Khôlles : Début de la Réduction

- 02 - 06 Octobre 2023 -

Sommaire

1 Questions de Cours - Tout groupe

1.1 Définitions de matrices semblables, Application à un Exemple.

Définition: Matrices Semblables

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices.

1. On dit que A et B sont semblables si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBP^{-1}$
2. $\iff \exists u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n),\ \exists \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de $\mathbb{K}^n$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = B$

Autrement dit, deux matrices (applications linéaires) sont semblables lorsque ces dernières représentent la même transformation, seulement exprimée dans deux bases différentes.

Exemple

Montrons que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont Semblables :

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$, base canonique de $\mathbb{K}^2$, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$, endomorphisme canoniquement associé à A.
Posons $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{2}e_1, e_2\right)$, base de $\mathbb{K}^2$.

Alors, $u(e_2) = e_1 = 2e_1'$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = B$.

1.2 Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. (démo)

Preuve :

Soit $A \sim B$: i.e, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBP^{-1}$

1. Si deux matrices sont semblables, alors ces deux matrices sont équivalentes (Prendre $Q = P$). Alors, ces deux matrices ont le même rang. (ou bien ces matrices représentent la même application linéaire, seulement dans deux bases différentes).
2. Rappelons que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

   Alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{Tr}(B)$: $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$
3. Le déterminant est une forme Multiplicative :

   $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P) \times \det(B) \times \det(P^{-1}) = \det(P^{-1}) \times \det(P) \times \det(B) = \det(B)$
4. Le polynôme Caractéristique se définit par un Déterminant :

   $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \det(XI_n - PBP^{-1}) = \det(P(XI_n - B)P^{-1}) = \det(XI_n - B) = \chi_B(X)$

1.3 Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.

Définition: Vecteur propre, Valeur Propre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E$.

On dit que x est un vecteur propre de u si : $\begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x \end{cases}$.

On dit que λ est une valeur propre de u si $\exists x \in E,\ x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$

1.4 Une droite est stable si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre (démo)

Preuve :

Posons cette droite $\Delta = \text{Vect}(x_0)$ pour $x_0 \in E$. Si une droite vectorielle est stable par une application u :

Alors, $u(x_0) \in \text{Vect}(x_0)$, donc $u(x_0) = \lambda x_0$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Réciproquement, si x_0 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$:

Soit $x \in \Delta$. Alors $\exists \mu \in \mathbb{K},\ x = \mu x_0$. Auquel cas, $u(x) = \mu u(x_0) = \lambda \cdot \mu x_0 \in \Delta$.

1.5 Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. (démo)

Proposition

Soit E : $\mathbb{K}$-EV de dim finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, valeurs propres de u, deux-à-deux distinctes.

Alors $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe. On peut alors noter $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

Preuve :

Montrons que $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod E_{\lambda_i}(u),\ x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$.

Nous avons $x_1 + \dots + x_p = 0$: En composant par $(u - \lambda_1 I_d)$:

$$\sum_{i=2}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) x_i = 0$$

En composant successivement par les $(u - \lambda_j I_d)$ pour $j \in [\![1; p-1]\!]$, il ne reste que le terme en x_p :

$$\prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_p - \lambda_i) x_p = 0 \Rightarrow x_p = 0$$

En réitérant succesivement ce procédé pour $x_{p-1}, \dots, x_1$, nous avons donc $x_1 = \dots = x_p = 0$. D'où la somme directe.

1.6 Card$(\mathrm{Sp}(u)) \leqslant \dim(E)$ (2 justifications dont une avec le polynôme caractéristique)

Preuve :

Une première preuve est une conséquence directe de la propriété précédente car nous avons la somme directe des Sous-Espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.
Or la dimension d'une somme directe d'espaces vectoriels est la somme des dimension de ces espaces. Si λ est une valeur propre, alors E_λ est de dimension $\geqslant 1$, il doit donc y avoir moins de $\dim(E)$ valeurs propres.

Une deuxième preuve consiste à remarquer que le polynôme caractéristique est de degré $\dim(E)$ (On montre par récurrence sur $\dim(E)$ en développant par rapport à la première colonne par exemple) et comporte à ce titre moins de $\dim(E)$ racines dans $\mathbb{K}$ (en comptant avec la multiplicité), donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) \leqslant \dim(E)$.

1.7 Définition du polynôme caractéristique et lien avec les valeurs propres (démo)

Définition: Polynôme Caractéristique

Soit E : $\mathbb{K}$-EV de dim finie.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle Polynôme Caractéristique de u le polynôme : $\chi_u(X) = \det(XI_d - u)$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle Polynôme Caractéristique de A le polynôme : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

Proposition

Soit E : $\mathbb{K}$-EV de dim finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \lambda \in \mathrm{Rac}(\chi_u)$ (Idem pour les matrices)

Preuve :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists x_0 \neq 0,\ u(x_0) = \lambda x_0 \\
&\iff \exists x_0 \neq 0,\ u(x_0) - \lambda x_0 = 0 \\
&\iff \exists x_0 \neq 0,\ x_0 \in \mathrm{Ker}(u - \lambda I_d) \\
&\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda I_d) \neq \{0\} \\
&\iff \det(u - \lambda I_d) = 0 \\
&\iff \lambda \in \mathrm{Rac}(\det(XI_d - A))
\end{aligned}$$

1.8 Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre, majoration avec la multiplicité de la valeur propre (démo)

Définition: Multiplicité d'une valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

On appelle multiplicité de la valeur propre λ la multiplicité de λ comme racine de χ_A. On la note alors m_λ

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff m_\lambda \geqslant 1 \\ &\iff \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \end{aligned}$$

2. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \ 1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant m_\lambda$

Preuve* (du point 2) *:

Posons $p = \dim(E_\lambda(A))$. On travaille avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Il existe alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, base de $E_\lambda(u)$.

D'après le théorème de la base incomplète, $\exists (e_{p+1}, \ldots, e_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ telle que $B = \mathcal{B} + (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Alors la matrice de u prend cette forme :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbb{B} \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & \mathbb{O} & & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\chi_u(X) = \det(XI_d - u) = \left|\begin{array}{c|c} (X-\lambda)I_p & -\mathbb{B} \\ \hline \mathbb{O} & XI_{n-p} - \mathbb{C} \end{array}\right| = \det((X-\lambda)I_p)\det((XI_{n-p}) - \mathbb{C})$.

Or, ceci vaut $(X-\lambda)^p \times \chi_C(X) \Rightarrow \ m_\lambda \geqslant p = \dim(E_\lambda(u))$ car λ est au moins de multiplicité p.

1.9 Exemple de matrice non diagonalisable sur le corps des réels puis sur le corps des complexes.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (car $\chi_A(X) = X^2 + 1$).

Note:-

De manière générale, si A est telle que $\chi_A = (X - \lambda)^n$, alors A n'est diagonalisable que si $A = \lambda I_n$: Si $A \neq \lambda I_n$ et que A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \lambda I_n$. Donc $A = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n$: Absurde.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est quant à elle pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, car son polynôme caractéristique est $\chi_B(X) = X^2$, donc cette matrice serait semblable à $\mathbb{O}$: Absurde car seul $\mathbb{O}$ est semblable à $\mathbb{O}$.

1.10 Diagonalisation de la matrice dont tous les cœfficients sont égaux à 1 (deux méthodes, démo)

Question 1

Posons $J_n = (1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Nous pouvons premièrement remarquer que $\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - 1$ car nous avons $e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n$ comme vecteurs dans le Noyau.

Nous trouvons de plus le vecteur $e_1 + \dots + e_n$ associé à la valeur propre n. Ainsi, $E = \mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(e_1 + \dots + e_n) \oplus \mathrm{Ker}(J_n)$.

Ainsi, $J_n \sim \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. La matrice P se trouve en exprimant la base précédente en fonction des e_i.

Ainsi : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & 1 & & \\ \vdots & 0 & -1 & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$

Une autre méthode consiste à remarquer que ${J_n}^2 = nJ_n$. D'où un polynôme annulateur $P : X^2 - nX$. Nous avons alors $\mathrm{Rac}(J_n) \subset \{0, n\}$.

1.11 Lien entre les valeurs propres et la trace et le déterminant dans le cas d'une matrice trigonalisable. (« démo »)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}$-EV de dimension Finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si u est Trigonalisable, alors $\det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda}$ et $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda \times \lambda$

Preuve :

Le déterminant est un invariant de similitude, idem pour la trace.

Ainsi, si u est trigonalisable, alors sa matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ répétés avec leur multiplicité. Le déterminant et la trace s'en déduisent directement.

1.12 L'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (démo)

Preuve :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p.

Dès lors, $\exists x_0 \in E,\ u^{p-1}(x_0) \neq 0$ et $u^p(x_0) = 0$. Montrons que la famille $(x_0, \dots, x^{p-1}(x_0))$ est libre :

Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$.

Dès lors, en composant par u^{p-1}, par choix de x_0 : $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Ainsi, $\lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$.

En composant successivement par $u^{p-2}, \dots, u$, nous en déduisons que $\forall i \in [\![0; p-1]\!],\ \lambda_i = 0$. Ainsi, la famille est libre.

Or, par condition nécéssaire de liberté, $p \leqslant n$.

<u>Méthode plus simple et Rapide :</u> remarquons que si $u^p = 0$, alors X^p est un polynôme annulateur de u. Nous savons donc que $\Pi_u \mid X^p$, donc $\exists k \leqslant p \in \mathbb{N}^*,\ \Pi_u = X^k$. Or, par minimalité de p (définition de l'indice de nilpotence), nous avons $k = p$, donc $\Pi_u = X^p$. Ainsi, $\Pi_u \mid \chi_u$, et χ_u est de degré $n = \dim(E)$, donc $p \leqslant n$

1.13 Trouver la valeur propre de plus grand module (sur le corps des complexes) dans le cas où elle est unique. (démo BONUS)

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A trigonalisable et on note λ_1, la valeur propre de plus grand module.

$$\text{Alors } \frac{\text{Tr}(A^{p+1})}{\text{Tr}(A^p)} \sim \lambda_1$$

Preuve :

On pose $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. On pose toujours m_{λ_i} les multiplicités associées.

Nous avons alors $\text{Tr}(A^p) = \sum_{q=1}^{k} m_{\lambda_q} \times {\lambda_q}^p$ car les coefficients diagonaux sont simplements mis à la puissance.

Ainsi, $\text{Tr}(A^p) \sim m_{\lambda_1} \times {\lambda_1}^p$. D'où $\lambda_1 \sim \dfrac{\text{Tr}(A^{p+1})}{\text{Tr}(A^p)}$

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Le polynôme caractéristique est un polynôme, unitaire, de degré n, dont on connait les cœfficients de degré $n-1$ et 0 (démo)

Preuve :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Sortons la formule du déterminant : $\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times \prod_{i=1}^{n} M_{i,\sigma(i)}$

Alors : $\det(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times \prod_{i=1}^{n} (XI_n - A)_{i,\sigma(i)}$.

Or, la seule permutation offrant un terme de degré n est la permutation Identité :

Si $\sigma : i \mapsto i$, alors $\prod_{i=1}^{n} (XI_n - A)_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} (X - A_{i,i})$ qui est bien de degré n.

Si σ n'est pas l'identité, alors au moins deux éléments sont échagés ($|\mathrm{supp}(\sigma)| \leqslant n-2$), donc le terme obtenu est de degré $n-2$ tout au plus. Ainsi, χ_A est de degré n.

De plus, le coefficient de degré n vaut $\varepsilon(I_d) = 1$. Ainsi, χ_A est bien un Polynôme unitaire de degré n.

Par la même observation, les seuls termes de degré $n-1$ sont obtenus par l'identité, et nous remarquons que le coefficient devant $n-1$ vaut $-(A_{1,1} + \cdots + A_{n,n}) = -\mathrm{Tr}(A)$.

Enfin, le terme constant s'obtient en évaluant χ_A en 0 : $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \times \det(A)$.

Finalement, χ_A est un polynôme unitaire, de degré n, dont le coefficient de degré $n-1$ vaut $-\mathrm{Tr}(A)$ et le coefficient constant vaut $(-1)^n \times \det(A)$

2.2 Si le sev F est u-stable, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u (démo)

Proposition

Soit $E = \mathbb{K}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$, un SEV. On suppose que F est stable par u.

Considérons $\tilde{u} = u_{|F}$. Alors $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$.

Preuve :

Par la même décomposition que précédemment : Soit $\mathcal{F}$, base de F. Par le théorème de la Base incomplète, $\mathcal{B} = \mathcal{F} + (e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E. En posant $\mathbb{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\tilde{u})$, alors la matrice de u est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\chi_u = \chi_A \times \chi_C$, or $\chi_A = \chi_{\tilde{u}}$. Donc $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$

2.3 Théorème fondamental de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique (démo !)

Théorème Fondamental de Diagonalisation

Soit E, $\mathbb{K}$-EV de dimension Finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$[u \text{ est Diagonalisable}] \iff \begin{cases} \chi_u \text{ est Scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda)(u) = m_\lambda \end{cases}$$

Preuve :

- Sens direct :

  Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ (où les α_i sont des valeurs propres non forcément distinctes).

  Ainsi, $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$: χ_u est bien scindé.

  On pose alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et m_λ les multiplicités associées. Alors u diagonalisable $\Rightarrow$ $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

  On sait que $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \leqslant m_{\lambda_i}$ pour tout i. Or, par égalité entre les dimensions : $\dim(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(u))$, donc $\dim(E_{\lambda_i}(u)) = m_{\lambda_i}$ pour tout i.

- Réciproquement, si χ_u est Scindé et $m_{\lambda_i} = \dim(E_{\lambda_i}(u))$ pour tout i.

  Alors $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$. La somme $E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ est Directe et est de dimension $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = \dim(E)$.

  Ainsi, $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$: u est alors diagonalisable.

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Un endo est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (démo)

Proposition

Soit E, $\mathbb{K}$-EV de dimension Finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors u est trigonalisable $\iff \chi_u$ est Scindé.

Preuve :

Le sens direct est immédiat : Si u est trigonalisable, alors il existe une base de E telle que la matrice de u soit Triangulaire supérieure dans cette base.
Dès lors, $\chi_u = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$: χ_u est Scindé.

Réciproquement, si χ_u est Scindé :

Par récurrence sur la dimension de E : Ceci est toujours vrai si $n = 1$.
Supposons alors la propriété respectée pour un espace de dimension $k-1$. Montrons que la propriété reste vraie au rang k :

χ_u étant scindé, $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Dès lors, $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \exists x_0 \in E, \ x_0 \neq 0$ et $u(x_0) = \lambda x_0$.

$x_0 \neq 0 \Rightarrow (x_0)$ est une famille libre, Il existe alors $e_2, \ldots e_k$ tels que $B = (x_0, e_2, \ldots, e_k)$ soit une base de E.

$$A = \mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \mathbb{L} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Ainsi, $\chi_u = (X-\lambda) \times \chi_B$ où χ_B est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $\tilde{u}$ sur le SEV engendré par $(e_2, \ldots, e_k)$.

Or, χ_u est scindé, donc χ_B est scindé, et par hypothèse de récurrence, B est trigonalisable. Ainsi, $\exists P \in GL_{k-1}(\mathbb{K}), \ \exists T \in T^+_{k-1}, \ B = PTP^{-1}$.

$$A = \mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \mathbb{L} \\ \hline 0 & \\ \vdots & PTP^{-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbb{O} \\ \hline 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \mathbb{L}P \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbb{O} \\ \hline 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Nous remarquons que les deux matrices extrêmes sont inverses l'une de l'autre. Ainsi, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Par principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout espace vectoriel de dimesion finie.

3.2 Réduction de la matrice circulante (Exemple de Fin de Cours)

Exemple

Réduisons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Posons $J = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$ Matrice canoniquement associée à l'application $u : \begin{cases} e_1 \to e_n \\ e_2 \to e_1 \\ \vdots \\ e_n \to e_{n-1} \end{cases}$.

Nous remarquons par récurrence Immédiate que $J^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{0} & I_{n-k} \\ \hline I_k & \mathbb{0} \end{array}\right)$ et que $M = \sum_{i=0}^{n-1} a_i J^i$.

De plus, $J^n = I_n \Rightarrow P(X) = X^n - 1$ est un polynôme annulateur de J. Ses racines sont donc les $\rho_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Or, la famille $(I_n, J, \ldots, J^{n-1})$ est Libre (aucun coefficient n'est commun entre ces matrices, observez la matrice obtenue par C.L pour le voir), donc $\forall Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, Q ne peut être annulateur de J, donc le degré du polynôme minimal est supérieur ou égal à n. Or, P est unitaire, donc $\Pi_J = X^n - 1 \Rightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{\rho_k\}_{k \in [\![0;n-1]\!]}$.

Ainsi, J est diagonalisable car Π_J est Scindé Simple. et $J \sim \Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \rho & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho^{n-1} \end{pmatrix}$.

Donc $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}),\ \ J = Q\Delta Q^{-1}$.

Finalement, $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = Q\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k\right) Q^{-1}$, M est bien diagonalisable. Le Déterminant s'en déduit directement.

3.3 Une matrice A est nilpotente si et seulement si $\text{Tr}(A^k)$ = 0 pour tout entier k non nul. (non fait en classe)

Preuve :

Si A est nilpotente, alors ses seuls valeurs propores sont 0.
En plongeant A dans $\mathbb{C}$, alors A est trigonalisable avec ses coefficients diagonaux égaux à 0. Or, la trace est un invariant de similitude, donc $\text{Tr}(A) = 0$ et il en va de même pour toute ses puissances (les coefficients diagonaux sont simplement mis à la puissance).

Réciproquement, Supposons que A possède p valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} m_{\lambda_1}\lambda_1 + \cdots + m_{\lambda_p}\lambda_p & = 0 \\ m_{\lambda_1}{\lambda_1}^2 + \cdots + m_{\lambda_p}{\lambda_p}^2 & = 0 \\ \vdots \\ m_{\lambda_1}{\lambda_1}^p + \cdots + m_{\lambda_p}{\lambda_p}^p & = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc les multiplicités solutions d'un système de Cramer (Déterminant de Vandermonde non Nul par Hypothèse). La solution est donc unique, or la solution nulle convient, donc chaque multiplicité est nulle : Absurde.

A ne possède alors qu'une unique valeur propre, qui vaut alors 0.

Ainsi, un polynôme annulateur de A doit être de la forme X^p (Il en existe au moins un, à savoir χ_A). Donc $A^p = 0$: A est nilpotente.

4 Exercices de Référence, Tout groupe

4.1 Exercice 1

Question 1, 2. Remarquons que A est diagonalisable (A est symétrique réelle, ou bien nous calculons $\chi_A(X) = X^3 - 13X + 12$, et remarquons que ce polynôme admet bien trois racines réelles distinctes $(1, 3, -4)$.

Ainsi, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$. Donc si $M^2 = A$, il faut avoir $M^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$. Or, si $M^2 = A$, alors M commute avec A, donc les sous-espaces propres de A sont laissés stables par M et inversement. Or, les trois sous-espaces propres $E_1(A),\ E_3(A),\ E_{-4}(A)$ sont des droites vectorielles (car de dimension 1). Ainsi, ces espaces sont également des sous-espaces propres de M. Donc M est également diagonalisable, avec pour valeurs propres $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ et les même vecteurs propres que A.

Il vient alors que si M est solution, ${\alpha_1}^2 = 1,\ {\alpha_2}^2 = 3,\ {\alpha_3}^2 = -4$. Donc les solutions de l'équation $M^2 = A$ sont exactement les matrices M telles que (avec $A = P\Delta P^{-1}$) $\quad M = P \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix} \times P^{-1}$.

Nous remarquons de plus qu'il n'est pas possible d'avoir de solutions réelles, car $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Avec $\alpha_3 \in \mathbb{C}$, nous n'avons aucune solution ne convenant.

4.2 Exercice 2

Question 1. Toujours le même argument : A est une matrice symétrique Réelle, donc est à ce titre diagonalisable (c.f le chapitre "Espaces Euclidiens").

Question 2. Avec $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous pouvons ici expliciter χ_A assez facilement : $\chi_A(X) = (X-1)(X-1) - 1 = X^2 - 2X = X(X-2)$. Ainsi, 0 et 2 sont valeurs propres.

Nous trouvons de plus les vecteurs propres associés $p_0 = e_1 - e_2$ et $p_2 = e_1 + e_2$ (Ceci se trouve habituellement en regardant $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$, mais les vecteurs apparaissent naturellement ici).

Question 3.a Dans le cas $n>2$, nous remarquons que 1 est bien valeur propre, car $\det(I_n - A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & 0 \end{vmatrix}$

Et ceci vaut 0, car cette matrice est bien non-inversible, car de rang $<n$ (les vecteurs $Ae_2, \dots, Ae_n$ sont égaux).

Question 3.b Soit donc λ, valeur propre de A différente de 1.

Alors $\exists X \in \mathbb{R}^n,\ AX = \lambda X \Rightarrow\ (A - I_n)X = (\lambda - 1)X$. Nous remarquons que $(A - I_n)^2 = \left(\begin{array}{c|ccc} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & J_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

Or, $(\lambda-1)^2$ est une valeur propre de $(A-I_n)^2$ (associée à X), qui de surcroît est différente de 0 car $\lambda \neq 1$.

La matrice $(A-I_n)^2$ est diagonalisable, et $(A-I_n)^2 \sim \begin{pmatrix} n-1 & & & & \\ & n-1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$. D'où le fait que $\lambda = \pm\sqrt{n-1}+1$

Remarquons de plus que A et I_n sont codiagonalisables car sont toutes deux diagonalisables, et commutent. Dès lors, $A-I_n \sim \begin{pmatrix} \mu_1-1 & & & & \\ & \mu_2-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-1}-1 & \\ & & & & \mu_n-1 \end{pmatrix}$ avec $\mu_1,\dots,\mu_n$ les valeurs propres de A.

Il vient alors en élevant cette matrice au carré que A comporte exactement $n-2$ vecteurs propres associés à la valeur propre 1, et deux vecteurs propres reliés à / aux λ. En reprenant $\text{Ker}(A-I_n)$, nous trouvons les $n-2$ vecteurs associés à 1 comme étant $e_2-e_3, e_3-e_4, \dots, e_{n-1}-e_n$.

Considérons donc $\text{Ker}(A-(\pm\sqrt{n-1}+1)I_n) = \text{Ker}\begin{pmatrix} \mp\sqrt{n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mp\sqrt{n-1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \mp\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$.

Nous devinons que $(\sqrt{n-1})e_1+e_2+\dots+e_n = 0$ pour la valeur propre $-\sqrt{n-1}$, et de même $(\sqrt{n-1})e_1-e_2-\dots-e_n = 0$, d'où les vecteurs propres distincts associés aux valeurs propres $\lambda = \pm\sqrt{n-1}+1$.

Question 3.c Rappelons que le déterminant correspond au terme constant du polynôme caractéristique (en ajoutant un terme $(-1)^n$). Ainsi, $(-1)^n \times \det(A) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} -\mu_i = (-\sqrt{n-1}+1)(\sqrt{n-1}+1)$. Ainsi, $\det(A) = -(n-2)$

4.3 Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, valeur propre associée à x pour $u\circ v$. i.e $u(v(x)) = \lambda x$. Alors, $v(u(v(x))) = \lambda v(x)$. Donc $v\circ u$ possède $v(x)$ comme vecteur propre, associé à λ. D'où le fait que λ soit également valeur propre de $v\circ u$

4.4 Exercice 4

Une méthode pour montrer que deux matrices sont semblables est de montrer que ces deux matrices sont diagonalisables et possèdent les même valeurs propres :

Un calcul donne $P(X) := \chi_A(X) = X^3-4X^2+5X-2 = \chi_B(X)$.

Or, 1 est racine évidente de $P(X) = (X-1)(X^2+-3X+2) = (X-1)(X-1)(X-2)$. Évaluons donc les sous-espaces propres associés à 1 de A et B :

$\text{Ker}(A-I_n) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{Ker}(B-I_n) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nous trouvons que $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ est engendré par $e_1 - 2e_2$ et $e_3 - e_1 + e_2$ par exemple. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = 2$ (car ne peut valoir 3, la matrice n'est pas la matrice nulle). Donc A est bien diagonalisable d'après le théorème FONDAMENTAL de la réduction (à savoir A est diagonalisable si et seulement si $\chi_A(X)$ est scindé, et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ m_\lambda = \dim(E_\lambda(A))$).

En revanche, $\mathrm{Ker}(B - I_n)$ est de dimension 1, car cette matrice est de rang 2 (nous avons deux vecteurs colonne non-colinéaires, contrairement à A, donc au moins de rang deux, mais est non-inversible donc exactement de rang 2). Ainsi, B n'est pas diagonalisable.

Il vient alors que A et B ne sont pas semblables, car si ces matrices étaient semblables, par transitivité de $\sim$, nous aurions B diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.


My cat looks like he just told his favorite joke and he's so proud of himself