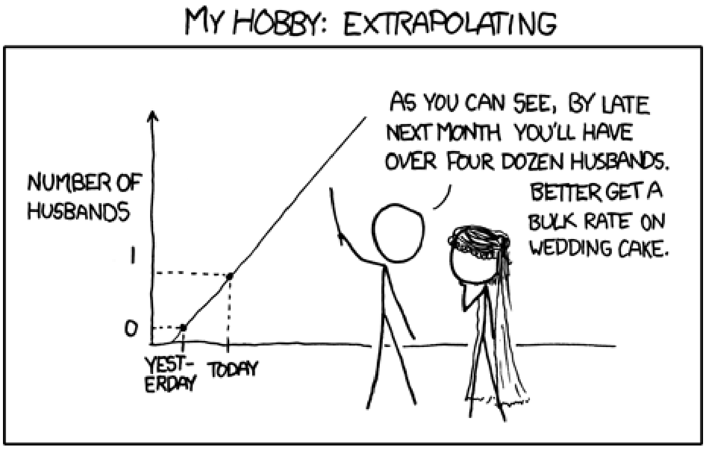
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 9



Olivier Caffier

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites.

Définition - Limite d'une application

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f : \begin{array}{ll} A & \to F \\ \vec{x} & \mapsto f(\vec{x}) \end{array}$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On dit que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists r > 0, \forall x \in B_f(a, r) \cap A, ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon \\ \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f : \begin{array}{ll} A & \to F \\ \vec{x} & \mapsto f(\vec{x}) \end{array}$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

Démonstration.

$\Rightarrow$: Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - a\|_E \leq \varepsilon$

Soit donc $\varepsilon > 0$,

Par hyp sur f, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $\|x - a\|_E \leq \eta$

$\Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$

On considère $n_\eta \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\eta$, $\|x_n - a\|_E \leq \eta$

$\Rightarrow \|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$

On a donc bien :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\eta \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\eta$, $\|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$: Réciproquement, raisonnons par contraposée

Supposons alors que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$

i.e $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists x \in A$, $\|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - l\|_F > \varepsilon$

Soit donc un tel $\varepsilon > 0$, on prend alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{1}{n+1}$

On vient alors de construire une suite $(x_n)_n$ tq $x_n \longrightarrow a$

mais $f(x_n) \not\longrightarrow l$

d'où l'existence d'une telle suite.

d'où le résultat par contraposée

D'où le résultat par contraposée

Définition - Continuité d'une application

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

(1) Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(2) On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Soit $a \in A$
Alors :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a, \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$$

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Supposons f continue en a. Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall y \in A, \|y-a\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(y)-f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$

Soit donc $\varepsilon>0$, il existe alors un $\eta>0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\|_E \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x_n)-f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$

or $\eta>0$ donc, comme $x_n \to a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \|x_n - a\|_E \leqslant \eta \Rightarrow$ —

AINSI, $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \|f(x_n)-f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

$\Leftarrow$: Réciproquement, raisonnons par contraposée

Supposons que $\exists \varepsilon>0, \forall \eta>0, \exists x \in A, \|x-a\| \leqslant \eta$ et $\|f(x)-f(a)\| > \varepsilon$

écrire $A \Rightarrow B$ puis la contraposée si besoin !

Soit donc un tel $\varepsilon>0$, prenons pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{1}{n+1}$

On vient alors de construire une suite (x_n) tq
- $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\|_E \leqslant \frac{1}{n+1}$ i.e $x_n \longrightarrow a$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n)-f(a)\|_F > \varepsilon$ i.e $f(x_n) \not\longrightarrow f(a)$

D'où l'existence d'une telle suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$ et $f(x_n) \not\to f(a)$

D'où le résultat par contraposée.

D'où l'équivalence.

A.2 Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse.

Définition - Application lipschitzienne

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

(1) Soit $K \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est K-lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$

(2) On dit que f est lipschitzienne si $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-lipschitzienne.

Proposition

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.
Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.
Alors

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f\ C^0 \text{ sur } A$$

⚠ LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!

En effet, en prenant la fonction $f : x \mapsto x^2$, qui est bien $\mathbb{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ mais s'il existait un tel $K \in \mathbb{R}_+$:

on aurait pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |(x+1)^2 - x^2| \leq K$, i.e $|2x+1| \leq K$.

ce qui est absurde car on ne peut borner cette quantité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

DÉMONSTRATION.

f est lipschitzienne, il existe alors $K \in \mathbb{R}_+$ tq f soit K-lip. : i.e $\forall (x,y) \in A^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$

⇝ Montrons que f est uniformément continue

i.e mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in A^2, \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$, prenons alors $\eta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, alors $\forall (x,y) \in A^2$ tq $\|x - y\|_E \leq \frac{\varepsilon}{K}$

on a, comme f est K-lip, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E \leq \cancel{K} \frac{\varepsilon}{\cancel{K}}$

d'où $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$

d'où f uniformément continue

⇝ Montrons mtn que unif cont. ⇒ cont.

Soit $x \in A$ fixé,

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un $\eta > 0$ tq $\forall y \in A$, $\|y - x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$

f est donc continue pour tout $x \in A$.

D'où f lip ⇒ f unif. continue ⇒ f continue

D'où le résultat voulu.

A.3 Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordre supérieurs.

Définition - Application dérivable

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

(1) On dit que f est dérivable en a si :

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

On note $f'(a)$ cette limite.

(2) On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout point $a \in I$.

Proposition - Une équivalence pratique

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application. Soit $a \in I$.

On suppose f $\mathcal{C}^0$ sur I. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1 \text{ en } a.$$

Dans ce cas, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

⚠ FAUX AUX ORDRES SUPÉRIEURS!!

Il suffit de prendre la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui n'est pas 2 fois dérivable en 0 mais admet un DL_2 en ce point.

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Si f est dérivable en a, alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

i.e $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \underset{h \to 0}{=} o(1)$

$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

donc f admet un DL_1 en a

$\Leftarrow$: Réciproquement, $\exists v \in F$ tq $f(a+h) = f(a) + hv + o(h)$

$\Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v + o(1)$

donc le taux d'accroissement possède une limite finie $\Rightarrow f$ dérivable en a

et $f'(a) = v$

A.4 Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

La fonction
$$f : x \mapsto x^2 \sin(\tfrac{1}{x})$$
est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION.

Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite !}}$

ainsi f' ne dispose pas de limite en $x = 0$!

$\Rightarrow f'$ n'est pas $\mathcal{C}^0$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$

A.5 Somme de Riemann et théorème associé (proposer un exemple)

Définition - Somme de Riemann

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|.\|_F)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n et $f : \begin{array}{ll} I & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$ une application **continue ou continue par morceaux**.

Soient $[a; b] \subset I$ et $n \in \mathbb{N}$.

(1) On appelle Somme de Riemann (à gauche) la quantité :
$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

(2) Généralement, on aura $a = 0$ et $b = 1$, d'où
$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

EXEMPLE.

Prenons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \tan^{-1}(1) - \cancel{\tan^{-1}(0)}$

$= \frac{\pi}{4}$

d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$

A.6 Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq. $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$$

DÉMONSTRATION. f est continue sur $[a;b]$ donc d'après le th. des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes

Soit donc $m = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

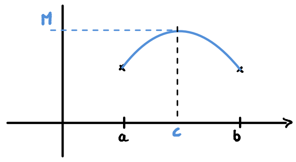
Si $m = M$ alors f est constante en tout point $\Rightarrow f' = \tilde{0}$ sur $[a;b]$
$\Rightarrow$ n'importe quel $c \in [a;b]$ convient !

Sinon puisque $f(a) = f(b)$, les deux extremas ne peuvent pas être atteints aux bornes

supposons, sans perte de qualité, que M n'est pas atteint en a & en b :

$\exists c \in]a;b[$ tq $f(c) = M$, i.e $f'(c) = 0$

car f dérivable sur $]a;b[$
et M un extremum



D'où l'existence d'un tel c

Théorème - Égalité des Accroissements Finis

Soit $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]a;b[$.
Alors :

$$\text{Il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉMONSTRATION. Considérons les applications

$$\varphi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \end{array}$$

$\psi = f - \varphi$ qui est bien $\mathcal{C}^0$ sur I
et dérivable sur $\mathring{I}$

D'autre part, $\left.\begin{array}{l} \varphi(a) = f(a) \\ \varphi(b) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(a) = \psi(b) = 0$

Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a;b[$ tq $\psi'(c) = 0$ i.e $f'(c) = \varphi'(c)$

i.e $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

D'où l'existence recherchée

Théorème - Inégalité des Accroissements Finis

(mm notations). On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+$ tels que $m \leq f' \leq M$.
Alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \geq y \Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$$

DÉMONSTRATION. On a, d'après l'EAF que $\forall x \geq y \in I$, $\exists c \in]y;x[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{\underbrace{x - y}_{>0}}$ (sinon : trivial)

or $m \leq f' \leq M$

$\Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$

$\longrightarrow$ OK

A.7 Formules de Taylor (Young + reste intégral), démo uniquement de la formule reste intégral

Proposition - Formule de Taylor-Young

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, alors :
$\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|b-a|^n)$$

Proposition - Formule de Taylor Reste Intégral

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors :
$\forall a, b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

DÉMONSTRATION. Procédons par récurrence

□ $n=0$: $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{= f(a)} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{= f(b) - f(a)} = f(b)$

H_1 vraie.

□ $H_n \Rightarrow H_{n+1}$: On a, par H.R,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

IPP à rédiger...

$$= \text{—} + \underbrace{\left[-\frac{(b-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\right]_a^b}_{= 0 + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)} - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

H_{n+1} vraie.

Ce qui clôt la récurrence.

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

Définition - Point adhérent à une partie

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$.
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\forall r > 0, B_f(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

Proposition - Caractérisation séquentielle d'un point adhérent à une partie

(mm notations)
On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \to a$$

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Supposons que $a \in E$ soit adhérent à A

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $r_n = \frac{1}{n+1}$

Ainsi, par hyp, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B_f(a, r_n) \cap A$

On vient alors de construire $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$

tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - a\|_E \leqslant \underbrace{r_n = \frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

avec donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

D'où l'existence d'une telle suite.

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow a$

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $\|x_n - a\|_E \leqslant \varepsilon$

i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $\underbrace{x_n}_{\in A} \in B_f(a, \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $B_f(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

D'où l'adhérence de a.

B.2 Dérivée de $L(f)$ où L est une application linéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ 2 $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie. Soit $f : I \to E$ une application et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ (qui se trouve être continue car nous travaillons en dimension finie!).
Soit $a \in I$, on suppose f dérivable en a.
Alors $L(f)$ est dérivable en a et

$$L(f)'(a) = L(f'(a))$$

DÉMONSTRATION.

On montrera plus tard dans l'année que

$\exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in E$, $\|L(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$

Soit $h \in \mathbb{R}$ tq $a+h \in I$, alors $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$

$\Rightarrow L(f(a+h)) = L(f(a)) + hL(f'(a)) + \underbrace{L(o(h))}_{= o(h)}$, cf. ci-contre

Ainsi, $L(f(a+h)) = L(f(a)) + hL(f'(a)) + o(h)$

donc $L(f)$ admet un DL_1 en a

$\Rightarrow L(f)$ est dérivable en a et $L(f)'(a) = L(f'(a))$

Enfin, montrons que $L(o(h)) = o(h)$

On a : $\exists \varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $o(h) = \varepsilon(h)$

DONC, comme L est K-lip :

$\|L(\varepsilon(h))\|_F \leqslant K \times \underbrace{\|\varepsilon(h)\|_E}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$

d'où $L(o(h)) = o(h)$

D'où le résultat voulu.

B.3 Dérivée de $B(f,g)$ où B est une application bilinéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F), (G, \|.\|_G)$ 3 $\mathbb{R}$-e.v.n.
Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Soit $a \in I$, supposons E et F de dimension finie ou f C^0.
Si f et g sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ l'est également et :

$$B(f,g)'(a) = B(f',g)(a) + B(f,g')(a)$$

avec $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow F$

DÉMONSTRATION.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tq. $a+h \in I$

Alors $B(f,g)(a+h) = B(f(a+h), g(a+h))$

$= B(f(a) + hf'(a) + o(h), g(a) + hg'(a) + o(h))$

$= B(f(a), g(a)) + h\big(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\big) + \underbrace{h^2 B(f'(a), g'(a)) + B(f(a), o(h)) + B(o(h), g(a))}_{(*)\ = o(h)}$

$= B(f(a), g(a)) + h\big(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\big) + o(h)$

Donc $B(f,g)$ admet un DL_1 en a.

$\Rightarrow$ $B(f,g)$ est dérivable en a et $B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$

$(*)$: D'une part, $\|h^2 B'(f',g')(a)\|_G = |h| \times \underbrace{|h| \times \|B'(f',g')(a)\|_G}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} = o(h)$

D'autre part, $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|B(x,y)\|_G \leq K \|x\|_E \|y\|_F$

donc $o(h) = h\varepsilon(h)$ avec $h\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

on a alors $\|B(f(a), o(h))\|_G = \|B(f(a), \varepsilon(h))\|_G \leq \underbrace{K \|f(a)\|_E \|\varepsilon(h)\|_F}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} \times |h|$

$= o(h)$

De mm pour l'autre.

B.4 Continuité de la fonction "distance à une partie A"

Définition - Fonction "distance à une partie A"

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$. On définit d la fonction distance à A par :

$$d : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf_{a \in A} \|x - a\| \end{array}$$

On note généralement $d(x) = d(x, A)$

Proposition - Continuité de la fonction "distance à une partie A"

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n et soit $A \subset E$. On note d la fonction distance à A par . Alors d est continue.

DÉMONSTRATION. Montrons que la fonction distance est 1-lip.

On a que, $\forall x, y \in E$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_E = \inf_{a \in A} \|x - y + y - a\|$

or $\forall a \in A$, $\|x - y + y - a\| \leqslant \|x - y\|_E + \|y - a\|_E$ d'après l'I.T

donc, en passant à l'inf, on a :

$d(x, A) \leqslant \|x - y\|_E + \inf_{a \in A} \|y - a\|$ i.e $d(x, A) \leqslant \|x - y\|_E + d(y, A)$

ne dépend pas de $a \in A$!

$\Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\|_E$

et sym. des rôles $\Rightarrow d(y, A) - d(x, A) \leqslant \|y - x\|_E = \|x - y\|_E$

d'où $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \|x - y\|_E$

donc d est 1-lip $\Rightarrow$ d est continue

D'où le résultat voulu.

B.5 Inégalité arithmético-géométrique.

Proposition - Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$(x_1 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

DÉMONSTRATION. On a, d'après l'inégalité de Jensen appliquée au logarithme népérien (version concave donc) :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i)}{n} = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

ainsi, par croissance de l'exp, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

d'où $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}$

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

DÉMONSTRATION.

Comme f est continue, on a d'après le th. de Heine que f est uniformément continue.

Posons la famille $(a_k)_k$, subdivision régulière d'ordre n associée à l'intervalle $[a;b]$ $\to$ $a_0 = 0$, $\forall k \in [\![1;n]\!]$ $\quad a_k = a + k\frac{b-a}{n}$

Soit $\varepsilon > 0$, prenons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

$$\left|\int_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n} f\big(\underbrace{a + k\tfrac{b-a}{n}}_{=a_k}\big)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k)\,dt\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\,dt$$

or f est unif. $\mathcal{C}^0$ donc $\exists \eta > 0$, $\forall x,y \in [a;b]$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon'$

Ainsi, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, $t \in [a_k ; a_{k+1}]$, $|t - a_k| \leq \frac{1}{n}$

donc pour $n \gg 1$, $|t - a_k| \leq \eta$

Ainsi, pour $n \gg 1$, $\quad |t - a_k| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(a_k)| \leq \varepsilon'$

et donc $\left|\int_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\varepsilon' dt = \varepsilon'\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} dt$

$= \varepsilon'\int_a^b dt$

$= \varepsilon'(b-a)$

$= \varepsilon$

d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$

C.2 Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ avec $I = [a;b]$, $a < b$. On prend $(a_k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ une subdivision régulière de I d'ordre n.
Alors, en posant $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k)$, on a

$$R_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

DÉMONSTRATION.

On a $\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ donc $R_n - \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} f(a_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) - f(t)dt$

or, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $t \in [a_k;a_{k+1}]$:

$$\left| f(t) - \sum_{j=0}^{0} \frac{(t-a_k)^j}{j!} f^{(j)}(a_k) \right| \leqslant \max_{c\in[a_k;a_{k+1}]} |f^{(1)}(c)| \frac{(t-a_k)^1}{1!}$$

i.e $|f(t) - f(a_k)| \leqslant \|f'\|_\infty^{[a_k;a_{k+1}]} (t-a_k)$

existe car f' $\mathcal{C}^0$ sur $[a;b]$ par hyp.

$$\leqslant \|f'\|_\infty^{[a;b]} (a_{k+1} - a_k)$$

DONC

$$\left|R_n - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|f'\|_\infty^{[a;b]} (a_{k+1} - a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} dt$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|f'\|_\infty^{[a;b]} \underbrace{(a_{k+1} - a_k)^2}_{= (\frac{b-a}{n})^2}$$

$$\leqslant \|f'\|_\infty^{[a;b]} \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}} \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} 1}$$

AINSI

$$\left|R_n - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \underbrace{\|f'\|_\infty^{[a;b]} (b-a)^2}_{=\text{cte!}} \times \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad R_n - \int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

D'où le résultat voulu.

C.3 Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soient $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$.
On prend $(a_k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ une subdivision régulière de I d'ordre n.

Alors, en posant $T_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$, on a :

$$T_n - \int_a^b f(t)\,dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

DÉMONSTRATION.

LEMME On a l'égalité, pour tout $[r;s] \subset [a;b]$:

$$\int_r^s f(t)\,dt - (s-r)\frac{f(r)+f(s)}{2} = \frac{1}{2}\int_r^s f''(t)(t-r)(t-s)\,dt$$

Démo : cf. après la démo principale

Ainsi,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - T_n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{(b-a)}{n}\,\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right|}_{=\frac{1}{2}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f''(t)(t-a_k)(t-a_{k+1})\,dt}$$

d'après le lemme.

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f''(t)(t-a_k)(t-a_{k+1})\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\|f''\|_\infty^{[a;b]}\int_{a_k}^{a_{k+1}}(t-a_k)(a_{k+1}-t)\,dt$$

$$\leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}}(t-a_k)(a_{k+1}-t)\,dt}_{=\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{6}=\frac{(b-a)^3}{6n^3}}$$

$$\leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{12n^{\cancel{3}2}}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^3}_{=\cancel{n}(b-a)^3} = \frac{\|f''\|_\infty}{12n^2}(b-a)^3$$

d'où $\quad T_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$

Preuve du lemme : Soit donc $I = [r;s] \subset [a;b]$

On a

$$\int_r^s \underset{\downarrow\, f'(t)}{f(t)} \times \overset{t-\frac{r+s}{2}\,\uparrow}{1}\,dt = \left[f(t)\left(t-\frac{r+s}{2}\right)\right] - \int_r^s f'(t)\left(t-\frac{r+s}{2}\right)dt$$

$$= \left((s-r)\,\frac{f(r)+f(s)}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_r^s \underset{\downarrow\, f''(t)}{f'(t)}\,\overset{(t-r)(t-s)\,\uparrow}{(2t-r-s)}\,dt$$

Après cette 2ème IPP, on a

$$\int_r^s f(t)\,dt - (s-r)\frac{f(r)+f(s)}{2} = -\frac{1}{2}\Big[f'(t)(t-r)(t-s)\Big]_{\cancel{r}}^{\cancel{s}} + \frac{1}{2}\int_r^s f''(t)(t-r)(t-s)\,dt$$

D'où

$$\int_r^s f(t)\,dt - (s-r)\frac{f(r)+f(s)}{2} = \frac{1}{2}\int_r^s f''(t)(t-r)(t-s)\,dt$$

C.4 Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$. Soit $a \in I$.
Alors, l'application

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$.

DÉMONSTRATION.

Calculons, pour tout $x \in I$, la différence $\lim\limits_{b \to x} \left| \dfrac{F(b) - F(x)}{b - x} - f(x) \right|$

Soit donc $b \in I$, $b \neq x$, alors

$$\left| \frac{F(b) - F(x)}{b - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{b-x} \left(\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{b-x} \int_x^b f(t)\,dt - f(x) \right| \qquad \text{et } f(x) = \frac{1}{b-x} \int_x^b f(x)\,dt$$

$$= \left| \frac{1}{b-x} \int_x^b f(t) - f(x)\,dt \right|$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, comme f est $\mathcal{C}^0$ en x : $\exists \eta > 0$, $\forall b \in I$, $|b - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(b) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Ainsi, soit donc un tel $\eta > 0$, prenons $b \in I$ tq $|b - x| \leqslant \eta$,

donc $\forall t \in [x ; b]$, $|t - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

s.p.g que $b > x$

AINSI,

$$\left| \frac{F(b) - F(x)}{b - x} - f(x) \right| \leqslant \frac{1}{b-x} \int_x^b |f(t) - f(x)|\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{b-x} \int_x^b \varepsilon\,dt$$

$$\leqslant \varepsilon \cancel{\frac{1}{b-x}} \cancel{\int_x^b dt}$$

d'où $\left| \dfrac{F(b) - F(x)}{b - x} - f(x) \right| \leqslant \varepsilon$

i.e $\underbrace{\lim\limits_{b \to x} \dfrac{F(b) - F(x)}{b - x}}_{= F'(x) \text{ car c'est un taux d'accroissement}} = f(x)$

d'où la dérivabilité et le fait que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$

On remarque qu'il s'agit de la mm limite finie à gauche et à droite, F' est donc $\mathcal{C}^0$ sur I

C.5 Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition

$$\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION.

On a $A \in \overline{GL_n(\mathbb{R})} \iff \exists (A_n) \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $A_n \longrightarrow A$

Montrons ainsi que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles

Posons pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$

Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(A_p) &= \mathrm{Det}\left(A - \tfrac{1}{p} I_n\right)\\ &= (-1)^n \mathrm{Det}\left(\tfrac{1}{p} I_n - A\right)\\ &= (-1)\ \chi_A\left(\tfrac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

et χ_A dispose d'un nombre fini de racines ! A dispose d'un nbre fini de val. propres (dim. finie)

DONC $\exists\, p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0$, $\chi_A\left(\frac{1}{p}\right) \neq 0$

i.e — , $\mathrm{Det}(A_p) \neq 0$

i.e — $A_p \in GL_n(\mathbb{R})$

On construit alors $(M_p)_p$ tq $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_p = \begin{cases} I_n & \text{si } p < p_0 \\ A_p & \text{sinon} \end{cases}$

On a bien $\begin{cases} (M_p)_p \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \\ M_p \longrightarrow A \end{cases}$

D'où le résultat voulu.

C.6 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes

Proposition - Inégalité de Jensen

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ t.q $\sum_i \lambda_i = 1$.
Alors,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

DÉMONSTRATION.

Montrons ce résultat par récurrence sur $n \geq 2$:

□ $\underline{n = 2}$: immédiat par définition d'une fonction convexe

□ $\underline{H_n \Rightarrow H_{n+1}}$: Si $\lambda_{n+1} = 0, 1$: immédiat

Sinon : posons pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$

Dès lors,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) = f\Big((1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big)$$

convexité de f

$$\le (1-\lambda_{n+1})\, f\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

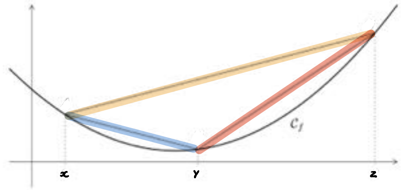
H.R

$$\le (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

$\rightarrow H_{n+1}$ vraie

$\Rightarrow$ Ce qui clôt la récurrence



C.7 Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Proposition - Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On a :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in I^3, x < y < z \Rightarrow \boxed{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}} \leq \boxed{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}} \leq \boxed{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$: Supposons f convexe, alors $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in [0;1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Soient $x,y,z \in I$, supposons $x<y<z$. Posons $t = \frac{y-x}{z-x} \in]0;1[$. Alors $y = x + (y-x) = x + t(z-x) = tz + (1-t)x$

Ainsi, par convexité de f, on a $\boxed{f(y) \leq t f(z) + (1-t) f(x)}$ (A) $= f(x) + t(f(z) - f(x))$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) \leq t(f(z)-f(x)) \quad \text{et} \quad t = \frac{y-x}{z-x} \in]0;1[$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}}$$

L'autre inégalité s'obtient en revenant à (A) :

$$f(y) \leq (1-t)f(x) + t f(z) \Rightarrow -f(y) \geq (t-1)f(x) - t f(z) \quad + f(z) - f(z)$$

$$\Rightarrow f(z) - f(y) \geq f(z) - t f(z) + (t-1) f(x) = (t-1)(f(x) - f(z))$$

$$\Rightarrow f(z) - f(y) \geq (1-t)(f(z) - f(x))$$

$$\Rightarrow f(z) - f(y) \geq \frac{z-y}{z-x}(f(z) - f(x))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}}$$

$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons l'inégalité des pentes vérifiée

Soient $x,z \in I$, $x<z$ et $t \in [0;1]$, posons alors $y = tx + (1-t)z$

$y < zt + (1-t)z = z$

$y > tx + (1-t)x = x$

Ainsi, $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

i.e $$\frac{f(tx+(1-t)z) - f(x)}{tx + (1-t)z - x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z) - f(tx+(1-t)z)}{\cancel{z} - tx - \cancel{(1-t)}z}$$

i.e $$\frac{f(tx+(1-t)z) - f(x)}{(1-t)(z-x)} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z) - f(tx+(1-t)z)}{t(z-x)}$$

En particulier, $$\frac{f(tx+(1-t)z)}{(1-t)(z-x)} - \cancel{\frac{f(x)}{(1-t)(z-x)}} + \cancel{\frac{f(x)}{(1-t)(z-x)}} \leq \frac{f(z)}{t(z-x)} - \frac{f(tx+(1-t)z)}{t(z-x)} + \frac{f(x)}{(1-t)(z-x)}$$

d'où, en multipliant par $z-x$: $$f(tx+(1-t)z)\Big(\underbrace{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t}}_{=\frac{1}{(1-t)t}}\Big) \leq \frac{f(z)}{t} + \frac{f(x)}{1-t} = ((1-t)f(z) + t f(x))\frac{1}{(1-t)t}$$

d'où $\boxed{f(tx + (1-t)z) \leq t f(x) + (1-t) f(z)}$

D'où la convexité de f.

2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 1 Montrer chacune des inégalités suivantes sur l'intervalle demandé :

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$
2. Sur $\mathbb{R}$: $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Corrigé :

1 ∘ $\sin(x) \leq x$ La fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $f'(x) = \cos(x) - 1$) et $f(0) = 0$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \leq 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \sin(x) \leq x$

∘ $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

D'après l'Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| \sin(x) - \cancel{\frac{\sin(0)}{0!}} - \frac{\cos(0)}{1!}x + \cancel{\frac{\sin(0)}{2!}}x^2 \right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$$

or $x \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0$

$\Rightarrow |x|^3 = x^3$

d'où

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6} \quad \text{donc} \quad \sin(x) \geq \frac{x^3}{6} - x$$

2 De même, d'après l'ITL, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \cos(x) - \frac{\cos(0)}{0!} \right| \leq \frac{x^2}{2}$$

d'où $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Exercice 2

1. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$. Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Procéder de même avec $u_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]$, puis $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\right]$

Corrigé :

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (\frac{k}{n})^2}$ ⚠ Somme de Riemann

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\mathrm{Arctan}(u)]_0^1$$

D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

∘ De même, on a affaire à une somme de Riemann, d'où

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \underset{u = \frac{\pi}{2}x}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) du$$

$$= \frac{2}{\pi} [\sin(u)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{\pi}$

∘ On a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{n}$$

De mm

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - 0 = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{3}$

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
On suppose P non constant et on note a une racine complexe de P.

1. Montrer que $a = 0$ ou $|a| = 1$.
2. Montrer que $a = 1$ ou $|a-1| = 1$.
3. Déterminer alors tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la propriété énoncée plus haut.

Corrigé :

1 Soit $a \in \mathbb{C}$, alors $a \in Rac(P) \Leftrightarrow a^2 \in Rac(P)$

$\Leftrightarrow a^4 \in Rac(P)$

$(\Rightarrow) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, a^{2^k} \in Rac(P)$

$\Rightarrow a = 0$ ou $|a| = 1$ (sinon : infinité de racines !!)

En effet, pour $a \in Rac(P)$, on prend $k, k' \in \mathbb{N}$ tq $a^{2^k} = a^{2^{k'}}$ (on veut montrer que $a = 0$ ou $|a| = 1$ si il n'y a pas infinité de racines)

i.e a est racine de $X^{2^k}\left(X^{2^{k'}-2^k} - 1\right)$

$\Downarrow$ $a = 0$ ou $\Downarrow$ $a \in \mathbb{U}_{2^{k'}-2^k} \Rightarrow |a| = 1$

D'où $a = 0$ ou $|a| = 1$

2 Soit $a \in Rac(P) \Rightarrow P(a) = 0$

prenons $X = a-1$, alors $P((a-1)^2) = P(a-1)P(a) \Rightarrow (a-1)^2 \in Rac(P)$

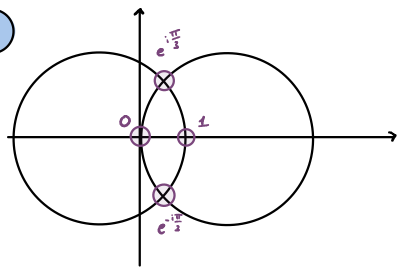
...

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, (a-1)^{2^k} \in Rac(P)$

or 1 $\Rightarrow (a-1)^2 = 0$ ou $|a-1|^2 = 1$

$\Rightarrow a = 1$ ou $|a-1| = 1$

3



Procédons à une synthèse, en notant $\rho = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Si P est sol. alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ et $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tq

$$P(X) = \lambda X^a (X-1)^b (X-\rho)^c (X-\bar{\rho})^d$$

$$\Rightarrow P(X^2) = \lambda X^{2a} (X^2-1)^b (X^2-\rho)^c (X^2-\bar{\rho})^d$$

$$\Rightarrow P(X)P(X+1) = \lambda^2 X^a (X-1)^b (X-\rho)^c (X-\bar{\rho})^d (X+1)^a X^b (X-(\rho-1))^c (X-(\bar{\rho}-1))^d$$

Ainsi, $P(X^2) = P(X)P(X+1) \Rightarrow \lambda^2 = \lambda \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\lambda = 1}$

$\Rightarrow 2a = a + b \Rightarrow \boxed{a = b}$

et $(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}) = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X + e^{i\frac{\pi}{6}})$

$= (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{\frac{7i\pi}{6}})$

$\rho - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$

$= j$ et j n'est pas racine de P $\Rightarrow \boxed{c = d = 0}$

$\Rightarrow P(X) = X^a (X-1)^a$

avec $a \in \mathbb{R}^+$

↳ vérifier qu'ils conviennent

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?
3. Montrer le résultat voulu.

Corrigé :

1 Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ et dérivable sur $]a;b[$, tq $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$

2 $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ elle est d'ordre $k-1$

3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$, $\exists x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$

tq $P = \alpha (X - x_1)^{m_1} \dots (X - x_k)^{m_k}$ avec $\sum_{1 \leq i \leq k} m_i = n$

D'une part, on a toujours les $(b_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ racines de P' obtenues à l'aide du th. de Rolle

D'autre part, $\forall i \in [\![1;k]\!]$, x_i est racine de mult $m_i - 1$ de P'

En additionnant les mult, on a $k-1 + \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) = \cancel{k} - \cancel{k} - 1 + n$

$= n - 1$

On a donc bien trouvé $n-1$ racines mais pas nécessairement distinctes

D'où P' scindé

Exercice 5

1. Calculer le coefficient de x^n dans la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $f : x \mapsto x^n(1-x)^n$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
3. Démontrer le même résultat à l'aide d'un dénombrement.

Corrigé :

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^n (1-x)^n$

$= x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{2n-k}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} x^{n-k}$

donc le coeff recherché est obtenu pour $k=0$,

i.e $c = \binom{n}{0} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$

d'où $\boxed{c = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}}$

② Notons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (1-x)^n$

Ainsi, $f = g \times h$ et d'après la formule de Leibniz : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k (1-x)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k$

$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!}}_{=\binom{n}{k}} (-1)^k x^k (1-x)^{n-k}$

$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k x^k (1-x)^{n-k}$

$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k} x^{n-k-j}$

$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-j}$

et le coeff devant x^n est $c' = n! (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

donc $c = c' \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \binom{2n}{n}$

③ Soient 2 ensembles disjoints A, B tq $\#A = \#B = n$

$\leadsto$ Cb de partitions distinctes de $A \sqcup B$ à n elts pouvons-nous former ?

$\Rightarrow$ Une telle partition est entièrement déterminée par :

le nombre d'elts de A qu'on a choisi, notons le $k \in [\![0;n]\!]$

ainsi on prend $n-k$ elts dans B.

Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ façons de le faire,

et comme les situations sont totalement ind., par principe multiplicatif, on a

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

$\Rightarrow$ Il y en a $\binom{2n}{n}$

$\Rightarrow$ D'où $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Exercice 6 On pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

1. Montrer que T_n est un polynôme.
2. Trouver une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.
3. Déterminer les extrema de T_n.

Corrigé :

1. Posons $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) \\
&= \operatorname{Re}((e^{i\theta})^n) \\
&= \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k}\right) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} (\sin^2\theta)^{\frac{k}{2}} (\cos\theta)^{n-k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} (1-\cos^2\theta)(\cos\theta)^{n-k}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ On a donc un polynôme en $\cos\theta = \cos(\operatorname{Arccos}(x))$

$= x$ si $x \in [-1;1]$

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+2)\theta) = \cos((n+1)\theta)\cos\theta - \sin((n+1)\theta)\sin\theta$

$\cos(n\theta) =$ ——— $+$ ———

$$\Rightarrow \cos((n+2)\theta) + \underbrace{\cos(n\theta)}_{=T_n(x)} = 2\underbrace{\cos((n+1)\theta)}_{=T_{n+1}(x)}\underbrace{\cos\theta}_{=x} \quad \text{si } x \in [-1;1]$$

D'où $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) + T_n(x)$

3. On a $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$ avec $x \in [-1;1] \Rightarrow \operatorname{Arccos}(x) \in [0;\pi]$

$\Rightarrow n\operatorname{Arccos}(x) \in [0; n\pi]$

Ainsi, $T_n(x) = 1$ si $n\operatorname{Arccos}(x) = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \operatorname{Arccos}(x) = \dfrac{2k\pi}{n}$ $(—)$ et avec $0 \leq \dfrac{2k\cancel{\pi}}{n} \leq \cancel{\pi}$

i.e $0 \leq k \leq \dfrac{n}{2}$

donc $T_n(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi \mid k \in [\![0; \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]\}$

Exercice 7 Soient $a_1,\dots,a_n$ et $x_1,\dots,x_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrer que $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \le \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.
2. Montrer que $\frac{x_1}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_1} \ge n$

Corrigé :

① On a, d'après l'inégalité de Jensen appliquée au $\ln$ (version concave donc) :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(a_i)}{n} = \ln\left(\left(\prod_i a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Ainsi, par croissance de l'exp, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$

→ OK

② On pose $a_1 = \frac{x_1}{x_2} > 0$

$\vdots$

$a_n = \frac{x_n}{x_1} > 0$ donc d'après le résultat précédent : $\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\dots+\frac{x_n}{x_1}\right) \geq 1$

i.e $\frac{x_1}{x_2}+\dots+\frac{x_n}{x_1} \geq n$ → OK

Exercice 8 Soit $f : x \mapsto (x^2-1)^n$. Montrer que $f^{(n)}$ admet n zéros distincts deux à deux entre -1 et 1.

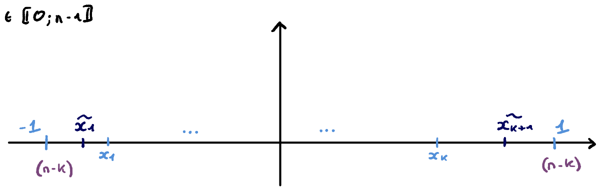
Corrigé : Considérons le polynôme $P = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$

Montrons par récurrence le résultat

- Soit $k \in [\![0;n]\!]$, notons H_k : " $P^{(k)}$ admet k zéros distincts 2 à 2, notés $(x_i) \in]-1;1[$ et admet -1 et 1 comme racines de mult. $n-k$ "

- $\underline{k=0}$: $P^{(0)} = P$ admet 0 zéros $\in]-1;1[$ ✓ ; admet -1 et 1 comme racines de mult $n = n-0$

- $\underline{H_k \Rightarrow H_{k+1}}$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$



par H.R, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $P^{(k)} = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-x_1)\cdots(X-x_k)$

or P est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1;1]$ et $P(-1) = P(x_1) = 0$ ($n-k \neq 0$) $\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \tilde{x}_1 \in]-1;x_1[$ tq $P^{(k+1)}(\tilde{x}_1) = 0$

...

$P(x_k) = P(1) = 0 \Rightarrow \exists \tilde{x}_{k+1} \in]x_k;1[$ tq $P^{(k+1)}(\tilde{x}_{k+1}) = 0$

on a donc bien $k+1$ zéros pour $P^{(k)}$

Enfin, comme -1 et 1 sont de mult. $n-k$ pour $P^{(k)}$, elles seront de mult. $n-k-1 = n-(k+1)$ pour $P^{(k+1)}$

$\Rightarrow H_{k+1}$ vraie

Finalement, ce résultat, par principe de récurrence est vrai pour $k=n$: d'où le résultat voulu.

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $\cos(x) = nx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, on la notera x_n.
2. Déterminer la monotonie et la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en $1/n$ de x_n.
4. La série $\sum_{n\geq 1} \ln(\cos(x_n))$ converge-t-elle ?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\prod_{i=1}^{n} x_i \sim \frac{c}{n!}$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé :

1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \longmapsto \cos(x) - nx$

Alors, $\underbrace{f_n \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+}_{(A)}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = -\sin(x) - n$

≤ 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ car $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ f_n stmt décroissante (B)

or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty \\ f_n(0) = 1 \\ (A) \wedge (B) \end{cases}$ $\overset{\text{cor. T.V.I}}{\Rightarrow}$ $\exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\cos(x) = nx$

$\longrightarrow$ OK

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x_{n+1}) = \cos(x_{n+1}) - nx_{n+1}$

$= (n+1)x_{n+1} - nx_{n+1}$

$= x_{n+1}$

> 0

et $(A) \wedge (B) \wedge (f_n(x_n) = 0)$ $\Rightarrow$ $x_{n+1} < x_n$ d'où $(x_n)_n$ stmt décroissante

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\cos(x_n)}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3 On a, comme $x_n \longrightarrow 0$, $\cos(x_n) = 1 - \frac{x_n^2}{2} + O(x_n^4)$

or $\cos(x_n) = nx_n$ $\Rightarrow$ $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^2}{2n} + \underbrace{O\left(\frac{x_n^4}{n}\right)}_{O\left(\frac{1}{n^5}\right)}$ car $x_n \leq \frac{1}{n}$

et donc, en réinjectant ce DL : $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}x_n^2 + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$

D'où $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

4 On a $\ln(\cos(x_n)) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$

$= \underbrace{-\frac{1}{2n^2}}_{cv} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{cv}$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \ln(\cos(x_n))$ CV

5 On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k\, x_k)$

$= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\, x_k\right)$

$= \ln\left(n! \prod_{k=1}^{n} x_k\right)$

or $\sum_{k=1}^{n} \ln(\cos(x_k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k x_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$ d'après 4

$\Rightarrow$ $\ln\left(n! \prod_{k=1}^{n} x_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

exp $\mathcal{C}^0$

$n! \prod_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\alpha$ $\Rightarrow$ $\prod_{k=1}^{n} x_k \sim \frac{e^\alpha}{n!}$

donc en prenant $c = \exp(\alpha)$, on a $\prod_{n=1}^{n} x_k \sim \frac{c}{n!}$

Exercice 10 On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) f(x)$. Donner son degré.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a toutes ses racines réelles.

Corrigé :

Exercice 11 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne avec $k\in]0;1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, x\neq y\Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$$

Corrigé : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction k-lip avec $k\in]0;1[$
↳ fonction "contractante"

1 **Existence** Soit $x_0\in\mathbb{R}$, on pose $u_0=x_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}-u_n| = |f(u_n)-f(u_{n-1})| \leqslant k\,|u_n-u_{n-1}|$$

$$\overset{\text{rec.}}{\Longrightarrow} \quad |u_{n+1}-u_n|\leqslant k^n|u_1-u_0|$$

or, comme $\sum_n k^n$ CV, on a $\sum_n u_{n+1}-u_n$ CV ABS i.e $\sum_n u_{n+1}-u_n$ CV

$\Rightarrow (u_n)$ CV

$\Rightarrow \exists!\alpha\in\mathbb{R}$ tq $u_n\longrightarrow\alpha$
↖ unicité de la lim.

Enfin, f est $\mathcal{C}^0$ (car lip) donc $\underbrace{u_{n+1}}_{\to\alpha}=f(\underbrace{u_n}_{\to\alpha}) \Rightarrow \alpha=f(\alpha)$

D'où l'existence.

Unicité Soient $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ deux points fixes de f

Ainsi, on a

$$|\underbrace{f(\alpha_1)}_{=\alpha_1}-\underbrace{f(\alpha_2)}_{=\alpha_2}|\leqslant k\,|\alpha_1-\alpha_2|$$

or $k\in]0;1[$ $\Rightarrow$ $\alpha_1=\alpha_2$

D'où l'unicité

2 Considérons $f: x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$

Montrons qu'elle vérifie bien la prop. énoncée :

Soient $x\neq y\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} = \frac{|x-y|\times|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$$

et $|x+y|\leqslant|x|+|y| = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$
$< \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$

Ainsi, $|f(x)-f(y)| < |x-y| \times \cancel{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}}$ d'où, pour $x\neq y$, $|f(x)-f(y)|<|x-y|$

Enfin, $x=f(x) \Leftrightarrow x=\sqrt{1+x^2}$
$\Leftrightarrow x\geqslant 0$ et $x^2+1=x^2$ ABS

Ce résultat est donc faux si la fonction ne respecte que cette propriété.

Exercice 12 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Corrigé :

Analyse Si P convient,

alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| = 1$, $|P(z)| = 1$ DONC $\forall z \in \mathbb{U}$, $|P(z)|^2 = 1$ i.e $P(z)\overline{P(z)} = 1$ (A)

Notons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (avec $a_d \neq 0$, car $P \neq 0$)

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{U}$, on a $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc $\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} z^{-k}$

et donc $\forall z \in \mathbb{U}$, $z^d \overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} z^{d-k}$

(A) $\Rightarrow$ $z^d P(z)\overline{P(z)} = z^d$

i.e si $d \neq 0$ on a $\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} z^{d-k}\right)}_{:= G(z)} = z^d$

AINSI, $\forall z \in \mathbb{U}$, $G(z) = z^d$ $\Rightarrow$ les coeffs. de G sont égaux à 0 sauf celui de $d°d$ $= 1$

OR, le coeff de z^{2d} ds $G(z)$ est $\underset{\neq 0}{a_d}\overline{a_0} = 0$ $\Rightarrow$ $a_0 = 0$

le coeff de z^{2d-1} ds $G(z)$ est $\cancel{a_{d-1}\underset{=0}{\overline{a_0}}} + \underset{\neq 0}{a_d}\overline{a_1} = 0$ $\Rightarrow$ $a_1 = 0$

...

$\forall k \in [\![0 ; d-1]\!]$, $a_k = 0$ $\Rightarrow$ $P(X) = a_d X^d$ avec $|a_d| = 1$

si $d = 0$: Alors $P = a_d$ avec $|a_d| = 1$

SYNTHÈSE Soit $d \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{U}$, $P = aX^d$ convient ✓

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{S} = \{ aX^d \mid a \in \mathbb{U}, d \in \mathbb{N} \}}$

Exercice 13 On pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

1. Montrer que T_n est un polynôme.
2. Trouver une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.
3. Déterminer les extrema de T_n.
4. Montrer que pour tout polynôme P de même degré et de même coefficient dominant que T_n, on a $\|P\| \geq \|T_n\|$.

Corrigé :

1 Posons $\Theta = \mathrm{Arccos}(x)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(n\Theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\Theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\Theta}\right)^n\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\cos\Theta + i\sin\Theta\right)^n\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} i^k (\sin\Theta)^k (\cos\Theta)^{n-k}\right) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{\frac{k}{2}}\left(\sin^2\Theta\right)^{\frac{k}{2}}(\cos\Theta)^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{\frac{k}{2}}\left(1-\cos^2\Theta\right)(\cos\Theta)^{n-k}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ On a donc un polynôme en $\cos\Theta = \cos(\mathrm{Arccos}(x))$
$= x$ si $x \in [-1;1]$

2 On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+2)\Theta) = \cos((n+1)\Theta)\cos\Theta - \sin((n+1)\Theta)\sin\Theta$
$\cos(n\Theta) = \text{———} + \text{———}$

$$\Rightarrow \cos((n+2)\Theta) + \underbrace{\cos(n\Theta)}_{=T_n(x)} = 2\underbrace{\cos((n+1)\Theta)}_{=T_{n+1}(x)}\underbrace{\cos\Theta}_{=x} \quad \text{si } x \in [-1;1]$$

D'où $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) + T_n(x)$

3 On a $T_n(x) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}(x))$ avec $x \in [-1;1] \Rightarrow \mathrm{Arccos}(x) \in [0;\pi]$
$\Rightarrow n\,\mathrm{Arccos}(x) \in [0;n\pi]$

Ainsi, $T_n(x) = 1$ si $n\,\mathrm{Arccos}(x) = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow \mathrm{Arccos}(x) = \dfrac{2k\pi}{n}$ $(-)$ et avec $0 \leqslant \dfrac{2k\cancel{\pi}}{n} \leqslant \cancel{\pi}$

i.e $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}$

donc $T_n(x) = 1 \iff x \in \{2k\pi \mid k \in [\![0;\lfloor\frac{n}{2}\rfloor]\!]\}$

4 On admet que $d°(T_n) = n$ & $cd(T_n) = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$

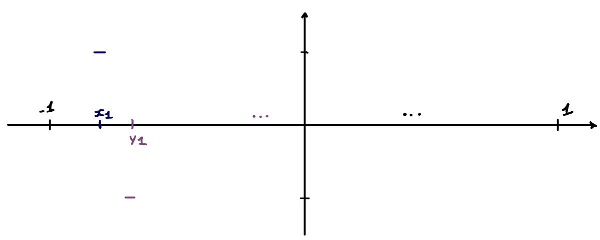
Ainsi, soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tq $d°P = d°T_n$ & $cd(P) = cd(P)$

<u>Mq $\|P\|_\infty^{[-1;1]} \geq \|T_n\|_\infty^{[-1;1]}$</u> : supposons par l'absurde que $\|P\| < \|T_n\| = 1$
i.e $\forall x \in [-1;1]$, $-1 < P(x) < 1$ (A)

Notons $(x_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ les réels tq $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $T_n(x_k) = 1$
(y_k) — ——— $T_n(y_k) = -1$

(A) $\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $|P(x_k)| < 1$ et $T_n(x_k) = 1$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $(T_n - P)(x_k) > 0$

(A) $\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $|P(y_k)| < 1$ et $T_n(y_k) = 1$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $(T_n - P)(y_k) < 0$



or $T_n - P$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1;1]$ $\overset{\text{T.V.I}}{\Rightarrow}$ $T_n - P$ s'annule au moins n fois

OR $d°T_n - P = n-1$ car $cd\,T_n = cd\,P$ $\Rightarrow$ <u>$T_n = P$</u> $\Rightarrow \|T_n\| = \|P\|$ <u>ABS</u>

D'où le résultat voulu

Exercice 14 On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n})\frac{k}{n^2}$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $|\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Corrigé :

1 D'après l'ITL, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left| \sin(x) - \frac{\sin(0)}{0!} - \frac{\cos(0)}{1!}x \right| \leq \frac{|x|^2}{2!}$

i.e $|\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - v_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right) \right|$

$$\overset{\text{I.T}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sin\left(\frac{k}{n}\right)}_{\geq 0} \left| \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\leq \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$

3 Ainsi, on peut dès lors dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$

OR, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=\cancel{1}0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{k}{n}$

⚠ C'est une somme de Riemann : donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 u\sin(u)\,du = [-u\cos(u)]_0^1 + \int_0^1 \cos(u)\,du$

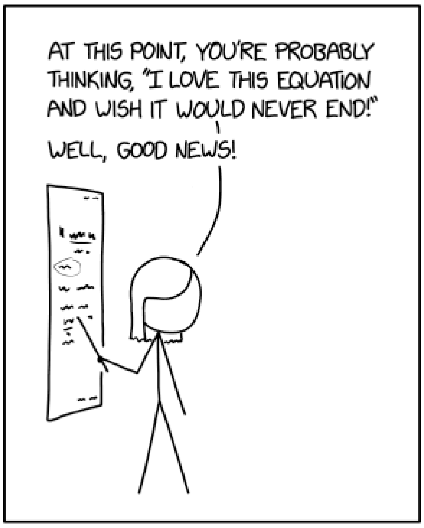
$= -\cos(1) + \sin(1)$

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sin(1) - \cos(1) \simeq 0.3$

Exercice 15 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est de la forme $\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}$ où P_n est un polynôme de degré n.
3. Montrer que $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - (2n+1)XP_n(X)$.
4. Montrer que $P_{n+1}(X) + (2n+1)XP_n(X) + n^2(1+X^2)P_{n-1}(X) = 0$.
5. Montrer que $P_n'(X) = -n^2 P_{n-1}(X)$.
6. Calculer $P_n(0)$ pour tout entier n.

Corrigé :



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.