Colles MPi* Semaine n°3 du 18 au 22/09/2023 (Programme n°1)

Vallaeys Pascal

15 septembre 2023

Thème : Révisions d'algèbre linéaire

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

Liste des élèves du groupe A :

- Dufour Caroline
- DEPLACIE Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- TROUILLET François
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

Liste des élèves du groupe B :

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- Gobron Nicolo
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Drouillet Baptiste
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Oubninte Adil
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann

Liste des élèves du groupe C :

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime

1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'une projection et décomposition de l'espace associée.(démo)
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.(démo)
- Théorème du rang. (démo)
- Si une application linéaire est bijective, sa réciproque est linéaire. (démo, pas refait en spé)
- Si une somme de n sous-espaces est directe, la décomposition d'un vecteur est unique (démo)

1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base. (démo, pas refait en spé)
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. (démo, dim finie puis quelconque)
- L'image directe et l'image réciproque de sev par une application linéaire sont des sev. (démo, pas refait en spé)
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. (démo)
- Existence et expression du polynôme interpolateur (avec les bonnes hypothèses). (démo)
- Majoration de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (en dimension finie) par la somme des dimensions. (démo)

1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.(démo)
- Formule de changement de base pour les matrices (démo, pas refait en spé)

2 Exercices de référence

2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

Exercice 1 : (CCINP MP 2021)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer que si u est nilpotent alors $u^n = 0$.
2) On suppose $n \geqslant 2$, où n est tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
a) Montrer qu'il existe une base e de E telle que la matrice A de u dans la base e est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre $X^2 = A, X \in \mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 2 :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
(i) $E = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
(ii) $Ker(f) = Ker(f^2)$
(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
(iv) $Ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
(v) $E = Ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

Exercice 3 : Dans quels cas l'union de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace ?

Exercice 4 :
a) Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie vectorielle.
b) En déduire les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec tous les autres.
c) Proposer une solution matricielle de la question précédente.

Exercice 5 : Déterminant de VanderMonde
Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n réels.

On pose $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{x-1} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

a) Montrer que si les réels $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas deux à deux distincts, alors $V(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Dans la suite, on les suppose deux à deux distincts.
b) On pose $P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, X)$. Montrer que P est un polynômes de degré n-1 en la variable X.

c) Déterminer le coefficient dominant de P.
d) Déterminer les racines de P, puis son expression.
e) En déduire $V(x_1, x_2, ..., x_n)$. .
f) Retrouver le résultat procédant par opérations sur les lignes et les colonnes.
g) En déduire le résultat sur l'existence d'un polynôme d'interpolation en $x_1, x_2, ..., x_n$.

2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

Exercice 6 : (CCINP MP 2022)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E \end{cases}$

Exercice 7 : (CCINP MP 2022)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 8 : (Mines MP 2022)
Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9 : (Mines MP 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = \mathrm{O}_n$ si et seulement si A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ où $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Exercice 10 : (Mines MP 2021)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$.
2. Montrer que $|\operatorname{rg}(A) - \operatorname{rg}(B)| \leqslant \operatorname{rg}(A+B)$.

Exercice 11 : (CCINP MP 2022)
Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\ker(u+v) \leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v))$
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Regarder la restriction de u à $\ker(u+v)$.
Commentaires divers : interrogatrice sympathique mais très pointilleuse sur certains détails .

Exercice 12 : (Mines télécom MP 2021)
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$: $L_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a_k) \end{array}$
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, L_k est une forme linéaire.
2. Déterminer le rang de $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

Exercice 13 : (IMT MP 2017)
Montrer par récurrence sur n que tout matrice de $M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 14 :
Soit A une matrice de $M_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et A est de rang 2n. Montrer que A est semblable à la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 : (Centrale)

Soient $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Montrer qu'il existe n+1 réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int\limits_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P(x_k)$.

Exercice 16 : (Magistère MP 2022)
Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes et telles que, $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}$, $A_i A_j = A_j A_i$.
Montrer que $A_1 \ldots A_n = 0$.

Exercice 17 : (Mines MP 2021)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.
On pose $A = \{x \in \mathcal{L}(E) \ / \ v \circ x \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.
Montrer que A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension en fonction de $\mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(v)$.

Exercice 18 : (Mines MP 2021)
On note :
- $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n de trace nulle.
- $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.
1. $\mathcal{N}$ est-il l'ensemble des matrices nilpotentes ?
2. Montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$.
3. A-t-on $\mathcal{N} = \mathcal{H}$?

Exercice 19 : (X 2001 42)
Soient $0 < t_1 < ... < t_n$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$. Montrer que le déterminant de la matrice de terme général $\left(t_i^{\alpha_j}\right)$ est strictement positif.

Exercice 20 : (X)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que A-B soient inversibles et $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$. Montrer que n est un multiple de 6.

3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les numéros suivants de la banque CCINP : 55,60,64,65,87,90.

4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : Révisions d'algèbre linéaire. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°1
- Groupe 2 : Programme n°1
- Groupe 3 : Programme n°1
- Groupe 4 : Programme n°1
- Groupe 5 : Programme n°1
- Groupe 6 : Programme n°1
- Groupe 7 : Programme n°1
- Groupe 8 : Programme n°1
- Groupe 9 : Programme n°1
- Groupe 10 : Programme n°1
- Groupe 11 : Programme n°1
- Groupe 12 : Programme n°1
- Groupe 13 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 14 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 15 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 16 : Pas de colle de math cette semaine