Khôlles : Semaine 21

- 19 - 23 Février 2024 -

Sommaire

1 Questions de cours - Groupes A, B, C

1.1 Citer le théorème de continuité des intégrales à paramètre et l'appliquer sur Γ

Théorème de Continuité des intégrales à paramètre

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ $(I, J \subset \mathbb{R})$. On note $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$.

Hypothèses :

H.1) $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur I

H.2) $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$ sur J

H.3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J, telle que $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Conclusions :

C.1) $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J

C.2) g est $\mathscr{C}^0$ sur I

Exemple (Application à Γ)

On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Nous avons alors $J =]0, +\infty[$. Posons $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

<u>Domaine de définition :</u>
Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur J.
Au voisinage de 0^+ : $f(x,t) \sim t^{x-1} \cdot 1 = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, qui est intégrable si et seulement si $1 - x < 1 \iff x > 0$.

Au voisinage de $+\infty$: $f(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées. Or, $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $f(x,t)$ également.

Finalement, $D_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$

<u>Continuité :</u>
On localise : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $a<b$.

Utilisons le théorème de continuité :

- $\forall x \in [a,b],\ t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.
- $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est continue sur D_Γ.
- Posons $\varphi : t \mapsto \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1 \end{cases}$.

  Alors, φ est $\mathscr{C}^{PM}$ et intégrable sur J. De plus, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, Γ est continue sur tout $[a,b] \subset D_\Gamma$, donc par union, Γ est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1.2 Citer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre et l'appliquer sur Γ.

Théorème de Dérivation des intégrales à paramètre

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ ($I, J \subset \mathbb{R}$). On note $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$.

Hypothèses :

H.1) $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur I

H.2.a) $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J

H.2.b) $\forall x \in I,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$ (non forcément intégrable) sur J

H.3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J, telle que $\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

Conclusions :

C.1) g est $\mathscr{C}^1$ sur I

C.2) $\forall x \in I,\ g'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt$

Exemple

Caractère $\mathscr{C}^1$:

Lemme

Soit $a<1$, et $b \in \mathbb{N}$. Alors $f(t) = \dfrac{(\ln(t))^b}{t^a}$ est intégrable au voisinage de 0

Tout comme précédemment, localisons sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $a<b$. Appliquons le théorème :

- $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur I par produit et composition.

  De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t) \cdot t^{x-1}e^{-t}$

- $\forall x \in [a,b],\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, intégrable sur J.

  Idem, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par morceaux sur J

- Posons $\varphi : t \mapsto \begin{cases} \ln(t)e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1 \end{cases}$.

  Alors, φ est $\mathscr{C}^{PM}$ et intégrable sur J. De plus, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\varphi(t)|$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation pour les intégrale à paramètres, Γ est $\mathscr{C}^1$ sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1.3 Citer la version continue du théorème de convergence dominée.

Théorème de Convergence Dominée des Intégrales à paramètre

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ ($I, J \subset \mathbb{R}$). On note $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$. Soit $a \in \bar{I}$.

Hypothèses :

H.1) $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$

H.2) $\exists h : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$ telle que $\forall t \in J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$

H.3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J, telle que $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Conclusions :

C.1) h est intégrable sur J

C.2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \int_J h(t)dt = \int_J \lim\limits_{x \to a} f(x,t)dt$

2 Questions de cours, groupes B et C

2.1 Théorème de Continuité des Intégrales à paramètre. (démo)

Théorème de Continuité des intégrales à paramètre

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ $(I, J \subset \mathbb{R})$. On note $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$.

Hypothèses :

H.1) $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur I

H.2) $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$ sur J

H.3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J, telle que $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Conclusions :

C.1) $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J

C.2) g est $\mathscr{C}^0$ sur I

Preuve **:**

g continue sur I $\iff \forall a \in I,\ g$ est continue en $a \iff \forall a \in I,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Utilisons alors le théorème de convergence dominée :

- $H_1' = H_1$
- $H_2' : \forall t \in J,\ f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} f(a,t)$. Ainsi, $\exists h; J \to \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$
- $H_3' = H_3$

Ainsi, g est continue sur I

2.2 Théorème de dérivation des intégrales à paramètre. (démo)

Théorème de Dérivation des intégrales à paramètre

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ $(I, J \subset \mathbb{R})$. On note $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$.

Hypothèses :

H.1) $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur I

H.2.a) $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J

H.2.b) $\forall x \in I,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$ (non forcément intégrable) sur J

H.3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J, telle que $\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

Conclusions :

C.1) g est $\mathscr{C}^1$ sur I

C.2) $\forall x \in I,\ g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt$

Preuve :

Montrons que $\forall a \in I$, g est dérivable en a :

$\forall x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \displaystyle\int_J \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}dt$

Posons $h : x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}dt$ et $h(a) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$. Montrons que h est continue en a.

On note alors $h(x) = \displaystyle\int_J \delta(x,t)dt$, avec $\delta(x,t) = \dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}$ si $x \neq a$, et $\delta(a,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$.

Appliquons le théorème de Continuité :

- $\forall x \in I$, nous avons $t \mapsto \delta(x,t)$ continue par morceaux sur J. (H_2)
- $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ donc $\mathscr{C}^0$ sur I, donc $\delta(x,t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur I.
  (On a $\lim\limits_{x\to a} \delta(x,t) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t) = \delta(a,t)$).
- $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable telle que $\forall x,t \in I \times J,\ |\delta(x,t)| \leqslant |\varphi(t)|$:
  Si $x = a$, $H_3 \Rightarrow$ Ok.
  Si $x \neq a$, $\delta(x,t) = \dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}$, appliquons l'EAF :

  $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur I par H_1, donc :
  $\forall x \in I, (x \neq a),\ \exists x \in]a,x[,\ f(x,t)-f(a,t) = (x-a)\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,t)$.

  Puisque $(x \neq a)$, $\dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} = \delta(x,t) \leqslant |\varphi(t)|$.

  Ainsi, $\forall (x,t) \in I \times J, |\delta(x,t)| \leqslant |\varphi(t)|$ avec φ continue par morceaux et intégrable.

Nous avons alors d'après le théorème de continuité que h est continue sur I, donc en a. Alors :

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}dt \Rightarrow$ g Dérivable et $g' : x \mapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Pour montrer que g est $\mathscr{C}^1$, appliquons le théorème de continuité à g' :

- $\forall x \in I,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est Continue par morceaux. (H_2)

- $\forall t \in J,\ x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est Continue. (H_1)

- $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable, telle que $\forall (x,t) \in I \times J, |\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leqslant |\varphi(t)|$. (H_3)

  Alors, g est $\mathscr{C}^1$

2.3 Version continue du théorème de convergence dominée. (démo)

Théorème de Convergence Dominée des Intégrales à paramètre

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ ($I, J \subset \mathbb{R}$). On note $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$. Soit $a \in \bar{I}$.

Hypothèses :

H.1) $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^{PM}$

H.2) $\exists h : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$ telle que $\forall t \in J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$

H.3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$, intégrable sur J, telle que $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Conclusions :

C.1) h est intégrable sur J

C.2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \displaystyle\int_J h(t)dt = \int_J \lim_{x \to a} f(x,t)dt$

Preuve :

Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite :

$$\left[\lim_{x \to a} g(x) = \int_J h(t)dt\right] \iff \left[\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \to a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \int_J h(t)dt\right]$$

Soit $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, telle que $x_n \to a$. Alors, $g(x_n) = \displaystyle\int_J f(x_n,t)dt$.

Posons $f_n(t) = f(x_n,t)$. Alors, $g(x_n) = \displaystyle\int_J f_n(t)dt$.

Appliquons dès lors le théorème de convergence dominée, version séquentielle.

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathscr{C}^{PM}$ sur J
- (f_n) CVS vers h sur J
- $\exists \varphi : J \to \mathbb{R},\ \mathscr{C}^{PM}$ et intégrable telle que $\forall t \in J, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Donc, d'après le théorème de Convergence dominée, $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_J f_n(t)dt = \int_J h(t)dt$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \displaystyle\int_J h(t)dt$

3 Questions de Cours du groupe C uniquement