MPI* Physique

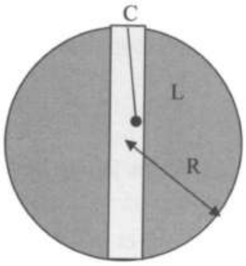
TD Mécanique

Champ gravitationnel

Olivier Caffier

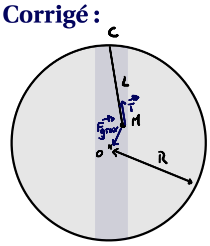
1 - Pendule dans un long tunnel à l'intérieur de la Terre

Un tunnel traverse la Terre de part en part en passant par son centre (figure 1). Un pendule de longueur L tel que $L < 2R$ est accroché en surface au point C et oscille à l'intérieur du tunnel.



En admettant que la présence du tunnel et du pendule ne modifie pas le champ de gravitation terrestre, déterminez la période des petites oscillations de ce pendule.

Corrigé :



Bilan des forces :
- tension du fil : $\vec{T}$ → non conservative mais ne travaille pas
- force d'attraction gravitationnelle : $\vec{F}_{grav}$ → conservative

Phase 1 : Déterminer $\vec{F}_{grav}$

1. Identifier la source : boule homogène de centre O et de rayon R et de masse M_T

2. Invariances et symétries
   - invariances selon θ et φ ⇒ $\vec{G}(M) = G_r(r)\,\vec{u_r} + G_\theta(r)\,\vec{u_\theta} + G_\varphi(r)\,\vec{u_\varphi}$
   - symétries

   $Vect_M(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $Vect_M(\vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie pour notre source

   donc $\vec{G}$ est compris dans l'intersection de ces plans

   i.e $\boxed{\vec{G} = G(r)\,\vec{u_r}}$

3. Surface de Gauss : on considère une sphère de centre O, de rayon r, passant donc par M, qu'on note S. orientée sortante : $d\vec{S}\,\vec{u_r}$

4. Flux : Alors

$$\oiint_S \vec{G}(M)\cdot d\vec{S} = \oiint_S G(r)\vec{u_r}\cdot dS\,\vec{u_r}$$

$$= \oiint_S G(r)\,dS \quad \text{et dans } S,\ \underline{r = cte}$$

d'où $\boxed{\oiint \vec{G}(M)\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2\, G(r)}$

5. M_{int} : On a $M_{int} = \rho \, \frac{4}{3}\pi r^3$ et $\rho = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ avec $r < R$

ρ : masse vol. de la Terre

d'où $\boxed{M_{int} = M_T \left(\frac{r}{R}\right)^3}$

6. Théorème de Gauss : On a alors $\oiint_S \vec{G}\cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{int}$

i.e $\cancel{4\pi} r^2 G(r) = -\cancel{4\pi}\,\mathcal{G} M_T \left(\frac{r}{R}\right)^3$ ⇒ $\boxed{G(r) = -\dfrac{\mathcal{G} M_T}{R^3}\times r}$ DONC $\boxed{\vec{F}_{grav} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T\, m}{R^3}\, r\, \vec{u_r}}$

Phase 2 : Déterminer la période des petites oscillations

Appliquons le théorème de la puissance mécanique car l'énergie mécanique se conserve $\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

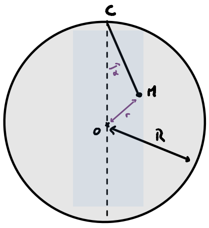
Comme on a un mvt circulaire, on a $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_c = \frac{1}{2} m (L\dot{\alpha})^2$$

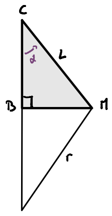
$E_p = m V(r)$ avec $\vec{G} = -\vec{\text{grad}}\, V$ et $V(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$ par invariances

...

i.e $$E_p = \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R^3} r^2 + \text{cte}$$



$\Rightarrow$



On a $\sin(\alpha) = \frac{BM}{L}$

$r^2 = BM^2 + BO^2$

$\cos\alpha = \frac{R - BO}{L}$

$\Rightarrow r^2 = L^2 \sin^2(\alpha) + (R - L\cos(\alpha))^2$

$\boxed{\text{ou}}$

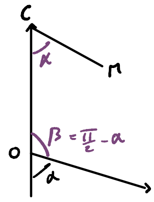
$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$

$\Rightarrow r^2 = (\vec{OC} + \vec{CM})^2$

$= \vec{OC}^2 + \vec{CM}^2 + 2\vec{OC}\cdot\vec{CM}$

$= R^2 + L^2 + 2RL\cos(\beta)$

avec $\beta = (\vec{OC}, \vec{CM})$



$$\Rightarrow \underbrace{r^2 = R^2 + L^2 - 2RL\cos(\alpha)}_{\text{il faut faire un DL pour obtenir qqchose de non-trivial}}$$

Ainsi, $E_p \simeq \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R^3} \left(R^2 + L^2 - 2RL\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dt} = \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R^3} \frac{d}{dt}(RL\alpha^2) = \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R^2} L\alpha\dot{\alpha}$$

De plus, $\frac{dE_c}{dt} = mL^2 \ddot{\alpha}\dot{\alpha}$

D'où : $mL^2 \ddot{\alpha}\cancel{\dot{\alpha}} + \mathcal{G} \frac{M_T m}{R^2} L\alpha\cancel{\dot{\alpha}} = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \mathcal{G} \frac{M_T}{LR^2} \alpha = 0$

$\Rightarrow$ oscillateur harmonique $\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{LR^2}}$

et $T = \frac{2\pi}{\omega}$

donc finalement, $$T = 2\pi R \sqrt{\frac{L}{\mathcal{G} M_T}}$$

Rmq : $G(R) = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R^2} = -g$ donc $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

↳ résultat inchangé !

2 - Champ gravitationnel dans une cavité sphérique

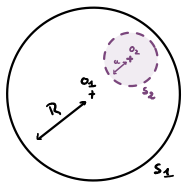
(Mines MP 2016)

1. Énoncez le théorème de Gauss gravitationnel.
2. Calculez le champ gravitationnel à l'intérieur d'un creux sphérique excentré de rayon a dans une sphère de rayon $R > a$ de masse volumique uniforme.

Corrigé :

① $\oiint_S \vec{G}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}$

② On considère donc le système suivant :



Ainsi, puisque le champ $\vec{G}$ est additif, on a : $\vec{G_{S_1}} = \vec{G_{S_1\setminus S_2}} + \vec{G_{S_2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\vec{G_{S_1\setminus S_2}}}_{\text{champ qu'on veut calculer}} = \underbrace{\vec{G_{S_1}} - \vec{G_{S_2}}}_{\text{2 champs qui se calculent avec le th. de Gauss}}} \quad (A)$$

Calcul de $\vec{G_{S_1}}$

① Identifier la source : boule homogène de centre O_1 et de rayon R, de masse volumique uniforme μ_1

② Invariances et symétries
- invariances selon θ et φ $\Rightarrow$ $\vec{G_{S_1}}(M) = G_{S_1,r}(r)\,\vec{u_r} + G_{S_1,\theta}(r)\,\vec{u_\theta} + G_{S_1,\varphi}(r)\,\vec{u_\varphi}$
- symétries

$\text{Vect}_M(\vec{u_r},\vec{u_\theta})$ et $\text{Vect}_M(\vec{u_r},\vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie pour notre source

donc $\vec{G_{S_1}}$ est compris dans l'intersection de ces plans

i.e $\boxed{\vec{G_{S_1}} = G_{S_1}(r)\,\vec{u_r}}$

③ Surface de Gauss : on considère une sphère de centre O_1 de rayon r, passant donc par M, qu'on note S.

orientée sortante : $\vec{dS} = dS\,\vec{u_r}$

④ Flux : Alors

$$\oiint_S \vec{G_{S_1}}(M)\cdot\vec{dS} = \oiint_S G_{S_1}(r)\,\vec{u_r}\cdot dS\,\vec{u_r}$$

$$= \oiint_S G_{S_1}(r)\,dS \qquad \text{et dans } S,\ \underline{r = cte}$$

d'où $\boxed{\oiint \vec{G_{S_1}}(M)\cdot\vec{dS} = 4\pi r^2\, G_{S_1}(r)}$

⑤ M_{int} : On a $M_{int} = \mu_1 \frac{4}{3}\pi r^3$ pour $r < R$ (on ne doit calculer qu'à l'intérieur du creux sphérique)

⑥ Théorème de Gauss On a alors $\cancel{4\pi r^2} G_{S_1}(r) = -\cancel{4\pi} G\mu_1 \frac{4}{3}\pi r^{\cancel{3}}$

d'où $G_{S_1}(r<R) = -G\mu_1\frac{4}{3}\pi r$

i.e $\boxed{\begin{aligned}\vec{G}_{S_1}(r<R) &= -\mu_1 G \frac{4}{3}\pi r \vec{u_r} \\ &= -\mu_1 G \frac{4}{3}\pi \vec{O_1M}\end{aligned}}$

Calcul de $\vec{G}_{S_2}$

① Identifier la source boule homogène de centre O_2 et de rayon a, de masse volumique uniforme μ_2

② Invariances et symétries
- invariances selon θ et φ ⇒ $\vec{G}_{S_2}(M) = G_{S_2,r}(r)\vec{u_r} + G_{S_2,\theta}(r)\vec{u_\theta} + G_{S_2,\varphi}(r)\vec{u_\varphi}$
- symétries

$\mathrm{Vect}_M(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $\mathrm{Vect}_M(\vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie pour notre source

donc $\vec{G}_{S_2}$ est compris dans l'intersection de ces plans

i.e $\boxed{\vec{G}_{S_2} = G_{S_2}(r)\vec{u_r}}$

③ Surface de Gauss on considère une sphère de centre O_2 de rayon r, passant donc par M, qu'on note S.

orientée sortante : $d\vec{S} = dS\vec{u_r}$

⚠ on ne parle pas du mm "r" que celui utilisé pour S_1 !!

④ Flux Alors

$$\oiint_S \vec{G}_{S_2}(M)\cdot d\vec{S} = \oiint_S G_{S_2}(r)\vec{u_r}\cdot dS\vec{u_r}$$

$$= \oiint_S G_{S_2}(r)\,dS$$ et dans S, $\underline{r = \text{cte}}$

d'où $\boxed{\oiint \vec{G}_{S_2}(M)\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 G_{S_2}(r)}$

⑤ Mint On a $M_{int} = \mu_2 \frac{4}{3}\pi r^3$ pour $r < a$

$M_{int} = \mu_2 \frac{4}{3}\pi a^3$ pour $r > a$ (comme $a < R$, on doit également s'intéresser à ce cas-là)

⑥ Théorème de Gauss On a alors

pour $r<a$: $\cancel{4\pi r^2} G_{S_2}(r<a) = -\cancel{4\pi} G \mu_2 \frac{4}{3}\pi r^{\cancel{3}}$ ⇒ $G_{S_2}(r<a) = -\frac{4}{3}\pi\mu_2 G r$

⇒ $\boxed{\begin{aligned}\vec{G}_{S_2}(r<a) &= -\frac{4}{3}\pi\mu_2 G r\vec{u_r} \\ &= -\frac{4}{3}\pi\mu_2 G \vec{O_2M}\end{aligned}}$

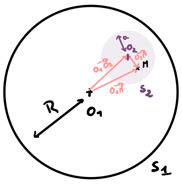
pour $r>a$: $\cancel{4\pi} r^2 G_{S_2}(r>a) = -\cancel{4\pi} G\mu_2\frac{4}{3}\pi a^3$ ⇒ $G_{S_2}(r>a) = -\frac{4}{3}\pi a^3 G\mu_2 \times \frac{1}{r^2}$

⇒ $\boxed{\vec{G}_{S_2}(r>a) = -\frac{4}{3}\pi a^3 G\mu_2 \times \frac{1}{r^2}\vec{u_r}}$

i.e $\boxed{\vec{G}_{S_2}(r>a) = -\frac{4}{3}\pi a^3 G \mu_2 \times \frac{\vec{O_2M}}{\|\vec{O_2M}\|^3}}$

Calcul de $\vec{G}_{S_1\setminus S_2}$

(A) $\Rightarrow$ $\vec{G}_{S_1\setminus S_2}(M \text{ est dans } S_2) = \vec{G}_{S_1}(r<R) - \vec{G}_{S_2}(\text{int. de } S_2)$



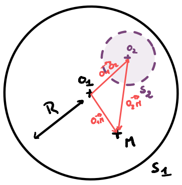
$$= -\mu_1 G \frac{4}{3}\pi \vec{O_1M} + \mu_2 \frac{4}{3}\pi G \vec{O_2M}$$

or $\vec{O_1M} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2M}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{O_2M} = \vec{O_1M} - \vec{O_1O_2}}$ (B)

D'où $\vec{G}_{S_1\setminus S_2}(M\in S_2) = \frac{4}{3}\pi G(\mu_2-\mu_1)\vec{O_1M} - \mu_2 \frac{4}{3}\pi G \vec{O_1O_2}$

$$= \frac{4}{3}\pi G(\mu_2-\mu_1)\, r\vec{u_r} - \underbrace{\mu_2 \frac{4}{3}\pi G \vec{O_1O_2}}_{\text{cte !!}}$$

Enfin, $\mu_1 = \mu_2$ DONC $\boxed{\vec{G}_{S_1\setminus S_2}(M\in S_2) = -\mu_2 \frac{4}{3}\pi G \vec{O_1O_2}}$



(A) $\Rightarrow$ $\vec{G}_{S_1\setminus S_2}(M\in S_1\setminus S_2) = -\frac{4}{3}\pi G\mu_1 \vec{O_1M} + \frac{4}{3}\pi a^3 G\mu_2 \frac{\vec{O_2M}}{\|\vec{O_2M}\|^3}$

$$= -\frac{4}{3}\pi G\left(\mu_1 - \left(\frac{a}{\|\vec{O_2M}\|}\right)^3 \mu_2\right)\vec{O_1M} - \frac{4}{3}\pi a^3 G\mu_2 \vec{O_1O_2} \times \frac{1}{\|\vec{O_2M}\|^3}$$

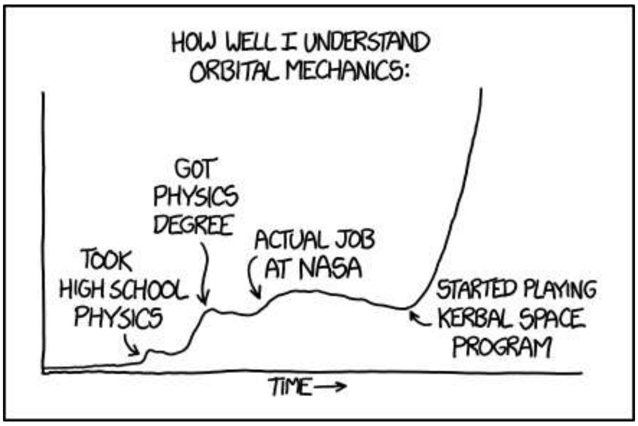
pas constant !

D'où $\vec{G}_{S_1\setminus S_2} = -\frac{4}{3}\pi\left(\mu_1 - \left(\frac{a}{\|\vec{O_2M}\|}\right)^3\mu_2\right) r\vec{u_r} - \frac{4}{3}\pi a^3 G\mu_2 \underbrace{\frac{\vec{O_1O_2}}{\|\vec{O_2M}\|^3}}_{\text{vrmt pas cst}}$

et $\mu_1 = \mu_2$

D'où

$$\boxed{\vec{G}_{S_1\setminus S_2}(M\in S_1\setminus S_2) = -\frac{4}{3}\pi \mu_2\left(1 - \left(\frac{a}{\|\vec{O_2M}\|}\right)^3\right) r\vec{u_r} - \frac{4}{3}\pi a^3 G \mu_2 \frac{1}{\|\vec{O_2M}\|^3}\vec{O_1O_2}}$$


HOW WELL I UNDERSTAND
ORBITAL MECHANICS:
GOT
PHYSICS
DEGREE
ACTUAL JOB
AT NASA
TOOK
HIGH SCHOOL
PHYSICS
STARTED PLAYING
KERBAL SPACE
PROGRAM
TIME