Colles MPi* Semaine n°17 du 20/01/2024 au 24/01/2024 (Programme n°11)

Vallaeys Pascal

2 janvier 2025

Thème : Espaces préhilbertiens et euclidiens.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Durand
- Agboton
- LE BLAN
- Lesage
- Cathelain
- Shabadi
- Lecoutre
- FORÊT
- Stevenart
- Bouras
- Coquel
- Vandenbroucke

Liste des élèves du groupe B :

- Bancod
- Trouillet
- Lokmane
- Dumont
- Charette
- DEPLACIE
- Poulain
- Daniel
- Mabillotte
- Vallaeys
- Bertout
- Harendarz
- Krawczyk
- Thibaut—Gesnel
- Monchiet
- TURPIN
- El HAJJIOUI
- Depuydt
- Chazal
- Cordonnier-Portier
- Martinsse

Liste des élèves du groupe C :

- Burghgraeve
- gery
- Bodet
- Caffier
- BISKUPSKI
- Dutilleul

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'un produit scalaire + exemple.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt sur un exemple.
- Inégalité de Cauchy Schwarz. (démo)
- Norme associée à un produit scalaire (démo)

- Une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et non nuls est libre (démo)
- Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie muni d'une b.o.n.
- $S(E)$ est un espace vectoriel. (démo)
- Définition de l'adjoint.
- Adjoint d'une composée ("démo")
- Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- Lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique. ("démo")
- Pour un endomorphisme auto-adjoint, les s.e.p. sont en somme directe orthogonale. (démo)
- Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*. (démo)
- Si F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, il en va de même pour son orthogonal. ("démo")
- Le spectre réel d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$ et E_1 et E_{-1} sont orthogonaux. (démo)
- Théorème de réduction par blocs des isométries.
- Théorème spectral. (version endomorphisme et version matricielle)
- Définition d'un endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif.

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Identité de polarisation et identité du parallélogramme. (démo)
- Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie muni d'une b.o.n. (démo)
- Caractérisation des isométries par la conservation de la norme. (démo)
- Caractérisation des isométries par l'image d'une b.o.n. (démo)
- Caractérisation des isométries par u^*. (démo)
- Existence et unicité de l'adjoint. (démo)
- Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée. (démo)
- Si F est stable par une isométrie, il en va de même pour son orthogonal. (démo)
- Une projection est une projection orthogonale si et seulement si c'est un endomorphisme auto-adjoint. (démo)
- Une symétrie est une symétrie orthogonale si et seulement si c'est une isométrie. (démo)
- $O_n(\mathbb{R})$ est compact. (démo)
- Caractérisation des endomorphismes auto-adjoint positifs (resp. définis positifs) par le spectre. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Théorème spectral. (démo)
- Théorème de réduction par blocs des isométries. (démo)
- Le projeté orthogonal minimise la distance à un sous-espace. (démo non refaite en spé)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (CCINP MPi 2023)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique.
1. Montrer que
$f \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$
$f \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. Soit f symétrique positive, montrer qu'il existe un endomorphisme g symétrique et positif tel que $f = g^2$. Que dire si f est défini positif ?
3. Soit f défini positif et g positif, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2023)
Soit E un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^* \circ f$.
1. Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, f^*$.

Exercice 3 : (Mines télécom MP 2023)
Considérons le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.

Exercice 4 : (CCINP MP 2022)

1) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
2) Soit p un projecteur orthogonal de rang r, montrer que $\mathrm{tr}\, p = r$.
3) Montrer que pour tout vecteur x, $\langle x, p(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle$.

Exercice 5 : (CCINP MP 2022)
On note $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et φ définie sur E^2 par $\varphi(f,g) = \int_{-1}^1 fg$. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.
1. Montrez $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrez que φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrez $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{I}$.
4. Exprimez $\hat{f}$ l'image de $f \in E$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 6 :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $Ker\left(A^T.A\right) = Ker(A)$ et que $Ker\left(A.A^T\right) = Ker\left(A^T\right)$.
b) Montrer la même genre de relation pour les images.

Exercice 7 :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :
a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k.\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.
b) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 8 : (CCINP MP 2023)
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes sur (a,b,c) pour que M soit dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
On donne l'identité : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ac+ab+cb)$.
2. On pose $\alpha = a+b+c$ et $\beta = ac+ab+cb$. D'après la question précédente, pour quelles valeurs de (α,β), M est-elle dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.
4. Déterminer les triplets (a,b,c) tels que $a = b$ et $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 9 : (Centrale MP 2023)
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$.
1. Établir l'égalité du parallélogramme.
2. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
(i) : $\exists c \in \mathbb{R} : \forall (x,y) \in E^2,\ \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$.
(ii) : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow\ \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : pour tout sous-espace V de E, $u(V^\perp) \subset u(V)^\perp$.

Exercice 10 : (Mines MP 2022) (avec préparation)
Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que :
$\forall (x,y) \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$
Montrer qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k.\|x\|$.

Exercice 11 : (CCINP MP 2021)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une application ϕ par :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \phi(M,N) = \mathrm{tr}(M^\top N)$$

Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
Pour $(M,N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\phi(M,N) \leq n$.
Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\mathrm{tr}((AB)^2) \leq \mathrm{tr}(A^2B^2)$
Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\mathrm{tr}((AB+BA)^2) \leq 4\mathrm{tr}(A^2B^2)$.

Exercice 12 : (Mines PSI 2021)
On pose $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+\}$.
1. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.
2. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ S = {}^tAA$.
4. Montrer que : $\forall S, T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ S + T \in S_n^+(\mathbb{R})$.
5. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
6. Montrer que : $\forall (U, V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \chi_{UV} = \chi_{VU}$.
7. On suppose seulement $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (U_k) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $U_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} U$.
En déduire que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

Exercice 13 : (Mines télécom MP 2021)
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \ S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 14 : (Mines-Ponts 2019)
Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.
Que dire de ses valeurs propres réelles ? Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à spectre imaginaire pur.

Exercice 15 :
On travaille dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P/Q) = \int\limits_{-1}^{1} PQ$. Pour tout entier naturel n, on pose $P_n(X) = \frac{1}{2^n.n!}\cdot\frac{d^n}{dX^n}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$, avec $P_0(X) = 1$.
1) Donner les degré et coefficient dominant de P_n.
2) Quelle est la parité éventuelle du polynôme P_n ?
3) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
4) Montrer que P_n admet n racines distinctes entre -1 et 1.
5) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6) La famille $(P_n)_{n\in\aleph}$ est-elle orthogonale ?
7) Calculer $\|P_n\|$.
8) Montrer que $\frac{d}{dX}\left(\left(X^2-1\right).\frac{dP_n}{dX}(X)\right)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
9) En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle : $\left(x^2-1\right)y'' + 2x.y' - n(n+1)y = 0$

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 16 : (Centrale MP 2023)
Soit $\varepsilon = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A \text{ symétrique positive de trace } 1\}$
1. Rappeler la définition d'un ensemble convexe et montrer que ε est convexe.
2. Montrer que ($A \in \varepsilon$ et $rg(A) = 1$) $\Leftrightarrow$ (A est la matrice, dans une base orthonormée, d'une projection orthogonale sur u

Exercice 17 : (Mines MP 2023)
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $a < b$ des réels tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \leqslant \langle X, AX\rangle \leqslant b\|X\|^2$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [a, b],\ P(x) > 0$.
Montrer que $P(A)$ est symétrique définie positive.

Exercice 18 : (Centrale MP 2022)
On se place dans un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pour $x_1, \ldots, x_d$ vecteurs de E, on pose $G(x_1, \ldots, x_d) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ la matrice de Gram associée.
1. a) Justifier que $G(x_1, \ldots, x_d)$ est diagonalisable.
b) Montrer que si $(x_1, \ldots, x_d)$ est lié, alors $G(x_1, \ldots, x_d)$ n'est pas inversible.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On fixe $(x_1, \ldots, x_d)$ une base de F. Après avoir justifier que $G(x_1, \ldots, x_d)$ est inversible, montrer que pour tout $x \in E$,
$$d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \ldots, x_d))}{\det(G(x_1, \ldots, x_d))}$$
3. On se place dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ munit du produit scalaire
$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\phi_r : x \mapsto x^r$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $r_1, \dots, r_d$ des réels distincts strictement positifs, on note $F = \text{Vect}(\phi_{r_1}, \dots, \phi_{r_d})$. Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $d(\phi_r, F)$.

Exercice 19 : (Mines PSI 2021)

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.

Exercice 20 : (Centrale MP)

Soit n un entier naturel. On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-espace constitué des matrices symétriques. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On pose $\varphi_A : \begin{array}{c} S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ M \to {}^tA.M.A \end{array}$.

a) Justifier rapidement le fait que $S_n(\mathbb{R})$, muni de $(A/B) = Tr(A.B)$ est un espace euclidien.

b) Montrer que si A est diagonale $Dét(\varphi_A) = Dét(A)^{n+1}$.

c) Montrer le même résultat si $A \in S_n(\mathbb{R})$.

d) Dans le cas général :

(i) Déterminer l'adjoint de φ_A .

(ii) Montrer que $(Dét(\varphi_A))^2 = Dét(\varphi_{A.{}^tA})$.

(iii) Calculer le déterminant de φ_A pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 : (Mines-Ponts MP)

Soit n un entier naturel.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(1) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{A(t).P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

b) Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 22 : (Mines MP 2022)

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A, dans $M_n(\mathbb{R})$, puisse s'écrire $A = S^2 + S + I_n$, avec S matrice symétrique réelle. Puis, lorsque A vérifie cette condition, condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de S.

Exercice 23 : (X-ENS PSI 2021)

Soit $E = \mathcal{L}^2([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ et de la norme associée.

On dit que la suite converge fortement vers f si la suite $[\|f_n - f\|)$ converge vers 0.

On dit que la suite converge faiblement vers f si $\forall \varphi \in C^1([-1,1], \mathbb{R})$, $< f_n, \varphi > \underset{n\to+\infty}{\to} < f, \varphi >$.

1. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge fortement vers f. La réciproque est-elle vraie ?

2. Montrer que si (f_n) converge fortement vers f, alors (f_n) converge faiblement vers f.

3. Montrer que si (f_n) converge faiblement vers f de classe C^1 et si la suite $(\|f_n\|)$ converge vers $\|f\|$ alors (f_n) converge fortement vers f.

4. Montrer que si (φ_n) est une suite de fonctions C^1 qui converge uniformément vers φ et si (φ_n') converge aussi uniformément et si (f_n) est une suite bornée qui converge faiblement vers f, alors $< f_n, \varphi_n > \longrightarrow < f, \varphi >$.

5. On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que (f_n) converge faiblement vers la fonction nulle.

Exercice 24 : (X-ENS PSI 2021)

Soit E euclidien de dimension n.

Soit $x_1, ..., x_k \in E$ tels que $\forall i \neq j$, $< x_i, x_j > < 0$. Montrer que k ne peut pas être trop grand et trouver cette limite.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 39,63,66,68,71,76,77,78,79,80,81,82,92.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : espaces préhilbertiens et euclidiens. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 à 4 : Programme n°11
- Groupe 5 à 7 : Programme n°11
- Groupe 8 à 11 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 12 à 14 : Programme n°10