

数値解析学

Sumire

2022.12.22

概要

常微分方程式の数値解析

目次

1	実験目的	4
2	問題設定	4
3	理論	5
4	実験結果	7
4.1	1. 解の様子をグラフで表示する.	7
4.1.1		7
4.1.2		7
4.2	2. 数値解の誤差と収束の速さを考察する.	9
4.2.1		10
4.2.2		10
5	考察	11
6	結論	11
7	感想	12
8	使用したソースコード	13
	参考文献	15

表目次

1	$ x_N^{Euler} - x_s $	10
2	$ x_N^{Heun} - x_s $	10

図目次

1	$\omega = 1, \mu = 1, (x_0, y_0) = (-4, 3), T = 15, N = 1500$	7
2	$(x_0, y_0) = (0, 0)$	8
3	$(x_0, y_0) = (5, 5)$	8
4	$(x_0, y_0) = (-5, -5)$	8
5	$(x_0, y_0) = (5, -5)$	8
6	$(x_0, y_0) = (-5, 5)$	8
7	$\mu = 1, \omega = 1$	9
8	$\mu = 5, \omega = 5$	9
9	$\mu = -5, \omega = 5$	9

1 実験目的

また, report 1 のときには深く考える余裕はなかったが, 微分方程式がどのように応用されているのかを知り, 数理モデル化するなど理解さらにを深めたいと思った。

2 問題設定

今回は, 課題 II を扱う。

van der Pol 方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = y_0 \end{cases}$$

に対して, Euler 法と Heun 法を適用し, 初期値とパラメータ (μ, ω) によって回の振る舞い, 解の精度, 収束の速さを, 以下を例に調べよ。

1. 解の様子をグラフで表示する。

- (a) $y = \frac{dx}{dt}$ とする。 $\omega = 1, \mu = 1, (x_0, y_0) = (-4, 3), T = 15, N = 1500$ に対して, $(t, x(t)), (t, y(t)), (x(t)t, y(t))$ の散布図を描いてみる。
- (b) 初期値 (x_0, y_0) とパラメータ (μ, ω) を変えて, 解の様子を調べてみる。

2. 数値解の誤差と収束の速さを考察する。

$\omega = 1, \mu = 1, (x_0, y_0) = (-4, -3), T = 4$ と固定する。 N を十分大きく取ったとき (例: $N = 10000$), Heun 法によって得られた近似解 $x_{10000} =: x_s$ を真の解と見なし, 以下の考察をする。

- (a) $N = 100, 200, 400, 800, 1600$ に対して, Euler 法によって得られた近似解 x_N^{Euler} と x_s の誤差 $|x_N^{Euler} - x_s|$ を計算し, 誤差と刻み幅 $h = T/N$ の関係を調べ, 収束の速さを考察する。
- (b) $N = 100, 200, 400, 800, 1600$ に対して, Heun 法によって得られた近似解 x_N^{Heun} と x_s の誤差 $|x_N^{Heun} - x_s|$ を計算し, 誤差と刻み幅 $h = T/N$ の関係を調べ, 収束の速さを考察する。

3 理論

まず初めに, わかっている理論的な事実について述べる.

常微分方程式とは, 未知数とその導関数含み, 独立変数が 1 つの方程式のことを言う.

van der Pol 方程式は, 2 階微分方程式である. van der Pol 方程式を支配方程式とするのが, van der Pol 振動子である. (支配方程式とは, 物理現象の数値モデルを構築するために, その現象を数学的に方程式で表したものを指す.)

van der Pol 方程式を一般化した方程式に, Liénard の方程式というものがある.

— Liénard の定理 —

Liénard の方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -f(x_1)x_2 - g(x_1) \end{pmatrix}$$

について,

1. f, g が連続微分可能
2. g は奇関数
3. $x > 0$ のとき, $g(x) > 0$
4. f は偶関数

5. $F(x) := \int_0^x f(s)ds$ と置く.

$F(a) = 0, 0 < x < a$ ならば, $F(x) < 0, x > a$ ならば $F(x) > 0$ で広義単調増加で $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. これを満たす $a > 0$ が存在する.

これらの条件を満たすとき, 方程式はただひとつの漸近安定なリミットサイクルが存在する.

リミットサイクルとは, 力学系における位相空間上での閉軌道のことである.

Van der Pol 方程式は支配方程式が非線形の摩擦項を持つ 2 階微分方程式で記述される. 摩擦項は, ある決まった範囲にある場合 (範囲は摩擦項の係数によって変化する) は正の摩擦となる. つまり, 振動を減衰させる方向に作用する. しかしその範囲外では, 負の摩擦となり, 振動を成長させる方向に作用する. (減衰力は負となる.) 減衰振動と発散振動の境界 (リミットサイクル) が存在していることになる.

それでは, 課題 II の方程式を見ていく.

$y = \frac{dx}{dt}$ とおくと, 課題 II の方程式は,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - \mu(1 - x^2)y + \omega^2 x = 0 & 0 < t < T, \\ \frac{dx}{dt} = y & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

と変形できる.

今回は, Van der Pol 方程式を変形したあとの方程式に対して, Euler 法, Heun 法を適用していく.

4 実験結果

4.1 1. 解の様子をグラフで表示する.

4.1.1

1. (a) $y = \frac{dx}{dt}$ とする. $\omega = 1, \mu = 1, (x_0, y_0) = (-4, 3), T = 15, N = 1500$ に対して, $(t, x(t)), (t, y(t)), (x(t)t, y(t))$ の散布図を描いてみる.

$y = \frac{dx}{dy}$ とし, $\omega = 1, \mu = 1, (x_0, y_0) = (-4, 3)$ とすると, van der Pol 方程式は,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - (1 - x^2)y + x = 0 & 0 < t < T, \\ \frac{dx}{dt} = y & 0 < t < T, \\ x(0) = -4, y(0) = -3 \end{cases}$$

となる.

$T = 15, N = 1500$ に対する, $(t, x(t)), (t, y(t)), (x(t)t, y(t))$ の散布図は以下のである.

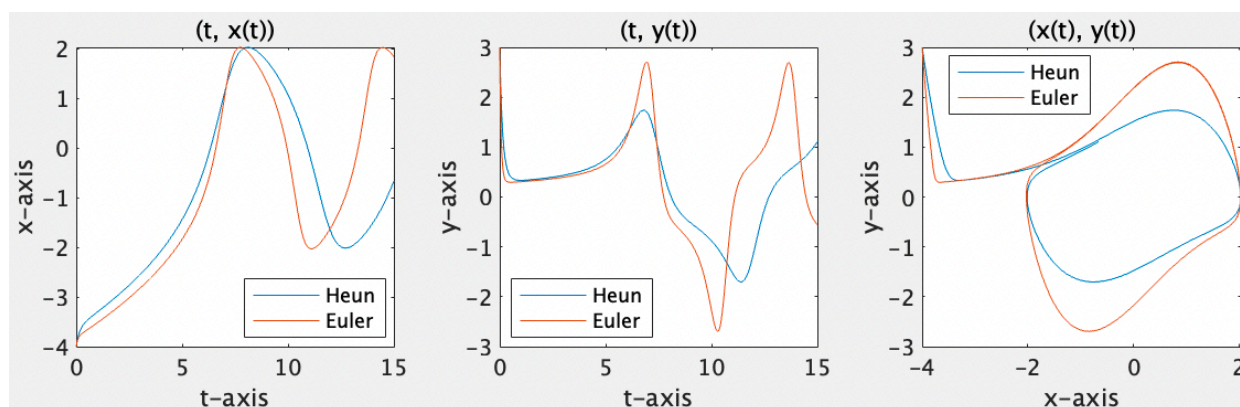


図1 $\omega = 1, \mu = 1, (x_0, y_0) = (-4, 3), T = 15, N = 1500$

4.1.2

1. (b) 初期値 (x_0, y_0) とパラメータ (μ, ω) を変えて, 解の様子を調べてみる.

まず初めに, $T = 15, N = 1500$, パラメータ $\mu = 1, \omega = 1$ と固定して, 初期値 (x_0, y_0) を変えて実験を行う. 今回は, 初期値の符号に着目する.

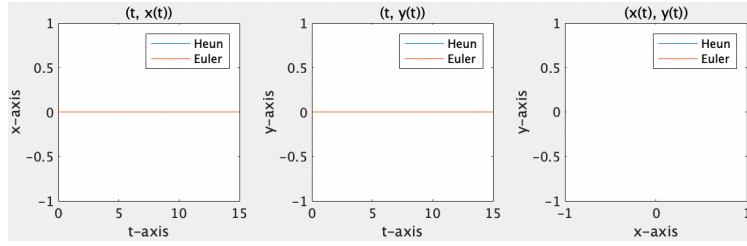


图 2 $(x_0, y_0) = (0, 0)$

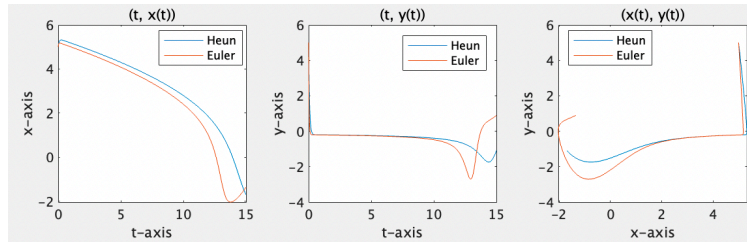


图 3 $(x_0, y_0) = (5, 5)$

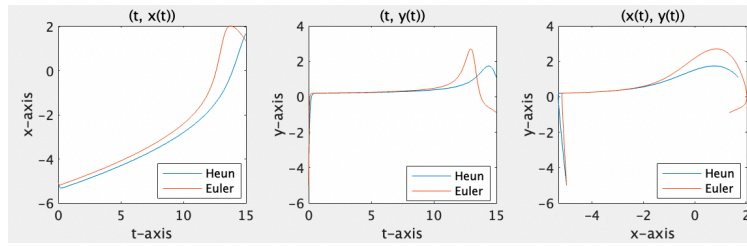


图 4 $(x_0, y_0) = (-5, -5)$

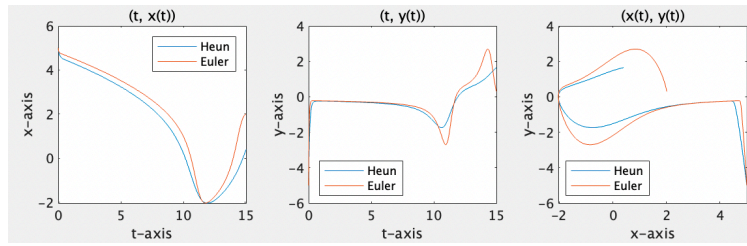


图 5 $(x_0, y_0) = (5, -5)$

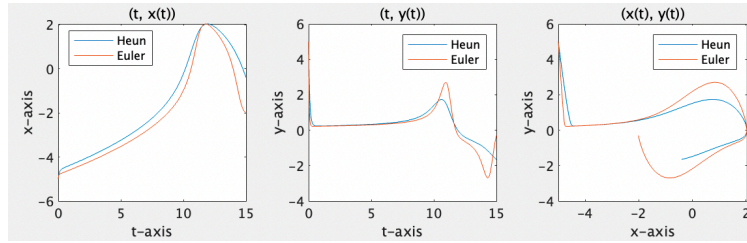


图 6 $(x_0, y_0) = (-5, 5)$

次に, $T = 15$, $N = 1500$, 初期値 $(x_0, y_0) = (5, -5)$ と固定して, パラメータ μ, ω を変えて実験を行う. ここでは, パラメータの符号に着目する. (ω は方程式において二乗されているため, 絶対値を考える.)

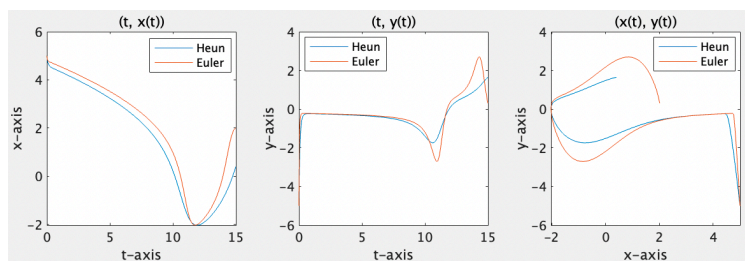


図 7 $\mu = 1, |\omega| = 1$

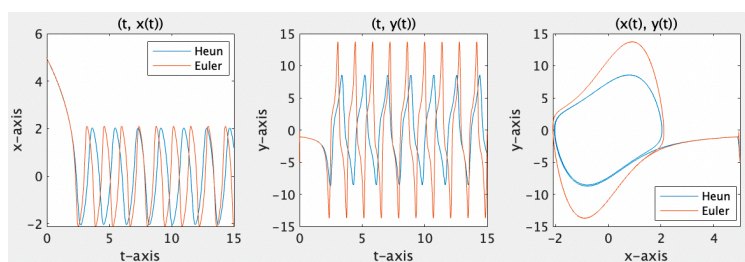


図 8 $\mu = 5, |\omega| = 5$

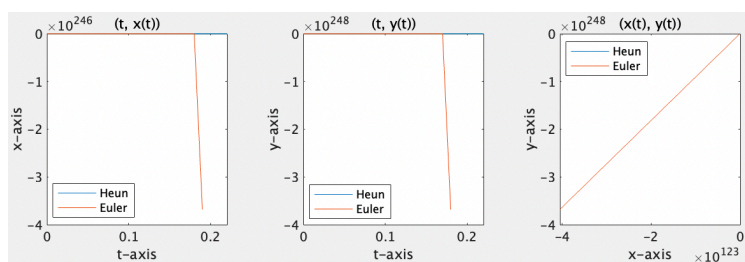


図 9 $\mu = -5, |\omega| = 5$

4.2 2. 数値解の誤差と収束の速さを考察する.

$\omega = 1$, $\mu = 1$, $(x_0, y_0) = (-4, -3)$, $T = 4$ と固定する. N を十分大きく取ったとき (例: $N = 10000$), Heun 法によって得られた近似解 $x_{10000} =: x_s$ を真の解と見なし, 以下の考察をする.

以下, $x_{10000} =: x_s = -3.287011966884707e + 00$ を用いる.

4.2.1

2. (a)

$N = 100, 200, 400, 800, 1600$ に対して, Euler 法によって得られた近似解 x_N^{Euler} と x_s の誤差 $|x_N^{Euler} - x_s|$ を計算し, 誤差と刻み幅 $h = T/N$ の関係を調べ, 収束の速さを考察する.

N	x_N^{Euler}	$ x_N^{Euler} - x_s $
100	$-3.0235e + 00$	$2.6351e - 01$
200	$-3.0187e + 00$	$2.6834e - 01$
400	$-3.0168e + 00$	$2.7023e - 01$
800	$-3.0159e + 00$	$2.7108e - 01$
1600	$-3.0155e + 00$	$2.7148e - 01$

表 1 $|x_N^{Euler} - x_s|$

4.2.2

2. (b)

$N = 100, 200, 400, 800, 1600$ に対して, Heun 法によって得られた近似解 x_N^{Heun} と x_s の誤差 $|x_N^{Heun} - x_s|$ を計算し, 誤差と刻み幅 $h = T/N$ の関係を調べ, 収束の速さを考察する.

N	x_N^{Heun}	$ x_N^{Heun} - x_s $
100	$-3.2135e + 00$	$7.3471e - 02$
200	$-3.2507e + 00$	$3.6312e - 02$
400	$-3.2692e + 00$	$1.7773e - 02$
800	$-3.2785e + 00$	$8.5129e - 03$
1600	$-3.2831e + 00$	$3.8856e - 03$

表 2 $|x_N^{Heun} - x_s|$

5 考察

図 2 ～ 6 より, $T = 15$, $N = 1500$ において, パラメータ $\mu = 1$, $\omega = 1$ を固定したとき,

- 初期値が共に 0 のとき, 方程式は一定である.
- x_0 , y_0 の符号を共に反転させた場合, $(x(t), y(t))$ のグラフは, 符号を反転させる前の初期値のグラフに対して点対称であることがわかる.
- x_0 の値が正であるとき $(t, x(t))$ のグラフの最後は増加しているが, x_0 の値が負であるとき $(t, x(t))$ のグラフの最後は減少している.
- y_0 についても, x_0 の時と同様のことがいえる.
- $(x(t), y(t))$ のグラフには, 直線の部分と曲線の部分が存在する. 直線部分の増減には y_0 の符号が, 曲線部分のえぐり具合の大小には x_0 の符号が関連していると考えられる.

図 7 ～ 9 より, $T = 15$, $N = 1500$ において, 初期値 $(x_0, y_0) = (5, -5)$ を固定したとき,

- μ , ω の値を大きくするほど, $(t, x(t))$, $(y, y(t))$ のグラフでは周期性が明らかにみえる.
- μ を負の値でとると, $(x(t), y(t))$ のグラフは, 直線的になってしまう.
- $\mu = 5$, $|\omega| = 5$ の $(t, x(t))$, $(y, y(t))$ のグラフは, $\mu = 1$, $|\omega| = 1$ のグラフを t 軸方向に縮小したようになっていると読み取れる.

また, パラメータを固定, 初期値を固定した場合ともに, Euler 法のほうが Heun 法よりも, y の値の値域が大きいと感じる.

表 1, 2 より, $N = 100, 200, 400, 800, 1600$ に対して, Euler 法と Heun 法によって得られた解と x_s の誤差を求めたとき,

- x_N^{Euler} の値は, N を大きくするほど小さくなり, x_N^{Heun} の値は, N を大きくするほど大きくなっていることがわかる.
- $|x_N^{Euler} - x_s|$ については, N を大きくするほどその誤差は大きくなっている.
- $|x_N^{Heun} - x_s|$ においては, N を大きくするほどその誤差は小さくなっている. また, その小さくなる速度は, かなり早いとわかる.

6 結論

今回掲載した図の中では, 図 1 ($\omega = 1$, $\mu = 1$, $(x_0, y_0) = (-4, 3)$, $T = 15$, $N = 1500$ に対する, $(t, x(t))$, $(t, y(t))$, $(x(t)t, y(t))$ のグラフ) が最も綺麗に, リミットサイクルを表している. また, μ , ω が同符号であるときよりも, 異符号であるときの方がリミットサイクルが明らかにみえる.

van der Pol 方程式は, 2 階の非線形常微分方程式であるため, 安定性を判別するためにはまず「線

形化 (局所的な近似)」を Taylor 展開と Jacobi 行列 J を使って行う必要がある. この方程式の解の様子を見てみると, 減衰振動と発散振動の境界が存在する. 境界の外側では減衰振動, 内側では不安定な平衡点が発散振動をする場合, その境界が「リミットサイクル」となっている.

また, x_N^{Euler} と x_N^{Heun} の値は, N を大きくするとだんだん近づいていく, つまり, 誤差が減ると予測していたが, 今回の実験を通して, 近づいてはいないということがわかった. これは, Euler 法と Heun 法の反復式の性質によるものであると考えた.

7 感想

近似解と x_s との誤差について, 今回は $x_s := x_{10000}^{Heun}$ とおいていたため, 全体的に誤差は Heun 法での会の方が小さくなったが, $x_s := x_{10000}^{Euler}$ とおいた場合は, また違う結果が出るのではないかと感じた. 興味を持ったため, 今後の課題としたい.

8 使用したソースコード

使用したソースコードの一部を以下に記載する.

```
1  % van der Pol 方程式において, Euler法と Heun 法の
2  % (t, x(t)), (t, y(t)), (x(t), y(t)) のグラフを出力する
3
4  function rel_a_1(x0, y0, N, T, mu, omega)
5
6  % 引数
7  % x0 : 初期値
8  % y0 : 初期値
9  % N : 分割数
10 % T : 最大計算時間
11 % mu : van der Pol 方程式のパラメータ  $\mu$ 
12 % omega : van der Pol 方程式のパラメータ  $\omega$ 
13
14 a = 0;
15 b = T;
16
17 f = @(t,x,y)mu*(1 - x^2)*y - omega^2*x;
18 g = @(t,x,y)y;
19 % h : 分割幅
20 h = (b-a)/N;
21 % 区間分割
22 x = a:h:b;
23
24 % 初期条件
25 x1 = zeros(size(x));
26 y1 = zeros(size(x));
27 x1(1) = x0;
28 y1(1) = y0;
29 x2 = zeros(size(x));
30 y2 = zeros(size(x));
31 x2(1) = x0;
32 y2(1) = y0;
33
34 % 反復
35 for i = 1:length(x)-1
36     % Heun法の反復
37     y1(i+1) = y1(i)+h/2*(f(i,x1(i),y1(i))+f(i+1,x1(i+1),y1(i+1)));
38     x1(i+1) = x1(i)+h/2*(g(i,x1(i),y1(i))+g(i+1,x1(i+1),y1(i+1)));
39     % Euler法の反復
40     y2(i+1) = y2(i)+h*f(i,x2(i),y2(i));
41     x2(i+1) = x2(i)+h*g(i,x2(i),y2(i));
42 end
43
44 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
45 tiledlayout(1,3)
46
47 nexttile
```

```

48 plot(x, x1, 'DisplayName', 'Heun');
49 hold on
50 plot(x, x2, 'DisplayName', 'Euler');
51 hold off
52 title(' (t, x(t)) ')
53 xlabel('t-axis')
54 ylabel('x-axis')
55
56 nexttile
57 plot(x, y1, 'DisplayName', 'Heun');
58 hold on
59 plot(x, y2, 'DisplayName', 'Euler');
60 hold off
61 title(' (t, y(t)) ')
62 xlabel('t-axis')
63 ylabel('y-axis')
64
65 nexttile
66 plot(x1, y1, 'DisplayName', 'Heun');
67 hold on
68 plot(x2, y2, 'DisplayName', 'Euler');
69 hold off
70 title(' (x(t), y(t)) ')
71 xlabel('x-axis')
72 ylabel('y-axis')

```

参考文献

- [1] 大学の講義資料
- [2] 黒田真也. 「付録 E 線形微分方程式の平衡点の安定性解析」 (閲覧日: 2022.12.19)
<http://kurodalab.bs.s.u-tokyo.ac.jp/iwanami/pdf/appE.pdf>.
- [3] 木村すらいむ. 趣味の大学数学 読み物としての数学入門サイト (閲覧日: 2022.12.19)
<https://math-fun.net/20210914/18421/>.
- [4] MathWorks ヘルプセンター (閲覧日: 2022.12.21)
https://jp.mathworks.com/help/matlab/index.html?s_tid=CRUX_lftnav.