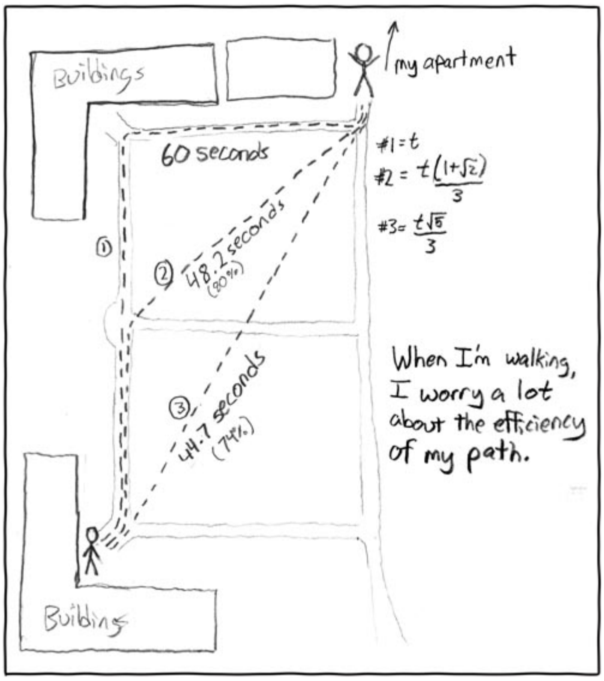
MPI* Maths

Programme de khôlles

Semaine 17



Olivier Caffier

Table des matières

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles

A Questions de cours, groupes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

A.1 Définition d'un produit scalaire + exemple

Définition - Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.
On appelle *produit scalaire sur E* une application $<,>$ respectant les conditions suivantes :

- **forme** : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$;
- **bilinéaire** : $\forall y \in E$ (idem pour x), $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire;
- **symétrique** : $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
- **définie positive** : $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0$.

Remarque : en pratique, **on montrera d'abord que l'application est symétrique PUIS qu'elle est linéaire!**

EXEMPLE.

On prend $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$ deux réels.

On définit alors l'application $\langle\, ,\, \rangle$ par

$$\boxed{\langle f, g\rangle \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt}$$

Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire :

- **forme** : Soient $f, g \in E$, alors d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\int_a^b f(t)g(t)dt$ existe et appartient bien à $\mathbb{R}$;
- **symétrique** : immédiat;
- **linéaire** : oui par linéarité de l'intégrale;
- **définie positive** : oui par « définie positivité de l'intégrale » (une fonction continue et positive en tout point renvoyant une intégrale nulle est nulle).

On a bien un produit scalaire sur E!

A.2 Appliquer le procédé de Gram-Schmidt sur un exemple

Donnons une b.o.n (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ de

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 3y + z = 0\}$$

On a, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in H &\Leftrightarrow 5x - 3y + z = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \times y + 1 \times x\\ y &= 1 \times y + 0 \times x\\ z &= 3 \times y + (-5) \times x\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $B = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}}_{x_2}\Big)$ est une base de H.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt :

1. On définit e_1 :

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

2. On définit temporairement u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 \\ &= x_2 + \frac{15}{10}x_1 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On définit enfin e_2 :

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{B' = (e_1, e_2) \text{ est une b.o.n de } H}$$

A.3 Inégalité de Cauchy Schwarz (démo)

Proposition - Inégalité de Cauchy Schwarz

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien ou préhilbertien réel. On considère $\|.\|$ la norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$ sur E.
Alors, $\forall x, y \in E$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

i.e

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

avec égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq. $x = \lambda y$.

DÉMONSTRATION.

Soient $x, y \in E$, supposons (cas immédiat sinon) que $y \neq 0$. Considérons le polynôme

$$\begin{aligned} P(t) &= \langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0 \\ &= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 \end{aligned}$$

Alors, P est un polynôme de degré 2 constamment positif, donc son discriminant est négatif.

Or,

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$$

et donc $\Delta \leq 0$ implique que

$$\boxed{\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2}$$

Enfin, le cas d'égalité se produit quand $\Delta = 0$, et

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Leftrightarrow \exists \lambda' \in \mathbb{R}, P(\lambda') = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda' \in \mathbb{R}, x + \lambda' y = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

A.4 Norme associée à un produit scalaire (démo)

Proposition - Norme associée à un produit scalaire

Soit $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien ou préhilbertien réel.
On définit la *norme associée à* $\langle\,,\,\rangle$, notée $\|.\|$, par :

$$\|.\| : x \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Il s'agit bien d'une norme sur E.

DÉMONSTRATION.

- **forme** : le produit scalaire étant une forme bi-linéaire, en composant par la racine carrée, on a toujours une forme.
- **absolument homogène** : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, alors $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$, d'où l'absolue homogénéité.
- **définie positive** : immédiat.
- **1ère I.T** : Soient $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\underbrace{\langle x, y\rangle}_{\leq \|x\|\|y\| \text{ (I.C.S)}} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

d'où $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A.5 Une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et non nuls est libre (démo)

Proposition

Soit $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien ou préhilbertien réel.
Alors,

Toute famille de vecteurs non-nuls, orthogonaux 2 à 2, est libre.

DÉMONSTRATION.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs non nuls de E, orthogonaux 2 à 2.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j = 0$.

Alors, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle e_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j\rangle}_{=0} &= \sum_{j=1}^{p} \langle e_i, \lambda_j e_j\rangle \\ &= \lambda_j \sum_{j=1}^{p} \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{>0}\end{aligned}$$

donc pour tout $i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$.

Notre famille est bien libre.

A.6 Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v de dimension finie munie d'une B.O.N

Proposition

Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien, soit $F \subset E$ un s.e.v.
Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une B.O.N de F. Soit $p_F^\perp$ le projeté orthogonal sur F.
Alors, pour tout $x \in E$:

$$p_F^\perp(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

A.7 $S(E)$ est un espace vectoriel

Définition

Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien. On définit $S(E)$ par

$$S(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^* = u\}$$

Proposition

$S(E)$ est un espace vectoriel.

DÉMONSTRATION.

- **Non vide :** $\tilde{0}$ et Id_E sont dans $S(E)$.
- **Stable par combinaison linéaire :** Soient $u, v \in S(E), \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
  Alors,

$$\begin{aligned}\left(\lambda u + \mu v\right)^* &\overset{(*)}{=} \lambda u^* + \mu v^* \\ &= \lambda u + \mu v\end{aligned}$$

Justifions $(*)$: Soient $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned}\langle \left(\lambda u + \mu v\right)(x), y \rangle &= \langle \lambda u(x), y \rangle + \langle \mu v(x), y \rangle \\ &= \langle x, \lambda u^*(y) \rangle + \langle x, \mu v^*(y) \rangle \\ &= \langle x, \left(\lambda u^* + \mu v^*\right)(y) \rangle\end{aligned}$$

Par *unicité de l'adjoint*, on en conclut que $\left(\lambda u + \mu v\right)^* = \left(\lambda u^* + \mu v^*\right)$.

A.8 Définition de l'adjoint

Définition - Adjoint d'un endomorphisme

Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,

$$\exists! u^* \in \mathcal{L}(E) \text{ tq. } \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

u^* est alors appelé *l'adjoint* de u.

A.9 Adjoint d'une composée (« démo »)

Proposition

Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

DÉMONSTRATION.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\langle u \circ v(x), y \rangle &= \langle v(x), u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, v^* \circ u^*(y) \rangle\end{aligned}$$

Or on sait également que $\langle u \circ v(x), y \rangle = \langle x, (u \circ v)^*(y) \rangle$. On conclut donc par unicité de l'adjoint.

A.10 Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une B.O.N de E. Notons $M = \mathrm{Mat}_B(u)$.
Alors,

$$\mathrm{Mat}_B(u^*) = M^\top$$

A.11 Lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique (« démo »)

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une B.O.N de E.
Alors,

$$u \text{ auto-adjoint de } E \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION.

$\underline{\Rightarrow:}$ Supposons que $u^* = u$. Alors

$$\mathrm{Mat}_B(u^*) = \mathrm{Mat}_B(u)$$

or on sait que

$$\mathrm{Mat}_B(u^*) = (\mathrm{Mat}_B(u))^\top$$

$$\boxed{\text{D'où } \mathrm{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})}$$

$\underline{\Leftarrow:}$ Réciproquement supposons que $\mathrm{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$(\mathrm{Mat}_B(u))^\top = \mathrm{Mat}_B(u)$$

Or,

$$(\mathrm{Mat}_B(u))^\top = \mathrm{Mat}_B(u^*)$$

Un endomorphisme étant entièrement déterminé par l'image d'une base à travers ce dernier, on en déduit donc que :

$$\boxed{u^* = u}$$

A.12 Pour un endomorphisme auto-adjoint, les s.e.p sont en somme directe orthogonale (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in S(E)$.
Alors,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u), \lambda \neq \mu \implies E_\lambda(u) \overset{\perp}{\bigoplus} E_\mu(u)$$

DÉMONSTRATION.

Soient $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ tels que $\lambda \neq \mu$. Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$.

Alors,

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle \\ &= \lambda\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

or, on sait que $u \in S(E)$, i.e $u^* = u$:

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \langle x, u(y)\rangle \\ &= \langle x, \mu y\rangle \\ &= \mu\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{cases} \lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \\ \lambda \neq \mu \end{cases} \implies \langle x, y\rangle = 0$$

$$\boxed{\text{D'où } E_\lambda(u) \overset{\perp}{\bigoplus} E_\mu(u)}$$

A.13 Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^* (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un s.e.v.
Alors,
$$F \ u\text{-stable} \implies F^\perp \ u^*\text{-stable}$$

DÉMONSTRATION.

Supposons donc que F soit u-stable. Soient $x \in F$ et $y \in F^\perp$.

Alors, par hypothèse $u(x) \in F$ donc :
$$\langle u(x), y\rangle = 0$$

Or,
$$\begin{aligned}\langle u(x), y\rangle &= \langle \underbrace{x}_{\in F}, u^*(y)\rangle \\ &= 0 \\ &\Rightarrow u^*(y) \in F^\perp\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où } F^\perp \ u^*\text{-stable}}$$

A.14 Si F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, il en va de même pour son orthogonal (« démo »)

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien, $u \in S(E)$ et $F \subset E$ un s.e.v.
Alors,
$$F \ u\text{-stable} \implies F^\perp \ u\text{-stable}$$

DÉMONSTRATION.(même démo qu'en A.13 avec $u = u^*$)

A.15 Le spectre réel d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$ et E_1 et E_{-1} sont orthogonaux (démo)

Définition - Isométrie vectorielle

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère $\|.\|$ la norme associée à $\langle\,,\,\rangle$ sur E.
On dit que u est une *isométrie* si :
$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$
on définit alors $O(E) = \{s \in \mathcal{L}(E) \mid s \text{ est une isométrie}\}$

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in O(E)$.
Alors,
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad E_1(u) \perp E_{-1}(u)$$

DÉMONSTRATION.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$, il existe donc $x \in E\backslash\{0\}$ tq. $u(x) = \lambda x$. Or $\|u(x)\| = \|x\|$, i.e $|\lambda| = 1$. On en déduit que $\lambda = \pm 1$.

$$\boxed{\text{D'où } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}}$$

D'autre part, soit $(x, \tilde{x}) \in E_1(u) \times E_{-1}(u)$. Alors, comme *une isométrie conserve le produit scalaire*, on a que :
$$\langle u(x), u(\tilde{x})\rangle = \langle x, \tilde{x}\rangle$$

Or, on sait également que $u(x) = x$ et $u(\tilde{x}) = -\tilde{x}$, donc
$$\langle u(x), u(\tilde{x})\rangle = \langle x, -\tilde{x}\rangle = -\langle x, \tilde{x}\rangle$$

D'où $\langle x, \tilde{x}\rangle = -\langle x, \tilde{x}\rangle = 0$

$$\boxed{\text{D'où } E_1(u) \perp E_{-1}(u)}$$

A.16 Théorème de réduction par blocs des isométries

Théorème de réduction par blocs des isométries

Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $u \in O(E)$.
Alors, il existe B une B.O.N de E telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & (0) & & & \ddots & & & (0) & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & R_{\theta_1} & & \\ & (0) & & & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{array}\right) := M$$

où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

ceci se traduit également par :
Pour $A \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \text{tq. } A = P^{\perp} M P = P^{-1} M P$$

avec M la matrice décrite de la même manière que précédemment.

A.17 Théorème spectral (2 versions)

Théorème spectral (v1)

Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,

$$\begin{aligned} u \in S(E) \Leftrightarrow E &= \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u) \\ &\Leftrightarrow \exists B \text{ une B.O.N de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_B(u) \text{ soit diagonale} \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe une B.O.N de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } u \end{aligned}$$

en particulier,

$$u \in S(E) \implies u \text{ diagonalisable}$$

Théorème spectral (v2)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors,

$$\begin{aligned} A \in S_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow A \text{ est ortho-semblable à une matrice diagonale} \\ &\Leftrightarrow \exists \Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale }, \exists P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tq. } A = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^{\top} \end{aligned}$$

A.18 Définition d'un endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif

Définition - Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $u \in S(E)$.

- On dit que u est *auto-adjoint positif* si :
$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$
- On dit que u est *auto-adjoint défini positif* si :
$$\forall x \in E \backslash \{0\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

B Questions de cours, groupes $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$

B.1 Identité de polarisation et identité du parallélogramme (démo)

Proposition - Deux égalités assez *famous*

Soit $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Alors, pour $x, y \in E$, on a les deux égalités suivantes :

1. **Identité de polarisation :**

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

2. **Identité du parallélogramme :**

$$2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

DÉMONSTRATION. Soient donc $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \text{et } \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

On arrive au système suivant :

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 & (L_1) \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 & (L_2) \end{cases}$$

Ainsi, en faisant l'opération : $(L_1) - (L_2)$, on obtient

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$$

$$\boxed{\text{D'où } \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$$

et l'opération $(L_1) + (L_2)$ nous donne bien :

$$\boxed{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}$$

B.2 Formule du projeté orthogonal sur un s.e.v de dimension finie muni d'une B.O.N (démo)

Proposition

Soit $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien, soit $F \subset E$ un s.e.v.
Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une B.O.N de F. Soit $p_F^{\perp}$ le projeté orthogonal sur F.
Alors, pour tout $x \in E$:

$$p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in E$. Comme $p_F^{\perp}(x) \in F$, on peut dire qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tq. $\boxed{p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i}$

De plus, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\langle p_F^{\perp}(x), e_i\rangle = \alpha_i \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{=1} = \alpha_i$$

Ensuite, on sait que $x - p_F^{\perp}(x) \in F^{\perp}$, i.e pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x - p_F^{\perp}(x), e_i\rangle = 0 &\implies \langle x, e_i\rangle = \langle p_F^{\perp}(x), e_i\rangle \\ &\implies \boxed{\alpha_i = \langle x, e_i\rangle} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i}$$

B.3 Caractérisation des isométries par la conservation du produit scalaire (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,
$$u \in O(E) \Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$: Supposons que $u \in O(E)$, soient $x, y \in E$. Alors, d'après l'identité de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad (\text{car } u \in O(E))\\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

D'où la conservation du produit scalaire.

$\Leftarrow$: Immédiat en prenant $y = x$, d'où la conservation de la norme : $u \in O(E)$.

B.4 Caractérisation des isométries par l'image d'une b.o.n (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,
$$u \in O(E) \Leftrightarrow \exists B = (e_1, \ldots, e_n) \text{ une B.O.N de } E \text{ tq. } B' = (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ soit une B.O.N de } E$$

DÉMONSTRATION.

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe une telle base. Soit donc $x \in E$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.
B est une B.O.N donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

Or, $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i)$ et B' est également une B.O.N, donc de même, d'après le *théorème de Pythagore* :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

D'où $u \in O(E)$.

$\Rightarrow$: Supposons que $u \in O(E)$. Alors, on sait d'après la démo [B.3] que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une B.O.N de E. Ainsi, pour $i, j \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle u(e_i), u(e_j)\rangle &= \langle e_i, e_j\rangle\\ &= \delta_{i,j}\end{aligned}$$

$(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est donc une famille orthonormée de cardinal n, c'est donc bel et bien une B.O.N de E.
On vient ainsi de démontrer que ce résultat était valable pour n'importe quelle B.O.N : le *théorème de la base incomplète* et le *procédé de Gram-Schmidt* nous permettent d'affirmer l'existence d'une B.O.N de E.

D'où le résultat voulu.

B.5 Caractérisation des isométries par u^* (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,

$$u \in O(E) \Leftrightarrow \left[u^* \circ u = \mathrm{Id} \text{ et } u^{-1} = u^*\right]$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \ \text{(démo [B.3])} \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \langle x, u^* \circ u(y) - y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, u^* \circ u(y) - y = 0 \\ &\Leftrightarrow u^* \circ u = \mathrm{Id},\ \text{i.e } u^{-1} = u^* \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

B.6 Existence et unicité de l'adjoint (démo)

Théorème de représentation des formes linéaires en dimension finie

Soit $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace euclidien.

1. $\forall x_0 \in E$,

$$\varphi_{x_0} : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, x_0\rangle \end{array}$$

est une forme linéaire.

2. $\forall \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! x_0 \in E$ tq. $\psi = \varphi_{x_0}$

Proposition - Unicité de l'adjoint

Soient $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,

$$\exists! u^* \in \mathcal{L}(E) \text{ tq. } \forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

DÉMONSTRATION.

EXISTENCE Soit $y \in E$, notons $\psi_y : x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ (qui est bien une forme linéaire). Alors, d'après le *théorème de représentation des formes linéaires* : il existe un unique $x_0 \in E$ tq. $\psi_y = \varphi_{x_0}$ (voir notations ci-dessus). Notons $x_0 = u^*(y)$. Ainsi, on a :

$$\forall y \in E, \exists! u^*(y) \in E, \forall x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Montrons que $u^* : y \mapsto u^*(y)$ est linéaire : soient $y_1, y_2 \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle x, u^*(\lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda u^*(y_1) - \mu u^*(y_2)\rangle &= \langle x, u^*(\lambda y_1 + \mu y_2)\rangle - \lambda\langle x, u^*(y_1)\rangle - \mu\langle x, u^*(y_2)\rangle \\ &= \langle u(x), \lambda y_1 + \mu y_2\rangle - \langle u(x), \lambda y_1\rangle - \langle u(x), \mu y_2\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où la linéarité de u^*, d'où l'existence d'un tel endomorphisme.

UNICITÉ Soient u^* et v^* qui conviennent. Alors, pour $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \langle x, u^*(y)\rangle \\ &= \langle x, v^*(y)\rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle x, (u^* - v^*)(y)\rangle = 0$$

et ceci est vrai pour tout $x, y \in E$.

On en déduit donc que $u^* = y^*$.
D'où l'unicité.

B.7 Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une B.O.N de E. Notons $M = \mathrm{Mat}_B(u)$.
Alors,

$$\mathrm{Mat}_B(u^*) = M^\top$$

DÉMONSTRATION. Notons $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $M' = \mathrm{Mat}_B(u^*)$.

Donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

$$M = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & a_{1,j} & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{n,j} & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

et donc pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$a_{k,j} = \langle u(e_j), e_k \rangle$$

On en déduit de même que :

$$b_{j,k} = \langle u^*(e_k), e_j \rangle$$

Ainsi, pour $k, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} a_{k,j} &= \langle u(e_j), e_k \rangle \\ &= \langle e_j, u^*(e_k) \rangle \\ &= b_{j,k} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\text{D'où } M^\top = M'}$$

B.8 Si F est stable par une isométrie, il en va de même pour son orthogonal

Proposition

Soient $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace euclidien, $u \in O(E)$ et $F \subset E$ un s.e.v.
Alors,

$$F u\text{-stable} \implies F^\perp u\text{-stable}$$

DÉMONSTRATION. Supposons donc que F soit u-stable, i.e pour tout $x \in F$: $u(x) \in F$.

Comme u est une isométrie, elle préserve le produit scalaire (démo [B.3]).

Soit donc $(x, y) \in F \times F^\perp$. Alors $\langle x, y \rangle = 0$ et :

$$\langle x, y \rangle = \langle \underbrace{u(x)}_{\in F}, u(y) \rangle$$

On en déduit donc que $u(y) \in F^\perp$, d'où :

$$\boxed{F^\perp u\text{-stable}}$$

B.9 Une projection est une projection orthogonale ssi c'est un endomorphisme auto-adjoint (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
Alors,

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Longleftrightarrow p \text{ est auto-adjoint}$$

Démonstration.

$\underline{\Rightarrow:}$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{Im}(p)$. Montrons alors que $p \in S(E)$, i.e :

$$\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle \tag{1}$$

Soient donc $x, y \in E$. Par hypothèse donc : $\exists!(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Alors,

$$\begin{aligned}\langle p(x), y\rangle &= \langle p(x_2), y_1 + y_2\rangle \quad (x_1 \in \mathrm{Ker}(p))\\ &= \langle x_2, y_1 + y_2\rangle \quad (x_2 \in \mathrm{Im}(p))\\ &= \underbrace{\langle x_2, y_1\rangle}_{=0} + \langle x_2, y_2\rangle\\ &= \langle x_2, y_2\rangle\end{aligned}$$

et de même, on a :

$$\langle x, p(y)\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$$

D'où la propriété (1) : $p \in S(E)$

$\underline{\Leftarrow:}$ Supposons que $p \in S(E)$, alors p est une projection (donc $E = \mathrm{Ker}(p) \bigoplus \mathrm{Im}(p)$) et $p^* = p$.
Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$: soient $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe donc $\tilde{y} \in E$ tq. $y = p(\tilde{y})$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, p(\tilde{y})\rangle\\ &= \langle p^*(x), \tilde{y}\rangle\\ &= \langle \underbrace{p(x)}_{=0}, y\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$, on en déduit donc bien que p est une projection orthogonale.

B.10 Une symétrie est une symétrie orthogonale ssi c'est une isométrie (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $s \in S(E)$ une symétrie.
Alors,

$$s \text{ est une symétrie orthogonale} \Longleftrightarrow s \text{ est une isométrie}$$

Démonstration.

$\underline{\Rightarrow:}$ Supposons que s soit une symétrie orthogonale, alors : pour $x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1(s) \times E_{-1}(s)$ tq. $x = x_1 + x_2$.
Alors, comme par hypothèse $E_1(s) \perp E_{-1}(s)$, on a d'après le *théorème de Pythagore* : $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ et $\|s(x)\| = \|x_1\| + \|-x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$.

i.e pour tout $x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$: s est bien une isométrie.

$\underline{\Leftarrow:}$ Réciproquement, supposons que s soit une isométrie. On a alors juste à montrer (étant donné que s est une symétrie) que $E_1(s) \perp E_{-1}(s)$: soient donc $x \in E_1(s)$ et $y \in E_{-1}(s)$.
Alors,

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle s^2(x), s^2(y)\rangle\\ &= \langle s(x), s(-y)\rangle\\ &= -\langle s^* \circ s(x), y\rangle\\ &= -\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui nous permet bien de dire que $E_1(s) \perp E_{-1}(s)$: s est bien une symétrie orthogonale.

B.11 $O_n(\mathbb{R})$ est compact (démo)

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$O_n(\mathbb{R}) \text{ est un compact}$$

DÉMONSTRATION. On travaille en dimension finie, donc nous ne devons montrer que deux points :

(1) <u>$O_n(\mathbb{R})$ est fermé :</u>
Soit $(A_n)_n \in O_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq. il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_n \to A$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n^\top A_n = I_n$. Or, par linéarité de la transposition (A.L en dim. finie) et du produit matriciel, on trouve que $A_n^\top A_n \to A^\top A$
Par unicité de la limité, on a que $A^\top A = I_n$, i.e $A \in O_n(\mathbb{R})$.

(2) <u>$O_n(\mathbb{R})$ est borné. :</u>
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\begin{aligned}(M^\perp M)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} (M^\perp)_{i,k} M_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_{k,i}^2\end{aligned}$$
Or $M^\perp M = I_n \implies \forall i \in [\![1, n]\!], (M^\perp M)_{i,i} \leq 1$.

On en déduit alors (somme de termes positifs) que :
$$\forall i, k \in [\![1, n]\!], M_{k,i}^2 \leq 1$$

D'où le caractère borné!

B.12 Caractérisation des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs) par le spectre (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $u \in S(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.
On a les équivalences suivantes :

1
$$u \in S^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

2
$$u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

DÉMONSTRATION. Montrons uniquement la première équivalence, (démo analogue pour la deuxième!)

<u>$\Rightarrow$:</u> Supposons que $u \in S^+(E)$, i.e pour tout $x \in E : \langle u(x), x\rangle \geq 0$.
Alors, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il existe $x \in E \backslash \{0\}$ tq. $u(x) = \lambda x$.
Ainsi, $\langle u(x), x\rangle \geq 0 \implies \lambda \underbrace{\langle x, x\rangle} \geq 0$. Donc $\lambda \geq 0$.

D'où $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$

<u>$\Leftarrow$:</u> Réciproquement, supposons que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. On a $u \in S(E)$, donc d'après le *théorème spectral*, u est diagonalisable dans une B.O.N $B = (e_1, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs de propres de u (associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$).
Donc, pour $x \in E, \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tq. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et donc $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$.
Alors,
$$\begin{aligned}\langle u(x), x\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{=1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \lambda_i \\ &\geq 0\end{aligned}$$

D'où $u \in S^+(E)$.

C Questions de cours, groupe $\mathbb{C}$ uniquement

C.1 Théorème spectral (démo)

Théorème spectral (v1)

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors,

$$u \in S(E) \Leftrightarrow E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$$
$$\Leftrightarrow \exists B \text{ une B.O.N de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_B(u) \text{ soit diagonale}$$
$$\Leftrightarrow \text{ il existe une B.O.N de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } u$$

en particulier,

$$u \in S(E) \implies u \text{ diagonalisable}$$

DÉMONSTRATION.

$\Leftarrow$: Supposons que : $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$.
Soit B une B.O.N adaptée à la décomposition : alors $\mathrm{Mat}_B(u)$ est diagonale, donc symétrique.
Ainsi, $\mathrm{Mat}B(u^*) = \mathrm{Mat}_B(u)^\top = \mathrm{Mat}_B(u)$, donc $u^* = u$.

$\boxed{\text{D'où } u \in S(E)}$

$\Rightarrow$: Supposons que $u \in S(E)$, montrons le résultat par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n la propriété suivante :

$$H_n := \text{« Si } n = \dim(E), \text{ alors } \mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset \text{ »}$$

- $\mathbf{n = 1}$ **:** immédiat.
- $\mathbf{n = 2}$ **:** Soit B une B.O.N de E, alors $\mathrm{Mat}_B(u) \in S_2(\mathbb{R})$ par hypothèse sur u.
  Considérons les réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$
  Dès lors, $\chi_u(X) = X^2 - (a+b)X + ab - c^2$ et ce polynôme possède un $\Delta = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$, donc admet au moins une racine réelle : $\boxed{\mathrm{Rac}(\chi_u) = \mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset}$
- $\mathbf{H_1, H_2 \implies H_n}$ **:** Comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, u admet une droite stable ou un plan stable : $\exists F \subset E$ un s.e.v stable par u tel que $\dim(F) = 1$ ou 2. Considérons $\tilde{u} : F \to F$ l'endomorphisme induit sur cet espace.
  Il est immédiat que $\tilde{u} \in S(F)$ donc par hypothèse de récurrence ($\dim F = 1$ ou 2) : $\mathrm{Sp}(\tilde{u}) \neq \emptyset$. Or $\mathrm{Sp}(\tilde{u}) \subset \mathrm{Sp}(u)$.
  D'où $\boxed{\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset}$

Montrons enfin, par récurrence, la décomposition recherchée de l'espace :

- **Initialisation :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n la propriété suivante :

$$H_n := \text{« Si } n = \dim(E), \text{ alors } E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u) \text{ »}$$

- $\mathbf{n = 1}$ **:** immédiat.
- $\mathbf{H_1, \ldots, H_{n-1} \implies H_n}$ **:** On a vu, au travers de la récurrence précédente, que $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.
  Ainsi, $E_\lambda(u)$ est non-vide et est u-stable, donc d'après la démo [A.13], $F = E_\lambda(u)^\top$ est u-stable.
  Considérons donc $\tilde{u} : F \to F$ l'endormorphisme induit, qui est donc symétrique : $\tilde{u} \in S(F)$.
  Alors, comme $\dim(F) = \dim(E) - \dim(E_\lambda(u)) < n$, on a par hypothèse de récurrence que

$$F = \overset{\perp}{\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(\tilde{u})}} E_\lambda(\mu)$$

  Or, $E = E_\lambda(u) \overset{\perp}{\oplus} F$, d'où

$$\begin{aligned} E &= E_\lambda(u) \overset{\perp}{\bigoplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(\tilde{u})}} E_\lambda(\mu) \right) \\ &= \overset{\perp}{\bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(\alpha) \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

C.2 Théorème de réduction par blocs des isométries (démo)

Théorème - Réduction par blocs des isométries

Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in O(E)$.
Alors, il existe $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v de E tels que :

(A) $F_1, \dots, F_p$ sont u-stables.

(B) $F_1, \dots, F_p$ sont 2 à 2 orthogonaux.

(C) $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq p}} F_i$

(D) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

- Soit $\dim F_i = 1$ et $u_{|F_i} = \pm \mathrm{Id}_{|F_i}$
- Soit $\dim F_i = 2$ et $u_{|F_i} = \pm \mathrm{Rot}(\theta_i)$

DÉMONSTRATION. Montrons ce résultat par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n la propriété suivante :

$$H_n := \text{« Si } \dim(E) = n\text{, notre théorème est vérifié »}$$

- $\mathbf{n = 1}$ **:** $E = \mathbb{R}$ donc $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, et est donc sous la forme $u : x \mapsto \lambda x$.
Or, $u \in O(E) \implies \lambda = \pm 1 \implies u = \pm \mathrm{Id}_E$.
On a donc bien l'existence d'un tel « bloc » (qui représente ici tout l'espace) réduisant notre isométrie.

$\mathbf{H_1}$ vraie.

- $\mathbf{H_1, \dots, H_n \implies H_{n+1}}$ **:** Supposons que $\dim(E) = n+1$. Alors, comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une droite stable ou un plan stable par u, notons le F.
Considérons alors l'endomorphisme induit $\tilde{u} : F \to F$, qui est bien lui aussi une isométrie : $\tilde{u} \in O(F)$.
  - Si $\dim(F) = 1$: $\tilde{u} = \pm \mathrm{Id}_F \longrightarrow$ OK
  - Si $\dim(F) = 2$: $\tilde{u}$ est une rotation ou une symétrie orthogonale droite : $F = E_1(\tilde{u}) \overset{\perp}{\bigoplus} E_{-1}(\tilde{u})$

avec F un s.e.v de E respectant l'énoncé du théorème ci-dessus.

De plus,

$$\begin{cases} F \ u\text{-stable} \\ u \in O(E) \end{cases} \implies F^\perp \ u\text{-stable}$$

Or, $\dim(F^\perp) = n + 1 - \dim(F) \leq n$ donc, par hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$F^\perp = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq p}} G_i$$

avec les G_i respectant l'énoncé du théorème ci-dessus.

On pose alors $G_{p+1} = F$, et comme $E = F \oplus F^\perp$, on a bien

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq p+1}} G_i$$

$\mathbf{H_{n+1}}$ vraie.

D'où le résultat voulu.

C.3 Le projeté orthogonal minimise la distance à un sous-espace (démo)

Proposition

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $F \subset E$ un s.e.v.
Alors, $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} d(x,F) &= \inf_{y \in F} \|x - y\| \\ &= \|x - p_F^{\perp}(x)\| \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in E$,

Il suffit donc de prouver que, pour tout $y \in F$:

$$\|x - p_F^{\perp}(x)\| \leq \|x - y\|$$

Soit donc $y \in F$, on a $x - p_F^{\perp}(x) \in F^{\perp}$ et $p_F^{\perp}(x) - y \in F$ car F est s.e.v de E et est donc stable par C.L.

Par conséquent, $x - p_F^{\perp}(x) \perp p_F^{\perp}(x) - y$.

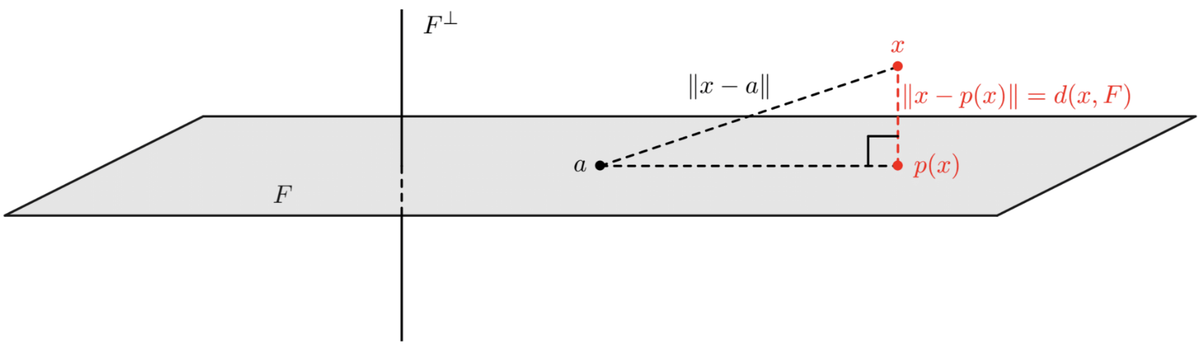
Donc, d'après le *théorème de Pythagore* :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - p_F^{\perp}(x)\|^2 + \|p_F^{\perp}(x) - y\|^2 \\ &\geq \|x - p_F^{\perp}(x)\|^2 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\|p_F^{\perp}(x) - y\|^2 = 0$, i.e si et seulement si $p_F^{\perp}(x) = y$.

ce qui permet de conclure.

Et cela se voit bien sur un dessin :



2 Exercices de référence

A Exercices de référence, groupes $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 1 (CCINP MPI 2023) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in S(E)$.

1. Montrer que :
$$f \in S^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad f \in S^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$$
2. Soit $f \in S^+(E)$, montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in S^+(E)$ tq. $f = g^2$.
3. Soient f défini positif et h positif, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Corrigé :

1. Cf. démo [B.12]
2. Soit $f \in S^+(E)$, alors d'après le *théorème spectral* :
$$E = \bigoplus_{1\leq k\leq p}^{\perp} E_{\lambda_k}(f)$$
Or, comme pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $f_{|E_{\lambda_k}(f)} = \lambda_k \mathrm{Id}_{|E_{\lambda_k}(f)}$ et $\lambda_k \geq 0$ car $f \in S^+(f)$ (d'après la question précédente), on définit :
$$g_{|E_{\lambda_k}(f)} = \sqrt{\lambda_k}\mathrm{Id}_{|E_{\lambda_k}(f)}$$
Il est ainsi immédiat que $g^2 = f$ et que $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbb{R}_+$.
Montrons par ailleurs que g est auto-adjoint : soit $(x, y) \in E^2$, alors : $\exists!(x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p}$ tels que $x = \sum_i x_i$ et $y = \sum_i y_i$.
Alors,
$$\begin{aligned}\langle g(x), y\rangle &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i}\underbrace{\langle x_i, y_j\rangle}_{=\delta_{i,j}}\\ &= \sum_i \sqrt{\lambda_i}\langle x_i, y_i\rangle\\ &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i}\langle x_j, y_i\rangle\\ &= \langle x, g(y)\rangle\end{aligned}$$
g est bien auto-adjoint, positif tq. $g^2 = f$.
3. Soient donc $f \in S^{++}(E)$ et $h \in S^+(E)$. On a, d'après la deuxième question, l'existence d'un $g \in S^{++}(E)$ tq. $f = g^2$.
D'autre part, $g \in S^{++}(E) \implies g \in GL(E)$, donc :
$$\begin{aligned}f \circ h &= g^2 \circ h\\ &= g \circ \left(g \circ h \circ g\right) \circ g^{-1}\end{aligned}$$
Ainsi, $f \circ h$ est semblable à $g \circ h \circ g$ qui est un endormorphisme symétrique (auto-adjoint), donc d'après le théorème spectral : $f \circ h$ est diagonalisable.q

Exercice 2 (Mines Télécom MP 2023) Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^* \circ f$.

1. Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(f^*)$.

Corrigé :

1. On a $u^* = \left(f^* \circ f\right) = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f = u$, donc $u \in S(E)$: d'après le *théorème spectral*, u est diagonalisable.
D'autre part, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tq. $u(x) = \lambda x$. Ainsi,
$$\langle u(x), x\rangle = \lambda \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\geq 0}$$
mais on a également
$$\begin{aligned}\langle u(x), x\rangle &= \langle f^* \circ f(x), x\rangle\\ &= \langle f(x), f(x)\rangle\\ &\geq 0\end{aligned}$$
Donc $\lambda \geq 0$, i.e $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

2. ◦ $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f)$: Il est immédiat que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$ (on le supposera non-nul), alors $\langle u(x), x\rangle = 0$ par positivité du produit scalaire.
De plus, comme démontré précédemment : $\langle u(x), x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$.
D'où $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

D'où l'inclusion réciproque.

◦ $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(f^*)$: Il est tout à fait évident que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(f^*)$.
Enfin, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(u) &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u))\\ &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))\\ &= \mathrm{rg}(f)\\ &= \mathrm{rg}(f^*)\end{aligned}$$

Une inclusion et une égalité des dimensions nous suffisent pour conclure sur l'égalité entre ces deux espaces.

d'où le résultat voulu.

Exercice 3 (Mines Télécom MP 2023) Considérons le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.

Corrigé : Ce type d'exercice se colle toujours au même schéma :

Trouver la matrice d'une projection orthogonale sur un espace

a. Trouver une base de $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.
b. On la transforme en B.O.N (procédé de Gram-Schmidt).
c. On utilise la formule du projecteur :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, p_P^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$$

d. On calcule $\mathrm{Mat}_{BC}(p_F^{\perp})$

Procédons donc... (courage) :

a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in P &\Leftrightarrow x + 2y - 3z = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= (-2) \times y + 3 \times z\\ y &= 1 \times y + 0 \times z\\ z &= 0 \times y + 1 \times z\end{cases}\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{B = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_2}\Bigg) \text{ est une base de } P.}$$

b. Après un procédé de Gram-Schmidt (cf. $[A.2]$), on trouve la B.O.N suivante :

$$\boxed{\tilde{B} = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}}_{g_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}}_{g_2}\Bigg) \text{ est une B.O.N de } P.}$$

c. Ainsi, on trouve grâce à la formule du projeté que :

$$\boxed{\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p_P^{\perp}(X) = \frac{1}{5}(-2x + y)\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{70}(3x + 6y + 5z)\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}}$$

d. A.B.S.L

Exercice 4 (CCINP MP 2022)

1. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
2. Soit p un projecteur orthogonal, montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
3. Montrer que pour tout vecteur x,
$$\langle x, p(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle$$

Corrigé :

1. D'une part, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ Alors, pour $k \in [\![1, n]\!]$:
$$(AB)_{k,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} b_{j,k}$$
$$(BA)_{k,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} a_{j,k}$$

   Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{k,k} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} b_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} b_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k} a_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{k,k} \\ &= \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

   D'où :
$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

   D'autre part, soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq. N soit semblable à M : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq. $M = P^{-1}NP$.
   Ainsi, d'après notre résultat précédent :
$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(P^{-1}NP) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}N) = \mathrm{Tr}(N)$$

   D'où la propriété suivante :
$$\boxed{\text{Deux matrice semblables ont la même trace.}}$$

2. Une info de trop dans cet énoncé, on a même pas besoin de savoir qu'il est orthogonal !
   En effet, $p^2 = p \implies E = \mathrm{Ker}(p) \bigoplus \mathrm{Im}(p)$.

   Ainsi, en prenant $B = B_{\mathrm{Ker}} \sqcup B_{\mathrm{Im}}$ une base adaptée à cette décomposition, on se rend compte que les vecteurs dans $\mathrm{Ker}(p)$ vont mettre un 0 sur la diagonale (et partout ailleurs sur leur colonnes d'ailleurs) et les vecteurs dans $\mathrm{Im}(p)$ vont renvoyer un 1 sur la diag. (et 0 ailleurs sur la colonne) car $p^2 = p$.

   Alors, en ayant remarqué ces caractéristiques, on voit bien que $\mathrm{Tr}(p)$ va être en fait le nombre de 1 sur la diag., qui est très exactement égal à la dimension de $\mathrm{Im}(p)$ (ou au nombre de vecteurs colonnes libres, comme vous préférez...).
   Quoi qu'il en soit, on retrouve bien cette magnifique propriété :
$$\boxed{\forall p \in \mathcal{L}(E), p^2 = p \implies \mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)}$$

3. En reprenant cette fois le fait que p soit un projecteur <u>orthogonal</u>, on sait que
$$E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{Im}(p)$$

   Ainsi, pour $x \in E$, on a l'existence (et l'unicité !) de $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tq. $x = x_1 + x_2$.
   On a alors que $p(x) = p(x_2) = x_2$
$$\begin{aligned}\langle x, p(x)\rangle &= \langle x_1, p(x)\rangle + \langle x_2, p(x)\rangle \\ &= 0 + \langle p(x_2), p(x)\rangle \\ &= \langle p(x), p(x)\rangle\end{aligned}$$

   D'où le résultat voulu.

Exercice 5 (CCINP MP 2022) On note $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et φ l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \end{array}$$

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

1. Montrer que $E = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{I}$.
4. Exprimer $\hat{f}$ l'image de $f \in E$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Corrigé :

1. Une analyse-synthèse (#cestducours) nous montre que pour tout $f \in E$, on a l'existence et l'unicité d'un tuple $(p,i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tq. pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\begin{cases} p(x) & = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ i(x) & = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On en déduit alors bien que } E = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}.}$$

2.
   - *forme* : immédiat ;
   - *symétrique* : immédiat ;
   - *linéaire* : immédiat (linéarité de l'intégrale) ;
   - *positive* : immédiat (positivité de l'intégrale) ;
   - *définie* : si f est continue sur $[-1,1]$ et que l'intégrale de son carré est nulle, on a que $f^2 = \tilde{0}$ et donc que $f = \tilde{0}$.

$$\boxed{\text{donc } \varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$$

3. Comme on se situe en dimension infinie, nous sommes obligés de procéder par double inclusion.
   - $\underline{\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^{\perp} :}$ Soient $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(p,i) &= \int_{-1}^{0} p(t)i(t)dt + \int_{0}^{1} p(t)i(t)dt \\ &= \int_{1}^{0} p(-t)i(-t)(-dt) + \int_{0}^{1} p(t)i(t)dt \\ &= \int_{1}^{0} p(t)(-i(t))(-dt) + \int_{0}^{1} p(t)i(t)dt \\ &= -\int_{0}^{1} p(t)i(t)dt + +\int_{0}^{1} p(t)i(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'inclusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^{\perp}$.

   - $\underline{\mathcal{P}^{\perp} \subset \mathcal{I} :}$ Soient $f \in \mathcal{P}^{\top}$ et $g \in \mathcal{P}$. Alors, d'après la [1.], $E = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}$ donc il existe $(f_1, f_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tq. $f = f_1 + f_2$.
   Ainsi, par définition de $\mathcal{P}^{\perp}$: $\langle f, g\rangle = 0$.
   Or, on sait que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^{\perp}$, donc :

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \langle f_1, g\rangle + \underbrace{\langle f_2, g\rangle}_{=0} \\ &= \langle f_1, g\rangle \end{aligned}$$

   Donc $f_1 \in \mathcal{P}^{\perp} \cap \mathcal{P} = \{\tilde{}\}$, d'où $f = f_2 \in \mathcal{I}$.

d'où l'inclusion réciproque.

4. On définit alors cette symétrie par :

$$s_{\mathcal{P}} : \begin{array}{ccc} E = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I} & \to & E \\ f = p + i & \mapsto & p - i \end{array}$$

et donc pour $f \in E$, $\hat{f} = s_{\mathcal{P}}(f)$. Or, notre analyse synthèse de la [1.] nous dit que pour tout $x \in [-1,1]$, $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
On en déduit alors que

$$\boxed{\hat{f} = s_{\mathcal{P}}(f) : x \mapsto f(-x)}$$

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^\top . A) = \mathrm{Ker}(A)$ et que $\mathrm{Ker}(A.A^\top) = \mathrm{Ker}(A^\top)$.
2. Montrer le même genre de relation pour les images.

Corrigé : Cf. bonus de votre cours.

Exercice 7 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n-k}\right)^2$

Corrigé :

1. On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

   Alors, en se munissant du p.s.c sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$$

   et on a

$$\|X_1\| = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \text{et} \quad \|X_2\| = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$$

   Enfin, d'après *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*, on a $\langle X_1, X_2 \rangle \leq \|X_1\| \times \|X_2\|$, d'où :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}}$$

2. De même, on pose :

$$X_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \vdots \\ \sqrt{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} \\ \frac{\sqrt{2}}{n-2} \\ \vdots \\ \frac{\sqrt{n-1}}{1} \end{pmatrix}$$

   Donc, on a

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}$$
$$\|X_1\| = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$\|X_2\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}}$$

   or $n \geq 2$ donc $\|X_1\| > 0$.
   Ainsi, d'après *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\frac{\langle X_1, X_2 \rangle^2}{\|X_1\|^2} \leq \|X_2\|^2$$

   ce qui amène au résultat voulu :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n-k}\right)^2}$$

B Exercices de référence, groupes $\mathbb{B}$ & $\mathbb{C}$

Exercice 8 (CCINP MP 2023) On dénote

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes sur (a, b, c) pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$.
2. On pose $\alpha = a+b+c$ et $\beta = ac+ab+cb$. D'après la question précédente, pour quelles valeurs de (α, β), M est-elle dans $SO_3(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b et c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.
4. Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $a = b$ et $M \in O_3(\mathbb{R})$.

Indication : On donne l'identité $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ac+ab+cb)$.

Corrigé :

1. On a :

$$\begin{aligned} M \in O_3(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow M^\top M = I_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+ac+bc = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(M) &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ac+ab+cb) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M \in SO_3(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow M^\top M = I_3 \text{ et } \det(M) = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+ac+bc = 0 \\ (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)\underbrace{(ac+ab+cb)}_{=0} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+ac+bc = 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}}$$

2. On remarque astucieusement que $\alpha^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2+2\beta$. Ainsi, on a

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\beta = 1 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

D'où

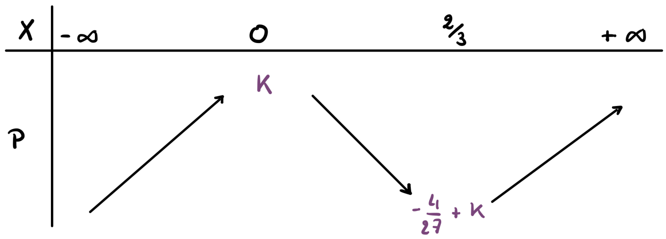
$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}}$$

3. Considérons donc le polynôme $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$.
On a :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3 - \alpha X^2 + \beta X - abc \\ &= X^3 - X^2 - abc \\ &= X^3 - X^2 - k \end{aligned}$$

(on rappelle que $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha = 1$ et $\beta = 0$)

On dresse le tableau de variation de P :



Ainsi,

$$\begin{aligned} P \text{ possède 3 racines réelles } &\Leftrightarrow P(0) \geq 0 \text{ et } P(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow k \geq 0 \text{ et } k \leq \frac{4}{27} \\ &\Leftrightarrow k \in \left[0, \frac{4}{27}\right] \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

4. En supposant $a = b$, on reprend une partie du système de la [1.] et on trouve

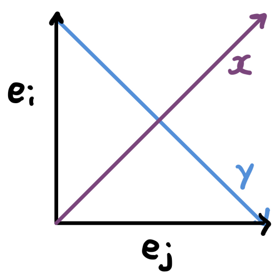
$$\boxed{M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}}$$

Exercice 9 (Centrale MP 2023) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$.

1. Établir l'égalité du parallélogramme.
2. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
   (a) $\exists c \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E^2, \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$
   (b) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y)\rangle = 0$
3. Trouver les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : pour tout sous-espace V de E, on a $u(V^{\perp}) \subset u(V)^{\perp}$

Corrigé :

1. #cestducours : cf. question [B.1]
2. On a :
   - (a) $\Rightarrow$ (b) : immédiat.
   - (b) $\Rightarrow$ (a) : Considérons $B = (e_1, \dots, e_n)$ une B.O.N de E.
     - 1er cas : $\forall i \in [\![1, n]\!], s(e_i) = 0$, i.e $s = \tilde{0}$. La propriété (a) est donc vraie pour $c = 0$.
     - 2ème cas : il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $s(e_i) = 0$.
       On pose alors $c = \|s(e_i)\|^2 > 0$, montrons alors que pour tout $j \in [\![1, n]\!], \|s(e_j)\|^2 = c$.
       Pour $j \neq i$, considérons $x = e_i + e_j$ et $y = e_i - e_j$:



Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \|e_i\|^2 + \cancel{\langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, e_j\rangle} - \|e_j\|^2 \\ &= \cancel{\|e_i\|^2 - \|e_j\|^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc d'après notre hypothèse, $\langle s(x), s(y)\rangle = 0$, ce qui nous fait bien arriver à la conclusion recherchée [1] :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!], \|s(e_j)\|^2 = c}$$

Ainsi, pour $(x, y) \in E^2$, il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ tq. $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_i y_i e_i$. Donc, il est immédiat que $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
Enfin,

$$\begin{aligned}\langle s(x), s(y)\rangle &= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \underbrace{\langle s(e_i), s(e_j)\rangle}_{=\delta_{i,j} \text{ (d'après (b))}} \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} x_i y_i \|e_i\|^2 \\ &= c \sum_{1\leq i\leq n} x_i y_i \\ &= c\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

d'où l'existence d'un tel $c \in \mathbb{R}$.

3. Dans notre analyse-synthèse, essayons de nous ramener à la question précédente :
   - **ANALYSE**
     Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui convient.
     Montrons la propriété (b) : Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$.
     Notons $V = \mathrm{Vect}(y)$, on a ainsi $x \in V^\perp$.
     Alors, par propriété de u, $u(x) \in u(V)^\perp$.
     Or, $u(V) = \mathrm{Vect}(u(y))$, d'où :
     $$\langle u(x), u(y)\rangle = 0$$
     On a bien montré (b), ce qui implique le point (a) d'après la question précédente :
     $$\boxed{\exists \lambda = \sqrt{c} \in \mathbb{R}_+, \exists \omega \in O(E), \text{ tels que } u = \lambda\omega}$$
   - **SYNTHÈSE**
     Soit donc $u = \lambda\omega$ (cf. notations précédentes). Soit $V \subset E$ un sous-espace.
     Soit $y \in u(V^\perp)$: $\exists x \in V^\perp$ tel que $y = u(x)$.
     Soit $z \in u(V)$: $\exists \tilde{x} \in V$ tel que $z = u(\tilde{x})$.
     Ainsi,
     $$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \langle u(x), u(\tilde{x})\rangle \\ &= c\langle \omega(x), \omega(\tilde{x})\rangle \\ &= c\langle x, \tilde{x}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$
     Donc $y \in u(V)^\perp$, donc u respecte bien la propriété de l'énoncé.

   Finalement :
   $$\boxed{\text{Les } u \text{ qui conviennent sont les } u = \lambda\omega \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \omega \in O(E).}$$

Exercice 10 (Mines MP 2022) Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E, \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$

Montrer qu'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Corrigé : Il s'agit littéralement du même exercice qu'avant, principale difficulté : adapter les notations.

1. Bon ceci dit, on aurait très bien pu utiliser l'égalité du parallélogramme...

Exercice 11 (CCINP MP 2021) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une application Φ par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (M,N) & \mapsto & \mathrm{Tr}(M^\top N) \end{array}$$

1. Montrer que Φ définit un produit scalaire.
2. Pour $(M,N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\Phi(M,N) \leq n$.
3. Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\mathrm{Tr}((AB)^2) \leq \mathrm{Tr}(A^2B^2)$.
4. Pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\mathrm{Tr}((AB+BA)^2) \leq 4\,\mathrm{Tr}(A^2B^2)$

Corrigé :

1.
   - *forme, symétrique, linéaire* : immédiat.
   - *définie positive* : Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
     Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(M^\top M) &= \sum_{i=1}^{n} (M^\top M)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (M^\top)_{i,j} m_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

avec égalité ssi pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, $m_{j,i}^2 = 0$, i.e $M = 0$.
D'où la définie positivité.

2. Soient $M, N \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, d'après *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\begin{aligned} \Phi(M,N) &\leq \sqrt{\Phi(M,M)}\sqrt{\Phi(N,N)} \\ &\leq \sqrt{\mathrm{Tr}(M^\top M)}\sqrt{\mathrm{Tr}(N^\top N)} \\ &\leq \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)}\sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} \\ &\leq n \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

3. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, on a d'après *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\Phi(BA, AB) \leq \sqrt{\Phi(BA,BA)}\sqrt{\Phi(AB,AB)}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(BA,AB) &= \mathrm{Tr}((BA)^\top AB) \\ &= \mathrm{Tr}(A^\top B^\top AB) \\ &= \mathrm{Tr}((AB)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(BA,BA) &= \mathrm{Tr}((BA)^\top BA) \\ &= \mathrm{Tr}(A^\top B^\top BA) \\ &= \mathrm{Tr}(A^2B^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(AB,AB) &= \mathrm{Tr}((AB)^\top AB) \\ &= \mathrm{Tr}(B^\top A^\top AB) \\ &= \mathrm{Tr}(A^2B^2) \end{aligned}$$

Donc, en reprenant notre inégalité, on a bien :

$$\boxed{\mathrm{Tr}((AB)^2) \leq \mathrm{Tr}(A^2B^2)}$$

4. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((AB+BA)^2) = \mathrm{Tr}((AB)^2 + (BA)^2 + ABBA + BAAB) &= \mathrm{Tr}((AB)^2) + \mathrm{Tr}((BA)^2) + \mathrm{Tr}(ABBA) + \mathrm{Tr}(BAAB) \\ &= \mathrm{Tr}((AB)^2) + \mathrm{Tr}((BA)^2) + 2\,\mathrm{Tr}(A^2B^2) \\ &\leq 4\,\mathrm{Tr}(A^2B^2) \end{aligned}$$

d'après la question [3.]

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Tr}((AB+BA)^2) \leq 4\,\mathrm{Tr}(A^2B^2)}$$

Exercice 12 (Mines PSI 2021) On pose $S_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+\}$.

1. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top SX \geq 0$.
2. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^\top A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que : $\forall S \in S_n^+(\mathbb{R}), \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), S = A^\top A$.
4. Montrer que : $\forall S, T \in S_n^+(\mathbb{R}), S + T \in S_n^+(\mathbb{R})$.
5. $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
6. Montrer que : $\forall (U, V) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \chi_{UV} = \chi_{VU}$.
7. On suppose seulement que $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(U_k)_k$ d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $U_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} U$.
En déduire que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

Corrigé :

1. Toujours la même question à chaque exercice... On remarque que $X^\top SX = \langle X, SX\rangle$ et puis c'est terminé (cf. correction des exos d'avant).
2. Tout d'abord, il est immédiat que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^\top A \in S_n(\mathbb{R})$.
Ensuite, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en notant $M = A^\top A$:
$$\begin{aligned}\langle MX, X\rangle = (MX)^\top X &= X^\top M^\top X\\ &= X^\top MX\\ &= X^\top A^\top AX\\ &= \langle AX, AX\rangle\\ &\geq 0\end{aligned}$$
On en déduit, d'après la question précédente, que : $A^\top A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.
Alors, d'après le *théorème spectral* : $\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists \Delta = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ tq. $S = P^\top \Delta P = P^{-1}\Delta P$.
Comme $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$, on a que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geq 0$.
Ainsi, on définit la matrice
$$D = \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$
et donc on retrouve bien $D^\top D = D^2 = \Delta$.
Alors, en posant $A = DP$, on a
$$\begin{aligned}S &= P^\top \Delta P\\ &= P^\top D^\top DP\\ &= A^\top A\end{aligned}$$
d'où l'existence d'une telle matrice.
4. Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors d'après la question [1.] :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top SX \geq 0 \ \text{ et } \ X^\top TX \geq 0$$
et donc on en déduit, par linéarité du produit matriciel que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top (S+T)X \geq 0$$
D'où $S + T \in S_n^+(\mathbb{R})$ d'après la question [1.]
5. **NON**, par exemple en prenant $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (qui sont bien dans cet espace au vu de leur valeur propre positive), on a pourtant $A - B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \notin S_n^+(\mathbb{R})$ car sa seule valeur propre est négative (on reprend le résultat de la question [1.]).

6. Soient $U, V \in GL_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\chi_{UV} &= \det(XI_n - UV)\\ &= \det(U(XI_n - VU)U^{-1})\\ &= \det(U) \times \det(XI_n - VU) \times \frac{1}{\det(U)}\\ &= \det(XI_n - VU)\\ &= \chi_{VU}\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

7. La première partie de la question est une question de cours!! On conclut par continuité du déterminant...

Exercice 13 (Mines Télécom MP 2021) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Corrigé : Ramenons nous aux endos, considérons $f \in S^{++}(E)$, montrons qu'il existe une unique application $g \in S^{++}(E)$ tq. $f = g^2$.

- **EXISTENCE** cela a déjà été fait à l'exercice 1, question [2.]
- **UNICITÉ** Montrons que g est unique, i.e g est complètement déterminée par f.
  D'une part, d'après le *théorème spectral* :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \le k \le p}} E_{\lambda_k}(f) \tag{2}$$

avec par hypothèse : $f \in S^{++}(E)$, i.e $\forall k \in [\![1, p]\!], \lambda_k > 0$.

Ensuite, comme $f = g^2$, on a que :

$$g \circ f = f \circ g$$

Donc, pour tout $k \in [\![1, p]\!], E_{\lambda_k}(f)$ est stable par g! On note alors :

$$g_k : \begin{array}{ccc} E_{\lambda_k}(f) & \to & E_{\lambda_k}(f) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

On a, d'après *théorème spectral*, que :

$$g_k \text{ est diagonalisable sur } \lambda_k \tag{3}$$

Soit donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(g_k)$, on a pour $x \in E_{\lambda_k}(f)$ un vecteur propre : $g_k^2(x) = \lambda^2 x$ et $g_k^2(x) = f(x) = \lambda_k x$. Donc $\lambda^2 = \lambda_k$, i.e $\lambda = \pm\sqrt{\lambda_k}$.
Or on sait que $g_k \in S^{++}(E)$, donc $\mathrm{Sp}(g_k) \subset \mathbb{R}_+^*$: on a alors que $\lambda = \sqrt{\lambda_k}$. Donc :

$$\mathrm{Sp}(g_k) = \{\sqrt{\lambda_k}\} \tag{4}$$

Alors, (3) et (4) nous permettent d'affirmer que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ g_k = \sqrt{\lambda_k}\mathrm{Id}_{E_{\lambda_k}(f)}$$

Finalement g est complètement déterminée par f sur les $(E_{\lambda_k}(f))_{1 \le k \le p}$ et que (2), on a bien que :

$$g \text{ est complètement déterminée par } f.$$

d'où l'unicité de g.

Exercice 14 (Mines-Ponts 2019)

1. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.
2. Que dire de ses valeurs propres réelles ?
3. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à spectre imaginaire pur.

Corrigé :

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   - Si A est inversible :
     On a par théorème du rang que $\text{rg}(A) = n$.
     D'autre part, $\det(A) = \det(A^\top) = (-1)^n \det(A) = (-1)^{\text{rg}(A)} \det(A)$.
     Enfin, on a supposé que $\det(A) \neq 0$, donc on trouve bien que $\text{rg}(A)$ est pair.
   - Sinon : passons en endomorphismes, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq. $u^* = -u$, montrons que $\text{rg}(u)$ est pair.

     Soit $y \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$ tq. $y = u(x)$.
     Ainsi,

     $$\begin{aligned}\langle y, y\rangle = \langle u(x), y\rangle &= \langle x, u^*(y)\rangle \\ &= -\langle x, u(y)\rangle \\ &= 0 \\ &\implies y = 0\end{aligned}$$

     On a donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

     Il est également immédiat (ça se prouve très rapidement) que $\text{Ker}(u) \perp \text{Im}(u)$.
     Le *théorème du rang* nous permet alors de dire que :

     $$E = \text{Ker}(u) \overset{\perp}{\bigoplus} \text{Im}(u)$$

     Soit donc $r = \text{rg}(u)$, considérons une B.O.N adaptée $B = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$.
     Alors :

     $$\text{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} C & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$$

     Notons alors

     $$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \to & \text{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

     et donc $C = \text{Mat}_{(e_1,\dots,e_r)}(\tilde{u})$.

     Comme $u^* = -u$, on a le même résultat pour $\tilde{u}$, donc C est antisymétrique. De plus, comme $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, on a bien que A est inversible, et on vient donc de se ramener au cas précédent !

     On a alors bien $\text{rg}(C)$ pair, et $\text{rg}(C) = \text{rg}(A)$ par construction. D'où le résultat voulu.
2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, soit donc $x \neq 0$ un vecteur propre associé à cette valeur propre.
   Alors,

   $$\langle x, u(x)\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \text{ et } \begin{aligned}[t]\langle x, u(x)\rangle &= \langle u^*(x), x\rangle \\ &= -\langle u(x), x\rangle \\ &= -\lambda\langle x, x\rangle\end{aligned}$$

   et comme $x \neq 0$, on peut bien dire que $\lambda = 0$.
   On en déduit que :

   $$\boxed{\forall A \in A_n(\mathbb{R}),\ \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}}$$
3. ABSL

Exercice 15 On travaille dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire :

$$\langle\ ,\ \rangle : (P,Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

Pour tout entier naturel n, on pose $P_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right)$

1. Donner le degré et le cœfficient dominant de P_n.
2. Quelle est la parité éventuelle du polynôme P_n ?
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
4. Montrer que P_n admet n racines distinctes entre -1 et 1.
5. Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle orthogonale ?
7. Calculer $\|P_n\|$.
8. Montrer que $\frac{d}{dX}\left((X^2-1)\frac{dP_n}{dX}(X)\right)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
9. En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

Corrigé : à vous de jouer !

C Exercices de référence, groupe $\mathbb{C}$ uniquement


NON
EUCLIDEAN
SPACE
BUTTER SUGOI
imgflip.com