Colle 3 : Réduction (1)
exercices groupe C
MPI(*) Faidherbe

BURGHGRAEVE Marc
GERY Julien

27 Octobre 2024

Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 14 : (Mines MP 2023)

On considère ϕ telle que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
   réponse : exo. N'oubliez juste pas de vérifier que l'image est aussi dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer de plusieurs manières que ϕ est diagonalisable.
   reponse : : Donnons la matrice canoniquement associée à ϕ : soit k $\in [\![0;n]\!]$.

$$\phi(X^k) = X^n \frac{1}{X^k} = X^{n-k}$$

   Ainsi, la matrice de ϕ est:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

   Cette matrice est diagonalisable car :

   - elle est symétrique réelle,
   - son polynôme annulateur $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est scindé simple.

3. Expliciter une base de vecteurs propres.
   Réponse : On va donner une base des sous espace propres:

$$A - I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   On pose $m = \lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor$. On vois que pour tout k $\in [\![1;m]\!]$, $e_k + e_{n+1-k} \in ker(A - I_n)$
   en particulier, si n est impair alors $e_{\frac{n+1}{2}} \in Ker(A - I_n)$

   Ainsi, $Vect(e_1 + e_n,\ e_2 + e_{n-1},\ \cdots,\ e_m + e_{n+1-m})$ est une base de $E_1(\phi)$.

$$A + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On remarque que pour tout k $\in [\![1; m]\!]$, $e_k - e_{n+1-k} \in ker(A + I_n)$
Ainsi, $Vect(e_1 - e_n,\ e_2 - e_{n-1},\ \cdots,\ e_m - e_{n+1-m})$ est une base de $E_{-1}(A)$
La matrice de ϕ dans une telle base est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 : (Mines MP 2022)

Un endomorphisme f est dit cyclique dans E tel que $\dim E = n$, si :

$$\exists x_0 \in E : \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)) = E.$$

1. Soit g un endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathbb{R}^3$ soit :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est cyclique et diagonalisable.
Réponse : En prenant $x_0 = (1, 0, 0)^T$, on a bien $f(x_0) = (0, 1, 0)^T$, $f^2(x_0) = (0, 0, 1)^T$, donc G est cyclique. G est de plus diagonalisable car son polynôme caractéristique $(X_3)(X - 2)(X - 1)$ est scindé simple.

2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?
Réponse : Il suffit de prendre la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ l'endomorphisme associé est bien cyclique mais non diagonalisable.

3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
   Réponse : Considérons donc $(e_1, \dots, e_n)$ (pas forcément la base canonique) tels qu'on ai $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et les λ_i distincts deux à deux. Considérons :

$$
\begin{aligned}
&x = e_1 + \cdots + e_n \text{ alors}\\
&u(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\\
&\vdots\\
&u^{n-1}(x) = \lambda_1^{n-1} e_1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} e_n
\end{aligned}
$$

   Montrons que ces n vecteurs sont libres (et donc qu'ils forment une base) : La matrice associée à ces n vecteurs colonnes est la suivante :

$$
\begin{pmatrix}
1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1}\\
1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
1 & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_{n-1}^{n-1}\\
1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1}
\end{pmatrix}
$$

   Le déterminant de cette matrice est non nul car on a une matrice de vandermonde et les λ_i sont deux à deux distincts : la famille est donc libre, c'est une base.

4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?
   Réponse : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres tels qu'on ait $u(e_1) = \lambda_i e_i$ et on souhaite donc montrer que les λ_i sont distincts deux à deux. Puisque f est cyclique, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tel qu'on ait $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ et que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Cela signifie que le déterminant de la matrice associée à cette base est non nul : ie

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-2} & \alpha_1\lambda_1^{n-1}\\
\alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-2} & \alpha_2\lambda_2^{n-1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}\lambda_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^{n-1}\\
\alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-2} & \alpha_n\lambda_n^{n-1}
\end{vmatrix} \neq 0 = \alpha_1 \dots \alpha_n VDM(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})
$$

   Ce qui signifie que les λ_i sont deux à deux distincts.

Exercice 16 : (Mines MP 2022)

Soit E un C-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe P polynôme annulateur de f vérifiant : $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\ker f$ et Im f sont supplémentaires.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Après avoir écrit $P = XQ$, remarquer que X et Q sont premiers entre eux.
Réponse : On note donc $P = XQ$, où X et Q sont premiers entre eux.
P est l'annulateur de f, donc d'après le lemme des noyaux :
$E = Ker(P(f)) = Ker(X(f)) \bigoplus ker(Q(f)) = ker(f) \bigoplus ker(Q(f))$
Posons $F = \ker(Q(f))$. Il s'agit donc de montrer que $F = Im(f)$.
Notons $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi $a_0 \neq 0$ car 0 n'est pas racine de Q.
Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned} & Q(f)(y) = 0. \\ \iff & a_0 y + \sum_{k=1}^{n} a_k f^k(y) = 0 \\ \iff & y = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} f^k(y). \\ \iff & y = f\left(-\frac{a_1}{a_0} y - \frac{a_2}{a_0} f(y) - \cdots - \frac{a_n}{a_0} f^{n-1}(y)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, y s'écrit f(quelque chose), donc $y \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $F = \ker(Q(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Réciproquement Soit $y \in Im(f)$. $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Donc

$$Q(y) = Q(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x)$$

Notons $x = x_1 + x_2$ ou $x_1 \in ker(f)$ et $x_2 \in F$.
Ainsin

$$\begin{aligned} Q(y) &= \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x_1 + x_2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x_1) + \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x_2) \\ &= 0 + \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x_2) \\ &= f(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x_2)) \\ &= f(Q(x_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y \in ker(Q(f))$ D'où $F = Ker(Q(f)) = Im(f)$ donc finalement on a bien $E = ker(f) \bigoplus Im(f)$.

Exercice 17 : (Mines MP 2022) (15 min de préparation, 15 min de passage)

Soit $a \in]0,1]$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

1. Étudier la convergence de la suite.
   Réponse : On a (étude de point fixe r puis étude de $u_n - r$), $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}$ donc $u_n \underbrace{\to}_{n\to+\infty} \frac{b}{1-a}$

2. On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ l'application telle que :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = f(ax+b)$$

   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
   Réponse : exo.

   (b) Montrer que ϕ est bijective.
   Réponse : injectivité : Soit f telle que $\phi(f) = \tilde{0}$. Alors $\forall y \in \mathbb{R}, f(a(\frac{y-b}{a}) + b) = 0 = f(y)$. donc f est nulle, d'où l'injectivité de ϕ. Surjectivité : soit g, posons $\tilde{g} : x \to g(\frac{x-b}{a})$. alors $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(\tilde{g})(x) = \tilde{g}(ax+b) = g(x)$ d'où la bijectivité de ϕ.

   (c) Soit λ une valeur propre de ϕ différente de 1 et f_λ un vecteur propre associé.

   - (i) Montrer que $f_\lambda\left(\frac{b}{1-a}\right) = 0$ et que $\lambda \in]-1,1[\setminus\{0\}$.
     Réponse : En évaluant $\phi(f_\lambda)$ en $x = \frac{b}{1-a}$ on trouve que $f_\lambda(\frac{b}{1-a}) = \lambda f_\lambda(\frac{b}{1-a})$ d'où $f_\lambda(\frac{b}{1-a}) = 0$ car $\lambda \neq 1$. Alors $\forall n, f_\lambda(u_{n+1}) = \lambda f_\lambda(u_n)$ donc par récurrence immédiate $f_\lambda(u_n) = \lambda^n f(u_0)$. Puisque f est continue, on en déduit que $\lambda^n f(u_0) \underbrace{\to}_{n\to+\infty} 0$ donc $|\lambda| < 1$ et lambda non nul car f est injective.
   - (ii) Montrer que f'_λ est aussi un vecteur propre.
     Réponse : il suffit de dériver. la valeur propre associée est $\frac{\lambda}{a}$.

   (d) Déterminer les vecteurs propres de ϕ.
   Réponse : On a donc, par une récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_\lambda^{(n)}$ est un vecteur propre de valeur propre $\frac{\lambda}{a^n}$. Or, une valeur propre doit appartenir à $]-1,1]\setminus\{0\}$. Or, $\frac{\lambda}{a^n} \to \infty$, donc $f_\lambda^{(n)}$ doit être nulle pour n assez grand.

   Notons $r \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\lambda}{a^r} \in]-1,1] \setminus \{0\}$ et que $\frac{\lambda}{a^{r+1}} \notin]-1,1] \setminus \{0\}$. Ainsi, $f^{(r+1)}$ est la fonction nulle. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(\frac{b}{1-a}) + f'_\lambda(\frac{b}{1-a})(x - \frac{b}{1-a}) + \frac{f''_\lambda(\frac{b}{1-a})}{2!}(x - \frac{b}{1-a})^2 + \dots$$

$$+ \frac{f_\lambda^{(r)}(\frac{b}{1-a})}{r!}(x - \frac{b}{1-a})^r + \int_{\frac{b}{1-a}}^{x} \frac{f_\lambda^{(r+1)}(t)}{r!}(x-t)^r \, dt$$

$$= \frac{f_\lambda^{(r)}(\frac{b}{1-a})}{r!}(x - \frac{b}{1-a})^r$$

Posons $c = \frac{f_\lambda^{(r)}(\frac{b}{1-a})}{r!}$. Si $f_\lambda^{(r)}$ est un vecteur propre d'une valeur propre différente de 1, alors $c = 0$ (ce qui est exclu, car sinon f_λ serait la fonction nulle). Donc, $f_\lambda^{(r)}$ est un vecteur propre de valeur propre 1. Donc, $\frac{\lambda}{a^r} = 1$, d'où $\lambda = a^r$. Ainsi, $f_\lambda = c\left(x - \frac{b}{1-a}\right)^r$.

(e) Synthèse : Soit $c \neq 0$. Posons $f(x) = c\left(x - \frac{b}{1-a}\right)^r$. Ainsi,

$$f(ax+b) = c\left(ax + b - \frac{b}{1-a}\right)^r = c\left(ax - \frac{ab}{1-a}\right)^r = ca^r\left(x - \frac{b}{1-a}\right)^r = a^r f(x)$$

Donc f est un vecteur propre de valeur propre a^r.

Pour le dernier exercice, voir programme de colle précédent (qui sera ré-écrit prochainement du a certaines fautes/non-réponses).