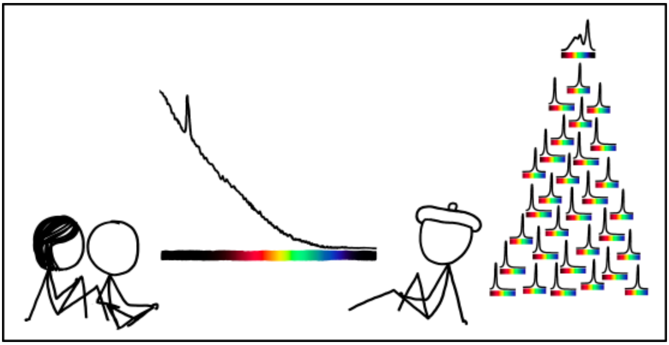
MPI* Physique

TD Ondes Électromagnétiques

Énergie, polarisation…



Olivier Caffier

Table des matières

1 Superposition de deux OPPM

Une OPPM de pulsation ω se propage dans le vide avec un vecteur d'onde :

$$\vec{k}_1 = k\big(\cos(\alpha)\,\vec{u}_x + \sin(\alpha)\,\vec{u}_z\big) \tag{1}$$

Elle est polarisée rectilignement suivant Oy :

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos\big(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r}\big)\vec{u}_y \tag{2}$$

1. Que vaut $k_1 = \|\vec{k}_1\|$? Quel est le champ magnétique $\vec{B}_1$ transporté par cette onde ?
2. Une deuxième onde de mêmes fréquence, amplitude et pulsation et de vecteur d'onde :

$$\vec{k}_2 = k\big(\cos(\alpha)\,\vec{u}_x - \sin(\alpha)\,\vec{u}_z\big) \tag{3}$$

   est superposée à la première. Ces deux ondes sont en phase à l'origine du système de coordonnées.
   (a) Exprimez les champs électrique et magnétique de l'onde globale.
   (b) Quelle est la direction de propagation de l'onde globale ? Est-elle plane ou stationnaire ? Quelle est sa vitesse de phase et qu'a-t-elle de particulier ?
   (c) Calculez la moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde globale ? A-t-on additivité des vecteurs de Poynting instantanés ? additivité des moyennes temporelles des vecteurs de Poynting ? Commentez.
   (d) Calculez l'intensité lumineuse venant frapper à un écran situé à une abscisse x quelconque et commentez.

Corrigé :

1. On a :

$$k_1 = \|\vec{k}_1\| = \sqrt{k^2(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)} = \sqrt{k^2}$$

   D'où

$$\boxed{k_1 = k}$$

   D'autre part, d'après la *relation de structure* :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$$

   Finalement [1] :

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})\,(-\sin(\alpha)\vec{u}_x + \cos(\alpha)\vec{u}_z)}$$

1. on peut directement faire valoir l'écriture en complexe, et aussi développer $\vec{k}_1.\vec{r}$.

2. (a) Passons en complexe :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= E_0 e^{i\omega t}\left(e^{-i\vec{k}_1.\vec{r}} + e^{-i\vec{k}_2.\vec{r}}\right)\vec{u}_y \\ &= E_0 e^{i(\omega t - k\cos(\alpha)x)}\left(e^{-ik\sin(\alpha)z} + e^{ik\sin(\alpha)z}\right)\vec{u}_y \\ &= 2E_0 e^{i(\omega t - k\cos(\alpha)x)}\cos\left(k\sin(\alpha)z\right)\vec{u}_y\end{aligned}$$

De même ($\vec{B}$ est additif) [2], on trouve :

$$\vec{B} = \frac{2k\cos(\alpha)E_0}{\omega}e^{i(\omega t - k\cos(\alpha)x)}\cos\left(\sin(\alpha)z\right)\vec{u}_z$$

Finalement, en repassant à la partie réelle, on trouve :

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0\cos\left(\omega t - k\cos(\alpha)x\right)\cos\left(k\sin(\alpha)z\right)\vec{u}_y}$$

et

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2kE_0}{\omega}\cos\left(\omega t - k\cos(\alpha)x\right)\cos\left(k\sin(\alpha)z\right)\left(-\sin(\alpha)\vec{u}_x + \cos(\alpha)\vec{u}_z\right)}$$

(b) Cette onde se propage selon les x croissants/décroissants (selon la signe de $\cos(\alpha)$ ça peut changer).

On voit que cette onde possède des *noeuds* lorsque $\cos(\sin(\alpha)z) = 0$, or une OPPM ne possède pas de noeuds : cette onde ne peut donc pas être une OPPM.

Néanmoins, on pourrait la qualifier d'*onde hybride* :

- Elle est stationnaire en z ;
- Elle est progressive en x.

De plus,

$$\begin{aligned}v_\varphi &= \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} \\ &= \frac{\omega}{k\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Or, $\omega = \frac{ck}{n}$ avec $n = 1$ dans le vide, d'où :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\cos(\alpha)} \geq c}$$

On remarque alors que la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière !

2. On rappelle que, sur ce genre d'ondes, **la relation de structure n'est pas valable** : il faut l'appliquer à chaque onde puis sommer ensuite.

(c) On a :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right)$$

Cette formule est valable pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ tant qu'il s'agit de fonction sinusoïdales du temps !
Finalement, on trouve :

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\cos(\alpha)\cos^2(k\sin(\alpha)z)\vec{u}_x}$$

et on a vraiment pas additivité des vecteurs de Poynting instantanés ni de leur moyenne temporelle, on trouve en effet :

$$\langle\vec{\Pi}_1\rangle + \langle\vec{\Pi}_2\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos(\alpha)\vec{u}_x \neq \langle\vec{\Pi}\rangle$$

$\triangleright$ On remarque que l'intensité du flux d'énergie **n'est pas uniforme dans l'espace mais est modulée selon z**. Il y aura donc des zones où cette dernière sera maximale, et des zones où elle sera nulle (nœuds d'interférence).

(d) On a :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\langle\vec{E}^2\rangle}{\mu_0 c} \\ &= \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\langle\cos^2(\omega t - k\cos(\alpha)x)\cos^2(k\sin(\alpha z))\rangle \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{I = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(k\sin(\alpha z))}$$

et ça se trouve également avec la *formule de Fresnel* :

$$\langle I\rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta)$$

où δ est la différence de phase.

$\triangleright$ On remarque que cette intensité dépend clairement de l'angle α et la coordonné z, ce qui expliquerait des *franges d'interférences* !

2 Champ rayonné par une plaque de courants

(Centrale MP 2017) Dans le plan $z = 0$ circulent des courants surfaciques :

$$\vec{j}_s = j_s^0 e^{i(\omega t - \alpha x)}\, \vec{u}_y \tag{4}$$

avec $\alpha < \omega/c$. Ces courants engendrent un champ électromagnétique dans tout l'espace. Par ailleurs, l'espace est vide.

1. Rappelez l'équation de conservation de la charge électrique. Adaptez-la au cas surfacique, puis trouvez la densité surfacique de charges σ portée par le plan $z = 0$.
2. Expliquez pourquoi le champ électrique sera cherché sous la forme $\vec{E} = f(z)e^{i(\omega t - \alpha x)}\, \vec{u}_y$. Justifiez en particulier les variables et la direction.
3. Trouvez une équation satisfaite par f et résolvez-la, en posant $\beta = \sqrt{\omega^2/c^2 - \alpha^2}$.
4. Quelle est la forme du champ électrique pour $z < 0$ et $z > 0$? Vous l'écrirez sous la forme d'une superposition de deux OPPM. Pourquoi l'une de ces deux ondes est-elle nulle ici ?
5. Concluez à l'aide des relations de passage pour les deux champs.
6. Commentez, sur les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, le fait que $z = 0$ est plan de symétrie des sources du champ électromagnétique.
7. Quelle est la relation entre nombre d'onde et pulsation ? Est-ce surprenant ?

Corrigé :

1. L'équation de conservation de la charge est la suivante (dans le cas volumique) :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0}$$

Ainsi, dans le cas d'une distribution surfacique, on a :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}_s) = 0}$$

Or, dans le plan $z = 0$, on a :

$$\mathrm{div}(\vec{j}_s) = \vec{\nabla}.\vec{j}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ j_s^0 e^{i(\omega t - \alpha x)} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Donc notre équation de conservation de la charge se simplifie :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

De plus, en formalisme complexe, $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = i\omega\sigma$, d'où, dans le plan $z = 0$:

$$\boxed{\sigma = 0}$$

2. Tout d'abord, $\vec{j}_s$ et σ sont les sources des ondes émises par le plan $z = 0$. Ainsi, en travaillant avec une OPPM, on se situerait dans le cadre du régime sinusoïdal forcé.

   Un simple principe de Curie nous permet de dire que la réponse à une excitation hérite des périodicités (spatiale et temporelle) contenues dans cette dernière : $\vec{j}_s, \sigma$ [3] et l'onde ont les mêmes périodicités, i.e ω et α. [4]

   Donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont rayonnés par le plan $z = 0$, héritant alors de ω et α.

   De plus, on ne dispose pas d'information pour l'instant sur les plans $z \neq 0$, donc on se doit de mettre une variation selon z en cas *d'extinction* de $\vec{E}$ ou autres phénomènes.

   Enfin, on se réfère à la figure 1 :

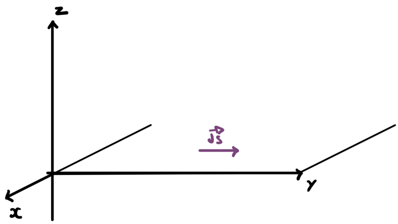


FIGURE 1 – Schéma rudimentaire du plan $z = 0$

   On remarque alors, en plaçant un point M dans l'espace, que $\text{Vect}_M(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie pour la source, et $\vec{E}$ est un vecteur vrai : il est perpendiculaire à ce plan, d'où $\vec{E} // \vec{u}_y$.

   Finalement, en prenant en compte tout notre cheminement de pensée, on arrive à l'ansatz suivant :

$$\boxed{\vec{E} = f(z) e^{i(\omega t - \alpha x)} \, \vec{u}_y}$$

3. On rappelle que l'équation de d'Alembert est valable dans un espace vide de charges et de courant (donc partout sauf en $z = 0$) :

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}$$

   i.e

$$\varepsilon_0 \mu_0 (i\omega)^2 \vec{E} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} = \vec{0}$$

3. Bon même si ici σ est nul...

4. Dans un raisonnement statique (indépendant de t), on arrive à une situation improbable : σ serait alors source d'un champ permanent, alors qu'on parlait juste avant d'une onde.

On arrive alors à :

$$f''(z) + (\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \alpha^2) f(z) = 0$$

D'où :

$$\boxed{f''(z) + \beta^2 f(z) = 0}$$

Finalement, on arrive à une solution de la forme :

$$f(z) = Ae^{i\beta z} + Be^{-i\beta z}$$

4. Si on reprend l'expression précédente de $f(z)$:

$$\vec{E} = Ae^{i(\omega t - \alpha x + \beta z)}\vec{u}_y + Be^{i(\omega t - \alpha x - \beta z)}\vec{u}_y$$

On retrouve alors une somme de 2 OPPM de vecteurs d'ondes :

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Elles ont donc la même polarisation (rectiligne selon Oy), même pulsation mais ont des directions de propagation différentes.

Enfin, il suffit de faire un petit schéma :

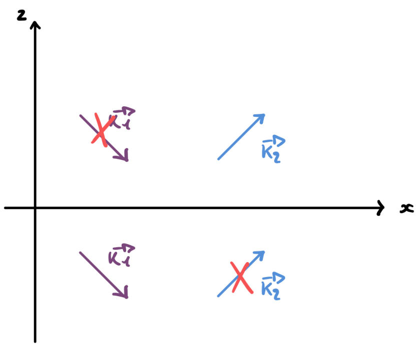


FIGURE 2 – Représentation des vecteurs d'ondes $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ dans le plan Oxz.

En effet, on sait que le plan $z = 0$ est source de ces ondes : on ne peut pas avoir des ondes qui sont générées par et qui se dirigent vers ce dernier.

On a alors

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} Be^{i(\omega t - \alpha x - \beta z)} & (\text{pour } z > 0) \\ Ae^{i(\omega t - \alpha x + \beta z)} & (\text{pour } z < 0) \end{cases}}$$

5. Comme $\sigma = 0$, la relation de passage pour $\vec{E}$ nous permet de dire que $\vec{E}$ est continue en $z = 0$, d'où :
$$Be^{i(\omega t - \alpha x)} = Ae^{i(\omega t - \alpha x)} \implies \boxed{A = B}$$
De plus, la relation de passage pour $\vec{B}$ nous dit que :
$$\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$
Il faut alors calculer, à partir des relations de structures $\vec{B}(z > 0)$ et $\vec{B}(z < 0)$:
$$\vec{B}(z > 0) = \frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{A}{\omega} e^{i(\omega t - \alpha x - \beta z)} \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$
$$\vec{B}(z > 0) = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{A}{\omega} e^{i(\omega t - \alpha x + \beta z)} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$
Ainsi, d'après la relation de passage :
$$\frac{A}{\omega} \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} - \frac{A}{\omega} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ j_s^0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
i.e
$$-\frac{2A\beta}{\omega} = \mu j_s^0$$
Finalement :
$$\boxed{\frac{A}{\omega} = -\frac{\mu_0 j_s^0}{2\beta}}$$
6. Reprenons maintenant les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$:
$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} Ae^{i(\omega t - \alpha x - \beta z)} & \text{(pour } z > 0) \\ Ae^{i(\omega t - \alpha x + \beta z)} & \text{(pour } z < 0) \end{cases}}$$
$$\vec{B}(z > 0) = \frac{A}{\omega} e^{i(\omega t - \alpha x - \beta z)} \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$
$$\vec{B}(z < 0) = \frac{A}{\omega} e^{i(\omega t - \alpha x + \beta z)} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$
On remarque bien la symétrie par rapport au plan $z = 0$.

7. On a $k_1 = \|\vec{k_1}\|$ et $k_2 = \|k_2\|$, et alors :

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \omega^2/c^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

Ce n'est pas très surprenant : on vient de retrouver la relation de dispersion dans le vide (vérifier avec le fait que $\vec{E}$ est un vecteur vrai et $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur).
Bon, il faut également se dire qu'on retrouve une relation toute faite pour les OPPM, donc ce n'est pas trop surprenant de ce point de vue là non plus.

3 Effet Doppler-Fizeau

(D'après E3A) L'effet Doppler est un décalage en fréquence d'un signal lorsque son émetteur et son récepteur sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Il peut se produire pour tous les types d'ondes et, dans le cas des ondes électromagnétiques, s'appelle l'effet Doppler-Fizeau.

1. L'effet est-il symétrique par interversion du récepteur et de l'émetteur ? Discutez quelques exemples.
2. On supposera le récepteur fixe dans le référentiel choisi. L'émetteur se rapproche de lui à la vitesse v. L'onde émise est de fréquence f et se propage à la célérité c.
   (a) À l'instant t_0, l'onde émise est d'amplitude maximale au niveau de l'émetteur, qui se trouve une distance L du récepteur. Calculez l'instant t'_0 de réception.
   (b) Exprimez l'instant t_1 d'émission du maximum suivant, la distance L' à ce moment et l'instant t'_1 de réception.
   (c) Déduisez-en la période f' du signal reçu en fonction de f, v et c au premier ordre en v/c.
3. Dans l'observation du mouvement relatif des galaxies, on observe un phénomène appelé *redshift*. Dans ce contexte, de quoi pensez-vous qu'il s'agit ?

Corrigé :

1. On peut discuter 2 situations très différentes, l'une où la réception sera toujours au rendez-vous et l'autre où elle ne pourrait jamais avoir lieu. Les voici : De ce fait,

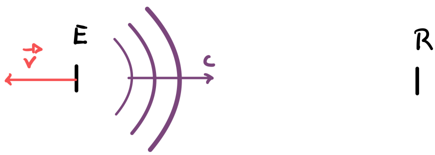


FIGURE 3 – Cas où la réception aura toujours lieu.

FIGURE 4 – Cas où la réception peut ne jamais avoir lieu (si $v > c$).

cela dépend surtout de la vitesse du récepteur dans la situation où il aurait subi cette interversion.

2. (a) Reprenons nos bases de lycée : $v = d/t$ donc

$$c = \frac{L}{t'_0 - t_0}$$

Ce qui nous permet directement d'affirmer que :

$$\boxed{t'_0 = t_0 + \frac{L}{c}}$$

(b) On parle d'un signal périodique ! Donc $t_1 - t_0 = T = 1/f$, d'où :

$$\boxed{t_1 = t_0 + \frac{1}{f}}$$

On a naturellement que

$$L' = L - vT$$

D'où :

$$\boxed{L' = L - v/f}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} t'_1 &= t_1 + \frac{L'_1}{c} \\ &= t_0 + \frac{1}{f} + \frac{L - v/f}{c} \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{t'_1 = t'_0 + \frac{1}{f}\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

(c) On a :

$$T' = t'_1 - t'_0 = \frac{1}{f}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Finalement,

$$\boxed{f' = \frac{1}{1 - v/c} \approx f(1 + \frac{v}{c})}$$

On retrouve alors $f' > f$ [5] : il s'agit de *l'effet Doppler* !

3. En tant que bons traducteurs : *redshift* signifierait un *décalage vers le rouge*, i.e un décalage vers les basses fréquences. On a alors une situation inverse par rapport aux questions précedentes [6] : l'émetteur s'éloigne et la fréquence diminue. On observe donc l'expansion de l'univers !

5. augmentation de la fréquence !
6. avant, on pouvait parler de *blueshift*

4 Phénomène de battements

On étudie un paquet constitué de deux ondes se propageant dans le même sens et différant seulement par leurs fréquences, supposées proches mais pas égales.

1. Proposez une écriture pour les champs électriques de ces deux ondes, en prenant x comme direction de propagation et z comme direction de polarisation. Les deux pulsations seront notées ω_1 et ω_2 avec $\omega_1 > \omega_2$. On les supposera numériquement proches.
2. Calculez le champ électrique du paquet d'ondes. Vous ferez un changement de variables en introduisant la pulsation moyenne ω_0, le nombre d'onde moyen k_0, l'écart spectral en pulsation $\Delta\omega$ et l'écart spectral en nombre d'onde Δk.
3. Donnez l'expression de ce champ électrique en réel. Mettez-le sous une forme permettant de distinguer une enveloppe lentement variable dans laquelle oscille une onde rapidement variable et tracez son allure à t donné. Cette allure s'appelle des *battements*.
4. Supposant que ce paquet se propage dans le vide, calculez les vitesses de propagation des deux termes. Interprétez.
5. Que pouvez-vous dire quand le milieu est maintenant un milieu transparent dispersif d'indice optique $n > 1$?

Corrigé :

1. En première approche, on pourrait écrire

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)}\,\vec{u}_z \\ \vec{E}_2 = E_0 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}\,\vec{u}_z \end{cases}$$

Néanmoins, on oublie d'exploiter une hypothèse : ω_1 très proche de ω_2.
On va donc écrire :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$

On peut d'ailleurs également écrire :

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + \frac{\Delta k}{2} \\ k_2 = k_0 - \frac{\Delta k}{2} \end{cases}$$

D'où l'écriture suivante :

$$\boxed{\vec{E}_1 = E_0 \exp\left(i\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2} t - k_0 x - \frac{\Delta k}{2} x\right)\right)\vec{u}_y}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = E_0 \exp\left(i\left(\omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{2} t - k_0 x + \frac{\Delta k}{2} x\right)\right)\vec{u}_y}$$

Bon, ça peut paraître très lourd et fastidieux, mais ça va bien nous aider par la suite (dès la prochaine question en fait).

2. On a :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2\\ &= E_0 \exp\left(i\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2} t - k_0 x - \frac{\Delta k}{2} x\right)\right)\vec{u}_y + E_0 \exp\left(i\left(\omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{2} t - k_0 x + \frac{\Delta k}{2} x\right)\right)\vec{u}_y\\ &= E_0 \exp\left(i(\omega_0 t - k_0 x)\right)\left(\exp\left(i\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)\right) + \exp\left(i\left(-\frac{\Delta\omega}{2} t + \frac{\Delta k}{2} x\right)\right)\right)\vec{u}_y\\ &= 2E_0 \exp\left(i(\omega_0 t - k_0 x)\right)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)\vec{u}_y\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0 \exp\left(i(\omega_0 t - k_0 x)\right)\cos\left(\tfrac{\Delta\omega}{2} t - \tfrac{\Delta k}{2} x\right)\vec{u}_y}$$

3. En repassant en réel, on obtient :

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x)\cos\left(\tfrac{\Delta\omega}{2} t - \tfrac{\Delta k}{2} x\right)\vec{u}_y}$$

De là, on remarque deux *enveloppes* :

- $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ est l'enveloppe dite HF (High Frequency range) ;
- $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)$ est l'enveloppe dite LF (Low Frequency range).

Pourquoi ? Comme $\omega_1 \approx \omega_2$, on a $\omega_0 \gg \Delta\omega$ (on en déduit donc « *qui est qui* »). On va donc utiliser la technique ancestrale du *tracé d'enveloppe*[7] à $t = 0$:

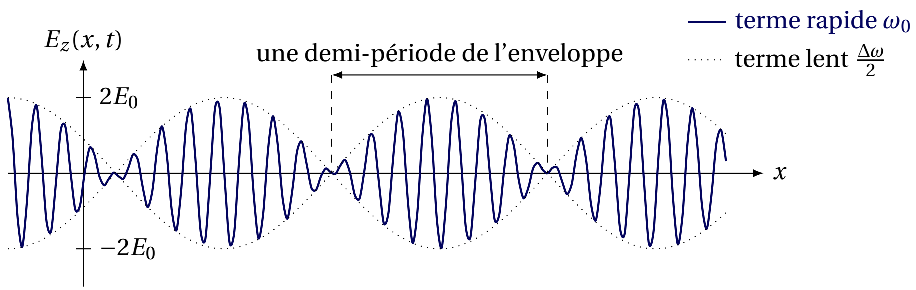


FIGURE 5 – Tracé réalisé en LateX par M. Cousin

En effet, à $t = 0$, $E = 2E_0 \cos(\omega_0 x)\cos(\frac{\Delta k}{2} x)$

7. En anglais : *envelope extraction*

4. Traitons les deux OPPM (car il s'agit bien d'un produit d'OPPM) à part :
   - Terme HF : on a la vitesse de phase suivante,

$$\begin{aligned} v_{\varphi_{\mathrm{HF}}} &= \frac{\omega_0}{k_0} \\ &= \frac{2(\omega_1+\omega_2)}{2(k_1+k_2)} \\ &= \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} \\ &= \frac{ck_1+ck_2}{k_1+k_2} \\ &= c \end{aligned}$$

     Bon c'était largement prévisible : **toutes les OPPM dans le vide possèdent $\mathbf{v}_\varphi = \mathbf{c}$.**
   - Terme LF : on a la vitesse de phase suivante,

$$\begin{aligned} v_{\varphi_{\mathrm{LF}}} &= \frac{2\Delta\omega}{2\Delta k} \\ &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \\ &= c \end{aligned}$$

     et on reconnaît $v_g = \frac{d\omega}{dk}$: c'était également prévisible car **la vitesse de groupe est la vitesse de l'enveloppe du paquet**.
5. Résultat assez classique, k est multiplié par n, le terme intervient d'ailleurs dans la relation de dispersion, ce qui change nos formules pour les vitesses de phase et de groupe. En effet, en posant

$$n_1 = c\frac{k_1}{\omega_1} \quad \text{et} \quad n_2 = c\frac{k_2}{\omega_2}$$

   Finalement,

$$\boxed{v_{\varphi_{\mathrm{HF}}} = \frac{\frac{k_1}{n_1}+\frac{k_2}{n_2}}{k_1+k_2} \neq c}$$

$$\boxed{v_{\varphi_{\mathrm{LF}}} = c\frac{\frac{k_1}{n_1}-\frac{k_2}{n_2}}{k_1-k_2} \neq c}$$

5 Loi de Malus

Une onde lumineuse non polarisée traverse un ensemble polariseur-analyseur, les directions des deux appareils faisant un angle θ entre elles.

1. Que signifie qu'une onde est «non polarisée»? Donnez un exemple de réalisation de cette situation.
2. Rappelez la loi de Malus.
3. Initialement, on avait $\theta = 15°$. Quelle est la variation relative d'intensité lumineuse quand θ passe à 5 °?
4. Même question quand θ passe de 75° à 85°? Commentez.

Corrigé :

1. Une onde est dite « non polarisée » lorsque l'on peut l'assimiler à un paquet d'ondes dont la répartition est aléatoire. La lumière solaire paraît convenir pour ce genre d'exemple.
2. La loi de Malus assure une atténuation de l'intensité de la lumière d'un facteur $\cos^2(\theta)$ lors de la traversée d'un polariseur, cf. figure 6. Donc, en considérant I_0

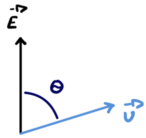


FIGURE 6 – Schéma avec $\vec{u}$ la direction privilégiée du polariseur.

l'intensité lumineuse entrante et I_1 l'intensité lumineuse sortante, on a :

$$I_1 = I_0 \cos^2(\theta)$$

3. On a, avec δ notre variation relative d'intensité lumineuse, $\theta_{\text{init}} = 15°$ et $\theta_{\text{final}} = 5$:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{I_{\text{final}} - I_{\text{init}}}{I_{\text{init}}} \\ &= \frac{\cos^2(\theta_{\text{final}}) - \cos^2(\theta_{\text{init}})}{\cos^2(\theta_{\text{init}})}\end{aligned}$$

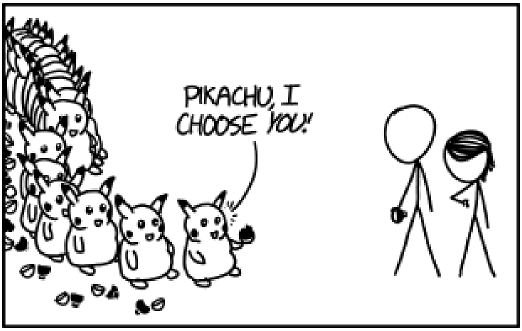
Finalement,

$$\boxed{\delta \approx 0,06}$$

4. De même,

$$\boxed{\delta \approx -0,88}$$

Ça se comprend, plus on se rapproche de $\pi/2$, plus le phénomène d'extinction se rapproche : d'où la forte décroissance de l'intensité lumineuse.


PIKACHU, I CHOOSE YOU!