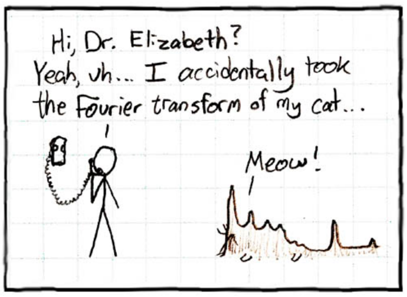
MPI* Physique

TD Traitement du signal

Filtrage analogique



Olivier Caffier

1 - Série de Fourier d'un signal triangulaire

On étudie le signal de la figure 1.

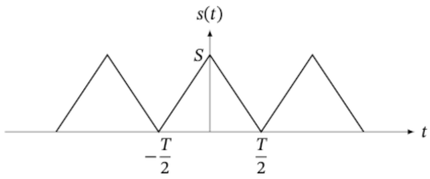


Fig. 1 : Signal triangulaire.

Sans aucun calcul, précisez laquelle des quatre décompositions de Fourier est la bonne pour ce signal :

1. $s(t) = \dfrac{S}{2} + \dfrac{4S}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\left(2\pi(2n-1)ft\right)}{(2n-1)^2}$
2. $s(t) = \dfrac{S}{2} - \dfrac{4S}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\left(2\pi(2n-1)ft\right)}{(2n-1)^2}$
3. $s(t) = \dfrac{S}{4} - \dfrac{4S}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\left(2\pi(2n-1)ft\right)}{(2n-1)^2}$
4. $s(t) = \dfrac{S}{2} - \dfrac{4S}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\left(2\pi(2n-1)ft\right)}{(2n-1)^2}$

Corrigé :

~~2~~ signal pair => pas de sinus !

~~3~~ valeur moyenne = $\frac{S}{2} \neq \frac{S}{4}$

~~4~~ À $t=0$, on ne peut pas avoir un "-" vu que $s(t=0) = S$

Il s'agit donc du signal n°1 !

2 - Filtre RL

On considère le circuit de la figure 2. avec $R = 1,0\text{k}\Omega$ et $L = 10\text{mH}$

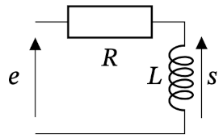


FIG. 2 : Filtre RL.

1. Quel type de filtre ce circuit permet-il de réaliser ?
2. Déterminez sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1+jx} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

3. Déterminez les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence, ainsi que leur ordonnée à l'origine en $x = 1$. Construisez le diagramme de Bode asymptotique en gain sur la figure 3.a et déduisez-en à main levée l'allure du diagramme réel.

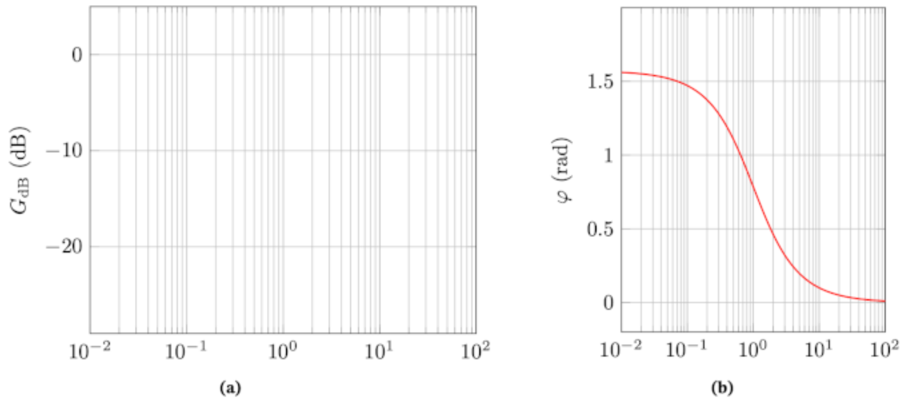
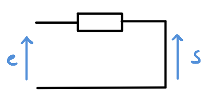


FIG. 3 : Diagramme de bode en fonction de x : a) en gain, b) en phase.

4. La tension e s'écrit sous la forme d'une somme de trois harmoniques de même amplitude, même phase initiale et de fréquence respectives $f_1 = 100\text{Hz}$, $f_2 = 1\text{kHz}$ et $f_3 = 100\text{kHz}$. Donner l'expression du signal d'entrée e et proposez une expression pour le signal de sortie s.
5. La tension e est maintenant un signal triangulaire de fréquence $\tilde{f} = 60\text{Hz}$. Justifier que s est alors un signal créneau de même fréquence $\tilde{f}$.

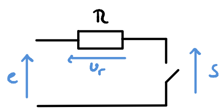
Corrigé :

1 BF :



$s = 0$ en basse fréquence

HF :



$s = e$ car $i = 0$ avec l'interrupteur ouvert

⇒ Filtre passe - haut

2 On a, à l'aide d'un pont diviseur de tension : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega} = \dfrac{1}{R} \dfrac{jL\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$

$= 1 \times \dfrac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$

D'où $\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \dfrac{jx}{1+jx}$ avec $\begin{cases} x = \frac{\omega}{\omega_c} \\ \omega_c = \frac{R}{L} \\ H_0 = 1 \end{cases}$

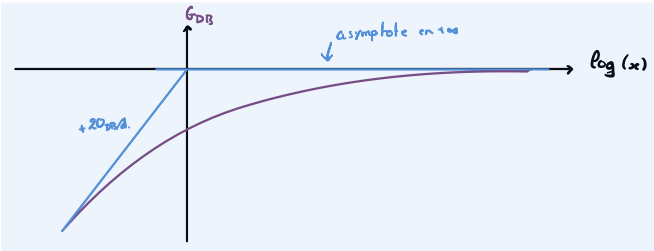
③ On a $G = |\underline{H}| = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ainsi $G \underset{x\to 0}{\sim} x$

$G \underset{x\to +\infty}{\sim} 1$

et $G_{DB} = 20 \log(\underline{H}) \Rightarrow G_{DB} \underset{0}{\sim} 20 \log(x)$ ↗ + 20 DB/décade

$G_{DB} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Finalement, on obtient le diagramme suivant :



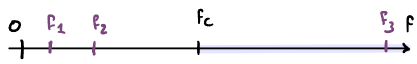
④ On a

$$e(t) = E_0 \left(\cos(2\pi f_1 t + \cancel{\varphi}) + \cos(2\pi f_2 t + \cancel{\varphi}) + \cos(2\pi f_3 t + \cancel{\varphi})\right)$$ et $$\underline{s}(t) = \underline{H}(\omega)\, \underline{e}(t)$$

De plus, $f_c = 16\,kHz$ donc $\dfrac{f_3}{f_c} \simeq 6 \to$ H.F (H juste...)

$\dfrac{f_1}{f_c} \simeq 6\times10^{-3} \to$ B.F

$\dfrac{f_2}{f_c} \simeq 6\times10^{-2} \to$ B.F (H juste)



et <u>en H.F</u> : $|H(j\omega)| \approx 1$

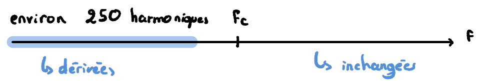
<u>en B.F</u> : $|H(j\omega)| \simeq x$ ← caractère dérivateur !

Ainsi,

$$s(t) = E_0 \left(-\frac{\omega_1}{\omega_c} \sin(2\pi f_1 t) - \frac{\omega_2}{\omega_c} \sin(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t + \underbrace{\arg(H(f_3))}_{\simeq 0.16\ rad.})\right)$$

l'approx H.F était donc un peu abusée

⑤ Revenons sur ce caractère dérivateur en B.F, $f = 60\,Hz$ $\ll f_c = 16\,kHz$



or, dans la décomp. de Fourier de ce signal, $\sum a_n$ CV

$\Rightarrow a_n \longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ signal entièrement dérivé

Enfin, fonctionnellement parlant, la dérivée d'une fonction triangulaire est une fonction créneau.

D'où le résultat voulu.

3 - Modulation et démodulation en amplitude

(Centrale PSI 2015)

Dans le cas d'une transmission aérienne et/ou sur de grandes distances, un signal basse fréquence $e(t) = E\cos(2\pi f t)$ ne peut pas être transmis sans une forte détérioration.

Une solution possible est la *modulation en amplitude* : on génère un signal haute fréquence $p(t) = S\sin(2\pi f_p t)$, appelée *porteuse* ($f \ll f_p$), et on combine astucieusement les deux de manière à ce que l'amplitude de la porteuse varie avec le signal.

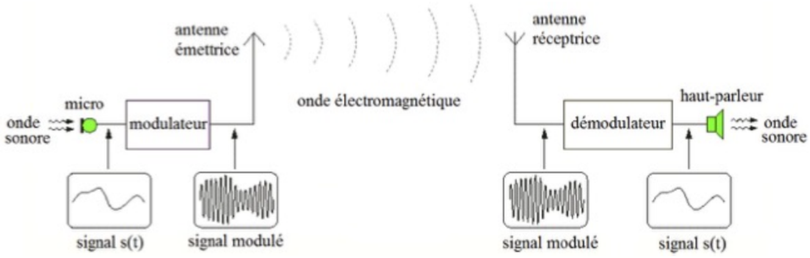


FIG. 4 : Exemple de dispositif de communication par modulation-démodulation.

La fréquence de la porteuse est un choix conventionnel qui doit être connu aussi bien de l'émetteur que du récepteur (ex : fréquence d'une station de radio).

1. Modulation

(a) À l'aide d'un multiplieur (figure 5.a) et d'un additionneur (figure 5.b), proposez une manière d'obtenir le *signal modulé* suivant :

$$s(t) = A\big(1 + m\cos(2\pi f t)\big)\sin(2\pi f_p t)$$

(b) m est appelé *taux de modulation*. Représentez le signal modulé dans les cas $m < 1$ et $m > 1$.

(c) Représentez le spectre du signal modulé. Commentez son allure et la possibilité de le transmettre sur de grandes distances.

2. Démodulation

(a) À la réception du signal modulé, on le multiplie par la porteuse à l'aide d'un multiplieur. Le résultat est le signal $u(t)$. Déterminez son spectre.

(b) Comment reconstruire le signal initial ?

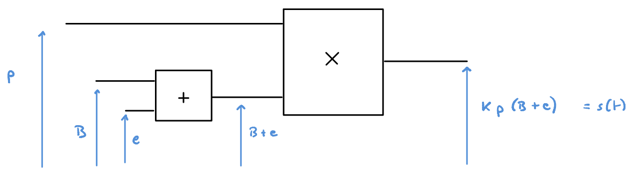
(a) **(b)**

FIG. 5 : a) Multiplieur. b) Additionneur.

Corrigé :

1

1.a



Ainsi, $s(t) = K\,p(t)\,(B+e)$

$= K S \sin(2\pi f_p t)\,(B + E\cos(2\pi f t))$

$= \underbrace{KSB}_{:=A}\left(1 + \underbrace{\frac{E}{B}}_{:=m}\cos(2\pi f t)\right)\sin(2\pi f_p t)$

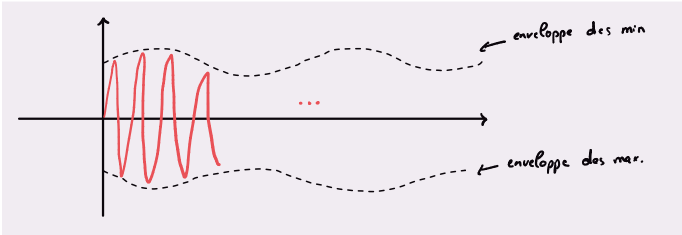
d'où $s(t) = A\left(1 + m\cos(2\pi f t)\right)\sin(2\pi f_p t)$ avec $A = KBS$, $m = \frac{E}{B}$

1.b Avec $s(t) = A(\underbrace{1 + m\cos(2\pi F t)}_{\text{lentement variable}})\underbrace{\sin(2\pi f_p t)}_{\text{rapidement variable}}$ avec $F \ll f_p$

Enveloppe des min : $\sin = -1$

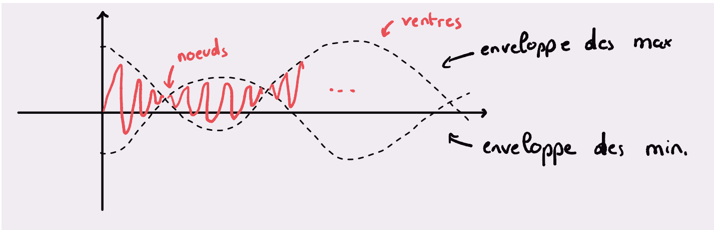
Enveloppe des max : $\sin = 1$

m < 1 ⇒ $1 + m\cos(\ldots)$ ne s'annule pas !



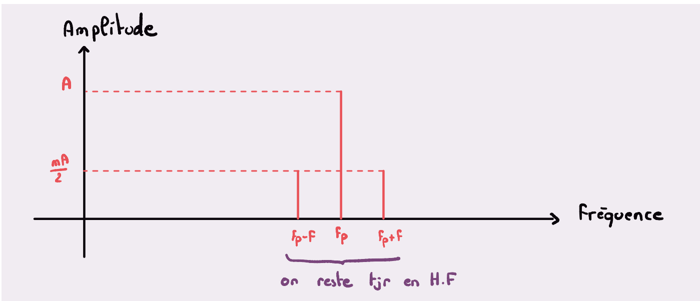
Méthode ultra-classique !!

m > 1



1.c On a $s(t) = A\sin(2\pi f_p t) + mA\cos(2\pi F t)\sin(2\pi f_p t)$ or $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$$= A\sin(2\pi f_p t) + \frac{mA}{2}\left(\sin(2\pi(F+f_p)t) + \sin(2\pi(f_p - F)t)\right)$$

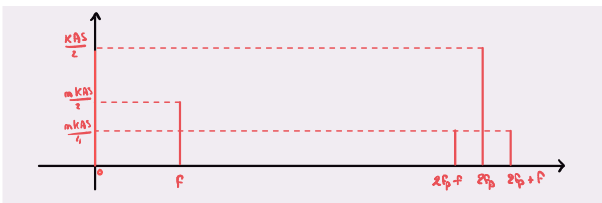


DONC ces 3 harmoniques se propagent sans pb.

2 **2.a** On a $u(t) = K\,s(t)\,p(t)$

$$= KA\sin^2(2\pi f_p t) + \frac{KmAS}{2}\sin(2\pi(f_p+F)t)\sin(2\pi f_p t) + \frac{KmAS}{2}\sin(2\pi(f_p - F)t)\sin(2\pi f_p t)$$

$$= \frac{KAS}{2}\left(1 + m\cos(2\pi F t) - \cos(4\pi f_p t) - \frac{m}{2}\cos(2\pi(2f_p - F)t) - \frac{m}{2}\cos(2\pi(f_p + F)t)\right)$$

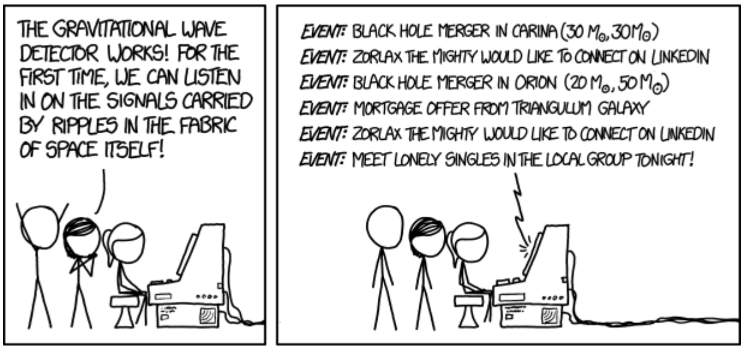


2.b On veut récup' $e(t)$ en faisant un passe-bas avec $F \ll f_c \ll 2f_p - F$ (vire les harmonique de H.F)

puis un passe-haut avec $f_c \ll F$ (vire la composante continue)

OU on utilise un passe-bande (+ dans l'esprit radio) avec $Q \gg 1$

bande passante pas large


THE GRAVITATIONAL WAVE DETECTOR WORKS! FOR THE FIRST TIME, WE CAN LISTEN IN ON THE SIGNALS CARRIED BY RIPPLES IN THE FABRIC OF SPACE ITSELF!
EVENT: BLACK HOLE MERGER IN CARINA (30 $M_\odot$, 30 $M_\odot$)
EVENT: ZORLAX THE MIGHTY WOULD LIKE TO CONNECT ON LINKEDIN
EVENT: BLACK HOLE MERGER IN ORION (20 $M_\odot$, 50 $M_\odot$)
EVENT: MORTGAGE OFFER FROM TRIANGULUM GALAXY
EVENT: ZORLAX THE MIGHTY WOULD LIKE TO CONNECT ON LINKEDIN
EVENT: MEET LONELY SINGLES IN THE LOCAL GROUP TONIGHT!