



扫码听课

【爱启航】2020 考研数学基础班讲义

主讲：张宇



: 张宇考研数学



: 宇哥考研

一、导数定义

1. 一点的导数问题

例 1 [取自《题源 1000 题》数一、数二 P11, 题 2.1]

设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, $f'(1) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^{10} - 1}$.

例 2 [取自《题源 1000 题》数一、数二 P11, 题 2.5]

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意的 $x, x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), f(x) = 1 + xg(x),$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可导.

2. 分段函数

例 3 设 $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ ，求 $f'(0), f'(1)$ 。

3. 四则运算

例 4 [取自《题源 1000 题》数一、数二 P12, 题 2.15]

若 $f(x) = e^{10x}x(x+1)(x+2)\cdots(x+10)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 5 [取自《题源 1000 题》数一、数二 P12, 题 2.18]

已知 $f(x) = \sqrt{1+x} + \arcsin \frac{1-x}{1+x^2}$, 求 $f'(1)$ 。

例 6 [取自《高数 18 讲》数一 P68, 例 3.7]

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \sin x, \text{ 求 } f'(0)$$

二、导数计算

1. 基本求导公式

2. 符号写法

例 1 [取自《题源 1000 题》数一 P13, 题 2.24, 数二 P13, 题 2.25]

$$\text{设 } y = e^{x^2}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d(x^2)}, \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

【注例】 $y = f(x), f'(x_0) = \frac{1}{2}$. $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分 dy 与 Δx 是

()

(A) 等阶无穷小 (B) 同阶非等价 (C) dy 比 Δx 高阶 (D) dy 比 Δx 低阶

3.求导

(3) 复合函数求导

【例 2】 [取自《题源 1000 题》数一 P13, 题 2.28, 数二 P13, 题 2.29]

设函数 $f(x) = x^3 + 2x - 4, g(x) = f[f(x)]$, 则 $g'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 隐函数求导

【例 3】 [取自《题源 1000 题》数一 P13, 题 2.32, 数二 P13, 题 2.33]

已知可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$ 所确定, 求 $y''(0)$.

(5) 参数函数求导

【例 4】 [取自《题源 1000 题》数一 P13, 题 2.33, 数二 P13, 题 2.34]

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t \end{cases}$ 所确定, 求:

(1) $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{dy}{dx}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{d^2y}{dx^2}$.

(6) 分段函数求导

【例 5】设 $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ ，求 $f'(x)$

(7) 反函数求导

【例 6】[取自《题源 1000 题》数一 P14, 题 2.39, 数二 P14, 题 2.41]

设 $y = f(x)$ 与 $x = g(x)$ 互为反函数， $y = f(x)$ 可导，且 $f'(x) \neq 0, f(3) = 5$,

$$h(x) = f\left[\frac{1}{3}g^2(x^2 + 3x + 1)\right]$$

求 $h'(1)$.

(8) 对数求导法

【例 7】 [取自《题源 1000 题》数一 P14, 题 2.40, 数二 P14, 题 2.43]

设 $y = [(1+x)(3+x)^9]^{\frac{1}{2}}(2+x)^4$, 求 $y'(0)$.

4. 高阶导数求导

(1) 归纳法

【例 8】 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$

【注】：设 $z = \frac{y^2}{x}$ ，则 $\frac{\partial^{10} z}{\partial x^{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 莱布尼茨公式

【例】 $y = \cos x$ ，求 $y^{(4)}$

【例】 设 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^n \cos \frac{\pi x^2}{16}$ 则 $f^{(n)}(2) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 展开式

【例】设 $f(x) = \frac{x}{1-2x^4}$ ，则 $f^{(101)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

【注】：设 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 则 $y'''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

设 $y = \arctan x$ ，则 $y^{(4)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

三. 导数的几何应用

(1) 曲线与切线交点问题

【例题 1】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P15 题 2.58，数二 P15 题 2.63]

设曲线 $f(x) = x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n, 0)$, $n = 1, 2, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

(2) 曲线交角问题

【例题 2】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P15 题 2.63，数二 P16 题 2.68]

求双曲线 $y_1 = \frac{1}{x}$ 与抛物线 $y_2 = \sqrt{x}$ 的交角.

(3) 极值 单调

【例题 3】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P16 题 2.71，数二 P16 题 2.77]

求函数 $f(x) = |x| e^{-|x-1|}$ 的极值.

【例】设 $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$, 求 $f'(x)$

(4) 拐点，凹凸性

【例题 4】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P16 题 2.75，数二 P17 题 2.81]

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如

图 1-2-1 所示，并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 亦存在，则函数 $f(x)$ 及曲线 $y = f(x)$ ().

- (A) 只有 1 个极大值点与 1 个拐点
- (B) 有 1 个极小值点, 1 个极大值点与 1 个拐点
- (C) 有 1 个极小值点, 1 个极大值点与 2 个拐点
- (D) 有 1 个极小值点, 1 个极大值点与 3 个拐点

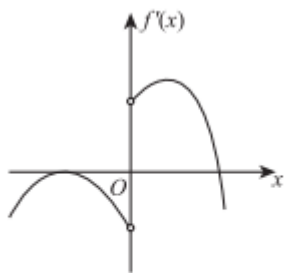


图 1-2-1

(5) 渐近线

【例题 5】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P16，数二]

求下列各题

(1) $x > 0, y = x \sin \frac{1}{x}$, 求其水平渐近线

(2) $x > 0, y = x + \sin \frac{1}{x}$, 求其斜渐近线

(3) $x > 0, y = \ln \left(e - \frac{1}{x} \right)$, 求其铅垂渐近线

(6) 最值 (值域)

【例题 6】[取自《题源 1000 题》数一、数三 P17 题 2.84，数二 P17 题 2.90]

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \cos \frac{x}{n} + \cos \frac{2x}{n} + \cdots + \cos \frac{n-1}{n}x \right), & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f'(0)$;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的最大值.

【作业】

数一：2.3、2.7、2.9、2.11、2.17、2.18、2.20、2.23、2.24、2.25、2.26、2.30、
2.37、2.39、2.40、2.43、2.46、2.48、2.50、2.52、2.54、2.55、2.58、2.60、2.63、2.65、
2.68、2.69、2.71、2.72、2.74、2.75、2.78、2.79、2.84、2.86、2.87、2.90、2.91、2.92.

数二：2.3、2.7、2.9、2.11、2.17、2.18、2.20、2.24、2.25、2.27、2.31、2.41、
2.43、2.47、2.49、2.50、2.52、2.55、2.56、2.59、2.60、2.63、2.65、2.68、2.69、2.71、
2.74、2.77、2.78、2.81、2.84、2.85、2.90、2.92、2.97、2.99、2.101.

数三：2.3、2.7、2.9、2.11、2.17、2.18、2.20、2.23、2.24、2.226、2.28、2.30、
2.32、2.33、2.34、2.36、2.37、2.38、2.40、2.41、2.43、2.45、2.46、2.51、2.54、2.56、
2.62、2.64、2.65、2.68、2.72、2.73.