Colles MPi* Semaine n°19 du 05/02/2024 au 09/02/2024 (Programme n°13)

Vallaeys Pascal

24 janvier 2024

Thème : Espaces préhilbertiens et euclidiens.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'un produit scalaire + exemple.

- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt sur un exemple.
- Inégalité de Cauchy Schwarz. (démo)
- Norme associée à un produit scalaire (démo)
- Une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et non nuls est libre (démo)
- Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie muni d'une b.o.n.
- $S(E)$ est un espace vectoriel. (démo)
- Définition de l'adjoint.
- Adjoint d'une composée ("démo")
- Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- Lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique. ("démo")
- Pour un endomorphisme auto-adjoint, les s.e.p. sont en somme directe orthogonale. (démo)
- Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*. (démo)
- Si F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, il en va de même pour son orthogonal. ("démo")
- Le spectre réel d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$ et E_1 et E_{-1} sont orthogonaux. (démo)
- Théorème de réduction par blocs des isométries.
- Théorème spectral. (version endomorphisme et version matricielle)
- Définition d'un endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Identité de polarisation et identité du parallélogramme. (démo)
- Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie muni d'une b.o.n. (démo)
- Caractérisation des isométries par la conservation de la norme. (démo)
- Caractérisation des isométries par l'image d'une b.o.n. (démo)
- Caractérisation des isométries par u^*. (démo)
- Existence et unicité de l'adjoint. (démo)
- Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée. (démo)
- Si F est stable par une isométrie, il en va de même pour son orthogonal. (démo)
- Une projection est une projection orthogonale si et seulement si c'est un endomorphisme auto-adjoint. (démo)
- Une symétrie est une symétrie orthogonale si et seulement si c'est une isométrie. (démo)
- $O_n(\mathbb{R})$ est compact. (démo)
- Caractérisation des endomorphismes auto-adjoint positifs (resp. définis positifs) par le spectre. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Théorème spectral. (démo)
- Théorème de réduction par blocs des isométries. (démo)
- Le projeté orthogonal minimise la distance à un sous-espace. (démo non refaite en spé)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 :
Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice dans la base canonique de la projection vectorielle orthogonale p sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 2 :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :
a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k.\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.
b) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2$.

Exercice 3 :
Soit $X \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $X^3 = I_n$. Que vaut X ?

Exercice 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
Diagonaliser A dans une base orthonormée.

Exercice 5 :
a) Soit $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer qu'en posant $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg$ on définit un produit scalaire sur E.
b) Déterminer $\inf \left\{ \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 6 :
Soit E un espace euclidien et p et q deux projections orthogonales. Montrer que : $p \circ q = 0 \Leftrightarrow q \circ p = 0$.

Exercice 7 :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $Ker\left(A^T.A\right) = Ker(A)$ et que $Ker\left(A.A^T\right) = Ker\left(A^T\right)$.
b) Montrer la même genre de relation pour les images.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 8 :
Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Soit p la projection orthogonale sur F.
1. (a) Montrer que $F = \{x \in E \mid \|x\| = \|p(x)\|\}$.
(b) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
(c) Montrer que $\forall x, y \in E,\ < p(x), y > = < x, p(y) >$. Qu'en déduire ?
2. Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de E. On note p_F, p_G et p_H les projections orthogonales sur ces sous-espaces. On suppose que $p_F \circ p_G = p_H$.
(a) Montrer que $F \cap G = H$.
(b) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
(c) On suppose réciproquement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$. Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

Exercice 9 :
Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques, c'est-à-dire :
$u \in \mathcal{A}(E) \Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \langle u(x) | y \rangle = - \langle u(y) | x \rangle$.
1) Montrer que : $[\forall x \in E,\ \langle u(x) | x \rangle = 0] \Leftrightarrow u \in \mathcal{A}(E)$. Pour $u \in \mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2) Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée.
3) Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
On suppose maintenant que $\ker(u) = \{0\}$.
4) a) Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique. Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $F = \mathrm{vect}(x, u(x))$ est un sous-espace stable par u.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & (0) & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & (0) & & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix}$$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ réels non nuls.

Exercice 10 :
Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique (=auto-adjoint) de E.
1. Soit $\alpha = \min(\mathrm{Sp}(u))$, $\beta = \max(\mathrm{Sp}(u))$. Montrer que $\forall x \in E,\ \alpha \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \beta \|x\|^2$.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$, puis que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow \forall x \in E\backslash\{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$.
3. On suppose que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x \in E,\ u(x) = 0 \Longleftrightarrow \langle u(x), x\rangle = 0$.
4. Soit v un autre endomorphisme symétrique de E. On suppose $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}(u+v) \subset \mathbb{R}_+$.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
c) Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Exercice 11 :
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une application ϕ par :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \phi(M,N) = \mathrm{tr}(M^\top N)$$

Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
Pour $(M,N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\phi(M,N) \leq n$.
Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\mathrm{tr}((AB)^2) \leq \mathrm{tr}(A^2B^2)$
Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\mathrm{tr}((AB+BA)^2) \leq 4\mathrm{tr}(A^2B^2)$.

Exercice 12 :
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. Montrer que u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 13 :
Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.
Que dire de ses valeurs propres réelles ?

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 14 :
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 15 :
Soit E un espace euclidien de dimension n, et $(u_1, u_2, ..., u_n)$,$(v_1, v_2, ..., v_n)$ deux famille de n vecteurs de E. On considère la matrice M de terme général (u_i/v_j).
Montrer que : $M \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $(v_1, v_2, ..., v_n)$ sont deux bases de E.

Exercice 16 :
On travaille dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P/Q) = \int_{-1}^{1} PQ$. Pour tout entier naturel n, on pose $P_n(X) = \frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n}{dX^n}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$, avec $P_0(X) = 1$.
1) Donner les degré et coefficient dominant de P_n.
2) Quelle est la parité éventuelle du polynôme P_n ?
3) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
4) Montrer que P_n admet n racines distinctes entre -1 et 1.
5) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6) La famille $(P_n)_{n\in\aleph}$ est-elle orthogonale ?
7) Calculer $\|P_n\|$.
8) Montrer que $\frac{d}{dX}\left(\left(X^2-1\right).\frac{dP_n}{dX}(X)\right)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
9) En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle : $\left(x^2-1\right)y'' + 2x.y' - n(n+1)y = 0$

Exercice 17 :
Soit n un entier naturel. On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-espace constitué des matrices symétriques. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
On pose $\varphi_A : \begin{array}{c} S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ M \to {}^tA.M.A \end{array}$.
a) Justifier rapidement le fait que $S_n(\mathbb{R})$, muni de $(A/B) = Tr(A.B)$ est un espace euclidien.
b) Montrer que si A est diagonale $Dét(\varphi_A) = Dét(A)^{n+1}$.
c) Montrer le même résultat si $A \in S_n(\mathbb{R})$.
d) Dans le cas général :

(i) Déterminer l'adjoint de φ_A .
(ii) Montrer que $(Dét\,(\varphi_A))^2 = Dét\,(\varphi_{A.^tA})$.
(iii) Calculer le déterminant de φ_A pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 :
a) Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Etudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{m+1}\sum\limits_{k=0}^{m} M^k\right)_{m\geq 0}$ ainsi que sa limite éventuelle.
b) Même question pour $M \in S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19 :
Soit E euclidien de dimension n.
Soit $x_1, ..., x_k \in E$ tels que $\forall i \neq j$, $< x_i, x_j > < 0$. Montrer que k ne peut pas être trop grand et trouver cette limite.

Exercice 20 :
Soit n un entier naturel.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(1) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{A(t).P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
b) Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$? .

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 39,63,66,68,71,76,77,78,79,80,81,82,92.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : espaces préhilbertiens et euclidiens. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°13
- Groupe 2 : Programme n°13
- Groupe 3 : Programme n°13
- Groupe 4 : Programme n°13
- Groupe 5 : Programme n°13
- Groupe 6 : Programme n°13
- Groupe 7 : Programme n°13
- Groupe 8 : Programme n°13
- Groupe 9 : Programme n°13
- Groupe 10 :Programme n°13
- Groupe 11 : Programme n°13
- Groupe 12 : Programme n°13
- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine