Groupe C : **S14**

Noélien Dutilleul, Julien Gery

Table des matières

Première partie

Questions de cours

1 Démonstration des deux théorèmes d'intégration des relations de comparaison (cas convergent et cas divergent)

Cas convergent :

.

Cas divergent :

.

Deuxième partie
Exercices

2 Exercice 17 (Centrale MP 2023)

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Donner la nature de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\, dt.$$
3. Donner la nature de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

2.1

(cf cours Sihrener : chapitre 23, pages 1-2)

2.2

Au voisinage de 0 : $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t} \sim \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Au voisinage de $+\infty$ (l'application $t \longmapsto \sqrt{t}$ étant bijective, C^1, strictement croissante sur $[1; +\infty[$) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\, dt = 2\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

Et on conclut comme dans le cours grâce à une IPP $\left(\textbf{où on dérive } \dfrac{1}{t}\right)$.

2.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\, dx - \frac{\sin\sqrt{n}}{n}.$$

Soit f une primitive de $x \longmapsto \frac{\sin\sqrt{x}}{x}$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_n^{n+1} f''(t)(n+1-t)\, dt$$

Or,

$$u_n = f(n+1) - f(n) - f'(n)$$

Donc :

$$u_n = \int_n^{n+1} f''(t)(n+1-t)\, dt = \int_n^{n+1} \frac{t\cos\sqrt{t} - 2\sqrt{t}\sin\sqrt{t}}{2\sqrt{t}t^2}(n+1-t)\, dt$$

En appliquant l'inégalité triangulaire :

$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} \frac{t + 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}t^2}\, dt$$

Or $\dfrac{t+2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}t^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right)$. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{t+2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}t^2}\,dt$ est convergente. Par conséquent, la série des u_n est absolument convergente, donc convergente. Or,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}.$$

Ainsi, $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.

2.3 *(bis)*

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n := \dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{n} \quad$ et $\quad w_n := e^{i\sqrt{n}}$.
Ainsi : $u_n = \dfrac{w_n}{n}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= e^{i\sqrt{n+1}} \\
&= e^{i\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= e^{i\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{i\sqrt{n}+\frac{i}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\
&= e^{i\sqrt{n}}\left(1+\frac{i}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= e^{i\sqrt{n}} + \frac{ie^{i\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Donc $w_{n+1} - w_n = \dfrac{iw_n}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
ie $u_n = \dfrac{w_n}{n} = -\dfrac{2i}{\sqrt{n}}(w_{n+1} - w_n) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On pose $v_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}(w_{n+1} - w_n)$.
En posant $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $b_n := w_{n+1} - w_n$, alors $v_n = a_n b_n$.

Transformation d'Abel sur v_n : soit $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \qquad \left(\text{où } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\right) \\
&= a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n B_n - \sum_{n=2}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_1 b_1 + a_N B_N - a_2 b_1 + \sum_{n=2}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N
\end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_1$$

Donc :

$$\begin{aligned}|B_n| &\leq |w_{n+1}| + |w_0| \quad \text{(I.T.)} \\ &\leq 2 \quad \text{(par définition des } w_n\text{)}\end{aligned}$$

Donc $a_N B_N \longrightarrow 0$.

Et $|(a_n - a_{n+1})B_n| \leq 2(a_n - a_{n+1})$ avec $\sum(a_n - a_{n+1})$ qui converge (comparaison suite-série).
Donc $\sum(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument.

Donc $\sum v_n$ converge.
Donc $\sum u_n$ converge (u_n étant somme de 2 termes généraux de séries convergentes).

Or,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}\end{aligned}$$

D'où $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ converge.

3 Exercice 18 (Centrale MP 2022)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $a_{n+1} \sim_{n\to\infty} a_n$.
2. Déterminer un équivalent de a_n à l'infini et déterminer la nature de la série $\sum a_n$.
3. En calculer la somme.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Avec une intégration par parties, obtenir une relation de récurence, puis montrer que $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers 1.

3.1

Il y a deux manières d'aborder cet exercice. La première est de poser le changement de variable $\sin(\theta) = t$, puis, à l'aide d'une intégration par parties, on retombe sur les intégrales de Wallis. Cette approche fonctionne très bien pour les deux premières questions, car au moins on sait à quoi s'attendre. La deuxième méthode est de faire une I.P.P., puis de trouver la relation de récurrence pour obtenir a_n.

Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt \\
&= \left[-t^{n-1}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}\right]_0^1 + \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^{n-2}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\, dt \quad \textbf{(*)} \\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^{n-2}\sqrt{1-t^2}\, dt - \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\, dt \\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2} - \frac{n-1}{3}a_n
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}.$$

$t \in [0,1]$ donc (a_n) est décroissante.
On calcule donc a_0 et a_1.
Ainsi, $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$. En divisant par $a_n \neq 0$ et en utilisant la relation de récurrence précédente, on obtient $a_{n+1} \sim a_n$.

3.2

Il faut donner ici l'expression des a_n, faire le produit de $a_{2n+1}a_{2n}$ (comme pour les intégrales de Wallis).

$$a_0 = a_0, \quad a_2 = \frac{1}{4}a_0, \quad a_4 = \frac{3}{6}\frac{1}{4}a_0$$

Ainsi, par une récurrence immédiate :

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{2n-1}{2n+2}\frac{2n-3}{2n}\cdots\frac{1}{4}a_0 \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}a_0
\end{aligned}$$

Et :

$$a_1 = a_1, \quad a_3 = \frac{2}{5}a_0, \quad a_5 = \frac{4}{7}\frac{2}{5}a_0$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+3}\frac{2n-2}{2n+1}\cdots\frac{2}{5}a_1 \\ &= (n+2)(n+1)\frac{(n!)^2 4^{n+1}}{(2n+4)!}3a_1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a_{2n}a_{2n+1} &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}a_0 \cdot (n+2)(n+1)\frac{(n!)^2 4^{n+1}}{(2n+4)!}3a_1 \\ &= \frac{(n+2)}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)}12a_1a_0 \end{aligned}$$

Donc :

$$a_n \sim \sqrt{\frac{6a_1a_0}{n^3}}$$

On en déduit donc que la série converge.

3.3

On pose $f_n(t) = t^n\sqrt{1-t^2}$ pour $t \in [0,1[$. On applique le théorème pour permuter la série et l'intégrale dans sa version positive sur un intervalle. Les f_n sont continues et intégrables, la série des f_n converge simplement vers f, qui est continue, et les f_n sont positives.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,dt$$

Cette intégrale existe, on pose le changement de variable. $u = \frac{1+t}{1-t}$ $t = \frac{u-1}{u+1}$, $dt = \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)^2}du = \frac{2}{(u+1)^2}du$.

Ainsi :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,dt = \int_1^{+\infty} \sqrt{u}\frac{2}{(u+1)^2}\,du$$

On pose $x = \sqrt{u}$, $x^2 = u$, $du = 2xdx$:

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{u}\frac{2}{(u+1)^2}\,du = \int_1^{+\infty} x\frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

On fait une I.P.P :

$$\int_1^{+\infty} x\frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left[\frac{-2x}{x^2+1}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2+1}\,dx = 1 + 2\left[\arctan x\right]_1^{+\infty} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

4 Exercice 19 (Centrale MP 2021)

On considère

$$c = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x)\, dx$$

1. Montrer l'existence de c.
2. Montrer que $c < 0$.

4.1

Au voisinage de 0 : par croissances comparées, $e^{-x}\ln(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x) = \underset{0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées (en utilisant le fait que $\ln(x) \leq 1 + x$), $e^{-x}\ln(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

4.2

$$\begin{aligned} c &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\, dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} \ln x\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x\, dx \quad \text{(les 2 intégrales convergent)} \end{aligned}$$

L'application $\begin{cases} [1; +\infty[\longrightarrow]0; 1] \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ étant bijective, C^1, strictement décroissante :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x\, dx &= \int_0^1 e^{-\frac{1}{u}} \ln\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}\, du \quad \left(u = \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{u},\ dx = -\frac{1}{u^2}\, du\right) \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{1}{u}} (-\ln u) \frac{1}{u^2}\, du \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 e^{-x} \ln x\, dx - \int_0^1 e^{-\frac{1}{u}} \ln u \frac{1}{u^2}\, du \\ &= \int_0^1 \ln x \left(e^{-x} - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\right) dx \end{aligned}$$

On sait que, sur $]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$.

Et, sur $]0; 1]$:

$$\begin{aligned} e^{-x} - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \geq 0 \quad &\iff \quad x^2 e^{-x} \geq e^{-\frac{1}{x}} \\ &\iff \quad e^{-x+2\ln x} \geq e^{-\frac{1}{x}} \\ &\iff \quad -x + 2\ln x \geq -\frac{1}{x} \quad \text{(car exp et ln strictements croissants sur }]0; 1]) \\ &\iff \quad x^2 - 2x\ln x \leq 1 \end{aligned}$$

Posons $g : x \longmapsto x^2 - 2x\ln x$.
g est dérivable et $\forall x \in]0;1]$, $g'(x) = 2(x - \ln x - 1)$, donc $g'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x - \ln x \geq 1$.

Posons $h : x \longmapsto x - \ln x$.
h est dérivable et $\forall x \in]0;1]$, $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} \leq 0$ donc h décroissante.
Or, $h(1) = 1$.
Donc, sur $]0;1]$, $h(x) \geq 1$.

Donc g croissante sur $]0;1]$.
Or, $g(1) = 1$.
Donc, sur $]0;1]$, $x^2 - 2x\ln x \leq 1$ ie $e^{-x} - \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \geq 0$.
Donc $x \longmapsto \ln x \left(e^{-x} - \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \right)$ est négative C^0 sur $]0;1]$, d'où $c \leq 0$, mais n'est pas la fonction nulle, d'où $c < 0$.

5 Exercice 20

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = 4\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(8k+1)(8k+5)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi+\ln(3+2\sqrt{2})\right).$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x$$

(*) **(cf Ex. 21)** On montre que l'on peut permuter somme et intégrale.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{4n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(*) **(cf Ex. 21)** En passant par les sommes partielles, on prouve que :

$$4\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(8k+1)(8k+5)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1\frac{dx}{x^4+1}$$

(À partir de maintenant, tout n'est que calcul immonde)

Or,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+i)(x^2-i)}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+i)(x^2-i)} &= \frac{\frac{i}{2}}{x^2+i}+\frac{-\frac{i}{2}}{x^2-i}\\ &= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x^2+i}-\frac{1}{x^2-i}\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+i} &= \frac{1}{(x+e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{\pi}{4}})}\\ &= \frac{-\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}}{x+e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}}\\ &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\frac{1}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{x+e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}} &= \frac{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{\pi}{4}})}\\ &= \frac{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{x^2-x\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)+1} \quad \text{avec } e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\\ &= \frac{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}-2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} &= \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\\ &= 2\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2+1} \quad \text{(ce qui s'intègre avec de l'Arctan)}\end{aligned}$$

Le reste des calculs est analogue donc flemme (après, peut-être que certaines choses se simplifient).

6 Exercice 20 *(bis)*

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = 4\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(8k+1)(8k+5)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi+\ln(3+2\sqrt{2})\right).$$

On commence par le calcul de l'intégrale :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Un calcul fastidieux nous donne pour primitive :

$$\frac{-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-2\arctan(1-\sqrt{2}x)+2\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)}{4\sqrt{2}}$$

Il suffit donc de faire la différence entre les valeurs aux bornes 0 et 1. En 0, cela vaut 0, et en 1, il faut effectuer un calcul de limite en utilisant la formule $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.
Pour le calcul de la fraction, on effectue d'abord une décomposition en éléments simples.

$$\frac{4}{(8X+1)(8X+5)} = \frac{1}{8X+1}-\frac{1}{8X+5}$$

L'idée ici est de partir de la série entière $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x|<1$, de multiplier par x^k avec k qui convient, puis de primitiver pour obtenir ce qu'il faut au dénominateur. Par exemple, on veut du $\frac{1}{8n+5}$. Quand on primitive x^α, on obtient $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$. On prend donc $\alpha=8n+4$. Or $\sum x^{8n+4}=\frac{x^4}{1-x^8}$ pour $|x|<1$. On fait de même pour $\frac{1}{8n+1}$. Soit $x\in\mathbb{R}, |x|<1$. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^{8n}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^{8n+4} = \frac{1}{1-x^8}-\frac{x^4}{1-x^8} = \frac{1}{1+x^4}$$

Et on veut primitiver cela. La quantité de droite est déjà calculée. La quantité de gauche est la somme de deux séries entières. Or, une fonction définie par une série entière est primitivable terme à terme. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}, |x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{8n+1}}{8n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{8n+5}}{8n+5} = 0+\frac{-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-2\arctan(1-\sqrt{2}x)+2\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)}{4\sqrt{2}}$$

On pose donc $f(x)=\sum\frac{x^{8n+1}}{8n+1}-\sum\frac{x^{8n+5}}{8n+5}$ pour $x\in\mathbb{R}, |x|<1$. Ainsi, f est définie par une série entière en tant que somme de séries entières, et on montre aisément que f admet une limite finie en 1 ($f(1)$ existe). D'après le théorème de convergence radiale d'Abel :

$$f(1) = \lim_{x\to1^-} 0+\frac{-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-2\arctan(1-\sqrt{2}x)+2\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)}{4\sqrt{2}}$$

Ce qui permet de conclure.

7 Exercice 21 (X 2007 134)

Calculer
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{4k+1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{4k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq 2N+1} \frac{1}{2(2k)+1} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq 2N+1} \frac{1}{2(2k+1)+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

Or, ces 2 séries convergent ($\sim \dfrac{1}{16k^2}$ & CCSA).
D'où, par unicité de la limite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Et, pour $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \right) \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x &= \int_0^1 S_N(x) + R_N(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 S_N(x) \mathrm{d}x + \int_0^1 R_N(x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x + \int_0^1 R_N(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 R_N(x)\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^1 |R_N(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \left|(-1)^{N+1}x^{2N+2}\right|\mathrm{d}x \quad \text{(CCSA)} \\
&\leq \int_0^1 x^{2N+2}\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2N+3} \longrightarrow 0 \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité de la limite :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{\pi}{8}$$

8 Exercice 21 (X 2007 134) *(bis)*

Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

Cet exercice est analogue au précédent.
On effectue une décomposition en éléments simples, puis on détermine la décomposition en série entière.

$$\frac{2}{(4X+1)(4X+3)} = \frac{1}{4X+1} - \frac{1}{4X+3}$$

Soit $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n+2} = \frac{1}{1-x^4} - \frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1}{1+x^2}$$

Le membre de droite est une dérivée connue. Le membre de gauche est une somme finie de séries entières. Or, une fonction définie par une série entière est primitivable terme à terme. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} = 0 + \arctan x$$

On pose donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$. Ainsi, f est définie par une série entière en tant que somme de séries entières, et on montre aisément que f admet une limite finie en 1 ($f(1)$ existe). D'après le théorème de convergence radiale d'Abel :

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} 0 + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8}$$

9 Exercice 22

On pose

$$I = \int_0^{+\infty} x e^{-x^6 \sin^2(x)}\, dx, \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x e^{-x^6 \sin^2(x)}\, dx.$$

1. Montrer que pour tout réel $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin^2(t) \geq \frac{4t^2}{\pi^2}$.
2. En déduire la convergence de la série de terme général u_n.
3. En déduire la convergence de I.

9.1

La fonction sinus est concave, donc elle est supérieure ou égale à ses cordes. La droite $y = \dfrac{2}{\pi}x$ est une corde de sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x \geq 0$. Par la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $\sin^2(x) \geq \dfrac{4}{\pi^2}x^2$ pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Un argument de parité permet de conclure pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

9.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $t = x - n\pi$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x e^{-x^6 \sin^2(x)}\, dx &= \int_0^{\pi} (t + n\pi) e^{-(t+n\pi)^6 \sin^2(t)}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (t + n\pi) e^{-(t+n\pi)^6 \sin^2(t)}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (t + n\pi) e^{-(t+n\pi)^6 \sin^2(t)}\, dt\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, on pose $u = t - \pi$. Ainsi :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (t + n\pi) e^{-(t+n\pi)^6 \sin^2(t)}\, dt = \int_{-\pi/2}^{0} (u + (n+1)\pi) e^{-(u+(n+1)\pi)^6 \sin^2(u)}\, du$$

En utilisant la minoration précédente, on obtient une majoration de u_n. Je ne détaille que la seconde intégrale, l'autre étant analogue. Soit $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$:

$$(u + (n+1)\pi) \leq (n+1)\pi$$

$$(u + (n+1)\pi)^6 \sin^2(u) \geq (n\pi)^6 \frac{4}{\pi^2} u^2$$

Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto -x$ et par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{-(u+(n+1)\pi)^6 \sin^2(u)} \leq e^{-n^6 \pi^4 4 u^2}$$

$$(u + (n+1)\pi) e^{-(u+(n+1)\pi)^6 \sin^2(u)} \leq (n+1)\pi e^{-n^6 \pi^4 4 u^2}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{-\pi/2}^{0} (u + (n+1)\pi) e^{-(u+(n+1)\pi)^6 \sin^2(u)}\, du \leq \int_{-\pi/2}^{0} (n+1)\pi e^{-n^6 \pi^4 4 u^2}\, du$$

On pose, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = (n+1)\pi e^{-n^6 \pi^4 4 x^2}$.

Sous réserve d'existence, on pose (a_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, a_n\right], f(x) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

et

$$\forall x \in [a_n, 0], f(x) \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

On prend donc $n \geq 1$.
On doit résoudre $f(x) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

$$\begin{aligned}
(n+1)\pi e^{-n^6\pi^4 4x^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} &\iff e^{-n^6\pi^4 4x^2} \leq \frac{1}{\pi(n+1)^3} \\
&\iff -n^6\pi^4 4x^2 \leq -\ln\left(\pi(n+1)^3\right) \\
&\iff n^6\pi^4 4x^2 \geq \ln\left(\pi(n+1)^3\right) \\
&\iff x^2 \geq \frac{\ln\left(\pi(n+1)^3\right)}{n^6\pi^4 4} \\
&\iff x^2 \geq \frac{\ln\left(\pi(n+1)^3\right)}{n^6\pi^4 4} \\
&\iff x \leq -\sqrt{\frac{\ln\left(\pi(n+1)^3\right)}{n^6\pi^4 4}} = -\frac{\sqrt{\ln\left(\pi(n+1)^3\right)}}{n^3\pi^2 2}
\end{aligned}$$

donc $a_n = -\frac{\sqrt{\ln\left(\pi(n+1)^3\right)}}{n^3\pi^2 2}$.

$$\int_{-\pi/2}^{0} f(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{a_n} f(u)\,du + \int_{a_n}^{0} f(u)\,du \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{(n+1)^2} - a_n\|f\|_\infty^{[a_n,0]} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Ce qui permet de conclure.

9.3

On pose $f(t) = \int_0^t xe^{-x^6}\sin^2(x)\,dx$ pour $t > 0$.
Ainsi, f est croissante et majorée par $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
Donc f admet une limite finie en $+\infty$: I converge.

10 Exercice 23 (ENS MP 2021)

1. On pose $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(\pi - x)^n \sin(x)\,dx$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg P_n = n$ et $I_n = P_n(\pi)$.
2. Montrer que $0 < I_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{n!}$.
3. En déduire que π est irrationnel.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

1) Il m'a conseillé de poser $\forall x, f(x) = x^n(\pi - x)^n$ et d'étudier $J_k = \dfrac{1}{n!}\int_0^\pi f^k(x)\sin(x)dx$.

Remarque : il faut aller chercher des questions intermédiaires en plus !

10.1

?

10.2

$\forall x \in [0;\pi]$, $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq \pi - x \leq \pi$.

D'où :

$$x(\pi - x) \leq \pi^2$$

$$x^n(\pi - x)^n \leq \pi^{2n}$$

$$x^n(\pi - x)^n \sin(x) \leq \pi^{2n} \quad \text{(car le sin est positif sur } [0;\pi])$$

$$\int_0^\pi x^n(\pi - x)^n \sin(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^\pi \pi^{2n}\mathrm{d}x = \pi^{2n+1} \quad \text{(par croissance de l'intégrale)}$$

$$I_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{n!}$$

10.3

Supposons :

$$\pi = \frac{p}{q} \quad (p,\, q \in \mathbb{N}^*)$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_n &= P_n(\pi) \\
&= a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\frac{p}{q} + \cdots + a_n^{(n)}\frac{p^n}{q^n} \quad \left(a_0^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{Z}\right) \\
&= \frac{a_0^{(n)}q^n + a_1^{(n)}pq^{n-1} + \cdots + a_n^{(n)}p^n}{q^n} \\
&= \frac{1}{q^n}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}p^k q^{n-k} \\
&\left(\text{avec } \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}p^k q^{n-k} \text{ et } q^n \in \mathbb{N}^* \text{ car } I_n > 0\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$0 < I_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{n!} = \frac{p^{2n+1}}{q^{2n+1}n!}$$

$$0 < \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} p^k q^{n-k} \leq \frac{p^{2n+1}}{q^{2n+1} n!} < \frac{(p^2)^{n+1}}{n!} = p^2 \cdot \frac{(p^2)^n}{n!}$$

Or,

$$\frac{(p^2)^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

Donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{(p^2)^n}{n!} \leq \frac{1}{p^2}$$

D'où, pour $n = n_0$:

$$0 < \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} p^k q^{n-k} \ (\in \mathbb{N}^*) < 1$$

Absurde.

ANNEXE

Démonstration élémentaire de l'irrationalité de π

N. Lygeros

Pour démontrer de manière élémentaire l'irrationalité de π, nous allons utiliser le raisonnement par l'absurde d'Ivan Niven. Considérons que π est le quotient de deux entiers.

Définissons les deux polynômes suivants :

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

et

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Comme $n!f(x)$ a des coefficients entiers et des termes en x de degré supérieur à n, et ses dérivées ont des valeurs entières pour $x=0$. C'est aussi le cas pour $x=\pi=a/b$ puisque $f(x)=f(a/b-x)$.

Un calcul élémentaire sur les séries entières montre que :

$$\frac{d}{dx}\left\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

donc $$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = \left[F'(x).\sin x - F(x)\cos\right]_0^{\pi} = F(\pi)+F(0)$$

Comme $f^{(i)}(\pi)$ et $f^{(i)}(0)$ sont des entiers, nous en déduisons que $F(\pi)+F(0)$ est un entier.

Seulement pour $0<x<\pi$, nous avons :

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Aussi l'intégrale est positive mais arbitrairement petite pour n suffisamment grand. Ce qui est absurde !

Donc π n'est pas rationnel.