



扫码听课

# 【爱启航】2020 考研数学基础班讲义

主讲：张宇



: 张宇考研数学



: 宇哥考研

【例题 6】[取自《题源 1000 题》数一、数二、数三 P3, 题 1.15]

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln \left( \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right)}$ .

【例题 7】[取自《题源 1000 题》数一、数二、数三 P4, 题 1.17]

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ .

## 泰勒公式

### 8 种展开式

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数二、数三 P4, 题 1.20]

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) \sin \frac{x^2}{2}}$$

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数二、数三 P4, 题 1.21]

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$$

## 无穷小比肩及反求问题

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P5, 题 1.50, 数二 P5 题 1.51]

当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小量中, 与  $x$  同阶的无穷小是 ( )

(A)  $\sqrt{1+x}-1$  (B)  $\ln(1+x)-x$

(C)  $\cos(\sin x)-1$  (D)  $x^x-1$

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P6, 题 1.53, 数二 P5 题 1.54]

当  $x \rightarrow 0^+$  时, 试比较无穷小量  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\gamma$  三者之间的阶, 其中

$$\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt.$$

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P6, 题 1.63, 数二 P6 题 1.64]

半径分别为  $R, r (R > r > 0)$  的两个圆相切于坐标轴原点, 如图 1-1-1 所示.

- (1) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 若线段长  $MM_1$  与  $x^k$  同阶, 求  $k$ ;  
 (2) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 若  $\angle MOM_1$  与  $x^c$  同阶, 求  $c$ .

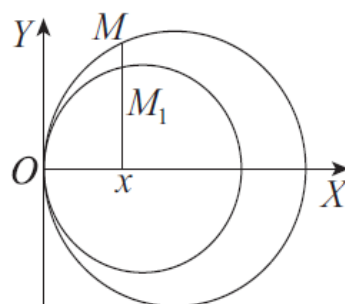


图 1-1-1

### 三、函数极限存在性

#### 1. 具体型：洛必达失效夹逼准则

【例】记  $S(x) = \int_0^x |\sin t| dt$

- (1) 证明当  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时

$$2n \leq S(x) \leq 2(n+1)$$

- (2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$

## 2.抽象型——单调有界准则

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P5, 题 1.46, 数二 P5 题 1.47]

注：本题书上只有第二问，第一问是宇哥临时出的题目。

设  $x \geq 0$ ,  $f(x)$  满足  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ ,  $f(0) = 1$ . 证明

$$(1) f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad x \geq 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 存在且其值小于 } 1 + \frac{\pi}{2}$$

## 四. 函数极限的应用-连续与间断

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P9, 题 1.92, 数二 P9 题 1.97]

当  $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$  时, 确定函数  $f(x) = \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2 - 1)}$  的间断点, 并判定其类型.

## 五. 数列极限的定义及使用

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P7, 题 1.72, 数二 P7 题 1.73]

设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 则 ( )

- (A)  $\{a_n\}$  有界  
(B)  $\{a_n\}$  不存在极限  
(C)  $\{a_n\}$  自某项起同号  
(D)  $\{a_n\}$  自某项起单调

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P7, 题 1.74, 数二 P7 题 1.76]

已知数列  $\{a_n\}$  单调, 下列结论正确的是 ( )

- (A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{a_n} - 1)$  存在  
(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a_n^2}$  存在  
(C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n$  存在  
(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - a_n^2}$  存在

## 六. 数列极限的存在性与计算

### 1. 归结原则

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P7, 题 1.64, 数二 P7 题 1.65]

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{n} \right).$$

### 2. 直接计算法

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P7, 题 1.76, 数二 P8 题 1.78]

设  $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 + a_n (n = 1, 2, \dots)$ , 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \right).$$



### 3. 定义法

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P8, 题 1.78, 数二 P8 题 1.80]

设  $x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}} (n = 2, 3, \dots)$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限.

### 4. 单调准则

### 5. 夹逼准则

#### 1) 用导数综合

【例题】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P8, 题 1.83, 数二 P5 题 1.47]

(1) 设  $f(x) = x + \ln(2 - x)$ , 求  $f(x)$  的最大值

(2) 设  $x_1 = \ln 2, x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \ln(2 - x_i), n = 2, 3, \dots$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求其极限值.

## 2) 用积分综合

【例 2】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P8, 题 1.84, 数二 P8 题 1.86]

设  $x_1 = 1, x_n = \int_0^1 \min\{x, x_{n-1}\} dx, n = 2, 3, \dots$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求其极值

## 课后作业

数一、数三 1.3 1.13 1.16 1.22 1.26 1.27 1.29 1.39 1.42 1.43 1.44 1.45  
1.49 1.52 1.58 1.63 1.64 1.75-1.91 1.94 1.97 1.100

数二 1.3 1.13 1.16 1.22 1.26 1.27 1.29 1.40 1.43 1.44 1.45 1.46 1.50  
1.53 1.59 1.64 1.65 1.77-1.94 1.98 1.101 1.104