Khôlles : Semaine 15

- 08 - 12 Janvier 2024 -

Sommaire

1 Questions de cours - Tout groupe

1.1 Définition de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie.

Définition

Soient E et F, deux ensembles. Soit $A \subset E$, $B \subset F$. Soit $f : A \to F$, une application.

On appelle Image directe de A par F l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$

Réciproquement, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

1.2 Définition d'une variable aléatoire (discrète) + l'image réciproque d'une partie de $X(\Omega)$ est un élément de la tribu (démo).

Définition

Soit (Ω, T, p), espace probabilisé.

On appelle variable aléatoire sur Ω une application $X : \begin{cases} \Omega \to X(\Omega) \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{cases}$ telle que :

- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable
- $\forall x_0 \in X(\Omega)$, $[X = x_0] = \{w \in \Omega \mid X(w) = x_0\} = X^{-1}(\{x_0\}) \in T$

Proposition

Soit (Ω, T, p), espace probabilisé. $X : \Omega \to X(\Omega)$, une V.A.

Alors, $\forall A \subset \Omega, [X \in A] = X^{-1}(A) \in T$, donc $p([X \in A])$ existe.

Preuve **:**

Soit $A \subset \Omega$. $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$.

$\left.\begin{array}{l} \bullet X(\Omega) \text{ fini ou dénombrable} \\ \bullet A \subset X(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow A$ fini ou dénombrable.

$[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x \in A} X^{-1}(\{x\})$.

$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{Or, par définition d'une V.A} : \forall x \in A, X^{-1}(\{x\}) \in T \\ \bullet A \text{ fini ou dénombrable} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{x \in A} X^{-1}(\{x\}) \in T \Rightarrow X^{-1}(A) \in T$

1.3 Si X est une variable aléatoire, $f(X)$ est une variable aléatoire (démo).

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $X : \Omega \to X(\Omega)$, V.A :

Soit $f : X(\Omega) \to f(X(\Omega))$, une fonction.
Alors $f(X) : \Omega \to f(X(\Omega))$ est une V.A.

Preuve :

X V.A $\Rightarrow$ $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable $\Rightarrow$ $f(X(\Omega))$ est fini ou dénombrable.

$$f(X(\Omega)) = \{f(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{f(x)\}$$

$\forall y \in f(X(\Omega)), [f(X) = y] = \left[X \in f^{-1}(y)\right]$. Or, $f^{-1}(y) \subset X(\Omega) \Rightarrow [f(X) = y] \in T$

1.4 Définition de deux variables aléatoires indépendantes, et de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ espace probabilisé. Soient X et Y, deux Variables aléatoires.

On dit que X et Y sont deux V.A Indépendantes si

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ p([X = x_0], [Y = y_0]) = p([X = x_0]) \times p([Y = y_0])$$

De même avec $X_1, \dots, X_n$, famille de n Variables aléatoires : On dit que les (X_i) sont mutuellement indépendantes lorsque $\forall \{a_1, \dots, a_k\} \subset [\![1, n]\!]$, nous avons $\mathbb{P}(\bigcap_{a_i} [X_{a_i} = x_i]) = \prod_{a_i} \mathbb{P}([X_{a_i} = x_i])$.

1.5 X, Y indépendantes $\Rightarrow$ $f(X)$ et $g(Y)$ indépendantes (démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $X : \Omega \to X(\Omega), Y : \Omega \to Y(\Omega)$, deux V.A indépendantes :

Soient $f : X(\Omega) \to A, \quad g : Y(\Omega) \to B$.
Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux V.A indépendantes.

Preuve :

$\forall a \in A, b \in B$:
$[f(X) = a] = \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(\{a\})\} = \{X \in f^{-1}(\{a\})\}$.

$$p([f(X) = a, g(Y) = b]) = p\left([X \in f^{-1}(\{a\})] \cap [Y \in g^{-1}(\{b\})]\right)$$

Or, par indépendance de X et Y, nous avons :

$$\begin{aligned} &= p\left([X \in f^{-1}(\{a\})]\right) \times p\left([Y \in g^{-1}(\{b\})]\right) \\ &= p([f(X) = a]) \times p([g(Y) = b]) \end{aligned}$$

1.6 Calcul de l'espérance des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à l'aide de la définition.

Proposition

1. Si $X \rightsquigarrow B(p)$, alors $E(X) = p$
2. Si $X \rightsquigarrow B(n,p)$, alors $E(X) = np$
3. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$
4. Si $X \rightsquigarrow P(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$

Pour 3. et 4.; il faut en plus montrer que $E(X)$ est finie, X admet une espérance ou X admet un moment d'ordre 1

Preuve :

1. $X(\Omega) = \{0,1\}$. Nous avons $p([X=1]) = p$, donc $E(X) = 0 \times p([X=0]) + 1 \times p([X=1]) = p$
2. $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Nous avons deux façons d'évaluer cette somme :
   - En développant le coefficient binomial :
   $$\begin{aligned}
   &= \sum_{k=1}^{p} k \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times (n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} \\
   &= n \times \sum_{k=1}^{p} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-1-(k-1))!} \times p \times p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\
   &= np \times \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-1)!}{i! \times (n-1-i)!} \times p^i (1-p)^{n-1-i} \\
   &= np(p+1-p)^{n-1} = np
   \end{aligned}$$
   - En paramétrisant et se ramenant à un polynôme :
   $$\begin{aligned}
   (X+a)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k a^{n-k} \\
   &\Big\downarrow \frac{d}{dx} \\
   n(X+a)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k-1} a^{n-k} \\
   &\Big\downarrow \times X \\
   nX(X+a)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^k a^{n-k}
   \end{aligned}$$

   Ainsi, en prenant $X = p$, $a = 1-p$, nous obtenons $E(X) = np(p+1-p)^{n-1} = np$
3. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\quad p([X=k]) = p(1-p)^{k-1}$.
   Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $u_k = |kp([X=k])| = \left|kp(1-p)^{k-1}\right|$.

Alors, $u_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ car $k^3p(1-p)^{k-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ par C.C
Ainsi, $\sum_k u_k$ Converge, donc $\sum_k kp([X=k])$ converge absolument. X est alors d'espérance finie.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}$$

Par séries entières :

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \frac{d}{dx}$$

Ainsi, en posant $x = 1-p \in]-1,1[$, $E(X) = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

4. $X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, p([X=k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
   On note $u_k = \left|ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \in \mathbb{R}_+ \; (= \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!})$.
   Ainsi, $\sum_n u_n = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \Rightarrow$ X est d'espérance finie.
   Donc $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$

1.7 Une loi géométrique est une loi sans mémoire (démo, rappeler le sens de cela)

Définition

Soit X, V.A à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On dit que X est une V.A sans mémoire (ou suit une loi sans mémoire) si :

$$\forall x, y \geqslant 0, \quad p([X \geqslant x+y]/[X \geqslant y]) = p([X \geqslant x])$$

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $p \in]0,1]$.

Soit X, V.A sur (Ω, T, p), telle que $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, alors X est une V.A sans mémoire
i.e : $\forall n, q \in \mathbb{N}, \quad p([X>n+q]/[X>n]) (= p_{[X>n]}([X>n+q])) = p([X>q])$

Preuve :

$[X>n]$: On commence par n échecs :

$$[X>n] = \bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} [X=k] \qquad \left(\bigsqcup = \text{ union disjointe}\right)$$

$$p([X>n]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p([X=k]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

$$p([X>n+q]/[X>n]) = \frac{p([X>n+q] \cap [X>n])}{p([X>n])}.$$

Or, nous avons l'inclusion : $[X>n] \supset [X>n+q]$. Ainsi :

$$= \frac{p([X>n+q])}{p([X>n])} = \frac{(1-p)^{n+q}}{(1-p)^n} = (1-p)^q$$

1.8 Propriété de l'espérance (linéarité, positivité, (démo), croissance).

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $X : \Omega \to X(\Omega), Y : \Omega \to Y(\Omega)$, deux V.A à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

X, Y d'espérance finies $\Rightarrow$ $\lambda X + \mu Y$ d'espérance finie et $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, T, p)$ (= admettent une espérance).

1. $X \geqslant 0 \Rightarrow E(X) \geqslant 0$
2. $X \geqslant Y \Rightarrow E(X) \geqslant E(Y)$

Preuve :

1. $X \geqslant 0 \Rightarrow \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0 : X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p([X=x]) \geqslant 0$$

2. Par positivité de $X - Y$: $E(X - Y) = E(X) - E(Y) \geqslant 0 \Rightarrow E(X) \geqslant E(Y)$

1.9 Énoncé du théorème de transfert.

Théorème de Transfert

(Ω, T, p), espace probabilisé. X V.A sur (Ω, T, p). $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La variable aléatoire $f(X)$ est alors d'espérance finie si et seulement si $(f(x) \cdot p([X=x]))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Auquel cas

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \cdot p([X=x])$$

1.10 Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Proposition
(Ω, T, p), espace probabilisé. X, Y, deux V.A de (Ω, T, p) à valeurs réelles.

Si $X, Y \in \mathscr{L}^1$ et X, Y indépendantes : Alors

$$E(X \times Y) \in \mathscr{L}^1 \quad \text{et} \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

1.11 Variance d'une somme de variables aléatoires.

Proposition
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ espace probabilisé, avec $X_1, \ldots, X_n$, des Variables aléatoires.

Nous avons alors

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_i\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Remarquons de plus que lorsque ces variables sont mutuellement indépendantes, les covariances s'annulent, et la variance d'une somme devient la somme des variances.

1.12 Inégalité de Markov (2 démos, choisissez-en une)

Proposition
(Ω, T, p), espace probabilisé. X, V.A sur (Ω, T, p) à valeurs réelles positives!

On suppose $X \in \mathscr{L}^1$. Alors :

$$\forall a \geqslant 0, p([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

***Preuve* Version 1 :**

On pose $X^+ = \{x \in X(\Omega) \mid x \geqslant a\}$ et $X^- = \{x \in X(\Omega) \mid x < a\}$.

Nous avons alors $X(\Omega) = X^+ \sqcup X^-$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p([X = x]) = \sum_{x \in X^+} x \cdot p([X = x]) + \sum_{x \in X^-} x \cdot p([X = x])$$

Or, $\displaystyle\sum_{x \in X^-} x \cdot p([X = x]) \geqslant 0$ car $X \geqslant 0$. Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &\geqslant \sum_{x \in X^+} x \cdot p([X = x]) \\ &\geqslant a \cdot \sum_{x \in X^+} \cdot p([X = x]) \\ \frac{E(X)}{a} &\geqslant p([X \geqslant a]) \end{aligned}$$

Lemme

(Ω, T, p), espace probabilisé. $a \in T$. On note $\mathbb{1}_a : \begin{cases} \Omega \to \{0;1\} \\ \omega \mapsto \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in a \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \end{cases}$.

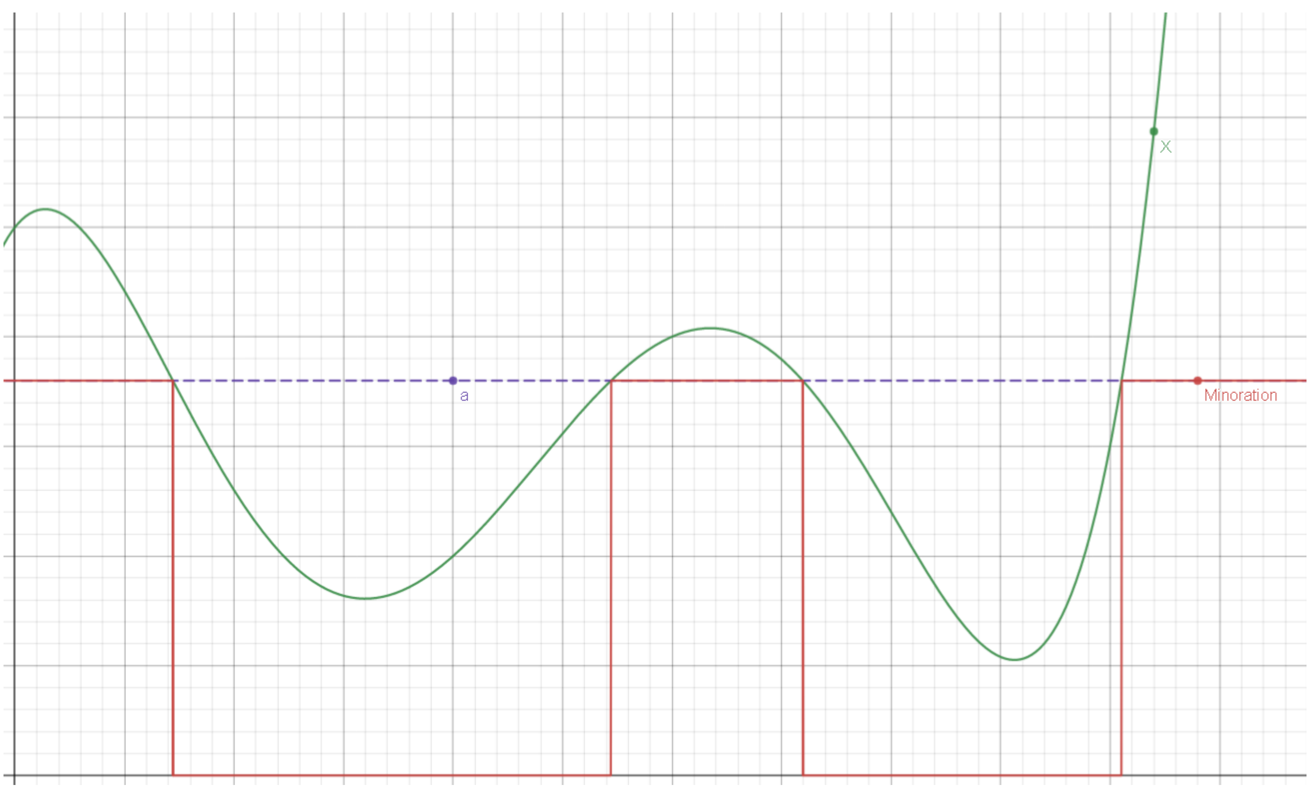
Alors, $\mathbb{1}_a$ est une V.A. De plus, $E(\mathbb{1}_a)$ existe et vaut $p(a)$.

***Preuve* du Lemme :**

1. - $\mathbb{1}_a(\Omega) \subset \{0;1\}$ donc est fini.
   - ${\mathbb{1}_a}^{-1}(\{0\}) = [\mathbb{1}_a = 0] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{1}_a(\omega) = 0\} = \overline{a} \in T$ car T stable par complémentaire.
   - ${\mathbb{1}_a}^{-1}(\{1\}) = [\mathbb{1}_a = 1] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{1}_a(\omega) = 1\} = a \in T$
2. $E(\mathbb{1}_a)$ existe et est finie. $E(\mathbb{1}_a) = \displaystyle\sum_{x \in \mathbb{1}_a(\Omega)} x \cdot p([\mathbb{1}_a = x]) = p([\mathbb{1}_a = 1]) = p(a)$

***Preuve* Version 2 :**

Soit $A = [X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\}$.



$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant a\mathbb{1}_a$$

Car : si $\omega \in A$: $X(\omega) \geqslant a$ et $a\mathbb{1}_a = a \Rightarrow X(\omega) \geqslant a\mathbb{1}_a$
Sinon, $a\mathbb{1}_a = 0$, or X est une V.A positive, donc $X(\omega) \geqslant 0 = a\mathbb{1}_a$.

Donc :

$$E(X) \geqslant E(a\mathbb{1}_a) = ap(a) \Rightarrow E(X) \geqslant ap([X \geqslant a]) \Rightarrow \frac{E(X)}{a} \geqslant p([X \geqslant a])$$

1.13 Si X admet un moment d'ordre 2, X est d'espérance finie (démo)

Proposition
Si X admet une variance, alors X admet une espérance

Preuve :

$$|X| = |X \times \tilde{1}| \leqslant \frac{|X|^2 \times |\tilde{1}|^2}{2}$$

Or, X^2 est d'espérance finie car $X \in \mathscr{L}^2$ et $\tilde{1}$ est d'espérance finie $(= 1)$.
Ainsi, $X^2 + 1$ est d'espérance finie, donc X est d'espérance finie.

Preuve* Version 2 (valable pour n'importe quel ordre) *:

Si $E(X)$ existe :

$E(X) = \sum_x x \cdot p([X = x])$. $\quad E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot p([X = x])$.
On note $X^+ = \{x \in X(\Omega) \mid |x| > 1\}$, $X^- = \{x \in X(\Omega) \mid |x| \leqslant 1\}$

Alors, $X(\Omega) = X^+ \sqcup X^-$.

- Si $x \in X^+$, $|x \cdot p([X = x])| \leqslant |x^2 \cdot p([X = x])|$
- Si $x \in X^-$, $|x \cdot p([X = x])| \leqslant p([X = x])$

Or, $\left(x^2 \cdot p([X = x])\right)_x$ et $(p([X = x]))_x$ sont sommables par hypothèse.
Ainsi, $(x \cdot p([X = x]))_x$ est sommable, donc X est d'espérance finie.

1.14 Inégalité de Bienaymé Tchebychev

Proposition
(Ω, T, p), espace probabilisé. X, V.A à valeurs réelles. On suppose $X \in \mathscr{L}^2$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad p\left([|X - E(X)| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \left[\frac{\sigma(X)}{\varepsilon}\right]^2$$

1.15 Lien entre l'existence de l'espérance et de la variance et la dérivabilté de G_X en 1. (démo pour X d'espérance finie $\Rightarrow$ G_X dérivable en 1)

Définition

(Ω, T, p), espace probabilisé. X, V.A à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On appelle **Fonction génératrice de la V.A** X la série entière :

$$G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p([X=n])t^n$$

Proposition

1. X admet une espérance $\iff$ G_X est dérivable en 1. Auquel cas, $E(X) = G_X'(1)$
2. X admet une variance $\iff$ G_X est deux fois dérivable en 1.
   Auquel cas $G_X'' = E(X^2) - E(X)$ (on peut retrouver $V(X)$)

Preuve :

$\Rightarrow$:

$X \in \mathscr{L}^1$: $(np([X=n]))_n$ est sommable : $\sum_n np([X=n])$ ABS. CV.

$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p([X=n])t^n$. On pose $f_n : t \mapsto p([X=n])t^n$.

Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[0,1]$:

H_1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et $f_n'(t) = np([X=n])t^{n-1}$

H_2 : $\sum_n f_n$ CVS sur $[0,1]$ car $R_{G_X} \geqslant 1$ et $\sum_n p([X=n])$ CV.

H_3 : $\sum_n f_n'$ CVU sur $[0,1]$ car $\|f_n'\|_\infty^{[0,1]} = np([X=n])$.
Or, $X \in \mathscr{L}^1$, donc la série des $\|f_n'\|_\infty^{[0,1]}$ Converge.

Alors, G_X est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et G_X est dérivable en 1

1.16 Espérance et variance des lois usuelles à l'aide de G_X. (démo)

- Si $X \rightsquigarrow B(p)$: $\forall t : G_X(t) = p([X=0])t^0 + p([X=1])t^1 = (1-p)+pt$
  Donc $R_{G_X} = +\infty \Rightarrow G_X$ est $\mathscr{C}^{+\infty} \Rightarrow X \in \mathscr{L}^2 \Rightarrow X \in \mathscr{L}^1$.

  $G_X'(t) = p \Rightarrow E(X) = p \quad G_X''(1) = 0 \Rightarrow V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2 = p(1-p)$

- Si $X \rightsquigarrow B(n,p)$, $n \geqslant 2$, $X(\Omega) = [\![0,n]\!] \subset \mathbb{N}$.

  $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} p([X=k])t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pt+1-p)^n \end{aligned}$$

  Donc, $R_{G_X} = +\infty \Rightarrow X \in \mathscr{L}^2$.

  $G_X'(t) = np(1-p+tp)^{n-1}, \quad G_X'(1) = np$

  $G_X''(t) = n(n-1)p^2(1-p+tp)^{n-2}, \quad G_X''(1) = n(n-1)p^2$

  Donc $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

- Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

  $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p([X=n])t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \\ &= pt \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{n-1} \end{aligned}$$

  Nous avons convergence si et seulement si $(1-p)t<1 \iff |t|<\dfrac{1}{1-p}$

  $\Rightarrow R_{G_X} = \dfrac{1}{1-p} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

  $G_X(t) = pt \cdot \dfrac{1}{1-t(1-p)}$. Or, $p>0 \Rightarrow \dfrac{1}{1-p} > 1 \Rightarrow G_X$ est $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $[-1,1] \Rightarrow X \in \mathscr{L}^2$.

  $G_X'(t) = \dfrac{p}{(1-(1-p)t)^2}, \quad G_X'(1) = \dfrac{1}{p}$

  $G_X''(t) = \dfrac{-2p(p-1)}{(1-(1-p)t)^3}, \quad G_X''(1) = \dfrac{2(1-p)}{p^3} \Rightarrow V(X) = \dfrac{2(1-p)}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

- Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda), X(\Omega) = \mathbb{N}$ ($\lambda>0$)

  $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n \\ &= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

  Nous avons alors $R_{G_X} = +\infty$, $\quad G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, $\quad G_X'(1) = \lambda$

  $G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$. $\quad G_X''(1) = \lambda^2 \Rightarrow V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

2 Questions de Cours - Groupes B et C

2.1 Loi de Poisson comme limite (simple) d'une loi binomiale (démo)

Proposition

Une loi de Poisson s'apparente à une Loi Binomiale des évènements rares.

i.e : Soit $(X_n)_n$, une suite de V.A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \rightsquigarrow B(n, p_n)$,
telle que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p([X_n = k]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

(HP : On pourra dire que X_n CVS vers $P(\lambda)$)

Preuve :

Soit $X_n \rightsquigarrow B(n, p_n)$ et $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$p([X_n = k]) = \dbinom{n}{k} p_n^k (1-p)^{n-k} = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{p_n}{1-p_n}\right)^k (1-p_n)^n$.

Or, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{k!} n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1) \sim \dfrac{n^k}{k!}$.

$p([X_n = k]) \sim \dfrac{n^k}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \cdot (1-p_n)^n = \dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{n\ln(1-p_n)} \sim \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Ainsi, $p([X_n = k]) \to \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

2.2 Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

Preuve :

Notons que l'évènement $[X \geqslant n] = \bigsqcup\limits_{k=n}^{+\infty} [X = k]$. Dès lors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p([X \geqslant k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} p([X = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1} p([X = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k p([X = k])\end{aligned}$$

(Toutes ces familles sont dès lors sommables, il suffit de faire le raisonnement à l'envers pour le justifier)

2.3 Variance d'une somme de variables aléatoires. (démo)

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ espace probabilisé, avec $X_1, \ldots, X_n$, des Variables aléatoires.

Nous avons alors

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_i\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Remarquons de plus que lorsque ces variables sont mutuellement indépendantes, les covariances s'annulent, et la variance d'une somme devient la somme des variances.

Preuve **:**

Procédons par récurrence sur le nombre de Variables considérées : Commençons par le cas $n = 2$. Alors :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y-E(X+Y))^2) \\
&= E((X-E(X)+Y-E(Y))^2) \\
&= E((X-E(X))^2 + 2((X-E(X))(Y-E(Y))) + (Y-E(Y))^2) \\
&= E((X-E(X))^2) + E((Y-E(Y))^2) + 2E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\
&= V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

Supposons ainsi la formule vérifiée pour n variables. Alors $Y = \sum_{k=1}^{n} X_i$ est une Variable Aléatoire.

Appliquons ainsi la formule précédente avec Y et X_{n+1} : D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
V(\sum_{k=1}^{n+1} X_i) &= V(Y + X_{n+1}) \\
&= V(Y) + V(X_{n+1}) + 2\operatorname{Cov}(Y, X_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) + 2\operatorname{Cov}(Y, X_{n+1})
\end{aligned}$$

Or, $\operatorname{Cov}(Y, X_{n+1}) = E((Y-E(Y))(X_{n+1}-E(X_{n+1}))) = E(X_{n+1}Y - X_{n+1}E(Y) - E(X_{n+1})Y + E(X_{n+1})E(Y))$

Ceci vaut par linéarité de l'espérance : $= E(X_{n+1}Y) - 2E(X_{n+1})E(Y) + E(X_{n+1})E(Y)$

Or, par définition de Y, nous avons : $= \sum_{k=1}^{n} E(X_{n+1}X_k) - E(X_{n+1})E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Cov}(X_i, X_{n+1})$

Finalement, nous obtenons bien la formule voulue.

2.4 Inégalité de Markov (2 démos)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. X, V.A sur (Ω, T, p) à valeurs réelles positives!

On suppose $X \in \mathscr{L}^1$. Alors :

$$\forall a \geqslant 0, p([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Preuve **Version** 1 **:**

On pose $X^+ = \{x \in X(\Omega) \mid x \geqslant a\}$ et $X^- = \{x \in X(\Omega) \mid x < a\}$.

Nous avons alors $X(\Omega) = X^+ \sqcup X^-$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p([X = x]) = \sum_{x \in X^+} x \cdot p([X = x]) + \sum_{x \in X^-} x \cdot p([X = x])$$

Or, $\sum_{x \in X^-} x \cdot p([X = x]) \geqslant 0$ car $X \geqslant 0$. Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &\geqslant \sum_{x \in X^+} x \cdot p([X = x]) \\ &\geqslant a \cdot \sum_{x \in X^+} \cdot p([X = x]) \\ \frac{E(X)}{a} &\geqslant p([X \geqslant a]) \end{aligned}$$

Lemme

(Ω, T, p), espace probabilisé. $a \in T$. On note $\mathbb{1}_a : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \{0; 1\} \\ \omega \mapsto \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in a \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \end{cases}$.

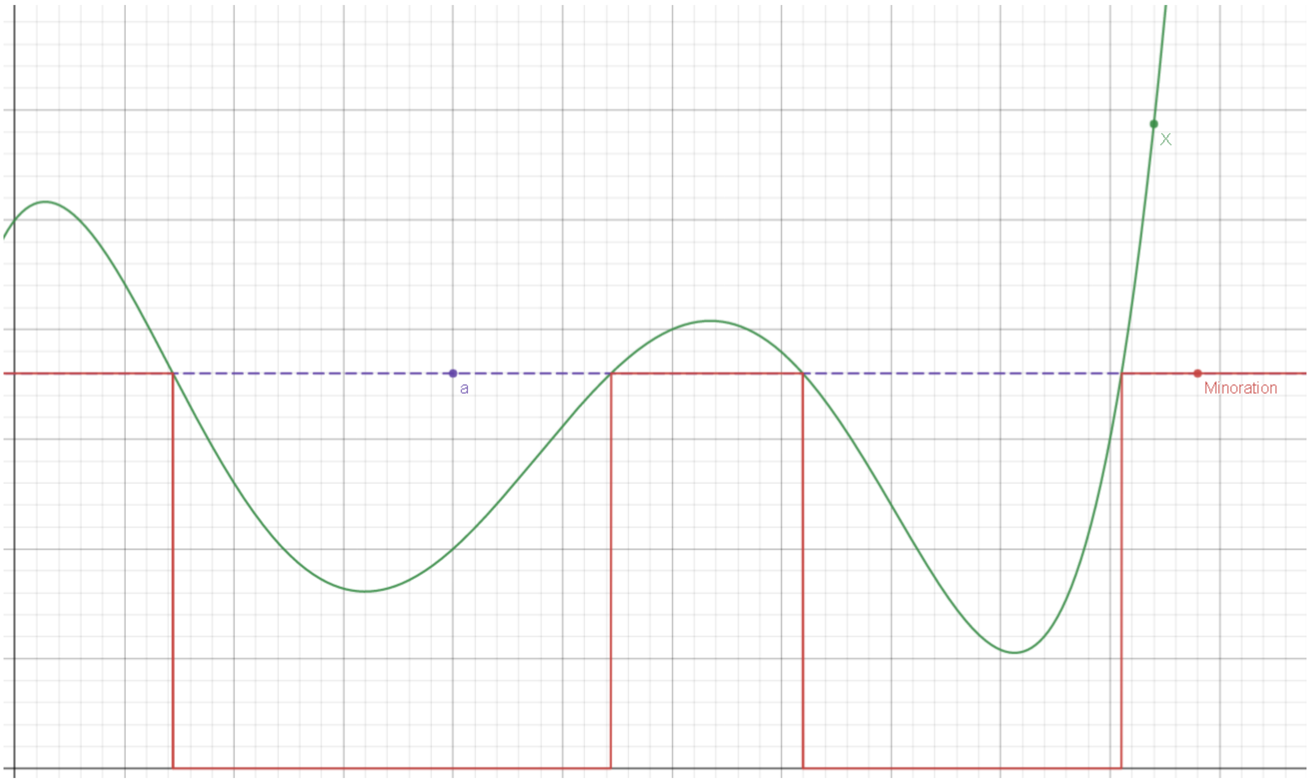
Alors, $\mathbb{1}_a$ est une V.A. De plus, $E(\mathbb{1}_a)$ existe et vaut $p(a)$.

Preuve **du Lemme :**

1. - $\mathbb{1}_a(\Omega) \subset \{0; 1\}$ donc est fini.
   - ${\mathbb{1}_a}^{-1}(\{0\}) = [\mathbb{1}_a = 0] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{1}_a(\omega) = 0\} = \overline{a} \in T$ car T stable par complémentaire.
   - ${\mathbb{1}_a}^{-1}(\{1\}) = [\mathbb{1}_a = 1] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{1}_a(\omega) = 1\} = a \in T$
2. $E(\mathbb{1}_a)$ existe et est finie. $E(\mathbb{1}_a) = \sum_{x \in \mathbb{1}_a(\Omega)} x \cdot p([\mathbb{1}_a = x]) = p([\mathbb{1}_a = 1]) = p(a)$

Preuve **Version** 2 **:**

Soit $A = [X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\}$.



$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant a\mathbb{1}_a$$

Car : si $\omega \in A$: $X(\omega) \geqslant a$ et $a\mathbb{1}_a = a \Rightarrow X(\omega) \geqslant a\mathbb{1}_a$
Sinon, $a\mathbb{1}_a = 0$, or X est une V.A positive, donc $X(\omega) \geqslant 0 = a\mathbb{1}_a$.

Donc :

$$E(X) \geqslant E(a\mathbb{1}_a) = ap(a) \Rightarrow E(X) \geqslant ap([X \geqslant a]) \Rightarrow \frac{E(X)}{a} \geqslant p([X \geqslant a])$$

2.5 Inégalité de Cauchy Schwarz pour l'espérance (démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. X, Y, deux V.A définies sur (Ω, T, p).

1. $X, Y \in \mathscr{L}^2 \Rightarrow XY \in \mathscr{L}^1$
2. Si $X, Y \in \mathscr{L}^2$, alors $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$
3. Si $X, Y \in \mathscr{L}^2$ et $E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, X = \lambda Y$ presque sûrement.

Preuve :

1. $|XY| \leqslant \dfrac{X^2 + Y^2}{2} \rightarrow$ Direct

2. Posons $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = E[(X+tY)(X+tY)] = E(X^2 + 2tXY + t^2Y^2)$.

   Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geqslant 0$ car $f(t) = E\left[(X+tY)^2\right] \geqslant 0$ par propriété de l'espérance.

   $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^2E(Y^2) + 2tE(XY) + E(X^2)$, qui est un polynôme du deuxième degré constamment positif sur $\mathbb{R}$. Donc $\Delta \leqslant 0$.

   Or, $\Delta = 4E(XY)^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \Rightarrow \ E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y)^2$.

3. Cas d'égalité : $\Delta = 0 \Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, f(t_0) = 0$.

   $\Rightarrow \ E\left[(X+t_0Y)^2\right] = 0$. Or, $(X+t_0Y)^2 \geqslant 0$, donc $(X+t_0Y)^2 = 0$ presque sûrement.

   $\Rightarrow \ X = -t_0Y$ presque sûrement.

2.6 Calcul de la variance des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à l'aide de la définition.

Proposition

1. Si $X \rightsquigarrow B(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$
2. Si $X \rightsquigarrow B(n,p)$, alors $V(X) = np(1-p)$
3. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$, alors $X \in \mathscr{L}^2$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
4. Si $X \rightsquigarrow P(\lambda)$, alors $X \in \mathscr{L}^2$ et $V(X) = \lambda$

Preuve **:**

1. $X \rightsquigarrow B(p) \Rightarrow \ E(X) = p$.
   Or, $X = X^2$ dans ce cas. Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X) - E(X)^2 = p(1-p)$

2. $X \rightsquigarrow B(n,p) \Rightarrow \ E(X) = np$.
   $E(X^2) = \displaystyle\sum_{x \in [\![0,n]\!]} x^2 \cdot p([X=x]) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$
\begin{aligned}
(X+a)^n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^k a^{n-k} \\
&\Big\downarrow \frac{d}{dx} \\
n(X+a)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k-1} a^{n-k} \\
&\Big\downarrow \times X \\
nX(X+a)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k} a^{n-k} \\
&\Big\downarrow \frac{d}{dx} \\
n(X+a)^{n-1}+n(n-1)X(X+a)^{n-2} &= \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} X^{k-1} a^{n-k} \\
&\Big\downarrow \times X \\
nX(X+a)^{n-1}+n(n-1)X^2(X+a)^{n-2} &= \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} X^{k} a^{n-k}
\end{aligned}
$$

Ainsi, avec $X=p, \quad a=(1-p)$. $E(X^2)=np+n(n-1)p^2=np(1+(n-1)p)$

D'où $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=np(1+(n-1)p)-n^2p^2=np(1-p)$

3. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$, $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $p([X=n])=p(1-p)^{n-1}$.

   Si $X\in\mathscr{L}^2, \quad E(X^2)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\cdot p([X=n])$. Posons $u_n=|n^2\cdot p([X=n])|$.

   Ainsi, $u_n=|n^2p(1-p)^{n-1}|=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4p(1-p)^{n-1}=0$.

   Donc la série converge, X admet une variance.

   $E(X^2)=p\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1}$.

   $\forall x\in]-1,1[$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\
&\Big\downarrow \frac{d}{dx} \\
\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
&\Big\downarrow \times X \\
\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n} &= \frac{x}{(1-x)^2} \\
&\Big\downarrow \frac{d}{dx} \\
\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^{n-1} &= \frac{1+x}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

   D'où $E(X^2)=p\cdot\dfrac{1+(1-p)}{(1-(1-p))^3}=\dfrac{2-p}{p^2}$

   Finalement, $V(X)=\dfrac{2-p}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1-p}{p^2}$

4. Si $X \rightsquigarrow P(\lambda)$:
X admet une variance si et seulement si $\sum_n n^2 e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ existe. Posons $u_n = n^2 e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\frac{(n-1)!}{n!}\cdot\lambda \sim \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n u_n$ converge.
Ainsi, $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n+1)\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} + e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{n+1}}{n!}$
Donc, $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$.
Finalement : $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

2.7 Inégalité de Bienaymé Tchebychev (démo)

Proposition
(Ω, T, p), espace probabilisé. X, V.A à valeurs réelles. On suppose $X \in \mathscr{L}^2$.
$$\forall \varepsilon>0 \quad p\left([|X-E(X)| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \left[\frac{\sigma(X)}{\varepsilon}\right]^2$$

Preuve :

$[|X-E(X)| \geqslant \varepsilon] = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)-E(X)| \geqslant \varepsilon\}$.

Or, $\forall \omega \in \Omega$, $|X-E(X)| \geqslant \varepsilon \iff (X-E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2$ (par positivité!)

Ainsi, $[|X-E(X)| \geqslant \varepsilon] \iff \left[(X-E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right]$. Par positivité de $(X-E(X))^2$ et $X \in \mathscr{L}^2 \Rightarrow E\left((X-E(X))^2\right)$ existe et est finie.

D'après l'inégalité de Markov :
$$p([(X-E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2]) \leqslant \frac{E\left[(X-E(X))^2\right])}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$
D'où $p([|X-E(X)| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

2.8 Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes (2 démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. X, Y, deux V.A à valeurs dans $\mathbb{N}$, INDÉPENDANTES.

$$\forall t \in [-1,1] \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

(ou bien sur $]-R_{G_X}, R_{G_X}[\cap]-R_{G_Y}, R_{G_Y}[$

***Preuve* Version 1 :**

On rappelle :

Proposition

$$\forall t \in [-1,1] \quad G_X(t) = E(t^X)$$

$$\begin{aligned}
&X, Y \text{indépendantes} \\
&\Rightarrow\ t^X, t^Y \text{indépendantes} \\
&\Rightarrow\ G_X(t)G_Y(t) = E(t^X)E(t^Y) = E(t^X t^Y) = E(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t)
\end{aligned}$$

***Preuve* Version 2 :**

X, Y indépendantes :

$\forall t \in \mathbb{R} \quad |t| \leqslant R_{G_X}$ et $|t| \leqslant R_{G_Y} \Rightarrow$

$$G_X(t) \cdot G_Y(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p([X=n])t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p([Y=n])t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} p([X=k])p([Y=n-k])$$

Or, $p([X+Y=n]) = \bigsqcup_{k=0}^{n} [X=k, Y=n-k]$

$$\begin{aligned}
p([X+Y=n]) &= \sum_{k=0}^{n} p([X=k, Y=n-k]) \\
\text{(Indépendance de } X, Y) \quad &= \sum_{k=0}^{n} p([X=k]) \cdot p([Y=n-k])
\end{aligned}$$

D'où $G_X(t) \cdot G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n p([X+Y=n]) = G_{X+Y}(t)$

2.9 Loi faible des grands nombres (démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $(X_n)_n$, suite de V.A i.i.d (Indépendantes et Identiquement distribuées) à valeurs réelles.

On suppose que $X_1 \in \mathscr{L}^2$ $(\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \in \mathscr{L}^2)$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. On considère $\frac{S_n}{n}$. On note $m = E(X_1)(= E(X_k) \forall k \in \mathbb{N}^*)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad p\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Preuve :

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\frac{S_n}{n}$: $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{L}^2 \Rightarrow X_1 + \cdots + X_n \in \mathscr{L}^2 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \in \mathscr{L}^2$

$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} E(X_n) = \frac{1}{n}(n \cdot m) = m.$

Soit $\varepsilon > 0$: $\quad p\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$

$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot V(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}$

D'où :

$$0 \leqslant p\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3 Questions de Cours - Groupe C

3.1 Linéarité de l'espérance. (démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. $X : \Omega \to X(\Omega), Y : \Omega \to Y(\Omega)$, deux V.A à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

X, Y d'espérance finies $\Rightarrow$ $\lambda X + \mu Y$ d'espérance finie et $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$

On rappelle :

Lemme

$\Omega = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} [X = x]$

Preuve :

$E(\lambda X) = \lambda E(X)$ est immédiat.

Si $E(X+Y)$ existe, notons $Z = X+Y$. Alors, $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xp([X = x])$. Idem pour Y.

D'après le Lemme : $p([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} p([Y = y, X = x])$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} p([Y = y, X = x]) \right) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xp([X = x, Y = y]) \\
\text{Idem : } E(Y) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} yp([X = x, Y = y]) \\
\text{Donc : } E(X) + E(Y) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x+y)p([X = x, Y = y]) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x+y) \left(\sum_z p([X = x, Y = y, Z = z]) \right) \\
&= \sum_z \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x+y)p([X = x, Y = y, Z = z])
\end{aligned}$$

1. Si $p([X = x, Y = y, Z = z]) = 0$, alors $z \cdot p([X = x, Y = y, Z = z]) = (x+y) \cdot p([X = x, Y = y, Z = z])$
2. Sinon, $\exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x, Y(\omega) = y, Z(\omega) = z$.
   Or, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. Donc, $x + y = z$.

Dans tous les cas, $(x+y) \cdot p([X = x, Y = y, Z = z]) = z \cdot p([X = x, Y = y, Z = z])$.

Ainsi : $E(X) + E(Y) = \sum_z z \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} p([X = x, Y = y, Z = z])$.

Toujours par le Lemme : $= \sum_z z \times p([Z = z]) = E(Z) = E(X+Y)$.

3.2 Si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. (démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. X, Y, deux V.A sur (Ω, T, p). à valeurs réelles.

Si $|X| \leqslant Y$ et $Y \in \mathscr{L}^1$, alors $X \in \mathscr{L}^1$

Preuve :

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot p([Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} p([X = x, Y = y]).$$

$\forall y, x \in Y(\Omega) \times X(\Omega)$:

$$0 \leqslant |x| p([X = x, Y = y]) \leqslant y p([X = x, Y = y])$$

car :

- Si $p([X = x, Y = y]) = 0 \rightarrow$ Ok
- Sinon, $\exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x$ et $Y(\omega) = y$. Or, $|X| \leqslant Y$, donc $|x| \leqslant y$

D'où

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |x| p([X = x, Y = y]) \leqslant \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y \cdot p([X = x, Y = y])$$

Ainsi, $X \in \mathscr{L}^1$

3.3 Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendante. (démo)

Proposition

(Ω, T, p), espace probabilisé. X, Y, deux V.A de (Ω, T, p) à valeurs réelles.

Si $X, Y \in \mathscr{L}^1$ et X, Y indépendantes : Alors

$$E(X \times Y) \in \mathscr{L}^1 \quad \text{et} \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p([X = x]) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot p([Y = y]) \right) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \cdot p([X = x]) p([Y = y]) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \cdot p([X = x, Y = y])
\end{aligned}$$

Indépendance de X et Y

On pose $Z = XY$, la V.A produit de X et Y. $\forall z \in Z(\Omega)$, on note $\Delta_z = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid xy = z\}$.

Alors, $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \bigsqcup_{z \in Z(\Omega)} \Delta_z$ (union disjointe)

$$\Rightarrow E(X)E(Y) = \sum_{z \in Z(\Omega)} \sum_{(x,y) \in \Delta_z} xy \cdot p([X = x, Y = y])$$

$\forall(x,y)\in\Delta_z, xy\cdot p([X=x,Y=y]) = z\cdot p([X=x,Y=y])$

$$\begin{aligned}
E(X)E(Y) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\times \sum_{(x,y)\in\Delta_z} p([X=x,Y=y])\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\cdot p([Z=z]) \quad \text{car } [Z=z]=\bigsqcup [X=x,Y=y]\\
&= E(Z) = E(XY)
\end{aligned}$$

3.4 Théorème de transfert. (démo)

Théorème de Transfert

(Ω,T,p), espace probabilisé. X V.A sur (Ω,T,p). $f: X(\Omega)\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La variable aléatoire $f(X)$ est alors d'espérance finie si et seulement si $(f(x)\cdot p([X=x]))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Auquel cas

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\cdot p([X=x])$$

Preuve :

Posons $Y=f(X)$.

Si elle existe : $E(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\cdot p([Y=y])$. D'après le lemme :

$$E(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)}\left[y\cdot \sum_{x\in X(\Omega)} p([X=x,Y=y])\right] = \sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{x\in X(\Omega)} y\cdot p([X=x,Y=y])$$

- Si $p([X=x,Y=y])=0$, alors $y\cdot p([X=x,Y=y]) = 0 = f(x)\cdot p([X=x,Y=y])$
- Sinon, $\exists\omega\in\Omega, X(\omega=x), Y(\omega)=y=f(X(\omega))$.

Dans tous les cas, $y\cdot p([X=x,Y=y]) = f(x)\cdot p([X=x,Y=y])$. Ainsi,

$$E(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\cdot p([X=x,Y=y])$$

Si les familles sont sommables (hypothèse), d'après Fubini :

$$E(Y) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\cdot \sum_{y\in Y(\Omega)} p([X=x,Y=y])$$

Toujours d'après le lemme, nous obtenons : $E(Y) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\cdot p([X=x])$.

(les égalités précédentes justifient la sommabilité de $(y\cdot p([Y=y]))_{y\in Y(\Omega)}$ si et seulement si $(f(x)\cdot p([Y=y]))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable)

3.5 La dérivabilité de G_X en 1 entraine l'existence de l'espérance. (démo)

Preuve **:**

$\Leftarrow$:

Supposons G_X dérivable en $t=1$. Alors $G_X'(t) = \lim\limits_{t\to 1^-}\left(\dfrac{G_X(1)-G_X(t)}{1-t}\right)$.

$\forall t \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\frac{G_X(1)-G_X(t)}{1-t} &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p([X=n]) - p([X=n])t^n}{1-t} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p([X=n])\cdot\frac{1-t^n}{1-t} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p([X=n])\cdot\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right)\end{aligned}$$

On note $\varphi(t) = \dfrac{G_X(1)-G_X(t)}{1-t} \Rightarrow$ φ est croissante sur $[0,1]$.

Or, $\lim\limits_{t\to 1^-}\varphi(t) = G_X'(1) \Rightarrow$ $\forall t \in [0,1[, \varphi(t) \leqslant G_X'(1)$.

Donc, $\forall t \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} p([X=n])\cdot\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right) \leqslant \varphi(t) \leqslant G_X'(1)$.

Lorsque $t\to 1^-$, (Σ finie) : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} p([X=n])\cdot n \leqslant G_X'(1)$.

$\Rightarrow$ Les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_n np([X=n])$ sont majorées

$\Rightarrow$ X est d'espérance finie.

4 Exercices de Référence, Tout groupe

Tout au long de ces exercices, nous noterons $\sqcup$ une union dont nous savons qu'elle est disjointe. $\cup$ représente une union sans plus d'information.

4.1 Exercice 1

Deux méthodes sont possibles : Les yeux les plus entraînés remarqueront un produit de Cauchy assez naturellement. Nous mentionneront cette intuition et cette méthode après cette première solution :

Rappelons premièrement que $X \rightsquigarrow B(n,p)$ signifie par définition que :

- $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
- $\forall k \in X(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (Soit le cœfficient de X^k dans le développement de $(1+X)^n$ (méthode à retenir, utile dans les prochains exercices!)

Premièrement, en notant $Y = X_1 + X_2$, nous avons $Y(\Omega) = [\![0, n_1+n_2]\!]$ (toutes les valeurs intermédiaires sont bien atteintes, et les autres valeurs ne le sont pas).

Calculons donc pour $k \in Y(\Omega)$: $\mathbb{P}([Y=k])$. Une solution naturelle serait de découper selon les valeurs d'une des deux variables aléatoires, ce qui nous permettra de déduire la valeur de l'autre, car nous savons que $Y = k$: Notons que Les évènements $[X_1 = x_1]$ forment un SCE.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=k]) &= \bigsqcup_{x_1 \in X(\Omega)} \mathbb{P}([Y=k, X_1 = x_1]) && \\
&= \sum_{x_1 \in X(\Omega)} \mathbb{P}([Y=k, X_1 = x_1]) && \sigma\text{-Additivité de } \mathbb{P} \\
&= \sum_{x_1 \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X_1 = x_1, X_2 = k - x_1]) && \text{Égalité Ensembliste des évènements} \\
&= \sum_{x_1 \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X_1 = x_1])\mathbb{P}([X_2 = k - x_1]) && \text{Indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
&= \sum_{x_1 \in X(\Omega)} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{k-x_1} p^k (1-p)^{(n_1+n_2)-k}
\end{aligned}$$

Notons qu'il n'est pas utile de restreindre le domaine de x_1 : Il serait en effet pertinent de vérifier que $k - x_1 \in X_2(\Omega)$, afin de ne pas comptabiliser des termes faux. Néanmoins, les cœfficients binomiaux assurent déjà que $\mathbb{P}(X_2 = k - x_1) = 0$ si $k - x_1 > n_2$ ou $k - x_1 < 0$

Nous voudrions donc montrer que $\displaystyle\sum_{x_1 \in \mathcal{D}'} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{k-x_1} = \binom{n_1+n_2}{k}$ afin d'avoir $Y \rightsquigarrow B(n_1+n_2, p)$.

Afin de montrer cette égalité, nous pouvons compter de deux manières différentes le cœfficient de X^k dans le développement de $(1+X)^{n_1+n_2}$: D'une part, ceci vaut $\binom{n_1+n_2}{k}$, de l'autre, nous calculons le cœfficient de X^k de $(1+X)^{n_1}(1+X)^{n_2}$, qui se calcule par produit de Cauchy : $\displaystyle\left(\sum_{m=1}^{n_1}\binom{n_1}{m}X^m\right)\left(\sum_{m=1}^{n_2}\binom{n_2}{m}X^m\right)$.

Ainsi, nous obtenons $\displaystyle\binom{n_1+n_2}{k} = \sum_{m=1}^{k}\binom{n_1}{m}\binom{n_2}{k-m}$, qui correspond exactement au terme souhaité (Notons encore une fois qu'il n'est pas utile de considérer les cas $k > n_1, n_2$ car les cœfficients binomiaux les traîtent déjà en valant zéro).

Dès lors, $\mathbb{P}([Y=k]) = \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$, donc $Y \rightsquigarrow B(n_1+n_2, p)$.

Mentionnons la deuxième Méthode : Il est assez immédiat que $Y(\Omega) = [\![0, n_1 + n_2]\!]$. Or, afin d'obtenir $Y = k$, nous devons dénombrer toutes les possibilités sur X_1 et X_2. Ceci revient à compter toutes les manières de sommer deux nombres entiers positifs afin d'obtenir k. Une astuce sympathique réside dans les "Séries génératrices" (plus général que les fonctions génératrices). L'idée est d'encoder notre suite (le nombre de combinaisons possibles) dans les coefficients d'une série entière, afin de se ramener à du calcul de fonctions, du fait que nos coefficients s'obtiennent par produit et opérations élémentaires sur des séries entières élémentaires.

Cette astuce se recycle ici sur les fonctions génératrices : Nous avons pour X_1

$$\forall t \in [0,1],\ G_{x_1}(t) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([X_1 = n])t^n = \mathbb{E}(t^X)$$

Or, par indépendance de X_1 et X_2, nous savons que $\mathbb{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathbb{E}(t^{X_1}t^{X_2}) = \mathbb{E}(t^{X_1})\mathbb{E}(t^{X_2})$. Nous retrouvons donc notre produit de Cauchy dans les fonctions génératrices :

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}[X_1 = m]\mathbb{P}[X_2 = k-m]$$

4.2 Exercice 2

Soit $(U_i)_{i\in I}$, famille d'évènements presque certains, avec I dénombrable. Montrons que $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} U_i) = 1$:

Pour ce faire, nous pouvons utiliser le fait qu'une somme infinie de termes nuls donne toujours zéro : Nous savons que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(\overline{U_i}) = 0$.

De ce fait,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i\in I} U_i}\right) 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} \overline{U_i}\right)$$

Or, nous savons que $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} \overline{U_i}\right) \leqslant \sum_{i\in I} \mathbb{P}(\overline{U_i}) = 0$, donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} \overline{U_i}\right) = 0$

Il vient ainsi que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = 1 - 0 = 1$, d'où le fait que $\bigcap_{i\in I} U_i$ soit presque certain.

4.3 Exercice 3

Question 1. Rappelons que $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$ signifie $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}([X_1 = k]) = (1-p)^{k-1}p$.

Déterminons premièrement les ensembles Images de Y et S : Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, car est le minimum de deux variables aléatoires suivant une loi géométrique, donc est à priori capable d'atteindre n'importe quelle valeur.

En revanche, $S(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, car la somme ne peut atteindre 1.

Nous pouvons là encore découper selon les valeurs de l'une des variables. Cependant, nous pouvons donner la réponse plus rapidement : Soit $k \in Y(\Omega)$.
Nous pouvons écrire $[Y = k] = [X_1 = k, X_2 \geqslant k] \sqcup [X_2 = k, X_1 > k]$. Ainsi, calculons $\mathbb{P}([X_1 \geqslant k])$:

$$\mathbb{P}([X_1 \geqslant k]) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\geqslant k} [X_1 = i]\right) = \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^{k-1}\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}.$$

Nous pouvons déduire de plus que $\mathbb{P}([X_1 > k]) = \mathbb{P}([X_1 \geqslant k+1])$ par égalité ensembliste. Donc $\mathbb{P}([X_1 > k]) = (1-p)^k$.

Dès lors, par indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}([Y=k]) = p(1-p)^{k-1}(1-p)^{k-1} + p(1-p)^{k-1}(1-p)^k$.
Dès lors, $\mathbb{P}([Y=k]) = p(1-p)^{2k-2}(2-p) = p((1-p)^2)^{k-1}(2-p)$.

Tout comme précédemment, par indépendance de X_1 et X_2, nous pouvons opérer par produit de Cauchy sur les séries génératrices :

$$G_S = G_{X_1}G_{X_2} = \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}([X_1=k])\mathbb{P}([X_2=n-k])\right)t^n$$

Ainsi, $\mathbb{P}([S=n]) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}([X_1=k])\mathbb{P}([X_2=n-k]) = \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}(1-p)^{n-k-1}p^2 = p^2\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n-2}$
Dès lors, $\mathbb{P}([S=n]) = p^2(1-p)^{n-2}(n-1)$.

Question 2 Nous pouvons remarquer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=k]) = (1-2p+p^2)^{k-1}(2p-p^2)$, ce qui ressemble au terme d'une loi géométrique de paramètre $2p-p^2 = 1-(1-p)^2$. Ainsi, $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(2p-p^2)$. Il vient alors $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2p-p^2}$, et $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1-2p+p^2}{(2p-p^2)^2} = \left(\dfrac{(1-p)}{2-p^2}\right)^2$

4.4 Exercice 4

Question 1. Rappelons que $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ signifie : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}([X=k]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Afin de montrer l'existence de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$, il suffit de démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n+1}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)$ est sommable.

Ceci est bien le cas, car $e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{\lambda^n}{(n+1)!} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^\lambda - 1)$. Ainsi, $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$ existe bien.

Le théorème de transfert affirme donc : $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right) = \sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n+1}\times\mathbb{P}([X=n]) = \sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n+1}\times e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{\lambda^n}{(n+1)!}$

Ainsi, $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right) = e^{-\lambda}\dfrac{e^\lambda - 1}{\lambda} = \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

Question 2 Nous pouvons toujours noter : $[X \text{ est Pair}] = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}[X=2k]$. Il vient donc :

$$\mathbb{P}([X \text{ est Pair}]) = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k!)} = e^{-\lambda}\cosh(\lambda)$$

4.5 Exercice 5

Question 1. Rappelons que le moment d'une variable aléatoire se définit comme $\mathbb{E}(X^r)$ (sous réserve d'existence, et de sommabilité de la famille considérée). Une exception est faite pour la variance, qui correspond au moment d'ordre deux Centré.

Soit donc X, Variable aléatoire réelle bornée. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega,\ |X(\omega)| \leqslant M$

Alors $\sum_{x\in\Omega} x^r \mathbb{P}([X=x]) \leqslant \sum_{x\in\Omega} M^r \mathbb{P}([X=x]) = M^r$. (La somme des probabilités fait toujours 1).
Ainsi, $\mathbb{E}(X^r)$ existe bien pour tout r : X admet bien un moment à tout ordre.

Question 2. Soit X, variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre n. Soit $r \leqslant n$.

Si $|x| \geqslant 1,\ |x^n| \geqslant |x^r|$, sinon, $|x^r| \leqslant 1$.

Dès lors,

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |x^r|\mathbb{P}([X=x]) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x<1|}} |x^r|\mathbb{P}([X=x]) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x\geqslant 1|}} |x^r|\mathbb{P}([X=x]) \leqslant \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x<1|}} \mathbb{P}([X=x]) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x\geqslant 1|}} |x^n|\mathbb{P}([X=x]) \leqslant 1+\mathbb{E}(X^n)$$

Dès lors, la famille $(x^r\mathbb{P}([X=x]))_{x\in X(\Omega)}$ est bien sommable, d'où le fait que X admette un moment à tout ordre inférieur à n.

4.6 Exercice 6

Question 1. Nous avons $\mathbb{E}(X) = np = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$

Question 2. Nous pouvons réutiliser l'astuce de l'exercice 1 : Comptons de deux manières différentes le cœfficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$:

D'une part, celui-ci vaut $\binom{2n}{n}$, d'autre part, ce dernier correspond au coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^n$, qui s'obtient par produit de Cauchy :

$$(1+X)^n(1+X)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{m=0}^{k}\binom{n}{m}\binom{n}{k-m}$$

D'où le fait que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

Question 3. Remarquons l'égalité : $[X=Y] = \bigsqcup_{k=0}^{n}[X=k, Y=k]$. Dès lors :

$$\mathbb{P}([X=Y]) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([X=k,Y=k]) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([X=k])\mathbb{P}([Y=k]) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\frac{1}{4^{k+n-k}} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

(Nous utilisons la symétrie des coefficients binomiaux afin d'affirmer l'égalité $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Question 4.a Ceci se remarque de manière naturelle par "symétrie des rôles", mais surtout par indépendance de X et Y.

Un calcul direct donne : $\mathbb{P}([X<Y]) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y=x+1}^{n} \mathbb{P}([X=x])\mathbb{P}([Y=y]) = \sum_{x\in Y(\Omega)} \sum_{y=x+1}^{n} \mathbb{P}([Y=x])\mathbb{P}([X=y]) = \mathbb{P}([Y<X])$ avec $X(\Omega)=Y(\Omega)$ et du fait que $X\sim Y$.

Question 4.b Nous pouvons de plus découper $[X\geqslant Y]$ comme : $[X\geqslant Y]=[X=Y]\sqcup[X>Y]$.

Ainsi, $\mathbb{P}([X\geqslant Y])=\mathbb{P}([X=Y])+\mathbb{P}([X>Y])=\mathbb{P}([X=Y])+\mathbb{P}([Y>X])$ d'après la question précédente.

Or, $[Y>X]=\overline{[X\geqslant Y]}$, donc $\mathbb{P}([X\geqslant Y])=\mathbb{P}([X=Y])+(1-\mathbb{P}([X\geqslant Y])$.

d'où l'égalité $2\mathbb{P}(\mathbb{P}([X\geqslant Y]))=1+\mathbb{P}([X\geqslant Y])=1+\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$. Finalement,

$$\mathbb{P}([X\geqslant Y])=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

4.7 Exercice 7

Question 1. Par indépendance de X et Y, nous pouvons écrire $\mathbb{P}([X=Y])=\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*}[X=x,Y=x]\right)$
$=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}([X=n])\mathbb{P}([Y=n])$.

Ainsi, $\mathbb{P}([X=Y])=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}p^2(1-p)^{n-1}=\frac{p^2}{1-(1-p))}=p.$

Nous savons que $\Omega=[X\leqslant Y]\sqcup[X>Y]=[X<Y]\sqcup[X=Y]\sqcup[X>Y]$.

Ainsi, $\mathbb{P}(\Omega)=1=\mathbb{P}([X<Y])+p+\mathbb{P}([X>Y])$. Or, par indépendance de X et Y, et du fait que $X\sim Y$, nous pouvons affirmer que $\mathbb{P}([X>Y])=\mathbb{P}([Y>X])$ (c.f exercice précédent).

Dès lors, $1=p+2\mathbb{P}([X<Y])\Rightarrow\ \mathbb{P}([X<Y])=\frac{1-p}{2}\Rightarrow\ \mathbb{P}([X\leqslant Y])=\frac{1+p}{2}$

Question 2. C.F l'exercice 3, la loi de $X+Y$ est donnée par $\mathbb{P}([X+Y=n])=p^2(1-p)^{n-2}(n-1)$

Question 3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{P}([X>n])=\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty}[X=k]\right)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}([X>n])=\sum_{k=n+1}^{+\infty}p(1-p)^k=p(1-p)^{n+1}\frac{1}{p}=(1-p)^{n+1}$$

Question 4. Nous pouvons réutiliser les résultats précédents en découpant selon la valeur de $X+Y$: $X+Y(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.
Ainsi, $[Z>X+Y]=\bigsqcup_{n\geqslant 2}[X+Y=n,Z>n]$.

Or, par indépendance de X, Y et Z, $X+Y$ et Z sont indépendantes par lemme des coalitions. Il vient alors :

$$\mathbb{P}([Z>X+Y])=\sum_{n\geqslant 2}\mathbb{P}([X+Y=n])\mathbb{P}([Z>n])=\sum_{n\geqslant 2}p^2(1-p)^{n-2}(n-1)\times(1-p)^{n+1}=p^2\sum_{n\geqslant 2}(n-1)(1-p)^{2n-1}$$

Nous pouvons calculer cette somme en factorisant $(1-p)^3$, en faisant descendre un carré, puis en évaluant une série entière dérivée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z>X+Y]) &= p^2 \sum_{n\geqslant 2}(n-1)(1-p)^{2n-1}\\
&= p^2(1-p)^3 \sum_{n\geqslant 2}(n-1)\left((1-p)^2\right)^{n-2}\\
&= p^2(1-p)^3\left[\frac{d}{dt}\sum_{n\geqslant 1}t^{n-1}\right]\left((1-p)^2\right)\\
&= p^2(1-p)^3\left[\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}\right]\left((1-p)^2\right)\\
&= p^2(1-p)^3\frac{1}{(1-t)^2}\left((1-p)^2\right)\\
&= p^2(1-p)^3\frac{1}{(1-(1-p)^2)^2}\\
&= \frac{p^2(1-p)^3}{(2p-p^2)^2}\\
&= \frac{(1-p)^3}{(2-p)^2}
\end{aligned}$$