Intégrales à paramètre

Vallaeys Pascal

14 avril 2024

1 Références :

Exercices de la banque CCINP : 29,30,50

Méthodes de base :

- Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
- Appliquer le théorème de dérivation (C^1) des intégrales à paramètre.
- Appliquer la version continue du théorème de convergence dominée.

2 Exercices incontournables :

Exercice 1 : La fonction Gamma d'Euler

1. Donner l'ensemble de définition D de $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. Montrer que Γ est continue sur D.
3. Montrer que Γ est de classe C^1 sur D.
4. Déterminer les limites de Γ aux bornes de D.
5. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 2 : (CCINP MP 2023)

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[,\quad F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $F'(x)$.

2. Montrer que $G^2(x) = \dfrac{\pi}{4} - F(x)$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 3 : (CCINP MP 2022)

Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner Γ'.

3. Montrer que : $\forall x > 1$, $\forall \lambda \in]-1, 1[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n\Gamma(x)}{(n+1)^x}$$

.

Exercice 4 : (CCINP MP 2022)

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Calculer F' sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Calculer F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 : (Mines MP 2021)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telle que $f(0) = 0$.
1. Montrer que $\forall x \neq 0,\ \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{(k)} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$.

Exercice 6 : (Centrale PC)
a) Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f\left(x\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x.\sin(t)\right)dt$. (question Python)
b) Montrer que f est solution de l'équation $xy'' + y' + xy = 0$.
c) Déterminer la forme des solutions développable en série entière de cette équation.
d) En déduire le développement en série entière de f.
e) Obtenir le même développement en série entière d'une autre manière.

Exercice 7 : (CCINP PC et Mines MP)
a) Montrer que $f\left(x\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{Arc\tan(tx)}{t(1+t^2)}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et exprimer f'.
c) Exprimer f' sans signe $\int$.
d) Calculer alors $f(x)$ pour tout réel x.
e) En déduire la valeur de $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{Arc\tan(t)}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 8 :
On pose $f : x \to \int\limits_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
c) En déduire que $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.
d) En déduire $\int\limits_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt$, après avoir justifier la convergence.

Exercice 9 :
Soit $f \in C^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ et $\phi\left(f\right)\left(x\right) = \int\limits_0^1 \inf(x,t)f(t)dt$
a) Prouver que ϕ est un endomorphisme de $C^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$.
b) En utilisant le relation de Chasles, déterminer une autre expression de $\phi\left(f\right)$.
c) Déterminer $Ker\left(\phi\right)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$.
d) Prouver de $\phi\left(f\right)$ est de classe C^2.
e) Montrer que $\phi\left(f\right)'' = af$ avec a<0.

Exercice 10 :
Soit P un polynôme non constant, à coefficients complexes. On note $I\left(r\right) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{P'\left(r.e^{it}\right).r.e^{it}}{P(r.e^{it})}dt$.
a) Donner la forme du domaine de définition de I.
b) Calculer la limite de I(r) lorsque r tend vers $+\infty$.
c) Calculer la dérivée de la fonction I.
d) En déduire le théorème de D'Alembert-Gauss.

3 Exercices de niveau 1 :

Exercice 11 : (CCINP MPi 2023)
Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

3. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que, pour tout $x > 0$, $F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)$.

5. Montrer que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$.

Exercice 12 : (CCINP MPi 2023)

Soit $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donnez le domaine de définition D de F.

2. Calculez F(1). On pourra poser $u = \dfrac{1}{t}$.

3. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice 13 : (Mines télécom MP 2023)

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \ln t\ \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 14 : (Mines télécom MP 2023)

On considère $f : t \mapsto \int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

1. Donner l'ensemble de définition de f noté D.

2. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

3. Trouver une relation entre $f(t)$ et $f(t-2)$ en supposant que t et $t-2$ sont dans D.

Exercice 15 : (ENSEA/ENSIIE MP 2022)

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Donner pour tout $k \in \mathbb{N}, F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.

Exercice 16 : (CCINP MP 2021)

On pose : $\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie.

2. Montrer que f est continue.

3. Montrer que f est décroissante.

4. On pose : $\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

5. Montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

6. Montrer que $g(x) - f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{2x+1}$ pour tout $x > 0$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$

Exercice 17 : (CCINP MP 2021)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. a) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

2. a) Montrer que f est solution de $(E) : y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

b) Déterminer la fonction f.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4 Exercices de niveau 2 :

Exercice 18 : (Mines MP 2023)
Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{ln(t)} dt$.
1. Domaine de définition.
2. Continuité puis dérivabilité.
3. Autre forme pour $F(x)$.
4. Existence et calcul de $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} dx$.

Exercice 19 : (Mines MP 2022)
(avec préparation)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 20 : (Mines MP 2022)
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} \,\mathrm{d}t$.
1) Déterminer D, domaine de définition de f.
2) Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3) Montrer que f satisfait une équation différentielle que l'on résoudra.
Question orale : Une fois trouvées les 2 équations sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, l'examinateur me demande d'étudier la dérivabilité de f en 0.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
Exercice 1 : 3) penser à un changement de variable.
Commentaires divers :
Pour la question 2, je n'ai montré le caractère $\mathcal{C}^1$ que sur $\mathbb{R}^*$, la dérivabilité en 0 étant étudiée lors d'une question orale.

Exercice 21 : (Mines MP 2021)
On considère l'application $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(xt)}{1+x^2} dx$. On cherche à montrer que $F(t) = \pi \exp(-|t|)$.
1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F coïncide bien avec la fonction voulue en 0.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u)(u^2-t^2)}{(u^2+t^2)^2} du$.
3) Montrer que $F'' = F$ puis en déduire F.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve : Aide au choix du changement de variable $u = xt$ pour la question 2).

Exercice 22 : (Mines PSI 2021)
Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \cos(\frac{\pi t}{x+t}) dt$.
1) Montrer que f est C^0 sur $\mathbb{R}^+$, C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$.
2) Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par 2 changements de variables.

Exercice 23 : (Mines-Ponts 2019)
Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' - xy - 1 = 0$.
a) Trouver les solutions de (E) développables en série entière.
b) Montrer que $f : x \to \int\limits_0^{\pi/2} e^{-x.\sin t} dt$ est solution de (E).
c) En déduire $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

Exercice 24 : Complément sur la fonction Γ.
a) Montrer que Γ est convexe.
b) Montrer qu'en 0^+, $\Gamma(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$.
c) Montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
d) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} (t-x) t^{x-1}. \ln(t) dt = \Gamma(x)$.

e) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t}dt = \Gamma(x)$

Exercice 25 :

a) Déterminer le domaine de définition, et calculer $f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}(x.\tan(t))}{\tan(t)}dt$.

b) En déduire $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}dt$ et $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$.

Exercice 26 : (Mines MP)

Soit $E = C^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$. Pour toute fonction f de E, on pose $g(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(x+t)dt$.

a) Montrer que l'application $\varphi : f \to g$ est un endomorphisme de E.
b) Déterminer l'image de φ.
c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

5 Exercices de niveau 3 :

Exercice 27 : (Centrale MP 2023)
1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ exite-t-elle ? On note ce nombre $\Gamma(x)$ lorsqu'il est défini.
2. Montrer que $\Gamma(x) > 0$ et les 3 assertion suivantes :
(i) $\Gamma(1) = 1$
(ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
(iii) $\ln\circ\Gamma$ est convexe
3. Montrer que si f vérifie $(i), (ii)$ et (iii), alors $f = \Gamma$.
Commentaires divers : Examinateur sympathique, ni gentil ni méchant, assez distant. 30 minutes c'est vraiment court !

Exercice 28 : (X MP 2022)
Montrer qu'il existe une unique fonction $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que
$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dot{v}(t) = \displaystyle\int_0^1 (v(tx) + 1 - v(t))\,\mathrm{d}x.$

Exercice 29 : (ENS MP 2022)
a. Pour $u \in \left]-1, 1\right[$, montrer que :
$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n}.$
b. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left((\cos\phi + x)^2\right)\,\mathrm{d}\phi$ est contante sur $[-1, 1]$.
Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :
b. Poser $x = \cos(2\psi)$. Ne pas essayer d'utiliser la dérivée de F.

Exercice 30 : (X 2007 143)
Pour x>0, on pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\sin\left(\sqrt{t}\right)dt$.
a) Montrer que f est de classe C^1.
b) Donner la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
d) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 31 : (X(2) 112)
a) Déterminer I l'ensemble des réels t tels que $x \to e^{-xt}\frac{\sin x}{x}$ est intégrable.
b) Pour $t \in I$, calculer $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx$.
c) En déduire $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.