第一章　函数与极限

主讲：高昆轮

第一节　映射与函数

一、 函数

1.函数的概念

定义1　设x和y是两个变量,D是一个给定的数集, 如果对于每个数$x\in D$,变量y按照一定的对应法则f总有一个确定的数值y和它对应, 则称y是x的函数,记为$y=f\left(x\right)$.常称x为自变量,y为因变量,D为函数的定义域.

注:（1）构成函数的两个基本要素是:定义域和对应法则.

当两个函数的定义域和对应法则完全相同时, 它们才是同一个函数.

（2）几个重要函数：$y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x,\quad x\geq 0\end{cases}$（绝对值函数）；$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$（符号函数）；

$y=[x]$（取整函数）；$y=\begin{cases}f\left(x\right), x<x_0\\ g\left(x\right), x\geq x_0\end{cases}$（分段函数）；$y=f\left(x\right)^{g(x)}$（幂指函数）；

$F\left(x,y\right)=0$（隐函数）；$\begin{cases}x=x\left(t\right)\\ y=y\left(t\right)\end{cases}$（参数方程）.

2.函数的几种特性

（1）函数的有界性

定义2　设$y=f\left(x\right)$在集合X上有定义,如果存在正数M,使得对任意的$x\in X$,都有$\left|f\left(x\right)\right|\leq M$,则称$f\left(x\right)$在$X$上有界.

注:（1）常见的有界函数有,$|\sin x|\leq 1,|\cos x|\leq 1,|\arcsin x|\leq \dfrac{\pi}{2},|\arctan x|\leq \dfrac{\pi}{2}$;

（2）对于任意正数M,若总存在$x_1\in X$,使得$\left|f\left(x_1\right)\right|>M$,则称$f\left(x\right)$在$X$上无界;

（3）函数的有界（无界）是针对具体区间而言的.

（2）函数的单调性

定义3　设$y=f(x)$在区间I上有定义,如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$）,则称$f(x)$在区间I上是单调增加（或单调减少）.

注:以后经常使用导数来判定函数在区间上的单调性.

（3）函数的奇偶性

定义4　设$y=f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$,
恒有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$在D上是偶函数,
如果恒有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$在D上是奇函数.

注:（1）奇$\pm$奇$=$奇, 偶$\pm$偶$=$偶, 奇$\cdot$奇$=$偶, 偶$\cdot$偶$=$偶, 奇$\cdot$偶$=$奇;

（2）常见的偶函数有, x^2、$|x|$、$\cos x$、$f(x)+f(-x)$;
常见的奇函数有, $\sin x$、$\arcsin x$、$\tan x$、$\arctan x$、$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$、$f(x)-f(-x)$;

（3）偶函数的图形关于y轴对称,奇函数的图形关于原点对称,
且奇函数在$x=0$处若有定义,则$f(0)=0$.

（4）函数的周期性

定义5　如果存在一个正数T, 使得对于任一x, 有$f(x+T)=f(x)$,
则称$f(x)$是周期函数, T称为$f(x)$的周期.

注:常见的周期函数有, $\sin x, \cos x$以2π为周期, $\tan x, |\sin x|, \sin 2x$以$\pi$为周期.

3.反函数

定义6　设$y=f(x)$的定义域为D, 值域为R_f, 如果对于任一$y\in R_f$,
有唯一确定的$x\in D$, 使得$y=f(x)$, 则称$x=f^{-1}(y)$为$y=f(x)$的反函数.

注:（1）单调函数必有反函数;

（2）有时将$y=f(x)$的反函数也写成$y=f^{-1}(x)$, 在同一坐标系中, $y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称, 而$y=f(x)$和$x=f^{-1}(y)$的图形是重合的;

（3）$f\left[f^{-1}(x)\right]=x$, $f^{-1}\left[f(x)\right]=x$.

4.复合函数

定义7　设$y=f(u)$的定义域为D_f, 函数$u=g(x)$定义域为D_g, 且其值域$R_g\subset D_f$,
则称$y=f\left[g(x)\right]$为函数$y=f(u)$和$u=g(x)$的复合函数.

5.初等函数

定义8 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算得到的且能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

注: 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数；对以上五类基本初等函数要熟悉其图形、性质及常用变形公式.

[例1]设函数$f(x)$的定义域为$(-l,l)$,证明必存在$(-l,l)$上的偶函数$g(x)$及奇函数$h(x)$,使得$f(x)=g(x)+h(x)$.

[例2]设$f(x)=\begin{cases}1,|x|<1\\0,|x|=1\\-1,|x|>1\end{cases}$,$g(x)=e^x$,求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

第二节　数列的极限

一、 数列极限的定义

引例 考查数列$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$的变化趋势.

定义1: 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.
则称常数a是数列$\{x_n\}$在$n\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.如果不存在这样的常数$a$,
则称数列$\{x_n\}$发散.

注:（1）定义中的ε是衡量x_n与a无限接近的一个标准,所以ε必须可以任意足够小;
（2）数列$\{x_n\}$是否有极限,如果有极限其极限值为多少,跟$\{x_n\}$的前有限项无关.

思考1:就数列$\{x_n\}$的$\varepsilon-N$定义回答下列问题：
（1）N是否唯一？（2）N是否与ε构成函数关系？

[例1]下列关于数列$\{x_n\}$的极限是a的定义,哪些是对的,哪些是错的？
如果是对的,试说明理由；如果是错的,试给出反例.
（2）对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N\in N_+$,当$n>N$时,有无穷多项x_n,使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立;
（3）对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N\in N_+$,当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<c\varepsilon$成立,其中c为某个正常数.

二、收敛数列的性质

性质1（极限的唯一性） 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

性质2（收敛数列的有界性） 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

性质3（收敛数列的保号性） 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),那么存在正整数$N$,当$n>N$时候,都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

推论 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\ge 0$(或$x_n\le 0$)，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,那么$a\ge 0$(或$a\le 0$)．

性质4（列与子列的关系） 如果$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

注: 在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原来数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列（或子列）.

第三节 函数的极限

以x_0为中心的任何开区间称为点x_0的邻域,记作$U(x_0)$;

在$U(x_0)$中去掉中心x_0后,称为点x_0的去心邻域,记作$\overset{\circ}{U}(x_0)$;

设$\delta>0$,称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点x_0的δ邻域,记作$U(x_0,\delta)$,

点x_0的去心δ邻域,记作$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$,这里$\delta$称为邻域半径.

一、 函数极限的定义

定义1： 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义,如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$，则称常数a是$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注: $f(x)$在x_0处的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$是否存在,与$f(x)$在$x_0$处是否有定义无关.

类似可定义$x\to x_0^+$和$x\to x_0^-$时的**单侧极限**$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

定理1: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

[例1] 设$f(x)=\begin{cases}x-1,x<0\\0,\quad x=0\\x+1,x>0\end{cases}$,证明:当$x\to 0$时$f(x)$的极限不存在.

定义2： 设函数$f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义,如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当x满足不等式$|x|>X$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$，则称常数a是$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

类似可定义$x \to +\infty$和$x \to -\infty$时的**单侧极限**$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

定理2:$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

二、函数极限的性质

性质1（函数极限的唯一性） 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,那么这极限唯一.

性质2（函数极限的局部有界性） 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,那么存在常数$M > 0$和$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有$|f(x)| \le M$.

性质3（函数极限的局部保号性） 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,且$a > 0$(或$a < 0$),那么存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

推论 如果在x_0的某去心邻域内$f(x) \ge 0$(或$f(x) \le 0$)，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,那么$a \ge 0$(或$a \le 0$).

性质4（函数极限与数列极限的关系） 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列,且$x_n \ne x_0$,那么相应的函数值数列$\{f\{x_n\}\}$必收敛,且$\lim\limits_{n \to \infty} f\{x_n\} = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

第四节 无穷小与无穷大

一、 无穷小

定义1: 如果函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$）时的极限为零, 那么称函数$f(x)$为当$x \to x_0$(或$x \to \infty$）时的无穷小.

定理1(无穷小与极限值的关系)：$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$,其中$\alpha$是无穷小.

注:(1)有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2）有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小;

(3)有限个无穷小的积仍是无穷小.

二、无穷大

定义2: 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义（或$|x|$大于某一正数时有定义）,如果对于任意给定的正数M(不论它多么大),总存在$\delta > 0$(或$X > 0$),对适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$(或$|x| > X$）的一切x,对应的函数值$f(x)$总满足不等式$|f(x)| > M$,那么称函数$f(x)$是当$x \to x_0$(或$x \to \infty$）时的无穷大.

定理2(无穷小与无穷小的关系)：在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq 0$,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

[例1]函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这个函数是否为$x\to+\infty$时候的无穷大？为什么？

[例2]证明:函数$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$内无界,但这函数不是否为$x\to 0^+$时的无穷大.

第五节　极限运算法则

定理1(四则运算法则)：如果$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,那么

$$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

$$\lim\left[f(x)g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

注：数列对应有以上运算法则.

[例1]下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的？如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出反例.

(1）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]$不存在；

(2）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]$不存在；

(3）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$不存在；

(4）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$不存在.

[例2]求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

[例3]($\dfrac{0}{0}$型）求（1）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$；　（$\dfrac{\infty}{\infty}$型）求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

[例4]($0\cdot\infty$型）求$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$；　（$\infty-\infty$型）求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

定理2(复合函数极限运算法则)：设$y=f\left[g(x)\right]$是由$y=f(u)$与$u=g(x)$复合而成,$f\left[g(x)\right]$在点x_0的某去心邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,而$y=f(u)$在$u=u_0$处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f\left[g(x)\right]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right]=f(u_0)$.

[例5]求$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

第六节　极限存在准则　两个重要极限

1.夹逼准则： 如果数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足以下条件：

（1）从某项起，即$\exists N>0$，当$n>N$时，有$x_n\le y_n\le z_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

则数列$\{y_n\}$有极限，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

注： 函数对应有以上夹逼准则.

2.单调有界准则： 若数列$\{x_n\}$单调增加，且有上界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在；

若数列$\{x_n\}$单调减少，且有下界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注： 函数对应有以上单调有界准则.

3.两个重要极限： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

4.幂指函数极限运算法则： 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$.

[例1]（1^∞型）求$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

[例2]求$\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

[例3]证明数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$极限存在，并求此极限.

第七节　无穷小的比较

1. 高阶、低阶、同阶、等价及阶的概念

设$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$，且$\alpha\ne0$

（1）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

（2）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$的低阶无穷小；

（3）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\ne0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小；

（4）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\ne0$，则称$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小；

（5）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等阶无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

注: 等价无穷小具有以下性质

(1) （自反性）$\alpha \sim \alpha$;

(2) （对称性）若$\alpha \sim \beta$,则$\beta \sim \alpha$;

(3) （传递性）若$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$,则$\alpha \sim \gamma$.

[例1]判断下列等式是否正确,并说明理由.($x \to 0$)

(1) $o\left(x^2\right) \pm o\left(x^2\right) = o\left(x^2\right)$;

(2) $o\left(x^2\right) \pm o\left(x^3\right) = o\left(x^2\right)$;

(3) $x^2 \cdot o\left(x^3\right) = o\left(x^5\right)$;

(4) $o\left(x^2\right) \cdot o\left(x^3\right) = o\left(x^5\right)$;

(5) $o\left(2x^2\right) = o\left(x^2\right)$.

2. 无穷小的有关基本定理

定理1: $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理2: 若$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$,则$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

注: 常用的等价无穷小有:$x \to 0$时,

$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,

$(1+\alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x, a^x - 1 \sim x \ln a$.

[例2]求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x}$.

[例3]求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x}$.

[例4]求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3}$.

[例5]求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.

[例6]设$f(x) = 2^x + 3^x - 2$,则当$x \to 0$时,有____.

(A) $f(x)$与x是等价无穷小　　(B) $f(x)$与x同价但非等价无穷小

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小　　(D) $f(x)$是比x低阶的无穷小

第八节　函数的连续性与间断点

一、 函数的连续性

定义1　设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义, 如果
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right]=0$,则称$f(x)$点$x_0$连续.

定义2　设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义, 如果
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$连续.

定义3　若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$左连续.

若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$右连续.

定义4　若$f(x)$在(a,b)内每一点都连续,则称$f(x)$在(a,b)内连续.
若$f(x)$在(a,b)内连续, 且在$x=a$处右连续, 在$x=b$处左连续, 则称$f(x)$在$[a,b]$上连续.

二、函数的间断点

设函数$y=f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义, 如果$f(x)$有下列三种情形之一:

（1）在$x=x_0$处没有定义；

（2）虽在$x=x_0$处有定义, 但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

（3）虽在$x=x_0$处有定义, 且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也存在, 但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f\left(x_0\right)$.

那么$f(x)$在点x_0处不连续, 点x_0称为$f\left(x\right)$的间断点.

三、间断点的分类

第一类间断点：左、右极限均存在的间断点

$\begin{cases}\text{可去间断点：左、右极限存在且相等的间断点；}\\ \text{跳跃间断点：左、右极限都存在但不相等的间断点.}\end{cases}$

第二类间断点：左、右极限中至少有一个不存在的间断点.

四、连续函数保号性

设$f\left(x\right)$在点x_0处连续,且$f\left(x_0\right)>0(<0)$,则$\exists x_0$的某个邻域,当$x\in U\left(x_0\right)$时,$f\left(x\right)>0(<0)$.

[例1]已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\cos x\right)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续,则$a=$____.

[例2] 设$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$, 则$x=0$是$f(x)$的____.

(A)可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)第二类间断点 (D)连续点

[例3] 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 求$f(x)$的间断点, 并说明间断点所属类型.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

1.连续函数的四则运算

设$f(x),g(x)$在点x_0处连续,

则$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x_0)\neq 0$时）都在点x_0处连续.

2.复合函数的连续性

设$u=g(x)$在点x_0处连续, $y=f(u)$在$u_0=g(x_0)$处连续,

则复合函数, $y=f[g(x)]$在点x_0处连续.

3.反函数的连续性

设$y=f(x)$在区间I_x上单调且连续,

则其反函数$x=\varphi(y)$在对应区间I_y上连续且有相同单调性.

二、初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的.

[例1] 设$f(x)$在R上连续, 且$f(x)\neq 0$, $\varphi(x)$在R上有定义, 且有间断点, 则下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的？如果是对的, 说明理由, 如果是错的, 给出反例.

（1）$\varphi[f(x)]$必有间断点；（2）$[\varphi(x)]^2$必有间断点；

（3）$f[\varphi(x)]$未必有间断点；（4）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

[例2] 设$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geq 0 \end{cases}$, 当$a$取何值, 函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是连续函数.

第十节　闭区间上连续函数的性质

一、有界性与最大值最小值定理

定理1（有界性与最大值最小值定理） 设$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，则$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上有界且能取到最大值与最小值.

定理2（零点定理） 设$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，且$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$ 则至少存在一点$\xi\in\left(a,b\right)$，使$f\left(\xi\right)=0$.

定理3（介值定理） 设$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，且$f\left(a\right)\neq f\left(b\right)$，则对于$f\left(a\right)$和$f\left(b\right)$之间的任何一个数$\mu$，至少存在一点$\xi\in\left(a,b\right)$，使$f\left(\xi\right)=\mu$.

[例1] 证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$\left(0,1\right)$内至少有一个根.

[例2] 设$f\left(x\right)$对于闭区间$\left[a,b\right]$上的任意两点x、y，恒有$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq L\left|x-y\right|$，其中$L$为正常数，且$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$.证明：至少存在一点$\xi\in\left(a,b\right)$，使$f\left(\xi\right)=0$.

[例3] 证明：若$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内连续，且$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)$存在，则$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内有界.

更一般结论：若$f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$内连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)$和$\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right)$都存在（不必相等），则$f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$内有界. 这里$a$可以是有限数也可以是$-\infty$，同理对$b$.

第二章　　导数与微分

第一节　导数概念

一 、导数的定义

定义1： $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$

注： $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

定义2： 右导数$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，左导数$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$

定理1： $f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=A.$

定理2： 若函数$y=f(x)$在$x=x_0$处可导, 则$y=f(x)$必在$x=x_0$处连续;反之不对.

定义3： 如果函数$f(x)$在区间I上每一点都可导（端点是指单侧可导），
则称$f(x)$在区间I上可导, 此时$f'(x)$依然是个函数,叫做原来函数$f(x)$的导函数.

[例1]设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(n\geq 2)$,则$f'(0)=$_____.

[例2]设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\leq 1\\ x^2,\quad x>1\end{cases}$,则$f(x)$在$x=1$处____.

(A)左、右导数都存在　　(B)左导数存在,右导数不存在

(C)左导数不存在,右导数存在　　(D)左、右导数都不存在

[例3]（1）设$f'(x_0)$存在,问$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$是否存在？

（2）设$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在,问$f'(a)$是否存在？

[例4]设$f(x)=\begin{cases}x^2,\qquad x\leq 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$,为了使$f(x)$在$x=1$处可导, 求$a,b$的值.

二 、导数的几何意义

$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$在表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处切线的斜率；

从而曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

[例5]设$f(x)$为偶函数,且$f'(0)$存在,证明：$f'(0)=0$.**更一般的结论：**

设$f(x)$是$(-a,a)$上的偶（奇）函数且可导,则$f'(x)$是$(-a,a)$上的奇（偶）函数；

设$f(x)$以T为周期且可导,则$f'(x)$也以T为周期.

[例6]设$f(x)$以5为周期的连续函数,在$x=0$的某邻域内满足$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$,

且$f(x)$在$x=1$处可导,求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

第二节　函数的求导法则

一 、常数和基本初等函数的导数公式

二、四则运算求导法则

设u,v均可导,则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$;

$(uv)'=u'v+uv'$;

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

三 、反函数求导法则

设$y=f(x)$在某区间单调可导且$f'(x)\neq 0$,则其反函数$x=\varphi(y)$在对应区间也可导,

且$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$,即$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

四 、复合函数求导法则

设$y=f(u),u=g(x)$都可导,则复合函数$y=f[g(x)]$也可导,且$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$,

即$y'=f'(u)\cdot g'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$.

[例1]求下列函数的导数：

（1）$y=\ln|x|$；　（2）$y=\ln|f(x)|$,其中$f(x)$可导,且$f(x)\neq 0$.

$\left[例2\right]$求$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$的导数.

$\left[例3\right]$求$y=x^{\sin x}\,(x>0)$的导数.

$\left[例4\right]$已知$f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x, \quad x\geq 0\end{cases}$,求$f'(x)$.

$\left[例5\right]$设函数$f(x)$和$g(x)$均在x_0的某一邻域有定义, $f(x)$在x_0处可导, $f(x_0)=0$,
且$g(x)$在x_0处连续,试讨论$f(x)g(x)$在x_0处的可导性.

$\left[例6\right]$设$f(x)$可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的____.

(A)充分必要条件　　(B)充分但非必要条件

(C)必要但非充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

第三节　高阶导数

一 、高阶导数的概念

函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$仍然是x的函数,称$f'(x)$的导数叫做函数$y=f(x)$的二阶导数,

记作y''或$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,即$y''=(y')'$或$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

一般地, $y=f(x)$的n阶导数就是$f(x)$的$n-1$阶导数的导数.

二 、高阶导数的求法

1.利用归纳法求高阶导

先逐一求出$y=f(x)$的一、二、三阶导数,若能观察出规律, 就可写出$y^{(n)}$的表达式.

2.利用分解法求高阶导

若$f(x)$可分解成$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,若知道$f_1^{(n)}(x)$和$f_2^{(n)}(x)$,则$f^{(n)}(x)=f_1^{(n)}(x)+f_2^{(n)}(x)$.

注: $\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=a^ne^{ax+b}$;$\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,$\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

$\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\dfrac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$,$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^na^n\dfrac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

3.利用莱布尼茨公式求乘积的高阶导

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(k)}v^{(n-k)}.$$

[例1] 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出: $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$.

[例2] 求下列函数的n阶导数：（1）$y=\sin^2 x$; （2）$y=\frac{1-x}{1+x}$.

[例3] 设$y=x^2e^{2x}$,求$y^{(20)}$.

第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一 、隐函数的导数

设$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数,为求y',
可在方程$F(x,y)=0$两端直接对x求导（注意$y=y(x)$),解除y'即可.

二 、由参数方程所确定的函数的导数

设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$所确定,$\varphi(t)$和$\phi(t)$均可导, 且$\varphi'(t)\neq 0$则$y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$.

[例1] 设$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$确定,求y'及$y''(0)$.

[例2] 求曲线$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点$\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$处的切线方程.

[例3] 设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$所确定, 求$y''$.

[例4] 已知椭圆的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$, 求椭圆在$t=\frac{\pi}{4}$相应点的切线方程.

第五节 函数的微分

一 、微分的定义

定义1: 若增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可以表示为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,
其中A是不依赖于Δx的常数,则称$y=f(x)$在$x=x_0$处可微,
$A\Delta x$称为$f(x)$在$x=x_0$处的微分, 记为dy,即$dy=A\Delta x$.

定理1: $y=f(x)$在$x=x_0$处可微$\Leftrightarrow y=f(x)$在$x=x_0$处可导,
且$y=f(x)$在$x=x_0$处可微时, 其微分$dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.
若x为自变量,规定$\Delta x=dx$,于是$y=f(x)$在$x=x_0$处的微分又可写成$dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$.

二 、微分的几何意义

$y=f\left(x\right)$在点x_0处的微分$dy=f'\left(x_0\right)dx$表示曲线$y=f\left(x\right)$的在点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$处切线的增量,近似等于曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$处的增量$\Delta y$.

[例1]回答下列问题:(1) $f\left(x\right)$在x_0处的微分是不是一个函数？（2）du与Δu是否相等？

[例2]求函数$y=x^3$当$x=2,\Delta x=0.02$时的微分.

[例3]设$y=e^{1-3x}\cos x$,求dy.

[例4]在下列等式左端括号中填入适当的函数,使等式成立.

(1) $d\left(\quad\right)=xdx$; （2）$d\left(\quad\right)=\cos\omega tdt$.

第三章　微分中值定理与导数的应用

第一节　微分中值定理

一、罗尔定理

费马引理　设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义, 并且在x_0处可导, 如果对于任意的$x\in U(x_0)$, 有$f(x)\le f(x_0)$（或$f(x)\ge f(x_0)$）, 那么$f'(x_0)=0$.

罗尔定理　如果函数$f(x)$满足（1）在闭区间$[a,b]$上连续；（2）在开区间(a,b)内可导；（3）在区间端点处的函数值相等, 即$f(a)=f(b)$, 那么在(a,b)内至少有一点ξ, 使$f'(\xi)=0$.

[例1]不用求出函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数, 说明方程$f'(x)=0$有几个实根, 并指出它们所在的区间.

[例2]若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x=x_0$, 证明方程$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$必有一个小于$x_0$的正根.

[例3]若函数$f(x)$在(a,b)内具有二阶导数, 且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中$a<x_1<x_2<x_3<b$, 证明: 在(x_1,x_3)内至少有一点ξ, 使$f''(\xi)=0$.

[例4]设$f(x)$在$[0,a]$上连续, 在$(0,a)$内可导, 且$f(a)=0$, 证明: $\exists\xi\in(0,a)$, 使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

二、拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理　如果函数$f(x)$满足（1）在闭区间$[a,b]$上连续；（2）在开区间(a,b)内可导；那么在(a,b)内至少有一点ξ, 使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

函数为常数的条件　如果函数$f(x)$在区间I上连续, I内可导且导数恒为0, 则$f(x)$在区间I上是一个常数.

[例5]证明恒等式: $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$（$-1\le x\le 1$）.

[例6]设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$, 求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

[例7]证明当$x>0$时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

[例8]设$a>b>0$, 证明: $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

三、柯西中值定理

柯西中值定理　如果函数$f\left(x\right)$及$F\left(x\right)$满足（1）在闭区间$\left[a,b\right]$上连续；
（2）在开区间$\left(a,b\right)$内可导；（3）对任一$x\in\left(a,b\right),F'\left(x\right)\neq 0,$
那么在$\left(a,b\right)$内至少有一点ξ,使$\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{F\left(b\right)-F\left(a\right)}=\dfrac{f'\left(\xi\right)}{F'\left(\xi\right)}.$

$\left[\text{例9}\right]$设$0<a<b$,函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续,在$\left(a,b\right)$内可导,试利用柯西中值定理,
证明:$\exists\xi\in\left(a,b\right)$,使$f\left(b\right)-f\left(a\right)=\xi f'\left(\xi\right)\ln\dfrac{b}{a}.$

第二节　洛必达法则

（1）$x\to a$时,函数$f\left(x\right)$及$F\left(x\right)$都趋于0（或∞）；
（2）在点a的某去心邻域内,$f'\left(x\right)$及$F'\left(x\right)$都存在且$F'\left(x\right)\neq 0$;
（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{F'\left(x\right)}$存在（或为无穷大),
则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{F\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{F'\left(x\right)}.$

注:（1）使用洛必达法则要注意检查条件,如$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$;

（2）若求导后的极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{F'\left(x\right)}$不存在也不为$\infty$,则法则失效；

（3）若求导后的极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{F'\left(x\right)}$仍然是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$,则可继续尝试使用洛必达法则；

（4）使用洛必达法则时应尽可能结合等价代换、重要极限、恒等变形等以简化运算.

$\left[\text{例1}\right]$求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}.$

$\left[\text{例2}\right]$求下列$\dfrac{0}{0}$型极限:（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}.$

$\left[\text{例3}\right]$求下列$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限:（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$（$n>0$）；　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$n,\lambda>0$）.

$\left[\text{例4}\right]$求下列$0\cdot\infty$和$\infty-\infty$型极限:（1）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln x$（$n>0$）；　（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec x-\tan x\right).$

$\left[\text{例5}\right]$求下列$0^0,\infty^0$及1^∞型极限:（1）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$;　（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.$

第三节　泰勒公式

一、泰勒公式

泰勒公式1　如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数,那么存在x_0的一个邻域,对于该邻域内任一x,有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$.

注:泰勒公式的唯一性　如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数,

且$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$,

则$a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2!},\cdots,a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

泰勒公式2　如果函数$f(x)$在x_0的一个邻域内具有$(n+1)$阶导数,那么对于该邻域内任一x,

有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

其中ξ介于x_0与x之间.

注:若取$x_0=0$,则上述泰勒公式分别又称**麦克劳林公式**.

二、几个重要函数的麦克劳林公式

$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$,

$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$,

$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$,

$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$,

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$.

[例1]求$f(x)=\tan x$的带有佩亚诺余项的3阶麦克劳林公式.

[例2]求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

[例3]求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln(1-x)\right]}$.

[例4]求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$.

[例5]求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导$f^{(n)}(0)$（$n\geq 3$）.

第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性

一、 函数单调性的判定法

定理1: 设函数$f(x)$在I上连续,在I上**除最多有限个点外**满足$f'(x)>0$（或$f'(x)<0$）,则函数$f(x)$在I上单调增加（单调减少）.

注: 只有驻点(导数为0的点)和不可导点才可能成为单调区间的分界点.

[例1]确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

[例2]证明:当$x>1$时,$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

[例3]证明:当$e<a<b<e^2$时,$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

[例4]讨论方程$\ln x=ax$（其中$a>0$）有几个实根？

二、曲线的凹凸性与拐点

定义1: 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 如果对$\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 且$x_1\neq x_2$时,
恒有$f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>(<)\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,则称$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸（凹）的.

定义2: 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 若对$\forall x,x_0\in(a,b)$且$x\neq x_0$时,
恒有$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)>(<)f(x)$,则称$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸（凹）的.

定理2: 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 在(a,b)内二阶可导, 若$f''(x)<0$（$f''(x)>0$）,
则称$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸（凹）的.

定义3: 连续曲线$f(x)$的凹与凸的分界点$(x_0,f(x_0))$称为曲线的拐点.

定理3（必要条件）: 若$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点,则$f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在.

定理4（第一判别法）: 设$f(x)$在x_0处连续,在x_0的某去心邻域二阶可导.

（1）若$f''(x)$在x_0两侧变号,则$\left(x_0, f(x_0)\right)$是拐点；

（2）若$f''(x)$在x_0两侧不变号,则$\left(x_0, f(x_0)\right)$不是拐点.

定理5（第二判别法）: 设$f(x)$在x_0处三阶可导,$f''(x_0)=0$.

（1）若$f'''(x_0)\neq 0$,则$\left(x_0, f(x_0)\right)$是拐点；

（2）若$f'''(x_0)=0$,则$\left(x_0, f(x_0)\right)$可能是拐点,也可能不是拐点.

[例5]求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间及拐点.

[例6]求$y=k\left(x^2-3\right)^2$中k的值,使曲线拐点处的法线通过原点.

[例7]设$f(x)$在(a,b)内二阶可导,且$f''(x)\geq 0$,证明对于(a,b)内任意两点x_1,x_2及$0\leq t\leq 1$,有$f\left[(1-t)x_1+tx_2\right]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

第五节　函数的极值与最大值最小值

一、 函数的极值及其求法

定义1: 设$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,如果对于该去心邻域内任一x,有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$）,那么称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值（或极小值）；相应的x_0称为函数$f(x)$的一个极大值点（或极小值点）.

注: 极值是一个局部（邻域）概念,极大不一定是最大,极小也不一定是最小.

定理1（必要条件）: 若x_0是函数$y=f(x)$的极值点,则$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

定理2（第一判别法）: 设$f(x)$在x_0处连续,在x_0的某去心邻域可导.

（1）若$f'(x)$在x_0两侧变号,则x_0是极值点,

且若$f'(x)$由正变负,x_0是极大值点,$f'(x)$由负变正,x_0是极小值点；

（2）若$f'(x)$在x_0两侧不变号,则x_0不是极值点.

定理3（第二判别法）: 设$f(x)$在x_0处二阶可导,$f'(x_0)=0$.

（1）若$f''(x_0)\neq 0$,则x_0是极值点,

且若$f''(x_0)>0$,x_0是极小值点,$f''(x_0)<0$,x_0是极大值点；

（2）若$f''(x_0)\neq 0$,则x_0可能是极值点,也可能不是极值点.

[例1]求函数$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$的极值.

[例2]已知函数$y(x)$由$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定,求$y(x)$的极值.

[例3]设函数$f(x)$在x_0处有n阶导数,且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$.
证明:(1）当n为奇数时,$f(x)$在x_0处不取极值；
(2）当n为偶数时,$f(x)$在x_0处取极值,且当$f^{(n)}(x_0)<0$时,$f(x_0)$为极大值,
当$f^{(n)}(x_0)>0$时,$f(x_0)$为极小值.

[例4]求函数$f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$的极值.

二、最大值最小值问题

求连续函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值的方法
第一步：求出$f(x)$在(a,b)内的所有驻点和不可导的点；
第二步：计算$f(x)$在上述驻点、不可导点和端点a,b处的函数值；
第三步：比较,其中最大的即为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值,
最小的即为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值.

注: 设连续函数$f(x)$在(a,b)内有唯一极值点x_0,若$x=x_0$是极大（小）值点,
则$f(x_0)$是$[a,b]$上的最大（小）值.

[例5]求函数$f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$在$[-3,4]$上的最大值与最小值.

[例6]设$a>1$, $f(x)=a^x-ax$在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$x(a)$.问a为何值时,$x(a)$最小？并求出最小值.

第六节　函数图形的描绘

1.铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow x=a$是铅直渐近线；

2.水平渐近线

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b \Leftrightarrow$ 当$x\to+\infty$时,$y=b$是水平渐近线；

3.斜渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b \Leftrightarrow$ 当$x\to+\infty$时,$y=kx+b$是斜渐近线.

注: 把2,3中的$x\to+\infty$改为$x\to-\infty$可得曲线$y=f(x)$在$x\to-\infty$时的水平或斜渐近线.

[例1]求曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的所有渐近线.

第七节　曲率

1.曲线由直角坐标方程$y=y(x)$给出,则曲率$K=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

2.曲线由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$给出,则曲率$K=\dfrac{|y''x'-y'x''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

3.曲率半径$R=\dfrac{1}{K}$.

[例1]对数曲线$y=\ln x$上哪一点处的曲率半径最小？并求出该点处的曲率半径.

第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质

一、　原函数与不定积分的概念

定义1: 如果在区间I上,某可导函数$F(x)$的导数为$f(x)$,即对$\forall x\in I$,有$F'(x)=f(x)$,那么称此$F(x)$为$f(x)$在区间I上的一个原函数.

定理1: 如果$f(x)$在区间I上连续,那么$f(x)$在区间I上必有原函数.

注: 虽然连续函数$f(x)$必有原函数,但其原函数未必都是可求的,

如$\int e^{\pm x^2}dx;\int\frac{\sin x}{x}dx;\int\frac{\cos x}{x}dx;\int\sin x^2dx;\int\cos x^2dx;\int\frac{1}{\ln x}dx$等.

定义2: $f(x)$在区间I上的所有原函数称为$f(x)$在区间I上的不定积分,记为$\int f(x)dx$,这里$f(x)$称为被积函数,且$\int f(x)dx=F(x)+C$,其中$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数.

二、　基本积分表

三、　不定积分的性质

1.$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$;

2.$\int F'(x)dx=F(x)+C$;

3.$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$;

4.$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$.

[例1] 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\ge 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$,讨论$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是否存在原函数?

[例2] 设$f(x)$在区间I上除$x=c$之外处处连续,$x=c$是$f(x)$的第一类间断点,则$f(x)$在该区间I上没有原函数.

[例3] 设$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数,则必有____.

(A) $F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数

(B) $F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数

(C) $F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数

(D) $F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数

第二节　换元积分法

第一类换元法： 设$\int f(x)dx=F(x)+C$,

则$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C.$

[例1]求不定积分（1）$\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}$;　（2）$\int\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

[例2]求不定积分$\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx.$

[例3]求不定积分$\int\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x\left(1+\cos xe^{\sin x}\right)}dx.$

第二类换元法： 设$x=\varphi(t)$单调、可导数且$\varphi'(t)\neq 0$,

则$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$,这里$t=\varphi^{-1}(x)$的是$x=\varphi(t)$的反函数.

注：（1）三角代换：$\sqrt{a^2-x^2}\to x=a\sin t,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,

$\sqrt{a^2+x^2}\to x=a\tan t,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,

$\sqrt{x^2-a^2}\to x=a\sec t,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}.$

（2）根式代换：被积函数含有$\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$等时，一般可直接令$\sqrt[n]{ax+b}=t,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t.$

（3）倒代换：被积函数分母的幂次比分子的幂次高两次及以上时，可考虑作倒带换$x=\frac{1}{t}.$

[例4]求不定积分$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx.$

[例5]求不定积分（1）$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$;　（2）$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

第三节　分部积分法

分部积分公式： $\int u dv = uv - \int v du.$

分部积分法适用的函数类——两类不同函数相乘作积分，如

(1) $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx; \int P_n(x) \sin \alpha x dx; \int P_n(x) \cos \alpha x dx;$

(2) $\int P_n(x) \ln x dx; \int P_n(x) \arcsin \alpha x dx; \int P_n(x) \arctan \alpha x dx;$

(3) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx; \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.$

[例1]（直接用分部积分）$\int x e^x dx.$

[例2]（多次用分部积分）$\int x^2 e^x dx.$

[例3]（循环积分）$\int e^x \sin x dx.$

[例4]（相消积分）$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx.$

第四节　有理函数的积分

设有真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，这里假设 $Q(x)$ 已被因式分解，则

（1）若分母 $Q(x)$ 中有一个因子 $(x-a)^n$，

则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解式中有 $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$；

（2）若分母 $Q(x)$ 中有一个因子 $(x^2+px+q)^n$（$p^2-4q<0$），

则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解式中有 $\frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2+px+q)^n}.$

[例1]求不定积分 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx.$

[例2]求不定积分：(1) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$；　(2) $\int \frac{1-x^2}{x^4+1} dx.$

第五章　　定积分

第一节　定积分的概念与性质

一、　定积分的定义

定义1: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,其中$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$, $f(x)$在$[a,b]$上存在定积分,也称$f(x)$在$[a,b]$上可积.

注:（1）定积分$\int_a^b f(x)dx$是积分和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限,这与区间$[a,b]$的分法及点$\xi_i$在小区间$[x_{i-1},x_i]$中的选取都是任意的；

（2）定积分$\int_a^b f(x)dx$的值与什么字母表示是无关的,如$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=\cdots$;

（3）改变被积函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上有限个点的函数值是不影响可积性及积分值的.

定理1: 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上可积；

定理2: 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

二、　定积分的几何意义

设$f(x)$在$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)dx$表示由曲线$y=f(x)$、两直线$x=a,x=b$及x轴围成的曲边梯形面积的代数和,当曲线$f(x)$在x轴上方时取正,在x轴下方时取负.

三、　定积分的性质

1.等式性质

（1）$\int_a^a f(x)dx=0,\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;

（2）$\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$;

（3）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

2.不等式性质（$b>a$）

（1）设$f(x)\le g(x)$,则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$;

（2）设$f(x)\ge 0$,则$\int_a^b f(x)dx\ge 0$;

（3）$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$;

（4）设$m\le f(x)\le M$,则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

3.积分中值定理： 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\exists\xi\in[a,b]$或$\xi\in(a,b)$,使$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

[例1]计算下列极限:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$;　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$($p>0$).

[例2]设$I=\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx$,则估计$I$值的大致范围为____.

$(A)0\le I\le\frac{\sqrt{2}}{10}$　$(B)\frac{\sqrt{2}}{10}\le I\le\frac{1}{5}$　$(C)\frac{1}{5}<I<1$　$(D)I\ge1$

第二节　微积分基本公式

一、　变上限积分函数及其导数

定义1: 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,$\forall x_0\in[a,b]$,则$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$($a\le x\le b$)称为变上限积分函数.

定理1: 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$在$[a,b]$上连续;

定理2: 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$在$[a,b]$上可导,且$F'(x)=\left(\int_{x_0}^{x}f(t)dt\right)'=f(x)$.

注:(1)设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$F(x)=\int_{x_0}^{\varphi(x)}f(t)dt$,则$F'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$;

(2)设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$F(x)=\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$,则$F'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)$.

[例1]设$f(x)$是连续的奇（偶）函数,证明:$F(x)=\int_0^x f(t)dt$是偶（奇）函数;
并进一步说明:连续的奇函数的所有原函数都是偶函数,而连续的偶函数的
所有原函数中只有一个是奇函数,即$\int_0^x f(t)dt$.

[例2]计算下列各导数:(1)$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$;　(2)$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;　(3)$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

[例3]设$f(x)$连续,计算下列各导数:(1)$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t^2-x^2)dt$;　(2)$\frac{d}{dx}\int_0^x(t^2-x^2)f(t)dt$.

[例4]求下列极限:(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$,其中$f(x)$连续;　(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

[例5]设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(x)>0$,$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$,$x\in[a,b]$.
证明:(1)$F'(x)\ge2$;　(2)方程$F(x)=0$在区间(a,b)内有且仅有一个根.

[例6]设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,证明:$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$

二、 牛顿—莱布尼茨公式

定理3: 若$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,则$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$

[例1]计算$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx.$

第三节 定积分的换元法和分部积分法

定理1: 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$x=\varphi(t)$满足:（1）$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b;$

（2）$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上具有连续导数,且$a\le\varphi(t)\le b$,则$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

[例1]计算定积分$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx.$

[例2]计算定积分$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx.$

[例3]证明:（1）若$f(x)$在$[-a,a]$上连续,则$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx;$

（2）若$f(x)$在$[-a,a]$上连续,则$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数}\\ 0, & f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$

（3）计算$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx;I_2=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$

[例4]设$f(x)$是连续函数,周期为T,证明:（1）则$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx;$

（2）$\int_a^{a+nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx;$

（3）计算$I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx.$

[例5]设$f(x)$在$[0,1]$上连续,证明:（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$

（2）$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx;$

（3）计算$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

[例6] 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, x\ge 0\end{cases}$,求定积分$\int_0^2 f(x-1)dx.$

定理2: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$

[例7] 计算$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx.$

[例8] 证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, n\text{是大于1的奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, \quad n\text{是偶数}\end{cases}.$

第四节　　反常积分

一、反常积分的概念

定义1: 设$F(x)$是$f(x)$在在相应区间上的一个原函数,

(1)$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$;

若上述极限存在,称反常积分收敛;否则称发散;

(2)$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$;

若上述极限存在,称反常积分收敛;否则称发散;

(3)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$

若右端积分都收敛,称反常积分收敛;否则称发散.

定义2: 设$F(x)$是$f(x)$在在相应区间上的一个原函数,

(1)若$x=a$是瑕点,则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$;

若上述极限存在,称反常积分收敛;否则称发散;

(2)若$x=b$是瑕点,则$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)$;

若上述极限存在,称反常积分收敛;否则称发散;

(3)若$c\in(a,b)$是瑕点,则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$;

若右端积分都收敛,称反常积分收敛;否则称发散.

二、几个重要结论

1.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}p>1,\text{收敛}\\p\le 1,\text{发散}\end{cases}$（$a>0$）；　2.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}\begin{cases}p>1,\text{收敛}\\p\le 1,\text{发散}\end{cases}$（$a>1$）；

3.$\int_a^{+\infty}x^k e^{-\lambda x}dx\begin{cases}\lambda>0,\text{收敛}\\\lambda\le 0,\text{发散}\end{cases}$（$k\ge 0$）；　4.$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$；5.$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}\begin{cases}p<1,\text{收敛}\\p\ge 1,\text{发散}\end{cases}$.

[例1]设$I(k)=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$,$k$为常数.

（1）证明:当$k>1$时,上述反常积分$I(k)$收敛;

（2）在（1）的情形下,k为何值时$I(k)$取到最小.

[例2]计算反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx$.

[例3]计算反常积分$\int_0^1\ln x dx$.

[例4]判断下列命题是否正确:（1）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且是奇函数,则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0$;

（2）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且是偶函数,又$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛,则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

第六章　定积分的应用

一、平面图形的面积

1.直角坐标

设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,则由曲线$y=f(x),y=g(x)$及直线$x=a,x=b$（$a<b$）围成平面图形的面积$A=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$;若$f(x)\geq g(x)$,则$A=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$;若$f(x)\geq 0,g(x)=0$,则$A=\int_a^b f(x)dx.$

2.极坐标

设$r_1(\theta),r_2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续,$r_1(\theta)\leq r_2(\theta)$,则由曲线$r=r_1(\theta),r=r_2(\theta)$及射线$r=\alpha,r=\beta$（$\alpha<\beta$）围成平面图形的面积$A=\frac{1}{2}\int_a^b\left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]d\theta$;若$r_1(\theta)=0,r_2(\theta)=r(\theta)$,则$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$

[例1]计算由两条抛物线$y^2=x$、$y=x^2$所围成的图形的面积.

[例2]计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

[例3]计算心形线$\rho=a(1+\cos\theta)$（$a>0$）围成图形的面积.

二、旋转体的体积

1.绕 x 轴旋转

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则由曲线$y=f(x)$,直线$x=a,x=b$及x轴围成的平面图形,绕x轴旋转一周产生的旋转体体积$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$

2.绕 y 轴旋转

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则由曲线$y=f(x)$,直线$x=a,x=b$及x轴围成的平面图形,绕y轴旋转一周产生的旋转体体积$V=2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx.$

[例4]计算由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$相应于$0\leq t\leq 2\pi$的一拱与直线$y=0$围成的图形分别绕$x$轴,$y$轴旋转而成的旋转体体积.

$\left[\text{例5}\right]$过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线,该切线与曲线$y=\ln x$及x轴围成平面图形D.

（1）求平面图形D的面积A;

（2）求平面图形D绕直线$x=e$旋转而成的体积V.

三、平面曲线的弧长

1.直角坐标

设连续曲线由$y=f\left(x\right)$（$a\le x\le b$）给出,则弧微分$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$;弧长$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

2.参数方程

设连续曲线由$\begin{cases}x=x\left(t\right)\\y=y\left(t\right)\end{cases}$（$\alpha\le t\le\beta$）给出,则弧微分$ds=\sqrt{{x_t'}^2+{y_t'}^2}dt$;弧长$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{{x_t'}^2+{y_t'}^2}dt$.

3.极坐标

设连续曲线由$r=r\left(\theta\right)$（$\alpha\le\theta\le\beta$）给出,则弧微分$ds=\sqrt{r^2\left(\theta\right)+r'^2\left(\theta\right)}d\theta$;弧长$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2\left(\theta\right)+r'^2\left(\theta\right)}d\theta$.

$\left[\text{例6}\right]$计算曲线$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$a\le x\le b$的弧长.

$\left[\text{例7}\right]$计算星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$的全长.

$\left[\text{例8}\right]$求阿基米德螺线$\rho=a\theta$（$a>0$）相应于$0\le\theta\le2\pi$的弧长.

第七章　　微分方程

第一节　微分方程的基本概念

一、　微分方程和它的阶

凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程, 叫做微分方程;
微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 叫做微分方程的阶.

二、微分方程的解和它的通解及特解

若把某函数及其导数带入微分方程能使该方程成为恒等式, 则称该函数为微分方程的一个解;
含有与微分方程的阶数相同个数的独立任意常数的解, 称为微分方程的通解;
不含任意常数的解, 称为微分方程的特解.

三、初始条件

能确定通解中任意常数的条件称为初始条件, 一般地以x为自变量, y为未知函数的一阶微分方程$F(x,y,y')=0$的初始条件为$y(x_0)=y_0$, 二阶微分方程$F(x,y,y',y'')=0$的初始条件为$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1$.

第二节　　一阶微分方程求解

一、可分离变量的微分方程

形如$g(y)dy=f(x)dx$的方程称为可分离变量的微分方程.

解法: $g(y)dy=f(x)dx$两端直接积分$\Rightarrow \int g(y)dy=\int f(x)dx \Rightarrow G(y)=F(x)+C$.

二、齐次方程

形如$\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$的方程称为齐次方程.

解法: 令$u=\dfrac{y}{x}$换元, 齐次方程化成可分离变量的微分方程.

三、一阶线性微分方程

形如$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的方程称为一阶线性微分方程,

当$Q(x)=0$时, 称为一阶线性齐次微分方程; 当$Q(x)\neq 0$时, 称为一阶线性非齐次微分方程.

解法: 背公式$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$.

四、伯努利方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}$（$n\neq 0,1$）的方程称为伯努利方程.

解法:方程两端先同乘y^{-n},再作$z=y^{1-n}$换元,最后化为一阶线性方程.

[例1]求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

[例2]求微分方程$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$的通解.

[例3]求微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解.

[例4]求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$的通解.

[例5]求微分方程$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$的通解.

第三节　高阶微分方程求解

一、　高阶可降阶微分方程

1.$y^{(n)}=f(x)$型

解法:两端直接作n次积分.

2.$y''=f(x,y')$型

解法:令$y'=p$,则$y''=p'$,带入原方程化为一阶方程.

3.$y''=f(y,y')$型

解法:令$y'=p$,则$y''=p\frac{dp}{dy}$,带入原方程化为一阶方程.

[例1]求微分方程$yy''-y'^2$的通解.

二、高阶线性微分方程解的性质及结构

定理1:设y_1和y_2是$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的两个无关解,

则$Y=C_1y_1+C_2y_2$是该齐次方程的通解,C_1,C_2是任意常数.

定理2：设y^*是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的一个特解，Y是对应齐次方程的通解，则$y=Y+y^*$是该非齐次方程的通解.

定理3：设$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$，其中$y_1^*$是对应$f_1(x)$的特解，$y_2^*$是对应$f_2(x)$的特解，则$y_1^*+y_2^*$是该非齐次方程的特解.

定理4：设y_1^*, y_2^*都是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的特解，则$y_1^*-y_2^*$是对应齐次方程的解.

[例2]已知$y=1, y=x, y=x^2$是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为____.

三、 二阶常系数齐次线性微分方程

形如$y''+py'+qy=0$的方程称为二阶齐次线性微分方程.

解法：写出特征方程$r^2+pr+q=0$

（1）特征方程有两不等实根$r_1\neq r_2 \Rightarrow$ 通解$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

（2）特征方程有两相等实根$r_1=r_2 \Rightarrow$ 通解$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；

（3）特征方程有两一对虚根$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i \Rightarrow$ 通解$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

[例3]求微分方程$y''-2y'+5y=0$的通解.

[例4]求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程：

（1）$(x+C)^2+y^2=1$（其中C是任意常数）；

（2）$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$（其中C_1, C_2是任意常数）.

四、 二阶常系数非齐次线性微分方程

形如$y''+py'+qy=f(x)$的方程称为二阶非齐次线性微分方程.

（1）$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

$\Rightarrow$ 特解$y^*=e^{\lambda x}R_m(x)x^k$，

其中$R_m(x)$是m次一般多项式，$k=\begin{cases}0, \lambda\text{不是特征方程的根}\\ 1, \lambda\text{是特征方程的单根}\\ 2, \lambda\text{是特征方程的重根}\end{cases}$；

（2）$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$

$\Rightarrow$ 特解$y^*=e^{\lambda x}\left[R_l^1(x)(x)\cos\omega x+R_l^2(x)\sin\omega x\right]x^k, l=\max\{m,n\}$，

其中$R_l^1(x), R_l^2(x)$是两个不同的m次一般多项式，$k=\begin{cases}0, \lambda\pm\omega i\text{不是特征根}\\ 1, \lambda\pm\omega i\text{是特征根}\end{cases}$

$\left[\text{例}5\right]$求微分方程$y''-2y'-3y=3x+1$的一个特解.

$\left[\text{例}6\right]$求微分方程$y''+y=x\cos 2x$的一个特解.

$\left[\text{例}7\right]$设$\varphi\left(x\right)$连续,且满足$\varphi\left(x\right)=e^{x}+\int_{0}^{x}t\varphi\left(t\right)dt-x\int_{0}^{x}\varphi\left(t\right)dt$,求$\varphi\left(x\right)$.

五、 欧拉方程

形如$x^{2}y''+axy'+by=f\left(x\right)$的方程称为二阶欧拉方程.

解法:令$x=e^{t}$（$x>0$）或$x=-e^{t}$（$x<0$）换元,化为二阶常系数方程.

高等数学（下）零基础教材课精讲

主讲：高昆轮

第八章　向量代数与空间解析几何（仅数一）

第一节　向量及其线性运算

一、　向量的概念与向量的坐标表示

1.向量的概念

定义1: 既有大小,又有方向的量称为**向量**, 记为$\vec{\alpha}$或$\overrightarrow{AB}$.

用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量,线段的长度$\left|\overrightarrow{AB}\right|$表示向量的大小,又称向量的长度或**模**,

大小相等方向相同的两个向量称为**相等**,

模等于1的向量称为**单位向量**, 模等于0 的向量称为**零向量**.

2.向量的坐标表示

在空间直角坐标系$Oxyz$中, 若$\vec{\alpha}=\overrightarrow{OM}$,点$M$的坐标$(x,y,z)$称为$\vec{\alpha}$的坐标,记为$\vec{\alpha}=(x,y,z)$.

设$\vec{\alpha}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则$\vec{\alpha}=\vec{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$.

3.向量的模与方向余弦

在空间直角坐标系$Oxyz$中, 称$\vec{\alpha}$与三个坐标轴x,y,z轴的夹角α,β,γ为$\vec{\alpha}$的**方向角**.

设$\vec{\alpha}=(x,y,z)$,则$\vec{\alpha}$的模$\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;$\vec{\alpha}$的**方向余弦** $\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\vec{\alpha}\right|},\cos\beta=\dfrac{y}{\left|\vec{\alpha}\right|},\cos\gamma=\dfrac{z}{\left|\vec{\alpha}\right|}$.

二、　向量的线性运算

设$\vec{\alpha}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

加法: $\vec{\alpha}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$,**数乘:** $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

向量的加法与数乘有以下性质:$\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{\alpha},\quad(\vec{\alpha}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a},\quad(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a},\quad\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

[例1]已知两点$M_1=(2,2,\sqrt{2})$和$M_2=(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

第二节 数量积 向量积 混合积

一、两向量的数量积

1.几何表示：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；

2.代数表示：设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；

3.运算规律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$，$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

4.应用：（判定两向量垂直）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

二、两向量的向量积

1.几何表示：$\vec{a}\times\vec{b}$是一个向量.

模：$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；方向：$\vec{a}\times\vec{b}$同时垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$.

2.代数表示：设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$；

3.运算规律：$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$，$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$，$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$；

4.应用：（判定两向量平行）$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

[例1] 设$M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$和$M_3(3,1,3)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

三、混合积

1.定义：称$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$为三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的混合积，记为$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

2.运算规律：$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{b}\vec{c}\vec{a})=(\vec{c}\vec{a}\vec{b})$，$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b})=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$；

4.应用：（判定三向量共面）$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

第三节　平面及其方程

一、建立平面方程

基本点：平面由一个定点与法向量确定，与平面垂直的向量称为它的法向量.

1.平面的点法式方程

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$

这里(x_0,y_0,z_0)为平面上一定点，$\vec{n}=(A,B,C)$为平面的法向量.

2.平面的一般式方程

$Ax+By+Cz+D=0,$这里$\vec{n}=(A,B,C)$为平面的法向量.

3.平面的截距式方程

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$这里$a,b,c$分别为平面在三个坐标轴上的截距且均不为0.

二、 平面与平面的位置关系

[例1]求过三点$M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$和$M_3(0,2,3)$的平面方程.

[例2]一平面通过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$且垂直于平面$x+y+z=0$,求它的方程.

第四节　空间直线及其方程

一、 建立空间直线方程

基本点：空间直线由一个定点与方向向量确定，与直线平行的非零向量称为它的方向向量.

1.空间直线的点向式方程

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，这里$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一定点，$\vec{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量.

2.空间直线的参数式方程

$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$，这里$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一定点，$\vec{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量.

3.空间直线的一般式方程

$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，这里的直线为两个平面的交线，方向向量$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$.

二 、空间直线与空间直线、平面与空间直线的位置关系

三、一组距离公式

1.两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$的距离$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$；

2.点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$；

3.点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到空间直线$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$的距离$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$，

这里P是直线上任一点，$\vec{s}=$（m,n,p）是直线的方向向量.

[例1]用点向式及参数方程表示直线$\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}$.

[例2]求过点$(1,-2,4)$且垂直于平面$2x-3y+z-4=0$的直线方程.

[例3]求与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行且过点$(-3,2,5)$的直线方程.

第五节　曲面及其方程

一、　曲面的方程

三元方程$F\left(x,y,z\right)=0$在空间表示一张曲面S,叫做曲面的一般式.

二、　旋转曲面

1.旋转曲面的概念

定义1: 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线和定直线分别叫做旋转曲面的母线和轴.

2.建立旋转曲面方程

1. 设yoz坐标面上的一条曲线$L:\begin{cases} f\left(y,z\right)=0 \\ x=0 \end{cases}$,

绕z轴旋转一周所得旋转曲面方程为:$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$;

绕y轴旋转一周所得旋转曲面方程为:$f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$

[例1]将xoz面上的曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$分别绕$z$轴和$x$轴旋转一周,求所生成的旋转曲面方程.

三、　柱面

1.柱面的概念

定义2: 平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L形成的轨迹叫做柱面,定曲线C叫做柱面的准线,动直线L叫做柱面的母线.

2.建立柱面方程

方程$F\left(x,y\right)=0$在空间中表示柱面,它的母线平行于z轴,准线是xoy面上的曲线$\begin{cases} F\left(x,y\right)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

三、二次曲面

第六节　空间曲线及其方程

一、　空间曲线的方程

方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在空间表示一条曲线$C$,叫做空间曲线的一般式.

方程组$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$在空间表示一条曲线$C$,叫做空间曲线的参数式.

二、　空间曲线在坐标面上的投影

设由空间曲线$C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,

在此方程组中消去z得$H(x,y)=0$,它表示空间曲线C关于xoy面的投影柱面,

若在令$z=0$,即$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$表示空间曲线$C$在$xoy$面上的投影.

[例1]求上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$围成的立体在xoy面上的投影.

第九章　　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

一、二维邻域的概念

设$P_0(x_0,y_0)$是xoy平面上的一个点,δ是某一正数,

与点$P_0(x_0,y_0)$距离小于δ的点$P(x,y)$的全体,称为点P_0的δ**邻域**,记作$U(P_0,\delta)$,

即$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$.

点P_0的δ**去心邻域**,记作$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$,即$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$.

二、二元函数的概念

定义1: 设有三个变量x,y,z,变量x,y的变化域为D,若对D中每一点$P(x,y)$,

按照某一对应规则f,变量z都有唯一确定的一个值与之对应,

则称变量z是变量x,y的二元函数,记作$z=f(x,y)$.

这里x,y称为自变量,D称为定义域,z称为因变量（函数值）.

注: 二元函数$z=f(x,y)$的图形是一张曲面.

三、多元函数的极限

定义2: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A\Leftrightarrow f(x,y)\to A\ \ ((x,y)\to(x_0,y_0))$.

定理: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A\Leftrightarrow f(x,y)=A\ +\alpha$,其中$\alpha\to 0((x,y)\to(x_0,y_0))$.

注: 1. 二元函数中$(x,y)\to(x_0,y_0)$是指的沿任意路径方式;

2. 除洛必达法则、单调有界准则外其余求极限的方法适用于二重极限;

3.要会用不同的路径或某一特殊的路径说明二元函数极限不存在.

[例1]求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.　　[例2]求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.　　[例3]求$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\dfrac{x+y}{xy}$.

[例4]求:(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;　(2))$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　(3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$.

四、多元函数的连续性

定义3： 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

注： 1. 二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处若不连续是不讨论其间断点类型的；

2.二元连续函数具有与一元连续函数相同的运算结论；

（二元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）或复合仍连续）

3.二元连续函数具有与一元连续函数在闭区间相同的基本定理；

（有界性与最大值最小值定理、介值定理）

第二节　　偏导数

一、 偏导数的定义及其几何意义

1.偏导数的定义

定义1： $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$.

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

[例1] 求 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数.

[例2] 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x'(x,1)$.

[例3] 讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的连续性与可偏导性：

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$；（2）$f(x,y)=|x|+|y|$.

2.偏导数的几何意义

$f_x'(x_0,y_0)$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率；

$f_y(x_0,y_0)$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率.

[例4] 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线对 x 轴的倾角是多少？

二、高阶偏导数

设$z=f(x,y)$在区域D内具有偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$,在$D$内$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$均是$x,y$的函数,如果这两个函数的偏导数也存在,称它们是$z=f(x,y)$的二阶偏导数.

按照对变量求导次序的不同,二阶偏导数有以下四个:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

其中$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$称为混合偏导数.

定理1: 若$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在在点$(x_0,y_0)$处连续,

则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

[例5] 验证函数$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程:$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

[例6] 设$z=f(x,y)$在全平面有连续的偏导数,且$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$,求$f(x,y)$.

第三节　　全微分

一、全微分的定义

定义1: 设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域有定义，若全增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$可表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，其中$A$和$B$是不依赖于$\Delta x$和$\Delta y$的常数，则称$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微，而$A\Delta x+B\Delta y$称为$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的微分，记为$dz\big|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y.$

二、可微的必要条件与充分条件

1.必要条件

若$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则

（1）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；

（2）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可偏导，且$dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\Delta y=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}dy.$

2.充分条件

若$z=f(x,y)$的两个偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$都在点$(x_0,y_0)$处连续，则$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微.

[例1] 计算函数$z=x^2y+y^2$的全微分.

[例2] 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点是否可微.

[例3] 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点是否可微.

[例4] 设$u=u(x,y)$满足$du=(4x^3+10xy^3-3y^4)dx+(15x^2y^2-12xy^3+5y^4)dy$，求$u(x,y)$.

[**注:** 若$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，称$u(x,y)$为$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$的原函数.]

第四节　多元复合函数的求导法则

一、　链式求导法则

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$在点(x,y)处有对x,y的偏导数,$z=f(u,v)$在对应点可微,则复合函数$z=f(u(x,y),v(x,y))$对x,y的偏导数存在,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

[例1]设$w=f(x+y+z,xyz)$, f具有二阶连续偏导数, 求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$及$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

[例2]设$z=f(u,x,y),u=xe^y$, f具有二阶连续偏导数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[例3]用变换$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$可把方程$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,求$a$值,其中$z$有二阶连续偏导数.

第五节　　隐函数的求导公式

一、一个方程的情形

隐函数存在定理1　设$F(x,y)$有连续一阶偏导数,且$F_y'\neq 0$,则方程$F(x,y)=0$确定$y=y(x)$,且$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$.

隐函数存在定理2设$F(x,y,z)$有连续一阶偏导数,且$F_z'\neq 0$,则方程$F(x,y,z)=0$确定$z=z(x,y)$,且$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$.

二、方程组情形（仅数一）

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$有方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定,

在方程两端直接对x求偏导, 有$\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

$\left[\text{例1}\right]$验证方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$附近能确定函数$y=y(x)$,并求$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$和$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

$\left[\text{例2}\right]$设$x^2+y^2+z^2-4z=0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.　　$\left[\text{例3}\right]$设$\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$.

$\left[\text{例4}\right]$设$\varphi(u,v)$具有连续偏导数,证明由方程$\varphi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的函数$z=f(x,y)$满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

$\left[\text{例5}\right]$设$y=f(x,t)$,而$t=t(x,y)$是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的函数,其中f,F都具有一阶连续偏导数,求$\frac{dy}{dx}$.

第六节　多元函数微分学的几何应用（仅数一）

一、　曲面的切平面与法线

曲面Σ以隐式给出:$F(x,y,z)=0$,法向量$\vec{n}=\left(F_x',F_y',F_z'\right)$;

曲面Σ以显示给出:$z=f(x,y)$,法向量$\vec{n}=\left(f_x',f_y',-1\right)$.

$\left[\text{例1}\right]$求曲面$x^2+y^2+z^2=14$在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.

$\left[\text{例2}\right]$求曲面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的切平面及法线方程.

二、空间曲线的切线与法平面

空间曲线L以参数形式给出:$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases},\alpha\le t\le\beta$,切向量$\vec{\tau}=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$;

空间曲线L以一般式给出:$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,切向量$\vec{\tau}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$.

$\left[\text{例3}\right]$求曲线$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

$\left[\text{例4}\right]$求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程.

第七节　　方向导数与梯度（仅数一）

一、方向导数的定义

定义1: 二元函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿着方向$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$.

二、方向导数的存在性及计算

若$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微,则$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$沿任一方向的方向导数都存在,且$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$,其中$\cos\alpha,\cos\beta$是方向$l$的方向余弦.

[例1]求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向导数.

三、梯度

定义2: $grad f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\vec{i}+f_y'(x_0,y_0)\vec{j}$.

方向导数与梯度向量的关系:

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=\left(f'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$=grad f(x_0,y_0)\cdot\vec{l^0}=\left|grad f(x_0,y_0)\right|\cos\theta,\text{其中}\theta\text{是}grad f(x_0,y_0)\text{与}\vec{l^0}\text{的夹角}.$$

[例2]求$grad\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

[例3]设$f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$,$P_0(1,1)$,求:

（1）$f(x,y)$在P_0处增加最快的方向以及$f(x,y)$沿这个方向的方向导数;

（2）$f(x,y)$在P_0处减少最快的方向以及$f(x,y)$沿这个方向的方向导数;

（3）$f(x,y)$在P_0处变化率为零的方向.

第八节　多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

定义1: 设$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义, 对该邻域内任何异于$P_0(x_0,y_0)$的点(x,y), 有$f(x,y)<(>)f(x_0,y_0)$, 则称$P_0(x_0,y_0)$是$f(x,y)$的极大（小）值点.

[例1]已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续, 且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,

则下列说法正确的是____.

(A)点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D)根据所给条件无法判断$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

二、极值的必要条件和充分条件

1.必要条件

设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处具有偏导数, 且在(x_0,y_0)处取极值, 则$f_x'(x_0,y_0)=0,\ f_y'(x_0,y_0)=0$.

2.充分条件

设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的某邻域内有二阶连续偏导数, 且$f_x'(x_0,y_0)=0,\ f_y'(x_0,y_0)=0$, 记$f_{xx}''(x_0,y_0)=A$, $f_{xy}''(x_0,y_0)=B$, $f_{yy}''(x_0,y_0)=C$, 则

（1）若$B^2-AC<0$, 则(x_0,y_0)是$f(x,y)$的极值点, 且

$A>0$时, (x_0,y_0)为$f(x,y)$的极小值点；$A<0$时, (x_0,y_0)为$f(x,y)$的极大值点.

（2）若$B^2-AC>0$, 则(x_0,y_0)不是$f(x,y)$的极值点.

（3）若$B^2-AC=0$, 则(x_0,y_0)可能是也可能不是$f(x,y)$的极值点.

[例2]求$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

[例3]设$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$确定, 求$z=z(x,y)$的极值.

三、条件最值

求$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的最值

（1）构造拉格朗日函数$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

（2）列方程组$\begin{cases}F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0\\F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0\\F_\lambda'=\varphi(x,y)=0\end{cases}$，

（3）解上述方程组，

（4）根据实际问题,所得即所求.

上述方法可推广求$z=f(x,y,z)$在一个条件$\varphi(x,y,z)=0$

或两个条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\\phi(x,y,z)=0\end{cases}$下的最值.

构造$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$

或$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\phi(x,y,z)=0.$

[例4]求$u=xyz$在条件$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}(x,y,z,a>0)$下的最值.

四、连续函数在闭区间上的最大值最小值

以二元函数为例:求连续函数$z=f(x,y)$在有界闭区域D上的最值

（1）求$f(x,y)$在D内部的偏导数为零和偏导数不存在的点，

（2）求$f(x,y)$在D的边界上的最值点，

（3）比较上述各函数值的大小, 最大的为最大值, 最小的为最小值.

[例5]设有一圆板占有平面闭区域$D:x^2+y^2\le 1$,该圆板被加热,

以致在点(x,y)的温度是$T=x^2+2y^2-x$.求该圆板的最热点和最冷点.

第十章　　重积分

第一节　　二重积分的概念与性质

一、　二重积分的概念及其几何意义

1.二重积分的概念

定义1: $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$,其中$\lambda$表示最大小区域$\Delta\sigma_i$的直径.

$f(x,y)$在D上存在二重积分,也称$f(x,y)$在D上可积.

2.二重积分的几何意义

若$f(x,y)\geq 0$,则$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$表示以曲面$z=f(x,y)$为顶,以区域$D$为底,侧面是柱面的曲顶柱体的体积.

二、二重积分的性质

1.等式性质

(1)$\iint\limits_{D} 1d\sigma=A_D$;

(2)$\iint\limits_{D}\left[k_1f(x,y)+k_2g(x,y)\right]d\sigma=k_1\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma+k_2\iint\limits_{D} g(x,y)d\sigma$;

(3)$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma,D_1\cup D_2=D,D_1\cap D_2=\Phi$;

2.不等式性质

(1)在D上,若$f(x,y)\leq g(x,y)$,则$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\leq\iint\limits_{D} g(x,y)d\sigma$;

(2)$\left|\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\right|\leq\iint\limits_{D}\left|f(x,y)\right|d\sigma$;

(3)在D上,若$m\leq f(x,y)\leq M$,则$m\cdot A_D\leq\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\leq M\cdot A_D$;

3.中值定理

设$f(x,y)$在D上连续,则存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot A_D$.

三、二重积分的对称性

1.普通对称性

设D关于y轴对称,D_1是D在$x \ge 0$的部分,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{对}x\text{是偶函数} \\ 0, & f(x,y)\text{对}x\text{是奇函数} \end{cases};$$

设D关于x轴对称,D_1是D在$y \ge 0$的部分,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{对}y\text{是偶函数} \\ 0, & f(x,y)\text{对}y\text{是奇函数} \end{cases}.$$

2.轮换对称性

若D关于直线$y = x$对称,则$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma.$

[例1] 设有平面闭区域$D: -a \le x \le a, x \le y \le a, D_1: 0 \le x \le a, x \le y \le a,$

则$\iint_D (xy + \cos x \sin y)dxdy =$ ____

$(A)\ 2\iint_{D_1} \cos x \sin y dxdy$ $(B)\ 2\iint_{D_1} xydxdy$ $(C)\ 4\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y)dxdy$ $(D)\ 0$

[例2] 设$f(x,y), f(y,x)$都在D上可积,D关于直线$y = x$对称,证明:

(1)$\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma = \iint_{D_2} f(y,x)d\sigma$,其中$D_1, D_2$分别为$D$在$y = x$的上方与下方部分;

(2)$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma.$

第二节　　二重积分的计算法

一、　利用直角坐标计算二重积分

1. 若$D: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.（1）

2. 若$D: c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$.（2）

公式的特点：公式（1）和（2）都是将二重积分化为累次积分，
不同的是前者是先对y积分后对x积分，后者是先对x积分后对y积分.
区域的特点：公式（1）中区域D的特点是，
穿过D内与y轴平行的直线交D的边界不多于两点，是适宜先对y积分后对x积分的区域；
公式（2）中区域D的特点是，
穿过D内与x轴平行的直线交D的边界不多于两点，是适宜先对x积分后对y积分的区域.
积分限的特点：每个单积分总是上限$\ge$下限，
后积分的积分线是常数，先积分的积分限是后积分变量的函数.

[例1]计算$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$，其中$D$是由直线$y=x, x=-1$和$y=1$围成的闭区域.

[例2]计算$\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中$D$是由抛物线$y^2=x$及直线$y=x-2$所围成的闭区域.

二、 利用极坐标计算二重积分

若D是适合极坐标表示，即$D: \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$，
则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$.

注：被积函数形如$x^m y^n f(x^2+y^2)$或$x^m y^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$或$x^m y^n f\left(\dfrac{x}{y}\right)$，
且积分区域为圆域、环域、扇形时使用极坐标比较方便.

[例3]计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma$，其中$D$是由圆心在原点、半径为$a$的圆周所围成的闭区域.

[例4]计算二重积分$\iint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy$，其中$D: x^2+y^2 \le R^2$.

[例5] 计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$, 其中 D 是由曲线 $x^2+y^2=2x+2y-1$ 所围成的闭区域.

[例6] 交换下列二次积分的次序：

(1) $\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)dx$; (2) $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

[例7] 化下列的二次积分为极坐标下的二次积分：

(1) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$; (3) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

[例8] 计算下列二次积分 (1) $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$____; (2) $\int_0^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy=$____.

第三节 三重积分（仅数一）

一、 三重积分的概念与物理意义

1. 三重积分的概念

定义1: $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta v_i$, 其中 λ 表示最大小区域 Δv_i 的直径.

$f(x,y,z)$ 在 Ω 上存在三重积分, 也称 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积.

2. 三重积分的物理意义

若物体占据空间区域 Ω, 其体密度为 $f(x,y,z)$, 则在它的质量 $m=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$.

二、三重积分的性质（类比二重积分）

三、三重积分的对称性

1.普通对称性

设 Ω 关于 yoz 面对称, Ω_1 是 Ω 在 yoz 前面的部分, 则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)\text{对}x\text{是偶函数}\\ 0, & f(x,y,z)\text{对}x\text{是奇函数}\end{cases}.$$

若 Ω 关于 xoy 面或 xoz 面对称, 有类似的结论.

2.轮换对称性

若把x,y对调Ω不变，则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dv.$

[例1]设$\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0;\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0;$
则以下正确的是____.

$(A)\iiint\limits_{\Omega_1} xdv=4\iiint\limits_{\Omega_2} xdv$　　$(B)\iiint\limits_{\Omega_1} ydv=4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

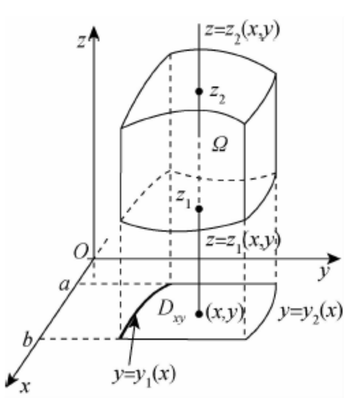
$(C)\iiint\limits_{\Omega_1} zdv=4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$　　$(D)\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

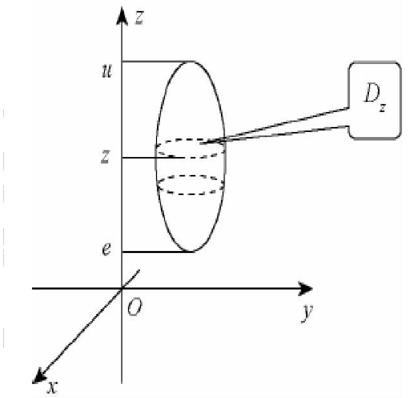
四、三重积分的计算

1.利用直角坐标

1.若$\Omega: z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz;$

2.若$\Omega: \alpha\le z\le \beta,(x,y)\in D_z$，则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\alpha}^{\beta} dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dz.$





[例2]计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

[例3]计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中$\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$

2.利用柱面坐标

(1) 柱坐标

$M(x,y,z)$为空间中的点，它在xoy面上投影点P的极坐标为r,θ，称(r,θ,z)为点M的柱面坐标；
规定r,θ,z的变化范围为：$0\le r<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty.$
直角坐标与柱坐标的关系：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z.$

(2) 柱坐标下的三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz.$$

注: 被积函数如$x^m y^n z^l f\left(x^2+y^2\right)$或$x^m y^n z^l f\left(x^2+z^2\right)$或$x^m y^n z^l f\left(y^2+z^2\right)$,

且Ω是旋转体, 如柱体、锥体、旋转抛物体时优选柱坐标.

[例4] 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$,其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的闭区域.

3. 利用球面坐标

(1) 球坐标

$M(x,y,z)$为空间中的点, M到原点O的距离为r,

原点O与M在xoy面上投影点P的有向线段$\overrightarrow{OP}$与x轴正向夹角为θ,

原点O与M的有向线段$\overrightarrow{OM}$与z轴正向夹角为φ,

称数组(r,θ,φ)为点M的球面坐标;

规定r,θ,φ的变化范围为: $0\le r<+\infty,0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le2\pi$.

直角坐标与柱坐标的关系: $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$.

(2) 球坐标下的三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

注: 被积函数如$x^m y^n z^l f\left(x^2+y^2+z^2\right)$, 且$\Omega$是球体、锥体时优选球坐标.

[例5] 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv$, 其中$\Omega$由球面: $x^2+y^2+z^2=1$所确定;

(2) $\iiint\limits_{\Omega} zdv$, 其中$\Omega$由不等式$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$, $x^2+y^2\le z^2$所确定.

第十一章　　曲线积分与曲面积分

第一节　　对弧长的曲线积分

一、　对弧长的曲线积分的概念与性质

1.对弧长的曲线积分的定义

定义1: $\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$, 其中$\lambda=\max\{\Delta s_i\}$.

2. 对弧长的曲线积分的性质

等式性质：

性质1: $\int_L 1ds=l$, 其中l是曲线L的长度；

性质2: $\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$;

性质3: $\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds$, 其中$L$由$L_1$和$L_2$组成.

不等式性质：

性质1: 设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$;

性质2: $\left|\int_L f(x,y)ds\right|\le\int_L|f(x,y)|ds$;

性质3: 设$f(x,y)$在L上有最小值m与最大值M, 则$ml\le\int_L f(x,y)ds\le Ml$.

中值定理： 设$f(x,y)$在L上连续, 则存在$(\xi,\eta)\in L$, 使$\int_L f(x,y)ds=f(\xi,\eta)l$, 其中$l$是曲线$L$的长度.

二、对弧长的曲线积分的对称性

1.普通对称性

(1) 设L关于y轴对称, L_1是L在y轴右侧的曲线, 则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & \text{若}f(x,y)\text{对}x\text{是奇函数}\\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, & \text{若}f(x,y)\text{对}x\text{是偶函数}\end{cases};$$

(2) 设L关于x轴对称, L_1是L在x轴上侧的曲线, 则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & \text{若}f(x,y)\text{对}y\text{是奇函数}\\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, & \text{若}f(x,y)\text{对}y\text{是偶函数}\end{cases}.$$

2.轮换对称性

若对调x,y曲线L不变, 则$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$.

三、对弧长的曲线积分的计算法

设曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}$,$\alpha \le t \le \beta$,则$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt$.

[例1]计算$\int_L \sqrt{y}ds$,其中L是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$与点$B(1,1)$之间的一段弧.

[例2]计算$\int_L y^2 ds$,其中L是半径为R,中心角为2α之间的一段圆弧.

[例3]设L是椭圆:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长为$a$,则$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=$____.

[例4]设L是圆周:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$,其中$a>0$,求$\oint_L (x^2+y^2)ds$.

第二节　　对坐标的曲线积分

一、　对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 对坐标的曲线积分的定义

定义1: $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$,其中$\lambda=\max\{\Delta s_i\}$.

2. 对坐标的曲线积分的性质

对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与曲线L的方向有关,

即$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

二、对坐标的曲线积分的计算法

设有向曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}$,$t=\alpha$对应起点$A$,$t=\beta$对应终点$B$,则

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt$.

三、两类曲线积分的联系

$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$.

其中$\cos\alpha,\cos\beta$是有向曲线L在点(x,y)处切向量的方向余弦

[例1]计算$\int_L y^2dx$,其中L为：

⑴ 半径为a、圆心在原点、按逆时针方向绕行的上半圆周；

（2）从点$A(a,0)$沿x轴到点$B(-a,0)$的直线段.

[例2]计算$\int_L 2xydx+x^2dy$,其中L为：

⑴ 抛物线$y=x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧；

（2）抛物线$x=y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧；

（3）有向折线OAB,这里O,A,B分别是点$(0,0),(1,0),(1,1)$.

第三节　　格林公式及其应用

一、平面上的单连通区域与区域的正向边界

设D为平面区域,若D内任一闭曲线所围成的部分都属于D,则称D为平面单连通区域,否则称为复连通区域.对平面区域D, L是它的边界,规定L的正向如下：当观察者沿L的方向前进时,左手总落在区域D内.

二、格林公式

设闭区域D由分段光滑的取正向闭曲线L围成,函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数,

则$\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

[例1]计算$\oint_L x^2ydx-xy^2dy$,其中L为正向圆周$x^2+y^2=a^2$.

[例2]计算曲线积分$I=\int_L\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$,

其中$a,b>0$,L是由点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧.

[例3]计算曲线积分$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中$L$是一条不经过原点的闭曲线, 沿逆时针.

三、 平面上曲线积分与路径无关的条件

定义：设D为一平面区域,若对D内任意两点A,B及D内从A到B的任意两条曲线L_1,L_2,

恒有$\int_{L_1}Pdx+Qdy=\int_{L_2}Pdx+Qdy$,则称$\int_L Pdx+Qdy$在$D$内与路径无关,否则称与路径有关.

等价定义：设D为一平面区域,若对D内任意一条闭曲线C,

恒有$\oint_C Pdx+Qdy=0$,则称$\int_L Pdx+Qdy$在D内与路径无关,否则称与路径有关.

定理：设D是一个单连通区域,函数$P(x,y),Q(x,y)$在D内有连续一阶偏导数,

则曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$在D内与路径无关$\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$.

[例4] 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数,L是上半平面$y>0$内的有向分段光滑曲线,起点是(a,b),终点是(c,d),记

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy.$$

（1）证明曲线积分I与路径无关;

（2）当$ab=cd$时,求I的值.

四、 二元函数的全微分求积

定理: 设D是一个单连通区域,函数$P(x,y),Q(x,y)$在D内有连续一阶偏导数,则$Pdx+Qdy$在D内为某一函数$u(x,y)$的全微分（此时也称$u(x,y)$是$Pdx+Qdy$的原函数）

$$\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D.$$

[例5] 验证:$\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$在右半平面（$x>0$）内是某个函数的全微分,并求出这样的一个函数.

第四节　　对面积的曲面积分

一、　对面积的曲面积分的概念与性质

1. 对面积的曲面积分的定义

定义1: $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta S_i$,其中$\lambda=\max\{\Delta S_i\}$.

2. 对面积的曲面积分的性质（类比对弧长的曲线积分的性质）

二、对面积的曲面积分的对称性

1.普通对称性

设Σ关于yoz面对称,Σ_1是Σ在yoz面前侧的部分,则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\begin{cases}0, & \text{若} f(x,y,z)\text{对}x\text{是奇函数}\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & \text{若} f(x,y,z)\text{对}x\text{是偶函数}\end{cases};$$

对Σ关于xoz面或xoy面对称,有类似的结论.

2.轮换对称性

若对调x,y曲面Σ不变,则$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS$.

三、对面积的曲面积分的计算法

设曲面$\Sigma: z=z(x,y)$, D_{xy}是曲面Σ在xoy面上的投影区域, $z(x,y)$在D_{xy}上有连续的偏导数,

则$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy.$

[例1] 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$, 其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h(0<h<a)$截出的顶部.

[例2] 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma} xyzdS$, 其中$\Sigma$是由平面$x=0,y=0,z=0$及$x+y+z=1$所围成的整个边界曲面.

第五节　　对坐标的曲面积分

一、　对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 对坐标的曲面积分的定义

定义1: $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\tau_i)(\Delta S_i)_{xy}$, 其中$\lambda=\max\{\Delta S_i\}$.

2. 对坐标的曲面积分的性质

对坐标的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$与曲面$\Sigma$的侧有关,

即$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint\limits_{\Sigma^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$

二、对坐标的曲面积分的计算法

设有向曲面$\Sigma: z=z(x,y)$, D_{xy}是曲面Σ在xoy面上的投影区域, $z(x,y)$在D_{xy}上有连续的偏导数,

则$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy$.当曲面$\Sigma$取上侧时, 右端二重积分取"+".

[例1] 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}xyzdxdy$, 其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分.

三、两类曲面积分的联系

$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是有向曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处法向量的方向余弦

第六节　高斯公式　通量与散度

一、　高斯公式

设空间闭区域Ω由分片光滑的取外侧闭曲面Σ围成,函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续偏导数,则$\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$

[例1]计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$,其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在$x\ge 0, y\ge 0$的部分.

[例2]计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$,其中$\Sigma$是旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间部分的下侧.

二、通量与散度

设有向量场$A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$,

则向量场$A(x,y,z)$通过有向曲面Σ的通量$\Phi=\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$;

称$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$为散度,记为$divA(x,y,z)$.

第七节　斯托克斯公式　环流量与旋度

一、　斯托克斯公式

设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线,Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面,
Γ的方向与Σ的侧符合右手规则,函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$上有
一阶连续偏导数, 则$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$,

或$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

[例1]计算曲线积分$\oint_\Gamma zdx+xdy+ydz$,其中Γ为平面$x+y+z=1$被三个坐标面截成的三角形边界, 它的方向从z轴正向往负向看是逆时针.

二、环流量与旋度

设有向量场$A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$,
则向量场$A(x,y,z)$沿着有向闭曲线Γ的环流量$\Phi=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$;

称$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$为旋度, 记为$rotA(x,y,z)$.

第十二章　无穷级数（仅数一数三）

第一节　常数项级数的概念和性质

一、　常数项级数的概念及其敛散性

1.常数项级数的概念

定义1: 数列$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$的各项依次用加号连接起来的式子$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$,叫做（常数项）无穷级数,简称（常数项）级数, 记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$; 第$n$项$u_n$叫做一般项.

2.常数项级数的敛散性

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$n$项和$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的的部分和;

若部分和S_n有极限,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,且称$S$为该级数的和,

若部分和S_n没有极限, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

[例1]讨论等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$的敛散性.

[例2]证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A(\exists)$.

二、收敛级数的基本性质

性质1　如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛;

性质2　如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛;

注: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$发散;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$不一定发散.

性质3　去掉、加上或改变前有限项, 不影响级数的收敛性;

性质4　收敛级数任意加括号后所得的级数仍收敛;

注: 加括号后的级数收敛, 则去掉括号原来的级数不一定收敛；

加括号后的级数发散, 则去掉括号后原来的级数一定发散.

性质5 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$

注: $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不一定收敛;$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散.

第二节 常数项级数的审敛法

一、 正项级数及其审敛法

若$u_n\geq 0$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数.

定理1（收敛原则）: 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow$部分和数列$\{S_n\}$有上界.

定理2（比较判别法）: 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数,且$u_n\leq v_n$,则$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散}\end{cases}.$

定理3（比较判别法的极限形式）: 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}0\Rightarrow u_n\text{更小}\Rightarrow\begin{cases}\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛, 则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\ \text{若}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散, 则}\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散}\end{cases}\\ \infty\Rightarrow v_n\text{更小}\Rightarrow\begin{cases}\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛, 则}\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛}\\ \text{若}\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散, 则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\end{cases}\\ l\neq 0\Rightarrow u_n\text{与}v_n\text{同阶}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{与}\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{同敛散}\end{cases}$$

注: 1. 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n\begin{cases}|q|<1,\text{收敛}\\ |q|\geq 1,\text{发散}\end{cases}$;2. p−级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1,\text{收敛}\\ p\leq 1,\text{发散}\end{cases}$.

定理4（比值判别法）: 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1 & \Rightarrow\text{级数收敛}\\ >1(\text{或}+\infty) & \Rightarrow\text{级数发散}\\ =1 & \Rightarrow\text{法则失效}\end{cases}.$

定理5（根值判别法）: 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1 & \Rightarrow 级数收敛\\ >1(或+\infty) & \Rightarrow 级数发散\\ =1 & \Rightarrow 法则失效\end{cases}$

[例1]判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$的敛散性.

[例2]判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

[例3]判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$的敛散性.

[例4]设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛.

二、交错级数及其审敛法

若$u_n>0$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$为交错级数.

莱布尼茨判别法: 如果交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足:

1.$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；　2.$u_n\geq u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛.

[例5]判定交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$的敛散性.

[例6]判定交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-\ln n}$的敛散性.

三、任意项级数及其审敛法

若u_n任意，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数.

定义1: 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是任意项级数，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛；

定义2: 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是任意项级数，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

注：对于绝对收敛、条件收敛有以下基本结论

1. 若任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

2. 绝对收敛±绝对收敛$\Rightarrow$绝对收敛;绝对收敛±条件收敛$\Rightarrow$条件收敛；
条件收敛±条件收敛$\Rightarrow$收敛（可能绝对收敛,也可能条件收敛）.

[例7]判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$的收敛性.

[例8]设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$,问级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的收敛性如何？

第三节　幂级数

一、　函数项级数的概念

1.收敛点与发散点

对函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$首先是$u_n(x)$（$n=1,2,\cdots$）有共同定义域$I$.

若$x_0\in I$,常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛,则称$x_0$是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点,否则就是发散点；

所有收敛点的集合就是收敛域,所有发散点的集合就是发散域.

2.和函数

对函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在其收敛域内有和,其值与收敛点$x$有关,记作$S(x)$,

称$S(x)$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数,即$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$（$x$属于收敛域）.

二、幂级数及其收敛性

每一项都是幂函数的级数$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$称为幂级数.

阿贝尔定理　若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_1\neq0$处收敛,则满足$|x|<|x_1|$的一切$x$,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$都绝对收敛;

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_2$处发散,则于满足$|x|>|x_2|$的一切$x$,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$都发散.

推论 任何幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R$都是客观存在的，且

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$仅在$x=0$处收敛$\Rightarrow R=0$;

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在整个数轴上都收敛$\Rightarrow R=+\infty$;

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$|x|<a$时收敛，在$|x|>a$时发散$\Rightarrow R=a$.

定理2 对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，收敛半径为$R=\dfrac{1}{\rho}$.

[例1]求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$的收敛半径及收敛域.

[例2]求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径.

[例3]求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$的收敛域.

三、幂级数和函数的分析性质

性质1：（连续性）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续；

性质2：（可积性）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上可积，

且有逐项积分公式$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in I$;

积分后得到的幂级数和原来的幂级数有相同的收敛半径.

性质3：（可导性）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内可导，

且有逐项求导公式$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},|x|<R$.

求导后得到的幂级数和原来的幂级数有相同的收敛半径.

[例4]求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的和函数.

第四节　函数展开成幂级数

给定$f(x)$,若能找到一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,使该幂级数在其收敛区间$I$上的和函数就是$f(x)$,即$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, x\in I$,则称函数$f(x)$在区间$I$上能展开为$x$的幂级数,并称$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$为$f(x)$在$x=0$处的幂级数（麦克劳林）展开式.

定理：函数$f(x)$在区间I上能展开为x的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的充分必要条件是

$f(x)$在I上任意阶可导,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$,而此时系数$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}, n=0,1,2,\cdots$.

注：几个重要函数的麦克劳林展开式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<+\infty;$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<+\infty;$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},-1<x\le 1;$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,-1<x<1.$$

[例1]把函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$(x-1)$的幂级数.

第七、八节　　傅里叶级数（仅数一）

一、　函数的傅里叶系数与傅里叶级数

设$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上以$2l$为周期,在$\left[-l,l\right]$上可积, 则称

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\quad\left(n=0,1,2,\cdots\right)$,

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad\left(n=1,2,\cdots\right)$,

为$f\left(x\right)$的以$2l$为周期的傅里叶系数,

相应的级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$称为$f\left(x\right)$的以$2l$为周期的傅里叶级数，

记作$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$.

二、狄利克雷收敛定理

设$f\left(x\right)$是周期为$2l$的函数,若$f\left(x\right)$在$\left[-l,l\right]$上满足:

⑴ 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 至多只有有限个极值点.

则$f\left(x\right)$的傅里叶级数处处收敛,且

当x是$f\left(x\right)$的连续点时,级数收敛于$f\left(x\right)$;

当x是$f\left(x\right)$的间断点时,级数收敛于$\frac{f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)}{2}$;

当x是$f\left(x\right)$的端点时,级数收敛于$\frac{f\left(-x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}$.

$\left[\text{例}1\right]$设$f\left(x\right)$是周期为2π的周期函数,它在$\left[-\pi,\pi\right)$上的表达式为$f\left(x\right)=\begin{cases}x,-\pi\le x<0\\0,\quad 0\le x<\pi\end{cases}$,

将$f\left(x\right)$展开称傅里叶级数,并作出级数的和函数的图形.

二、 正弦级数和余弦级数

设$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上以$2l$为周期,在$\left[-l,l\right]$上可积,

（1）若$f\left(x\right)$是奇函数, 则此时傅里叶系数

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=0\quad\left(n=0,1,2,\cdots\right)$,

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad\left(n=1,2,\cdots\right)$,

相应此时的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数.

（2）若$f\left(x\right)$是偶函数，则此时傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\quad\left(n=0,1,2,\cdots\right),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0\quad\left(n=1,2,\cdots\right),$$

相应此时的傅里叶级数是只含有常数项和余弦项的余弦级数.

[例2]设$f\left(x\right)$是周期为2π的周期函数，它在$\left[-\pi,\pi\right)$上的表达式为$f\left(x\right)=x$，将$f\left(x\right)$展开成傅里叶级数，并作出级数的和函数的图形.