Notion de norme

Vallaeys Pascal

15 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP :

Méthodes standard des exercices :

- Justifier qu'une forme est une norme.
- Montrer que deux normes sont ou ne sont pas équivalentes.
- Connaître les définitions de topologie associées à une norme.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : (Mines MP 2022)
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$: $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ et :
$N_1(f) = \|f\|_1 + \ \|f'\|_1$ et $N_2(f) = |f(0)| + \ \|f'\|_1$.
1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 : (Mines télécom MP 2022)
On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 : (Mines MP 2021)
Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme et $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) | f(0) = 0\}$. On considère n et N définies sur E par : $\forall f \in E,\ n(f) = ||f + f'||_\infty$ et $N(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$
1. Montrer que n et N sont des normes.
2. Montrer qu'elles sont équivalentes. On pourra remarquer que $f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et que pour $g(t) = \mathrm{e}^t f(t)$, on a $f'(t) = \mathrm{e}^{-t}(g'(t) - g(t))$.

Exercice 4 : (IMT MP 2019)
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in E$. On note $N(f) = \sup\left\{\left|\int\limits_0^1 f(t)\,t^n dt\right| ; n \in \mathbb{N}\right\}$.
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 5 :
a) Démontrer la deuxième inégalité triangulaire pour une norme dans un espace vectoriel normé.
b) En déduire que $\|.\| : \begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} \to \|\overrightarrow{x}\| \end{array}$ est 1-Lischitzienne.

Exercice 6 :
a) Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toutes matrices A et B de E, on ait $N(AB) = N(A).N(B)$?
b) Même question avec $N(AB) \leq N(A).N(B)$

Exercice 7 :
a) Montrer que deux normes sont égales si et seulement si elles possèdent la même boule unité.

b) Par ailleurs, quelle influence a l'équivalence de deux normes pour leurs boules de centre O ?

Exercice 8 :
Sur E=$C^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.
a) Montrer que l'on obtient ainsi une norme.
b) Est-elle équivalente à la norme uniforme $\|.\|_\infty$?

Exercice 9 :
Soit $(A_k) \in (M_n(\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On note pour tout entier naturel non nul p : $B_p = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.
a) Montrer que la suite (B_p) admet une valeur d'adhérence noté B.
b) Montrer que BA=B puis $B^2 = B$.
c) Montrer que $Ker(B) = \mathrm{Im}(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}(B) = Ker(A - I_n)$.
d) En déduire que la suite (B_p) converge.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 10 : (CCINP MP 2021)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$ et $V_n \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\forall n \in \mathbb{N},\quad V_n = \sum_{k=0}^n u^k$.
1. a) Soit $a \in E$, montrer que $\dfrac{1}{n+1}\|u^n(a) - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Exprimer $V_n \circ (u - \mathrm{Id}_E)$ en fonction de u^{n+1}.
c) Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
2. Si E est de dimension finie, Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
3. (Le candidat n'était plus sûr de l'énoncé, reconstruction proposée par le modérateur). Dans le cas général, on suppose $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ supplémentaires ; soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.
Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs $V_n(x)$.

Exercice 11 : (IMT MP 2019)
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $e_\lambda : x \to e^{\lambda x}$. On note F le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$. Montrer qu'en posant, pour $f \in F$, $N(F) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$, on définit une norme sur F.

Exercice 12 :
Soit n un entier naturel non nul.
a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} |P(k)| \leq \alpha. \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - X^2}. |P(X)| .dX$.
b) Si r est un entier naturel, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum\limits_{k=0}^{r} |P(k)| \leq \alpha. \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - X^2}. |P(X)| .dX$.

Exercice 13 :
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0 < a_1 < ... < a_n$ des réels. Soit $(P_k) \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$.
Montrer que $\|P_k\|_\infty^{[0,1]} \to 0$ si et seulement si $\forall i \in [0,n], P_k(a_i) \to 0$.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 14 :
Soit E un K-espace vectoriel normé. On dit d'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qu'elle est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$tq $\forall n, p \geq n_0, |u_n - u_p| \leq \varepsilon$.
a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
b) Montrer que si $E = K = \mathbb{Q}$, il existe des suites de Cauchy non convergentes.
c) Montrer que si $E = K = \mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.
d) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.
e) Que dire si l'application est juste supposée continue ?

Exercice 15 : (Centrale MP)

Pour tout polynôme P de $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(0)\right|$ et $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(n)\right|$.

a) Montrer que N_1 et N sont des normes sur E.
b) Sont-elles équivalentes ?
c) Trouver une norme de E telle que la suite $\left(X^k\right)$ converge vers 0.
d) Soit P fixé dans E. Trouver une norme sur E telle que la suite $\left(X^k\right)$ converge vers P.

Exercice 16 : (TPE MP 2018)

Soit $(P_n) \in (\mathbb{R}_d[X])^{\mathbb{N}}$ telle que (P_n) converge simplement vers P.
En utilisant les polynômes $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{0 \le i \le d \\ i \neq k}} \frac{X-i}{k-i}$, montrer que $P \in \mathbb{R}_d[X]$. Montrer que la suite (P_n) converge uniformément vers P sur tout segment.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 17 : (ENS MPi 2022 ???)

On considère $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $\|P\|_0 = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$ (on ne redémontrera pas qu'il s'agit d'une norme sur E). On note $\|P\| = \|P\|_0 + \|P'\|_0 + \cdots + \|P^{(n)}\|_0$. Soit $S = \{P \in E \mid \deg P = n$ et P a n racines distinctes$\}$.
1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Montrer que S est un ouvert de E.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve On montrera le lemme suivant : Lemme. Soit $P \in S$. On note α_1, ..., α_n ses racines distinctes. Pour i entier compris entre 1 et n, soit $D_i = D(\alpha_i, r)$ un disque centré en α_i de telle sorte que $\forall i \neq j$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ et $r > 0$. Alors pour tout i, il existe $a \in]0,1[$, $a \leqslant r$, $\varepsilon > 0$, $C > 0$ tels que : $\forall x, y \in D_i' = D(\alpha_i, a)$, $\forall Q \in E$, $\|Q-P\| < \varepsilon \Rightarrow |Q(x)-Q(y)| \geqslant C|x-y|$

Pour cela, on considérera l'application $\lambda : E \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que $\lambda(Q, x, y) = \left|\frac{Q(x)-Q(y)}{x-y}\right|$.

Commentaires divers :

Je ne suis pas parvenu à la fin de l'exercice, seulement à la fin de la démonstration du lemme.

Exercice 18 :

On pose $F = \left\{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\right\}$.
a) Justifier rapidement le fait que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Montrer que $N_1(f) = \underset{[0,1]}{Sup}|f| + \underset{[0,1]}{Sup}|f''|$ et $N_2(f) = \underset{[0,1]}{Sup}|f + f''|$ sont des normes sur F.
c) Sont-elles équivalentes ?
d) Les comparer à $\|.\|_\infty$.
e) Procéder de même avec $N_3(f) = \|f + f' + f''\|_\infty$.

Exercice 19 :

Soient p>1 et q>1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
a) Montrer que si x et y sont des réels positifs, $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k . y_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
c) En déduire que $\|X\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20 :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\underset{n\to+\infty}{Lim} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un intervalle.

Donner un exemple non trivial d'une telle suite.