Науколандия

Доказательство признаков подобия треугольников

Summarize

Chat With This Website

Доказательство первого признака подобия треугольников

Первый признак подобия треугольников утверждает, что **если у треугольников две стороны соответственно пропорциональны, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны**.

Рассмотрим треугольники ABC и DEF, у которых DE = kAB, EF = kBC и ∠B = ∠E.

Чтобы доказать подобие данных треугольников, требуется доказать, что DF = kAC, так как подобие треугольников определяется по трем пропорциональным сторонам.

Найдем стороны AC и DF по теореме косинусов (*квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон за вычетом удвоенного произведения этих сторон, умноженному на косинус угла между ними*):

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$

$DF^2 = DE^2 + EF^2 - 2 \cdot DE \cdot EF \cdot \cos E$

Так как $\angle B = \angle E$ и $AB = kDE$, $BC = kEF$, то мы можем выразить квадрат стороны DF через угол и стороны треугольника ABC:

$DF^2 = (kAB)^2 + (kBC)^2 - 2 \cdot kAB \cdot kBC \cdot \cos B$

Вынесем k^2 за скобку:

$DF^2 = k^2(AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B)$

Выражение в скобках равно ранее выраженному через теорему косинусов квадрату стороны AC. Поэтому можно записать так:

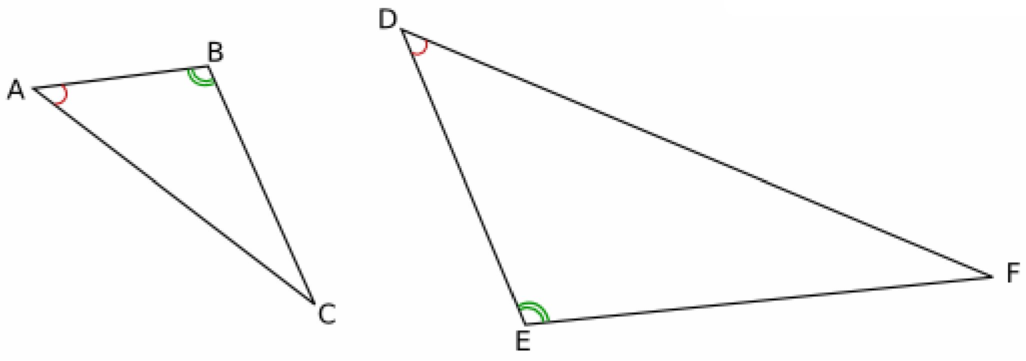
$DF^2 = k^2AC^2$

Отсюда получаем, что $DF = kAC$, что и требовалось доказать. Таким образом, если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами каждого треугольника равны, то оказываются соответственно пропорциональными и третьи их стороны, а, следовательно, такие треугольника подобны.

Доказательство второго признака подобия треугольников

Второй признак подобия треугольников определяет **подобие по наличию двух соответственно равных углов**.

Пусть даны треугольники ABC и DEF, у которых ∠A = ∠D, ∠B



Если эти треугольники подобны, то их стороны будут пропорциональны друг другу, т. е. будут соблюдаться равенства AB = kDE, BC = kEF, AB = kDF.

Если в одном треугольнике два угла соответственно равны двум углам в другом треугольнике, то равными будут и третьи углы этих треугольников, т. к. сумма углов любого треугольника равна 180°.

Как известно, у подобных треугольников углы соответственно равны. Т. е. если треугольники подобны, то их углы соответственно равны. Однако нельзя однозначно утверждать обратное: если углы соответственно равны, то треугольники подобны. Ведь можно предположить, что существую треугольники с соответственно равными углами, но у которых стороны не пропорциональны, а значит, такие треугольники не являются подобными.

Согласно теореме синусов, *сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла*.

Если диаметр описанной около треугольника ABC окружности равен d, то мы можем выразить стороны этого треугольника так:

AB = d sin C, BC = d sin A, AC = d sin B

Если диаметр описанной около треугольника DEF окружности равен d_1, то получим:

DE = d_1 sin F, EF = d_1 sin D, DF = d_1 sin E

Так как углы A, B и C соответственно равны углам D, E и F, то мы можем заменить одни на другие. Сделаем это для сторон треугольника DEF:

$DE = d_1 \sin C$, $EF = d_1 \sin A$, $DF = d_1 \sin B$

Найдем отношения сторон одного треугольника к соответст

$AB/DE = (d \sin C) / (d_1 \sin C) = d/d_1$

$BC/EF = (d \sin A) / (d_1 \sin A) = d/d_1$

$AC/DF = (d \sin B) / (d_1 \sin B) = d/d_1$

То есть все три отношения равны одному и тому же значению (d/d_1), а значит, равны между собой; т. е.

$AB/DE = BC/EF = AC/DF$

Таким образом, стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника. Значит, треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников

Нередко выделяют третий признак подобия треугольников: **если все стороны одного треугольника соответственно пропорциональны сторонам другого, то такие треугольники подобны**. Однако само определение подобных треугольников нередко ограничивается именно этим признаком, а равенство углов подобных треугольников доказывается в виде теоремы (Углы подобных треугольников).