第三讲 一元函数积分学

3.定积分定义

【例题 7】[取自《题源 1000 题》数一 P22 题 3.15,数三 P20 题 3.15,数二 P23 题 3.16]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=\_\_\_\_\_\_.$$

【例题 8】[取自《题源 1000 题》数一 P22 题 3.19,数三 P20 题 3.19,数二 P24 题 3.20]

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\_\_\_\_\_\_.$$

【例题 9】[取自《题源 1000 题》数一 P23 题 3.21,数三 P21 题 3.21,数二 P24 题 3.22]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\_\_\_\_\_\_.$$

4. 反常积分的判敛

【例题 31】[取自《题源 1000 题》数一 P28 题 3.96，数三 P26 题 3.96，数二 P29 题 3.101]

设 $a,b>0$，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(2\,020+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）.

(A) $a<1$ 且 $b>1$　　(B) $a>1$ 且 $b>1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$

【例题 32】[取自《题源 1000 题》数一 P28 题 3.97，数三 P26 题 3.97，数二 P29 题 3.102]

设 $a>b>0$，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）.

(A) $a>1$ 且 $b>1$　　(B) $a>1$ 且 $b<1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$　　(D) $a<1$ 且 $b<1$

二、计算

1. 基本积分表

2. 不定积分的计算

(1) 凑微分法

(2) 换元法

(3) 分部积分法

【例题 10】[取自《题源 1000 题》数一 P23 题 3.24，数三 P21 题 3.24，数二 P24 题 3.27]

$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$ ________.

【例题 11】[取自《题源 1000 题》数一 P23 题 3.28,数三 P21 题 3.28,数二 P24 题 3.31]

求$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}dx$.

【例题 12】[取自《题源 1000 题》数一 P23 题 3.34,数三 P21 题 3.34,数二 P25 题 3.37]

设$\frac{\ln x}{x}$是$f(x)$的一个原函数,则$\int_1^e xf'(x)dx=$ ________.

【例题 13】[取自《题源 1000 题》数一 P24 题 3.39,数三 P22 题 3.39,数二 P25 题 3.42]

设$f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}dt$,求$\int_0^1(x-1)^2f(x)dx$.

换元法

【例题 14】[取自《题源 1000 题》数一 P24 题 3.41,数三 P22 题 3.41,数二 P25 题 3.44]

求$\int_0^1\arcsin\sqrt[3]{x}dx$.

（4）区间再现公式

（5）华氏公式

【例题 15】[取自《题源 1000 题》数一 P24 题 3.49，数三 P22 题 3.49，数二 P25 题 3.52]

求$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2^{x-1}}{2^x+1}\cos^4 2x\,\mathrm{d}x$.

【例题 16】[取自《题源 1000 题》数一 P24 题 3.52，数三 P22 题 3.52，数二 P26 题 3.55]

求$\int_0^2 [(x-1)^3+2x]\sqrt{1-\cos 2\pi x}\,\mathrm{d}x$.

有理函数

【例题 18】[取自《题源 1000 题》数一 P25 题 3.59，数三 P23 题 3.59，数二 P26 题 3.62]

求$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$.

【例题 19】[取自《题源 1000 题》数一 P25 题 3.62，数三 P23 题 3.62，数二 P26 题 3.65]

求$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$.

【例题 20】[取自《题源 1000 题》数一 P25 题 3.63，数三 P23 题 3.63，数二 P26 题 3.66]

求$\int \frac{2x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

【例题 21】[取自《题源 1000 题》数一 P25 题 3.67，数三 P23 题 3.67，数二 P26 题 3.70]

$\int_{-2}^{2}\max\left\{x^2, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}\mathrm{d}x =$ ________.

变限积分求导

1. 直接求导

【例题 22】[取自《题源 1000 题》数一 P26 题 3.77，数三 P24 题 3.77，数二 P27 题 3.80]

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$. 则方程$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在(a,b)内的根有(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D) 无穷多个

【例题 23】[取自《题源 1000 题》数一 P26 题 3.80，数三 P24 题 3.80，数二 P28 题 3.83]

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又 $g(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & x<0, \\ \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}, & x>0, \end{cases}$ 求

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)(1+x)^{-\frac{x+1}{x}}+g(x)\int_0^{2x}\cos t^2\,\mathrm{d}t}{xg(x)}.$$

2.拆分后再求导

【例题 24】[取自《题源 1000 题》数一 P26 题 3.81，数三 P24 题 3.81，数二 P28 题 3.84]

设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi(x)>0$，则函数 $y=\Phi(x)=\int_a^b |x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t$（　　）.

(A) 在 (a,b) 内的图形为凸　　(B) 在 (a,b) 内的图形为凹

(C) 在 (a,b) 内有拐点　　(D) 在 (a,b) 内有间断点

3.换元后再求导

【例题 25】[取自《题源 1000 题》数一 P27 题 3.84，数三 P25 题 3.84，数二 P28 题 3.87]

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x)\mathrm{d}t=x^2\ln(1+x)$.求 $f(x)$.

【例题 26】[取自《题源 1000 题》数一 P27 题 3.86，数三 P25 题 3.86，数二 P28 题 3.89]

设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【例题 27】[取自《题源 1000 题》数一 P27 题 3.89，数三 P25 题 3.89，数二 P28 题 3.92]

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{b_n}=$（ ）.

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) ∞

【例题 30】[取自《题源 1000 题》数一 P27 题 3.95，数三 P25 题 3.95，数二 P29 题 3.98]

设 $x\geqslant 0$，记 x 到 $2k$ 的最小距离为 $f(x)$，$k=0,1,2,\cdots$.

(1) 证明 $f(x)$ 以 2 为周期；

(2) 求 $\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x$ 的值 $(n=1,2,\cdots)$.

三、应用

1.几何应用

2.物理/经济应用

3.积分等式与不等式

【例题 37】[取自《题源 1000 题》数一 P29 题 3.111,数三 P27 题 3.111,数二 P31 题 3.117]

设 $a>0$,$0<b<1$,由曲线 $y=e^x$,直线 $y=1$ 与直线 $x=ab$ 所围平面区域的面积记为 S_1,由曲线 $y=e^x$,直线 $x=ab$ 与直线 $y=e^a$ 所围平面区域的面积记为 S_2,若 $S_1=S_2$,求 $\lim\limits_{a\to 0^+} b$.

【例题 38】[取自《题源 1000 题》数一 P29 题 3.112,数三 P27 题 3.112,数二 P31 题 3.118]

设 O 为坐标原点,$A(1,0)$,$B(1,1)$,$C(0,1)$,记边长为 1 的正方形 $OABC$ 内位于曲线 $y=x^2+t$(t 为实数)下方图形的面积为 $S(t)$.

(1) 求 $S(t)$ 的表达式;

(2) $S(t)$ 在 $[-1,1]$ 上是否满足拉格朗日中值定理的条件,说明理由.

【例题 39】[取自《题源 1000 题》数一 P29 题 3.113,数三 P27 题 3.113,数二 P31 题 3.119]

设曲线方程为 $y=e^{-x}(x\geqslant 0)$.

(1) 曲线 $y=e^{-x}$,x 轴,y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周,得旋转体,求此旋转体体积 $V(\xi)$,以及满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a 值;

(2) 在此曲线上找一点,使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大,并求出该面积.

【例题 40】[取自《题源 1000 题》数一 P30 题 3.132，数二 P32 题 3.138]

求曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,dt$ 的全长.

【例题 41】[取自《题源 1000 题》数一 P30 题 3.133，数二 P32 题 3.139]

当 $x\geqslant 0$ 时，曲线 $y=\frac{1}{4}\int_0^2 x\sqrt{12-x^2t^2}\,dt$ 的全长为________.

【例题 43】[取自《题源 1000 题》数一 P31 题 3.138，数二 P33 题 3.143]

某城市的人口密度近似为 $p(r)=\frac{4}{r^2+20}$，$p(r)$ 表示距市中心 r km 区域的人口数，单位为每平方千米 10 万人.

(1) 试求距市中心 2 km 区域内的人口数；

(2) 若人口密度近似为 $p(r)=1.2e^{-0.2r}$ 单位不变，试求距市中心 2 km 区域内的人口数.

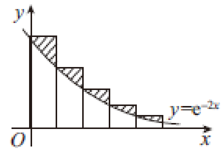
【例题 48】[取自《题源 1000 题》数一 P32 题 3.147，数二 P34 题 3.154，数三 P28 题 3.124]

设 $f(x)$ 二阶可导，$f''(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 为连续函数，若 $a>0$，求证：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[g(x)]dx\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a g(x)dx\right].$$

【例题 49】[取自《题源 1000 题》数一 P32 题 3.150，数二 P34 题 3.159，数三 P29 题 3.127]

当 $x \geqslant 0$ 时，在曲线 $y = e^{-2x}$ 上面作一个台阶曲线，台阶的宽度皆为 1(如图). 求图中无穷多个阴影部分的面积之和 S.



【例题 50】[取自《题源 1000 题》数一 P32 题 3.151，数二 P34 题 3.160，数三 P29 题 3.128]

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}}{\ln n}$.

第四讲 多元函数微分学

一. 概念

1 极限存在

2 连续

3 导数存在

4 可微

【例题 1】[取自《题源 1000 题》数一 P33 题 4.1,数二 P35 题 4.1,数三 P30 题 4.1]

设 $f(x,y)=e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}]$,则在点 $(0,1)$ 处的两个偏导数 $f'_x(0,1)$ 和 $f'_y(0,1)$ 的情况为(　　).

(A) 两个偏导数均不存在　　(B) $f'_x(0,1)$ 不存在,$f'_y(0,1)=\frac{4}{3}e$

(C) $f'_x(0,1)=\frac{e}{3}$,$f'_y(0,1)=\frac{4}{3}e$　　(D) $f'_x(0,1)=\frac{e}{3}$,$f'_y(0,1)$ 不存在

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一 P33 题 4.4(1),数二 P35 题 4.4(1),数三 P30 题 4.4(1)]

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

讨论它们在点 $(0,0)$ 处的

① 偏导数的存在性;

② 函数的连续性;

③ 方向导数的存在性;

④ 函数的可微性.

5 导数连续性

二. 计算

1 复合求导

链式求导规则

【例题 5】[取自《题源 1000 题》数一 P34 题 4.12，数二 P36 题 4.10，数三 P31 题 4.10]

设 $F(u,v)$ 对其变元 u,v 具有二阶连续偏导数，并设 $z=F\left(\frac{y}{x},x^2+y^2\right)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

________.

2 隐函数求导

设$z=z(x,y)$由方程$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$确定

F有连续偏导数，求$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

三. 多元函数极最值问题

无条件极值

【例题 12】[取自《题源 1000 题》数一 P36 题 4.41，数二 P38 题 4.39，数三 P33 题 4.37]

设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+32=0$$

确定，讨论函数 $z(x,y)$ 的极大值与极小值.

条件最值（拉格朗日乘数法）

【例题 13】[取自《题源 1000 题》数一 P37 题 4.43，数二 P39 题 4.41 数三 P33 题 4.39]

已知矩形的周长为 $2p$，将它绕其中一边旋转一周而构成一旋转体(圆柱体)，求该圆柱体的半径与高各为多少时，该圆柱体体积最大?

第五讲 二重积分

一. 概念

1 对比

2 对称性

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一 P38 题 5.2,数二 P40 题 5.2,数三 P35 题 5.2]

计算$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

二. 计算

1 直角系

2 极坐标系

【例题 10】[取自《题源 1000 题》数一 P41 题 5.45,数二 P43 题 5.48,数三 P38 题 5.45]

已知 $f(t)=\iint\limits_{D(t):x^2+y^2\leqslant t^2}(\mathrm{e}^{x^2+y^2}-ky^2)\mathrm{d}\sigma$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 内是单调增加函数,k 为常数,求 k 的最大取值范围.

第六讲　微分方程

★ 综述

一、一阶微分方程的求解

若是"y'"或 $\mathrm{d}y=\cdots\mathrm{d}x$,则

1° 能写成 $y'=f(x)\cdot g(y)\Rightarrow$ 分离

2° 能写成 $y'=f(ax+by+c)\Rightarrow$

令 $u=ax+by+c\Rightarrow u'=a+bf(u)$

【例题 1】[取自《题源 1000 题》数一 P52 题 8.3,数三 P39 题 6.3,数二 P44 题 6.3]

已知曲线 $y=y(x)$ 经过点$(1,\mathrm{e}^{-1})$,且在点(x,y)处的切线在 y 轴上的截距为 xy,求该曲线方程的表达式.

3° 能写成 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$或$f\left(\dfrac{x}{y}\right)\Rightarrow$

令$\dfrac{y}{x}=u$ 或$\dfrac{x}{y}=u$

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一 P52 题 8.6,数三 P39 题 6.6,数二 P44 题 6.6]

求微分方程$(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

4° 能写成$\begin{cases}y'+p(x)y=q(x)\Rightarrow \text{公式法}\\ y'+p(x)y=q(x)\cdot y^n(n\neq 0,1)\end{cases}$

$\Rightarrow$ 令 $z=y^{1-n}\Rightarrow$ 公式法

【例题 3】[取自《题源 1000 题》数一 P52 题 8.7，数三 P39 题 6.7，数二 P44 题 6.7]

求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

【例题 4】[取自《题源 1000 题》数一 P52 题 8.17]

求微分方程 $y'\cos y = (1 + \cos x\sin y)\sin y$ 的通解.

第七讲　无穷级数

★ 综述

1. 数项级数的判敛

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

② 判敛法

1° 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geqslant 0$.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界.

2) 比较法 $u_n \leq (\geqslant) v_n$.

3) 比较法的极限形式, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \begin{cases} 0, \\ C \neq 0, \text{同敛散}. \\ \infty, \end{cases}$

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一 P55 题 9.4，数三 P42 题 7.4]

判别下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2} \mathrm{d}x$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

【例题 4】[取自《题源 1000 题》数一 P56 题 9.9，数三 P43 题 7.9]

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数. 试证：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛，u_n 单调减少，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛；

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$ 收敛.

3.展开问题

(1)$f(x)=\sum ?$

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum ?$

(3)$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\sum ?$

1)用先导后积的牛顿-莱布尼茨公式

2)展开后积分即可

3)展开后求导即可

4.求和问题

【例题11】[取自《题源1000题》数一P59题9.43,数三P46题7.43]

设函数 $f(x)=\dfrac{7+2x}{2-x-x^2}$,当 $-1<x<1$ 时,其幂级数展开式为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

(1)求 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$;

(2)求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{(a_n-2)(a_{n+1}-2)}$ 的和.

【例题12】[取自《题源1000题》数一P59题9.50,数三P46题7.50]

求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-2}}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域及其和函数.

第八讲　多元函数积分学(仅数学一)

★ 综述

一、预备知识

二、三重积分

① 概念与对称性

② 计算

1) 直角坐标系$\begin{cases}\text{先一后二法(投影穿线法)}\\\text{先二后一法(定限截面法)}\end{cases}$

2) 柱面坐标系 = 极坐标下二重积分与定积分

3) 球面坐标系

【注】1) 关于积分区域 Ω.

球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x-a)^2+(y-b)^2+(c-z)^2=1$ 等.

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

平面 $ax+by+cz+D=0$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $z=a$, $x=b$, $y=c$ 等

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=z^2$ 等

旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$ 等

柱面: $x^2+y^2=a^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ 等.

旋转曲面方程如 $\begin{cases}y^2=z\\x=0\end{cases}$, $r=a(1+\cos\theta)$ 等.

含其他量(动区域) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$, $a>0$

2) 关于被积函数 $f(x,y,z)$(一般简单)

3) 换元法(补充)

【例题 1】[取自《题源 1000 题》数一 P45 题 7.3]

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

【例题 3】[取自《题源 1000 题》数一 P46 题 7.12]

设 $f(x)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 且满足

$$f(t)=\iiint\limits_{\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v+t^3,$$

求 $f(1)$.

三、第一型曲线积分

① 概念与对称性

1）比大小

2）化简计算

② 计算 —— 一投二代三计算 ⇒ 化成定积分

③ 应用 —— 曲杆(物质曲线）的

1）弧长

2）总质量

3）质心坐标

4）转动惯量

【例题 4】[取自《题源 1000 题》数一 P46 题 7.14]

计算 $I=\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$ 及直线 $y=x$ 和 $y=0$ 在第一象限内所围成的区域的边界.

四、第一型曲面积分

① 概念与对称性

② 计算 —— 一投二代三计算 ⇒ 化成二重积分

【注】1）关于积分曲面 $\sum$，见三重积分 ② 的注 1)，与那里相同. 只不过三重积分的 Ω 是由 $\sum$ 围成的.

2）常与垂直关系、投影、旋转、距离、切平面、轨迹等结合出题.

③ 应用 —— 曲面薄板(物质曲面)

1）面积

2）总质量

3）质心坐标

4）转动惯量

【例题 6】[取自《题源 1000 题》数一 P47 题 7.27]

设 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分，计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma(x+y+z)dS$.

五、第二型曲线积分

① 概念 —— 做功

$$\begin{cases} 平面：\int_L \{P,Q\}\cdot\{dx,dy\} \\ 空间：\int_\Gamma \{P,Q,R\}\cdot\{dx,dy,dz\} \end{cases}$$

② 计算

1）基本方法 —— 一投二代三计算

2）格林公式.

1° 封闭曲线且无奇点.

2° 封闭曲线但有奇点. 若奇点外$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径.

3° 非封闭曲线，若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径.

4° 非封闭曲线，可补线使其封闭(加线减线).

5° 积分与路径无关.

3）两类曲线积分的关系

4）空间问题

1° 一投二代三计算

2° 封闭曲线且在同一平面上，可用 stokes 公式

【例题 9】[取自《题源 1000 题》数一 P48 题 7.34]

计算曲线积分

$$\int_L\left(\frac{xy^2}{\sqrt{4+x^2y^2}}+\frac{1}{\pi}x\right)dx+\left(\frac{x^2y}{\sqrt{4+x^2y^2}}-x+y\right)dy,$$

其中 L 是摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$ 上自 $O(0,0)$ 至 $A(2\pi a,0)$ 的一段有向曲线弧.

【例题 14】[取自《题源 1000 题》数一 P50 题 7.57]

计算曲线积分 $I=\oint_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$，其中曲线 L 为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=2x\end{cases}(z\geqslant 0)$，从 x 轴的正向往负向看去，取逆时针方向.

六、第二型曲面积分

1. 概念 —— 通量

$$\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$$

2. 计算

1）基本方法 —— 一投二代三计算（逐个计算）

【注】投影时 $\begin{cases}1^\circ\ \text{不能重合}\\ 2^\circ\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases}$ 锐正钝负.

2）统一转换

3）高斯公式

1° 封闭曲面且无奇点，直接用高斯.

2° 封闭曲面但有奇点. 若奇点外 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$，则换个面积分.

3° 非封闭曲面，若 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$ 可换个面积分.

4° 非封闭曲面，补面使其封闭（加面减面），用高斯.

4）两类曲面积分的关系.

【例题 12】[取自《题源 1000 题》数一 P49 题 7.50]

设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$，取上侧，试求曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}}.$$