Науколандия

Углы подобных треугольников

У подобных фигур могут быть разные размеры, но всегда одинаковая форма. В случае треугольников **они являются подобными, если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника**. То есть все три отношения соответствующих сторон треугольника равны одному и тому же числу.

Например, если даны треугольники ABC и DEF, у которых AB/DE = BC/EF = CA/FD, то эти треугольники подобны.

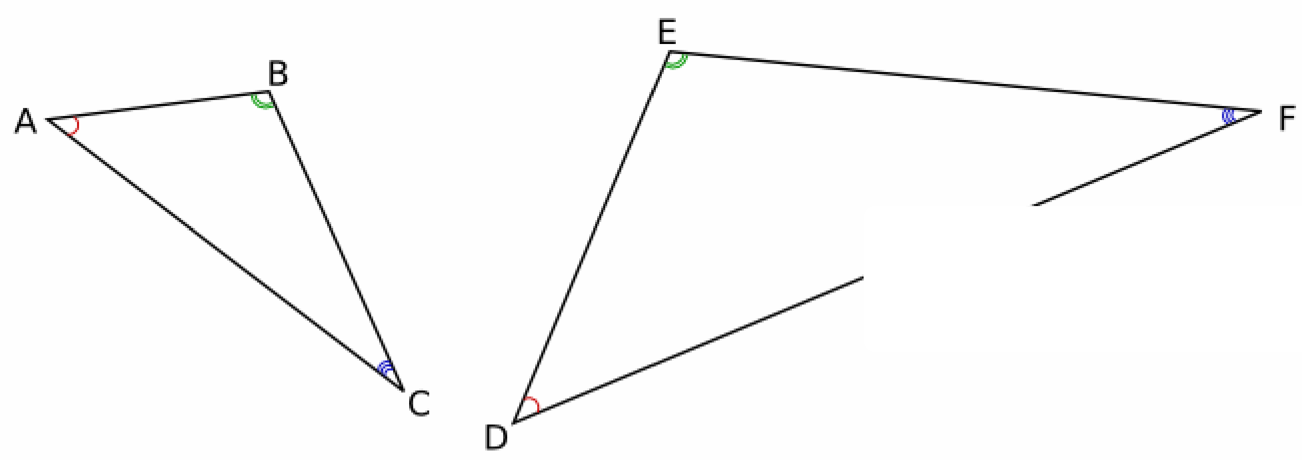
Число, которому равно отношение сторон, называется *коэффициентом подобия* (k). Таким образом, можно записать отношения сторон подобных треугольников так:

$$AB = kDE,\ BC = kEF,\ CA = kFD$$

Подобие треугольников обозначается так: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Понятно, что все равные треугольники также являются и подобными. В этом случае коэффициент подобия равен единице.

У подобных треугольниках соответственно равны все три угла. То есть, если $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, то $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$. Этот факт формулируется в виде теоремы: **если даны два подобных треугольника, то углы одного будут соответственно равны углам другого**.



Доказать эту теорему можно через теорему косинусов. Пусть даны два подобных треугольника ABC и DEF, у которых AB = kDE, BC = kEF, CA = kFD.

Теорема косинусов утверждает, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон за вычетом удвоенного произведения этих сторон, умноженному на косинус угла между ними. В данном случае, по отношению к стороне AB получим равенство:

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cdot \cos C$

Так как AB = kDE, BC = kEF, CA = kFD, то мы можем заменить в выражении теоремы косинусов стороны треугольника ABC соответствующими произведениями коэффициента подобия на стороны треугольника DEF:

$(kDE)^2 = (kEF)^2 + (kFD)^2 - 2kEF \cdot kFD \cdot \cos C$

$k^2 \cdot DE^2 = k^2 \cdot (EF^2 + FD^2 - 2EF \cdot FD \cdot \cos C)$

$DE^2 = EF^2 + FD^2 - 2EF \cdot FD \cdot \cos C$

В полученном равенстве у нас присутствует угол C из треугольника ABC. Однако если бы мы применили теорему косинусов к треугольнику DEF, то получили бы такое равенство:

$DE^2 = EF^2 + FD^2 - 2EF \cdot FD \cdot \cos F$

Отсюда следует, что косинусы углов C и F равны друг другу. Но если равны косинусы углов, то значит, равны и сами углы.

Аналогично через теорему косинусов доказывается, что ∠A = ∠D и ∠B = ∠E.