РЕЗОЛЬВЕНТА

учебные матер…

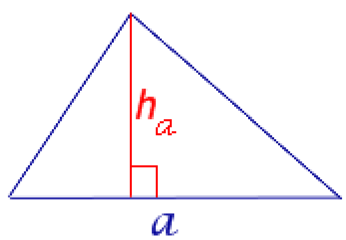
Введите текст... Поиск

Площадь треугольника

Содержание

Формулы для площади треугольника

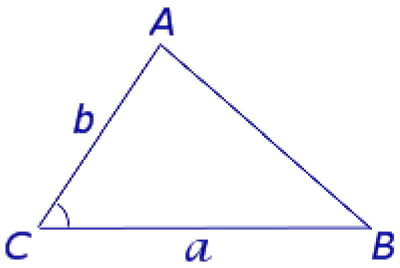
Формулы, позволяющие находить **площадь треугольника**, удобно представить в виде следующей таблицы.

Произвольный треугольник
Формула для площади треугольника через сторону и опущенную на нее высоту
 $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

a – любая сторона треугольника, h_a – высота, опущенная на эту сторону

Посмотреть вывод формулы

Формула для площади треугольника через две стороны и угол между ними

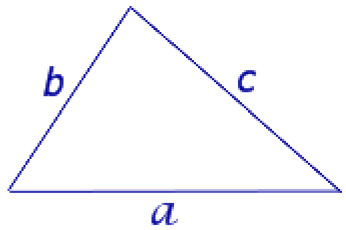


$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

a и b – две любые стороны треугольника, C – угол между ними

Посмотреть вывод формулы

Формула Герона



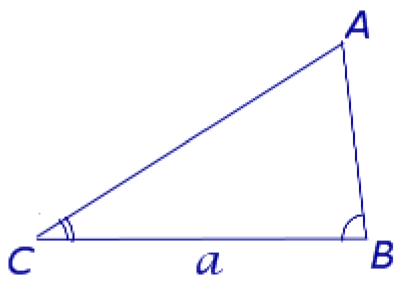
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

a, b, c – стороны треугольника, p – полупериметр

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Посмотреть вывод формулы Герона

Формула для площади треугольника через сторону и два прилежащих к ней угла

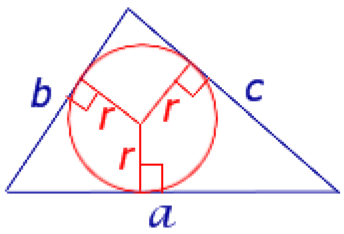


$$S = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)}$$

a – любая сторона, B, C – прилежащие к ней углы

Посмотреть вывод формулы

Формула для площади треугольника через стороны треугольника и радиус вписанной окружности



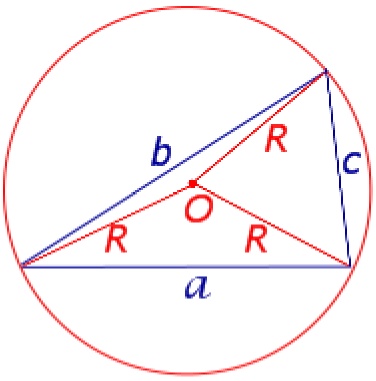
$$S = p \cdot r$$

$a,\ b,\ c$ – стороны, r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Посмотреть вывод формулы

Формула для площади треугольника через стороны треугольника и радиус описанной окружности

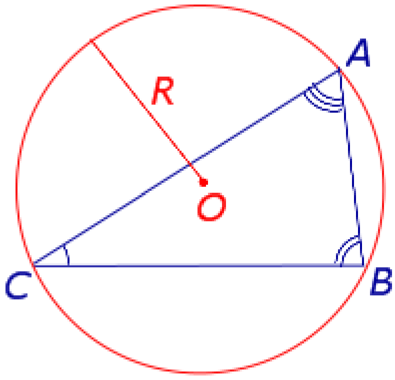


$$S = \frac{abc}{4R}$$

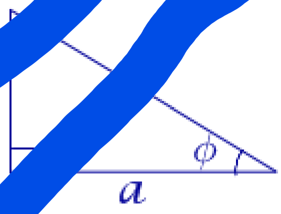
$a,\ b,\ c$ – стороны, R – радиус описанной окружности

Посмотреть вывод формулы

Формула для площади треугольника через углы треугольника и радиус описанной окружности



$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

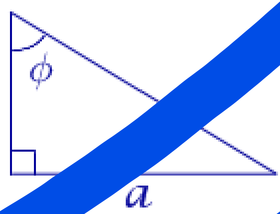


$$S = \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

a – катет, φ – прилежащий острый угол

Посмотреть вывод формулы

Формула для площади прямоугольного треугольника через катет и противолежащий острый угол

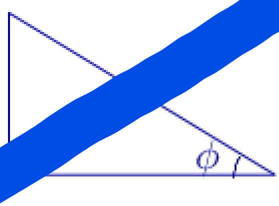


$$S = \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{ctg}\,\varphi$$

a – катет, φ – противолежащий острый угол

Посмотреть вывод формулы

Формула для площади прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол



$$S = \frac{1}{2}c^2\cdot\sin\varphi\cos\varphi$$

c – гипотенуза, φ – любой из острых углов

Посмотреть вывод формулы

Вывод формул для площади произвольного треугольника

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. **Площадь треугольника** можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}a\cdot h_a$$

где a – любая сторона треугольника, а h_a – высота, опущенная на эту сторону.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

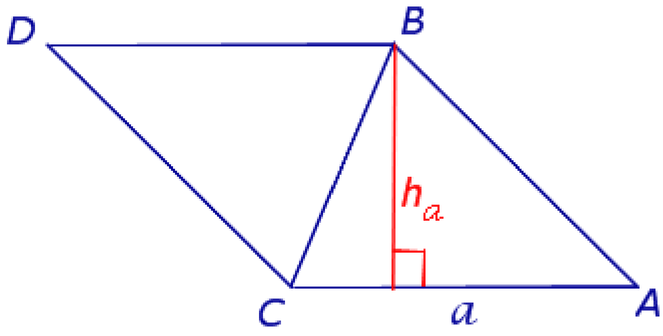


Рис. 1

Достроив треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 1), получим

$$S_{ABCD} = a \cdot h_a = 2S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. **Площадь треугольника** можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

где a и b – две любые стороны треугольника, а C – угол между ними.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

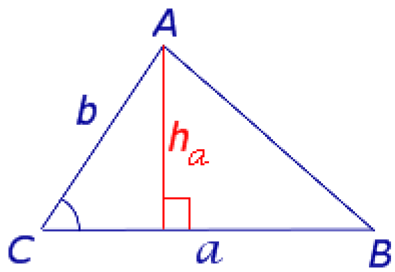


Рис. 2

Поскольку

$$h_a = b \sin C,$$

то, в силу утверждения 1, справедлива формула

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. **Площадь треугольника** можно найти по формуле

$$S = \frac{a^2}{2(\mathrm{ctg}\,B + \mathrm{ctg}\,C)}$$

где a – любая сторона треугольника, а $B,\ C$ – прилежащие к ней углы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Докажем утверждение 3 в случае остроугольного треугольника. Доказательство в случаях прямоугольного и тупоугольного треугольников требует лишь незначительных изменений, совершить которые мы предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

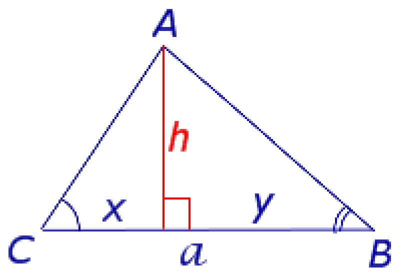


Рис. 3

Поскольку (рис.3)

$$x = h_a \mathrm{ctg}\ C\,, \qquad y = h_a \mathrm{ctg}\ B\,,$$

то

$$a = x + y = h_a \mathrm{ctg}\ C + h_a \mathrm{ctg}\ B = h_a(\ \mathrm{ctg}\ C + \mathrm{ctg}\ B)\ .$$

Следовательно,

$$h_a = \frac{a}{\mathrm{ctg}\,C + \mathrm{ctg}\,B}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{a^2}{2(\mathrm{ctg}\,C + \mathrm{ctg}\,B)},$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. **Площадь треугольника** можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)r,$$

где $a,\ b,\ c$ – стороны треугольника, а r – радиус вписанной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

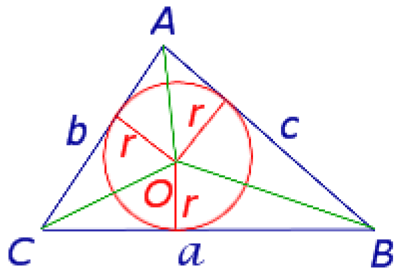


Рис. 4

Соединив центр O вписанной окружности с вершинами треугольника (рис.4), получим

$$S = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} =$$

$$= \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br =$$

$$= \frac{1}{2} \left(a + b + c \right) r,$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. **Площадь треугольника** можно найти по формуле

$$S = \frac{abc}{4R}$$

где $a,\ b,\ c$ – стороны треугольника, а R – радиус описанной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

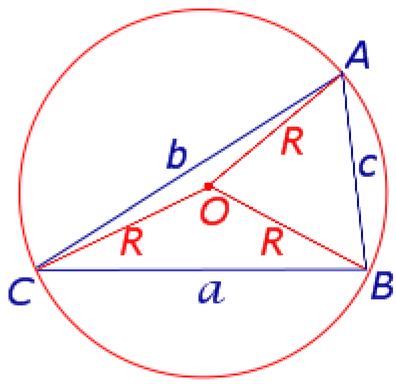


Рис. 5

В силу теоремы синусов справедливо равенство

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Следовательно,

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R},$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. **Площадь треугольника** можно найти по формуле:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C\,,$$

где $A,\ B,\ C$ – углы треугольника, а R – радиус описанной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

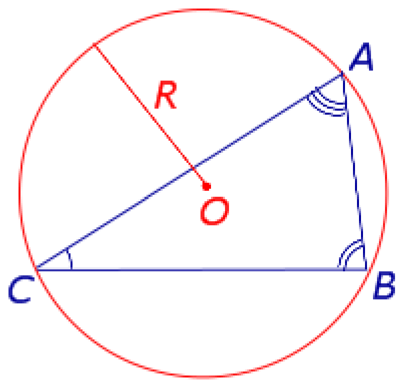


Рис. 6

В силу теоремы синусов справедливо равенство

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Поэтому

$$a = 2R\sin A\,,\quad b = 2R\sin B\,,\quad c = 2R\ \sin C\,,$$

В силу утверждения 5

$$S = \frac{abc}{4R} =$$

$$= \frac{2R\sin A \cdot 2R\sin B \cdot 2R\sin C}{4R} =$$

$$= 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C,$$

что и требовалось доказать.

[illegible]ывод ф[illegible]ул для площа[illegible] равностороннего тр[illegible]ольни[illegible]а

УТ[illegible]ЕНИЕ 7.

1. Если a – сторона рав[illegible]ронего треуго[illegible]ка, т[illegible]о площадь

$$[illegible] = \frac{\sqrt{3}}{[illegible]}$$

2. Е[illegible] – высота равносторо[illegible]о тре[illegible]ьника, то его п[illegible]адь

$$S = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2$$

3. Если [illegible] радиус вписа[illegible] в равносторо[illegible]й треугольник [illegible]ужности, то его пл[illegible]адь

$$[illegible] 3\sqrt{3}r^2$$

4. Если R – ради[illegible]писанной ок[illegible]равностороннего тр[illegible]ольника окружн[illegible], то его площадь

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4}[illegible]$$

[illegible]АЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассматри[illegible]сунок 7.