扫码听课

【爱启航】2020 考研数学基础班讲义

线性代数

主讲：张宇

:张宇考研数学 :宇哥考研

【注】①曲率；②速度；③相关变化率

【例题 1】[取自《题源 1000 题》数一 P18 题 2.90,数二 P18 题 2.97]

求曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点.

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一 P18 题 2.91,数二 P18 题 2.98]

质点 P 沿抛物线 $x=y^2(y>0)$ 移动，P 的横坐标 x 的变化速度为 5 cm/s. 当 $x=9$ 时，点 P 到原点 O 的距离变化速度为________.

四、证明性应用（一）——中值定理

1、确定区间

2、确定研究对象（辅助函数）

①简单情形

②复杂情形

3、确定使用定理

①介值定理

②费马定理

③罗尔定理

④拉格朗日中值定理

3.确定使用定理

⑤泰勒公式

带拉格朗日余项的泰勒公式：

⑥ 柯西中值定理

（1）一个具体，一个抽象

（2）双中值（一般与拉格朗日结合）

4.确定点的信息

① 用题设告知的

② 用连续

（1）连续定义

（2）导数定义

（3）保号性

（4）取极限

③ 用积分

④ 用介值定理

⑤ 用费马定理

⑥ 用奇偶性

⑦ 用几何条件

⑧ 用行列式

4. 确定点的信息

例 1 泰勒公式

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, f''(x)>0$.证明 $f(x)\geq x$.

例 2 柯西中值定理（双中值问题）

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导且 $f(a)\neq f(b)$.证明$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{f'(\eta)}{b+a}, a>0$

例 3 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$在$[0,4]$上一阶可导，且 $f'(x)\geq\dfrac{1}{4}$， $f(2)\geq 0$，则在（　）上必有 $f(x)\geq\dfrac{1}{4}$

(A)[0,1]　　(B)[1,2]　　(C)[2,3]　　(D)[3,4]

例 4 拉格朗日中值定理 θ（x）

设 $x>0$,证明：

（1） $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, 0<\theta(x)<1$;

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$.

例 5 变形

设 $f(x)=\arcsin x,\xi$为$f(x)$在$[0,b]$上拉氏中值定理的中值点. $0<b<1$

五．导数的证明性应用（二）

不等式问题

【例】设 $f(x)=\arcsin x,\xi$为$f(x)$在$[0,b]$上拉氏中值定理的中值点。$0<b<1$

求 $\lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{\xi}{b}$

【例】用单调性

证明 $\cos\sqrt{2}x\le -x^2+\sqrt{1+x^4},x\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$

6.导数的证明性应用（三）

【例 1】 证明：当 $x\ge 1$时， $\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv\dfrac{\pi}{4}$

【例 2】讨论公共点

讨论常数 a 的值，确定曲线 $y=ae^x$ 与 $y=1+x$ 的公共点的个数。

第三讲 一元函数积分学

综述

1. 概念与性质

2. 计算

3. 应用

一、概念与性质

1. “祖孙三代”的奇偶性，周期性。

【例题 1】[取自《题源 1000 题》数一 P21 题 3.1，数三 P19 题 3.1，数二 P22 题 3.1]

设 $f(x)$ 为连续函数，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 试证明：

(1) $F(x)$ 的奇偶性正好与 $f(x)$ 的奇偶性相反；

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 的一切原函数均为偶函数；若 $f(x)$ 为偶函数，则有且仅有一个原函数为奇函数.

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一 P21 题 3.2，数三 P19 题 3.2，数二 P22 题 3.2]

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期，证明：

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$（$a$ 为任意实数）；

(2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$；

(3) $\int f(x)\mathrm{d}x$（$f(x)$ 的全体原函数）周期为 $T \Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

【例题 3】[取自《题源 1000 题》数一 P21 题 3.3，数三 P19 题 3.3，数二 P22 题 3.3]

设 $f(x)$ 连续，则在下列变上限积分中，必为偶函数的是（　　）.

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

【例题 4】[取自《题源 1000 题》数一 P21 题 3.6，数三 P19 题 3.6，数二 P22 题 3.6]

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可微函数，则下列函数中以 T 为周期的函数是（　　）.

(A) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_a^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(C) $\int_a^x f'(t^2)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_a^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$

2. 积分比大小

【例题 6】[取自《题源 1000 题》数一 P22 题 3.12，数三 P20 题 3.12，数二 P23 题 3.13]

设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^6 x\,\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^6 x)\mathrm{d}x$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^6 x)\mathrm{d}x$，则（　　）.

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

【例题 5】[取自《题源 1000 题》数一 P22 题 3.10，数三 P20 题 3.10，数二 P23 题 3.11]

设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\ (k=1,2,3)$，则有（　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$