



учебные материалы



Введите текст...

Поиск

[Справочник по математике](#) ➡ [Геометрия \(Планиметрия\)](#) ➡ [Треугольники](#)

Теорема Чевы

Содержание

- [Теорема Чевы 1](#)
- [Теорема Чевы 2](#)
- [Применения теоремы Чевы](#)



Теорема Чевы 1

ТЕОРЕМА ЧЕВЫ 1. Если на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 (рис.1), то отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad (1)$$

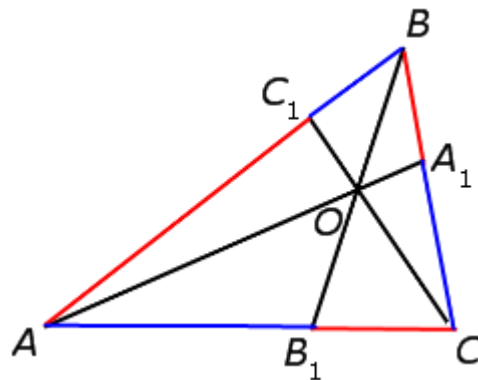


Рис.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ. Докажем, что, если отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполнено равенство (1). Для этого проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC , и обозначим буквами D и E точки пересечения прямых CC_1 и AA_1 с этой прямой соответственно (рис.2).

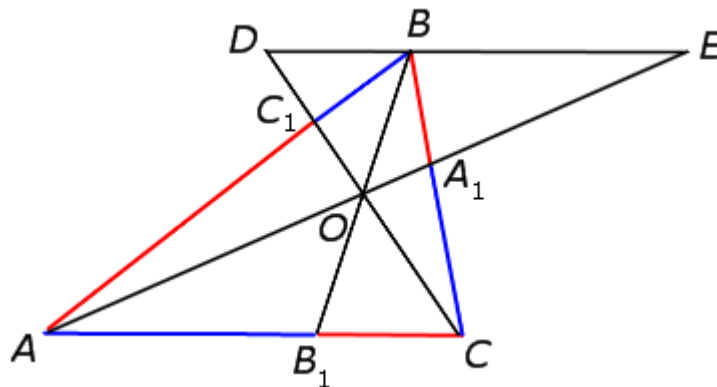


Рис.2

Поскольку треугольник AC_1C подобен треугольнику DC_1B , то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{DB}. \quad (2)$$

Поскольку треугольник AA_1C подобен треугольнику BA_1E , то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BE}{AC}. \quad (3)$$

Поскольку треугольник CB_1O подобен треугольнику DBO , то выполнено равенство

$$\frac{CB_1}{OB_1} = \frac{DB}{OB}. \quad (4)$$

Поскольку треугольник AOB_1 подобен треугольнику BOE , то выполнено равенство

$$\frac{OB_1}{B_1A} = \frac{OB}{BE}. \quad (5)$$

Перемножая равенства (2 – 5), получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{OB_1} \cdot \frac{OB_1}{B_1A} = \frac{AC}{DB} \cdot \frac{BE}{AC} \cdot \frac{DB}{OB} \cdot \frac{OB}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство необходимости завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ. Докажем, что, если **выполнено равенство (1)**, то отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Вспользуемся **методом «от противного»**. С этой целью обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и CC_1 и предположим, что отрезок BB_1 не проходит через точку O (рис. 3).

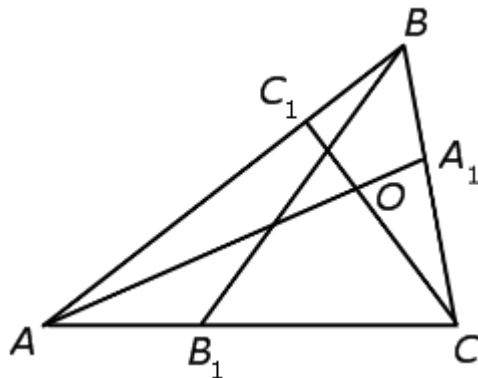


Рис.3

Проведём через точку O отрезок BB_2 (рис. 4).

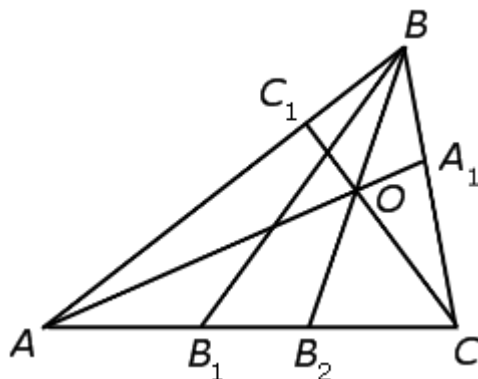


Рис.4

Поскольку отрезки AA_1 , BB_2 и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1 \quad (6)$$

Кроме того, выполнено равенство (1)

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad (1)$$

Разделив равенство (6) на равенство (1), получим равенство

$$\frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1,$$

следствием которого является равенство

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB_1}{B_1A}. \quad (7)$$

Из равенства (7) вытекает, что точки B_1 и B_2 совпадают.

Доказательство достаточности завершено.

Теорема Чебы 2

ТЕОРЕМА ЧЕБЫ 2. Если на продолжениях за точку B сторон AB и CB треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 , а на стороне CA взята точка B_1 , то прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad (8)$$

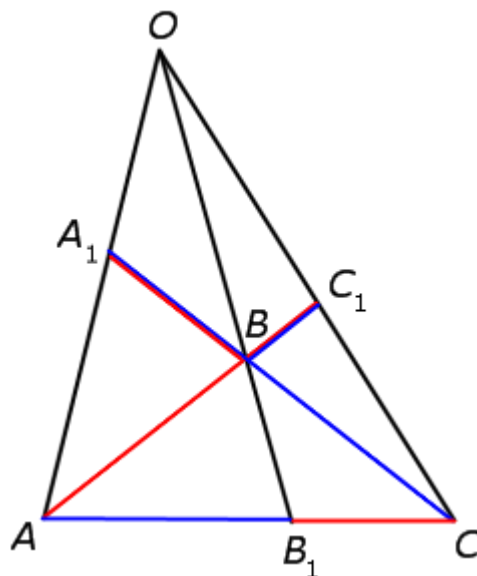


Рис.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ (случай «а»). Докажем, что, если **прямые** AA_1 , BB_1 и CC_1 **пересекаются в одной точке** (рис.5), то выполнено равенство (8). Для этого проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC , и обозначим буквами D и E точки пересечения прямых AA_1 и CC_1 с этой прямой соответственно (рис.6).

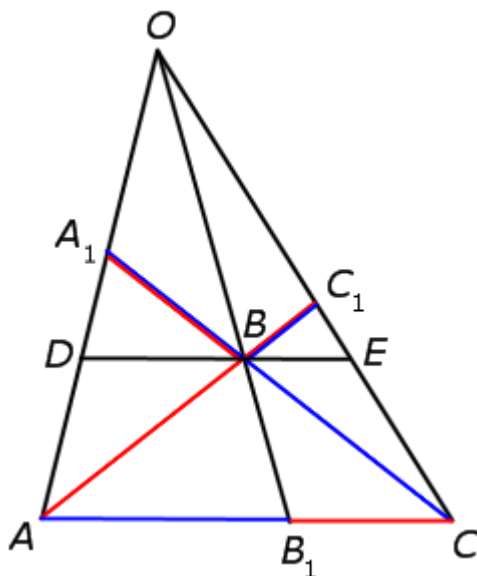


Рис.6

Поскольку треугольник AC_1C подобен треугольнику BC_1E , то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BE}. \quad (9)$$

Поскольку треугольник AA_1C подобен треугольнику DA_1B , то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BD}{AC}. \quad (10)$$

Поскольку треугольник ODB подобен треугольнику OAB_1 , то выполнено равенство

$$\frac{DB}{AB_1} = \frac{OB}{OB_1}. \quad (11)$$

Поскольку треугольник BOE подобен треугольнику B_1OC , то выполнено равенство

$$\frac{CB_1}{BE} = \frac{OB_1}{OB}. \quad (12)$$

Перемножая равенства (9 – 12), получим

$$\begin{aligned} \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{DB}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{BE} &= \frac{AC}{BE} \cdot \frac{BD}{AC} \cdot \frac{OB}{OB_1} \cdot \frac{OB_1}{OB} \\ \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} &= 1. \end{aligned}$$

Доказательство необходимости в случае «а» завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ (случай «б»). Докажем, что если **прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 параллельны** (рис.7), то выполнено равенство (8).

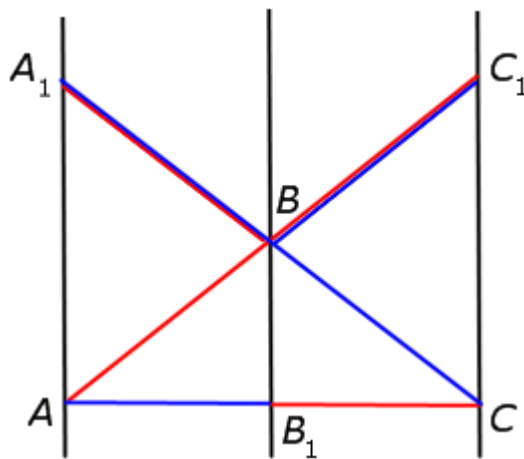


Рис.7

Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC , и обозначим буквами D и E точки пересечения прямых AA_1 и CC_1 с этой прямой соответственно (рис.8).

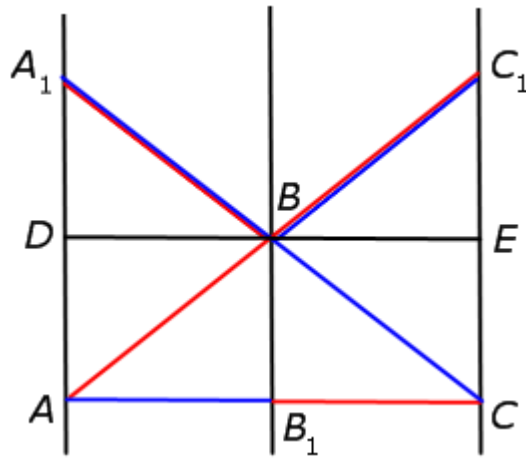


Рис.8

Поскольку треугольник AC_1C подобен треугольнику BC_1E , то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BE}. \quad (13)$$

Поскольку треугольник AA_1C подобен треугольнику DA_1B , то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BD}{AC}. \quad (14)$$

Поскольку четырёхугольники $ADBB_1$ и $BECB_1$ параллелограммы, то выполнено равенство

$$CB_1 = BE, \quad B_1A = DB,$$

откуда вытекает равенство

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BE}{DB}. \quad (15)$$

Перемножая равенства (13 – 15), получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{BE} \cdot \frac{BD}{AC} \cdot \frac{BE}{DB} = 1.$$

Доказательство необходимости в случае «б» завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство достаточности условия (8) в случае 2 проводится аналогично тому, как это было сделано для случая 1, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Применения теоремы Чебы

В разделе нашего справочника [«Медиана треугольника»](#) доказана теорема о том, что [медианы треугольника пересекаются в одной точке](#).

Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на [теореме Чебы](#). С этой целью рассмотрим медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC (рис.9).

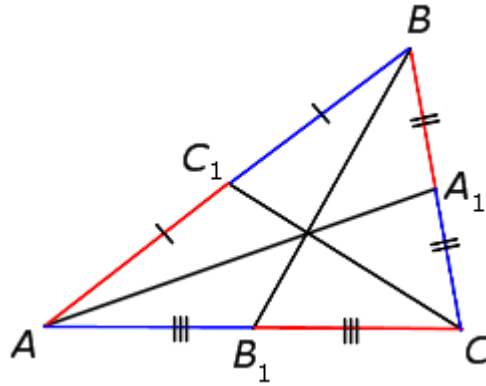


Рис.9

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B} = 1, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = 1, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

откуда вытекает, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

В разделе нашего справочника [«Окружность, вписанная в треугольник»](#) доказана теорема о том, что [биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке](#).

Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на [теореме Чебы](#). С этой целью рассмотрим биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC (рис.10).

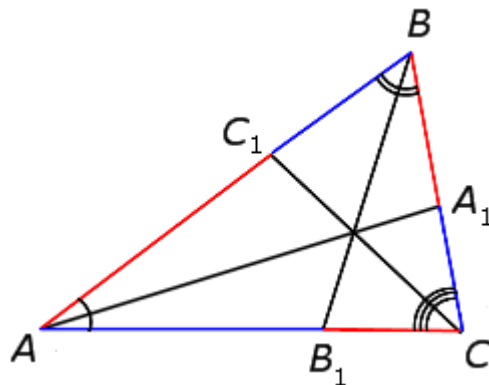


Рис.10

В соответствии [со свойством биссектрисы](#) справедливы равенства

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AB}.$$

Если перемножить эти три равенства, то мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

из которого вытекает, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

В разделе нашего справочника [«Высота треугольника»](#) доказана теорема о том, что [высоты треугольника пересекаются в одной точке](#).

Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на [теореме Чевы](#).

С этой целью рассмотрим сначала высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 **остроугольного** треугольника ABC (рис.11).

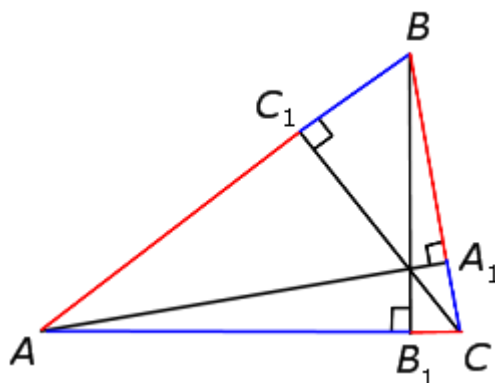


Рис.11

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC \cdot \cos \angle A}{BC \cdot \cos \angle B},$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB \cdot \cos \angle B}{AC \cdot \cos \angle C},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC \cdot \cos \angle C}{AB \cdot \cos \angle A},$$

то, перемножив эти три равенства, мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

из которого вытекает, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Теорема о пересечении высот остроугольного треугольника доказана.

Теперь рассмотрим случай **тупоугольного** треугольника (рис. 12).

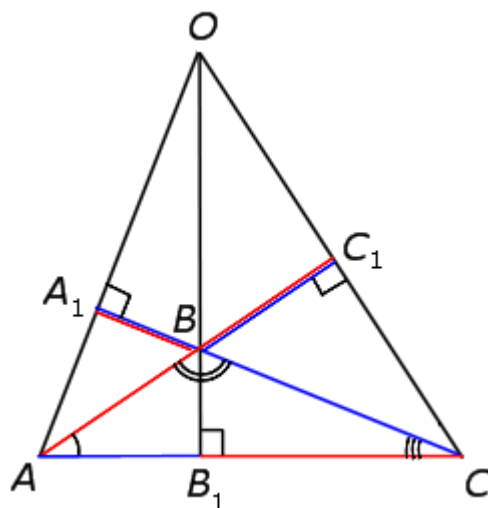


Рис.12

На рисунке 12 изображён треугольник ABC с тупым углом B , высотами которого являются отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 .

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC \cdot \cos \angle A}{BC \cdot \cos(180^\circ - \angle B)} = -\frac{AC \cdot \cos \angle A}{BC \cdot \cos \angle B},$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB \cdot \cos(180^\circ - \angle B)}{AC \cdot \cos \angle C} = -\frac{AB \cdot \cos \angle B}{AC \cdot \cos \angle C},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC \cdot \cos \angle C}{AB \cdot \cos \angle A},$$

то, перемножив эти три равенства, мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

из которого вытекает, что **прямые** AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Теорема о пересечении высот тупоугольного треугольника доказана.

Доказывать теорему о том, что в случае **прямоугольного** треугольника все высоты пересекаются в одной точке не нужно, поскольку все высоты прямоугольного треугольника пересекаются в вершине прямого угла.

Теорема о пересечении высот треугольника доказана полностью.

Теперь с помощью [теоремы Чевы](#) докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Рассмотрим [окружность, вписанную в произвольный треугольник \$ABC\$](#) .

Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 – **точки касания этой окружности со сторонами BC , AC и AB** соответственно. Тогда отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 13).

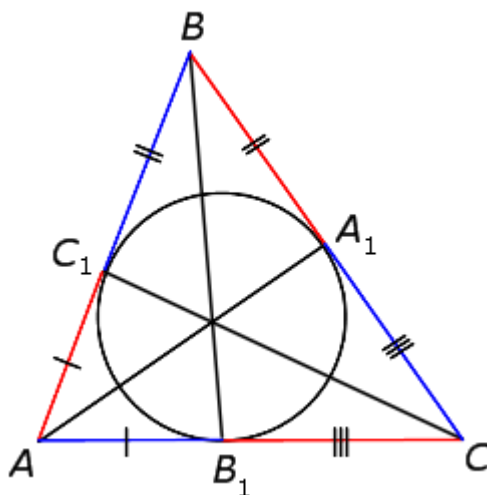


Рис.13

Доказательство. Воспользовавшись [свойством равенства касательных, проведённых к окружности из одной точки](#), выпишем следующие равенства:

$$AC_1 = B_1A, \quad BA_1 = C_1B, \quad CB_1 = A_1C.$$

Из этих равенств получаем:

$$\begin{aligned} \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} &= \\ &= \frac{AC_1}{B_1A} \cdot \frac{BA_1}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{A_1C} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Отсюда с помощью [теоремы Чебы](#) заключаем, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точку пересечения отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 , о которых говорится в только что доказанной теореме, называют **точкой Жергонна** в честь французского математика Жозефа Жергонна (1771 г. – 1859 г.).

[< Назад](#)

[Вперед >](#)

Справочник по математике для школьников

[Арифметика](#)

[Алгебра](#)

[Тригонометрия](#)

[Геометрия \(планиметрия\)](#)

[Геометрия \(стереометрия\)](#)

[Элементы математического анализа](#)

[Вероятность и статистика](#)

Геометрия (планиметрия)

[Основные фигуры планиметрии](#)

Фигуры, составляющие основу планиметрии

Углы

Углы на плоскости

Теорема Фалеса

Углы, связанные с окружностью

Параллельность прямых

Признаки параллельности прямых

Треугольники

Типы треугольников. Признаки равенства треугольников

Свойства и признаки равнобедренного треугольника

Свойства и признаки прямоугольного треугольника

Свойства сторон и углов треугольника

Подобие треугольников

Теорема Пифагора. Теорема косинусов

Биссектриса треугольника

Медиана треугольника

Высота треугольника. Задача Фаньяно

Средние линии треугольника

Теорема Чевы

Теорема Менелая

Описанная окружность. Теорема синусов

Формулы для стороны, периметра и площади правильного треугольника

Площадь треугольника

Окружность, вписанная в треугольник. Основное свойство биссектрисы угла

Вневписанные окружности

Четырехугольники

Четырехугольники

Параллелограммы

Трапеции

Четырехугольники, вписанные в окружность. Теорема Птолемея

Описанные четырехугольники

Площади четырехугольников

Многоугольники

Многоугольники

Правильные многоугольники

Окружность и круг

Углы, связанные с окружностью

Отрезки и прямые, связанные с окружностью. Теорема о бабочке

Две окружности на плоскости. Общие касательные к двум окружностям

Площадь круга и его частей. Длина окружности и ее дуг

Окружность, описанная около треугольника. Теорема синусов

Окружность, вписанная в треугольник. Основное свойство биссектрисы угла

Вневписанные окружности

Четырехугольники, вписанные в окружность. Теорема Птолемея

Описанные четырехугольники

Площади

Площади четырехугольников

Площадь треугольника

Вывод формул Герона и Брахмагупты

Средние линии

Средние линии

Геометрические места точек на плоскости

Геометрические места точек на плоскости

Преобразования плоскости

Движения плоскости. Теорема Шаля. Аффинные преобразования плоскости

Учебные пособия для школьников

Задачи на проценты

Квадратный трехчлен

Метод координат на плоскости

Прогрессии

Решение алгебраических уравнений

Решение иррациональных неравенств

Решение логарифмических неравенств

Решение логарифмических уравнений

Решение показательных неравенств

Решение показательных уравнений

Решение рациональных неравенств

Решение тригонометрических уравнений

Степень с рациональным показателем

Системы уравнений

Тригонометрия в ЕГЭ по математике

Уравнения и неравенства с модулями

Фигуры на координатной плоскости, заданные неравенствами

Демоверсии ЕГЭ

Демонстрационные варианты ЕГЭ по английскому языку

Демонстрационные варианты ЕГЭ по биологии

Демонстрационные варианты ЕГЭ по географии

Демонстрационные варианты ЕГЭ по информатике

Демонстрационные варианты ЕГЭ по испанскому языку

Демонстрационные варианты ЕГЭ по истории

Демонстрационные варианты ЕГЭ по китайскому языку

Демонстрационные варианты ЕГЭ по литературе

Демонстрационные варианты ЕГЭ по математике

Демонстрационные варианты ЕГЭ по немецкому языку

Демонстрационные варианты ЕГЭ по обществознанию

Демонстрационные варианты ЕГЭ по русскому языку

Демонстрационные варианты ЕГЭ по физике

Демонстрационные варианты ЕГЭ по французскому языку

Демонстрационные варианты ЕГЭ по химии

Итоговое сочинение (изложение) в 11 классе

Демоверсии ОГЭ

Демонстрационные варианты ОГЭ по английскому языку

Демонстрационные варианты ОГЭ по биологии

Демонстрационные варианты ОГЭ по географии

Демонстрационные варианты ОГЭ по информатике

Демонстрационные варианты ОГЭ по испанскому языку

[Демонстрационные варианты ОГЭ по истории](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по литературе](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по математике](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по немецкому языку](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по обществознанию](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по русскому языку](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по физике](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по французскому языку](#)

[Демонстрационные варианты ОГЭ по химии](#)

[Итоговое собеседование по русскому языку в 9 классе](#)

[На главную страницу](#)

[Наши партнеры](#)

[Карта сайта](#)

Опечатка на сайте?

Если Вы заметили опечатку на сайте, просим сообщить нам об этом.

Заранее благодарим!


e-mail: resolventa@list.ru



© «Резольвента - учебные материалы», 2009-2023

 [Rambler's Top100](#)

 mail.ru
645 547

 612
