TD mécanique

Frottement de glissement

1 Ressort et frottements de glissement

(CCP MP 2015) Une masse m est attachée à un ressort dont l'autre bout est fixe et se déplace horizontalement sur un plan. Il existe des frottements de glissement entre la masse et le plan.

Le ressort est d'abord installé à sa longueur à vide, puis on tire l'objet d'une distance a.

1. Que doit valoir a pour que l'objet bouge ?
2. Établissez l'équation différentielle du mouvement.

2 Monter sur une échelle

Une échelle (longueur l, masse m_e) se trouve dans le plan xOy, reposant contre un mur Oz en faisant un angle θ avec l'horizontale. Le contact avec le mur se fait sans frottement, mais le contact avec le sol est caractérisé par un coefficient de frottement f.

Une personne de masse m monte sur cette échelle. À quelle condition sur θ arrive-t-elle en haut de l'échelle sans risque ? Comment vaut-il mieux placer l'échelle pour cela ?

3 Double frottement

Un cerceau de centre C, de masse m, tourne sans frottement avec une vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe horizontal passant par C. À l'instant initial, il est posé sur le sol horizontal (figure 1). Il est alors en contact en A avec le sol et en B avec un mur vertical.

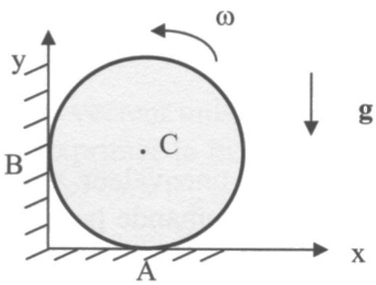


FIG. 1 : Double frottement.

Le coefficient de frottement est f en A comme en B. Le moment d'inertie du cerceau autour de l'axe de rotation est $J = mR^2$.

À quel instant le cerceau arrête-il de tourner ?

4 Modélisation d'un archet

La figure 2 montre une modélisation d'un archet frottant une corde de violon : la corde est modélisée comme une masse m attachée à un ressort horizontal (fournissant l'élasticité de la corde) et l'archet comme un fil enroulé autour de deux cylindres. Ce dernier tourne avec une vitesse constante v.

Initialement, le ressort est au repos (longueur à vide) et cette position sert d'origine pour l'abscisse x repérant la masse. Le mouvement se fait initialement sans glissement.

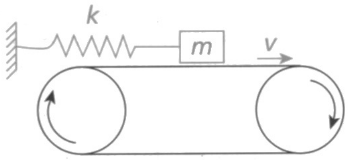


FIG. 2 : Modélisation d'un archet.

Pour que ce modèle décrive la réalité, il faut prendre en compte le fait que le coefficient de frottement a deux valeurs possibles : f_0 dans le cas sans glissement et f dans le cas avec glissement, avec $f \ll f_0$. Dans cet exercice, f sera pris nul. C'est la substance enrobant l'archet, appelée colophane, qui rend cette situation possible.

1. Combien de phases dynamiquement différentes le mouvement comporte-t-il ?
2. Étude de la phase 1 : déterminez l'instant t_1 de fin de la première phase. Interprétez.
3. Étude de la phase 2.
   (a) Déterminez l'équation différentielle gouvernant $x(t)$ dans cette phase.
   (b) Résolvez-la sous la forme $x(t) = A\sin\big(\omega_0(t - t_1) + \varphi\big)$, où vous exprimerez A, φ en fonction des données du problème.
   (c) Soit l'instant t_2 de fin de la deuxième phase. Que s'y passe-t-il ? Calculez t_2.
4. Proposez un court programme en Python pour tracer le graphe de $x(t)$ sur $[0, t_2]$. Constatez que la première période du mouvement n'est pas complète.
   Soit t_3 l'instant où la masse retrouve le même état de mouvement qu'à t_1. Déduisez-en la période complète du mouvement. Expliquer en quoi ceci constitue un moyen de mesurer le coefficient de frottement.

5 Mise en mouvement sans glissement

Une roue est posée au sol. On lui applique un couple moteur. Quelle est la condition sur ce couple pour que la roue avance sans glissement ?

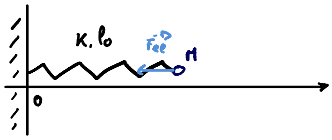
6 Corde entre deux plans inclinés

(X MP 2017) On considère une corde inextensible de masse totale M et de longueur L qui repose à l'équilibre sur un dièdre dont les côtés font un angle θ avec le sol.

Le coefficient de frottement entre la corde et le dièdre est noté μ. Quelle est la fraction maximale f de la longueur de la corde qui est suspendue ?

Exo 1 - Ressort et frottements de glissement

(1)



BDF en M
- $\vec{P}$ et $\vec{N}$ qui se compensent car mvt astreint en x $\Rightarrow$ $\vec{P} = -\vec{N}$
- $\vec{F_{e\ell}} = -K(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$
- $\vec{T}$: frottements entre M et le plan

HYPOTHÈSE D'ADHÉRENCE $\|\vec{T}\| < f \times \|\vec{N}\| = fmg$

PFD $\vec{0} = \vec{F_{e\ell}} + \vec{T} + \cancel{\vec{P}} + \cancel{\vec{N}}$

$\Rightarrow \|\vec{F_{e\ell}}\| = \|\vec{T}\|$

$\Rightarrow \|\vec{T}\| = Ka$ donc il y a adhérence TANT QUE $Ka < fmg$

i.e $a < \dfrac{fmg}{K}$

AINSI, $a \geq \dfrac{fmg}{K}$ fait bouger le fil $\Rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{fmg}{K} \text{ convient}}$

(2) **HYPOTHÈSE DE GLISSEMENT** $\rightarrow \|\vec{T}\| = f \times \|\vec{N}\| = fmg$

En projetant la 2ème loi de Newton sur $\vec{u_x}$, on a

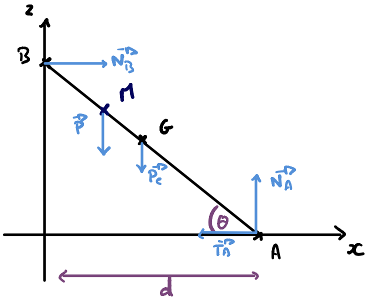
$$m\ddot{x} = -K(\underbrace{\ell}_{=x} - \ell_0) + fmg$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{K}{m}\ell_0 + fg \qquad \text{or } a = x_0 - \ell_0 \Rightarrow \ell_0 = x_0 - a = x_0 - \frac{fmg}{K}$$

$$= \frac{K}{m}x_0 - \cancel{fg} + \cancel{fg}$$

en posant $X = x - x_0$, on obtient l'équa diff. suivante : $\boxed{\ddot{X} + \frac{K}{m}X = 0}$

Exo 2 - Monter sur une échelle



BDF

- Poids échelle en G : $\vec{P_e} = -m_e g \vec{u_z}$
- Poids individu en M : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$
- Réaction normale en A : $\vec{N_A} = N_A \vec{u_z}$
- —— en B : $\vec{N_B} = N_B \vec{u_x}$
- Frottements en A : $\vec{T_A} = T_A \vec{u_x}$

⇝ On dispose de 3 inconnues ⇒ il nous faut 3 équations → 2 par le PFD ; → 1 par TMC

HYPOTHÈSE D'ADHÉRENCE

PFD On a (en projetant sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_z}$) :

$$\begin{cases} N_A = (m + m_e) g \\ T_A = -N_B \end{cases}$$

TMC $\Sigma = [\text{échelle} + \text{indiv}]$ → pas réduit à un point ; → TMC projeté sur l'axe de rotation

- $L_z = J\dot{\theta} = 0$ car non-glissement
- $\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P}$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta \\ = \\ = \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$= \cos(\theta)\, mg\, x\, \vec{u_y}$$

- $\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P_e}) = \dfrac{m_e \ell g}{2} \cos\theta\, \vec{u_y}$
- $\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{N_A}) = \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{T_A}) = \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{N_B}) = -\ell N_B \sin\theta\, \vec{u_y}$

TMC ⇒ $0 = \dfrac{mgx}{\cos\theta} + \dfrac{m_e g \ell}{2}\cos\theta - \ell N_B \sin\theta$

D'où $\boxed{N_B = mgx \cotan\theta + \dfrac{m_e \ell g}{2} \cotan\theta}$

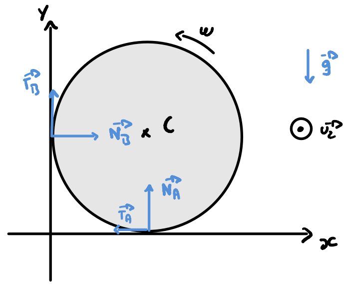
Ainsi, il y a adhérence TANT QUE $\|\vec{T_A}\| < f \times \|N_A\| = f(m + m_e)g$

i.e $\left(mgx + \dfrac{m_e \ell g}{2}\right)\cotan\theta < f(m + m_e)g$

Si l'indiv. arrive en haut, cela reste vrai pour tout $x \in [0; d]$, alors cette inégalité doit être vraie pour $x = d$

D'où $\boxed{\cotan(\theta) < \dfrac{f(m + m_e)}{md + \dfrac{m_e \ell}{2}}}$

Exo 3 - Double Frottement



BDF

- Poids en C : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_y}$
- Réaction normale en A : $\vec{N_A} = N_A\,\vec{u_y}$
- — en B : $\vec{N_B} = N_B\,\vec{u_x}$
- Frottements en A : $\vec{T_A} = T_A\,\vec{u_x}$
- — en B : $\vec{T_B} = T_B\,\vec{u_y}$

→ Ici, on a 5 inconnues, il nous faut donc 5 équations
- 2 par lois de Coulomb
- 2 par PFD
- 1 par TMC

(ω ; N_A, N_B, T_A, T_B)

HYPOTHÈSE DE GLISSEMENT

PFD Le cerceau étant immobile, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = 0$

Donc d'après la 2ème loi de Newton projetée sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$,
$$\begin{cases} 0 = T_A + N_B \\ 0 = N_A + T_B - mg \end{cases}$$

D'où
$$\boxed{\begin{cases} T_A = -N_B \\ N_A + T_B = mg \end{cases}}$$

TMC projeté sur $\vec{u_z}$.

→ $L_z = J\omega$

→ $\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{P}) = \vec{0}$

→ $\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{T_B}) = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ T_B \\ 0 \end{pmatrix} = -R\,T_B\,\vec{u_z}$

→ $\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{N_B}) = \vec{\mathcal{M}_C}(\vec{N_A}) = \vec{0}$

→ $\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{T_A}) = R\,T_A\,\vec{u_z}$

$\overset{\text{TMC}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{J}_{=mR^2}\dot{\omega} = R(T_A - T_B)$

i.e $\boxed{\dot{\omega} = \dfrac{1}{mR}(T_A - T_B)}$

Lois de Coulomb Comme on a supposé le glissement, on a :
$$\begin{cases} \|\vec{T_A}\| = f \times \|\vec{N_A}\| \\ \|\vec{T_B}\| = f \times \|\vec{N_B}\| \end{cases}$$

En faisant attention aux sens, on a donc
$$\boxed{\begin{cases} T_A = -fN_A \\ T_B = fN_B \end{cases}}$$

Enfin, on veut exprimer $\omega(t)$ pour déterminer l'instant t_f tq $\omega(t_f) = 0$

⚠ Cependant, rien ne nous dit que $T_A - T_B$ est ind. du tps. On ne peut donc pas immédiatement primitiver $\dot{\omega}$.

On a, en résolvant le système à 5 équations :
$$T_A = -\frac{f}{1+f^2}mg \quad \text{et} \quad T_B = \frac{f^2}{1+f^2}mg$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{1}{mR}\left(-\frac{f}{1+f^2}mg - \frac{f^2}{1+f^2}mg\right) = -\frac{g}{R}\,\frac{f(1+f)}{1+f^2}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = -\frac{g}{R}\,\frac{f(1+f)}{1+f^2}\,t + \omega_0$$

D'où $\boxed{t_f = \dfrac{(1+f^2)\,\omega_0 R}{f(1+f)\,g}}$

Exo 4 - Modélisation d'un archet

① Le mouvement comporte 2 phases dynamiquement différentes :

1. La corde est emportée par l'archet ⇒ ADHÉRENCE
2. La corde glisse sur l'archet ⇒ GLISSEMENT

② Le coeff de frottement est f_0, ainsi la phase 1 se termine quand $\|\vec{T}\| = f_0 \times \|\vec{N}\|$

or, par PFD,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -Kx + T \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

or $\dot{x} = v = cte \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow -Kx + T = 0$

$\Downarrow$ $\Rightarrow x = \frac{T}{K}$

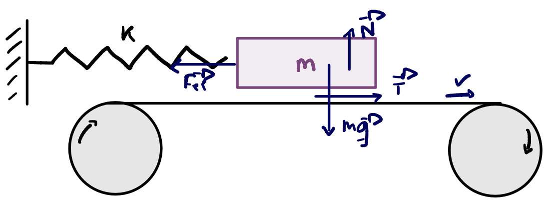
$x(t) = vt$

AINSI, fin phase 1 $\Leftrightarrow T = f_0 mg$

$\Leftrightarrow vt = \frac{f_0 mg}{K}$

$\Leftrightarrow t_f = \frac{f_0 mg}{vK}$

③ a)



HYPOTHÈSE DE GLISSEMENT ⇒ $T = 0$ car $\|\vec{T}\| = \underbrace{f}_{=0 \text{ par hyp}} \times \|\vec{N}\| = 0$

Donc d'après le PFD : $m\ddot{x} = -Kx$

i.e $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

b) $x(t) = A\sin(\omega(t - t_1) + \varphi)$ avec $\begin{cases} x(t_1) = vt_1 \\ \dot{x}(t_1) = v \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sin(\varphi) = vt_1 \\ A\omega_0\cos(\varphi) = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan(\varphi) = \omega_0 t_1 \\ A = v\sqrt{t_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \tan^{-1}(\omega_0 t_1) \\ A = v\sqrt{t_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2}} \end{cases}$$

c) Notons t_2 cet instant ⇒ annulation de $\vec{v_g}$

⇒ $\dot{x}(t_2) = v$ et $1^{ère}$ racine supérieure à t_1

Ainsi, $\cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \varphi) = \cos(\varphi)$

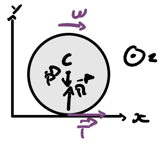
$\Leftrightarrow \omega_0(t_2 - t_1) + \varphi = 2\pi - \varphi$

$\Leftrightarrow t_2 = t_1 + 2\frac{\pi - \varphi}{\omega_0}$

④ On a $x(t_2) \neq x(t_1)$ ⇒ période pas complète

↳ reste : ?

Exo 5 - Mise en mvt sans glissement



$\vec{R} = -\vec{P}$ $\Rightarrow$ $\|\vec{R}\| = mg$

$\Rightarrow$ $\|\vec{T}\| = f \times \|\vec{R}\| = fmg$

TMC

$$J\dot{\omega} = \Gamma_m + \mathcal{M}_C(\vec{T}) \cdot \vec{u_z}$$
$$= \Gamma_m + \vec{CP} \wedge \vec{T} \cdot \vec{u_z}$$
$$= \Gamma_m + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \|\vec{T}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{u_z}$$
$$= \Gamma_m - \frac{d}{2} T$$

$\Rightarrow$ $T = \frac{2}{d}(\Gamma_m - J\dot{\omega})$

Ainsi, adhérence TANT QUE $\Gamma_m - J\dot{\omega} < \frac{fmgd}{2}$

i.e $\Gamma_m < \frac{fmgd}{2} + J\dot{\omega}$

or $\ddot{x} = R\dot{\omega}$

donc TANT QUE $\Gamma_m < fmgR + J\frac{\ddot{x}}{R}$

or, d'après le PFD, $\ddot{x} = \frac{\|\vec{T}\|}{m}$

$$\Gamma_m < fmgR + J\frac{\|\vec{T}\|}{mR}$$
$$< fmgR + J\frac{fmg}{\cancel{m}R}$$
$$\Gamma_m < fgR\left(m + \frac{J}{R^2}\right)$$

Finalement, la roue continue de rouler sans glisser TANT QUE

$$\Gamma_m < fmgR\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)$$