TD Ondes électromagnétiques

Ondes électromagnétiques et conducteurs métalliques

1 ARQS dans un métal

L'espace est constitué de vide pour $x < 0$ et d'un métal de conductivité γ pour $x > 0$. Une OPPM polarisée selon $\vec{u}_y$ se propage selon les x croissants.

1. À partir de l'équation locale de conservation de la charge électrique, montrez que la densité de charges ρ peut être considérée comme nulle dans le métal. Donnez alors l'équation gouvernant $\vec{E}$.
2. Si $\vec{E}$ est proportionnel à $e^{i(\omega t - kx)}$ avec ω réel positif et k complexe, donnez la relation de dispersion.
3. Pourquoi a-t-on choisi ω réelle ? Quels sont les rôles respectifs des parties réelle et imaginaire de k ?
4. À quelle condition sur ω peut-on négliger un terme dans l'équation différentielle, si le métal est du cuivre ($\gamma = 6.10^7\ \mathrm{S\,m^{-1}}$) ? Cette condition est-elle facilement vérifiée ? Simplifiez les équations précédentes sous cette hypothèse.
5. Exprimez le champ magnétique et le vecteur de Poynting dans ces conditions.

2 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ. Le champ électrique est :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x \tag{1}$$

1. Trouvez l'expression de son champ magnétique.
2. Calculez la moyenne temporelle de son vecteur de Poynting.
3. Calculez la puissance volumique moyenne $\langle p \rangle$ dissipée par effet Joule.
4. Vérifiez que :

$$\mathrm{div}\left(\langle \vec{\Pi} \rangle\right) + \langle p \rangle = 0 \tag{2}$$

   Interprétez cette relation.

3 Effet de peau

Un milieu conducteur de conductivité γ_0 occupe le demi-espace $z > 0$, comme indiqué figure 1. Le domaine $z < 0$ est rempli d'air, aux propriétés similaires au vide. Une OPPM incidente arrive par la gauche avec une polarisation rectiligne :

$$\underline{\vec{E}_1} = E_{10} e^{i(\omega t - kz)}\, \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \tag{3}$$

À l'interface entre les deux milieux, elle engendre une onde réfléchie et une onde transmise de la forme :

$$\underline{\vec{E}_1'} = \underline{r}\, E_{10} e^{i(\omega t - \underline{k}' z)}\, \vec{u}_x \tag{4}$$

$$\underline{\vec{E}_2} = \underline{t}\, E_{10} e^{i(\omega t - \underline{k}'' z)}\, \vec{u}_x \tag{5}$$

où r et t sont les coefficients, respectivement, de réflexion et de transmission en amplitude.

1. Dans tout l'exercice, vous ferez l'hypothèse $\varepsilon_0 \omega \ll \gamma_0$. Quel en est le sens physique ?
2. (a) Déterminez les nombres d'onde $\underline{k'}$ et $\underline{k''}$.

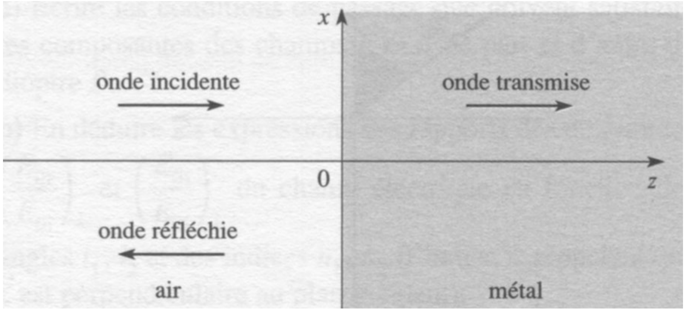

FIG. 1 : Effet de peau.

(b) Calculez les champs magnétiques des trois ondes.
(c) Étudiez les conditions imposées aux composantes des champs sur la surface $z = 0$. Déduisez-en les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en fonction de ω et $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \gamma_0 \omega}$. Interprétez δ.

3. (a) Calculez les vecteurs de Poynting moyens des trois ondes.
(b) Calculez les coefficients de réflexion et de transmission en puissance en fonction de δ et ω, définis comme les rapports des énergies transportées par, respectivement, l'onde réfléchie et l'onde transmise sur celle transportée par l'onde incidente.
(c) Vérifiez la conservation de l'énergie.
(d) Calculez la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans un cylindre de section S et de longueur infinie entre $z = 0$ et $z \to +\infty$. Comparez cette valeur avec le flux moyen du vecteur de Poynting de l'onde transmise à travers cette même section S en $z = 0$.

4 Transparence ultraviolette des métaux

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique de haute fréquence à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N. Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin :

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} \tag{6}$$

1. Établissez l'expression de la vitesse en régime sinusoïdal forcé $\underline{\vec{v}}$ et déduisez-en que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \tag{7}$$

où γ_0 est une constante que vous préciserez et interpréterez.
2. Écrivez l'équation de conservation locale de la charge électrique en complexe et déduisez-en que le métal reste localement neutre même à haute fréquence.
3. Trouvez la relation de dispersion pour un ansatz de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$.
4. Déduisez-en que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise dans le métal sans être absorbée.
5. Expliquez le titre de l'exercice.