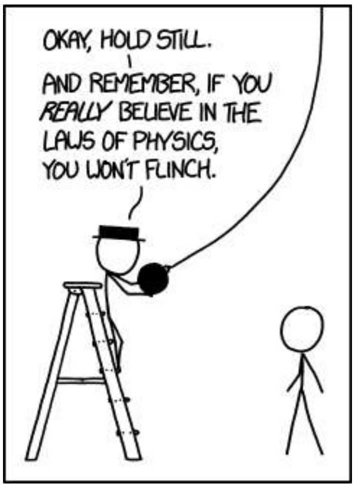
MPI* Physique

Exos Vacances



Olivier Caffier

9.1 Énergies potentielles

> Utilisez toujours le gradient pour ces calculs d'énergie potentielle.

1. Retrouvez l'énergie potentielle associée à la force de rappel élastique.
2. Une force inconnue possède une énergie potentielle, en cylindriques :

$$E_p = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \tag{9.1}$$

   Déterminez sa résultante et donnez son interprétation physique.

Corrigé

(1) On a $\vec{F_{el}} = -K(\ell - \ell_0)\vec{u}$

⇝ on suppose sans perte de généralité que le mobile est astreint à se déplacer selon l'axe Ox

ainsi $\vec{F_{el}} = -K(x - \ell_0)\vec{u_x}$ en prenant $\ell = x$

Enfin, $\vec{F_{el}} = -\vec{\text{grad}}\, E_p \Rightarrow E_p'(x) = K(x - \ell_0)$

donc $E_p(x) = \frac{1}{2}K(x-\ell_0)^2 + \underbrace{\text{cte}}_{=0}$

$$\text{d'où} \quad E_p = \frac{1}{2}K(\ell - \ell_0)^2$$

(2) On a $E_p(r) = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

et $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, E_p$

donc, $\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}(r)\,\vec{u_r} - \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial E_p}{\partial \theta}(r)}_{=0}\,\vec{u_\theta} - \underbrace{\frac{\partial E_p}{\partial z}(r)}_{=0}\,\vec{u_z}$

$$\text{d'où} \quad \vec{F} = m\omega^2 r\,\vec{u_r}$$

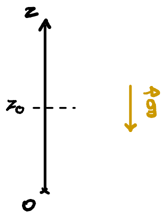
9.2 Lancer de pièce

Vous lancez une pièce en l'air à l'instant $t = 0$. La verticale est repérée par l'axe Oz orienté vers le haut.
Conditions initiales : la pièce est lancée depuis une altitude de $z_0 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ avec une vitesse $v_0 = 10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Donnée : $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1. À l'aide du TEM, déterminez l'altitude maximale atteinte par la pièce.
2. À l'aide du PFD, calculez la date à laquelle l'altitude maximale est atteinte, puis la date à laquelle la pièce touche le sol.

Corrigé

1



Aucune force non-conservative ne s'applique sur la pièce => $\underline{TEM}$

Ainsi, on a $\Delta E_m = 0$

i.e $\frac{1}{2} \cancel{m} \underbrace{v_{alt,max}^2}_{=0} + \cancel{m} g z_{max} - \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 - \cancel{m} g z_0 = 0$

d'où $z_{max} = z_0 + \dfrac{v_0^2}{2g}$

2 Le mouvement de la pièce est uniquement selon z

$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u_z}$

Donc, d'après la 2ème loi de Newton projetée sur l'axe Oz, on a :

$\cancel{m}\ddot{z} = -\cancel{m}g \Rightarrow \ddot{z} = -g$

$\Rightarrow \dot{z}(t) = -gt + cte$ et $\dot{z}(t=0) = v_0$

d'où $\dot{z}(t) = -gt + v_0$

$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + cte$ et $z(t=0) = z_0$

d'où $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$

Enfin, comme $z(t)$ est une fonction parabolique, elle n'admet qu'un minimum.

On peut dès lors dire que alt. max atteinte en $t_{max} \Leftrightarrow \dot{z}(t_{max}) = 0$

$\Leftrightarrow t_{max} = \dfrac{v_0}{g}$

De plus, le sol est atteint en t_{sol} avec $z(t_{sol}) = 0$

or $z(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 = 0$

$\Leftrightarrow t_{sol} = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gz_0}}{2\times(-\frac{1}{2}g)}$ car $\Delta > 0$

d'où $t_{sol} = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gz_0}}{g}$

$\approx 2{,}14$ secondes

9.3 Système à deux ressorts

Un point matériel M de masse m est assujetti à rester sur un rail horizontal et attaché à deux ressorts de même longueur à vide l_0 mais de raideurs différentes k_1 et k_2, fixés l'un en O et l'autre en A. La distance OA est de $3l_0$.

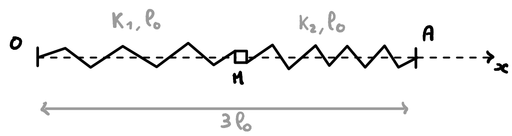
Le point matériel est repéré par son abscisse $x = \overline{OM}$ sur le rail et glisse sans frottement.

1. Calculez la position d'équilibre $x_{éq}$ de M.
2. Déterminez l'équation différentielle gouvernant $x(t)$ par un raisonnement énergétique.
3. Résolvez-la sachant qu'initialement la masse est lâchée de l'abscisse l_0 sans vitesse initiale.

Remarque : quel est l'intérêt d'une méthode énergétique dans la première question ?

Corrigé

① BDF
- Poids et réaction de support → se compensent !!
- $\vec{F_{el_1}} = -k_1(l_1 - l_0)\vec{u_x} = -k_1(x - l_0)\vec{u_x}$
- $\vec{F_{el_2}} = k_2(l_2 - l_0)\vec{u_x} = k_2(3l_0 - x - l_0)\vec{u_x} = k_2(2l_0 - x)\vec{u_x}$



Donc, par principe d'inertie, on a à l'équilibre (en projetant sur $\vec{u_x}$) :

$$-k_1(x - l_0) + k_2(2l_0 - x_{eq}) = 0$$

i.e $\quad x_{eq}(k_1 + k_2) = l_0(2k_2 + k_1)$

d'où $\quad x_{eq} = l_0 \dfrac{2k_2 + k_1}{k_1 + k_2}$

② On a $E_p = E_{pel_1} + E_{pel_2}$ avec $E_{pel_1} = \frac{1}{2}k_1(x - l_0)^2$

$E_{pel_2} = -\frac{1}{2}k_2(2l_0 - x)^2$

et $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Ainsi, d'après le TEM, sans forces conservatives appliquées à M, on a :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{i.e} \quad m\dot{x}\ddot{x} + k_1\dot{x}(x - l_0) - k_2\dot{x}(2l_0 - x) = 0$$

on va supposer que $\dot{x} \neq 0$, d'où :

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{l_0}{m}(k_1 + 2k_2) = \frac{k_1 + k_2}{m}x_{eq}$$

En posant $X = x - x_{eq}$, on a :

$$\ddot{X} + \frac{k_1 + k_2}{m}X = 0$$

↳ on reviendra à x une fois la résolution terminée !

③ On a affaire à un oscillateur harmonique, donc $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tq

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$$

or $X(t=0) = x(t=0) - x_{eq}$
$= \ell_0 - x_{eq}$

$\dot{X}(t=0) = \dot{x}(t=0)$
$= 0$

d'où $\begin{cases} A = \ell_0 - x_{eq} \\ B = 0 \end{cases}$

Finalement, on a $X(t) = (\ell_0 - x_{eq})\cos(\omega t)$

d'où $x(t) = (\ell_0 - x_{eq})\cos(\omega t) + x_{eq}$

avec $\omega = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$

9.4 Un jeu d'enfant

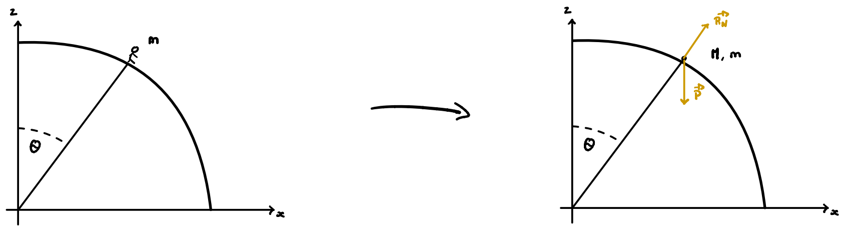
Un enfant esquimau joue sur le toit de son igloo. L'enfant se laisse glisser sans frottement depuis le sommet S de l'igloo (assimilé à une demi-sphère de rayon R et de centre O). La position de l'enfant est celle d'un point M de masse m, repérée par l'angle $\theta = (Oz, OM)$, où Oz est la verticale ascendante.

1. À partir de quelle position (repérée par l'angle θ_0) l'enfant perd-il contact avec l'igloo ?
2. Quel est le mouvement ultérieur de l'enfant ? Quelle est sa vitesse quand il retombe sur le sol ? Application numérique : calculez les composantes de la vitesse et de la position au moment du décollement, ainsi que la date à laquelle il touche le sol et la vitesse à cet instant. Données : $m = 30\,\text{kg}$ et $R = 2\,\text{m}$.

Remarque : pourquoi faut-il utiliser le PFD dans la première question ?

Corrigé

(1)



BDF

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{u_z} = -mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
- Réaction normale du support : $\vec{R_N} = R_N\,\vec{u_r}$ avec $R_N \geq 0$

↳ pas de réaction dite " tangentielle " car pas de frottement

On peut dès lors remarquer que R_N va varier selon l'angle θ $:= R_n(\theta)$

⇝ On cherche donc l'angle θ_0 tel que $R_N(\theta_0) = 0$

$\vec{OM} = R\vec{u_r}$
$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$
$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

D'après la 2ème loi de Newton (projetée sur $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$), on a :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N & (1) \\ \cancel{m}R\ddot{\theta} = \cancel{m}g\sin\theta & (2) \end{cases}$$

(2) ⇒ $\frac{\ddot{\theta}}{R} = g\sin\theta$) $\times\dot{\theta}$

$\frac{1}{R}\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dot{\theta}\sin\theta$

d'où, en primitivant, $\frac{1}{2}R\dot{\theta}^2 = -g\cos\theta + cte$

et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ ⇒ $cte = g$

d'où $\boxed{R\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)}$ (A)

Ainsi, en reprenant (1) :

$$mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R_N$$

$$\Leftrightarrow 2mg(1-\cos\theta) = mg\cos\theta - R_N$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_N(\theta) = mg(2 - 3\cos\theta)}$$

Finalement, $R_N(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3\cos\theta_0 = 0$

d'où $\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\approx 48°$

② ⇝ Le mouvement ultérieur de l'enfant est <u>une chute libre</u>

⇝ D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F_i})$

i.e $\frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_i^2 = \underbrace{W(\vec{P})}_{=\cancel{m}g z_i}$

or $z_i = R\cos\theta_0$

d'où $v_f = \sqrt{2gR\cos(\theta_0) + v_i^2}$

avec v_i la vitesse à l'angle θ_0

$(A) \Rightarrow v_i = 2gR(1-\cos\theta_0)$

$= \frac{2gR}{3} \approx 3.6 \ m.s^{-1}$

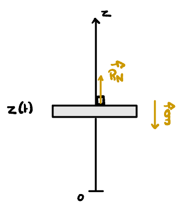
Finalement, $v_f = \sqrt{\frac{4}{3}gR\left(1 + \frac{1}{3}gR\right)}$

$\approx 6.25 \ m.s^{-1}$

9.5 Plateau vibrant

Un point matériel est posé sur un plateau horizontal vibrant, son altitude variant en $z(t) = A\cos(\omega t)$. Donnez la condition pour que le point matériel ne décolle jamais du plateau.

Corrigé



BDF
- Poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$
- Réaction normale de support : $\vec{R_N} = R_N\,\vec{u_z}$

⇝ Pour que le point reste fixé à la plateforme, on veut $R_N(t) \geq 0 \quad \forall t$

Or, d'après la 2ème loi de Newton projetée sur $\vec{u_z}$, on a :

$$m\ddot{z}(t) = -mg + R_N$$

i.e
$$R_N = m(\ddot{z}(t) + g)$$
$$= m(-A\omega^2\cos(\omega t) + g)$$

Ainsi, $R_N \geq 0 \iff (-A\omega^2\cos(\omega t) + g \geq 0$

$$\iff A\omega^2\cos(\omega t) \leq g$$

En particulier, une condition suffisante est que $A \leq \dfrac{g}{\omega^2}$

9.6 Anneau sur une piste circulaire

(ATS 2004) Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est enfilé sur un rail situé dans un plan vertical et constitué de deux parties circulaires (figure 9.1). Il y glisse sans frottement.

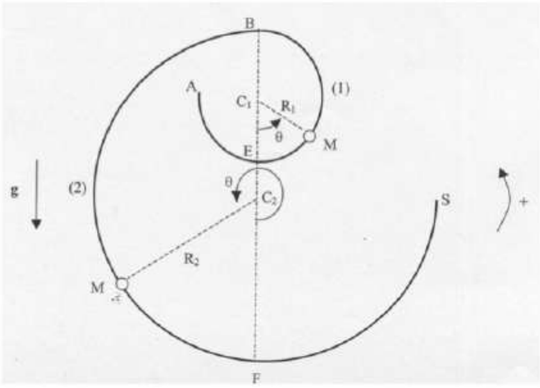


FIG. 9.1 : Anneau sur une piste circulaire.

Sa position est repéré par un angle θ admettant C_1 pour pôle sur la première partie de piste de rayon R_1, et admettant C_2 pour pôle sur la deuxième partie de piste de rayon R_2. Ainsi, θ varie de $-\pi/2$ à π sur la première partie, et de π à $5\pi/2$ sur la deuxième partie.

1. Exprimez son énergie potentielle de pesanteur en prenant l'origine au point B défini par $\theta = \pi$. Vous donnerez des expressions distinctes pour les deux parties de piste.
2. Tracez l'allure de $E_p(\theta)$.
3. Étudiez les positions d'équilibre de l'anneau ainsi que leur stabilité.
4. L'anneau est initialement en A ($\theta = -\pi/2$) et est lancé avec une vitesse initiale v_0. Donnez la condition pour que l'anneau puisse atteindre F ($\theta = 2\pi$).
5. Cette condition étant remplie, calculez sa vitesse v_F en F.
6. À quelle condition sur v_0 l'anneau sort-il de la piste en S ($\theta = 5\pi/2$)?

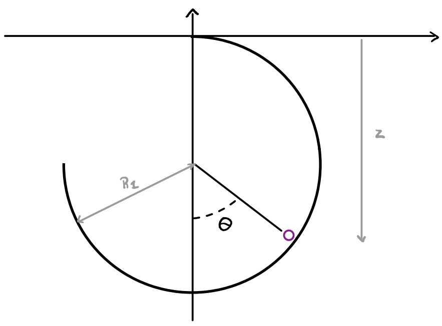
Remarque : pure application de la section 7.1 ! Comme il n'y a aucune force non conservative, préférez le TEM au TEC.

Corrigé

① **Partie 1** $\theta \in [-\frac{\pi}{2} ; \pi]$

On a $E_{p1} = -mgz$

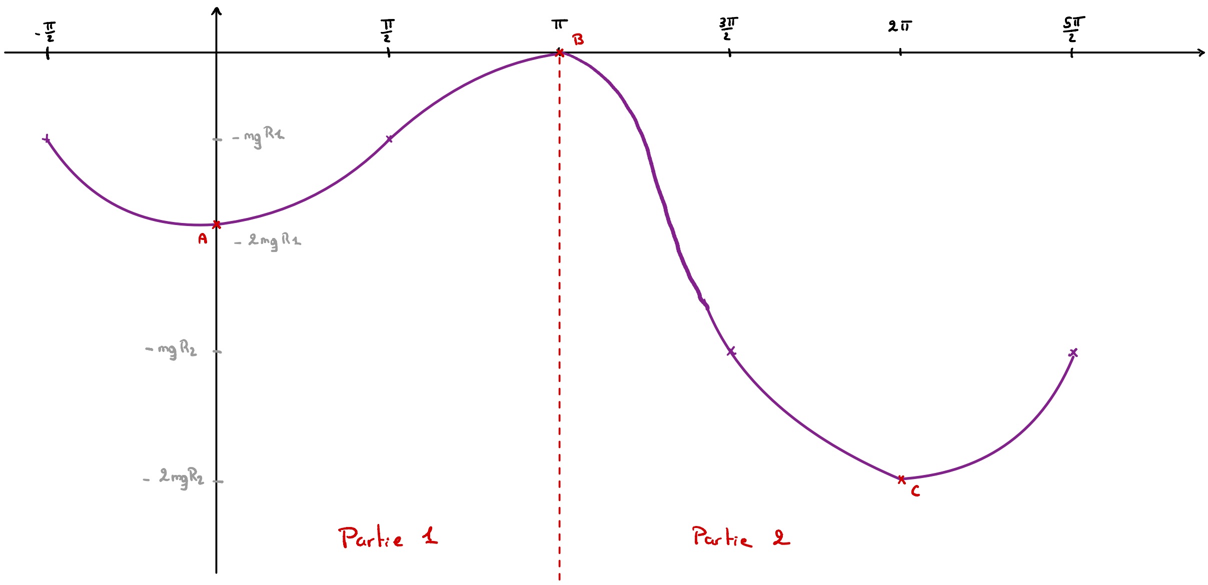
i.e $E_{p1} = -mgR_1(1 + \cos\theta)$



Partie 2 $\theta \in [\pi ; \frac{5\pi}{2}]$

et donc de même, $E_{p2} = -mgR_2(1 + \cos\theta)$

②



③ Partie 1 $\quad E_p$ mini : A $\rightsquigarrow$ pos. d'équilibre stable $(\theta = 0)$

E_p maxi : B $\rightsquigarrow$ pos. d'équilibre instable $(\theta = \pi)$

Partie 2 $\quad E_p$ mini : C $\rightsquigarrow$ pos. d'équilibre stable $(\theta = 2\pi)$

E_p maxi : B $\rightsquigarrow$ pos. d'équilibre instable $(\theta = \pi)$

④ La condition pour que l'anneau atteigne F est $\underline{v_B \geq 0}$

Or, d'après le TEM, $\quad \Delta E_m (A \to B) = \underbrace{\sum_i W_{A \to B} (\vec{F}_{i,nc})}_{=0}$

i.e $\quad \frac{1}{2} m v_B^2 + \cancel{\underbrace{mg z_B}_{=0}} - \frac{1}{2} m v_0^2 + mg R_1 = 0$

d'où $\quad v_B^2 = v_0^2 - 2gR_1$

$v_B \geq 0 \iff v_B^2 \geq 0 \quad$ (vitesse pos.)

$\iff v_0^2 \geq 2gR_1$

$\iff v_0 \geq \sqrt{2gR_1}$

Il faut donc que $v_0 \geq \sqrt{2gR_1}$

⑤ Comme vu précédemment, $E_m = cte$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_F^2 - 2\cancel{m}g R_2 = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 - \cancel{m}g R_1$

d'où $\quad v_F = \sqrt{v_0^2 + 2g(R_2 - R_1)}$

⑥ On veut donc $v_S \geq 0$

or $\quad E_m = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_S^2 - mg R_2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - mg R_1$

Ainsi $\quad v_S \geq 0 \iff v_S^2 \geq 0$

$\iff - \cancel{m}g R_2 \geq \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 - \cancel{m}g R_1$

$\iff v_0 \geq \sqrt{2g(R_1 - R_2)}$

donc les conditions sont $\begin{cases} v_0 \geq 2gR_1 \\ v_0 \geq 2g(R_1 - R_2) \end{cases}$

9.8 Pendule relié à des ressorts

Figure 9.3 : un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur l, à l'extrémité duquel est fixé à un point matériel M de masse m. Il est accroché au point O, fixe dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen). Il est également attaché à deux ressorts horizontaux de caractéristiques identiques (k, l_0), fixés entre deux points A et B distants de $2l_0$ de telle sorte que, quand le pendule est vertical, les ressorts sont au repos.

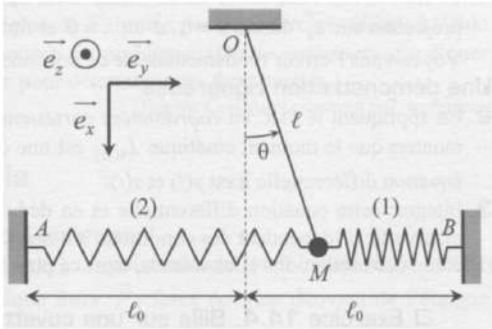


FIG. 9.3 : Pendule relié à des ressorts.

La masse M est légèrement déplacée par rapport à la verticale puis se met à osciller, sa position étant repérée par l'angle $\theta(t)$. L'angle est supposé toujours faible, de sorte que les ressorts restent à peu près horizontaux.

1. Exprimez le moment cinétique de la masse M par rapport à O dans le référentiel du laboratoire, en base cylindrique.
2. Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par θ puis la pulsation des petites oscillations.

Remarque : résolvez l'exercice par le TMC comme l'énoncé semble le vouloir, puis vérifiez que vous retrouvez le même résultat par le TEM.

Corrigé

1 On a $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$$= \begin{pmatrix}\rho\\0\\0\end{pmatrix} \wedge m\begin{pmatrix}0\\\rho\dot\theta\\0\end{pmatrix}$$

d'où $\vec{L_O} = \rho^2\dot\theta\,\vec{u_z}$

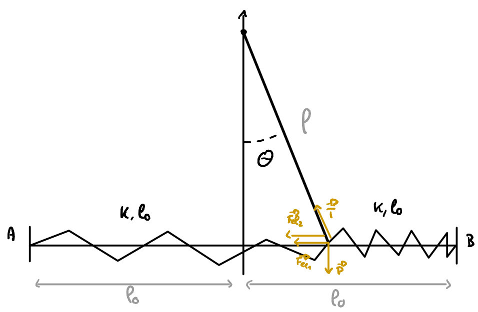
2 BDF

- Poids : $\vec{P} = mg\,\vec{e_x}$
  $= mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$

- Forces élastique : $\vec{F_{el_1}} = -k(\ell_1 - \ell_0)\,\vec{e_y}$
  $= -k(\ell_0 + y - \ell_0)\,\vec{e_y}$
  $= -ky(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r})$

  de mm, $\vec{F_{el_2}} = k(\ell_0 - y - \ell_0)\,\vec{e_y}$
  $= -ky(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r})$

- Tension : $\vec{T} = -T\vec{e_r}$ avec $T > 0$



et donc
- $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = -mg\rho\sin\theta\,\vec{e_z}$
- $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_{el_1}}) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_{el_2}}) = -k\rho^2\cos\theta\sin\theta\,\vec{e_z}$ car $y = \rho\sin\theta$
- $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \vec{0}$

Ainsi, d'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_i})$$

En projetant sur $\vec{e_z}$, on a : $\quad m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \; - 2K\ell^2\cos\theta\sin\theta$

et, aux petites oscillations, $\sin\theta \approx \theta$
$\cos\theta \approx 1$

DONC $\quad m\ell^2\ddot{\theta} + (mg\ell + K\ell^2)\,\theta = 0$

i.e $\quad \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2K}{m}\right)\theta = 0$

on trouve $\quad \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2K}{m}}$

Raisonnement énergétique → OK

9.9 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Quelques années après la mise en évidence du noyau atomique par Rutherford, Bohr a proposé un premier modèle descriptif de l'atome. Ce modèle, fondamentalement faux, n'a vécu que quelques années (1915-1920) mais contenait les idées importantes qui ont donné naissance, dix ans plus tard, à la physique quantique sous la direction de Bohr lui-même.

L'atome d'hydrogène est représenté comme un système à deux corps isolé : un proton infiniment lourd O de charge $+e$ et un électron très léger M de charge $-e$ et de masse m, en interaction coulombienne. L'hypothèse de Bohr, complètement artificielle à l'époque, a été de supposer que le moment cinétique de l'électron était quantifié :

$$\|\vec{L}_O\| = n\frac{h}{2\pi} \tag{9.2}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et h est la constante de Planck.

1. Donnez l'expression de la force exercée par le proton sur l'électron, montrez qu'elle est conservative et calculez l'énergie potentielle dont elle dérive (pris nulle à l'infini).
2. Justifiez que l'énergie mécanique de l'électron est constante et exprimez-la en fonction de r, rayon de la trajectoire. Montrez que $E_m = -E_c = E_p/2$.
3. En exploitant la quantification du moment cinétique, montrez que :

$$E_m = -\frac{E_0}{n^2} \tag{9.3}$$

   et donnez l'expression de E_0.
4. Application numérique : donnez E_0 en eV avec $h = 6{,}63.10^{-34}$ J s ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ eV ; $1/4\pi\varepsilon_0 = 9.10^9$ SI.
   Commentaire ?

Il faut insister sur le fait que ce modèle est faux, archifaux, d'abord parce que l'électron n'est pas un point matériel dans l'atome (dualité onde-corpuscule, voir cours d'atomistique). On ne s'en souvient aujourd'hui que parce qu'il est très simple et parce que, dans le cas de l'atome d'hydrogène, il a donné des résultats proches de la réalité. Et aussi parce que Bohr est un des plus grands physiciens du XX^e^siècle !

Corrigé

1
- $\vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$
- Elle est conservative car on peut lui associer une énergie potentielle (cf. ci-dessous)
- $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\,E_p$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

donc $E_p = E_p(r) = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{1}{r} + \underbrace{cte}_{=0}$ car E_p nulle qd $r \to +\infty$

Ainsi, $E_p(r) = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{1}{r}$

2 On a, d'après le TEM, $\dfrac{dE_m}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ $E_m = cte$

De plus, d'après le PFD,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

i.e
$$\begin{cases} (1) \quad -mr\dot{\theta}^2 = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ (2) \quad mr\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \quad m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ d'où $\boxed{v^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}$ (A)

Ainsi,
$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{m} r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}mv^2 = -E_c \\ &= \frac{1}{2}E_p \end{aligned}$$

d'où $E_m = -E_c = E_p/2$

3 On a $\|\vec{L_0}\| = n\dfrac{h}{2\pi}$

et $\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mrv\vec{e_z} \Rightarrow \|\vec{L_0}\| = mrv$

donc $mrv = n\dfrac{h}{2\pi} \Leftrightarrow v^2 = \left(\dfrac{nh}{2\pi mr}\right)^2$

or (A) $\Rightarrow v^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}$ donc $\dfrac{n^2h^2}{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}m^{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}} = \dfrac{e^2}{\cancel{4}\cancel{\pi}\varepsilon_0 \cancel{m}\cancel{r}}$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{e^2\pi m}}$$

or d'après la question précédente,

$$E_m = \frac{E_p}{2} = -\frac{1}{2}\times\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{r} = -\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0}\times\frac{e^2\cancel{\pi}m}{h^2\varepsilon_0}\right)\times\frac{1}{n^2}$$

d'où $E_m = -\dfrac{E_0}{n^2}$

avec $E_0 = \dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$

4 <u>A.N</u> : → exo

9.10 Régime apériodique

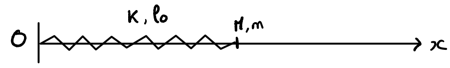
Un point matériel M de masse m est attaché à un ressort (raideur k, longueur à vide l_0) et astreint à se déplacer le long de l'axe horizontal Ox. Il est également soumis à une force de frottement fluide linéaire de coefficient h.

1. Quelle est la condition sur h, k et m pour le régime soit apériodique ?
2. Déterminez l'équation du mouvement dans le cas du régime apériodique. Vous introduirez les variables λ et ω_0 ; les conditions initiales sont $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$.

> Vous devez connaître les formes générales possibles pour cette équation différentielle. On rappelle ici :
>
> $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0 x = 0 \quad \xRightarrow{\Delta>0} \quad x(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \qquad (9.4)$$

Corrigé

1 $\Sigma = \{M\}$, BDF



- Poids et réaction de support
  ↳ se compensent
- Force élastique : $\vec{F_{el}} = -K(x - l_0)\vec{u_x}$
- Force frottement fluide : $\vec{F_f} = -h\dot{x}\,\vec{u_x}$

Ainsi, d'après la 2ème loi de Newton projetée sur (Ox), on a :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) - h\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = K l_0$$

Ainsi, le régime obtenu est apériodique $\Leftrightarrow \Delta_{(C)} > 0$ avec $(C) : r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{\cancel{m}} > 0$$

Ainsi, le régime apériodique est obtenu ssi $h^2 > 4km$

2 On pose alors $\lambda = \frac{1}{2}\frac{h}{m}$ et $\omega_0 = \frac{k}{m}$

ainsi, d'après le cours, on a : $x(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) + \text{solpart}$

avec $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

on a solpart $= m l_0$

et $\begin{cases} x(t=0) = x_0 & \Rightarrow \quad x_0 = A + B + m l_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 & \Rightarrow \quad 0 = -\lambda(A+B) + \beta(A - B) \end{cases}$

D'où

$$x(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) + m l_0$$

avec $\begin{cases} A = \frac{\lambda(x_0 - m l_0)}{2\beta} + \frac{x_0}{2} + \frac{m l_0}{2} \\ B = x_0 - m l_0 - A = \frac{x_0}{2} - \frac{m l_0}{2} + \frac{\lambda(m l_0 - x_0)}{2\beta} \end{cases}$

9.11 Étude de l'amortisseur d'un camion

(Géologie Nancy 1997) Les phénomènes se produisant au niveau de chaque roue d'un camion sont modélisés comme illustré figure 9.4 : une roue de centre O supporte une charge assimilée à un point matériel M de masse $m = 2000\,\mathrm{kg}$ par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de longueur à vide $l_0 = 75\,\mathrm{cm}$ et de raideur $k = 6{,}5.10^4\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ en parallèle avec un amortisseur A.

Nous supposerons que OM reste toujours vertical. Lorsque l'ensemble est au repos, O est en O_r et M en M_r, et le ressort a une longueur $l_{éq}$. Le point M est repéré par son altitude z par rapport à M_r et le point O par son altitude z_O par rapport à O_r. L'axe portant tous ces points est appelé Oz et orienté vers le haut.

L'amortisseur exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O, donc :

$$\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_O)\,\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad h = 5.10^3\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \tag{9.5}$$

1. Déterminez $\Delta l = l_{éq} - l_0$. Quelle est l'interprétation physique cette grandeur ?

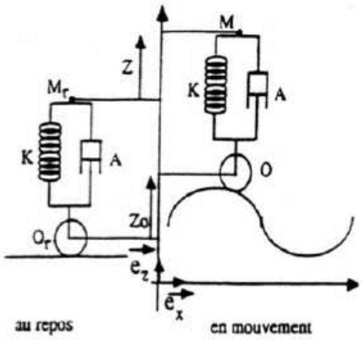


FIG. 9.4 : Amortisseur d'un camion.

2. La roue se déplace le long d'une piste ondulée en restant toujours en contact avec elle. La trajectoire de O a pour équation $z_O(x) = a\cos(2\pi x/\lambda)$ avec $a = 15\,\mathrm{cm}$ et $\lambda = 1\,\mathrm{m}$. La vitesse horizontale reste constante égale v_e. Écrivez l'équation horaire $x(t)$ pour les conditions initiales $x(t = 0) = 0$ et identifiez ω dans l'expression $z_O(t) = a\cos(\omega t)$.
3. Mise en équation et régime transitoire.
   (a) À l'aide d'une relation de Chascles, calculez la longueur $l(t)$ du ressort à l'instant t, en fonction de z, z_O et $l_{éq}$.
   (b) Déduisez-en l'équation différentielle gouvernant $z(t)$.
   (c) Évaluez la durée du régime transitoire.
4. Étude du régime sinusoïdal forcé. Vous supposerez désormais que le régime transitoire est terminé.
   (a) $z(t)$ est cherchée sous la forme $z(t) = Z_m\cos(\omega t + \varphi)$. Donnez l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z}$ associée.
   (b) Tracez la courbe représentant Z_m en fonction de ω.
   (c) Pour quelle valeur v_{er} de la vitesse y a-t-il résonance en élongation ?
   (d) Commentez l'extrait suivant : « *Dans le roman 'Le salaire de la peur' de Georges Arnaud, un conducteur pilote un camion chargé de nitroglycérine, produit qui explose au moindre choc. Il arrive sur une piste en tôle ondulée et choisit, pour éviter de secouer le liquide dangereux, d'aller très vite sur cette route.* »

Corrigé

① D'après le principe d'inertie : $l = l_{eq} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$

i.e $-mg - k(l_{eq} - l_0) - h(\underbrace{\dot{z}}_{=0} - \underbrace{\dot{z}_0}_{=0}) = 0$

$\Rightarrow l_{eq} = \frac{-mg}{k} + l_0$

d'où $\Delta l = -\frac{mg}{k}$

② $\dot{x}(t) = cte = v_e \Rightarrow x(t) = v_e + \underbrace{cte}_{=0}$

donc $z_0(t) = a\cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\lambda}\right)$

d'où $z_0(t) = a\cos\left(\frac{2\pi v_e}{\lambda} \times t\right)$

et donc $\omega = \frac{2\pi v_e}{\lambda}$

3

a) On a $\boxed{\ell(t) = z(t) + \ell_{eq} - z_0}$

b) En appliquant le PFD,

$$m\ddot{z}(t) = -mg \quad - h(\dot{z} - \dot{z}_0) \quad - k(\ell - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{z}(t) = -mg \quad - h(\dot{z} - \dot{z}_0) \quad - k(\ell_{eq} + z - z_0 - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{K}{m}z = \frac{h}{m}\dot{z}_0 + \frac{K}{m}z_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{K}{m}z = a\left(-\frac{h\omega}{m}\sin(\omega t) + \frac{K}{m}\cos(\omega t)\right)}$$

c) $\tau = \frac{2m}{h}$ et $\Delta t = 5\tau$

$\boxed{\text{Ainsi,} \quad \Delta t = 5\tau \approx 2s}$

4

a) Régime sinusoïdal forcé = solution particulière qd le second membre est sinusoïdal

$\Rightarrow$ Méthode complexe !

$z_0(t) = a\cos(\omega t)$
↳ $\underline{z_0}(t) = Ae^{i\omega t}$
↳ $\underline{\dot{z}_0}(t) = i\omega\, \underline{z_0}(t)$

or $z(t) = Z_m\cos(\omega t + \varphi)$
$\Rightarrow \underline{z}(t) = Z_m e^{i(\omega t + \varphi)}$

$\Downarrow$

$$(i\omega)^2 Z_m e^{i\varphi} + \frac{h}{m} i\omega Z_m e^{i\varphi} + \frac{K}{m} e^{i\varphi} = i\omega\frac{h}{m}a + \frac{K}{m}a$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z_m = \frac{\left(i\omega\frac{h}{m} + \frac{K}{m}\right)a}{-\omega^2 + \frac{h}{m}i\omega + \frac{K}{m}} e^{-i\varphi}}$$

b)

$$Z_m = \left|\frac{\left(i\omega\frac{h}{m} + \frac{K}{m}\right)a}{-\omega^2 + \frac{h}{m}i\omega + \frac{K}{m}} e^{-i\varphi}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{K^2 + (\omega h)^2}}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (\omega h)^2}}\, a$$

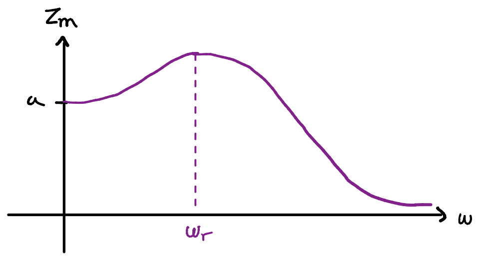
De plus, $Z_m(0) = a$
$Z_m(+\infty) = 0$

<u>Extremum:</u> $\frac{dZ_m}{d\omega}(\omega_r) = 0 \Leftrightarrow \omega_r^2 = \frac{K^2}{h^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2h^2}{Km}} - 1\right)$

et Z_m def sur $\mathbb{R}_+$ donc ω_r existe $\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{2h^2}{Km}} \geq 1$

c'est bien le cas

D'où le graphe suivant:



c) $\omega = \omega_r$ et $\omega_r = \frac{2\pi V_{er}}{\lambda}$ $\boxed{\text{d'où} \quad V_{er} = 0.87\ m.s^{-1}}$

d) Pas de secousse : $Z_m \to 0$ donc $\omega \to +\infty$
$V_e \to +\infty$