Colles MPi* Semaine n°16 du 13/01/2025 au 17/01/2025 (Programme n°10)

Vallaeys Pascal

1er janvier 2025

Thème : Variables aléatoires.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier
- Martinsse

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI
- Dutilleul

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie. Le faire sur des exemples simples.
- Définition d'une variable aléatoire (discrète) + l'image réciproque d'une partie de $X(\Omega)$ est un élément de la tribu (démo).
- Si X est une variable aléatoire, f(X) est une variable aléatoire (démo)

- Définition de deux variables aléatoires indépendantes, et de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- X,Y indépendantes => f(X) et g(Y) indépendantes (démo)
- Calcul de l'espérance des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à l'aide de la définition.
- Une loi géométrique est une loi sans mémoire (démo, rappeler le sens de cela)
- Propriété de l'espérance (linéarité, positivité (démo), croissance).
- Énoncé du théorème de transfert.
- Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
- Variance d'une somme de variables aléatoires.
- Inégalité de Markov (1 démo)
- Si X admet un moment d'ordre 2, X est d'espérance finie (démo)
- Inégalité de Bienaymé Tchebychev.
- Lien entre l'existence de l'espérance et de la variance et la dérivabilté de Gx en 1. (démo pour X d'espérance finie => G_X dérivable en 1)
- Espérance et variance des lois usuelles à l'aide de G_X. (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Loi de Poisson comme limite (simple) d'une loi binomiale (démo)
- Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.
- Variance d'une somme de variables aléatoires. (démo)
- Inégalité de Markov (2 démos)
- Inégalité de Cauchy Schwarz pour l'espérance (démo)
- Calcul de la variance des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à l'aide de la définition.
- Inégalité de Bienaymé Tchebychev (démo)
- Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes (2*démo)
- Loi faible des grands nombres (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Linéarité de l'espérance. (démo)
- Si $|X| \leq Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. (démo)
- Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendante. (démo)
- Théorème de transfert. (démo)
- La dérivabilité de G_X en 1 entraine l'existence de l'espérance. (démo)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes, de lois $B(n_1; p)$ et $B(n_2; p)$. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

Exercice 2 :
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson. Montrer que X+Y suit une loi de Poisson :
a) Directement à l'aide de l'expression de la loi de Poisson.
b) A l'aide des séries génératrices.

Exercice 3 : (BECEAS MP 2023)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $\max\{P(X = n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2023)
On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). On tire deux boules simultanément. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro porté par les deux boules et Y celle égale au plus grand numéro.
1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $E(Y^2)$.

Exercice 5 : (Mines télécom MP 2023)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$. Soient $I = \min(X,Y)$, $M = \max(X,Y)$ et $D = M - I$.

1. Montrer que $P(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)^2$.
2. Montrer que I et D sont indépendantes.

Exercice 6 : (Mines télécom MP 2022)

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

2) Calculer $P(X \text{ est pair})$.

Exercice 7 : (CCINP PSI 2021)

On étudie succession de lancers d'une pièce équilibrée.

X est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face »

Y est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile »

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.

2. Montrer que si la famille $(P(X>k))_{k\geqslant 0}$ est sommable, alors X admet une espérance finie.

3. Étude de la réciproque : montrer que si X admet une espérance finie, alors la suite $(nP(X>n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

4. Application : on considère une urne contenant N boules identiques numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au plus grand nombre tiré au cours des n tirages.

5. Calculer $P(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.

6. Montrer, à l'aide d'une somme de Riemann, que la suite $\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right)_{N\geqslant 1}$ admet une limite finie et la calculer.

7. En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 9 : (Mines télécom MP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p ; et que, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, la loi de Y conditionnée à $X=i$ est la loi binomiale de paramètres $n-i$ et p.

Montrer que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

Exercice 10 : (Mines MP 2018)

Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\{1,...,n\}$.

Exercice 11 : (CCINP MP 2021)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappelez l'espérance et la variance de X.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.
3. Calculer $P(X=Y)$.
4. a) Montrer que $P(X<Y) = P(Y<X)$.

b) Calculer $P(X \geqslant Y)$.

5. ?

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve Question 2 : Écrire de deux manières différentes le coefficients devant X^n dans le développement de $((X+1)^n)^2)$.

Exercice 12 : (Centrale MP 2019)

Soient $s \in]1,+\infty[$ et X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $\zeta(s)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X=n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$, où on note $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p(n/X)$.

b) Soient $n_1,...,n_k$ des nombres entiers premiers entre eux deux à deux. Montrer que les évènements $\{n_j/X\}_{1\leq j\leq k}$ sont mutuellement indépendants.

c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangée dans l'ordre croissant. Montrer que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-{}^1/_{p_n^s}} = \zeta(s)$.

d) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 13 : (Mines MP 2018)

Soient $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telles que $p(X_i=1) = p(X_i=-1) = 1/2$ pour tout i. On note $S_n = X_1+...+X_n$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}+$. Montrer que $E\left(e^{tS_n}\right) = (ch\,(t))^n$. En déduire que $E\left(e^{tS_n}\right) = (ch\,(t))^n E\left(e^{tS_n}\right) \leq e^{nt^2/2}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}+$, $p\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right)$ et en déduire que $p\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$.

Exercice 14 : (Centrale MP 2022)

On considère un point qui est libre de se déplacer selon l'axe des entiers $\mathbb{Z}$. A chaque étape, le point se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité p et vers la gauche avec la probabilité $1-p$. Elle se situe initialement en 0. On note S_n la variable aléatoire qui indique la position du point au bout de n mouvements.

1) Donner la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On pose $p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$, et $f : t \mapsto \sum p_n t^n$. Justifier que f est définie sur $]-1,1[$ et calculer $f(t)$ pour $t \in]-1,1[$.

3) On introduit T la variable aléatoire qui indique le rang du premier passage à l'origine, avec la convention que $T = +\infty$ si le point n'y repasse jamais. On note $q_n = \mathbf{P}(T=n)$, et $g : t \mapsto \sum q_n t^n$. Justifier que g est définie sur $]-1,1[$ et établir que $f(t) = 1 + f(t)g(t)$. En déduire l'expression de q_n.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 15 : (Centrale MP 2019)

a) Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)\left(X-\overline{b}\right)$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $|b| < 1$.

b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note $p_n$la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. Donner une expression et un équivalent de p_n.

Exercice 16 : (TPE MP 2019)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

a) Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \to E\left((X-m)^2\right)$.

b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $p(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 17 : (Mines MP 2023)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que X_1+X_2 suit la même loi que $2X_1$ avec $X_1 \geqslant 0$.

Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

Exercice 18 : (Mines MP 2022)

(sans préparation)

Soit N variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$

On pose $Y = \sum_{i=0}^{N} X_i$. Par définition : $\forall\omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)$

Déterminer la loi de Y.

Exercice 19 : (Centrale MP 2021)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.
1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.
2. a) Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis les lois de U et de V.
b) Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $P((U = n) \cap \ (V = m)) \neq 0$. Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 20 : (Mines MP 2023)
Soient A, B et C des vaiid suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Soit l'équation différentielle $Ay'' + By' + Cy = 0$ et $p(\lambda)$ la probabilité pour que les solutions de cette équation s'annulent une infinité de fois.
Montrez que $\lim_{\lambda \to \infty} p(\lambda) = 1$.

Exercice 21 : (Mines MP 2023)
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{e}{4})^{\lambda}$.
Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 22 : (Mines MP 2021)
Soient X et Y deux variables indépendantes, strictement positives et de même loi. Montrer que $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 23 : (Mines MP 2021)
Soit $r > 0$
1) Montrer que la relation suivante :
$\mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r \,\mathrm{d}x$ définit bien une probabilité d'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
2) Préciser pour quelle valeur de r la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

Exercice 24 : (X MP 2021)
On considère une urne avec 10000 boules dont 6000 rouges et 4000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules.
Déterminer la probabilité pour qu'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages. (chercher du côté des chemin de Dyck et du problème du scrutin)

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 95,96,97,98,99,100,102,103,104,106,108,109,110,111.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : variables aléatoires. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°10
- Groupe 5 à 7 : Programme n°10
- Groupe 8 à 11 : Programme n°10
- Groupe 12 à 14 : Pas de colle de math cette semaine