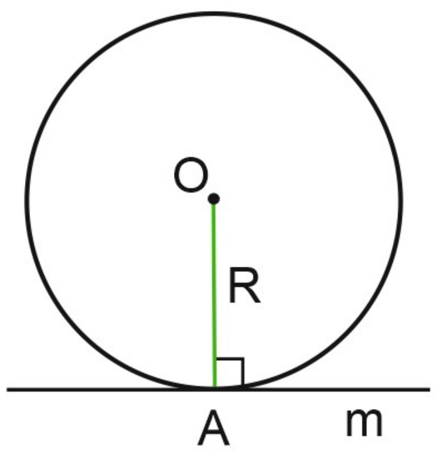
Касательная к окружности

Касательная к окружности — прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку.

Расскажем подробнее, что такое касательная и секущая.

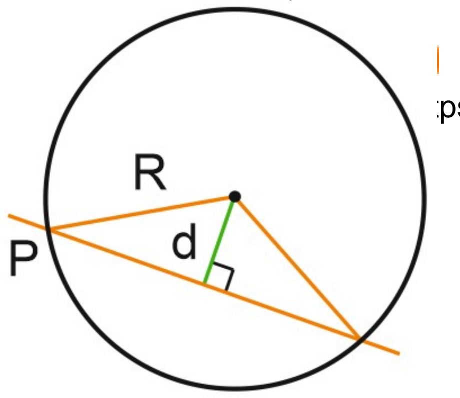
Напомним, что расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая является касательной к окружности. В этом случае она имеет с окружностью ровно одну общую точку. Такую прямую называют **касательной** к окружности.



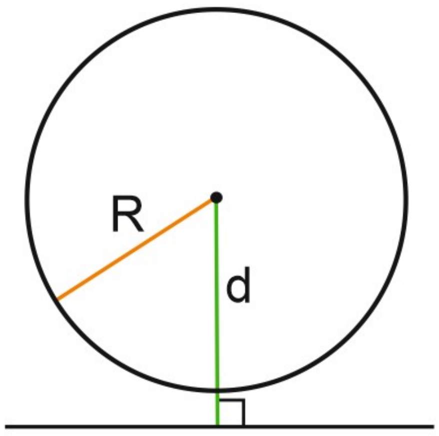
$d = OA = R$

Если расстояние от цент... окружности до прямой мен... радиуса окружности, то прямая пересекает окружность в двух точках. Такую прямую называют секущей



d<R

Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая не имеет с окружностью общих точек.

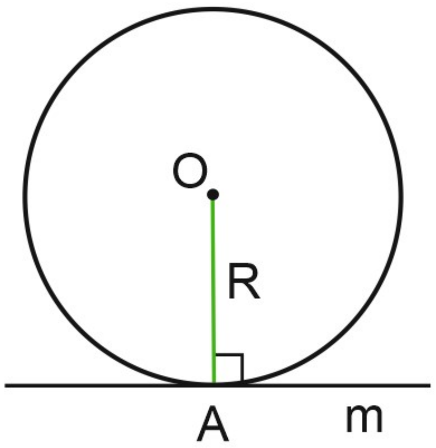


d>R

Запишем основные теоремы о касательных. Они помогут нам при решении задач ЕГЭ и ОГЭ.

Теорема 1.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

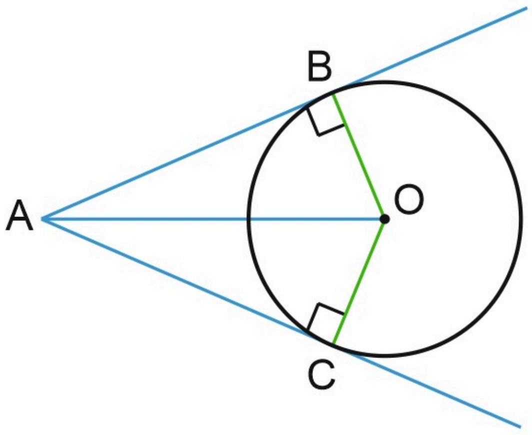


d=OA=R

На рисунке радиус OA перпендикулярен прямой m.

Теорема 2. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Доказательство:



Дана окружность с центром O.

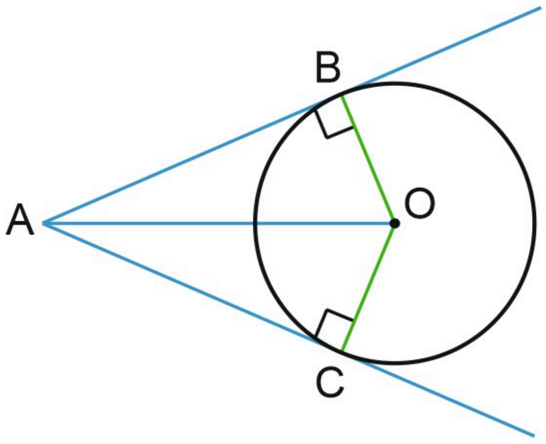
Прямые AB и AC — касательные, точки B и C — точки касания. Докажем, что AB = AC и $\angle BAO = \angle CAO$

Проведем радиусы OB и OC

По свойству касательной, $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$.

В прямоугольных треугольниках AOB и AOC катеты OB и OC равны как радиусы одной окружности, AO — общая гипотенуза. Следовательно, треугольники AOB и AOC равны по гипотенузе и катету. Отсюда AB = AC и $\angle BAO = \angle CAO$.

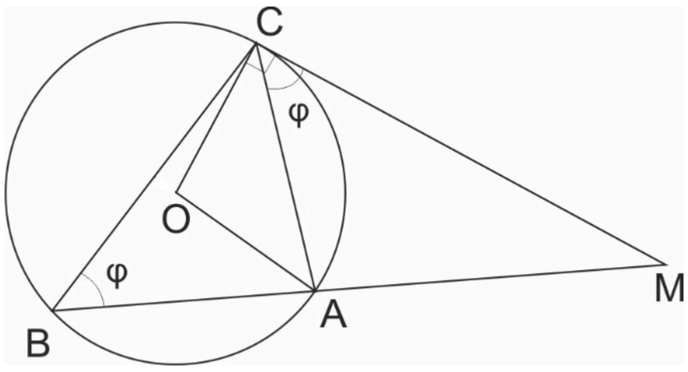
Теорема 3. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.



Доказательство:

Пусть из точки А к окружности проведены касательные АВ и АС. Соединим точку А с центром окружности точкой О. Треугольники АОВ и АОС равны по гипотенузе и катету, следовательно, АВ = АС.

Теорема 4. **Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.**



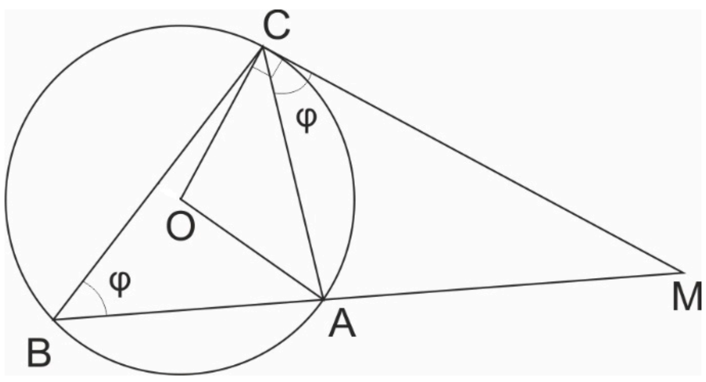
Угол АСМ на рисунке равен половине угловой величины дуги АС.

Доказательство теоремы здесь. (https://ege-study.ru/materialy-ege/ugol-mezhdu-kasatelnoj-i-hordoj)

Теорема 5, о секущей и касательной.

Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.

$MC^2 = MA \cdot MB.$

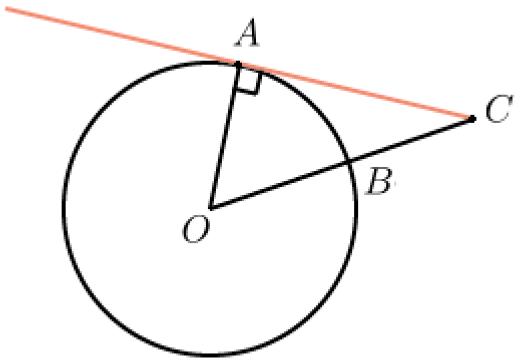


Доказательство теоремы смотрите здесь. (https://ege-study.ru/materialy-ege/teorema-o-sekushhej-i-kasatelnoj/)

Разберем задачи ЕГЭ и ОГЭ по теме: Касательная к окружности.

Задача 1.

Угол АСО равен 28°, где О — центр окружности. Его сторона СА касается окружности. Найдите величину меньшей дуги АВ окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



(/wp-content/uploads/2012/08/kasat_k_okr_01.png)

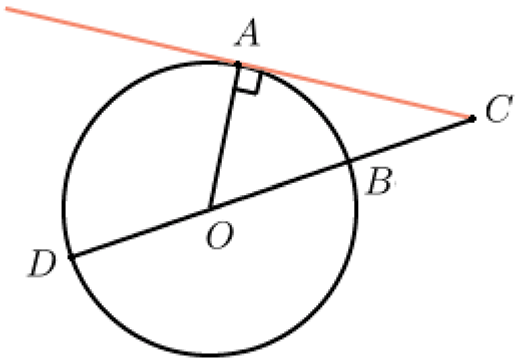
Решение:

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Значит, угол CAO — прямой. Из треугольника ACO получим, что угол AOC равен 62 градуса. Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается, значит, величина дуги AB— тоже 62 градуса.

Ответ: 62.

Задача 2.

Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а большая дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°. Ответ дайте в градусах.



(/wp-content/uploads/2012/08/kasat_k_okr_02.png)

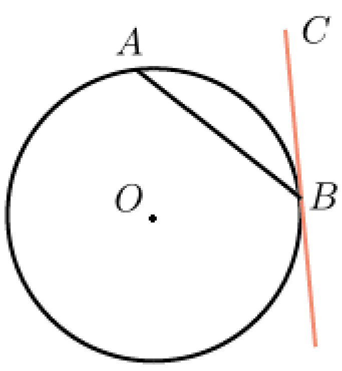
Решение:

Это чуть более сложная задача. Центральный угол AOD опирается на дугу AD, следовательно, он равен 116 градусов. Тогда угол AOC равен $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит, угол OAC — прямой. Тогда угол ACO равен $90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$.

Ответ: 26.

Задача 3.

Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B. Ответ дайте в градусах.



(/wp-content/uploads/2012/08/kasat_k_okr_03.png)

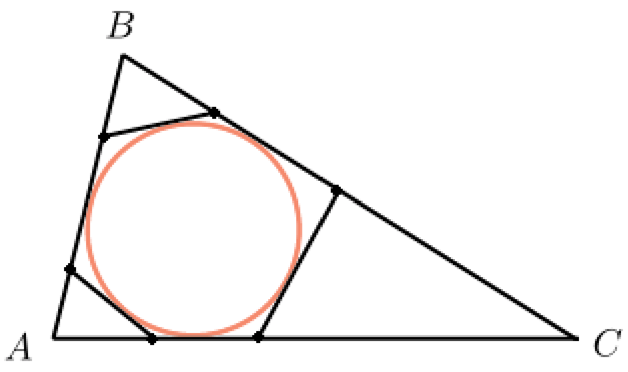
Решение:

Проведем радиус OB в точку касания, а также радиус OA. Угол OBC равен 90°. Треугольник BOA — равнобедренный. Нетрудно найти, что угол OBA равен 44 градуса, и тогда угол CBA равен 46 градусов, то есть *половине* угловой величины дуги AB.

Мы могли также воспользоваться теоремой: **Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.**

Задача 4.

К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



(/wp-content/uploads/2012/08/kasat_k_okr_05_0.png)

Решение:

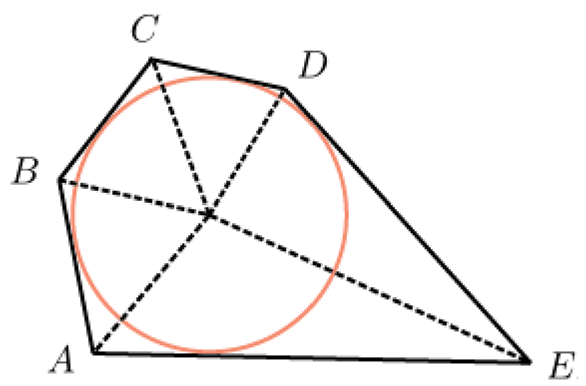
Вспомним еще одно важное свойство касательных к окружности:
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны.
Периметр треугольника — это сумма всех его сторон. Обратите внимание на точки на нашем чертеже, являющиеся вершинами шестиугольника. Из каждой такой точки проведены два отрезка касательных к окружности. Отметьте на чертеже такие равные отрезки. Еще лучше, если одинаковые отрезки вы будете отмечать одним цветом. Постарайтесь увидеть, как периметр треугольника ABC складывается из периметров отсеченных треугольников.

Ответ: 24.

Вот более сложная задача из вариантов ЕГЭ:

Задача 5.

Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.



(/wp-content/uploads/2012/08/kasat_k_okr_06_0.png)

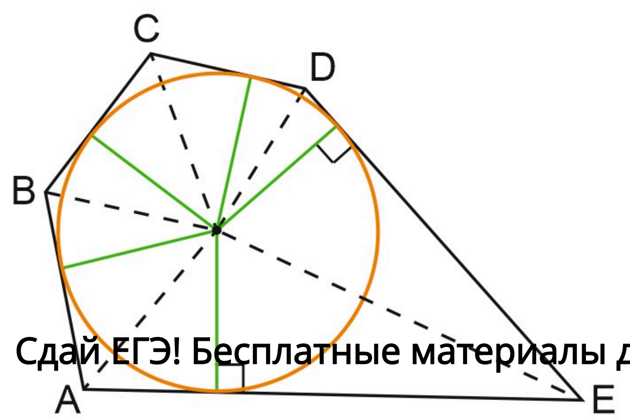
Решение:

Обратите внимание — в условии даже не сказано, сколько сторон у этого многоугольника. Видимо, это неважно. Пусть их будет пять, как на рисунке.
Окружность касается всех сторон многоугольника. Отметьте центр окружности — точку O — и проведите перпендикулярные сторонам радиусы в точки касания.

Соедините точку O с вершинами A, B, C, D, E. Получились треугольники AOB, BOC, COD, DOE и EOA.

Очевидно, что площадь многоугольника $S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOE} + S_{EOA}$.

Треугольники AOB, BOC, COD, DOE и EOA имеют равные высоты, причем все эти высоты равны радиусу окружности.



$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOE} + S_{\triangle EOA} =$

$= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r + \frac{1}{2}DE \cdot r + \frac{1}{2}AE \cdot r =$

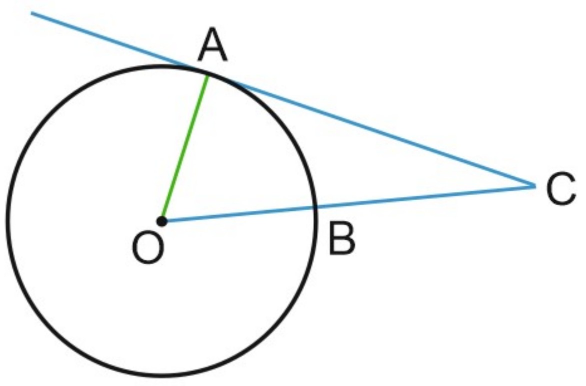
$= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CD + DE + EA) = \frac{1}{2}P \cdot r = p \cdot r,$ где p — полупериметр многоугольника.

По условию, P = 10, S = 5, тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{5}{5} = 1.$

Ответ: 1

Задачи ЕГЭ

1. Угол АСО равен 27°, где О — центр окружности. Его сторона СА касается окружности. Сторона СО пересекает окружность в точке В . Найдите величину меньшей дуги АВ окружности. Ответ дайте в градусах.



Решение:

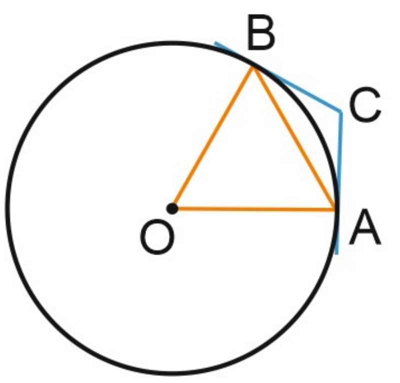
По условию, СА — касательная, А — точка касания.

$OA \perp AC$. Треугольник АСО — прямоугольный, $\angle AOC = 90^\circ - \angle ACO = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

Угол $\angle AOB$ — центральный, и он равен угловой величине дуги АВ, на которую опирается. Значит, градусная мера дуги АВ равна 63°. Это меньшая дуга АВ, а большая — с другой стороны от точек А и В, и она больше 180 градусов.

Ответ: 63.

2. Через концы А и В дуги окружности с центром О проведены касательные АС и ВС. Меньшая дуга АВ равна 58°. Найдите угол АСВ. Ответ дайте в градусах.



Решение:

Центральный угол АОВ равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть 58°.

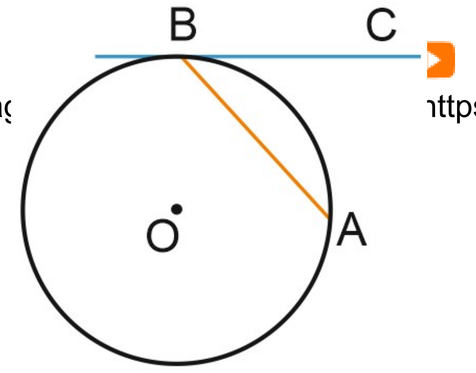
АС и ВС — касательные, поэтому $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$, поскольку касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Сумма углов четырехугольника АСВО равна 360°.

$\angle ACB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 122^\circ$

Ответ: 122.

3. Хорда АВ стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол АВС между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку В. Ответ дайте в градусах.



Решение:

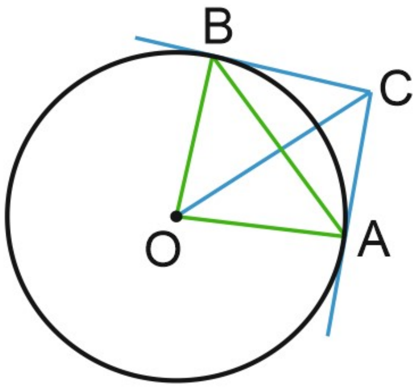
Применим теорему об угле между касательной и хордой.

Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

Значит, угол ABC равен 46°.

Ответ: 46.

4. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 32°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



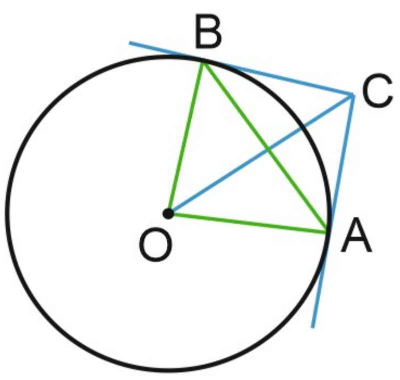
Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

Поэтому меньшая дуга AB окружности равна 64°. Центральный угол равен угловой величине дуги, на которую он опирается, значит, угол AOB равен 64°.

Мы могли бы решить задачу и по-другому, рассматривая четырехугольник ACBO, как в задаче 2.

Ответ: 64.

5. Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Решение:

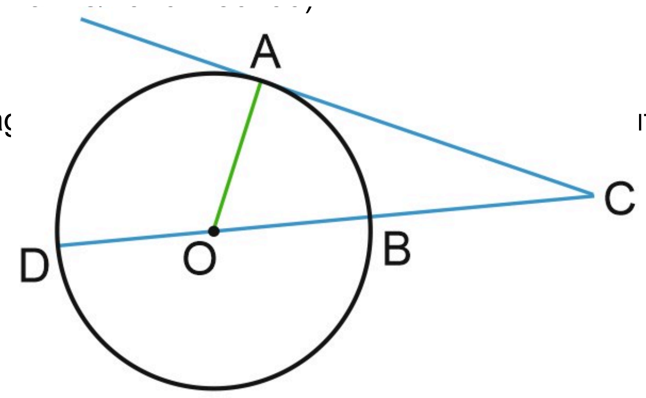
Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними. В треугольнике ABC:

$$\angle ACB = 180^{\circ} - (\angle BAC + \angle CBA) =$$

$$= 180^{\circ} - \cup AB = 180^{\circ} - 62^{\circ} = 118^{\circ}$$

Ответ: 118.

6. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, сторона CO пересекает окружность в точках B и D, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°. Ответ дайте в градусах.



Решение:

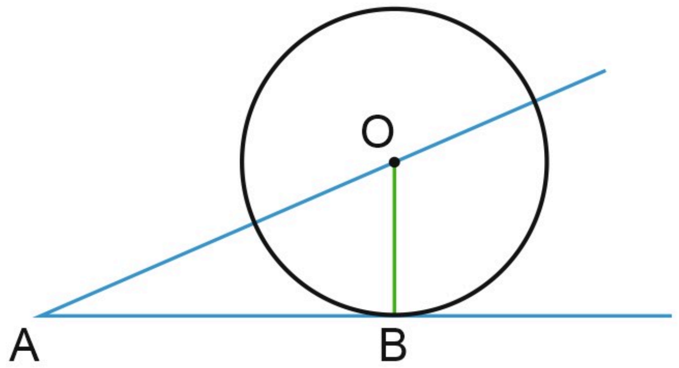
По условию, DB — диаметр окружности, поэтому дуга AB, не содержащая точки D, равна $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$. На эту дугу опирается центральный угол AOB, он равен 64°. Треугольник AOC прямоугольный, так как касательная CA перпендикулярна радиусу OA, проведенному в точку касания.

$\angle ACO = 90^\circ - \angle COA = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ.$

Ответ: 26.

Задачи ОГЭ по теме: Касательная к окружности

1. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если AB = 12 см, AO = 13 см.



Решение:

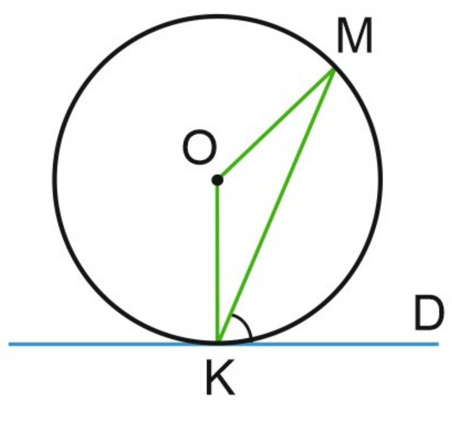
Отрезок OB — радиус, проведённый в точку касания, поэтому AB и OB перпендикулярны, треугольник AOB — прямоугольный. По теореме Пифагора:

$OB^2 = AO^2 - AB^2$

$OB^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25;\ OB = 5$

Ответ: 5.

2. Прямая касается окружности в точке K. Точка O — центр окружности. Хорда KM образует с касательной угол, равный 83°. Найдите величину угла OMK. Ответ дайте в градусах.

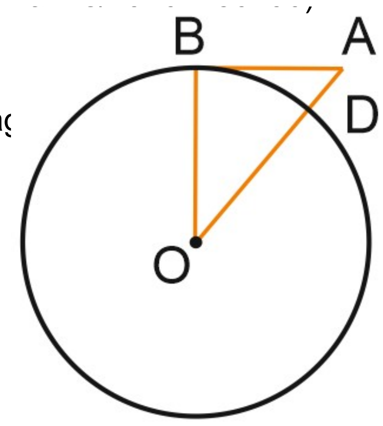


Решение:

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, поэтому угол OKD — прямой. Тогда $\angle OKM \ = \ 90^\circ - 83^\circ = 7^\circ$. Треугольник OMK — равнобедренный, его стороны OK и OM являются радиусами окружности, поэтому $\angle OMK \ = \angle \ OKM = 7^\circ$

Ответ: 7.

3. Отрезок AB = 40 касается окружности радиуса 75 с центром O в точке B. Окружность пересекает отрезок AO в точке D. Найдите AD.



Решение:

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит, треугольник AOB — прямоугольный. Из прямоугольного треугольника AOB по теореме Пифагора найдём AO:

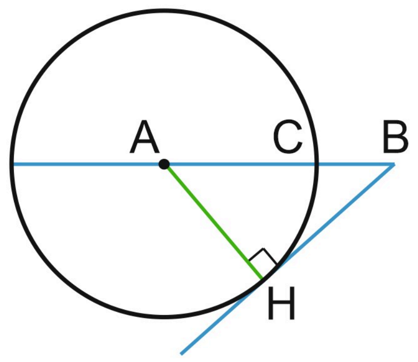
$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{40^2 + 75^2} = \sqrt{5^2\left(8^2 + 15^2\right)} =$$

$$= 5 \cdot 17 = 85$$

$$AD = AO\ -\ OD = 85 -\ 75 = 10.$$

Ответ: 10.

4. На отрезке AB выбрана точка C так, что AC = 75 и BC = 10. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение:

Проведём радиус AH в точку касания. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, поэтому треугольник ABH — прямоугольный. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH:

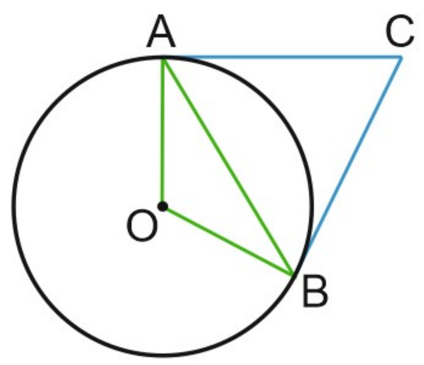
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{85^2 - 75^2} =$$

$$= \sqrt{5^2\left(17^2 - 15^2\right)} = 40$$

Ответ: 40.

5. Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 72°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.

Решение:



Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны, поэтому AC=BC и треугольник ABC — равнобедренный.

$$\angle CAB = \angle CBA = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 54^\circ$$

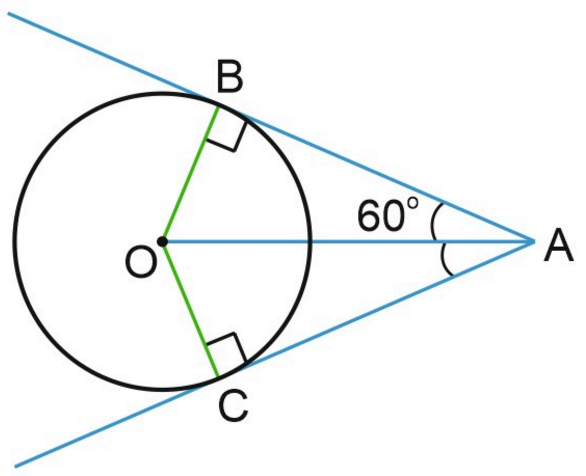
Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними, значит, дуга AB равна 108°. Угол AOB — центральный, он равен дуге, на которую опирается, то есть 108°. Треугольник AOB равнобедренный,

$\angle OAB = \angle ABO = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$

Ответ: 36.

6. Из точки А проведены две касательные к окружности с центром в точке О. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60°, а расстояние от точки А до точки О равно 8.

Решение:



Проведём радиусы ОВ и ОС в точки касания. Треугольники АОВ и АОС — прямоугольные. Эти треугольники равны по катету и гипотенузе.

ОВ — ОС как радиусы окружности, гипотенуза общая. Значит,

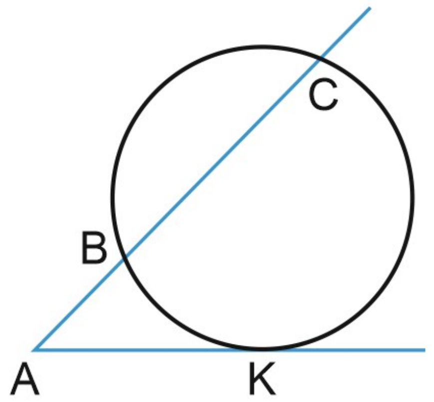
$$\angle BAO = \angle OAC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Из треугольника АОВ найдём ОВ, то есть радиус окружности.

$$OB = AO \cdot \sin 30^\circ \ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Ответ: 4.

7. Через точку А, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке К. Другая прямая пересекает окружность в точках В и С, причём АВ = 2, АС = 8. Найдите АК.



Решение:

По теореме о секущей и касательной, $AK^2 = AB \cdot AC,$

$$AK = \sqrt{AB \cdot AC} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$$

Ответ: 4.

8. На окружности отмечены точки А и В так, что меньшая дуга АВ равна 72°. Прямая ВС касается окружности в точке В так, что угол АВС острый. Найдите угол АВС. Ответ дайте в градусах.

Решение:

Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

$\angle ABC = 72^\circ : 2 = 36^\circ$. (https://www.youtube.com/user/MalkovaAnna/videos)

Ответ: 36.

Спасибо за то, что пользуйтесь нашими публикациями. Информация на странице «Касательная к окружности» подготовлена нашими авторами специально, чтобы помочь вам в освоении предмета и подготовке к ЕГЭ и ОГЭ. Чтобы успешно сдать необходимые и поступить в высшее учебное заведение или колледж нужно использовать все инструменты: учеба, контрольные, олимпиады, онлайн-лекции, видеоуроки, сборники заданий. Также вы можете воспользоваться другими статьями из данного раздела.

Публикация обновлена: 02.05.2024