TD Thermodynamique

Conduction thermique

Régime variable

1 Solides reliés par un isolant

(Centrale PC 2021) Soit deux solides S_1 et S_2 de même capacité thermique C et reliés par un tube de polystyrène P, de section S, de longueur l, de conductivité thermique λ et de capacité thermique négligeable. Au temps $t = 0$, S_1 et S_2 sont aux températures respectives T_1^0 et T_2^0 avec $T_1^0 > T_2^0$.

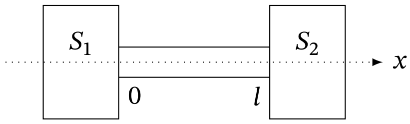

FIG. 1

La résolution sera menée en supposant les échanges thermiques très lents.

1. Pourquoi la température peut-elle être considérée comme uniforme dans les deux solides ?
2. Montrez que la température est une fonction affine dans P.
3. Trouvez $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
4. Calculez la variation d'entropie entre l'état initial et l'état final où l'équilibre thermique est établi.

2 Sensation de chaud et de froid

(Mines MP 2017) Deux barres de très grandes longueurs et de même section S ont des conductivités λ_1 et λ_2, des masses volumiques μ_1 et μ_2 et des capacités thermiques massiques c_1 et c_2. Initialement uniformément aux températures T_1 et T_2, elles sont mises en contact en $x = 0$ et à $t = 0$. Leurs surfaces latérales sont parfaitement calorifugées.

1. Écrivez l'équation de diffusion thermique pour $x < 0$ et $x > 0$ et exprimez les diffusivités thermiques D_1 et D_2 des deux barres.

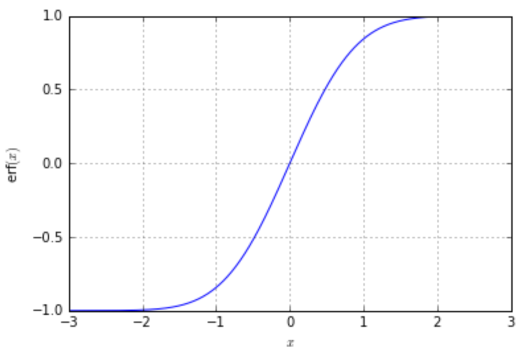

FIG. 2 : Graphe de la fonction erf.

2. Il est très fréquent, dans certains domaines comme les mathématiques statistiques, d'introduire la *fonction erf*, appelée aussi fonction erreur, définie par l'expression suivante, et représentée figure 2.

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \text{erf}(x) = \pm 1 \tag{1}$$

On admet que $f(x,t) = \text{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$ est solution de l'équation précédente. Calculez $f(0,t)$ et $\partial f / \partial x(0,t)$.

3. On cherche un champ de température tel que :

$$T_1(x<0,t) = A_1 + B_1 f(x,t) \quad \text{et} \quad T_2(x>0,t) = A_2 + B_2 f(x,t) \tag{2}$$

   Calculez la température T_J à la jonction des deux barres en fonction T_1, T_2 et des effusivités thermiques $E_i = \sqrt{\mu_i c_i \lambda_i}$.
4. Calculez la température de contact entre la main à 37 °C et le bois ou l'acier à 20 °C. Données : $E_{\text{main}} = 1800\,\text{SI}$, $E_{\text{bois}} = 400\,\text{SI}$ et $E_{\text{acier}} = 14\,000\,\text{SI}$.