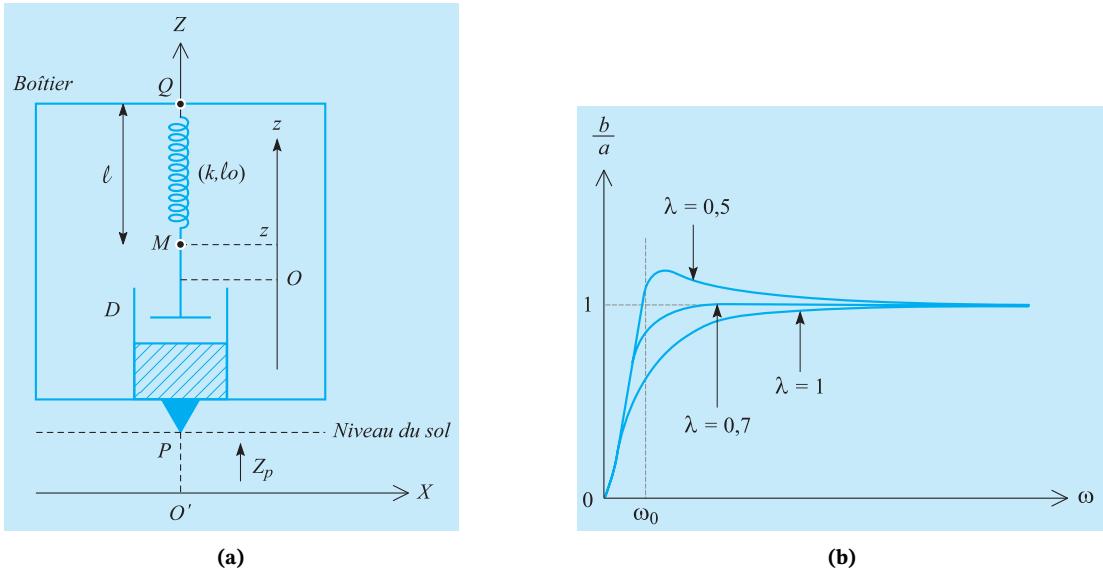


FIG. 3 : a) Principe d'un sismographe. b) Courbes de réponse du sismographe.

3. Lorsqu'il y a de l'activité sismique, la pointe P est animé d'un mouvement oscillant : $Z_P(t) = a \cos(\omega t)$. Montrez que z est gouverné par une équation différentielle dans \mathcal{R} :

$$\ddot{z}(t) + 2\lambda\omega_0\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega^2 a \cos(\omega t) \quad (1)$$

et exprimez les constantes λ et ω_0 en fonction des données. Applications numériques avec $m = 10 \text{ kg}$; $k = 1.10^3 \text{ N m}^{-1}$; $f = 210 \text{ N m}^{-1} \text{ s}$.

4. Pour quelle valeur de λ atteint-on théoriquement le régime permanent le plus vite ?
 5. Dans la suite, le régime transitoire sera supposé terminé. Le régime forcé sera alors de la forme $z(t) = b \cos(\omega t + \phi)$. La réponse en amplitude du sismographe est donnée par le rapport $R = b/a$.
 (a) Établissez l'expression de $R(\omega)$.
 (b) La figure 3b donne l'allure de $R(\omega)$ pour différentes valeurs de λ . Commentez ce graphe et vérifiez la cohérence de l'étude théorique menée précédemment.
 (c) À quelle condition le sismographe suit-il fidèlement les mouvements du sol ?

8 Oscillations d'un pendule monté sur un chariot

(Mines MP 2022) On considère un chariot de masse M pouvant se déplacer sans frottement (sur coussin d'air) le long d'un axe Ox sur lequel est fixé un pendule (fil inextensible de masse négligeable au bout duquel est fixée une masse m). L'abscisse du chariot est notée x et l'angle que fait le pendule avec la verticale θ . Les deux sont initialement immobiles.

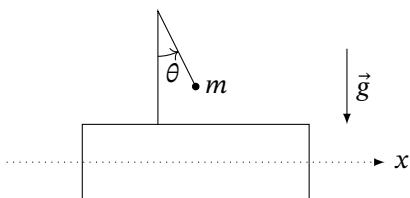


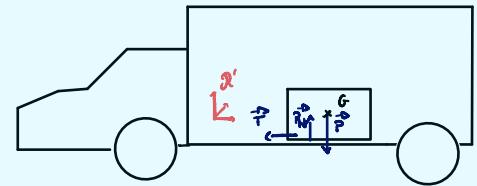
FIG. 4 : Oscillations d'un pendule monté sur un chariot.

On écarte la masse du pendule d'un angle θ_0 . Déterminez x et θ en fonction du temps.

Exercice 1 - Attention au colis !

On considère \mathcal{R}' lié au camion → translation rectiligne par rapport à \mathcal{R} galiléen

Travaillons en **HYPOTHÈSE D'ADHÉRENCE** $\Rightarrow \alpha_{\mathcal{R}'}(G) = 0$



Ainsi, d'après le principe d'inertie dans \mathcal{R}' non-galiléen :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_{fr}} = \vec{0}$$

i.e.

$$\begin{cases} mg = R_N \\ -T - mae = 0 \end{cases}$$

or

$$\begin{aligned} \vec{ae} &= \vec{\alpha}_{\mathcal{R}'}(O') \\ &= \underbrace{\vec{\alpha}_G}_{\text{acc. court freinage } (O')} - \gamma \vec{v}_x^0 \\ &= \vec{0} \quad \text{car } v = \text{cte (on suppose)} \\ &= -\gamma \vec{v}_x \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} mg = R_N \\ T = m\gamma \end{cases}$$

Enfin, d'après les lois de Coulomb, il y a adhérence **TANT QUE** $T \leq f \times \|R_N^0\|$

i.e. $m\gamma \leq f_{adg}$

$\gamma \leq f_g$

Finalement, le colis glisse quand $\gamma \geq f_g$

Prenons $f \approx 0.7$

$g \approx 10$

i.e. pour $\gamma = 7 \text{ m.s}^{-2}$ le colis bouge

↗ valeur qui nous laisse choquer

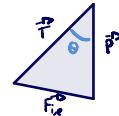
Exercice 2 - Inclinaison d'un pendule dans un virage

α' en translation circulaire par rapport à α

On travaille à l'équilibre dans α' , donc par principe d'inertie :

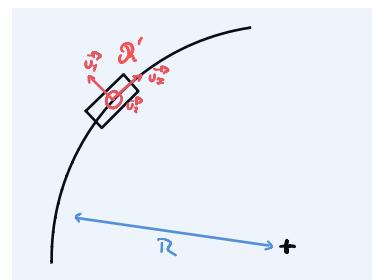
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

On peut alors représenter cela par un triangle de forces :

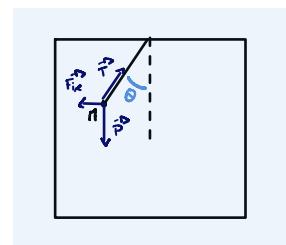


$$\begin{aligned} \text{On en déduit que } \tan \theta &= \frac{\| \vec{F}_{\text{ext}} \|}{\| \vec{P} \|} \\ &\Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{m w^2 R}{mg} \right) \end{aligned}$$

Finalement, $\theta_{\text{eq}} = \arctan \left(\frac{w^2 R}{g} \right)$



vue de dessus



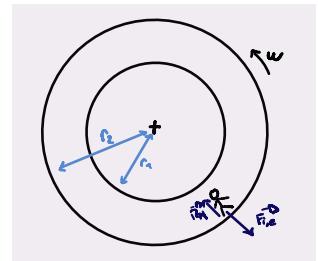
vue de derrière

Exercice 3 - Gravitation artificielle

① La force centrifuge repousse l'individu vers l'externe (on a donc l'intérêt à le placer comme sur le schéma, sinon : bobo)

→ simule une sorte de gravité

② Simuler la gravité ?
 → prop. à la masse
 → ind. du mvt du système
 → verticale



Ainsi, \vec{F}_{ext} est un très bon candidat pour le rôle de la gravité, on suppose l'individu à l'arrêt

DONC, on veut que $\| \vec{F}_{\text{ext}} \| = mg$

$$\text{i.e. } \cancel{m w^2 r_2} = mg$$

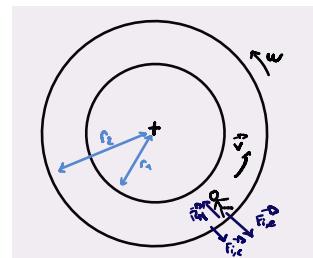
$$\text{DONC on veut que } w = \sqrt{\frac{g}{r_2}} \approx 0.71 \text{ rad.s}^{-1} \approx 6.8 \text{ tour/min}$$

③ La force de Coriolis va ici faire office de force centrifuge

→ l'individu va se sentir de + en + lourd si il progresse en vitesse

car \vec{F}_{ext} prop à la vitesse !!

→ pas très agréable



Exercice 4 - Pendule suspendu à un point oscillant

① \mathfrak{R}' en translation rectiligne par rapport à \mathfrak{R} supposé galiléen
 $\Rightarrow \mathfrak{R}'$ non-galiléen

② BDF

- $\vec{P} = mg (\cos\theta \vec{v}_x^D - \sin\theta \vec{v}_y^D)$
- $\vec{F}_{i,e} = -m\vec{a}_e$
 $= m\ddot{x}_0 \omega^2 \cos(\omega t) \vec{v}_x^D$
 $= m\ddot{x}_0 \omega^2 \cos(\omega t) (\sin\theta \vec{v}_r^D + \cos\theta \vec{v}_\theta^D)$
- $\vec{T} = -T\vec{v}_r^D$ avec $T > 0$

$$\text{et } L_I^D(M) = m\ell^2 \dot{\theta} \vec{v}_z^D$$

Donc, d'après le théorème du moment cinétique, projeté sur \vec{v}_z^D , on a :

$$mr\ell^2 \ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{\ell} \underbrace{\sin\theta}_{\approx 0} + \omega^2 mr \frac{\ddot{x}_0}{\ell^2} \cos(\omega t) \frac{\cos\theta}{\approx 1}$$

Finalement, on a (aux petits angles) :

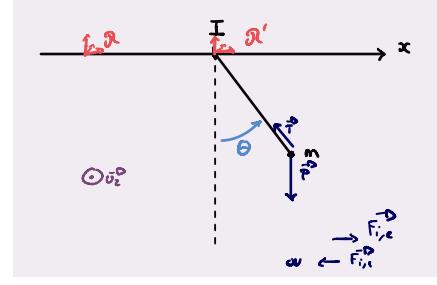
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = \left(\frac{\omega}{\ell}\right)^2 x_0 \cos(\omega t)$$

$$\text{i.e. } \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$A = \left(\frac{\omega}{\ell}\right)^2 x_0$$

③ Résolution comme d'hab., $s_{HT} + s_p$

oscillateur harmonique! méthode complexe!

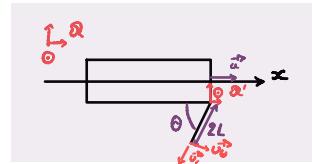


Exercice 5 - Fermeture d'une portière

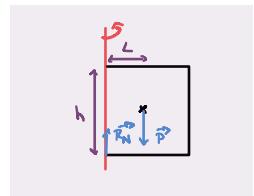
1

\mathfrak{R}' en translation rectiligne par rapport à \mathfrak{R} supposé galiléen.

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$



$$\text{On a, d'après le théorème de l'énergie cinétique, } \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(F_i) \\ = \mathcal{P}(F_{i,c})$$



$$\text{et } \mathcal{P}(F_{i,c}) = F_{i,c} \cdot \vec{v}_{\mathfrak{R}'}(t) \\ = -m \vec{a}_{\mathfrak{R}'} \cdot L \dot{\theta} \vec{v}_{\theta} \\ = -m a_0 \vec{v}_x \cdot L \dot{\theta} (\sin \theta \vec{v}_x + \dots) \\ = -m a_0 L \dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$\text{D'où } \sum_i \mathcal{P}(F_i) = -m a_0 L \dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$\text{D'où } \ddot{\theta} + \frac{m a_0 L}{I} \sin \theta = 0$$

$$\text{or } I \ddot{\theta} = -m a_0 L \dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$\text{On obtient alors : } \ddot{\theta} + \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} \sin \theta = 0$$

2 On va utiliser la méthode du facteur intégrant, i.e on va multiplier par θ l'équation obtenue précédemment.

On a

$$\theta \ddot{\theta} + \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} \theta \sin \theta = 0$$

primitive ↓
à vue

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} \cos(\theta) \Rightarrow \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3 a_0 \cos \theta}{2 L}} \text{ car } \theta \text{ décroissante!}$$

$$\text{i.e. } \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} \frac{a_0}{L} \cos(\theta) \quad \text{et } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

Ainsi, si on prend τ l'instant où la portière se ferme, on a $\tau = \int_0^\tau dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{2L}{3a_0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta$$

$$a(t) = a_0 = \frac{100 \times 10^3}{3600} = \frac{1}{3.14} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2L}{3a_0}} \times 2.62$$

$$\Rightarrow v(t) = a_0 t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad \text{et donc } x(\tau) = \frac{1}{2} \approx \frac{2L}{3a_0} \times (2.62)^2 \\ = (2.62)^2 \times \frac{L}{3} \approx 1.14 \text{ m}$$

(3)

$$\ddot{x} = -a_0 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2} a_0 (t-t_f)^2 + v_0 (t-t_f) + D$$

$$\dot{x}(t_f) = 0 \Rightarrow -a_0(t_f' - t_f) + v_0 = 0$$

$$\Rightarrow t_f' = \underbrace{\frac{v_0}{a_0}}_{=t_f} + t_f \\ = 2t_f$$

$$\Rightarrow x(t_f') = x(2t_f) \\ = -\frac{1}{2} a_0 (2t_f)^2 + v_0 t_f + D$$

$$\text{avec } t_f = \frac{v_0}{a_0} \Rightarrow x(t_f') = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{v_0^2}{a_0} + D$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0} + D$$

$$\approx 2.28 \text{ m}$$

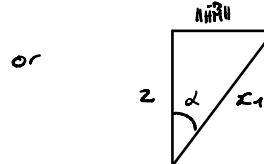
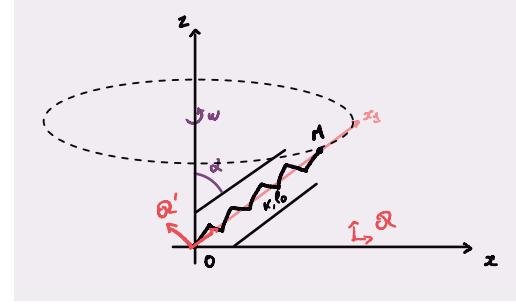
Exercice 6 - Point matériel dans un tube en rotation

\mathfrak{R}' est en rotation pure uniforme par rapport à \mathfrak{R} supposé galiléen

- ① a) $E_m = \text{cte}$ car aucune force conservative ne travaille (TEM)

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \quad \text{car mv² est constante en } x_1$$

$$\begin{aligned} E_p &= E_p(\vec{r}) + E_p(F_{i,e}) + E_p(F_{el}) \\ &= mgz + \frac{1}{2} m \omega^2 H^2 + \frac{1}{2} k(x_1 - l_0)^2 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow z = \cos(\alpha) x_1$$

$$H^2 = \|H\|^2 = (x_1 \sin(\alpha))^2$$

D'où

$$\begin{aligned} E_p &= mgx_1 \cos(\alpha) + -\frac{1}{2} m \omega^2 \sin^2(\alpha) x_1^2 + \frac{1}{2} k(x_1 - l_0)^2 \\ E_c &= \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \end{aligned}$$

$$\text{et } E_m = E_c + E_p \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = m \cancel{\dot{x}_1 \ddot{x}_1} + \cancel{x_1} \left(mg \cos(\alpha) + m \omega^2 \sin^2(\alpha) x_1 + k(x_1 - l_0) \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + x_1 \left(-\omega^2 \sin^2(\alpha) + \frac{k}{m} \right) = -g \cos(\alpha) + \frac{k}{m} l_0$$

- b) On veut que $-\omega^2 \sin^2(\alpha) + \frac{k}{m} > 0$

$$\text{i.e. } \boxed{\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)} \rightarrow \text{le tube ne doit pas tourner trop vite}$$

$$\text{Ainsi, } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- 2) Sans la force de rappel élastique, on obtient l'équation :

$$\ddot{x}_1 - \omega^2 \sin^2(\alpha) x_1 = -g \cos(\alpha)$$

$$\text{i.e. } \ddot{x}_1 - \beta^2 x_1 = c \quad \text{avec } \beta = \omega \sin(\alpha) \quad \text{et } c = -g \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \underbrace{A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}}_{x_{\text{hom}}} - \underbrace{\frac{c}{\beta^2}}_{x_{\text{part}}} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x(0) = l_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B - \frac{c}{\beta^2} = l_0 \\ \beta(A - B) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = l_0 + \frac{c}{\beta^2} \\ A = B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2} \left(l_0 - \frac{g \cos(\alpha)}{\beta^2} \right)$$

D'où

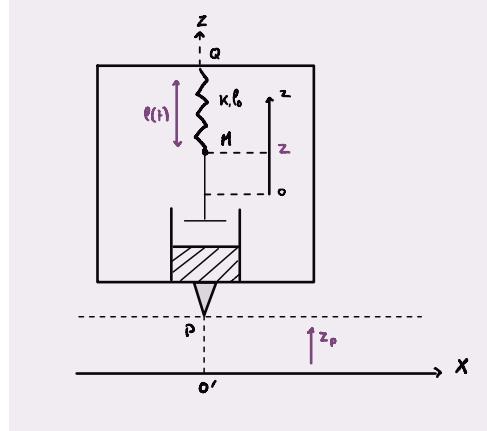
$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left(l_0 - \frac{g \cos(\alpha)}{\beta^2} \right) \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t} \right) + \frac{g \cos(\alpha)}{\beta^2}$$

Exercice 7 - Sismographe

- 1 En l'absence d'activité sismique, \mathcal{R}' est un référentiel supposé galiléen.
 À l'équilibre, seuls le poids et la force de rappel élastique agissent sur M.
 Ainsi, par principe d'inertie :

$$0 = K(l_1 - l_0) - mg$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{mg}{K} + P_0$$



- 2 Hors équilibre, on a $z(t) = P_1 - P(t)$

- 3 Supposons qu'il y ait de l'activité sismique. \mathcal{R}' est en translation rectiligne par rapport à \mathcal{R} supposé galiléen.
 => \mathcal{R}' non galiléen

DONC

BDF

- $\vec{F}_{\text{ext}} = K(P(t) - P_0) \vec{v}_z^D = K(l_1 - l_0 - z(t)) \vec{v}_z^D = mg \vec{v}_z^D - Kz(t) \vec{v}_z^D$
- $\vec{P} = -mg \vec{v}_z^D$
- $\vec{F}_{\text{friction}} = -F \dot{z}(t) \vec{v}_z^D$
- $\vec{F}_{\text{int}} = -m \ddot{a}_e^D = m \omega^2 a \cos(\omega t) \vec{v}_z^D$

PFD dans \mathcal{R}' On a (en projetant sur \vec{v}_z^D)

$$m \ddot{z}(t) = mg - Kz(t) - mg - F \dot{z}(t) + m \omega^2 a \cos(\omega t)$$

D'où

$$\ddot{z}(t) + \frac{F}{m} \dot{z}(t) + \frac{K}{m} z(t) = \omega^2 a \cos(\omega t)$$

DONC on veut $\begin{cases} \frac{F}{m} = 2\lambda \omega_0 \\ \frac{K}{m} = \omega_0^2 \end{cases}$

Finalement, on a

$$\ddot{z}(t) + 2\lambda \omega_0 \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega^2 a \cos(\omega t)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \\ \lambda = \frac{F}{2\sqrt{km}} \end{cases}$$

$$\text{A.N.: } \omega_0 \approx 10 \text{ rad.s}^{-1} \\ \lambda \approx 1.05$$

- 4 On alterne le régime permanent le plus vite avec le régime critique : $\Delta = 0$ de l'équation caractéristique

$$\text{et } \Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \omega_0^2 = \omega_0^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

positif!

et cela se confirme bien avec la figure b)

5

a) On va résoudre cette équation en complexe (pour trouver la sol. part.)

donc $(i\omega)^2 + 2\lambda\omega_0(i\omega) + \omega_0^2 b e^{i\phi} e^{i\omega t} = \omega^2 a e^{i\omega t}$

Ainsi, $R = \frac{b}{a} = \left| \frac{\omega^2 e^{-i\phi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega_0\omega} \right| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\omega^2}}$
a,b ∈ ℝ

d'où $R(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\omega^2}}$

b) On remarque que quelle que soit la valeur de λ , $\begin{cases} R(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \\ R(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \infty \end{cases}$ ce qui se confirme bien avec notre formule obtenue précédemment.

c) La point transcrit fidèlement les murs du sol si $R(\omega) \approx 1$
 $\Rightarrow \omega \gg \omega_0$

Mais il faut aussi que le régime transitoire se termine le + rapidement possible (car c'est un parasite dans la retranscription des murs du sol) $\Rightarrow \lambda \approx 1$

Exercice 8 - Oscillations d'un pendule monté sur un chariot

