

Поиск

Содержание

Главная / Математика / Теорема Менелая

Формулировка прямой и обратной теоремы Менелая

Содержание:

- 1. Теорема Менелая и ее формулировка
 - Какие следствия из нее вытекают
- 2. Доказательство для прямой и обратной теоремы
 - Через подобные треугольники
 - Через векторы
- 3. Примеры решения задач

Узнайте стоимость работы онлайн

Вид работы:

Выберите вид работы

Предмет:

Начните набирать предмет...

Объем:

1

Страницы

Дата сдачи:

Выберите дату сдачи

Тема:

Укажите тему работы, если необходимо

У меня есть промокод

Узнать цену

Теорема Менелая и ее формулировка

Теорема Менелая в геометрии:

если на сторонах АВ и ВС треугольника АВС отмечены соответственно точки С₁ и А₁, а точка В₁ расположена на продолжении стороны АС за точку С, то точки С₁, А₁ и В₁ находятся на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

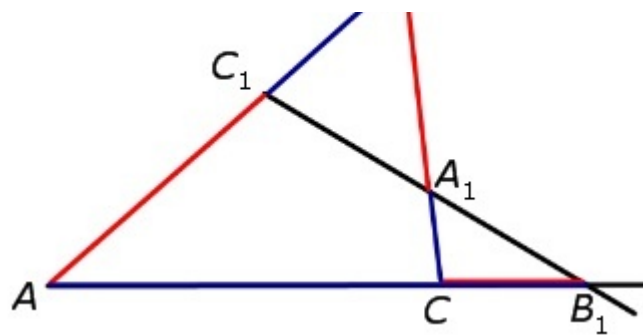
$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Схематично объяснение теоремы Менелая можно представить на рисунке:

Осторожно! Если преподаватель обнаружит плагиат в работе, не избежать крупных проблем

Напишите мне - я онлайн!

Содержание



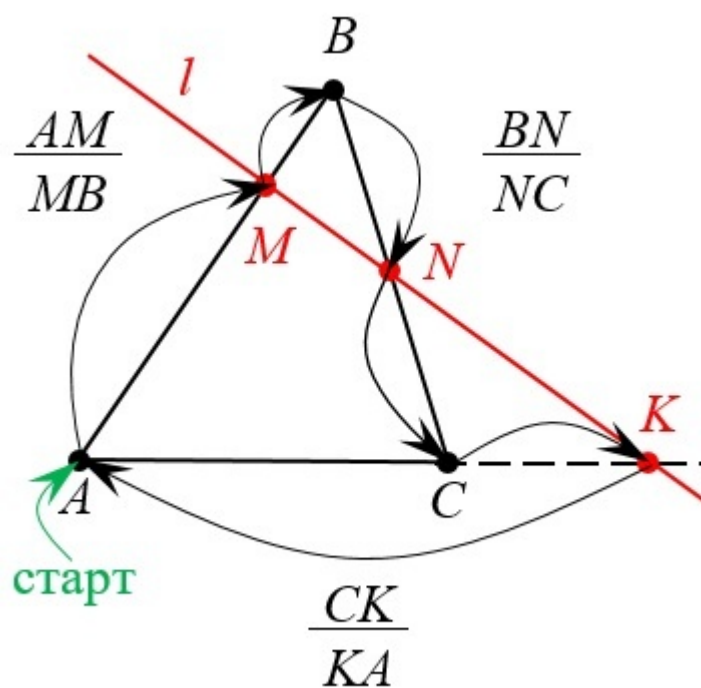
Источник: resolventa.ru

Какие следствия из нее вытекают

Необходимо отметить, что запоминание положения букв в данной теореме не является обязательным. Целесообразно применение простого алгоритма, с помощью которого можно представить запись всех дробей. Схема решения:

1. начертить треугольник с секущей, обозначить положение вершин и точек какими-либо буквами;
2. установить ручку или карандаш в точку, соответствующую любой вершине треугольника, обойти стороны геометрической фигуры, при этом обязательно пройти через точки пересечения с прямой;
3. поделить соседние отрезки в таком порядке, который получился во время их обхода;
4. в итоге получится три дроби, произведение которых соответствует единице.

Алгоритм можно представить в виде чертежа:



Источник: berdov.com

С помощью такой простой схемы можно быстро восстановить запись формулы теоремы Менелая. Важные следствия, которые вытекают из данного утверждения

1. В случае, когда прямая в пространстве пересекает вершину треугольника, теорема Менелая не работает.
2. Если при начертании выбрать другую вершину в качестве стартовой точки или пойти в противоположную сторону, то уравнение сохранит справедливость, но изменится последовательность дробей.

Доказательство для прямой и обратной теоремы

Любое теоретическое утверждение нуждается в практическом подтверждении. В случае доказательства теоремы Менелая необходимо построить чертежи и использовать формулы, вытекающие из подобия треугольников или направленности векторов.

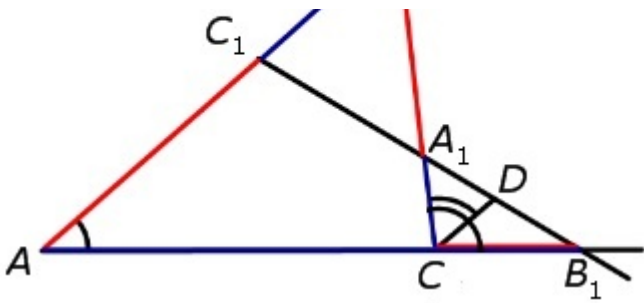
Через подобные треугольники

В том случае, когда расположение точек C_1 , A_1 и B_1 соответствует одной прямой, то справедливо равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Напишите мне - я онлайн!

Содержание



Источник: resolventa.ru

Так как треугольники AC₁B₁ и CDB₁ подобны, то справедливо уравнение:

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{CD}{CB_1}$$

Исходя из того, что треугольники C₁BA₁ и A₁DC подобны, получаем равенство:

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1C}{CD}$$

Далее необходимо перемножить полученные формулы:

$$\frac{AC_1}{AB_1} \times \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{CD}{CB_1} \times \frac{A_1C}{CD} \Rightarrow \frac{AC_1}{AB_1} \times \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1C}{CB_1} \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \times \frac{BA_1}{AC_1} \times \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

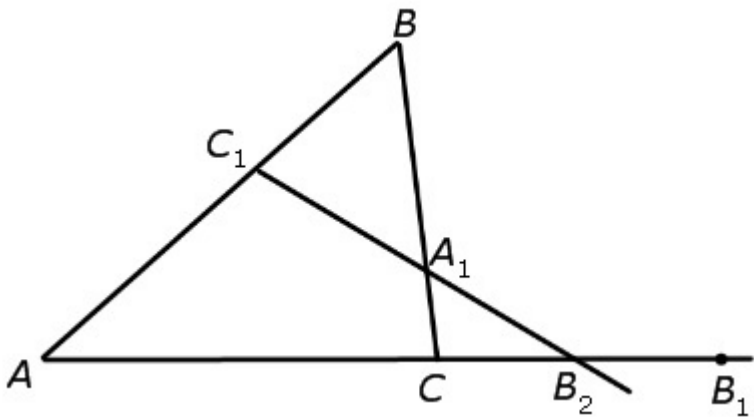
Данное равенство служит доказательством необходимости.

Для доказательства достаточности необходимо подтвердить, что в случае выполнения данного равенства:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

точки C₁, A₁ и B₁ будут расположены на одной прямой.

Целесообразно использовать при доказательстве методику «от противного». Для этого следует прочертить через точки C₁ и A₁ прямую и обозначить с помощью буквы B₂ точку, в которой эта прямая пересекает прямую AC. Схематично такие действия можно представить на рисунке:



Источник: resolventa.ru

Исходя из того, что C₁, A₁ и B₁ соответствуют одной прямой, то можно говорить о справедливости равенства:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_2}{B_2A} = 1$$

Также выполняется условие следующего уравнения:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Далее следует разделить полученное уравнение на первоначальную формулу:

$$\frac{CB_2}{B_2A} \times \frac{B_1A}{CB_1} = 1$$

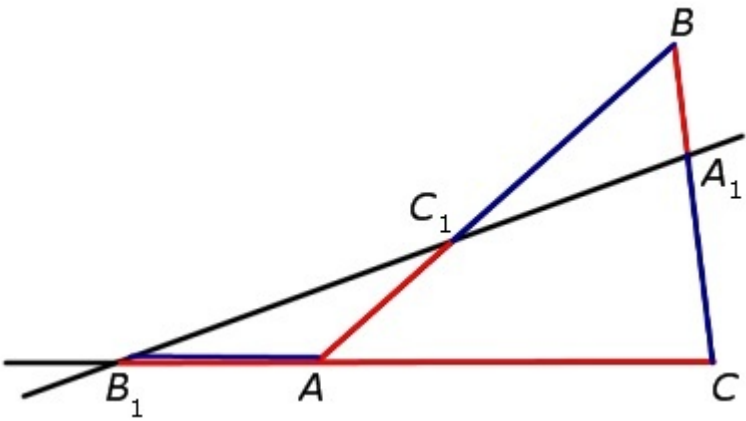
Исходя из данного равенства, получим:

$$\frac{CB_2}{B_2A} \times \frac{CB_1}{B_1A}$$

Согласно свойствам производных пропорций, можно сделать вывод о совпадении точек B₁ и B₂. В результате доказательство достаточности получено. Теорему Менелая можно считать полностью доказанной.

Напишите мне - я онлайн!

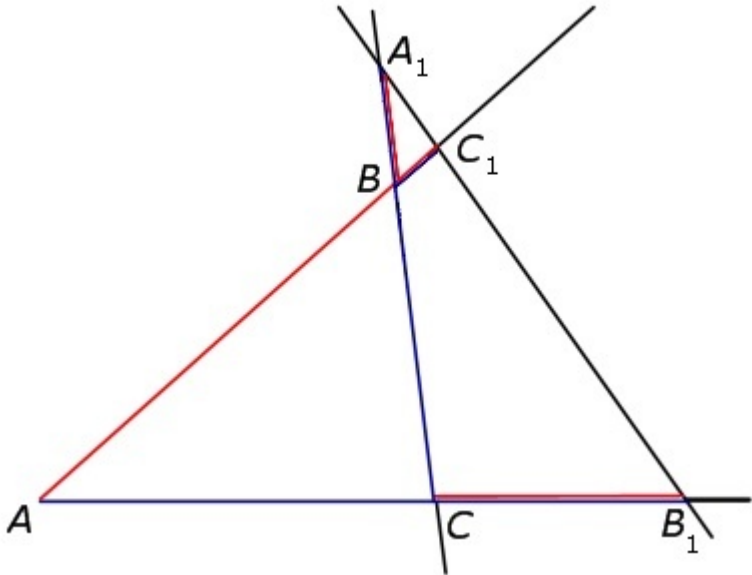
Содержание



Источник: resolventa.ru

Доказательство теоремы Менелая 2 начинают с построения рисунка. Если на продолжениях сторон АВ, ВС и АС, которыми обладает треугольник АВС, отметить точки С₁, А₁ и В₁ соответственно, то точки С₁, А₁ и В₁ будут принадлежать одной прямой только в том случае, когда выполнимо равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Источник: resolventa.ru

Процесс подтверждения теоремы Менелая 2 аналогичен доказательству теоремы Менелая 1.

Через векторы

Отношением $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ направленных отрезков \vec{a} и \vec{b} принадлежащих одной прямой, либо расположенных на параллельных прямых, называют число k такое, при котором справедливо равенство:

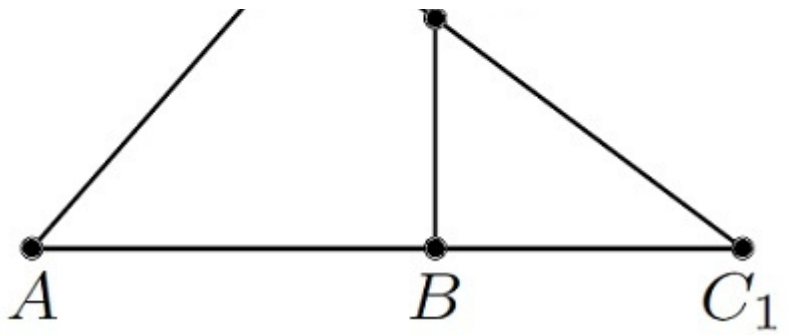
$$\vec{a} = k \times \vec{b}$$

Согласно определению k>0, в случае, когда вектора ориентированы в одном направлении, и k<0, когда вектора противоположны друг другу.

Предположим, что прямые ВС, СА и АВ, содержащие стороны треугольника АВС, включают точки А₁, В₁ и С₁. Данные точки расположены на одной прямой только в том случае, когда выполняется равенство:

$$\frac{\vec{AB_1}}{\vec{B_1C}} \times \frac{\vec{CA_1}}{\vec{A_1B}} \times \frac{\vec{BC_1}}{\vec{C_1A}} = 1$$

Содержание



Источник: foxford.ru

Необходимо подтвердить, что в случае расположения точек A₁, B₁ и C₁ на одной прямой, равенство будет справедливо. Требуется построить перпендикуляры AM, CK и BL, выходящие из вершин треугольника к рассматриваемой прямой. Треугольники AB₁M и CB₁K подобны, поэтому:

$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AM}{CK}$

$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CK}{BL}$

$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BL}{AM}$

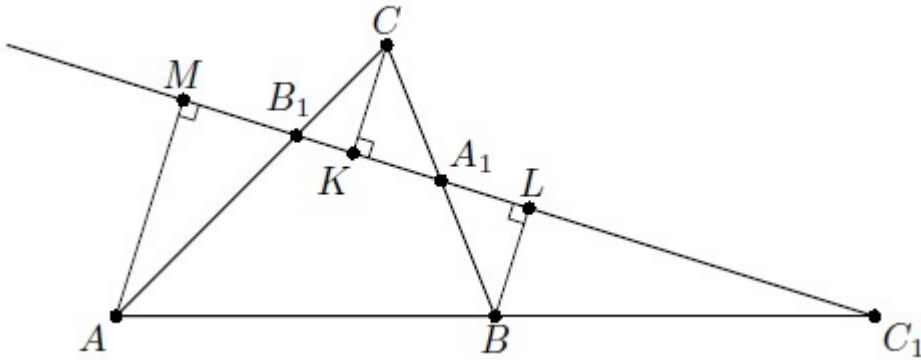
Из полученных формул можно вывести уравнение:

$\frac{AB_1}{B_1C} \times \frac{CA_1}{A_1B} \times \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Важно отметить, что допустимо два варианта:

- 1. пара точек будет расположена на сторонах треугольника и одна находится на продолжении стороны;
- 2. все три точки размещены на продолжениях сторон геометрической фигуры.

В первом варианте только одно отношение направленных отрезков будет соответствовать отрицательному значению, а во втором – все три.



Источник: foxford.ru

Таким образом:

$\frac{\vec{AB_1}}{\vec{B_1C}} \times \frac{\vec{CA_1}}{\vec{A_1B}} \times \frac{\vec{BC_1}}{\vec{C_1A}} = -1$

Теорема считается доказанной. Можно предположить, что равенство справедливо, но точки A₁, B₁ и C₁ не находятся на одной прямой. Тогда прямая A₁B₁ будет пересекать прямую AB, точка C₂ будет являться точкой пересечения. В таком случае можно записать уравнение:

$\frac{\vec{AB_1}}{\vec{B_1C}} \times \frac{\vec{CA_1}}{\vec{A_1B}} \times \frac{\vec{BC_2}}{\vec{C_2A}} = -1$

Заметим, что выполняется равенство:

$\frac{\vec{AB_1}}{\vec{B_1C}} \times \frac{\vec{CA_1}}{\vec{A_1B}} \times \frac{\vec{BC_1}}{\vec{C_1A}} = -1$

В таком случае:

$\vec{} $

Напишите мне - я онлайн!

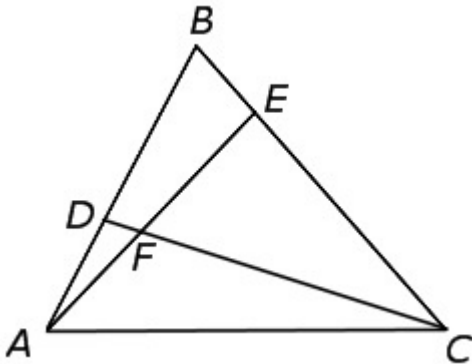
Содержание

Треугольник ABC обладает сторонами AB и BC, на которых отмечены точки D и E соответственно. Также справедливо равенство:

$AD = \frac{3}{8}AB$

$BE = \frac{1}{5}BC$

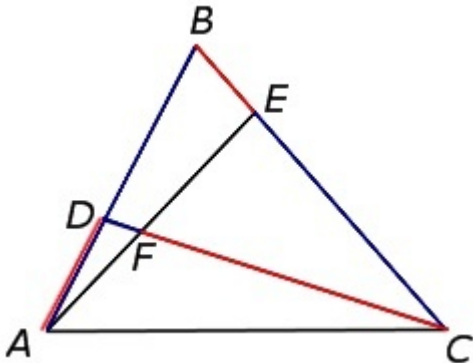
Отрезки AE и CD пересекают друг друга в точке F, как показано на рисунке. Требуется определить отношение отрезков AE и CD, поделенных точкой F.



Источник: resolventa.ru

Решение

Следует использовать теорему Менелая для треугольника BCD.

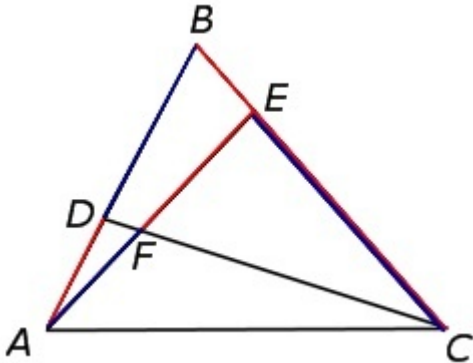


Источник: resolventa.ru

В таком случае:

$\frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FD} \times \frac{DA}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{CF}{FD} \times \frac{3}{8} = 1 \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{32}{3}$

Необходимо применить теорему Менелая для треугольника ABE.



Источник: resolventa.ru

$\frac{AD}{DB} \times \frac{BC}{CE} \times \frac{EF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{EF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{EF}{FA} = \frac{4}{3}$

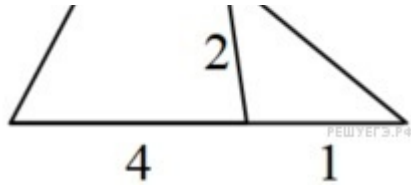
Ответ: $\frac{CF}{FD} = \frac{32}{3}, \frac{EF}{FA} = \frac{4}{3}$

Задача 2

На рисунке изображен треугольник. Исходя из его характеристик, необходимо определить отношение $\frac{x}{y}$.

Напишите мне - я онлайн!

Содержание



Источник: geom7_9-urok.sdangia.ru

Согласно теореме Менелая, получим равенство:

$\frac{x}{y} \times \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = 1$

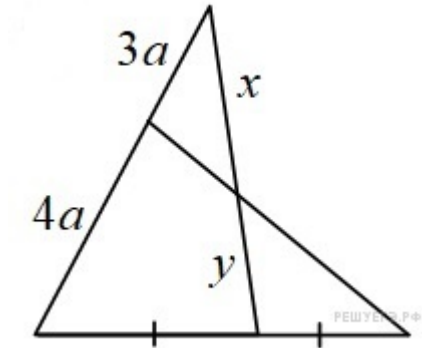
Таким образом:

$\frac{x}{y} = \frac{3}{10}$

Ответ: $\frac{3}{10}$

Задача 3

На рисунке изображена геометрическая фигура в виде треугольника. Исходя из данных на схеме, требуется рассчитать отношение $\frac{x}{y}$



Источник: geom7_9-urok.sdangia.ru

Решение

Руководствуясь теоремой Менелая, запишем уравнение:

$\frac{x}{y} \times \frac{1}{2} \times \frac{4a}{3a} = 1$

Таким образом:

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

Лень разбираться? :)

Доверьте свою работу лучшему автору по вашей теме

Предмет

Предмет

▼

Тип работы

Тип работы

▼

Тема

Узнать цену

Напишите мне - я онлайн!

Содержание

Заметили ошибку?

Выделите текст и нажмите одновременно клавиши «Ctrl» и «Enter»

Другие статьи:



Теорема Лапласа

[Предыдущая статья](#)



Теорема о площади треугольника

[Следующая статья](#)

Поиск по содержимому

Введите ключевое слово

Поиск