РЕЗОЛЬВЕНТА

учебные материалы

Введите текст... Поиск

[Справочник по математике](#) → [Геометрия (Планиметрия)](#) → [Треугольники](#)

# Теорема Чевы

## Содержание



## Теорема Чевы 1

***ТЕОРЕМА ЧЕВЫ 1***. Если на сторонах $AB,\ BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1,$ $A_1$ и $B_1$ (рис.1), то отрезки $AA_1,$ $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (1)$$

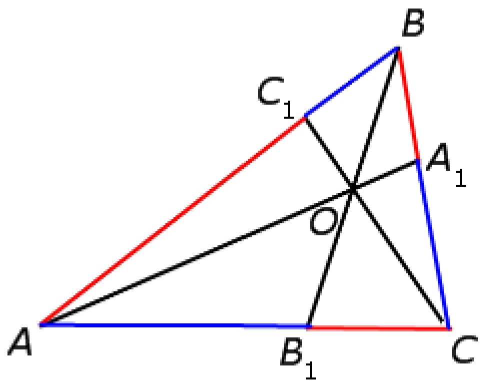


Рис.1

***ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ***. Докажем, что, если **отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке**, то выполнено равенство (1). Для этого проведём через точку $B$ прямую, параллельную прямой $AC$, и обозначим буквами $D$ и $C$ точки пересечения прямых $CC_1$ и $AA_1$ с этой прямой соответственно (рис.2).

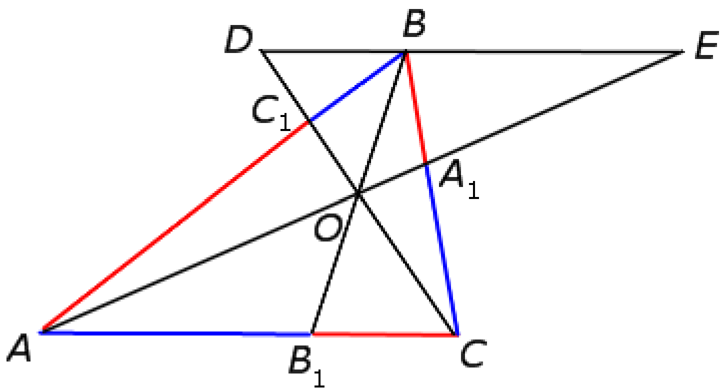


Рис.2

Поскольку треугольник $AC_1C$ подобен треугольнику $DC_1B$, то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{DB}. \tag{2}$$

Поскольку треугольник $AA_1C$ подобен треугольнику $BA_1E$, то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BE}{AC}. \tag{3}$$

Поскольку треугольник $CB_1O$ подобен треугольнику $DBO$, то выполнено равенство

$$\frac{CB_1}{OB_1} = \frac{DB}{OB}. \tag{4}$$

Поскольку треугольник $AOB_1$ подобен треугольнику $BOE$, то выполнено равенство

$$\frac{OB_1}{B_1A} = \frac{OB}{BE}. \qquad (5)$$

Перемножая равенства (2 – 5), получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{OB_1} \cdot \frac{OB_1}{B_1A} = \frac{AC}{DB} \cdot \frac{BE}{AC} \cdot \frac{DB}{OB} \cdot \frac{OB}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство необходимости завершено.

***ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ***. Докажем, что, если **выполнено равенство (1)**, то отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Воспользуемся **методом «от противного»**. С этой целью обозначим буквой $O$ точку пересечения отрезков $AA_1$ и $CC_1$ и предположим, что отрезок $BB_1$ не проходит через точку $O$ (рис. 3).

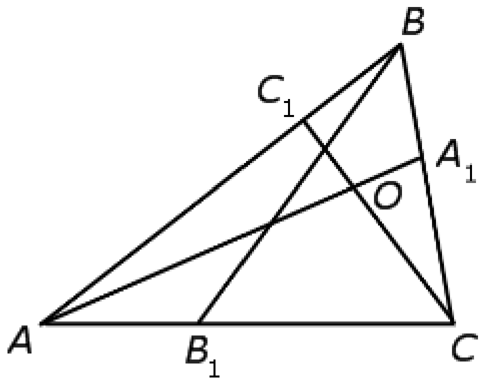


Рис.3

Проведём через точку $O$ отрезок $BB_2$ (рис. 4).

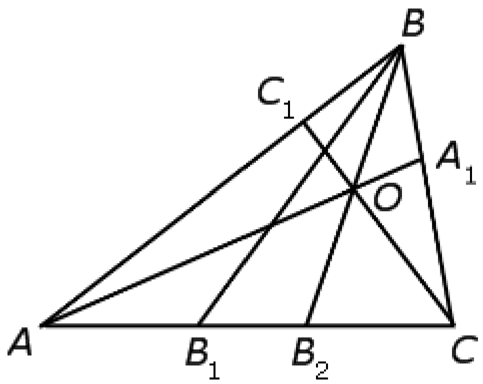


Рис.4

Поскольку отрезки $AA_1$, $BB_2$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке, то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1 \qquad (6)$$

Кроме того, выполнено равенство (1)

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (1)$$

Разделив равенство (6) на равенство (1), получим равенство

$$\frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1,$$

следствием которого является равенство

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB_1}{B_1A}. \qquad (7)$$

Из равенства (7) вытекает, что точки $B_1$ и $B_2$ совпадают.

Доказательство достаточности завершено.

## Теорема Чевы 2

***ТЕОРЕМА ЧЕВЫ 2***. Если на продолжениях за точку $B$ сторон $AB$ и $CB$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1, A_1$, а на стороне $CA$ взята точка $B_1$, то прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке или параллельны **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (8)$$

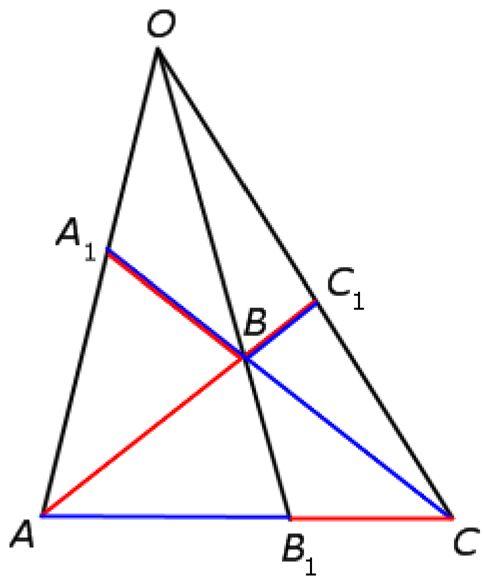


Рис.5

***ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ (случай «а»)***. Докажем, что, если **прямые** $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ **пересекаются в одной точке** (рис.5), то выполнено равенство (8). Для этого проведём через точку $B$ прямую, параллельную прямой $AC$, и обозначим буквами $D$ и $C$ точки пересечения прямых $AA_1$ и $CC_1$ с этой прямой соответственно (рис.6).

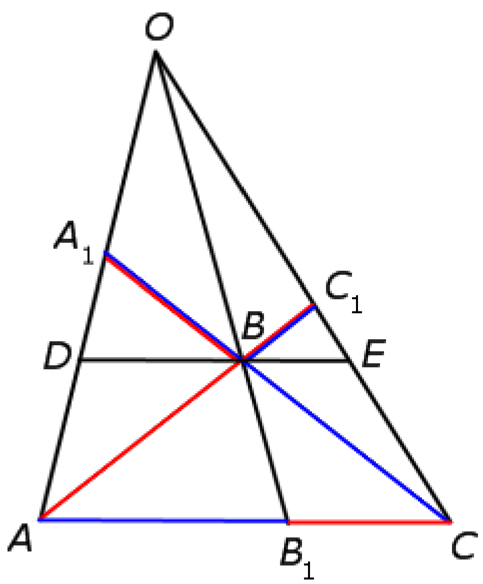


Рис.6

Поскольку треугольник $AC_1C$ подобен треугольнику $BC_1E$, то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BE}. \tag{9}$$

Поскольку треугольник $AA_1C$ подобен треугольнику $DA_1B$, то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BD}{AC}. \qquad (10)$$

Поскольку треугольник $ODB$ подобен треугольнику $OAB_1$, то выполнено равенство

$$\frac{DB}{AB_1} = \frac{OB}{OB_1}. \qquad (11)$$

Поскольку треугольник $BOE$ подобен треугольнику $B_1OC$, то выполнено равенство

$$\frac{CB_1}{BE} = \frac{OB_1}{OB}. \qquad (12)$$

Перемножая равенства (9 – 12), получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{DB}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{BE} = \frac{AC}{BE} \cdot \frac{BD}{AC} \cdot \frac{OB}{OB_1} \cdot \frac{OB_1}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство необходимости в случае «а» завершено.

***ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ (случай «b»)***. Докажем, что если **прямые** $AA_1, BB_1$ **и** $CC_1$ **параллельны** (рис.7), то выполнено равенство (8).

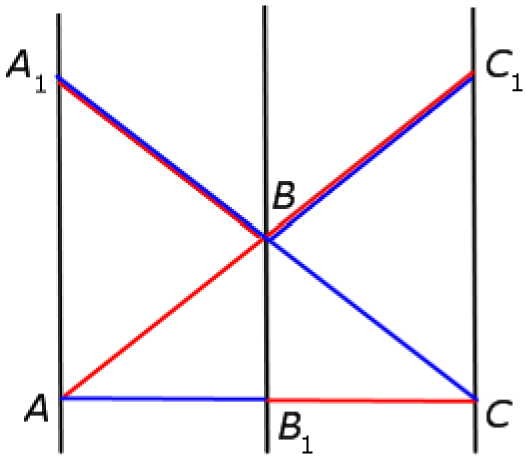


Рис.7

Проведём через точку $B$ прямую, параллельную прямой $AC$, и обозначим буквами $D$ и $E$ точки пересечения прямых $AA_1$ и $CC_1$ с этой прямой соответственно (рис.8).

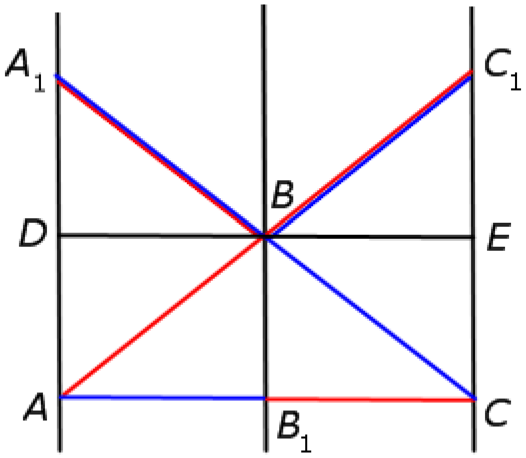


Рис.8

Поскольку треугольник $AC_1C$ подобен треугольнику $BC_1E$, то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BE}. \tag{13}$$

Поскольку треугольник $AA_1C$ подобен треугольнику $DA_1B$, то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BD}{AC}. \tag{14}$$

Поскольку четырёхугольники $ADBB_1$ и $BECB_1$ параллелограммы, то выполнено равенство

$$CB_1 = BE, \quad B_1A = DB\ ,$$

откуда вытекает равенство

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BE}{DB}. \tag{15}$$

Перемножая равенства (13 – 15), получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{BE} \cdot \frac{BD}{AC} \cdot \frac{BE}{DB} = 1.$$

Доказательство необходимости в случае «b» завершено.

***ЗАМЕЧАНИЕ***. Доказательство достаточности условия (8) в случае 2 проводится аналогично тому, как это было сделано для случая 1, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

## Применения теоремы Чевы

В разделе нашего справочника «Медиана треугольника» доказана теорема о том, что **медианы треугольника пересекаются в одной точке**.

Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на теореме Чевы. С этой целью рассмотрим медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ (рис.9).

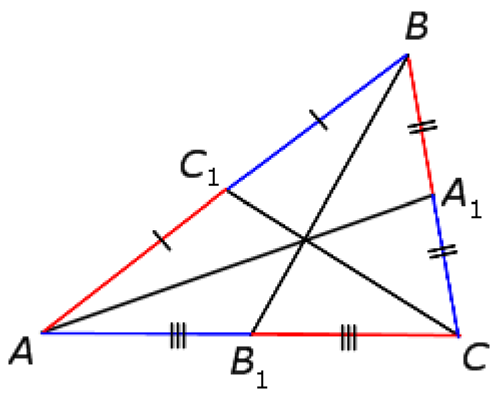


Рис.9

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B} = 1, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = 1, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

откуда вытекает, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

В разделе нашего справочника «Окружность, вписанная в треугольник» доказана теорема о том, что **биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке**.

Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на теореме Чевы. С этой целью рассмотрим биссектрисы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ (рис.10).

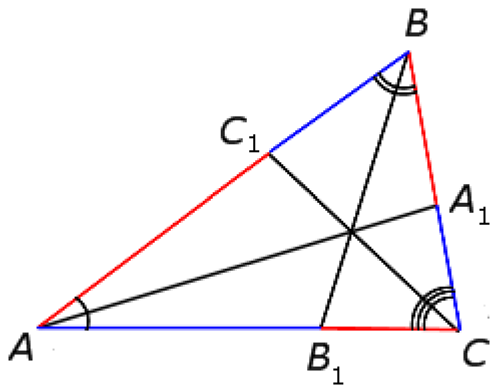


Рис.10

В соответствии со свойством биссектрисы справедливы равенства

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BC}, \qquad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AB}.$$

Если перемножить эти три равенства, то мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

из которого вытекает, что отрезки $AA_1,\ BB_1$ и $CC_1$пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

В разделе нашего справочника «Высота треугольника» доказана теорема о том, что **высоты треугольника пересекаются в одной точке**.

Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на теореме Чевы.

С этой целью рассмотрим сначала высоты $AA_1,\ BB_1$ и $CC_1$ **остроугольного** треугольника $ABC$ (рис.11).

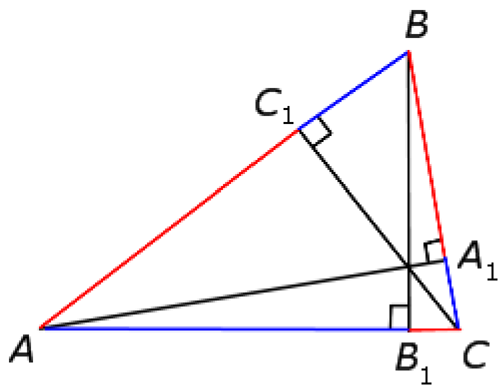


Рис.11

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC\cdot\cos\angle A}{BC\cdot\cos\angle B},$$

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB\cdot\cos\angle B}{AC\cdot\cos\angle C},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC\cdot\cos\angle C}{AB\cdot\cos\angle A},$$

то, перемножив эти три равенства, мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

из которого вытекает, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Теорема о пересечении высот остроугольного треугольника доказана.

Теперь рассмотрим случай **тупоугольного** треугольника (рис. 12).

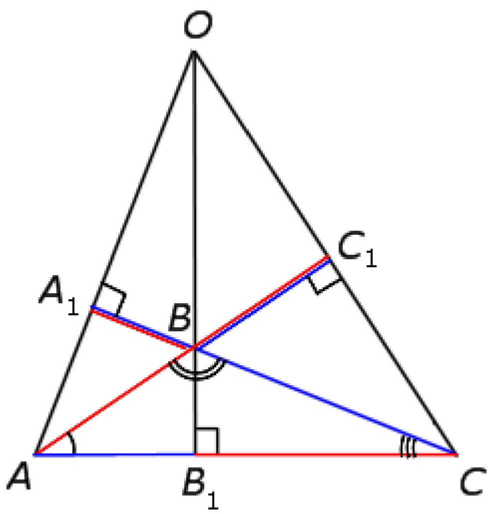


Рис.12

На рисунке 12 изображён треугольник $ABC$ с тупым углом $B$, высотами которого являются отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$.

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC \cdot \cos \angle A}{BC \cdot \cos\left(180^0 - \angle B\right)} = -\frac{AC \cdot \cos \angle A}{BC \cdot \cos \angle B},$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB \cdot \cos\left(180^0 - \angle B\right)}{AC \cdot \cos \angle C} = -\frac{AB \cdot \cos \angle B}{AC \cdot \cos \angle C},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC \cdot \cos \angle C}{AB \cdot \cos \angle A},$$

то, перемножив эти три равенства, мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

из которого вытекает, что **прямые** $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Теорема о пересечении высот тупоугольного треугольника доказана.

Доказывать теорему о том, что в случае **прямоугольного** треугольника все высоты пересекаются в одной точке не нужно, поскольку все высоты прямоугольного треугольника пересекаются в вершине прямого угла.

Теорема о пересечении высот треугольника доказана полностью.

Теперь с помощью теоремы Чевы докажем следующую теорему.

***ТЕОРЕМА***. Рассмотрим окружность, вписанную в произвольный треугольник $ABC$. Пусть точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ – **точки касания этой окружности со сторонами** $BC, AC$ и $AB$ соответственно. Тогда отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке (рис. 13).

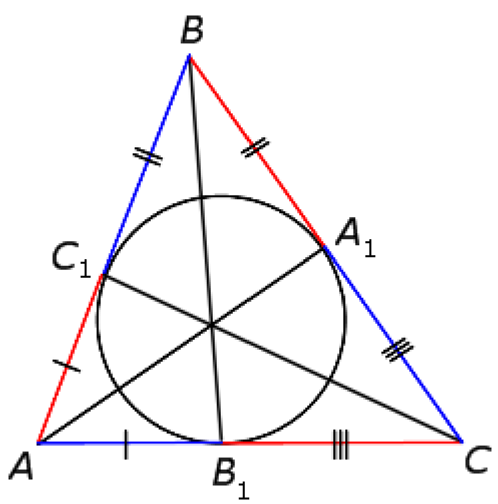


Рис.13

***Доказательство***. Воспользовавшись свойством равенства касательных, проведённых к окружности из одной точки, выпишем следующие равенства:

$$AC_1 = B_1A, \qquad BA_1 = C_1B, \qquad CB_1 = A_1C.$$

Из этих равенств получаем:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} =$$

$$= \frac{AC_1}{B_1A} \cdot \frac{BA_1}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{A_1C} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Отсюда с помощью теоремы Чевы заключаем, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

***ЗАМЕЧАНИЕ***. Точку пересечения отрезков $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$, о которых говорится в только что доказанной теореме, называют **точкой Жергонна** в честь французского математика Жозефа Жергонна (1771 г. – 1859 г.).

Назад

Вперед

## Справочник по математике для школьников

Арифметика

Алгебра

Тригонометрия

Геометрия (планиметрия)

Геометрия (стереометрия)

Элементы математического анализа

Вероятность и статистика

## Геометрия (планиметрия)

Основные фигуры планиметрии

## Учебные пособия для школьников

## Демоверсии ЕГЭ



## Демоверсии ОГЭ

Демонстрационные варианты ОГЭ по истории

Демонстрационные варианты ОГЭ по литературе

Демонстрационные варианты ОГЭ по математике

Демонстрационные варианты ОГЭ по немецкому языку

Демонстрационные варианты ОГЭ по обществознанию

Демонстрационные варианты ОГЭ по русскому языку

Демонстрационные варианты ОГЭ по физике

Демонстрационные варианты ОГЭ по французскому языку

Демонстрационные варианты ОГЭ по химии

Итоговое собеседование по русскому языку в 9 классе

На главную страницу

Наши партнеры

Карта сайта