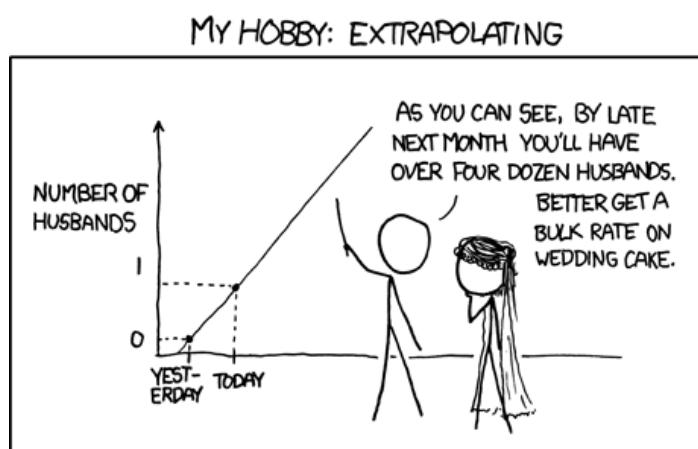


MPI* Maths
Programme de khôlles

Semaine 9



Olivier Caffier



Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles	1
A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B} & \mathbb{C}$	1
A.1 Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites.	1
A.2 Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse.	3
A.3 Équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordres supérieurs. .	4
A.4 Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1	5
A.5 Somme de Riemann et théorème associé (proposer un exemple)	5
A.6 Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis	6
A.7 Formules de Taylor (Young + reste intégral), démo uniquement de la formule reste intégral	7
B Questions de cours, groupes \mathbb{B} et \mathbb{C}	8
B.1 Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.	8
B.2 Dérivée de $L(f)$ où L est une application linéaire continue.	8
B.3 Dérivée de $B(f, g)$ où B est une application bilinéaire continue.	9
B.4 Continuité de la fonction "distance à une partie A "	10
B.5 Inégalité arithmético-géométrique.	10
C Questions de cours, groupe \mathbb{C} uniquement	11
C.1 Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann	11
C.2 Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ (avec la bonne hypothèse)	12
C.3 Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ (avec la bonne hypothèse)	13
C.4 Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral	14
C.5 Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	15
C.6 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes	16
C.7 Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes	17
2 Exercices de référence	18
A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B} & \mathbb{C}$	18
B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B} & \mathbb{C}$	18
C Exercices de référence, groupe \mathbb{C} uniquement	18

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B} & \mathbb{C}$

A.1 Définition et caractérisation séquentielle de la continuité et des limites.

Définition - Limite d'une application

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f: A \rightarrow F$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists r > 0, \forall x \in B_f(a, r) \cap A, \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon \\ \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n.

Soient $A \subset E$, $f: A \rightarrow F$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \rightarrow a, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow : Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \rightarrow a$

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon, \|x_n - a\|_E \leq \varepsilon$

Soit donc $\varepsilon > 0$,

Par hyp sur f , $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$, $\|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$

On considère $n_\eta \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\eta, \|x_n - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$

On a donc bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\eta \in \mathbb{N}$$
 tq $\forall n \geq n_\eta, \|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$

\Leftarrow : Réciproquement, raisonnons par contreposée

Supposons alors que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l$

i.e. $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(x) - l\|_F > \varepsilon$

Soit donc un tel $\varepsilon > 0$, on prend alors pour $n \in \mathbb{N}$, $n_\eta = \frac{1}{n+1}$

On vient alors de construire une suite $(x_n)_n$ tq $x_n \rightarrow a$
mais $f(x_n) \not\rightarrow l$

d'où l'existence d'une telle suite.

d'où le résultat par contreposée

D'où le résultat par contreposée

Définition - Continuité d'une application

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n.

Soient $A \subset E$ et $f: A \rightarrow F$ une application.

(1) Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(2) On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n.

Soient $A \subset E$ et $f: A \rightarrow F$ une application. Soit $a \in A$

Alors :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \rightarrow a, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$$

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow : Supposons f continue en a . Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq. $x_n \rightarrow a$

$$\hookrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in A, \|y - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(y) - f(a)\|_F \leq \epsilon$$

Soit donc $\epsilon > 0$, il existe alors un $\eta > 0$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \epsilon$

or $\eta > 0$ donc, comme $x_n \rightarrow a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_0, \|x_n - a\|_E \leq \eta \Rightarrow$ —

AINSI, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_0, \|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \epsilon$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$$

\Leftarrow : Réciproquement, raisonnons par contraposée

Supposons que $\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - f(a)\|_F > \epsilon$

écrire $A \Rightarrow B$ puis la contraposée si besoin !

Soit donc un tel $\epsilon > 0$, prenons pour $n \in \mathbb{N}, \eta_n = \frac{1}{n+1}$

On vient alors de construire une suite (x_n) tq. $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\|_E \leq \frac{1}{n+1}$

i.e. $x_n \rightarrow a$

o $\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n) - f(a)\|_F > \epsilon$

i.e. $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$

D'où l'existence d'une telle suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq. $x_n \rightarrow a$ et $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$

D'où le résultat par contraposée.

D'où l'équivalence.

A.2 Une fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse.

Définition - Application lipschitzienne

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n.

Soient $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$ une application.

(1) Soit $K \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est K -lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$$

(2) On dit que f est lipschitzienne si $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K -lipschitzienne.

Proposition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n.

Soient $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$ une application.

Alors

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f \text{ } C^0 \text{ sur } A$$

⚠ LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!

→ En effet, en prenant la fonction $f : x \mapsto x^2$, qui est bien C^0 sur \mathbb{R} mais s'il existait un tel $K \in \mathbb{R}_+$:

on aurait pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |(x+1)^2 - x^2| \leq K$, i.e $|2x+1| \leq K$.

ce qui est absurde car on ne peut borner cette quantité sur \mathbb{R} tout entier.

DÉMONSTRATION.

f est lipschitzienne, i.e il existe alors $K \in \mathbb{R}_+$ tq f soit K -lip. : i.e $\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$

→ Montrons que f est uniformément continue

i.e $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon$

soit $\epsilon > 0$, prenons alors $\eta = \frac{\epsilon}{K} > 0$, alors $\forall (x, y) \in A^2$ tq $\|x - y\|_E \leq \eta \leq \frac{\epsilon}{K}$

on a, comme f est K -lip., $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E \leq K \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$

d'où $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon$

d'où f uniformément continue

→ Montrons mtn que unif cont. \Rightarrow cont.

Soit $x \in A$ fixé,

soit $\epsilon > 0$, il existe alors un $\eta > 0$ tq $\forall y \in A, \|y - x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_F \leq \epsilon$

f est donc continue pour tout $x \in A$.

D'où f lip. \Rightarrow f unif. continue \Rightarrow f continue

D'où le résultat voulu.

A.3 Équivalence entre la dérivarilité et l'existence d'un DL à l'ordre 1. C'est faux pour les ordres supérieurs.

Définition - Application dérivable

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbb{R} -e.v.n et $f: \begin{matrix} I \\ x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} F \\ f(x) \end{matrix}$ une application. Soit $a \in I$.

(1) On dit que f est dérivable en a si :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

On note $f'(a)$ cette limite.

(2) On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout point $a \in I$.

Proposition - Une équivalence pratique

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbb{R} -e.v.n et $f: \begin{matrix} I \\ x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} F \\ f(x) \end{matrix}$ une application. Soit $a \in I$.

On suppose $f \in \mathcal{C}^0$ sur I . Alors :

f est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ admet un DL₁ en a .

$$\text{Dans ce cas, } f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$$

⚠ FAUX AUX ORDRES SUPÉRIEURS !!

Il suffit de prendre la fonction $f: x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui n'est pas 2 fois dérivable en 0 mais admet un DL₂ en ce point.

DÉMONSTRATION.

$$\Rightarrow: \text{ Si } f \text{ est dérivable en } a, \text{ alors } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\text{i.e. } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(1)$$

$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$$

donc f admet un DL₁ en a

$$\Leftarrow: \text{ Réciproquement, } \exists v \in F \text{ tq } f(a+h) = f(a) + hv + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v + o(1)$$

donc le taux d'accroissement possède une limite finie $\Rightarrow f$ dérivable en a

$$\text{et } f'(a) = v$$

A.4 Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1

Fonction dérivable qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1

La fonction

$$f: x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

est dérivable sur \mathbb{R}^* mais pas \mathcal{C}^1 .
Sur le

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \neq 0, \quad f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite!}} \end{aligned}$$

ainsi f' ne dispose pas de limite en $x=0$!
 $\Rightarrow f'$ n'est pas \mathcal{C}^0
 $\Rightarrow f$ n'est pas \mathcal{C}^1

A.5 Somme de Riemann et théorème associé (proposer un exemple)

Définition - Somme de Riemann

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(F, \| \cdot \|_F)$ un \mathbb{R} -e.v.n et $f: \begin{cases} I & \rightarrow F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ une application **continue ou continue par morceaux**.

Soient $[a; b] \subset I$ et $n \in \mathbb{N}$.

(1) On appelle Somme de Riemann (à gauche) la quantité :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k \frac{b-a}{n})$$

(2) Généralement, on aura $a=0$ et $b=1$, d'où

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t) dt$$

EXEMPLE.

$$\begin{aligned} \text{Prenons } v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

d'où $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$

A.6 Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq. $a < b$. Soit $f \in C^0([a; b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a; b[\quad f'(c) = 0$$

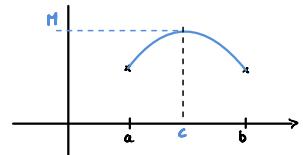
DÉMONSTRATION. f est continue sur $[a; b]$ donc d'après le th. des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes
Soit donc $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$

Si $m = M$ alors f est constante en tout point $\Rightarrow f' = 0$ sur $[a; b]$
 \Rightarrow n'importe quel $c \in [a; b]$ convient !

Sinon puisque $f(a) = f(b)$, les deux extrêmes ne peuvent pas être atteints aux bornes
supposons, sans perte de généralité, que M n'est pas atteint en a & en b :

$$\exists c \in]a; b[\quad \text{tq} \quad f(c) = M, \quad \text{i.e.} \quad f'(c) = 0$$

car f dérivable sur $]a; b[$
et M un extrémum



D'où l'existence d'un tel c

Théorème - Égalité des Accroissements Finis

Soit $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]a; b[$.
Alors :

$$\text{Il existe } c \in]a; b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉMONSTRATION. Considérons les applications

$$\Psi : \begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(b) - f(x)}{b - x} + f(x) \end{aligned}$$

$$\Psi = f - \Psi \quad \text{qui est bien } C^0 \text{ sur } I \quad \text{et dérivable sur } I$$

$$\left. \begin{aligned} \text{D'autre part, } \Psi(a) &= f(a) \\ \Psi(b) &= f(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi(a) = \Psi(b) = 0$$

$$\text{Donc d'après le théorème de Rolle, } \exists c \in]a; b[\text{ tq } \Psi'(c) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f'(c) = \Psi'(c)$$

$$\text{i.e. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D'où l'existence recherchée

Théorème - Inégalité des Accroissements Finis

(mm notations). On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+$ tels que $m \leq f' \leq M$.

Alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \neq y \Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$$

DÉMONSTRATION. On a, d'après l'EAF que $\forall x \geq y \in I$, $\exists c \in]y; x[\text{ tq } f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$
or $m \leq f' \leq M$
 $\Rightarrow m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$

→ OK

A.7 Formules de Taylor (Young + reste intégral), démo uniquement de la formule reste intégral

Proposition - Formule de Taylor-Young

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbb{R} -e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n , alors :
 $\forall a, b \in I,$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|b-a|^n)$$

Proposition - Formule de Taylor Reste Intégral

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbb{R} -e.v.n de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} , alors :
 $\forall a, b \in I,$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

DÉMONSTRATION. Procédons par récurrence.

$$\square \underline{n=0}: \underbrace{\sum_{k=0}^0 \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{= f(a)} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t) dt}_{= f(b) - f(a)} = f(b)$$

H₁ vraie.

$\square \underline{H_n \Rightarrow H_{n+1}}:$ On a, par H.R,

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt && \text{IMP à rédiger...} \\ &= \dots + \underbrace{\left[-\frac{(b-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) \right]_a^b - \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt}_{= 0 + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

H_{n+1} vraie.

Ce qui clôt la récurrence.

B Questions de cours, groupes \mathbb{B} et \mathbb{C}

B.1 Définition d'un point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

Définition - Point adhérent à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbb{K} -e.v.n et soit $A \subset E$.

On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\forall r > 0, B_f(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

Proposition - Caractérisation séquentielle d'un point adhérent à une partie

(mm notations)

On dit de $a \in E$ qu'il est adhérent à A si :

$$\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq. } x_n \rightarrow a$$

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow : Supposons que $a \in E$ soit adhérent à A

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $r_n = \frac{1}{n+1}$

Ainsi, par hyp., $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_f(a, r_n) \cap A$

On vient alors de construire $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$

tq $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\|_E \leq r_n = \frac{1}{n+1}$

avec donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

D'où l'existence d'une telle suite.

\Leftarrow : Supposons qu'il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \rightarrow a$

Alors $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \|x_n - a\|_E \leq \epsilon$

i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \underline{x_n} \in B_f(a, \epsilon) \cap A$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, B_f(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

D'où l'adhérence de a .

B.2 Dérivée de $L(f)$ où L est une application linéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ 2 \mathbb{K} -e.v.n de dimension finie. Soit $f : I \rightarrow E$ une application et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ (qui se trouve être continue car nous travaillons en dimension finie!).

Soit $a \in I$, on suppose f dérivable en a .

Alors $L(f)$ est dérivable en a et

$$L(f)'(a) = L(f'(a))$$

DÉMONSTRATION.

On montrera plus tard dans l'année que

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \text{ tq } \forall c \in E, \|L(c)\|_F \leq K \|c\|_E$$

Soit $h \in \mathbb{R}$ tq $a+h \in I$, alors $f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$

$$\Rightarrow L(f(a+h)) = L(f(a)) + h L(f'(a)) + \underbrace{L(o(h))}_{=o(h)}, \text{ cf. ci-dessous}$$

$$\text{Ainsi, } L(f(a+h)) = L(f(a)) + h L(f'(a)) + o(h)$$

donc $L(f)$ admet un DL_L en a

$$\Rightarrow L(f) \text{ est dérivable en } a \text{ et } L(f)'(a) = L(f'(a))$$

Enfin, montrons que $L(o(h)) = o(h)$

On a : $\exists \varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et $o(h) = \varepsilon(h)$

Donc, comme L est K -lip :

$$\|L(\varepsilon(h))\|_F \leq K \times \underbrace{\|\varepsilon(h)\|_E}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

$$\text{d'où } L(o(h)) = o(h)$$

D'où le résultat voulu.

B.3 Dérivée de $B(f, g)$ où B est une application bilinéaire continue.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ 3 \mathbb{R} -e.v.n.

Soit $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Soit $a \in I$, supposons E et F de dimension finie ou $f \in \mathcal{C}^0$.

Si f et g sont dérivables en a , alors $B(f, g)$ l'est également et :

$$B(f, g)'(a) = B(f', g)(a) + B(f, g')(a) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ccc} f : I & \longrightarrow & E \\ g : I & \longrightarrow & F \end{array}$$

DÉMONSTRATION.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tq. $a+h \in I$

$$\text{Alors } B(f, g)(a+h) = B(f(a+h), g(a+h))$$

$$= B(f(a) + h f'(a) + o(h), g(a) + h g'(a) + o(h))$$

$$= B(f(a), g(a)) + h(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))) + \underbrace{h^2 B(f'(a), g'(a))}_{(*)} + \underbrace{B(f(a), o(h)) + B(o(h), g(a))}_{(*)} \quad (*) = o(h)$$

$$= B(f(a), g(a)) + h(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))) + o(h)$$

Donc $B(f, g)$ admet un DL en a .

$$\Rightarrow B(f, g) \text{ est dérivable en } a \text{ et } B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

④: D'une part, $\|h^2 B'(f', g')(a)\|_G = |h| \times \underbrace{|h| \times \|B'(f', g')(a)\|_G}_{n \rightarrow 0} = o(h)$

D'autre part, $\exists K \in \mathbb{R}$ tq. $\forall (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\|_G \leq K \|x\|_E \|y\|_F$

donc $o(h) = h\varepsilon(h)$ avec $h \underset{n \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$

$$\text{on a alors } \|B(f(a), o(h))\|_G = \|B(f(a), \varepsilon(h))\|_G \leq \underbrace{K \|f(a)\|_E \|\varepsilon(h)\|_F}_{n \rightarrow 0} \times |h| = o(h)$$

De mm pour l'autre.

B.4 Continuité de la fonction "distance à une partie A"

Définition - Fonction "distance à une partie A"

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbb{K} -e.v.n et soit $A \subset E$. On définit d la fonction distance à A par :

$$d: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf_{a \in A} \|x - a\| \end{array}$$

On note généralement $d(x) = d(x, A)$

Proposition - Continuité de la fonction "distance à une partie A"

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbb{K} -e.v.n et soit $A \subset E$. On note d la fonction distance à A par . Alors d est continue.

DÉMONSTRATION. Montrons que la fonction distance est 1-lip.

On a que, $\forall x, y \in E$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_E = \inf_{a \in A} \|x - y + y - a\|$

or $\forall a \in A$, $\|x - y + y - a\| \leq \|x - y\|_E + \|y - a\|_E$ d'après l'I.T

donc, en passant à l'inf, on a :

$$d(x, A) \leq \|x - y\|_E + \inf_{a \in A} \|y - a\| \quad \text{i.e.} \quad d(x, A) \leq \|x - y\|_E + d(y, A)$$

$$\text{et } \text{pas de } a \in A ? \Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|_E$$

$$\text{et sym. des rôles} \Rightarrow d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\|_E = \|x - y\|_E$$

$$\text{d'où } |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|_E$$

donc d est 1-lip $\Rightarrow d$ est continue

D'où le résultat voulu.

B.5 Inégalité arithmético-géométrique.

Proposition - Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$(x_1 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

DÉMONSTRATION. On a, d'après l'inégalité de Jensen appliquée au logarithme népérien (version concave donc) :

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i)}{n} = \ln \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

$$\text{ainsi, par croissance de l'exp, on a : } \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{d'où } \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

C Questions de cours, groupe C uniquement

C.1 Démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann

Théorème - Convergence d'une somme de Riemann

(mm notations) On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t) dt$$

DÉMONSTRATION.

C.2 Majoration de l'erreur des sommes de Riemann en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ avec $I = [a; b]$, $a < b$. On prend $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ une subdivision régulière de I d'ordre n .

Alors, en posant $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k)$, on a

$$R_n - \int_a^b f(t) dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

DÉMONSTRATION.

C.3 Majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ (avec la bonne hypothèse)

Proposition

Soient $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

On prend $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ une subdivision régulière de I d'ordre n .

Alors, en posant $T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$, on a :

$$T_n - \int_a^b f(t) dt = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

DÉMONSTRATION.

C.4 Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^0 . Soit $a \in I$.

Alors, l'application

$$F: \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

DÉMONSTRATION.

C.5 Adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition

$$\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION.

C.6 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes

Proposition - Inégalité de Jensen

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n$ t.q $\sum_i \lambda_i = 1$.
Alors,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

DÉMONSTRATION.

C.7 Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Proposition - Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité des pentes

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On a :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in I^3, x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

DÉMONSTRATION.

2 Exercices de référence

- A Exercices de référence, groupes A, B & C**
- B Exercices de référence, groupes B & C**
- C Exercices de référence, groupe C uniquement**

AT THIS POINT, YOU'RE PROBABLY
THINKING, "I LOVE THIS EQUATION
AND WISH IT WOULD NEVER END!"
WELL, GOOD NEWS!



TAYLOR SERIES EXPANSION IS THE WORST.