# Colles MPi* Semaine n°17 du 22/01/2024 au 26/01/2024 (Programme n°12)

Vallaeys Pascal

12 janvier 2024

## Thème : Topologie.

- **Groupe A** : Au moins deux ou trois questions de cours (groupe A), puis un exercice de référence (groupe A), puis un exercice CCINP. Pour les étudiants de ce groupe, vous choisirez principalement les notions les plus importantes et pas trop techniques. S'il reste du temps et que tout semble maîtrisé, vos propres exercices.
- **Groupe B** : Une question de cours (groupe A ou B), puis un exercice de référence (groupe A ou B) ou un exercice CCINP. Ensuite vos propres exercices d'abord niveau CCINP, puis un peu plus si tout se passe bien.
- **Groupe C** : Questions de cours (groupe A,B ou C), puis exercices de référence (groupes A,B ou C). Ensuite vos propres exercices, principalement niveau Centrale/Mines/X/ENS.

**Liste des élèves du groupe A :**

- Dufour Caroline
- Deplacie Florent
- Michaud Baptiste
- Vanderhaeghe Kellian
- Brulé Quentin
- Bouiller Mathéo
- Tom Demagny
- DESMIS Loan
- DENNINGER Carmen
- Durand Antoine
- BERTHE Louison
- RIMBAULT Simon
- Hequette Perrine
- Bennani Kenza

**Liste des élèves du groupe B :**

- Valemberg Lucas
- Depoorter Paul
- CAELEN Baptiste
- DALLERY Pierre
- SAULGEOT Clément
- CAFFIER Olivier
- Legros Owen
- BRUYERE Thomas
- Picard Antoine
- MARTINET Ellyas
- Bayle Sei
- Daussin Mathieu
- THUILLEUR Raphaël
- Lahoute Raphaël
- MABILLOTTE Thibault
- BAKKALI Rayane
- MORILLAS Nicolas
- BOISSIERE Maxime
- Grosset Loann
- Trouillet François
- Robert Xavier
- Rossi Alex

**Liste des élèves du groupe C :**

- Hasley William
- Applincourt Théo
- Behague Quentin
- Johnson Clovis
- PICQUET Augustine
- TAVERNIER Charles
- DUTILLEUL Timéo
- SAFFON Maxime
- Oubninte Adil
- Drouillet Baptiste
- Montfort Pierig
- Gobron Nicolo

## 1 Connaissances de cours et démonstrations exigibles :

### 1.1 Questions de cours, groupes A,B & C

- Définition d'un point intérieur.

- Définition d'un ouvert et d'un fermé.
- Une boule ouverte est ouverte. (démo)
- Stabilité des ouverts par union et intersection finie. (démo)
- Définition de la frontière.
- Caractérisation séquentielle des fermés. (donner un exemple)
- Théorème de Weierstrass et reformulation en termes de densité.
- Un fermé d'un compact est un compact. (démo)
- Image d'un compact par une application continue. (démo)
- Définition d'une partie connexe par arcs.
- Convexe implique connexe par arcs. (« démo »)
- Image d'un connexe par arcs par une application continue. (démo)
- Toutes les normes en dimension finie sont équivalentes. (l'écrire avec des quantificateurs)
- En dimension finie, tous les sev sont fermés. (démo)

### 1.2 Questions de cours, groupes B et C

- Une boule fermée est fermée (démo)
- Image réciproque d'un ouvert par une application continue. (démo)
- Image réciproque d'un fermé par une application continue. (démo)
- Lipschitzien $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue. (démo)
- Caractérisations des applications linéaires continues. (démo)
- Exemple d'application linéaire non continue. (démo)
- Définition d'une norme subordonnée.
- Un segment est un compact. (démo vue en sup)
- Le produit cartésien de deux compacts est un compact (pour la topologie produit). (démo)
- L'intérieur d'un ensemble est un ouvert. (démo)
- $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$. (démo HP)
- En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. (démo)
- Exemple de sous-espace vectoriel non fermé.
- $O_n(\mathbb{R})$ est compact. (démo)

### 1.3 Questions de cours du groupe C uniquement

- Théorème de Heine. (démo)
- L'adhérence d'un ensemble est un fermé. (démo)
- Toutes les normes en dimension finie sont équivalentes. (démo)
- Des normes équivalentes définissent les mêmes notions topologiques. (choisir une notion et le faire démontrer)
- Définitions équivalentes de la norme subordonnée. (démo)
- Exemple de fermé borné non compact. (démo)
- Dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices diagonalisables est dense. (démo HP)

## 2 Exercices de référence

### 2.1 Exercices de référence, groupes A,B & C

**Exercice 1 :** On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

**Exercice 2 :**
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.
a) Comparer l'adhérence de l'union des $(A_i)_{i\in I}$ à l'union de leurs adhérences.
b) Procéder de même avec l'intérieur.
c) Que dire pour les frontières ?

**Exercice 3 :**
1) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$ ?
2) Rappeler la définition d'un connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
3) On considère $S$ la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ ; montrer que $S$ est une partie connexe par arcs (*faire un schéma*).
4) Montrer que l'image de $S$ par une application continue $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un segment.

**Exercice 4 :**
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ? connexe par arcs ?

**Exercice 5 :** (Mines télécom MP)
Soit $E$ un espace vectoriel normé, $F$ un fermé de $E$, $G$ un compact de $E$.
Montrer que $F+G$ est un fermé de $E$.

**Exercice 6 :** (Mines Télécom MP 2021)
On pose $E=\mathbb{C}[X]$.
On munit $E$ de la norme définie par $\|P\|=\sup_{k\in\mathbb{N}}(|a_k|)$, où $P$ est de la forme $P=\sum_{k\in\mathbb{N}} a_kX^k$.
On pose $f:\left\{\begin{array}{lll} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(b)\end{array}\right.$ avec $b$ un complexe fixé.
1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Étudier la continuité de $f$.

**Exercice 7 :** Donner la norme induite de l'application dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$, suivant les différentes normes usuelles.

## 2.2 Exercices de référence, groupes B & C (parfois non faits en classe)

**Exercice 8 :** (CCINP MP 2022)
1. Soit $(E,||.||)$ un espace vectoriel normé, et $K$ un compact de $E$.
Montrer que $K$ est fermé et borné.
On s'intéresse à l'espace vectoriel $E=C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$, muni de la norme $||.||_2$, définie par $||f||_2=\sqrt{\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx}$.
2. On admet dans un premier temps que $||.||_2$ est une norme sur E.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\mapsto e^{inx}$.
a) Montrer que pour tous entiers $n$ et $p$ distincts, $||f_n-f_p||_2=2\sqrt{\pi}$.
b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.
3. a) Démontrer pour tous complexes $u$ et $v$ l'inégalité : $|uv|\leqslant\frac{|u|^2}{2}+\frac{|v|^2}{2}$. En déduire que pour toutes fonctions $f$ et $g$ de $E$, et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ : $\int_0^{2\pi}|fg|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{2\pi}|f|^2+\frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{2\pi}|g|^2$.
b) Soit $(f,g)\in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction : $h:\lambda\mapsto\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{2\pi}|f|^2+\frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{2\pi}|g|^2$, démontrer que : $\int_0^{2\pi}|fg|\leqslant||f||_2||g||_2$.
c) En déduire que $||.||_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

**Exercice 9 :**
a) Montrer que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, un sous-espace F possède des points intérieurs si et seulement si il est égal à E tout entier.
b) Montrer que, en dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels sont fermés.
c) Donner un contre-exemple en dimension infinie.

**Exercice 10 :**
Soit F un fermé d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
a) Montrer que, pour tout point a de E, $d(a,F)$ existe et est atteinte.
b) Montrer que l'application $a\to d(a,F)$ est continue.

**Exercice 11 :** Montrer la continuité, puis donner les normes induites des formes linéaire $\Phi_1 : f\to\int_{-1}^1\frac{f(t)}{1+t^2}dt$ et $\Phi_2 : f\to\int_{-1}^1\sin(\pi t).f(t)dt$ sur $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ en fonction de $\|.\|_1$,$\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$.

**Exercice 12 :**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, $A$ une partie de $E$ et $f$ une fonction continue de $[0,1]$ dans $E$ telle que $f(0)\in A$ et $f(1)\in E\setminus A$. Montrer qu'il existe un élément qui appartient à la fois à la frontière de $A$ et à $f([0,1])$

**Exercice 13 :**
1) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang inférieur ou égal à $r$ (avec $0\leq r\leq n$) est un fermé.
2) Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang exactement $r$.

**Exercice 14 :**

Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On pose $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ pour tout $u \in E$.

1) Montrer que $N_\infty$ et $N$ sont des normes sur $E$. Sont-elles équivalentes ?

2) Soit $Z$ l'ensemble des suites nulles à partit d'un certain rang. Montrer que $\mathring{Z} = \emptyset$. Que vaut $\overline{Z}$ ?

**Exercice 15 :**

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$. En déterminer les composantes connexes par arcs.

**Exercice 16 :**

Soient A,B deux matrices complexes d'ordre n. Montrer que $Dét(AB - \lambda I_n) = Dét(BA - \lambda I_n)$. (On pourra commencer par le montrer dans le cas où A est inversible puis montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ ).

## 2.3 Exercices de référence, groupe C uniquement (souvent non faits en classe, à chercher seuls)

**Exercice 17 :** On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.L'intérieure de A est-elle convexe ?

**Exercice 18 :**

a) Montrer que la distance entre deux compacts non vides existe et est atteinte.

b) Montrer de même que le diamètre d'un compact non vide est atteint.

**Exercice 19 :**

a) Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe $C^1$ telle que $\|f'\|_\infty < 1$. Montrer que $f$ possède un unique point fixe.

b) Soit C un compact non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et $f : C \to C$ vérifiant pour tous $x \neq y$, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que $f$ possède un unique point fixe.

c) Soit C un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et $f : C \to C$ vérifiant pour tous $x, y$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Montrer que $f$ possède un unique point fixe.

**Exercice 20 :**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et C un fermé non vide de E. Soit $f : C \to C$ une application k-lipschitzienne avec $k \in [0,1[$. On considère la suite définie par $x_0 \in C$, puis $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Montrer que $\sum\limits_n (x_{n+1} - x_n)$ converge puis que $f$ admet un unique point fixe.

b) On suppose maintenant que C un compact convexe non vide et $f$ 1-lipschitzienne . En considérant $f_n : x \to \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$, montrer que $f$ admet un point fixe.

**Exercice 21 :**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$soit bornée. On note pour tout entier naturel non nul p : $B_p = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

a) Montrer que la suite $(B_p)$ admet une valeur d'adhérence noté B.

b) Montrer que BA=B puis $B^2 = B$.

c) Montrer que $Ker(B) = \operatorname{Im}(A - I_n)$ et $\operatorname{Im}(B) = Ker(A - I_n)$.

d) En déduire que la suite $(B_p)$ converge.

**Exercice 22 :**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On pose $S(f) = \left\{g \circ f \circ g^{-1}; g \in GL(E)\right\}$. Montrer que $S(f)$ est fermé dans E si et seulement si $f$ est diagonalisable.

**Exercice 23 :**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $a_{n+1} - a_n \to 0$ Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un segment.

**Exercice 24 :**

Soit f une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer que le noyau de f est fermé si et seulement si f est continue.

**Exercice 25 :**

Soit E un espace euclidien et K un compact non vide. Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant K.

**Exercice 26 :**
Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension finie, et $u \in L(E)$. Montrer que $Ker(u) = Ker(u^2)$ si et seulement si il existe c>0 tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq c.\left\|u^2(x)\right\|$.

**Exercice 27 :**
On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme ($\|.\|_\infty$). Soit M l'ensemble des fonctions monotones de E. Montrer que M est fermé.

# 3 Exercices CCINP

Vous interrogez sur les exercices suivants de la banque CCINP : 34,35,36,37,38,41,44,45.

# 4 Vos propres exercices

Suivant le groupe des élèves (groupes B & C), vous proposer vos propres exercices sur le thème : topologie. Les élèves du groupe A ne sont interrogés que sur des choses vues en classe et les exercices CCINP, sauf en cas de prestation exceptionnelle.

# 5 Groupes collés cette semaine et programme correspondant

- Groupe 1 : Programme n°12
- Groupe 2 : Programme n°12
- Groupe 3 : Programme n°12
- Groupe 4 : Programme n°12
- Groupe 5 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 6 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 7 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 8 : Pas de colle de math cette semaine
- Groupe 9 : Programme n°11
- Groupe 10 :Programme n°11
- Groupe 11 : Programme n°11
- Groupe 12 : Programme n°11
- Groupe 13 : Programme n°11
- Groupe 14 : Programme n°11
- Groupe 15 : Programme n°11
- Groupe 16 : Programme n°11